

**UNIVERSITE SAAD DAHLEB DE BLIDA**

**Faculté des Sciences**

Département de Mathématiques

**THESE DE DOCTORAT**  
en mathématiques

Spécialité : RECHERCHE OPERATIONNELLE

**ETUDE DE LA b-COLORATION DANS LES GRAPHS :**  
**GRAPHS EXTREMAUX ET GRAPHS CRITIQUES**

Par

**Noureddine IKHLEF ESCHOUF**

Devant le jury composé de :

M. CHELLALI	Professeur, USD, Blida	Président
M. BLIDIA	Professeur, USD, Blida	Directeur de Thèse
M. ABBAS	Professeur, USTHB, Alger	Examineur
A. BERRACHEDI	Professeur, USTHB, Alger	Examineur
H. KHEDDOUCI	Professeur, U. Claude Bernard, Lyon, France	Examineur
Z. ZEMIR	Maître de Conférences, USD, Blida	Examinatrice invitée

Blida, Avril 2012

# RÉSUMÉ

Le travail de cette thèse porte sur l'étude de la  $b$ -coloration dans les graphes.

Etant donné un graphe  $G = (V, E)$ , une coloration propre de sommets de  $G$  est une affectation de couleurs aux sommets de sorte que deux sommets adjacents aient des couleurs différentes. Le nombre minimum de couleurs nécessaires à la coloration des sommets de  $G$  est appelé le nombre chromatique de  $G$  et noté  $\chi(G)$ . Une  $b$ -coloration d'un graphe  $G$  est une coloration propre de sommets de  $G$  telle que chaque classe de couleur contient au moins un sommet qui est adjacent à au moins un sommet de chaque classe de couleur autre que la sienne. Le nombre  $b$ -chromatique  $b(G)$  d'un graphe  $G$  est le plus grand entier  $k$  tel que  $G$  admet une  $b$ -coloration avec  $k$  couleurs.

Cette thèse comporte trois parties. Dans la première partie, on présente une borne supérieure pour le nombre  $b$ -chromatique  $b(G)$  en fonction de l'ordre  $n$  et la taille d'une clique maximum  $\omega(G)$  d'un graphe  $G$  et on caractérise les graphes bipartis atteignant cette borne. On discute la relation entre  $b(G)$  et  $\chi(G)$  ensuite on déduit un autre résultat concernant la relation entre  $b(G - v)$  et  $b(G)$  où  $G - v$  est le graphe obtenu à partir de  $G$  en supprimant le sommet  $v$  de  $G$  et toutes les arêtes incidentes à  $v$ .

Dans la deuxième partie, on donne des bornes et des valeurs exactes du nombre  $b$ -chromatique de certains graphes particuliers, à savoir les graphes de Harary  $H_{k,n}$  d'ordre  $n$  lorsque  $k$  est pair, le graphe milieu et le graphe total d'une chaîne  $P_n$ , d'un cycle  $C_n$ , d'une roue  $W_n$  et d'une couronne d'une chaîne  $Cr(P_n)$ .

La troisième partie est consacrée à l'étude des graphes dits  $b$ -critiques et arêtes  $b$ -critiques, c'est à dire les graphes  $G$  dont le nombre  $b$ -chromatique diminue lorsque  $G$  est modifié en supprimant un sommet ou une arête quelconque de  $G$ . Dans ce sens, on donne une caractérisation des graphes  $P_4$ -sparses arête  $b$ -critique, quasi adjoints arête  $b$ -critiques et des arbres  $b$ -critiques.

# ABSTRACT

The work of this thesis is the study of  $b$ -coloring in graphs.

Given a graph  $G = (V, E)$ , a proper vertex coloring of a graph  $G$  is an assignment of colors to the vertices of  $G$  such that adjacent vertices have different colors. The minimum number of colors which is necessary for a proper vertex coloring of graph  $G$  is called the chromatic number  $\chi(G)$ . A  $b$ -coloring of a graph  $G$  is a proper coloring of the vertices of  $G$  such that each color class has at least one vertex which is adjacent to at least one vertex of every other color classes. The  $b$ -chromatic number  $b(G)$  of a graph  $G$  is the largest integer  $k$  such that  $G$  admits a  $b$ -coloring with  $k$  colors.

This thesis is composed of three parts. In the first one, we present an upper bound for  $b$ -chromatic number  $b(G)$  in terms of the order  $n$  and the size of the maximum clique  $\omega(G)$  of a graph  $G$  and we characterize the bipartite graphs achieving this bound. We discuss the relationship between  $b(G)$  and  $\chi(G)$  and we deduce another result concerning the relationship between  $b(G - v)$  and  $b(G)$  where  $G - v$  is a graph obtained from  $G$  by deleting the vertex  $v$  of  $G$  and all edges incident to  $v$ .

In the second part, we give bounds and exact values of the  $b$ -chromatic number of some special graphs, namely, the Harary graphs  $H_{k,n}$  of order  $n$  when  $k$  is even, the middle graph and total graph of a path  $P_n$ , cycle  $C_n$ , wheel  $W_n$  and corona of a path  $Cr(P_n)$ .

The last part is devoted to the study of graphs called  $b$ -critical and edge  $b$ -critical, that is, the graphs  $G$  whose number  $b$ -chromatic decreased when  $G$  is modified by deleting each vertex or each edge. In this sense, we characterize the  $P_4$ -sparse edge  $b$ -critical graphs, quasi-line graph edge  $b$ -critical graphs and  $b$ -critical trees.

## ملخص

هدف هذه الأطروحة هو دراسة مفهوم ب-تلوين في البيانات.

ليكن  $G = (V, E)$  بيان معين . التلوين الأجود لرؤوس البيان  $G$  هو توزيع الألوان على الرؤوس بحيث أن كل رأسين متجاورين لهما لونين مختلفين. يسمى الحد الأدنى لعدد الألوان المطلوبة لتلوين البيان  $G$  العدد اللوني ويرمز له بـ  $\chi(G)$ . التلوين ب-لوني لبيان  $G$  هو تلوين أجود لرؤوس هذا البيان بحيث أن كل فئة لونية تحتوي على الأقل على رأس مجاور لرأس آخر على الأقل من جميع الفئات اللونية. العدد ب-لوني  $b(G)$  لبيان  $G$  هو أكبر عدد صحيح ك بحيث البيان  $G$  يقبل ب-تلوين ب-ك- لون.

هذه الأطروحة مكونة من ثلاثة أجزاء. في الجزء الأول، تقدم قيمة حدية عليا للعدد ب-لوني بدلالة الرتبة  $n$  و الزمرة القسوى  $\omega(G)$  للبيان  $G$  ثم نميز البيانات الثنائية التي يكون من أجلها العدد ب-لوني مساو للقيمة الحدية السابقة. نناقش أيضا العلاقة بين  $b(G)$  و  $\chi(G)$  ثم نستنتج نتيجة أخرى بشأن العلاقة بين  $b(G - v)$  و  $b(G)$  بحيث  $G - v$  هو بيان يتم الحصول عليه بحذف الرأس  $v$  وكل الحواف المجاورة لـ  $v$ .

في الجزء الثاني، تقدم حدود و قيم دقيقة للعدد ب-لوني في بعض البيانات الخاصة، مثل بيان هراري  $H_{k,n}$  ذو الرتبة  $n$  لما  $k$  يكون عدد زوجي، البيان الوسطي والبيان التام لكل من السلسلة  $P_n$  و الحلقة  $C_n$  و العجلة  $W_n$  و تاج السلسلة  $Cr(P_n)$ .

يخصص الجزء الثالث لدراسة البيانات المسماة ب-حرجة و حافة ب-حرجة ، أي البيانات  $G$  التي من أجلها ينخفض العدد ب-لوني عند تعديل البيان  $G$  بواسطة حذف أي رأس أو حافة. في هذا الإطار، نقوم بتمييز بعض البيانات ال ب-حرجة و حافة ب-حرجة.

## REMERCIEMENTS

En premier lieu, je tiens à exprimer ma profonde reconnaissance à mon directeur de thèse Monsieur **Mostafa Blidia**, Professeur à l'université SAAD DAHLAB de Blida, pour la confiance qu'il m'a accordée en me permettant de réaliser cette thèse sous sa direction. Je le remercie également pour ses précieux conseils, sa disponibilité et son aide.

Je remercie Monsieur **Frédéric Maffray**, Directeur de Recherche au CNRS de Grenoble, d'avoir guidé avec gentillesse certains de mes travaux.

Je remercie très sincèrement Monsieur **Mustapha Chellali**, Professeur à l'université SAAD DAHLAB de Blida, pour m'avoir fait l'honneur de présider le jury de cette thèse.

Je remercie également Monsieur **Moncef Abbas**, Professeur à l'USTHB, Monsieur **Abdelhafid Berrachedi**, Professeur à l'USTHB, Monsieur **Hamamache Kheddouci**, Professeur à l'université Claude Bernard Lyon1, France et Madame **Zoham Zemir**, Maître de Conférences à l'université SAAD DAHLAB de Blida, pour avoir accepté de participer au jury de cette thèse et pour l'intérêt qu'ils ont porté à mes travaux et leurs remarques judicieuses.

Enfin, j'adresse mes plus sincères remerciements à tous les membres de ma famille et amis qui m'ont toujours encouragé au cours de la réalisation de cette thèse.

*A la mémoire de mon père*

# TABLE DES MATIÈRES

RÉSUMÉ

REMERCIEMENTS

TABLE DES MATIÈRES

LISTE DES ILLUSTRATIONS GRAPHIQUES

INTRODUCTION . . . . . **11**

CHAPITRE 1. NOTIONS DE BASE, ÉTAT DE L'ART ET QUELQUES RÉSULTATS

PARTICULIERS . . . . . **14**

1.1. Définitions et notations . . . . . 14

1.1.1. Graphes et sous-graphes . . . . . 14

1.1.2. Voisinages et degrés . . . . . 15

1.1.3. Chaînes et cycles . . . . . 16

1.1.4. Distances, diamètres, excentricités, rayons et centres . . . . . 16

1.1.5. Ensemble maximal (resp., minimal) / maximum (resp., minimum) . 16

1.1.6. Graphes particuliers . . . . . 17

1.1.7. Quelques paramètres de graphes . . . . . 18

1.1.8. Quelques opérations de graphes . . . . . 18

1.2. Coloration propre,  $a$ -coloration et  $b$ -coloration . . . . . 19

1.2.1. Coloration propre . . . . . 19

1.2.2.  $a$ -coloration . . . . . 21

1.2.3.  $b$ -coloration . . . . . 21

1.3. Quelques résultats existants sur la  $b$ -coloration . . . . . 22

1.4. Graphes sommet  $b$ -critiques et arête  $b$ -critiques . . . . . 26

1.5. Résultats particuliers sur les graphes sommet et arête  $b$ -critiques . . . . . 28

1.5.1. Graphes sommet et arête  $b^=$ -critiques . . . . . 28

1.5.2. Graphes sommet $b^+$ -critiques . . . . .	29
1.5.3. Graphes arête $b^+$ -critiques . . . . .	31
<b>CHAPITRE 2. BORNES SUPÉRIEURES POUR <math>b(G)</math> ET GRAPHES EXTRÉMAUX . .</b>	<b>38</b>
2.1. Borne supérieure pour $b(G)$ . . . . .	38
2.2. Graphes bipartis tels que $b(G) = \lfloor \frac{n + \omega(G) - 1}{2} \rfloor$ . . . . .	41
2.3. Relation entre $b(G)$ et $\chi(G)$ . . . . .	47
<b>CHAPITRE 3. <math>b</math>-COLORATION DE CERTAINS GRAPHES PARTICULIERS . . . . .</b>	<b>50</b>
3.1. Graphes de Harary . . . . .	50
3.2. Graphe milieu et graphe total . . . . .	60
3.2.1. Graphe milieu . . . . .	61
3.2.2. Graphe total . . . . .	61
3.2.3. Le nombre $b$ -chromatique de $M(P_n)$ et $T(P_n)$ . . . . .	63
3.2.4. Le nombre $b$ -chromatique de $M(C_n)$ et $T(C_n)$ . . . . .	64
3.2.5. Le nombre $b$ -chromatique de $M(W_n)$ et $T(W_n)$ . . . . .	67
3.2.6. Le nombre $b$ -chromatique de $M(Cr(P_n), M(Cr(C_n), T(Cr(P_n))$ et $T(Cr(C_n)))$ . . . . .	69
<b>CHAPITRE 4. CARACTÉRISATION DE CERTAINS GRAPHES ARÊTE <math>b</math>-CRITIQUES</b>	<b>72</b>
4.1. Résultats préliminaires sur les graphes arêtes $b$ -critiques. . . . .	72
4.2. Graphes $P_4$ -sparse arête $b$ -critiques . . . . .	75
4.3. Graphes quasi-adjoints arête $b$ -critiques . . . . .	83
<b>CHAPITRE 5. CARACTÉRISATION DES ARBRES <math>b</math>-CRITIQUES . . . . .</b>	<b>97</b>
5.1. Résultats sur les arbres $b$ -critiques . . . . .	97
5.2. Caractérisation des arbres $b$ -critiques . . . . .	100
5.2.1. Arbres $b$ -critique avec $b(T) = \Delta(T)$ . . . . .	101
5.2.2. Arbre $b$ -critique avec $b(T) = \Delta(T) + 1$ . . . . .	107
<b>CONCLUSION ET PERSPECTIVES . . . . .</b>	<b>109</b>
<b>RÉFÉRENCES . . . . .</b>	<b>111</b>



## LISTE DES ILLUSTRATIONS GRAPHIQUES

FIGURE 1.1.	Graphes 3-réguliers dont le nombre $b$ -chromatique est inférieur à 4. . . . .	23
FIGURE 1.2.	Un graphe $G = C_3 \square C_3$ avec $b(G) = 3$ et $b(G - v) \geq 4$ . . . . .	31
FIGURE 1.3.	Le graphe de Petersen $P$ avec $b(P) = 3$ et $b(P - e) = 4$ . . . . .	33
FIGURE 1.4.	Un graphe $G = C_3 \square C_3$ avec $b(G) = 3$ et $b(G - e) \geq 4$ . . . . .	33
FIGURE 1.5.	$G_1 = P$ et $G_2 \in \{P, C_3 \square C_3\}$ tels que $G = G_1 \vee G_2$ et $b(G - x_2 y_2) \geq 7$ . Les valeurs entre crochets représentent les couleurs. . . . .	36
FIGURE 2.1.	Le nombre $b$ -chromatique de $G$ et de $G - v$ de trois exemples de graphes. . . . .	48
FIGURE 3.1.	Exemple d'un graphe de Harary $H_{12,15}$ avec $b(G) = 9$ . . . . .	60
FIGURE 3.2.	Le graphe milieu d'une chaîne d'ordre 8. . . . .	61
FIGURE 3.3.	Le graphe total d'un cycle d'ordre 6. . . . .	62
FIGURE 3.4.	Une $b$ -coloration optimale de $M(P_n)$ , $2 \leq n \leq 8$ . . . . .	63
FIGURE 3.5.	Une $b$ -coloration optimale du graphe $T(P_n)$ où $n = 2, 3, 4$ . . . . .	64
FIGURE 3.6.	Le $m$ -degré et la $b$ -coloration optimale des graphes $M(C_n)$ , $3 \leq n \leq 7$ . . . . .	65
FIGURE 3.7.	Une $b$ -coloration de $T(C_3)$ avec 3 couleurs. . . . .	65
FIGURE 3.8.	Une $b$ -coloration de $T(C_4)$ avec 4 couleurs. . . . .	66
FIGURE 3.9.	Une $b$ -coloration de $T(C_5)$ avec 5 couleurs. . . . .	66
FIGURE 3.10.	(a) Le graphe total de $C_6$ (b) Une $b$ -coloration de $H$ avec 5 couleurs . . . . .	67
FIGURE 3.11.	Une $b$ -coloration du graphe $H_1 = M(W_4)$ avec 5 couleurs. . . . .	68
FIGURE 3.12.	Une $b$ -coloration du graphe $H_2 = M(W_5)$ avec 6 couleurs. . . . .	68
FIGURE 3.13.	Une $b$ -coloration de $M(W_6)$ avec 7 couleurs. Les $b$ -sommets sont dessinés en noir. . . . .	69
FIGURE 3.14.	Le $m$ -degré et la $b$ -coloration optimale de $M(Cr(P_n))$ , $2 \leq n \leq 8$ . . . . .	70
FIGURE 3.15.	Le $m$ -degré et la $b$ -coloration optimale de $M(Cr(P_n))$ avec $2 \leq n \leq 10$ . . . . .	70
FIGURE 3.16.	Le $m$ -degré et la $b$ -coloration optimale de $T(Cr(P_n))$ , $2 \leq n \leq 6$ . . . . .	71
FIGURE 4.1.	Exemple d'un graphe scindé . . . . .	74
FIGURE 4.2.	(a) araignée fine (b) araignée épaisse. . . . .	76

FIGURE 4.3.	Deux graphes de la famille $\mathcal{G}$ . . . . .	78
FIGURE 4.4.	Graphe sans $K_{1,3}$ qui n'est pas un garphe quasi-adjoint. . . . .	83
FIGURE 4.5.	Exemple d'un graphe $H_0$ obtenu à partir d'une clique d'ordre 4. . . . .	84
FIGURE 4.6.	La Classe $\mathcal{F} = \{F_1, \dots, F_7\}$ . . . . .	85
FIGURE 4.7.	Neuf graphes minimaux qui ne sont pas des graphes adjoints. . . . .	96

## INTRODUCTION

Il arrive souvent, devant un problème donné, qu'on soit amené à en dessiner un schéma sur un papier afin d'en simplifier la compréhension. Ce schéma est constitué par un ensemble de points représentant les différents objets du problème dont certains sont reliés par des lignes symbolisant les relations existant entre eux. Pour raisonner sur de tels schémas, les mathématiciens ont convenu d'appeler ce schéma un graphe. Les points sont appelés des sommets et les lignes sont dites des arêtes (arcs, si les lignes sont orientées).

Ce genre de problèmes appartient à une branche bien évoluée des mathématiques qui s'appelle *la Théorie des graphes*. Historiquement, la théorie des graphes est vraisemblablement apparue au 18<sup>ième</sup> siècle grâce au mathématicien suisse *Leonhard Euler* lorsqu'il présenta le célèbre problème des ponts de Königsberg à l'Académie de Saint Pétersbourg. Depuis lors, la théorie des graphes s'est développée dans diverses disciplines telles que la chimie, la biologie et les sciences sociales.

La coloration de graphes est un thème central de la théorie des graphes du fait de ses nombreuses applications. En effet, de nombreux problèmes concrets se ramènent à la recherche d'une partition d'un ensemble d'objets suivant certaines règles. Le problème de la coloration a suscité l'intérêt de grands chercheurs en théorie des graphes. Cet intérêt sans cesse croissant est largement motivé par le fait que beaucoup de problèmes concrets peuvent être modélisés en termes de coloration de graphes. A titre d'exemple, on peut citer les problèmes de l'ordonnancement de tâches et l'allocation de fréquences. Divers types de colorations ont été considérés dans la littérature (coloration des sommets, coloration des arêtes, coloration totale, coloration par liste, etc..). Pour de plus amples détails sur ce sujet, le lecteur peut se reporter aux livres de G. Chartrand et P. Zhang [1] et de T. R. Jensen et B. Toft [2]

La coloration des sommets est certainement le concept le plus ancien et le plus étudié. Il s'agit d'affecter des couleurs (entiers positifs) aux sommets de telle sorte que deux

sommets adjacents ne doivent pas porter la même couleur; une telle coloration est dite propre (classique).

En d'autres termes, une coloration propre de sommets d'un graphe  $G = (V, E)$  est une application  $c : V \rightarrow \mathbb{N}$  telle que  $c(x) \neq c(y), \forall xy \in E$ . Une coloration optimale d'un graphe est une coloration propre de sommets utilisant un nombre minimum de couleurs appelé nombre chromatique et noté  $\chi(G)$ . Une coloration propre de sommets d'un graphe  $G$  peut être vue comme une partition de l'ensemble des sommets de  $G$  en sous-ensembles appelés classes de couleur telle que chaque arête de  $G$  a ses extrémités dans deux classes de couleur différentes.

Plusieurs variantes de colorations sont dérivées de la coloration classique; la plupart de ces colorations cherchent à minimiser le nombre de couleurs. Toutefois, il existe d'autres colorations propres de sommets où l'objectif est de maximiser le nombre de couleurs utilisées, on cite par exemple la  $b$ -coloration qui fera, d'ailleurs, l'objet de notre étude dans cette thèse.

Une coloration propre de sommets d'un graphe  $G$  est dite  $b$ -coloration si chaque classe de couleur contient au moins un sommet qui a au moins un voisin dans chaque classe de couleur autre que la sienne. Le nombre  $b$ -chromatique  $b(G)$  de  $G$  est le plus grand entier  $k$  pour lequel  $G$  a une  $b$ -coloration avec  $k$  couleurs. Ce concept a été introduit en 1999 par Irving et Manlove [3, 4].

Il convient de mentionner que toutes les colorations considérées dans ce manuscrit seront propres, même si ce n'est pas toujours précisé. Également, on parle parfois de coloration pour désigner une coloration de sommets.

Ce manuscrit s'organise en cinq chapitres.

Le premier chapitre contient les principales définitions et notations nécessaires à la compréhension du contenu de cette thèse; nous précisons notamment les définitions de la coloration classique, la  $a$ -coloration et la  $b$ -coloration. Nous donnons ensuite un recueil des principaux résultats de la littérature liés à la notion de la  $b$ -coloration. Nous introduisons

la notion des graphes dits sommet (resp. arête)  $b$ -critiques, c'est à dire les graphes  $G$  dont la suppression d'un sommet (resp. d'une arête) quelconque de  $G$  fait changer (ou ne fait pas changer) le nombre  $b$ -chromatique de  $G$ . Quelques résultats particuliers concernant certaines classes de graphes critiques seront présentés à la fin de ce chapitre.

Dans le deuxième chapitre, nous présentons une borne supérieure pour  $b(G)$  en fonction de l'ordre et la taille d'une clique maximum d'un graphe  $G$  et nous caractérisons les graphes bipartis atteignant cette borne. Nous discutons la relation entre  $b(G)$  et  $\chi(G)$  ensuite nous déduisons un autre résultat concernant la relation entre  $b(G - v)$  et  $b(G)$  où  $G - v$  est un graphe obtenu à partir de  $G$  en supprimant le sommet  $v$  de  $G$  et toutes les arêtes incidentes à  $v$ .

Dans le chapitre trois, nous donnons des bornes et des valeurs exactes sur le nombre  $b$ -chromatique de certains graphes particuliers, à savoir le graphe de Harary  $H_{k,n}$  lorsque  $k$  est pair, le graphe milieu et le graphe total d'une chaîne  $P_n$ , d'un cycle  $C_n$ , d'une roue  $W_n$  et d'une couronne d'une chaîne  $Cr(P_n)$ .

Le chapitre quatre est consacré à l'étude des graphes *arête  $b$ -critiques*, c'est à dire les graphes dont la suppression d'une arête quelconque fait diminuer le nombre  $b$ -chromatique de  $G$ . En effet, après avoir donné quelques propriétés fondamentales de ces graphes, nous caractérisons deux classes de graphes arêtes  $b$ -critiques, à savoir les graphes  $P_4$  sparses et quasi-adjoints arête  $b$ -critiques.

Dans le chapitre cinq, nous caractérisons les arbres  $b$ -critiques. Un graphe  $G$  est dit  *$b$ -critique* si le nombre  $b$ -chromatique diminue lorsque le graphe  $G$  est modifié en supprimant un sommet quelconque de  $G$ .

Cette thèse s'achève par une conclusion et quelques perspectives.

## CHAPITRE 1

# NOTIONS DE BASE, ÉTAT DE L'ART ET QUELQUES RÉSULTATS PARTICULIERS

La première partie de ce chapitre rassemble les définitions classiques de la théorie des graphes ainsi que les notations nécessaires dont on aura besoin le long de ce travail. Ces définitions peuvent être retrouvées avec plus de détails dans les ouvrages suivants: C. Berge [5] et J. A. Bondy et U. S. R. Murty [6]. Dans la deuxième partie, nous présentons quelques types de coloration de graphes et leurs paramètres associées. Dans ce contexte, nous rappelons les définitions de la coloration classique et de la  $a$ -coloration ensuite nous nous focalisons essentiellement sur la notion de la  $b$ -coloration et le nombre  $b$ -chromatique. Dans la troisième partie, nous passons en revue les principaux travaux réalisés ou existants liés à la  $b$ -coloration et au nombre  $b$ -chromatique. Dans la dernière partie, nous introduisons la notion de graphes critiques par rapport au nombre  $b$ -chromatique ensuite nous donnons quelques résultats particuliers liés à ce sujet.

### 1.1 Définitions et notations

#### 1.1.1 Graphes et sous-graphes

Un *graphe*  $G = (V, E)$  est la donnée de deux ensembles, un ensemble fini  $V$  de *sommets* et une famille  $E$  de paires de sommets de  $V$ , appelées *arêtes*. Le nombre de sommets de  $G$ , noté  $n$ , est appelé l'*ordre* de  $G$ . Les sommets sont notés de manière usuelle par des lettres minuscules:  $u, v, x, y, a, b$ , etc... Pour  $u, v \in V$ , on note  $uv$  (ou  $vu$ ) une arête entre  $u$  et  $v$ . Deux sommets  $u, v \in V$  sont adjacents (ou voisins) si l'arête  $uv \in E$ . Dans ce cas,  $u$  et  $v$  sont appelés les *extrémités* de  $uv$ . Un *non-voisin*  $u$  d'un sommet  $v$  d'un graphe  $G$  est un sommet non adjacent à  $v$ . Une arête  $uv$  est souvent désignée par la lettre  $e$ , où  $u$  et  $v$  sont les extrémités de  $e$ . Deux arêtes distinctes sont dites adjacentes si elles ont au

moins une extrémité commune. Une arête  $e$  sera dite incidente à un sommet  $v$  si  $v$  est l'une de ses extrémités. Une *non-arête* dans un graphe  $G$  est une paire de sommets non adjacents dans  $G$ . Une *boucle* est une arête dont les deux extrémités sont confondues. Un graphe *simple* est un graphe dont tout couple de sommets est relié par au plus une arête et toute arête de  $G$  a ses extrémités distinctes. En d'autres termes,  $G$  est simple s'il est sans boucles et sans arêtes multiples. Dans cette thèse, tous les graphes considérés sont simples et finis.

On appelle *sous-graphe* de  $G$ , un graphe  $G' = (V', E')$  tel que  $V' \subseteq V$  et  $E' \subseteq E$ . Si  $A \subseteq V$ , on appelle sous-graphe de  $G$  *induit (ou engendré)* par  $A$ , le sous-graphe  $H = (A, E_A)$  de  $G$ , avec  $E_A = \{uv \in E : u, v \in A\}$ . Dans ce cas,  $H$  sera désigné par  $G[A]$ . On dira aussi que  $G[A]$  est *un sous-graphe induit* de  $G$ . Si  $B \subseteq E$ , on appelle *graphe partiel* de  $G$  défini par  $B$ , le sous-graphe  $G_B = (V, B)$  de  $G$  dont les ensembles de sommets et d'arêtes sont respectivement  $V$  et  $B$ .

Deux graphes  $G$  et  $G'$  sont isomorphes s'il existe une bijection  $f : V(G) \rightarrow V(G')$  telle que pour tous  $u, v \in V(G)$ , on a  $uv \in E(G)$  si et seulement si  $f(u)f(v) \in E(G')$ .

On dira que  $G$  contient un graphe  $H$  s'il existe un sous-graphe induit de  $G$  isomorphe à  $H$ . Dans le cas contraire, on dira que  $G$  est sans  $H$  (ou  $H$ -libre).

### 1.1.2 Voisinages et degrés

Pour un sommet  $v$  de  $G$ , le *voisinage ouvert* est défini par l'ensemble suivant  $N_G(v) = \{u \in V(G) : uv \in E\}$  et le *voisinage fermé* est défini par  $N_G[v] = N_G(v) \cup \{v\}$ . L'ensemble  $N_G(S) = \bigcup_{v \in S} N_G(v)$  (resp.  $N_G[S] = N_G(S) \cup S$ ) est le voisinage ouvert (resp. fermé) du sous-ensemble  $S \subseteq V$ . Parfois pour alléger les notations et lorsqu'il n'y a aucune confusion sur le graphe  $G$ , les voisinages ouvert et fermé d'un sommet  $v$  seront notés simplement par  $N(v)$  et  $N[v]$  à la place de  $N_G(v)$  et  $N_G[v]$  respectivement. De même, nous utiliserons les notations  $N(S)$  et  $N[S]$  au lieu de  $N_G(S)$  et  $N_G[S]$  respectivement. Le *degré* d'un sommet  $v$  d'un graphe  $G$ , noté  $d_G(v)$ , est le nombre de ses voisins. Un sommet de degré nul sera dit *sommet isolé* et un sommet de degré 1 sera dit *sommet pendant*. Un sommet adjacent

à un sommet pendant sera dit *support*. On note par  $\Delta(G)$  et  $\delta(G)$  le *degré maximum* et *minimum* dans  $G$  respectivement. S'il n'y a aucun risque de confusion, on écrira  $d(v)$ ,  $\Delta$  et  $\delta$  pour désigner respectivement  $d_G(v)$ ,  $\Delta(G)$  et  $\delta(G)$ .

### 1.1.3 Chaînes et cycles

Une chaîne  $P$  d'un graphe  $G = (V, E)$  est une séquence finie de sommets  $v_1, v_2, \dots, v_k$  telle que pour tout  $i$ ,  $1 \leq i \leq k - 1$ ,  $v_i v_{i+1}$  est une arête de  $G$  pour tout  $i \neq j$ . Les sommets  $v_1$  et  $v_k$  sont appelés les extrémités de  $P$  et les sommets  $v_2, v_3, \dots, v_{k-1}$  sont les sommets intérieurs de  $P$ . L'entier  $k - 1$  représente la longueur de  $P$  (au sens des arêtes). Une chaîne qui n'utilise pas deux fois la même arête est dite *simple*. Une chaîne qui ne passe pas deux fois par le même sommet est dite *élémentaire*. Une *corde* est une arête reliant deux sommets non consécutifs dans une chaîne. Une chaîne minimale induite par  $n$  sommets, notée  $P_n$ , est une chaîne élémentaire sans cordes. Un *cycle* est une chaîne dont les deux extrémités sont confondues. Un cycle élémentaire  $C_n$  induit par  $n$  sommets est un cycle dont les sommets sont distincts. La longueur d'un cycle est le nombre de ses arêtes. La *maille* d'un graphe  $G$ , notée  $g(G)$ , est la longueur d'un plus petit cycle de  $G$ .

### 1.1.4 Distances, diamètres, excentricités, rayons et centres

Soit  $G = (V, E)$  un graphe et  $u, v$  deux sommets de  $V$ . La *distance* entre  $u$  et  $v$ , notée  $d(u, v)$ , est la longueur d'une plus courte chaîne joignant  $u$  et  $v$ . L'*excentricité* de  $v$  est  $exc(v) = \max\{d(v, w) : w \in V\}$ , le *diamètre* de  $G$  est  $diam(G) = \max\{exc(v) : v \in V\}$  et le *rayon* de  $G$  est  $r(G) = \min\{exc(v) : v \in V\}$ . Un sommet de  $G$  ayant une excentricité minimale est appelé *centre*.

### 1.1.5 Ensemble maximal (resp., minimal) / maximum (resp., minimum)

Nous dirons qu'un sous-ensemble  $A$  de  $V$  est *minimal* (resp. *maximal*) par rapport à une propriété  $\mathcal{P}$  s'il n'existe pas d'ensemble  $B \subseteq A$  (resp.  $B \supseteq A$ ) tel que  $G[B]$  vérifie  $\mathcal{P}$ . Nous dirons qu'un sous-ensemble  $A$  de  $V$  est *minimum* ou de *taille minimale* (resp. *maximum* ou de *taille maximale*) par rapport à une propriété  $\mathcal{P}$  s'il n'existe pas d'ensemble  $B \subseteq V$



tel que  $G[B]$  vérifie  $\mathcal{P}$  et  $|A| > |B|$  (resp.  $|B| > |A|$ ) où  $|A|$  est le cardinal de l'ensemble  $A$ , c'est-à-dire le nombre de ses éléments.

### 1.1.6 Graphes particuliers

- Un graphe  $G = (V, E)$  est *connexe* si pour chaque paire de sommets distincts  $v, u \in V$ , il existe une chaîne joignant  $v$  et  $u$ . Une *composante connexe* d'un graphe est un sous-graphe maximal connexe.
- *Le graphe complet* d'ordre  $n$ , noté  $K_n$ , est le graphe simple dans lequel tous les sommets sont de degré  $n-1$ . Ainsi, deux sommets quelconques de  $K_n$  sont adjacents.
- Soit  $G$  un graphe. *Le graphe complémentaire* de  $G$  est le graphe noté  $\overline{G}$ , défini par  $V(\overline{G}) = V(G)$  et  $E(\overline{G}) = \{uv : u \in V(G), v \in V(G) \text{ et } uv \notin E(G)\}$ .
- Un graphe  $G$  est dit *d-régulier* si tous ses sommets sont de degré  $d$ . Un graphe 3-régulier est aussi appelé cubique.
- Un graphe  $G = (V, E)$  est dit *biparti* s'il existe une partition de  $V$  en deux sous-ensembles  $V_1$  et  $V_2$  telle que toutes les arêtes de  $G$  relient un sommet de  $V_1$  à un sommet de  $V_2$ . *Un graphe biparti complet* est un graphe biparti ayant la propriété supplémentaire suivante: tous les sommets de  $V_1$  sont adjacents à tous les sommets de  $V_2$ . Si  $|V_1| = p$  et  $|V_2| = q$ , alors le graphe biparti complet est noté  $K_{p,q}$ .
- On appelle *arbre*, et on note par  $T$ , un graphe connexe et sans cycles. Un arbre comporte exactement  $(n-1)$  arêtes. On appelle *feuille* d'un arbre, un sommet de degré 1 (sommet pendant).
- Une forêt est un graphe dont chaque composante connexe est un arbre.
- On appelle *étoile*, et on note par  $K_{1,n}$ , ( $n \geq 3$ ), l'arbre à  $n+1$  sommets ayant  $n$  feuilles.
- Un graphe est dit *sans griffe* (ou sans  $K_{1,3}$ ) s'il ne contient pas  $K_{1,3}$  comme sous-graphe induit.

- Soit  $G = (V, E)$  un graphe. Le *graphe adjoint* de  $G$  (ou graphe de ligne) est le graphe obtenu en associant un sommet à chaque arête de  $G$  et en reliant deux sommets par une arête si les arêtes de  $G$  correspondant à ces deux sommets sont adjacentes.

### 1.1.7 Quelques paramètres de graphes

- Une *clique* d'un graphe  $G = (V, E)$  est un sous-ensemble de sommets de  $G$  qui engendrent un graphe complet. La taille d'une clique est le nombre de ses sommets. Une clique de taille  $p$  est notée par  $K_p$ . Le cardinal d'une clique maximum de  $G$  est noté par  $\omega(G)$ .
- Un *stable* dans un graphe  $G$ , appelé aussi, *ensemble indépendant*, est un ensemble de sommets deux à deux non adjacents. Le cardinal d'un stable maximum de  $G$ , noté  $\alpha(G)$ , est appelé *nombre de stabilité* de  $G$ .
- Soit  $G = (V, E)$  un graphe. Un *couplage*  $M$  dans un graphe  $G$  est un sous-ensemble d'arêtes non incidentes deux à deux. Un sommet  $x$  de  $G$  est dit *saturé* par le couplage  $M$  s'il existe une arête de  $M$  incidente à  $x$ . Un couplage qui sature tous les sommets de  $G$  est appelé un *couplage parfait* dans  $G$ .

### 1.1.8 Quelques opérations de graphes

- Soit  $x$  un sommet d'un graphe  $G = (V, E)$ . On note  $G - x$  le sous-graphe engendré par l'ensemble  $V \setminus \{x\}$ . Pour un sous-ensemble de sommets  $S \subseteq V$ , on note  $G - S$  le sous-graphe engendré par  $V \setminus S$ . Soit  $e$  une arête de  $G$ . On note  $G - e$  le graphe  $G' = (V, E \setminus \{e\})$ . En d'autres termes,  $G - v$  est le graphe obtenu à partir de  $G$  en supprimant le sommet  $v$  et toutes les arêtes incidentes à  $v$ . Le graphe  $G - e$  est obtenu à partir de  $G$  en supprimant l'arête  $e$  (les sommets incidents à  $e$  ne sont pas supprimés).
- La somme cartésienne (ou produit cartésien) de deux graphes  $G_1 = (V_1, E_1)$  et  $G_2 = (V_2, E_2)$ , noté  $G_1 \square G_2$ , est le graphe  $G = (V, E)$  tel que  $V(G) = \{(u, v) : u \in$

$V(G_1), v \in V(G_2)\}$  et deux sommets  $(u_1, v_1)$  et  $(u_2, v_2)$  sont adjacents si  $u_1 = u_2$  et  $v_1v_2 \in E_2$  ou  $v_1 = v_2$  et  $u_1u_2 \in E_1$ .

- Soient  $G$  et  $H$  deux graphes. L'union de  $G$  et  $H$  est le graphe  $G + H$  dont l'ensemble des sommets est  $V(G) \cup V(H)$  et l'ensemble des arêtes est  $E(G) \cup E(H)$ . Pour un entier  $k$  donné, l'union de  $k$  copies de  $G$  est notée par  $kG$ .
- Le joint de  $G$  et  $H$  est le graphe noté  $G \vee H$  obtenu à partir de  $G + H$  en ajoutant toutes les arêtes entre  $G$  et  $H$ .

## 1.2 Coloration propre, $a$ -coloration et $b$ -coloration

### 1.2.1 Coloration propre

Les problèmes de colorations de graphes ont suscité l'intérêt de plusieurs chercheurs. Le problème des quatre couleurs est l'un des plus connus: "Est-il toujours possible de colorer les régions d'une carte de géographie avec seulement quatre couleurs sans que deux régions ayant une frontière commune soient coloriés avec la même couleur?". Ce problème conjecturé depuis 1852 par Francis Guthrie, ne fut démontré qu'en juin 1976 par deux chercheurs américains, K. Appel et W. Haken [7, 8], de l'université de Illinois, à l'aide d'un calcul par ordinateur.

La notion de coloration de graphes a fait donc l'objet de nombreuses études engendrant une littérature très dense en théorie des graphes. La coloration des sommets est sans doute le concept le plus connu et le plus étudié en théorie des graphes. Généralement, il s'agit de trouver une coloration des sommets d'un graphe qui satisfasse certaines conditions d'optimalité de telle sorte que les sommets adjacents n'ont pas la même couleur.

**Définition 1.1.** *Une coloration propre d'un graphe  $G = (V, E)$  est une application  $c$  de  $V$  dans  $\mathbb{N}$  telle que si deux sommets  $x$  et  $y$  sont adjacents, alors leurs couleurs correspondantes sont différentes  $c(x) \neq c(y)$ .*

**Définition 1.2.** *Une classe de couleur  $i$  est un ensemble stable de sommets de  $V$  coloriés avec la même couleur  $i$ .*

Une condition naturelle est que le nombre de couleurs utilisées soit minimal.

**Définition 1.3.** *Le nombre chromatique d'un graphe  $G = (V, E)$ , noté  $\chi(G)$ , est le nombre minimum de classes de couleur qui partitionnent l'ensemble  $V$ .*

Le problème de décision lié à ce paramètre est NP-complet [9] dans le cas général . De nombreux travaux ont été menés pour définir des bornes pour le nombre chromatique en fonction d'autres paramètres. L'un des résultats classiques en terme de borne du nombre chromatique est celui donné par R. Brooks [10] où il a montré qu'un graphe  $G$  de degré maximum  $\Delta(G)$  qui n'admet pas comme composante connexe un graphe complet  $K_{\Delta(G)+1}$ , ni, si  $\Delta(G) = 2$ , un cycle de longueur impaire, vérifie

$$\chi(G) \leq \Delta(G).$$

Pour le graphe  $K_{\Delta(G)+1}$  et pour le cycle  $C_n$  de longueur impaire, on a évidemment  $\chi(K_{\Delta(G)+1}) = \Delta(G) + 1$  et  $\chi(C_n) = 3 = \Delta(G) + 1$ . De ce fait, on a toujours le résultat suivant:

**Théorème 1.4.** [10] *Pour tout graphe  $G$  de degré maximum  $\Delta(G)$ ,*

$$\chi(G) \leq \Delta(G) + 1.$$

Dans [5], C. Berge a montré les deux résultats suivants.

**Théorème 1.5.** [5] *Tout graphe  $G$  d'ordre  $n$ , satisfait*

$$\chi(G)\alpha(G) \geq n \quad \text{et} \quad \chi(G) + \alpha(G) \leq n + 1.$$

L'inégalité suivante est dûe à Gaddum et Nordhaus [11].

**Théorème 1.6.** [11] *Soit  $G$  un graphe d'ordre  $n$  et  $\overline{G}$  son complémentaire. Alors*

$$\chi(G) + \chi(\overline{G}) \leq n + 1.$$

Plusieurs variantes de colorations sont dérivées de la coloration classique; la plupart de ces colorations cherchent à minimiser le nombre de couleurs. Il existe d'autres colorations qui maximisent le nombre de couleurs utilisées, on cite par exemple la *a-coloration* et la *b-coloration*.

### 1.2.2 $a$ -coloration

Une manière de réduire le nombre de couleurs est d'essayer à partir d'une coloration propre donnée du graphe de réduire le nombre de classes de couleur en unifiant ou en jumelant des classes de couleur différentes, d'où l'introduction de la  $a$ -coloration et du nombre  $a$ -chromatique par Harary, Hedetniemi et Prins en 1967 [12].

**Définition 1.7.** *Une  $a$ -coloration est une coloration propre telle que pour toute paire de couleurs différentes  $i$  et  $j$ , le sous-graphe engendré par les deux classes de couleur  $i$  et  $j$ , contient au moins une arête. Le nombre  $a$ -chromatique, noté  $\psi(G)$ , est le nombre maximum de classes de couleur dans une  $a$ -coloration.*

### 1.2.3 $b$ -coloration

La définition de la  $a$ -coloration présentée précédemment a inspiré Irving et Manlove en 1999 [3, 4] à introduire un autre type de coloration. En effet, une autre manière de réduire le nombre de couleurs est d'essayer à partir d'une coloration propre donnée du graphe de réduire le nombre de classes de couleur en transférant les sommets d'une même classe de couleur dans les autres classes de couleur. D'où, la définition de la  $b$ -coloration.

**Définition 1.8.** *Une  $b$ -coloration est une coloration propre telle que toute classe de couleur  $i$  contient un sommet adjacent à au moins un sommet de chaque classe de couleur  $j \neq i$ . Ce sommet est dit  $b$ -sommet de couleur  $i$ . Le nombre  $b$ -chromatique est le nombre maximum de classes de couleur dans une  $b$ -coloration.*

Puisque toute  $b$ -coloration vérifie la définition de la  $a$ -coloration, alors le résultat suivant est immédiat.

$$b(G) \leq \psi(G).$$

**Définition 1.9.** *Soient  $G$  un graphe et  $c$  une  $b$ -coloration de  $G$  avec  $b(G)$  couleurs. Un ensemble  $S$  de  $b$ -sommets de  $c$  est dit  $b$ -système de  $c$  si les deux conditions suivantes sont vérifiées.*

- $|S| = b(G)$

- $\forall x, y \in S, c(x) \neq c(y)$ .

### 1.3 Quelques résultats existants sur la $b$ -coloration

Il convient en premier lieu de noter que les travaux réalisés dans cette thèse sont purement théoriques. Cependant, plusieurs problèmes pratiques liés à la  $b$ -coloration des graphes ont été introduits dans la littérature. En effet, ce concept a été appliqué dans certains problèmes de classifications et de fouille de données (Voir [13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20, 21]).

Durant les dix dernières années, la notion de la  $b$ -coloration a été largement étudiée par de nombreux chercheurs. Le premier article s'intéressant à ce concept est dû à Irving et Manlove [3] en 1999 qui ont montré que la détermination du nombre  $b$ -chromatique est un problème NP-complet en général, même restreint aux graphes bipartis [22]. Par contre, ce problème devient polynomial pour les arbres [3, 4], pour les cactus dont le  $m$ -degré est au moins 7 [23], pour les graphes planaires extérieurs dont la maille est au moins 8 [24] et pour les co-graphes [25] et les  $P_4$ -sparses [26].

L'absence d'algorithme polynomial pour la détermination de  $b(G)$  dans le cas général a incité les chercheurs à établir des bornes qui encadrent ce paramètre. Dans ce contexte, les auteurs de [3, 4] ont remarqué que toute coloration minimale de  $G$  avec  $\chi(G)$  est une  $b$ -coloration de  $G$ , et que tout sommet de degré  $\Delta(G)$  peut avoir au maximum  $\Delta(G)$  couleurs voisines et prendre pour lui la couleur  $\Delta(G) + 1$ .

**Proposition 1.10.** [3, 4] *Soit  $G$  un graphe et  $\chi(G)$  son nombre chromatique. Alors,*

$$\chi(G) \leq b(G) \leq \Delta(G) + 1.$$

Il semble assez naturel de s'intéresser aux graphes pour lesquels  $b(G) = \Delta(G) + 1$ . Les premières investigations concernant ce problème sont dues à A. El Sahili et M. Kouider [27].

**Théorème 1.11.** [27] *Soit  $G$  un graphe  $d$ -régulier sans cycles d'ordre 6 et de maille au moins 5. Alors le nombre  $b$ -chromatique de  $G$  est  $d + 1$ .*

Les mêmes auteurs [27] ont conjecturé que tout graphe  $d$ -régulier  $G$  de maille au moins 5 satisfait  $b(G) = d + 1$ . Dans [28], M. Blidia et al. ont donné une réponse négative à ce problème. En effet, ils ont montré que le nombre  $b$ -chromatique du graphe de Petersen est égal à 3, ce qui constitue un contre exemple à la conjecture présentée dans [27], ceci découle du fait que le graphe de Petersen est 3-régulier de maille 5. De ce fait, les auteurs de [28] ont reformulé ce problème de la façon suivante:

**Conjecture 1.12.** [28] *Soit  $G$  un graphe  $d$ -régulier de maille au moins cinq différent du graphe de Petersen. Alors le nombre  $b$ -chromatique de  $G$  est  $d + 1$ .*

Ils ont également montré que la conjecture présentée dans [28] est vraie pour les petites valeurs de  $d$  ( $d \leq 6$ ).

D'autres résultats sur le même sujet ont été fournis par J. Kratochvíl et al. [22].

**Théorème 1.13.** [22] *Soit  $G$  un graphe contenant  $\Delta(G) + 1$  sommets  $v_1, \dots, v_{\Delta(G)+1}$  tels que  $d_G(v_i) = \Delta(G)$  pour tout  $i$  et  $d(v_i, v_j) \geq 4$  pour tout  $i \neq j$ . Alors  $b(G) = \Delta(G) + 1$ .*

**Corollaire 1.14.** [22] *Soit  $G$  un graphe  $d$ -régulier ( $d \geq 2$ ) d'ordre  $n \geq d^4$ . Alors le nombre  $b$ -chromatique de  $G$  est  $d + 1$ .*

Un autre résultat dans le cas des graphes 3-réguliers (cubiques) a été donné par Jakovac et Klavzar [29]. Ils ont montré qu'à l'exception des graphes de la Figure 1.1, le nombre  $b$ -chromatique des graphes cubiques est égal à 4.

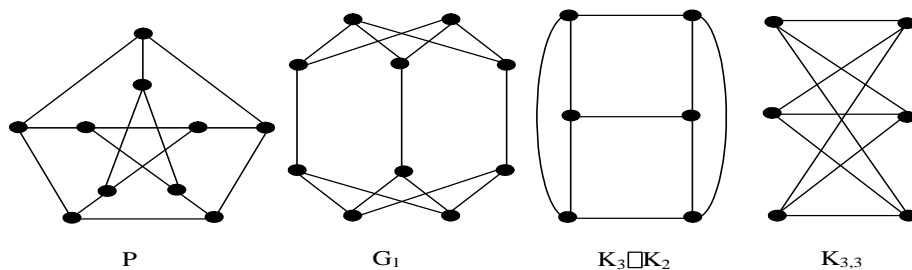


FIGURE 1.1. Graphes 3-réguliers dont le nombre  $b$ -chromatique est inférieur à 4.

**Théorème 1.15.** [29] *Soit  $G$  un graphe connexe 3-régulier. Alors  $b(G) = 4$  sauf si  $G = P$ ,  $K_3 \square K_2$ ,  $K_{3,3}$  ou  $G_1$ . Dans ces cas,  $b(P) = b(K_3 \square K_2) = b(G_1) = 3$  et  $b(K_{3,3}) = 2$ .*

D'autres travaux sur le nombre  $b$ -chromatique ont été réalisés dans la classe des graphes réguliers (Voir [30, 29, 31, 32] pour plus de détails). Dans [33, 34], les auteurs ont étudiés le concept de la  $b$ -coloration dans des classes de graphes généralisant les cographes (graphes sans  $P_4$ ). Egalement, d'autres études ont été réalisées pour borner ou donner la valeur exacte du nombre  $b$ -chromatique pour des classes particulières de graphes. Dans [35], Kouider et Mahéo ont donné les valeurs exactes du nombre  $b$ -chromatique pour des graphes simples.

**Proposition 1.16.** [35] *Soient  $P_n$  et  $C_n$  respectivement une chaîne et un cycle d'ordre au moins 5. Alors*

$$b(P_n) = b(C_n) = 3.$$

**Proposition 1.17.** [35] *Pour tout  $n, p \in \mathbb{N}$ ,  $b(K_{n,p}) = 2$ , où  $K_{n,p}$  est un graphe biparti complet.*

Ils ont également obtenu d'autres résultats [35] de type *Nordhauss-Gaddhum*.

**Théorème 1.18.** [35] *Soit  $G$  un graphe d'ordre  $n$  et  $\overline{G}$  son complémentaire. Alors*

$$b(G) + b(\overline{G}) \leq n + 1 \text{ et } b(G)b(\overline{G}) \geq n$$

Par analogie avec les résultats obtenus dans la coloration classique, M. Kouider et M. Mahéo [35] ont fourni d'autres bornes supérieures pour le nombre  $b$ -chromatique.

**Proposition 1.19.** [35] *Pour tout graphe  $G = (E, V)$  d'ordre  $n$ , on a:*

$$\frac{n}{\alpha(G)} \leq b(G) \leq \frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{4} + 2|E|}$$

où  $\alpha(G)$  est le nombre de stabilité de  $G$ .

**Proposition 1.20.** [35] *Si  $G$  est un graphe non connexe avec des composantes connexes  $C_1, C_2, \dots, C_p$ ,  $p \geq 2$  alors*

$$b(G) \geq \max\{b(C_i), 1 \leq i \leq p\}.$$

Dans [36], M. Kouider et M. Zaker ont présenté une borne supérieure de  $b(G)$  dans le cas d'un graphe sans griffes généralisés (sans  $K_{1,t}$ ).



**Théorème 1.21.** [36] *Si  $G$  est un graphe sans  $K_{1,t}$  avec  $t \geq 3$ , alors*

$$b(G) \leq (t - 1)(\chi(G) - 1) + 1.$$

Ils ont également montré que cette borne est atteinte.

**Proposition 1.22.** [36] *Pour tout entier  $t \geq 3$  et  $k$ , il existe un graphe sans  $K_{1,t}$  tel que*

$$\chi(G) = k \text{ et } b(G) = (t - 1)(k - 1) + 1.$$

Si  $t = 3$  alors  $G$  est dit sans griffe. Un corollaire immédiat de cette proposition est le suivant:

**Corollaire 1.23.** [36] *Si  $G$  est sans griffe, alors  $b(G) \leq 2\chi(G) - 1$*

D'autres travaux ont été effectués pour déterminer le nombre  $b$ -chromatique du produit cartésien [38, 35, 39, 40] et du produit croisé, total et lexicographique [41] de deux graphes. Dans [42], les auteurs ont également montré que le nombre  $b$ -chromatique du joint de deux graphes est égal à la somme de leurs nombres  $b$ -chromatiques.

**Théorème 1.24.** [42] *Soient  $G_1, G_2$  deux graphes de sommets disjoints et  $G = G_1 \vee G_2$  le joint de  $G_1$  et  $G_2$ . Alors  $b(G) = b(G_1) + b(G_2)$ .*

D'autres résultats intéressants concernant le nombre  $b$ -chromatique ont été obtenus dans les graphes de *puissance* [43], les graphes *centraux* [46] et les graphes de *Kneser* [47, 48].

Il serait aussi très intéressant d'étudier les graphes pour lesquels on a l'égalité dans la borne inférieure de la Proposition 1.10. A notre connaissance, il n'y a eu aucune étude publiée dans ce sens. Un autre problème consiste à caractériser les graphes dits  $b\chi$ -parfaits (ou  $b$ -parfaits), c'est à dire les graphes pour lesquels  $b(H) = \chi(H)$  pour tout sous-graphe induit  $H$  de  $G$ . Ce concept a été introduit par Hoàng et Kouider [42] et a fait l'objet d'un article publié par les mêmes auteurs dans lequel ils ont caractérisé les graphes bipartis  $b\chi$ -parfaits. D'autres résultats concenant ce sujet ont été donnés dans [49, 50] pour des classes particulières de graphes. Récemment, C.T. Hoàng et al. [51, 52] ont donné un

résultat plus général à ce problème. En effet, ils ont montré qu'un graphe est  $b$ -parfait si et seulement s'il ne contient pas comme sous-graphe induit un membre d'une certaine liste de vingt-deux graphes.

Dans [26, 53, 54, 55, 56, 57], les auteurs ont étudié la notion de la  $b$ -continuité de certaines classes de graphes. Un graphe  $G$  est dit  $b$ -continu s'il admet une  $b$ -coloration avec  $k$  couleurs pour tout  $k$ ,  $\chi(G) \leq k \leq b(G)$ .

Dans [3, 4], Irving et Manlove ont remarqué que pour qu'un graphe  $G$  admette une  $b$ -coloration avec  $k$  couleurs, il doit avoir au moins  $k$  sommets de degré supérieur à  $k - 1$ . De cette observation, ils ont défini le  $m$ -degré comme suit:

**Définition 1.25.** Soit les sommets  $v_1, v_2, \dots, v_n$  d'un graphe  $G$  ordonnés tels que:  $d(v_1) \geq d(v_2) \geq \dots \geq d(v_n)$ , où  $d(v_i)$  est le degré de  $v_i$ . Le  $m$ -degré de  $G$ , noté  $m(G)$  est défini par

$$m(G) = \max\{i : d(v_i) \geq i - 1\}.$$

Tout sommet  $v$  vérifiant  $d(v) \geq m(G) - 1$  est dit sommet dense.

Les mêmes auteurs ont également montré que  $m(G)$  est une borne supérieure du nombre  $b$ -chromatique.

**Proposition 1.26.** [3, 4] Pour tout graphe  $G$ ,  $b(G) \leq m(G)$ .

Il est facile de vérifier que cette borne est atteinte pour les chaînes et les cycles d'ordre  $n \geq 5$  et pour les cliques. Cependant, il existe d'autres graphes pour lesquels la différence entre  $m(G)$  et  $b(G)$  est très large. Par exemple, si  $G = K_{n,n}$  est le graphe biparti complet, alors  $m(G) = n + 1$  et  $b(G) = 2$ . De ce fait, il est naturel de chercher à caractériser les graphes réalisant l'égalité dans la Proposition 1.26.

**Problème 1.27.** Caractériser les graphes  $G$  tels que  $b(G) = m(G)$ .

## 1.4 Graphes sommet $b$ -critiques et arête $b$ -critiques

Parmi les problèmes dont l'étude a bénéficié des motivations pratiques et théoriques à la fois, se trouvent les problèmes des graphes critiques par rapport à un paramètre donné, le plus traditionnel d'entre eux étant le problème des graphes  $k$ -critiques.

Un sommet (ou une arête) d'un graphe  $G$  est dit(e) critique, si sa suppression fait diminuer le nombre chromatique de  $G$ . Evidemment, la suppression d'un sommet ou d'une arête fait diminuer le nombre chromatique de  $G$  par au plus un. En effet, pour tout graphe  $k$ -chromatique  $G$  avec  $k \geq 2$  et pour tout sommet  $v$  de  $G$ , soit  $\chi(G - v) = k$  ou bien  $\chi(G - v) = k - 1$ . Par ailleurs, pour chaque arête  $e$  de  $G$ , soit  $\chi(G - e) = k$  ou  $\chi(G - e) = k - 1$ .

Un graphe *critique* est un graphe dans lequel chaque sommet ou arête est critique. Un graphe  $k$ -*critique* est un graphe critique avec  $\chi(G) = k$ . En particulier, un graphe  $G$  est dit *sommet  $k$ -critique* si chacun de ses sommets est critique. Ainsi,  $G$  est dit *arête  $k$ -critique* si chacune de ses arêtes est critique. Il est connu que si  $e = uv$  et  $\chi(G - e) = k - 1$ , alors  $\chi(G - u) = k - 1$  et  $\chi(G - v) = k - 1$ . En vue de cela, tout graphe arête  $k$ -critique est sommet  $k$ -critique. Le concept des graphes  $k$ -critique a été introduit par Dirac [58, 59] en 1951, et depuis a été largement étudié (voir [2] pour plus de détails sur le sujet).

C'est dans cette optique que nous allons étudier l'effet de la suppression d'un sommet ou d'une arête sur le nombre  $b$ -chromatique pour certaines classes particulières de graphes. Contrairement au nombre chromatique, le nombre  $b$ -chromatique d'un graphe peut augmenter, diminuer ou rester inchangé lorsque le graphe  $G$  est modifié en supprimant un sommet ou une arête. De ce fait, on peut classer les graphes critiques par rapport au nombre  $b$ -chromatique en six classes de graphes. Soit  $G = (V, E)$  un graphe simple.

La classe des graphes sommet  $b^-$ -critiques :  $\forall v \in V(G), b(G - v) = b(G)$ .

La classe des graphes arête  $b^-$ -critiques :  $\forall e \in E(G), b(G - e) = b(G)$ .

La classe des graphes sommet  $b^+$ -critiques :  $\forall v \in V(G), b(G - v) > b(G)$ .

La classe des graphes arête  $b^+$ -critiques :  $\forall e \in E(G), b(G - e) > b(G)$ .

La classe des graphes sommet  $b^-$ -critiques :  $\forall v \in V(G), b(G - v) < b(G)$ .

La classe des graphes arête  $b^-$ -critiques :  $\forall e \in E(G), b(G - e) < b(G)$ .

## 1.5 Résultats particuliers sur les graphes sommet et arête $b$ -critique

Nous traitons dans cette section quelques résultats particuliers concernant uniquement les quatre premières classes définies ci-dessus. Les travaux présentés dans cette section ont été obtenus en collaboration avec M. Blidia, Z. Zemir et F. Maffray.

Il est à noter que dans cette section, tous les sommets dessinés en gras représentent les  $b$ -sommets.

### 1.5.1 Graphes sommet et arête $b^-$ -critiques

Tout d'abord, il est facile de voir que les graphes bipartis complets et les graphes bipartis complets moins un couplage parfait d'ordre  $n \geq 3$  sont sommet et arête  $b^-$ -critique. Ainsi, en utilisant le Théorème de M. Kouider, M. Mahéo [35], on obtient le résultat suivant.

**Proposition 1.28.** *Soient  $P_n$  et  $C_n$  respectivement une chaîne et un cycle d'ordre  $n$ .*

- (i)  $P_n$  est sommet  $b^-$ -critique si et seulement si  $n \geq 8$ .
- (ii)  $P_n$  est arête  $b^-$ -critique si et seulement si  $n \geq 7$ .
- (iii)  $C_n$  est sommet  $b^-$ -critique si et seulement si  $n \geq 6$ .
- (iv)  $C_n$  est arête  $b^-$ -critique si et seulement si  $n \geq 5$ .

Preuve. Posons  $G = P_n - a$  tel que  $a$  est un sommet de  $P_n$  avec  $n \geq 8$  ou bien est une arête de  $P_n$  avec  $n \geq 7$ . Puisque  $\Delta(G) = 2$ , alors la Proposition 1.10 implique que  $b(G) \leq 3$ . D'autre part, il est immédiat de voir que  $G$  contient un  $P_5$  ou un  $P_4 + P_3$  comme sous-graphe induit. Ainsi, il est facile de vérifier que  $b(P_5) = b(P_4 + P_3) = 3$ . Par ailleurs, comme  $G$  est une forêt, alors toute  $b$ -coloration de  $P_5$  ou de  $P_4 + P_3$  avec 3 couleurs peut s'étendre à  $G$ . De ce fait,  $b(G) = 3$ . D'après le Théorème 1.16,  $b(G) = b(P_n) = 3$  pour tout ( $n \geq 8$  si  $a$  est un sommet) ou ( $n \geq 7$  si  $a$  est une arête). D'où  $P_n$  est sommet  $b^-$ -critique (si  $n \geq 8$ ) et arête  $b^-$ -critique si ( $n \geq 7$ ).

Par une simple vérification, on peut voir que  $P_n$  n'est ni sommet  $b^-$ -critique lorsque  $n \leq 7$ , ni arête  $b^-$ -critique lorsque  $n \leq 6$ .

Un raisonnement similaire s'applique aux deux autres cas. □

### 1.5.2 Graphes sommet $b^+$ -critiques

Nous commençons cette partie par rappeler la définition d'un sommet *simplicial*.

**Définition 1.29.** *Un sommet d'un graphe  $G$  est dit simplicial si son voisinage induit une clique.*

Tout graphe sommet  $b^+$ -critique satisfait les trois propriétés suivantes:

**Proposition 1.30.** *Soit  $G$  un graphe sommet  $b^+$ -critique de degré minimum  $\delta(G)$  et de  $m$ -degré  $m(G)$ . Alors*

*i)  $b(G) \leq \delta(G) - 1$ .*

*ii)  $b(G) \leq m(G) - 1$ .*

*iii)  $G$  ne contient pas de sommets simpliciaux.*

Preuve. *i)* Soient  $G = (V, E)$  un graphe sommet  $b^+$ -critique et  $v \in V(G)$  un sommet de degré  $\delta(G)$ . Posons  $b(G - v) = k$  et considérons une  $b$ -coloration  $c$  de  $G - v$  avec  $k$  couleurs. Supposons que  $b(G) \geq \delta(G)$ . Alors  $k > \delta(G) = d_G(v)$ . Soit  $\pi$  une coloration de  $G$  avec  $k$  couleurs obtenue à partir de  $c$  telle que  $\pi(u) = c(u)$  pour tout sommet  $u$  de  $G - v$ . Vu que  $d_G(v) \leq k - 1$ , alors  $\pi$  peut s'étendre à  $G$ . En effet, il suffit de colorer  $v$  par une couleur qui n'apparaît pas dans son voisinage. Il est clair que  $\pi$  est une  $b$ -coloration de  $G$  avec  $k$  couleur. Par conséquent,  $b(G) \geq k$ , contradiction.

*ii)* Soit  $v$  un sommet de  $G$ . Posons  $G' = G - v$ . Vu que  $m(G') \leq m(G)$ , alors  $b(G') \leq m(G)$ . De ce fait, le nombre  $b$ -chromatique de  $G'$  ne peut augmenter lorsque un sommet quelconque de  $G$  est enlevé.

*iii)* Soit  $G$  un graphe sommet  $b^+$ -critique et supposons qu'il contient un sommet simplicial  $v$ . Posons  $k = b(G - v)$ . Alors  $k > b(G) \geq \omega(G) > d_G(v)$ . Avec un argument similaire à celui utilisé dans (i) on montre que  $G$  admet une  $b$ -coloration avec  $k$  couleurs, ce qui constitue une contradiction.  $\square$

De cette proposition découle directement le corollaire suivant.

**Corollaire 1.31.** *Soit  $G$  un graphe  $\Delta$ -régulier sommet  $b^+$ -critique. Alors  $b(G) \leq \Delta(G) - 1$ .*

Un graphe est dit *triangulé* [60, 61] s'il ne possède pas de cycle induit de longueur supérieure ou égale à 4. Il est connu que tout graphe triangulé admet un sommet simplicial. D'où le résultat suivant est immédiat.

**Corollaire 1.32.** *Les graphes triangulés ne sont pas des graphes sommet  $b^+$ -critiques.*

Maintenant, nous allons étudier quelques graphes sommet  $b^+$ -critiques. Rappelons d'abord un résultat simple de R. Javadi et B. Omoomi [40].

**Proposition 1.33.** *[40]  $b(C_3 \square C_3) = 3$ .*

**Proposition 1.34.** *Soient  $G_1$  et  $G_2$  deux graphes de sommets disjoints. Si  $G_1$  et  $G_2$  sont sommet  $b^+$ -critiques, alors le joint de  $G_1$  et  $G_2$  est aussi sommet  $b^+$ -critique.*

Preuve. Posons  $G = G_1 \vee G_2$ . Soit  $v$  le sommet retiré de  $G$ . Sans perte de généralité, on peut supposer que  $v \in V(G_1)$ . D'après le Théorème 1.24,

$$\begin{aligned} b(G - v) &= b((G_1 - v) \vee G_2) \\ &= b(G_1 - v) + b(G_2) \\ &> b(G_1) + b(G_2) = b(G) \end{aligned}$$

D'où,  $G$  est sommet  $b^+$ -critique. □

**Proposition 1.35.** *Le graphe  $C_3 \square C_3$  est sommet  $b^+$ -critique.*

Preuve. Posons  $G = C_3 \square C_3$ . D'après la Proposition 1.33,  $b(G) = 3$ . D'autre part, la Figure 1.2 présente une  $b$ -coloration de  $G - v$  avec 4 couleurs où  $v$  est un sommet de  $G$ . Vu la symétrie, tous les sommets de  $G$  jouent le même rôle. De ce fait,  $b(G - u) \geq 4 > b(G) = 3$ , pour tout sommet  $u$  de  $G$ . D'où,  $G$  est sommet  $b^+$ -critique. □

Le corollaire suivant est une conséquence directe des Propositions 1.34 et 1.35.

**Corollaire 1.36.** *Si  $G = (C_3 \square C_3) \vee (C_3 \square C_3) \vee \dots \vee (C_3 \square C_3)$ , alors  $G$  est sommet  $b^+$ -critique.*

Une question naturelle qui se pose est la suivante.

**Problème 1.37.** *Est-il vrai que le graphe  $C_3 \square C_3$  et le joint de  $l > 1$  copies de  $C_3 \square C_3$  sont les seuls graphes sommet  $b^+$ -critiques..*

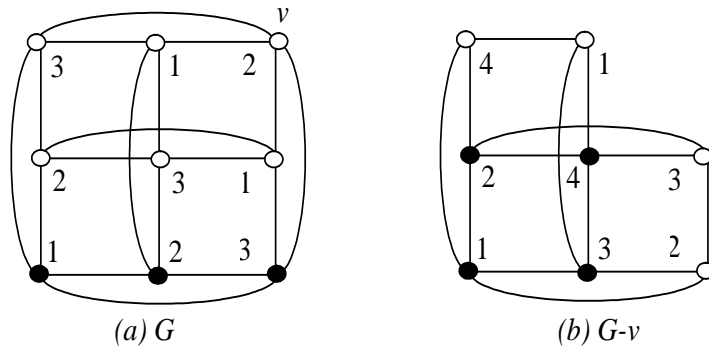


FIGURE 1.2. Un graphe  $G = C_3 \square C_3$  avec  $b(G) = 3$  et  $b(G - v) \geq 4$ .

### 1.5.3 Graphes arête $b^+$ -critiques

Dans cette partie, nous allons donner quelques propriétés concernant la classe des graphes arête  $b^+$ -critiques.

**Proposition 1.38.** *Soit  $G$  un graphe arête  $b^+$ -critique. Alors*

- i)  $b(G) \leq \Delta(G)$ .*
- ii)  $b(G) \leq m(G) - 1$ .*
- iii)  $G$  ne contient pas de sommets simpliciaux.*

*Preuve.* *i)* Soit  $G$  un graphe arête  $b^+$ -critique et supposons que  $b(G) = \Delta(G) + 1$ . Vu que  $\Delta(G - e) \leq \Delta(G)$ , alors la Proposition 1.10 implique que  $b(G - e) \leq \Delta(G) + 1 = b(G)$ , contradiction.

*ii)* Avec un raisonnement similaire à celui utilisé dans la Proposition 1.30 (ii), on montre que  $b(G) \leq m(G) - 1$ .

*iii)* Soit  $G$  un graphe arête  $b^+$ -critique et supposons qu'il contient un sommet simplicial  $x$ . Soit  $e = xy$  l'arête enlevée de  $G$  telle que  $y \in N(x)$ . Posons  $k = b(G - e)$  et considérons une  $b$ -coloration  $c$  de  $G - e$  avec  $k$  couleurs. Les sommets  $x$  et  $y$  portent la même couleur car sinon, en ajoutant l'arête  $e$ ,  $c$  reste une  $b$ -coloration de  $G$  avec  $k$  couleurs et par conséquent  $b(G) \geq k$ , ce qui constitue une contradiction. En conséquence, tout  $b$ -sommets de  $c$  est adjacent à un sommet (différent de  $x$ ) de couleur  $c(x)$ .

Si  $\omega(G) \geq k$ , alors  $b(G) \geq \omega(G) \geq k$ , contradiction. Si  $\omega(G) < k$ , alors  $d_G(x) \leq \omega(G) - 1 < k - 1$ . De ce fait, on peut recolorer  $x$  par une couleur manquante dans son voisinage. Mais dans ce cas, en ajoutant l'arête  $e$ ,  $c$  reste une  $b$ -coloration de  $G$  avec  $k$  couleurs, contradiction.  $\square$

Les résultats suivants résultent immédiatement du Théorème 1.13, du Corollaire 1.14 et de la Proposition 1.38.

**Corollaire 1.39.** *Soit  $G$  un graphe contenant  $\Delta(G) + 1$  sommets  $v_1, \dots, v_{\Delta+1}$  tels que  $d_G(v_i) = \Delta(G)$  pour tout  $i$  et  $d(v_i, v_j) \geq 4$  pour tout  $i \neq j$ . Alors  $G$  n'est pas arête  $b^+$ -critique.*

**Corollaire 1.40.** *Soit  $G$  un graphe  $d$ -régulier ( $d \geq 2$ ) d'ordre  $n \geq d^4$ . Alors  $G$  n'est pas arête  $b^+$ -critique.*

**Corollaire 1.41.** *Les graphes triangulés ne sont pas des graphes arête  $b^+$ -critiques.*

Nous présentons maintenant quelques graphes arête  $b^+$ -critiques.

**Proposition 1.42.** *Le graphe de Petersen et le graphe  $C_3 \square C_3$  sont arête  $b^+$ -critiques.*

Preuve. Désignons par  $P$  le graphe de Petersen. Soit  $G = P$  ou  $C_3 \square C_3$ . D'après le Théorème 1.15 et la Proposition 1.33,  $b(G) = 3$ . Les Figures 1.3 et 1.4 présentent une  $b$ -coloration de  $G - e$  utilisant 4 couleurs où  $e$  est une arête de  $G$ . Vu que toutes les arêtes de  $G$  jouent le même rôle, alors  $b(G - e') \geq 4 > b(G) = 3$ , pour toute arête  $e'$  de  $G$ .

D'où,  $P$  et  $C_3 \square C_3$  sont arête  $b^+$ -critiques.  $\square$

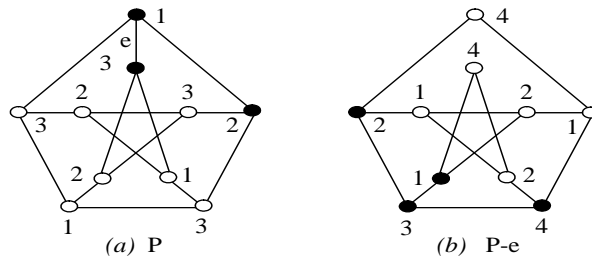


FIGURE 1.3. Le graphe de Petersen  $P$  avec  $b(P) = 3$  et  $b(P - e) = 4$ .



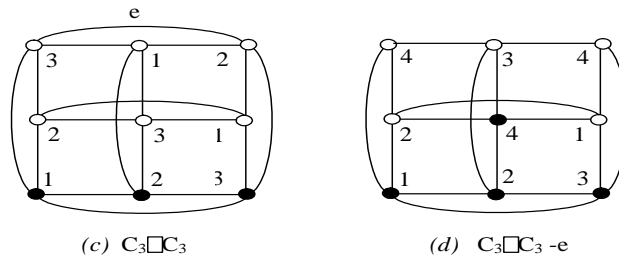


FIGURE 1.4. Un graphe  $G = C_3 \square C_3$  avec  $b(G) = 3$  et  $b(G - e) \geq 4$ .

**Proposition 1.43.** *Soit  $P$  le graphe de Petersen. Alors les graphes  $P \vee P$  et  $P \vee (C_3 \square C_3)$  sont arête  $b^+$ -critiques.*

Preuve. Soient  $G_1 = P$  et  $G_2 \in \{P, C_3 \square C_3\}$ . D'après la Proposition 1.42,  $G_1$  et  $G_2$  sont arête  $b^+$ -critiques. Posons  $G = G_1 \vee G_2$ . Soient  $E_1, E_2$  et  $E_3$  trois sous-ensembles de  $E$  tels que  $E_1 = \{uv \in E(G) : u, v \in V(G_1)\}$ ,  $E_2 = \{uv \in E(G) : u, v \in V(G_2)\}$  et  $E_3 = \{uv \in E(G) : u \in V(G_1) \text{ et } v \in V(G_2)\}$ . Soit  $e$  l'arête enlevée de  $G$ . Puisque les arêtes de  $E_1 \cup E_2$  (respectivement,  $E_3$ ) jouent le même rôle, alors il y a deux types d'arêtes à considérer.

**Cas 1:**  $e \in E_1 \cup E_2$ .

Sans perte de généralité, on peut supposer que  $e \in E_1$ . Au vu du Théorème 1.24,  $b(G - e) = b((G_1 - e) \vee G_2) = b(G_1 - e) + b(G_2)$ . Puisque  $G_1$  est arête  $b^+$ -critique, alors  $b(G - e) > b(G_1) + b(G_2)$ . D'après le Théorème 1.24,  $b(G - e) > b(G_1 \vee G_2) = b(G)$ . D'où,  $G$  est arête  $b^+$ -critique.

**Cas 2:**  $e \in E_3$ .

Les sommets de  $G_1$  et  $G_2$  sont notés respectivement comme dans la Figure 1.5. Soient  $c_1$  une coloration de  $G_1$  avec 4 couleurs (Voir Figure 1.5 (a) et (c)) et  $c_2$  une coloration de  $G_2$  avec 4 couleurs (Voir Figure 1.5 (b) et (d)). Soit  $e = x_2 y_2$ . Alors en combinant  $c_1$  et  $c_2$  nous obtenons une  $b$ -coloration  $c$  de  $G - e$  avec 7 couleurs dont les  $b$ -sommets de  $c$  sont  $x_2, x_6, x_8, x_9, y_6, y_8, y_9$ . Ceci implique que  $b(G - e) \geq 7$ . D'après les Théorèmes 1.15 et 1.24 et la Proposition 1.33,  $b(G) = b(G_1 \vee G_2) = b(G_1) + b(G_2) = 6 < b(G - e)$ . D'où,  $G$  est arête  $b^+$ -critique.  $\square$

En utilisant les Propositions 1.42 et 1.43, on obtient le résultat suivant.

**Corollaire 1.44.** *Soit  $H$  le joint de  $l > 1$  copies du graphe de Petersen. Alors  $H$  et  $(C_3 \square C_3) \vee H$  sont arête  $b^+$ -critiques.*

Preuve. Posons  $G = G_1 \vee G_2 \vee G_3 \dots \vee G_l$  ( $l \geq 2$ ) avec  $G_1 \in \{P, C_3 \square C_3\}$  et  $G_i = P$  ( $2 \leq i \leq l$ ). D'après le Théorèmes 1.15 et 1.24 et la Proposition 1.33.

$$b(G) = b(G_1 \vee G_2 \vee G_3 \dots \vee G_l) = \sum_{i=1}^l b(G_i) = 3l$$

Soit  $e = uv$  l'arête retirée de  $G$ . Alors trois cas sont à considérer.

**a)**  $u, v \in V(G_1)$ . Par le Théorème 1.24,

$$\begin{aligned} b(G - e) &= b((G_1 - e) \vee G_2 \vee \dots \vee G_l) \\ &= b(G_1 - e) + \sum_{i=2}^l b(G_i) \\ &= b(G_1 - e) + 3(l - 1) \end{aligned}$$

D'après la Proposition 1.42,  $b(G_1 - e) > b(G_1) = 3$ , De ce fait, on a  $b(G - e) > 3l = b(G)$ .

**b)**  $u \in V(G_1)$  et  $v \notin V(G_1)$ . Sans perte de de généralité, on peut supposer que  $v \in V(G_2)$ .

Alors

$$\begin{aligned} b(G - e) &= b((G_1 \vee G_2 - e) \vee G_3 \vee \dots \vee G_l) \\ &= b((G_1 \vee G_2) - e) + \sum_{i=3}^l b(G_i) \\ &= b((G_1 \vee G_2) - e) + 3(l - 2) \end{aligned}$$

D'après la Proposition 1.43, les Théorèmes 1.15 et 1.24 et la Proposition 1.33, on a .

$$b((G_1 \vee G_2) - e) > b(G_1 \vee G_2) = b(G_1) + b(G_2) = 6.$$

D'où,  $b(G - e) > 3l = b(G)$ .

**c)**  $u, v \notin V(G_1)$ . Sans perte de généralité, on peut supposer que  $u \in V(G_2)$ . Si  $v \in V(G_2)$ ,

alors

$$\begin{aligned}
b(G - e) &= b(G_1 \vee (G_2 - e) \vee G_3 \vee \dots \vee G_l) \\
&= b(G_1) + b(G_2 - e) + \sum_{i=3}^l b(G_i) \\
&= 3 + b(G_2 - e) + 3(l - 2).
\end{aligned}$$

D'après la Proposition 1.42,  $b(G_2 - e) > b(G_2) = 3$ , De ce fait, on a  $b(G - e) > 3l = b(G)$ . D'où,  $b(G - e) > 3l = b(G)$ . Si  $v \notin V(G_2)$ , alors sans perte de généralité, on peut supposer que  $v \in V(G_3)$ . D'où

$$\begin{aligned}
b(G - e) &= b(G_1 \vee (G_2 \vee G_3 - e) \vee G_4 \vee \dots \vee G_l) \\
&= b(G_1) + b(G_2 \vee G_3 - e) + \sum_{i=4}^l b(G_i) \\
&= 3 + b(G_2 \vee G_3 - e) + 3(l - 3).
\end{aligned}$$

D'après la Proposition 1.43 et les Théorèmes 1.15 et 1.24 et la Proposition 1.33,

$$b((G_2 \vee G_3) - e) > b(G_2 \vee G_3) = b(G_2) + b(G_3) = 6.$$

D'où,  $b(G - e) > 3l = b(G)$ . En conséquence,  $G$  est arête  $b^+$ -critique.  $\square$

Il convient de rappeler que, d'après le Théorème 1.15, tout graphe connexe 3-régulier  $G$  qui n'appartient pas à la liste de la Figure 1.1 admet une  $b$ -coloration avec 4 couleurs. Au vu de la Proposition 1.38 (ii),  $G$  n'est pas arête  $b^+$ -critique. D'un autre côté, il est facile de vérifier qu'à l'exception du graphe de Petersen, les autres graphes de la Figure 1.1 ne sont pas arête  $b^+$ -critiques. De ce fait, le résultat suivant est une conséquence directe de la Proposition 1.42.

**Proposition 1.45.** *Le graphe de Petersen est le seul graphe connexe 3-régulier arête  $b^+$ -critique.*

Dans [28], les auteurs ont montré que tout graphe  $d$ -régulier ( $d \leq 6$ ) de maille au moins 5 différent du graphe de Petersen admet une  $b$ -coloration avec  $d + 1$  couleurs. D'où, le résultat suivant est immédiat.

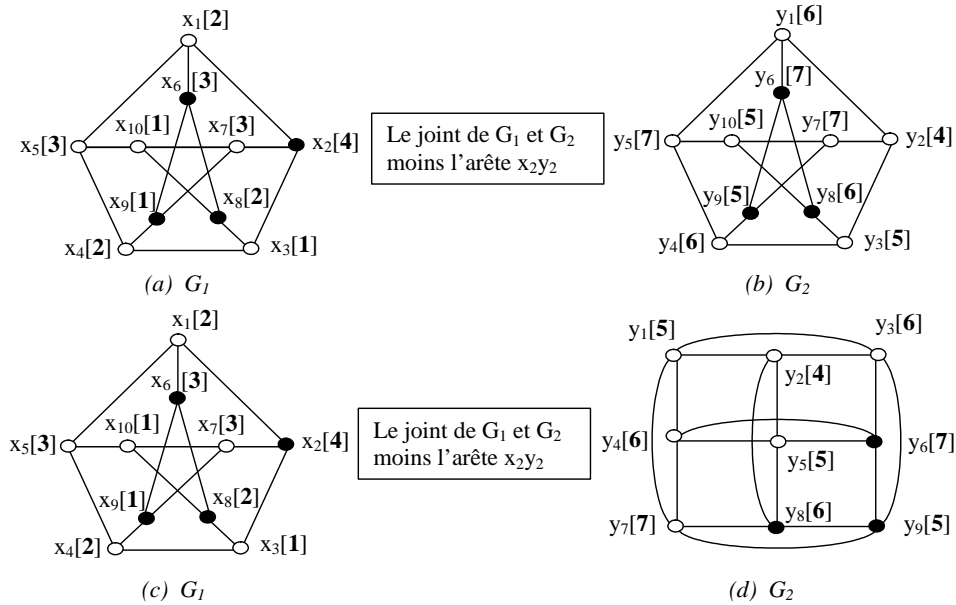


FIGURE 1.5.  $G_1 = P$  et  $G_2 \in \{P, C_3 \square C_3\}$  tels que  $G = G_1 \vee G_2$  et  $b(G - x_2y_2) \geq 7$ . Les valeurs entre crochets représentent les couleurs.

**Proposition 1.46.** *Le graphe de Petersen est le seul graphe  $d$ -régulier ( $d \leq 6$ ) arête  $b^+$ -critique de maille au moins cinq.*

En se basant sur les résultats de M. Blidia et al. [28] concernant les graphes  $d$ -réguliers de maille au moins cinq, on propose la conjecture suivante.

**Conjecture 1.47.** *Tout graphe  $d$ -régulier de maille au moins cinq différent du graphe de Petersen n'est pas arête  $b^+$ -critique.*

Au vu de ces résultats, Il est naturel de se poser les questions suivantes.

**Problèmes 1.48.** • Soit  $P$  le graphe de Petersen et  $H$  le joint de  $l \geq 1$  copies de  $P$ .

*Est-il vrai que les seuls graphes arête  $b^+$ -critiques sont  $P$ ,  $H$  et  $(C_3 \square C_3) \vee H$  ?*

- *Est-ce que tout graphe sommet  $b^+$ -critique est arête  $b^+$ -critique ?*
- *Est-il vrai que tout graphe sommet ou arête  $b^+$ -critique est régulier ?*

Il convient enfin de souligner que dans cette thèse, nous nous intéressons uniquement aux deux dernières classes de graphes, à savoir les graphes sommet  $b^-$ -critiques et les

graphes arête  $b^-$ -critiques qui seront étudiés respectivement dans les chapitres cinq et quatre. Pour des raisons de simplicité, nous proposons d'appeler ces deux classes de graphes respectivement les graphes *b-critiques* et les graphes *arête b-critiques*. Ces définitions se reformulent alors comme suit:

**Définition 1.49.** *Un graphe  $G$  est dit  $b$ -critique (respectivement, arête  $b$ -critique) si la suppression de tout sommet (respectivement, toute arête) de  $G$  fait diminuer le nombre  $b$ -chromatique de  $G$ .*

## CHAPITRE 2

# BORNES SUPÉRIEURES POUR $b(G)$ ET GRAPHERS

## EXTRÉMAUX

Lors de l'étude de la  $b$ -coloration, on s'intéresse en premier lieu à déterminer le nombre  $b$ -chromatique soit d'une façon exacte, en fonction d'autres paramètres de graphes ou bien par des algorithmes polynomiaux. Cependant, pour un graphe quelconque, la détermination du nombre  $b$ -chromatique est un problème  $NP$ -complet. D'où le recours à la recherche des bornes supérieures et inférieures qui l'encadrent le plus possible. Evidemment, ces bornes n'ont un intérêt que si on arrive à les déterminer en temps polynomial. Egalement, la borne qui sera atteinte sera acceptable et souvent il est difficile de l'améliorer.

Dans ce contexte, nous allons présenter dans ce chapitre une borne supérieure pour  $b(G)$  en fonction de l'ordre et la taille de la clique maximum d'un graphe  $G$ , et nous caractérisons les graphes bipartis atteignant cette borne. Ensuite, nous discutons la question de la relation entre  $b(G)$  et  $\chi(G)$ . A partir des résultats précédents, un autre résultat concernant la relation entre  $b(G - v)$  et  $b(G)$  est déduit et sera présenté à la suite.

Le contenu de ce chapitre a été accepté comme communication au deuxième édition du Symposium ISOR 2011 [62] et a été accepté aussi dans la revue Australasian Journal of Combinatorics [63].

### 2.1 Borne supérieure pour $b(G)$

Dans cette partie, on donne une borne supérieure pour le nombre  $b$ -chromatique  $b(G)$  en fonction de  $n$  et  $\omega(G)$ . Il est facile de voir que  $b(K_n) = \frac{n + \omega(K_n)}{2}$ . Le théorème suivant montre que le graphe complet est seul le graphe qui atteint cette borne.

**Théorème 2.1.** *Tout graphe  $G$  d'ordre  $n$  différent d'un graphe complet satisfait*

$$b(G) \leq \lfloor \frac{n + \omega(G) - 1}{2} \rfloor. \quad (2.1)$$

Preuve. Il est clair que si  $\omega(G) = 1$ , alors l'inégalité (2.1) est vérifiée. Supposons alors que  $\omega(G) \geq 2$ . Posons  $b(G) = k$ . Soient  $c$  une  $b$ -coloration de  $G$  avec  $k$  couleurs et  $S_1, S_2, \dots, S_k$  les classes de couleur de  $c$ . Soit  $t$  le nombre de classes de couleur de taille 1. Si  $t = 0$ , alors  $n = \sum_{i=1}^k |S_i| \geq 2k$ . D'où

$$k \leq \frac{n}{2} \leq \lfloor \frac{n + \omega(G) - 1}{2} \rfloor.$$

Supposons maintenant que  $t \geq 1$ . Désignons par  $S_1, \dots, S_t$  les  $t$  classes de couleur de taille 1 et posons  $W = S_1 \cup \dots \cup S_t$ . Il est à noter que  $W$  est une clique, car pour chaque deux entiers  $i, j \leq t$ , l'unique sommet dans  $S_i$  est un  $b$ -sommet et doit être adjacent à l'unique sommet dans  $S_j$ . Notons aussi que  $t < k$  puisque  $G$  n'est pas un graphe complet. Soit  $x_\ell$  un  $b$ -sommet quelconque de couleur  $\ell > t$ . Alors  $x_\ell$  est adjacent à tout sommet de  $W$ . Il s'en suit alors que  $W \cup \{x_\ell\}$  induit un sous-graphe complet de  $G$ , d'où

$$\omega(G) \geq t + 1. \quad (2.2)$$

Puisque pour  $i > t, |S_i| \geq 2$ , alors  $n = t + \sum_{i=t+1}^k |S_i| \geq t + 2(k - t) = 2k - t$ . Donc

$$k \leq \frac{n + t}{2}$$

Par conséquent, la condition (2.2) implique que,

$$k \leq \frac{n + \omega(G) - 1}{2}.$$

Comme  $k$  est un entier positif, alors on a l'inégalité du théorème. □

Nous présentons ci-après une famille de graphes pour lesquels l'inégalité (2.1) est atteinte.

**Proposition 2.2.** *Pour tout entier  $n \geq 4$ , il existe un graphe  $G_n$  d'ordre  $n$  avec*

$$b(G_n) = \lfloor \frac{n + \omega(G_n) - 1}{2} \rfloor.$$

Preuve. Posons  $t = \lceil \frac{n}{3} \rceil$  et  $r = n - 2t$ . Notons que  $r \leq t$ . Nous construisons un graphe  $G_n$  d'ensemble de sommets  $A \cup B \cup C$ , où  $A, B, C$  sont des ensembles deux à deux disjoints, avec  $A = \{a_1, a_2, \dots, a_t\}$ ,  $B = \{b_1, b_2, \dots, b_t\}$  et  $C = \{c_1, c_2, \dots, c_r\}$ , tels que:

- $A$  et  $C$  sont des cliques et  $B$  est un ensemble stable.
- Il n'y a aucune arête entre  $A$  et  $C$ .
- $a_i$  est adjacent à  $b_j$  si et seulement si  $i \neq j$ .
- Tout sommet de  $C \setminus \{c_r\}$  est adjacent à tout sommet de  $B$ , et si  $n \equiv 0 \pmod{3}$ , alors  $c_r$  n'a aucun voisin dans  $B$ , tandis que si  $n \not\equiv 0 \pmod{3}$ , alors  $c_r$  est adjacent à tout sommet de  $B$ .

D'après cette construction, on peut facilement constater que toute clique maximale de  $G_n$  est soit  $A$ , ou  $(A \setminus \{a_i\}) \cup \{b_i\}$ , ou  $(C \setminus \{c_r\}) \cup \{b_i\}$ , ou bien  $C \cup \{b_i\}$  pour chaque  $i \in \{1, \dots, t\}$ ; et dans chaque cas (puisque  $r \leq t$ ) on a  $\omega(G_n) = t$ . Il s'en suit alors

$$\lfloor \frac{n + \omega(G_n) - 1}{2} \rfloor = \lfloor \frac{n + t - 1}{2} \rfloor = \begin{cases} t + r - 1 & \text{si } n \equiv 0 \pmod{3} \\ t + r & \text{si } n \not\equiv 0 \pmod{3}. \end{cases} \quad (2.3)$$

Pour montrer que  $G_n$  satisfait l'égalité de la Proposition 2.2, il suffit de donner une  $b$ -coloration de  $G_n$  avec le nombre de couleurs indiqué dans (2.3) de la manière suivante:

Pour chaque entier  $i \leq t$ , on affecte la couleur  $i$  à  $a_i$  et  $b_i$ . Pour tout entier  $i \leq r - 1$ , on affecte la couleur  $t + i$  à  $c_i$ . Si  $n \equiv 0 \pmod{3}$ , on affecte la couleur 1 à  $c_r$ . Si  $n \not\equiv 0 \pmod{3}$ , on affecte la couleur  $t + r$  à  $c_r$ .

Il est facile de vérifier que cette coloration est une  $b$ -coloration de  $G_n$ ; en effet, un  $b$ -système de cette  $b$ -coloration est obtenu en prenant soit l'ensemble  $B \cup C \setminus \{c_r\}$  (si  $n \equiv 0 \pmod{3}$ ) ou bien l'ensemble  $B \cup C$  (si  $n \not\equiv 0 \pmod{3}$ ).  $\square$

Le corollaire suivant est une conséquence directe du Théorème 2.1

**Corollaire 2.3.** *Si  $G$  est un graphe sans triangle d'ordre  $n$  différent de  $K_2$ , alors*

$$b(G) \leq \lceil \frac{n}{2} \rceil.$$



*En particulier, tout graphe biparti différent de  $K_2$  satisfait cette inégalité.*

La question immédiate qui suit l'établissement de la borne (2.1) est la suivante:

Quels sont les graphes  $G$  pour lesquels  $b(G) = \lfloor \frac{n + \omega(G) - 1}{2} \rfloor$ ?

Dans la section 2.2, nous donnons une réponse à cette question dans le cas où  $G$  est un graphe biparti.

## **2.2 Graphes bipartis tels que $b(G) = \lfloor \frac{n + \omega(G) - 1}{2} \rfloor$ .**

Nous commençons cette section par deux lemmes qui nous seront utiles dans la suite.

**Lemme 2.4.** *Soit  $G$  un graphe biparti avec la bipartition  $(X, Y)$ . Soient  $c$  une  $b$ -coloration de  $G$  avec  $k$  couleurs et  $S$  un  $b$ -système de  $c$ . Si  $|S \cap X| \geq 2$ , alors toutes les couleurs de  $c$  apparaissent dans  $Y$ . En particulier, si  $|Y| = k$ , alors tous les sommets de  $Y$  ont des couleurs distinctes.*

*Preuve.* Soit  $S = \{s_1, \dots, s_k\}$ , et supposons, sans perte de généralité, que  $s_1, s_2 \in X$ . Pour tout  $i \in \{1, 2\}$ , le sommet  $s_i$  doit avoir un voisin de couleur  $j$  pour tout  $j \neq i$ . Ceci implique que  $Y$  contient des sommets de toutes les couleurs. En particulier, si  $|Y| = k$ , alors tous les sommets de  $Y$  sont de couleurs distinctes.  $\square$

**Lemme 2.5.** *Soit  $G$  un graphe biparti d'ordre  $n$  avec la bipartition  $(X, Y)$  tel que  $|X| > |Y|$ . S'il existe une  $b$ -coloration de  $G$  avec  $\lceil \frac{n}{2} \rceil$  couleurs, alors  $|Y| = \lceil \frac{n}{2} \rceil - 1$  et tous les  $b$ -sommets de  $X$  ont la même couleur.*

*Preuve.* Posons  $k = \lceil \frac{n}{2} \rceil$ , et considérons une  $b$ -coloration  $c$  de  $G$  avec  $k$  couleurs. Alors  $n = |X| + |Y| > 2|Y|$ . D'où,

$$|Y| < \frac{n}{2} \leq \lceil \frac{n}{2} \rceil = k. \quad (2.4)$$

Si  $X$  contient au moins deux  $b$ -sommets de  $c$  de couleurs distinctes, alors le Lemme 2.4 implique que toutes les couleurs de  $c$  apparaissent dans  $Y$ . De ce fait,  $|Y| \geq \lceil \frac{n}{2} \rceil$ , ce qui

contredit l'inégalité dans (2.4). Donc tous les  $b$ -sommets de  $X$  ont la même couleur. En conséquence,  $Y$  contient des  $b$ -sommets avec au moins  $k - 1$  couleurs, d'où  $|Y| \geq k - 1$ . La condition (2.4) implique que  $|Y| = k - 1 = \lceil \frac{n}{2} \rceil - 1$ .  $\square$

Soit  $K_{p,p}^*$  le graphe obtenu à partir d'un graphe biparti complet  $K_{p,p}$  en supprimant un couplage parfait de  $p$  arêtes.

Dans le but de caractériser les graphes bipartis tels que  $b(G) = \lceil \frac{n}{2} \rceil$ , nous définissons quatre familles de graphes bipartis  $\mathcal{F}_i$  ( $i = 0, 1, 2, 3$ ) de la façon suivante:

**Classe  $\mathcal{F}_0$ .** Cette classe se compose de tous les graphes bipartis avec au plus quatre sommets différent de  $K_2$ ,  $\overline{K_3}$  et  $\overline{K_4}$ .

**Classe  $\mathcal{F}_1$ .** Un graphe biparti  $G = (X, Y; E)$  est dans  $\mathcal{F}_1$  si on peut écrire  $X = A \cup C$  et  $Y = B \cup D$  où  $A, B, C$  et  $D$  sont des ensembles disjoints vérifiant les conditions suivantes:

- $|A| = |D| = p$ ,  $|B| = |C| = q$ , avec  $q \geq p \geq 0$  et  $p + q \geq 3$ ;
- $G[A \cup B] = K_{p,q}$  et  $G[B \cup C] = K_{q,q}^*$ ;
- Si  $p > 1$ , alors  $G[A \cup D] = K_{p,p}^*$ , (et il peut y avoir des arêtes entre  $C$  et  $D$ );
- Si  $p = 1$ , le sommet unique de  $D$  a au moins un non-voisin dans  $X$ .

**Classe  $\mathcal{F}_2$ .** Un graphe biparti  $G = (X, Y; E)$  est dans  $\mathcal{F}_2$  si on peut écrire  $X = A \cup \{x, u, v\}$  et  $Y = B \cup \{y\}$  où  $A, B$  et  $\{x, y, u, v\}$  sont des ensembles disjoints vérifiant les conditions suivantes:

- $|A| = |B| = p$ , avec  $p \geq 1$ , et  $G[A \cup B] = K_{p,p}^*$ ;
- $x$  est adjacent à tous les sommets de  $B \cup \{y\}$ , et  $y$  est adjacent à tous les sommets de  $A \cup \{x\}$ ;
- Tout sommet de  $B$  a un voisin dans  $\{u, v\}$ ;
- $y$  a au plus un voisin dans  $\{u, v\}$ , et si  $y$  est adjacent à l'un des deux sommets  $u, v$ , disons à  $u$ , alors  $v$  est adjacent à tous les sommets de  $B$ .

**Classe  $\mathcal{F}_3$ .** Un graphe biparti  $G = (X, Y; E)$  est dans  $\mathcal{F}_3$  si on peut écrire  $X = A \cup \{x\}$  où  $A$ ,  $\{x\}$  et  $Y$  sont des ensembles disjoints vérifiant les conditions suivantes:

- $|A| = |Y| = p$ , avec  $p \geq 2$ , et  $G[A \cup Y] = K_{p,p}^*$ ;
- $x$  est adjacent à tous les sommets de  $Y$ .

Posons  $\mathcal{F}_b = \mathcal{F}_0 \cup \mathcal{F}_1 \cup \mathcal{F}_2 \cup \mathcal{F}_3$ .

Le lemme suivant montre que le nombre  $b$ -chromatique de  $G \in \mathcal{F}_b$  est égal à  $\lceil \frac{n}{2} \rceil$ .

**Lemme 2.6.** *Soit  $G \in \mathcal{F}_b$  un graphe d'ordre  $n$ . Alors  $b(G) = \lceil \frac{n}{2} \rceil$ .*

Preuve. La définition de  $\mathcal{F}_b$  implique que  $G$  est un graphe biparti et  $G \neq K_2$ . D'après le Corollaire 2.3, on a  $b(G) \leq \lceil \frac{n}{2} \rceil$ . Pour montrer l'égalité il suffit de donner une  $b$ -coloration  $c$  de  $G$  avec  $\lceil \frac{n}{2} \rceil$  couleurs. Cette coloration se fait de la manière suivante:

Supposons que  $G \in \mathcal{F}_0$ . Si  $G = K_1$  ou  $\overline{K_2}$ , alors on a  $b(G) = 1 = \lceil \frac{n}{2} \rceil$ . Dans les autres cas, on a  $b(G) = 2 = \lceil \frac{n}{2} \rceil$ .

Supposons que  $G \in \mathcal{F}_1$ . Posons  $B = \{b_1, b_2, \dots, b_q\}$  et  $C = \{c_1, c_2, \dots, c_q\}$ , où les non-arêtes entre  $B$  et  $C$  sont  $b_1c_1, \dots, b_qc_q$ . Si  $p \geq 1$ , alors posons  $A = \{a_1, a_2, \dots, a_p\}$  et  $D = \{d_1, d_2, \dots, d_p\}$ , où les non-arêtes entre  $A$  et  $D$  sont  $a_1d_1, \dots, a_pd_p$ . Il est à noter que  $\lceil \frac{n}{2} \rceil = p + q$ . On affecte la couleur  $i$  à  $b_i$  et  $c_i$  ( $1 \leq i \leq q$ ), et, si  $p \geq 1$ , on affecte la couleur  $q + j$  à  $a_j$  et  $d_j$  ( $1 \leq j \leq p$ ). On obtient une  $b$ -coloration avec  $p + q$  couleurs, où  $A \cup B$  est un  $b$ -système de cette coloration.

Supposons maintenant que  $G \in \mathcal{F}_2$ . Posons  $A = \{a_1, a_2, \dots, a_p\}$  et  $B = \{b_1, b_2, \dots, b_p\}$ , où les non-arêtes entre  $A$  et  $B$  sont  $a_1b_1, \dots, a_pb_p$ . Notons que  $\lceil \frac{n}{2} \rceil = p + 2$ . On colore  $a_i$  et  $b_i$  avec  $i$  ( $1 \leq i \leq p$ ) ensuite on colore  $x$  et  $y$  avec respectivement  $p + 1$  et  $p + 2$ . Si  $y$  est adjacent à  $u$ , alors on colore  $u$  avec  $p + 1$  et  $v$  avec  $p + 2$ . Si  $y$  n'est pas adjacent à  $u$  et à  $v$ , alors on colore  $u$  et  $v$  avec  $p + 2$ . On obtient une  $b$ -coloration avec  $p + 2$  couleurs, où  $B \cup \{x, y\}$  est un  $b$ -système de cette coloration.

Enfin, supposons que  $G \in \mathcal{F}_3$ . Posons  $A = \{a_1, a_2, \dots, a_p\}$  et  $Y = \{y_1, y_2, \dots, y_p\}$ , où les non-arêtes entre  $A$  et  $Y$  sont  $a_1y_1, \dots, a_py_p$ . Il à noter que  $\lceil \frac{n}{2} \rceil = p + 1$ . On colore  $a_i$

et  $y_i$  avec  $i$  ( $1 \leq i \leq p$ ) et  $x$  avec  $p + 1$ . On obtient une  $b$ -coloration avec  $p + 1$  couleurs, où  $B \cup \{x\}$  est un  $b$ -système de cette coloration.

Donc on a toujours une  $b$ -coloration de  $G \in \mathcal{F}_b$  avec  $\lceil \frac{n}{2} \rceil$  couleurs.  $\square$

Maintenant, on peut caractériser les graphes bipartis pour lesquels  $b(G) = \lceil \frac{n}{2} \rceil$ .

**Théorème 2.7.** *Soit  $G$  un graphe biparti d'ordre  $n$ . Alors,*

$$b(G) = \lceil \frac{n}{2} \rceil \text{ si et seulement si } G \in \mathcal{F}_b.$$

Preuve. Soit  $(X, Y)$  la bipartition de  $G$ . Si  $n \leq 4$ , alors par une simple vérification, on peut constater que l'égalité  $b(G) = \lceil \frac{n}{2} \rceil$  est vérifiée si et seulement si  $G \in \mathcal{F}_0$ . De ce fait, on peut supposer par la suite que  $n \geq 5$ . Si  $G \in \mathcal{F}$ , alors par le Lemme 2.6, on a  $b(G) = \lceil \frac{n}{2} \rceil$ . Établissons maintenant la condition nécessaire. Posons  $k = \lceil \frac{n}{2} \rceil$  et considérons une  $b$ -coloration  $c$  de  $G$  avec  $k$  couleurs. Puisque  $n \geq 5$ , alors  $k \geq 3$ . Soit  $S$  un  $b$ -système de  $c$ . Posons  $S_X = S \cap X$  et  $S_Y = S \cap Y$ . Deux cas sont à considérer selon la parité de  $n$ .

**Cas 1:**  $n$  est pair. Alors  $k = \frac{n}{2}$  et  $n \geq 6$ .

**Cas 1.1:**  $|X| = |Y| = k$ . Soient  $X = \{x_1, x_2, \dots, x_k\}$  et  $Y = \{y_1, y_2, \dots, y_k\}$ .

Supposons d'abord que  $|S_X| = 0$ . Alors tous les sommets de  $Y$  sont des  $b$ -sommets avec des couleurs distinctes. Le Lemme 2.4 implique que tous les sommets de  $X$  sont de couleurs distinctes. Donc on peut supposer que  $c(x_i) = c(y_i) = i$  pour tout  $i \in \{1, \dots, k\}$ . Pour tout entier  $i \in \{1, \dots, k\}$ , puisque  $y_i$  est un  $b$ -sommets il doit être adjacent à tous les sommets de  $X \setminus \{x_i\}$ . D'où  $G$  est isomorphe à  $K_{k,k}^*$ , qui est un membre de la famille  $\mathcal{F}_1$  (avec  $q = k$  et  $p = 0$ ).

Supposons maintenant que  $|S_X| = 1$ . Alors  $|S_Y| = k - 1 \geq 2$ . Par le Lemme 2.4, tous les sommets de  $X$  ont des couleurs distinctes. Sans perte de généralité, on peut supposer que  $S_X = \{x_1\}$ ,  $S_Y = \{y_2, y_3, \dots, y_k\}$ ,  $c(x_1) = 1$ ,  $c(x_i) = c(y_i) = i$  pour tout  $i \in \{2, \dots, k\}$ , et  $c(y_1) = \ell$  pour un certain  $\ell \in \{1, \dots, k\}$ . Pour tout  $i \in \{2, \dots, k\}$ , puisque  $y_i$  est un  $b$ -sommets il doit être adjacent à tous les sommets de  $X \setminus \{x_i\}$ . D'où,  $x_1$  est adjacent à tous

les sommets de  $S_Y$ . Le sommet  $y_1$  n'est pas adjacent à  $x_\ell$ , mais il peut être adjacent à un sommet quelconque de  $X \setminus \{x_\ell\}$ . Donc  $G$  est un membre de la famille  $\mathcal{F}_1$  (avec  $q = k - 1$ ,  $p = 1$ ,  $A = \{x_1\}$ ,  $B = S_Y$ ,  $C = X \setminus \{x_1\}$  et  $D = \{y_1\}$ ).

Enfin, supposons que  $|S_X| > 1$  et  $|S_Y| > 1$ . Le Lemme 2.4 implique que tous les sommets de  $X$  (respectivement, de  $Y$ ) ont des couleurs distinctes. Sans perte de généralité, on peut supposer que  $c(x_i) = c(y_i) = i$  pour tout  $i \in \{1, \dots, k\}$  et  $S_X = \{x_1, x_2, \dots, x_p\}$  (avec  $p \geq 2$ ). De ce fait,  $S_Y = \{y_{p+1}, y_{p+2}, \dots, y_k\}$  (avec  $k - p \geq 2$ ). Posons  $A = S_X$ ,  $B = S_Y$ ,  $C = X \setminus S_X$  et  $D = Y \setminus S_Y$ . Alors  $|A| = |D|$  et  $|B| = |C|$ . Tout  $b$ -sommet  $x_i$  dans  $S_X$  est adjacent à tous les sommets de  $Y \setminus \{y_i\}$ , et tout  $b$ -sommet  $y_i$  dans  $S_Y$  est adjacent à tous les sommets de  $X \setminus \{x_i\}$ . Donc on a  $G[A \cup B] = K_{p, k-p}$ ,  $G[A \cup D] = K_{p, p}^*$ ,  $G[B \cup C] = K_{k-p, k-p}^*$ , et il peut y avoir des arêtes arbitraires entre  $C$  et  $D$ . D'où  $G$  est un membre de  $\mathcal{F}_1$ .

**Cas 1.2:**  $|X| \neq |Y|$ . Sans perte de généralité, on peut supposer que  $|X| > |Y|$ . D'après le Lemme 2.5, on a  $|Y| = k - 1$ . En conséquence,  $|X| = n - |Y| = k + 1$ . Posons  $X = \{x_1, x_2, \dots, x_{k+1}\}$  et  $Y = \{y_1, y_2, \dots, y_{k-1}\}$ . Le Lemme 2.5 implique que  $S_X$  contient un seul sommet, disons  $x_1$ . Ceci implique que tous les sommets de  $Y$  sont des  $b$ -sommets avec des couleurs distinctes. Donc  $S_Y = Y$ . Aussi,  $x_1$  est adjacent à tous les sommets de  $Y$ . On peut supposer que  $c(x_1) = 1$  et  $c(y_i) = i + 1$  pour tout  $i \in \{1, \dots, k - 1\}$ . Puisque  $k - 1 \geq 2$ , alors le Lemme 2.4 implique que toutes les couleurs de  $c$  apparaissent dans  $X$ . D'où, on peut supposer que pour tout  $i \in \{2, \dots, k\}$  on a  $c(x_i) = i$ , et  $c(x_{k+1}) = h$  pour un certain  $h \in \{1, \dots, k\}$ . Sans perte de généralité, on peut supposer que  $h \in \{1, k\}$ .

Posons  $A = \{x_2, \dots, x_{k-1}\}$  et  $B = \{y_1, \dots, y_{k-2}\}$ . Puisque tous les sommets de  $Y$  sont des  $b$ -sommets, il s'en suit que tout sommet  $y_i$  de  $B$  est adjacent à tous les sommets de  $A \setminus \{x_{i+1}\}$ . Donc  $G[A \cup B] = K_{k-2, k-2}^*$ . De plus,  $y_{k-1}$  est adjacent à tous les sommets de  $A$ . Si  $h = 1$ , alors chaque sommet de  $B$  est adjacent à  $x_k$ , et le sommet  $x_{k+1}$  peut avoir des voisins dans  $Y$ . D'autre part, si  $h = k$ , alors  $x_k$  et  $x_{k+1}$  ne sont pas adjacents à  $y_{k-1}$ , et tout sommet  $y_i$  de  $B$  a un voisin dans  $\{x_k, x_{k+1}\}$ . Donc, quelle que soit la valeur de  $h$ ,  $G$  est un membre de la famille  $\mathcal{F}_2$  (avec  $x = x_1$ ,  $\{u, v\} = \{x_k, x_{k+1}\}$  et  $y = y_{k-1}$ ).

**Cas 2:**  $n$  est impair. Alors  $k = \frac{n+1}{2}$  et  $n \geq 5$ . Sans perte de généralité, on peut supposer que  $|X| > |Y|$ . Le Lemme 2.5 implique que  $|Y| = k - 1$ , d'où  $|X| = k$ . Posons  $X = \{x_1, x_2, \dots, x_k\}$  et  $Y = \{y_1, y_2, \dots, y_{k-1}\}$ . D'après le Lemme 2.5,  $S_X$  contient un seul sommet, disons  $x_1$ . De ce fait, tous les sommets de  $Y$  sont des  $b$ -sommets avec des couleurs distinctes ( $S_Y = Y$ ). Puisque  $x_1$  est un  $b$ -sommet, alors il est adjacent à tous les sommets de  $Y$ . Donc on peut supposer que  $c(x_1) = 1$  et  $c(y_i) = i + 1$  pour tout  $i \in \{1, \dots, k - 1\}$ . Puisque  $|S_Y| = k - 1 \geq 2$ , alors toutes les couleurs de  $c$  apparaissent dans  $X$ . Sans perte de généralité, on peut supposer que, pour tout  $i \in \{2, \dots, k\}$ ,  $c(x_i) = i$ . il s'en suit que pour tout  $i \in \{1, \dots, k - 1\}$ , tout  $b$ -sommet  $y_i$  de  $Y$  est adjacent à tous les sommets de  $X \setminus \{x_{i+1}\}$ . D'où  $G$  est un membre de  $\mathcal{F}_3$ . Ceci termine la preuve du Théorème 2.7.  $\square$

Soit  $\alpha(G)$  le nombre de *stabilité* de  $G$ . Tout graphe biparti  $G$  d'ordre  $n$  satisfait  $\alpha(G) \geq \lceil \frac{n}{2} \rceil$ , d'où le Corollaire 2.3 implique que tout graphe biparti  $G$  d'ordre  $n \geq 5$  satisfait  $b(G) \leq \alpha(G)$ . Dans ce qui suit, nous allons caractériser les graphes bipartis tels que  $b(G) = \alpha(G)$ . Posons  $\mathcal{F}'_0 = \{K_1, K_2 + K_1, P_3, P_4, C_4, 2K_2\}$ .

**Théorème 2.8.** *Soit  $G$  un graphe biparti. Alors*

$$b(G) = \alpha(G) \text{ si et seulement si } G \in \mathcal{F}'_0 \cup \mathcal{F}_1 \cup \mathcal{F}_3.$$

Preuve. Si  $G \in \mathcal{F}'_0$ , alors il est facile de vérifier que soit  $b(G) = 1 = \alpha(G)$  ou  $b(G) = 2 = \alpha(G)$ . Si  $G \in \mathcal{F}_1$ , alors il est facile de vérifier que  $\alpha(G) = p + q$ , et nous avons observé dans la preuve du Lemme 2.6 que  $b(G) = p + q$ . Donc  $b(G) = \alpha(G)$ . Si  $G \in \mathcal{F}_3$ , alors il est facile de vérifier  $\alpha(G) = p + 1$ , et nous avons observé dans la preuve du Lemme 2.6 que  $b(G) = p + 1$ . Donc  $b(G) = \alpha(G)$ .

Inversement, supposons que  $b(G) = \alpha(G)$ . Alors  $b(G) \geq \lceil \frac{n}{2} \rceil$ , d'où, par le Théorème 2.7,  $G$  appartient à  $\mathcal{F}_b$ . Si  $G$  est dans  $\mathcal{F}_0 \setminus \mathcal{F}'_0$ , alors il est facile de voir que soit  $b(G) = 1$  et  $\alpha(G) = 2$  ou  $b(G) = 2$  et  $\alpha(G) = 3$ . Si  $G$  est dans  $\mathcal{F}_2$ , alors il est facile de vérifier que  $\alpha(G) = p + 3$ , et nous avons observé dans la preuve du Lemme 2.6 que  $b(G) = p + 2$ . Donc  $b(G) \neq \alpha(G)$ . D'où  $G \in \mathcal{F}'_0 \cup \mathcal{F}_1 \cup \mathcal{F}_3$ .  $\square$

### 2.3 Relation entre $b(G)$ et $\chi(G)$

En théorie des graphes, il est souvent question d'étudier les relations entre deux ou plusieurs paramètres dans un graphe en général ou dans des classes de graphes. Dans ce contexte, nous nous intéresserons dans cette partie à étudier la relation entre le nombre  $b$ -chromatique et le nombre chromatique. En effet, nous établissons d'abord une borne supérieure pour la différence  $b(G) - \chi(G)$  en fonction de l'ordre de  $G$ , ensuite nous caractérisons les graphes pour lesquels cette borne est atteinte. Un autre résultat concernant la relation entre le nombre  $b$ -chromatique du graphe  $G$  et celui de  $G - v$  où  $v$  est un sommet quelconque de  $G$ , est obtenu comme conséquence du Théorème 2.9.

En utilisant le Théorème 2.1, on peut en déduire le résultat suivant:

**Théorème 2.9.** *Tout graphe  $G = (V, E)$  d'ordre  $n \geq 3$  satisfait,*

$$b(G) - \chi(G) \leq \left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil - 2.$$

*Avec égalité si et seulement si  $G \in \mathcal{F}_b \cup \{K_3, K_4\}$ .*

Preuve. Si  $\chi(G) = 1$  ou  $G$  est un graphe complet, alors  $b(G) - \chi(G) = 0$ . Donc on peut supposer que  $\chi(G) \geq 2$  et  $G$  n'est pas un graphe complet. D'après le Théorème 2.1, on a  $b(G) - \chi(G) \leq \frac{1}{2}(n + \omega(G) - 2\chi(G) - 1)$ . Puisque  $\omega(G) \leq \chi(G)$ , alors

$$b(G) - \chi(G) \leq \frac{n - \chi(G) - 1}{2} \leq \frac{n - 3}{2}. \quad (2.5)$$

D'où

$$b(G) - \chi(G) \leq \lfloor \frac{n-3}{2} \rfloor = \lceil \frac{n-4}{2} \rceil = \lceil \frac{n}{2} \rceil - 2. \quad (2.6)$$

Il est facile de vérifier que  $K_3$  et  $K_4$  sont les seuls graphes complets pour lesquels la borne du Théorème 2.9 est atteinte. Supposons maintenant que  $G$  n'est pas un graphe complet. Si  $b(G) - \chi(G) = \lceil \frac{n}{2} \rceil - 2$ , alors les conditions (2.5) et (2.6) donnent

$$\frac{1}{2}(n - \chi(G) - 1) = \frac{1}{2}(n - 3)$$

Ceci implique que,  $\chi(G) = 2$ . D'où,  $G$  est un garphe biparti et  $b(G) = \lceil \frac{n}{2} \rceil$ . Donc  $G \in \mathcal{F}_b$ .

Ceci termine la preuve du Théorème 2.9.  $\square$

En général, pour un graphe  $G$  quelconque et un sommet  $v$  de  $G$ , les nombres  $b$ -chromatiques de  $G$  et de  $G - v$  sont incomparables. Par exemple, dans la Figure 2.1,  $b(G_1) = b(G_1 - v) = 3$ ,  $b(G_2) = 2 < b(G_2 - v) = 4$  et  $b(G_3) = 3 > b(G_3 - v) = 2$

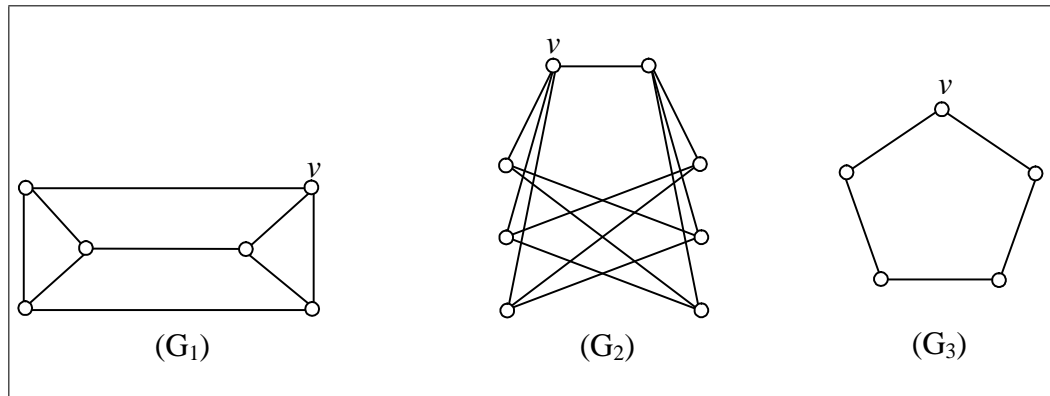


FIGURE 2.1. Le nombre  $b$ -chromatique de  $G$  et de  $G - v$  de trois exemples de graphes.

Il est intéressant donc de discuter la relation entre  $b(G)$  et  $b(G - v)$ . Dans ce cadre, Francis Raj et Balakrishnan [64, 65] ont présenté deux bornes, supérieure et inférieure, pour  $b(G - v)$  dans le cas des graphes connexes d'ordre d'au moins 5.

**Théorème 2.10.** [64] Pour tout graphe connexe  $G$  d'ordre  $n \geq 5$  et pour tout sommet  $v \in V(G)$ ,

$$b(G) - (\lceil \frac{n}{2} \rceil - 2) \leq b(G - v) \leq b(G) + \lfloor \frac{n}{2} \rfloor - 2.$$

Une caractérisation des graphes atteignant ces deux bornes pour un certain sommet  $v \in V(G)$  a été donné par les mêmes auteurs.

Une question naturelle qui se pose est de savoir si les deux bornes du Théorème 2.10 restent valables pour les graphes non connexes.

Nous proposons ci-dessous de confirmer la borne supérieure du Théorème 2.10 pour un graphe quelconque d'ordre au moins 4.

**Théorème 2.11.** Pour tout sommet  $v$  d'un graphe  $G$  d'ordre  $n \geq 4$ ,

$$b(G - v) \leq b(G) + \lfloor \frac{n}{2} \rfloor - 2. \quad (2.7)$$



Preuve. Puisque l'ordre de  $G - v$  est au moins 3, alors le Théorème 2.9 implique que,

$$b(G - v) \leq \chi(G - v) + \lceil \frac{n-1}{2} \rceil - 2.$$

Comme  $\chi(G - v) \leq \chi(G) \leq b(G)$  et  $\lceil \frac{n-1}{2} \rceil = \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$ , alors

$$b(G - v) \leq b(G) + \lfloor \frac{n}{2} \rfloor - 2.$$

□

Comme conséquence du Théorème 2.9, nous allons montrer que tout graphe  $G = (V, E)$  vérifiant la borne 2.7 appartient à la classe des graphes pour lesquels  $\chi(G - v) = \chi(G) = b(G)$ , pour tout sommet  $v \in V(G)$ .

**Observation 2.12.** *Soit  $v$  un sommet quelconque d'un graphe  $G$  d'ordre  $n \geq 4$ .*

$$\text{Si } b(G - v) = b(G) + \lfloor \frac{n}{2} \rfloor - 2, \text{ alors } \chi(G - v) = \chi(G).$$

Preuve. Théorème 2.9 implique que,

$$b(G - v) \leq \chi(G - v) + \lfloor \frac{n}{2} \rfloor - 2 \leq \chi(G) + \lfloor \frac{n}{2} \rfloor - 2 \leq b(G) + \lfloor \frac{n}{2} \rfloor - 2$$

Si  $b(G - v) = b(G) + \lfloor \frac{n}{2} \rfloor - 2$ , alors  $\chi(G - v) = \chi(G) = b(G)$ . □

En se basant sur cette observation, nous conjecturons que  $C_4, P_4$  et  $2P_2$  sont les seuls graphes pour lesquels la borne du Théorème 2.11 est atteinte.

**Conjecture 2.13.** *Pour tout sommet  $v$  d'un graphe  $G$  d'ordre  $n \geq 4$ , on a:*

$$b(G - v) = b(G) + \lfloor \frac{n}{2} \rfloor - 2 \text{ si et seulement si } G = C_4, P_4, 2P_2$$

## CHAPITRE 3

### $b$ -COLORATION DE CERTAINS GRAPHES PARTICULIERS

Dans ce chapitre, nous donnons des bornes et des valeurs exactes du nombre  $b$ -chromatique de certains graphes particuliers, à savoir le graphe de Harary  $H_{k,n}$  lorsque  $k$  est pair, le graphe milieu et le graphe total d'une chaîne  $P_n$ , d'un cycle  $C_n$ , d'une roue  $W_n$  et d'une couronne d'une chaîne  $Cr(P_n)$ .

Le travail présenté dans la première section de ce chapitre a été réalisé en collaboration avec Z. Zemir et M. Blidia et a fait l'objet d'une communication au colloque COSI'2010 [66] et a été soumis à la revue Australasian Journal of Combinatorics [67]. Les résultats de la deuxième section ont été obtenus en collaboration avec les étudiants en Master, Saadadou Djamel, Reggab Amira [68] et Kadri Meriem [69].

#### 3.1 Graphes de Harary

Les graphes de *Harary* sont introduits par West [70].

**Définition 3.1** (West [70]). *Soient  $k$  et  $n$  deux entiers positifs tels que  $1 \leq k < n$ . Les graphes de Harary, notés  $H_{k,n}$ , sont définis comme suit:*

- *Si  $k$  est pair, alors  $H_{k,n}$  est un graphe dont les sommets sont  $v_0, v_1, v_2, \dots, v_{n-1}$  et deux sommet  $v_i, v_j$  sont reliés si  $i - \frac{k}{2} \leq j \leq i + \frac{k}{2}$  (où l'addition est prise modulo  $n$ ).*
- *Si  $k$  est impair et  $n$  pair, alors  $H_{k,n}$  est obtenu à partir de  $H_{k-1,n}$  en ajoutant des arêtes joignant  $v_i$  à  $v_{i+\frac{n}{2}}$  pour  $1 \leq i \leq \frac{n}{2}$ .*
- *Si  $k$  est impair et  $n$  est impair, alors  $H_{k,n}$  est obtenu à partir de  $H_{k-1,n}$  en ajoutant des arêtes reliant  $v_i$  à  $v_{i+\frac{n-1}{2}}$  pour  $0 \leq i \leq \frac{n-1}{2}$ .*

Notons que dans les deux premiers cas le graphe  $H_{k,n}$  est régulier. Par contre, il est non régulier dans le dernier cas. Dans la suite de cette section, on s'intéresse uniquement aux graphes de *Harary* lorsque  $k$  est pair.

Le résultat principal de cette section est le suivant:

**Théorème 3.2.** *Soit  $H_{2m,n}$  un graphe de Harary. Alors*

$$b(H_{2m,n}) = \begin{cases} 2m + 1 & \text{si } n = 2m + 1 \text{ ou } n \geq 4m + 1 \\ 2m - \lfloor \frac{4m-n}{3} \rfloor & \text{si } \lceil \frac{5m+3}{2} \rceil \leq n \leq 4m \\ \geq n - m - 1 & \text{si } 2m + 2 \leq n < \lceil \frac{5m+3}{2} \rceil \end{cases}$$

Preuve. Soient  $v_0, v_1, \dots, v_{n-1}$  les sommets du graphe  $H_{2m,n}$  placés dans cet ordre autour d'un cycle. Par définition, deux sommets  $v_i, v_j$  ( $j > i$ ) de  $H_{2m,n}$  sont adjacents si

$$j - i \leq m, \text{ où l'expression } j - i \text{ est prise modulo } n - m. \quad (3.1)$$

Quatre cas sont à distinguer selon l'ordre du graphe  $H_{2m,n}$ .

**Cas 1:  $n = 2m + 1$ .**

Dans ce cas,  $H_{2m,n}$  est une clique d'ordre  $2m + 1$  et par conséquent  $b(H_{2m,n}) = 2m + 1$ .

**Cas 2:  $n \geq 4m + 1$ .**

Puisque  $\Delta(H_{2m,n}) = 2m$ , alors  $b(H_{2m,n}) \leq 2m + 1$ . Pour montrer l'égalité, on construit une  $b$ -coloration de  $H_{2m,n}$  avec  $2m + 1$  couleurs de la manière suivante: On colore d'abord le sommet  $v_0$  par 0 ensuite, vu que  $n \geq 4m + 1$ , on colore les  $4m$  sommets les plus proches de  $v_0$  ( $2m$  sommets dans chacune des deux directions autour du cycle et suivant l'ordre donné aux sommets) de la façon suivante: On affecte la couleur  $i$  à  $v_i$  ( $i = 1, \dots, 2m$ ) et la couleur  $i - (n - 2m - 1)$  à  $v_i$  ( $i = n - 2m, \dots, n - 1$ ). Il est facile de voir que, pour cette  $b$ -coloration partielle, deux sommets  $v_i$  et  $v_j$  ont la même couleur si

$$i = j - (n - 2m - 1), \text{ pour } i \in \{1, \dots, 2m\} \text{ et } j \in \{n - 2m, \dots, n - 1\}. \quad (3.2)$$

Supposons que  $v_i$  est adjacent à  $v_j$ . Vu que  $n \geq 4m + 1$ , alors les conditions (3.1) et (3.2) impliquent que

$$i + m \geq j = i + n - 2m - 1 \geq i + 2m,$$

contradiction. D'où, deux sommets de même couleur ne sont pas adjacents, ce qui implique que cette coloration partielle est propre. Ainsi, il est facile de voir que l'ensemble  $\{v_i : i = 1, \dots, m\} \cup \{v_i : i = n - m, \dots, n - 1\} \cup \{v_0\}$  représente les  $b$ -sommets de cette  $b$ -coloration.

Enfin, vu que  $\Delta(H_{2m,n}) = 2m + 1$ , alors on peut étendre cette  $b$ -coloration partielle à une coloration propre du graphe  $H_{2m,n}$ . Pour cela, il suffit de colorer arbitrairement chaque sommet non encore coloré dans le graphe  $H_{2m,n}$  par une couleur de l'ensemble  $\{0, 1, 2, \dots, 2m\}$  différente de celle déjà affectée à son voisinage. On obtient alors une  $b$ -coloration de  $H_{2m,n}$  avec  $2m + 1$  couleurs où  $v_0, v_1, \dots, v_m, v_{n-m}, \dots, v_{n-1}$  sont les  $b$ -sommets de cette coloration.

**Cas 3:**  $\lceil \frac{5m+3}{2} \rceil \leq n \leq 4m$ .

D'abord montrons que  $b(H_{2m,n}) \leq 2m - \lfloor \frac{4m-n}{3} \rfloor$ . Supposons au contraire que  $H_{2m,n}$  admet une  $b$ -coloration avec  $k$  couleurs telle que  $k \geq 2m - \lfloor \frac{4m-n}{3} \rfloor + 1$ . Alors, on réclame le fait suivant:

**Fait 1.** *Il existe au moins une classe de couleur contenant un seul sommet.*

*Preuve du Fait 1:* Sinon, chaque classe de couleur contient au moins deux sommets.

De ce fait,

$$n \geq 2k \geq 4m - 2 \lfloor \frac{4m-n}{3} \rfloor + 2.$$

Puisque  $\lfloor \frac{4m-n}{3} \rfloor \leq \frac{4m-n}{3}$ , il s'en suit alors que  $n \geq 4m + 6$ , contradiction. Ceci termine la preuve du Fait 1.

Soient  $0, \dots, k - 1$  les couleurs utilisées dans une  $b$ -coloration optimale de  $H_{2m,n}$ . Sans perte de généralité, on peut supposer que  $v_0$  est le seul sommet de couleur 0. Ceci implique que

$$v_0 \text{ est un } b\text{-sommet} \tag{3.3}$$

et tous les autres  $b$ -sommets sont adjacents à  $v_0$ .

Soient  $v_i, v_j$  deux voisins de  $v_0$  tels que  $1 \leq i < \frac{n}{2}$  et  $\frac{n}{2} < j \leq n - 1$ . Désignons par  $V_{ij}$  (respectivement,  $\overline{V}_{ij}$ ) l'ensemble des sommets entre  $v_i$  et  $v_j$  à droite (respectivement, à

gauche) de  $v_i$  et autour du cycle tels que  $v_0 \in V_{ij}$ ,  $v_0 \notin \overline{V_{ij}}$  et  $v_i, v_j \notin V_{ij} \cup \overline{V_{ij}}$ .

Posons  $X = \{x_i : x_i = v_i, 1 \leq i \leq m\}$  et  $Y = \{y_j : y_j = v_{n-j}, 1 \leq j \leq m\}$ . Alors  $X$  et  $Y$  représentent les voisins de  $v_0$  qui se trouvent respectivement à droite et à gauche de  $v_0$  et autour du cycle. Soit  $x_p$  (respectivement,  $y_q$ ) le dernier  $b$ -sommets dans  $X$  (respectivement,  $Y$ ). De ce fait, pour  $i \in \{p+1, \dots, m\}$  et  $j \in \{q+1, \dots, m\}$ , les sommets  $x_i$  et  $y_j$  ne sont pas des  $b$ -sommets. Posons  $A = \{x_i \in X : i \leq p\}$  et  $B = \{y_j \in Y : j \leq q\}$ . Soit  $Z = V \setminus (\{v_0\} \cup X \cup Y)$  les non-voisins de  $v_0$ . D'après la condition (3.3),  $Z$  ne contient aucun  $b$ -sommets. La définition de  $V_{pq}$  et  $\overline{V_{pq}}$  implique que  $v_0 \in V_{pq}$ ,  $v_0 \notin \overline{V_{pq}}$  et  $x_p, y_q \notin V_{pq} \cup \overline{V_{pq}}$ . Il est à noter que  $Z \subseteq \overline{V_{pq}}$ .

a) Si  $3m+1 \leq n \leq 4m$ , alors  $|Z| = n - (2m+1) \geq m$ . D'où,

$$|\overline{V_{pq}} \cup \{x_p, y_q\}| \geq |Z| + 2 \geq m + 2. \quad (3.4)$$

Ainsi, on a

$$\begin{aligned} |A| + |B| + |\{v_0\}| &\geq k \geq 2m - \lfloor \frac{4m-n}{3} \rfloor + 1 \\ &\geq 2m - \frac{4m-n}{3} + 1 \\ &\geq \frac{2m+n+3}{3} \geq \frac{5m+4}{3} \geq m+2. \end{aligned}$$

Alors,

$$|V_{pq} \cup \{x_p, y_q\}| = |A| + |B| + |\{v_0\}| \geq m+2. \quad (3.5)$$

Les conditions (3.4) et (3.5) impliquent que  $x_p$  n'est pas adjacent à  $y_q$ .

Posons

$$\begin{aligned} A_1 &= \{u \in A : u \text{ est adjacent à } y_q\}, \\ A_2 &= \{u \in A : u \text{ n'est pas adjacent à } y_q\}, \\ B_1 &= \{u \in B : u \text{ est adjacent à } x_p\}, \\ B_2 &= \{u \in B : u \text{ n'est pas adjacent à } x_p\}. \end{aligned}$$

Puisque  $A \cup B_1 \cup \{v_0\}$  est une clique d'ordre  $m+1$ , alors le dernier  $b$ -sommets  $x_p$  dans  $X$  a  $m$  voisins de couleurs distinctes dans  $A \cup B_1 \cup \{v_0\}$  et par conséquent,  $x_p$  a besoin d'au moins  $k-m$  couleurs distinctes qui n'apparaissent pas dans  $A \cup B_1 \cup \{v_0\}$ . Désignons par  $C_{x_p}$  l'ensemble des  $k-m$  couleurs nécessaires à  $x_p$ . Par la condition (3.3), toutes les

couleurs de  $C_{x_p}$  sont affectées à certains  $b$ -sommets de  $B_2$ . D'où,

$$\text{Toutes les couleurs de } C_{x_p} \text{ apparaissent dans le voisinage de } y_q \quad (3.6)$$

Nous avons donc besoin d'au moins  $k - m$  sommets distincts avec ces couleurs qui appartiennent à  $V(H_{2m,n}) - (\{v_0\} \cup A \cup B)$  et qui sont adjacents à  $x_p$ . Soit  $A'$  l'ensemble des sommets demandés par  $x_p$ . Similairement, notons par  $C_{y_q}$  l'ensemble des  $k - m$  couleurs nécessaires à  $y_q$  et  $B'$  l'ensemble des sommets demandés par  $y_q$ . Par un argument symétrique, nous constatons que

$$\text{Toutes les couleurs de } C_{y_q} \text{ apparaissent dans le voisinage de } x_p \quad (3.7)$$

Ainsi, les conditions (3.6) et (3.7) impliquent que les couleurs qui apparaissent dans  $A'$  sont différentes de celles de  $B'$ , c'est à dire  $C_{x_p} \cap C_{y_q} = \emptyset$ . D'où,  $A'$  et  $B'$  sont des ensembles disjoints. Donc

$$\begin{aligned} n &\geq |A| + |B| + |\{v_0\}| + |A'| + |B'| \geq k + 2(k - m) = 3k - 2m \\ &\geq 3(2m - \lfloor \frac{4m - n}{3} \rfloor + 1) - 2m = 4m - 3\lfloor \frac{4m - n}{3} \rfloor + 3 \\ &\geq n + 3, \end{aligned}$$

contradiction.

Il convient de noter que  $A_2$  et  $B_2$  sont non vides puisque ils contiennent au moins  $x_p, y_q$ , respectivement. Ainsi, si l'un des deux ensembles  $A_1, B_1$ , disons  $B_1$ , est vide, alors  $x_p = x_m$ ,  $A = X$  et  $B_2 = B$ .

b) Maintenant supposons que  $\lceil \frac{5m+3}{2} \rceil \leq n \leq 3m$ .

**Fait 2.** *L'ensemble  $X$  (respectivement,  $Y$ ) contient au moins  $\frac{1}{2}(m + 2)$   $b$ -sommets.*

*Preuve du Fait 2:* Supposons au contraire que  $X$  ou  $Y$  contient au plus  $\frac{m}{2}$   $b$ -sommets.

Alors

$$2m - \lfloor \frac{4m - n}{3} \rfloor + 1 \leq k \leq \frac{3m}{2} + 1$$

ce qui implique que  $n \leq \frac{5m}{2}$ , contradiction. Ceci termine la preuve du Fait 2.

**Fait 3.** *Tous les sommets de  $A \cup B$  sont des  $b$ -sommets.*

*Preuve du Fait 3:* Nous montrons d'abord que  $x_1, y_1$  sont des  $b$ -sommets. Supposons que  $x_1$  de couleur  $c_1$  n'est pas un  $b$ -sommets. De ce fait, il existe une couleur manquante, disons  $c'_1$  dans le voisinage de  $x_1$ . Ceci implique  $N(v_0) \setminus \{y_m\}$  ne contient aucun sommet de couleur  $c'_1$ . A cet effet, la condition (3.3) implique que la couleur de  $y_m$  est  $c'_1$ . Donc  $X \cup Y$  ne contient aucun  $b$ -sommets de couleur  $c_1$ , contradiction. D'où,  $x_1$  est un  $b$ -sommets. Par symétrie,  $y_1$  est aussi un  $b$ -sommets.

Maintenant, supposons que  $A$  contient un non  $b$ -sommets, disons  $x_l, l \neq 1$ , de couleur  $c_l$ . Soient  $x_s$  et  $x_t$ ,  $s < l < t$ , les  $b$ -sommets les plus proches dans chacune des deux directions autour du cycle respectivement à droite et à gauche de  $x_l$ . Notons par  $F$  l'ensemble des non  $b$ -sommets entre  $x_s$  et  $x_t$ . Il est clair que l'ensemble  $F$  est non vide puisque il contient au moins  $x_l$ . Par le Fait 2, on a  $|F| \leq \frac{1}{2}(m-2)$ . Comme  $x_l$  n'est pas un  $b$ -sommets, alors il existe une couleur manquante, disons  $c'_l$  dans son voisinage. Nous allons montrer qu'il existe un seul sommet de couleur  $c'_l$  dans  $V$ . En effet, puisque  $N[x_l]$  ne contient aucun sommet de couleur  $c'_l$ , alors cette couleur apparaît dans  $M = V \setminus N[x_l]$ . Vu que  $n \leq 3m$ , alors  $|M| = |V| - |N[x_l]| = n - 2m - 1 \leq m - 1$ . D'onc, le sous-graphe  $G[M]$  induit par  $M$  est une clique. De ce fait, il existe un seul sommet, disons  $v_h$ , de couleur  $c'_l$  dans  $G[M]$ . Par la condition (3.3),  $v_h$  est un  $b$ -sommets; de plus  $v_h \in B$ . Puisque  $x_s$  et  $x_t$  sont des  $b$ -sommets, alors ils ont besoin de la couleur  $c'_l$  dans leurs voisinages. D'où,  $x_s$  et  $x_t$  sont adjacents à  $v_h$ . Puisque la cardinalité de la clique maximum dans  $H_{2m,n}$  est  $m+1$ , alors  $|V_{sh}| \leq m-1$  et  $|\overline{V_{th}}| \leq m-1$ . Alors

$$n = |V_{sh}| + |\overline{V_{th}}| + |\{x_s, x_t, y_h\}| + |F| \leq 2m + 1 + |F| \leq 2m + 1 + \frac{1}{2}(m-2) = \frac{5m}{2},$$

contradiction. Donc, tous les sommets de  $A$  sont des  $b$ -sommets. Aussi, par symétrie, tous les sommets de  $B$  sont des  $b$ -sommets. Ceci termine la preuve du Fait 3.

Soit  $B' \subset B$  l'ensemble des  $b$ -sommets tels que aucune couleur dans  $B'$  n'est répétée dans  $A$ . L'ensemble  $B'$  est non vide sinon  $k \leq m+1$ , ce qui contredit l'inégalité qui est juste avant la condition (3.5). Soit  $v_r$  le dernier sommet de  $Y$  dont sa couleur n'apparaît pas dans  $A$ . D'après la condition (3.3),  $v_r$  est un  $b$ -sommets et par conséquent,  $v_r \in B'$ .

D'où, on a

$$|A| + |B'| + |\{v_0\}| \geq k \geq 2m - \lfloor \frac{4m-n}{3} \rfloor + 1 \geq \frac{3m}{2} + 2. \quad (3.8)$$

**Fait 4.**  $x_p$  n'est pas adjacent à  $v_r$ .

*Preuve du Fait 4:* Si  $x_p$  est adjacent à  $v_r$ , alors deux cas s'imposent:

a) Supposons que  $V_{pr} \cup \{x_p, v_r\}$  induit une clique. Puisque la cardinalité de la clique maximum dans  $H_{2m,n}$  est  $m+1$ , alors

$$|V_{pr} \cup \{x_p, v_r\}| \leq m+1 \quad (3.9)$$

Vu que  $|V_{pr} \cup \{x_p, v_r\}| \geq |A| + |B'| + |\{v_0\}|$ , alors la condition (3.8) implique que

$$|V_{pr} \cup \{x_p, v_r\}| \geq \frac{3m}{2} + 2 \geq m+2,$$

ce qui contredit la condition (3.9). D'où  $V_{pr} \cup \{x_p, v_r\}$  n'induit pas une clique.

b) Supposons que  $\overline{V_{pr}} \cup \{x_p, v_r\}$  induit une clique. Dans ce cas, l'ensemble  $\overline{V_{pr}} \cup \{x_p\}$  ne contient pas de sommets de couleur  $c(v_r)$ . D'où, par le fait 3,  $v_r$  est adjacent à tous les sommets de  $A$ . Ceci implique que  $H_{2m,n}$  est une clique, contradiction. D'où  $\overline{V_{pr}} \cup \{x_p, v_r\}$  n'induit pas une clique.

En conséquence,  $x_p$  n'est pas adjacent à  $v_r$ . Ceci termine la preuve du Fait 4.

Le dernier  $b$ -sommets  $x_p$  dans  $A$  a besoin d'au moins  $k-m$  couleurs qui sont affectées à certains  $b$ -sommets à la fin de  $B'$ . De ce fait, on aura besoin d'au moins  $k-m$  sommets distincts appartenant à  $V(H_{2m,n}) - (\{v_0\} \cup A \cup B')$  (auxquels on attribue ces  $k-m$  couleurs) et qui sont adjacents à  $x_p$ . Soit  $A'$  l'ensemble de ces sommets demandés par  $x_p$ . Similairement, le dernier  $b$ -sommets  $v_r$  dans  $B'$  a besoin d'au moins  $k-m$  couleurs affectées à certains  $b$ -sommets à la fin de  $A$ . Donc, on aura besoin d'au moins  $k-m$  sommets distincts appartenant à  $V(H_{2m,n}) - (\{v_0\} \cup A \cup B')$  et qui sont adjacents à  $v_r$ . Soit  $B'_1$  l'ensemble des sommets demandés par  $v_r$ . Par un raisonnement similaire à celui utilisé plus haut, on peut montrer que les couleurs nécessaires pour  $x_p$  apparaissent dans le voisinage de  $v_r$  et les couleurs nécessaires pour  $v_r$  apparaissent dans le voisinage de  $x_p$ . D'où, ces couleurs sont différentes et par conséquent,  $A'$  et  $B'_1$  sont des ensembles disjoints.



De ce fait,

$$\begin{aligned}
n &\geq |A| + |B'| + |A'| + |B'_1| + 1 \geq k + 2(k - m) = 3k - 2m \\
&\geq 3(2m - \lfloor \frac{4m-n}{3} \rfloor + 1) - 2m = 4m - 3\lfloor \frac{4m-n}{3} \rfloor + 3 \\
&\geq 4m - 4m + n + 3 = n + 3,
\end{aligned}$$

contradiction.

En conséquence, dans tous les cas, si  $\lceil \frac{5m+3}{2} \rceil \leq n \leq 4m$ , alors  $b(H_{2m,n}) \leq 2m - \lfloor \frac{4m-n}{3} \rfloor$ .

Maintenant, on donne une  $b$ -coloration de  $H_{2m,n}$  avec  $2m - \lfloor \frac{4m-n}{3} \rfloor$  couleurs lorsque  $\lceil \frac{5m+3}{2} \rceil \leq n \leq 4m$ . Soient  $v_1, v_2, \dots, v_n$  les sommets de  $H_{2m,n}$  placés dans cet ordre et autour d'un cycle. Posons  $k = 2m - \lfloor \frac{4m-n}{3} \rfloor$ . Alors  $n \leq 2k$ , car sinon

$$\begin{aligned}
n &\geq 2k + 1 = 4m - 2\lfloor \frac{4m-n}{3} \rfloor + 1 \\
n &\geq \frac{1}{3}(4m + 2n + 3)4m + 3,
\end{aligned}$$

contradiction. D'où  $n \leq 2k$ . De ce fait, on peut colorer tous les sommets de  $H_{2m,n}$  par la  $b$ -coloration suivante: On affecte la couleur  $i$  à  $v_i$  ( $i = 1, \dots, k$ ) et la couleur  $i - (n - k)$  à  $v_i$  ( $i = k + 1, \dots, n$ ), suivant l'ordre des sommets. Deux sommets  $v_i$  et  $v_j$  ont la même couleur si

$$i = j - (n - k) \text{ pour } i \in \{1, \dots, k\} \text{ et } j \in \{k + 1, \dots, n\}. \quad (3.10)$$

Donc,

$$\begin{aligned}
j - i &= n - k = n - 2m + \lfloor \frac{4m-n}{3} \rfloor \\
&> n - 2m + \frac{4m-n}{3} - 1 \\
&\geq \frac{2\left(\frac{5m+3}{2}\right) - 2m - 3}{3} = m.
\end{aligned}$$

Ceci contredit la condition (3.1). D'où, deux sommets ayant la même couleur ne sont pas adjacents. Ceci implique que cette coloration est propre. Ainsi, on peut facilement voir que les sommets  $v_i$  ( $i = 1, \dots, m + 1$ ) et  $v_j$  ( $j = n - k + m + 2, \dots, n$ ) avec  $k \leq m + 2$ , sont des  $b$ -sommets pour cette  $b$ -coloration.

**Cas 4:**  $2m + 2 \leq n < \lceil \frac{5m+3}{2} \rceil$ .

Pour montrer que  $b(H_{2m,n}) \geq n - m - 1$ , on construit une  $b$ -coloration avec  $n - m - 1$  couleurs de la manière suivante. Soient  $v_1, v_2, \dots, v_n$  les sommets de  $H_{2m,n}$  placés dans cet ordre et autour d'un cycle. Posons  $k = n - m - 1$ . Alors  $n \leq 2k$ , car sinon

$$\begin{aligned} n &> 2k \\ n &> 2n - 2m - 2 \\ n &< 2m + 2, \end{aligned}$$

contradiction. D'où,  $n \leq 2k$ . De ce fait, on peut colorer les sommets de  $H_{2m,n}$  par la même  $b$ -coloration utilisée juste avant le cas 4. De ce fait, la condition (3.10) implique que

$$j - i = n - k = n - n + m + 1 = m + 1.$$

Ceci contredit la condition (3.1). D'où, deux sommets ayant la même couleur ne sont pas adjacents; ce qui implique que cette coloration est propre. Aussi, on peut voir que les sommets  $v_i$  ( $i = 1, \dots, m + 1$ ) et  $v_j$  ( $j = n - k + m + 2, \dots, n$ ) avec  $k \leq m + 2$ , sont des  $b$ -sommets pour cette  $b$ -coloration. Ceci termine la preuve du Théorème 3.2.  $\square$

**Proposition 3.3.** *Soit  $H_{2m,2m+3}$  un graphe de Harary. Alors*

$$n - m - 1 \leq b(H_{2m,2m+3}) \leq \lfloor \frac{6m + 9}{5} \rfloor.$$

*Ces bornes sont atteintes.*

Preuve. Posons  $k = b(H_{2m,2m+3})$ . La borne inférieure découle du Théorème 3.2. Pour montrer la borne supérieure, considérons une  $b$ -coloration  $c$  de  $H_{2m,2m+3}$  avec  $k$  couleurs. Soient  $v_0, v_1, \dots, v_{2m+2}$  les sommets de  $H_{2m,2m+3}$  placés dans cet ordre et autour d'un cycle. Alors, il existe au moins une classe de couleur contenant un seul sommet, sinon  $n \geq 2k = 2(n - m - 1) = 2n - 2m - 2$  et par conséquent,  $n \leq 2m + 2$ , contradiction. Soit  $v_0$  un tel sommet. Comme nous l'avons vu dans le cas 3, on peut constater que la condition (3.3) est vérifiée. On définit  $X, Y$  et  $Z$  comme décrit dans le cas 3. Alors  $Z = \{v_{m+1}, v_{m+2}\}$ . D'où,

$$|Z| = 2 \text{ et } X \cup \{v_{m+1}\}, Y \cup \{v_{m+2}\} \text{ sont des cliques d'ordre } m + 1 \quad (3.11)$$

La condition (3.11) implique que chaque couleur de  $c$  est répétée au plus deux fois.

Soit  $k_1$  (respectivement,  $k_2$ ) le nombre de classes de couleur contenant un seul sommet (respectivement, deux sommets). On note par une 1-classe (respectivement, 2-classe), la classe de couleur contenant un seul sommet (respectivement, deux sommets). Clairement, un non  $b$ -sommet appartient à 2-classe et  $v_0$  appartient à 1-classe. D'où,

$$n = k_1 + 2k_2 \text{ et } b(H_{2m,2m+3}) = k_1 + k_2 = n - k_2 = 2m + 3 - k_2. \quad (3.12)$$

Si  $k_1 = 1$ , alors  $n - 1 = 2m + 2 = 2k_2$ , ce qui implique que  $k_2 = m + 1$ . Donc  $b(H_{2m,2m+3}) = n - m - 1 = m + 2 \leq \lfloor \frac{6m+9}{5} \rfloor$ . Supposons maintenant que  $k_1 > 1$ . Puisque  $n$  est impair, la condition (3.12) implique que  $k_1$  est un entier impair et par conséquent,  $k_1 \geq 3$ . Nous allons montrer que les voisins les plus proches de  $v_0$  autour du cycle sont des  $b$ -sommets qui appartiennent à 2-classe. Soient  $v_1$  et  $v_{n-1}$  les voisins les plus proches de  $v_0$  autour du cycle et  $v_{m+1}, v_{m+2}$  leurs non voisins avec  $c(v_{m+1}) = a$  et  $c(v_{m+2}) = b$ . Par les conditions (3.3) et (3.11),  $c(v_1) = b$  et  $c(v_{n-1}) = a$ . Par ailleurs,  $v_1$  et  $v_{n-1}$  sont des  $b$ -sommets car  $v_{m+1}$  et  $v_{m+2}$  ne peuvent pas être adjacents au sommet  $v_0$  et donc ne peuvent pas avoir la couleur  $c(v_0)$  dans leurs voisinages. En conséquence,

$$\begin{aligned} &\text{Deux } b\text{-sommets appartenant à une 1-classe} \\ &\text{ne sont pas consécutifs autour du cycle} \end{aligned} \quad (3.13)$$

Nous montrons maintenant qu'entre deux  $b$ -sommets qui appartiennent à une 1-classe, il existe au moins deux  $b$ -sommets appartenant à une 2-classe. Supposons au contraire qu'il existe un seul  $b$ -sommet qui appartient à une 2-classe. Sans perte de généralité, on peut supposer que  $v_0$  et  $v_2$  sont des  $b$ -sommets qui appartiennent à une 1-classe. De ce fait,  $v_1$  est un sommet qui appartient à une 2-classe. Soient  $V_1 = \{v_2, v_3, \dots, v_{m+1}\}$  et  $V_2 = \{v_0, v_{n-1}, v_{n-2}, \dots, v_{m+4}\}$  les voisins de  $v_1$  autour du cycle à droite et à gauche de  $v_1$  respectivement. Soit  $Z = \{v_{m+2}, v_{m+3}\}$  l'ensemble des non voisins de  $v_1$ . Puisque  $v_{m+2}$  (respectivement,  $v_{m+3}$ ) n'est pas adjacent à  $v_0$  (respectivement,  $v_2$ ), alors

$$\begin{aligned} &v_{m+2}, v_{m+3} \text{ ne sont pas des } b\text{-sommets et par conséquent,} \\ &\text{chacun de ces deux sommets appartient à une 2-classe.} \end{aligned} \quad (3.14)$$

Puisque  $v_1$  appartient à une 2-classe, alors l'un des deux sommets  $v_{m+2}, v_{m+3}$ , disons  $v_{m+2}$ , a la couleur  $c(v_1)$ . Il est clair que  $V_2 \cup \{v_{m+3}\}$  et  $(V_1 \cup \{v_{m+3}\}) \setminus \{v_2\}$  induisent deux cliques

d'ordre  $m+1$ . D'où, la couleur  $c(v_{m+3})$  n'apparaît pas dans  $(V_1 \cup V_2 \cup \{v_0\}) \setminus \{v_2\}$ . Comme  $v_2$  appartient à une 1-classe, alors  $c(v_{m+3}) \neq c(v_2)$ . Donc  $v_{m+3}$  appartient à une 1-classe, contradiction avec la condition (3.14). Par conséquent,

Entre deux  $b$ -sommets qui appartiennent à une 1-classe, il existe  
au moins deux  $b$ -sommets appartenant à une 2-classe. (3.15)

Les conditions (3.13) et (3.15) impliquent que  $k_2 \geq 2k_1$  et puisque  $n = k_1 + 2k_2$ , alors il s'en suit que  $k_2 \geq \frac{2n}{5}$ . En conséquence,

$$b(H_{2m,2m+3}) = 2m + 3 - k_2 \leq \lfloor \frac{3n}{5} \rfloor = \lfloor \frac{6m + 9}{5} \rfloor.$$

Ceci termine la preuve de la Proposition 3.3. □

Enfin, il convient de souligner que le graphe  $H_{12,15}$  illustré dans la Figure 3.1 présente un contre exemple à la conjecture posée par Effantin et Kheddouci [43].

Notons aussi que, dans la suite de ce chapitre, tous les sommets dessinés en gras représentent les  $b$ -sommets.

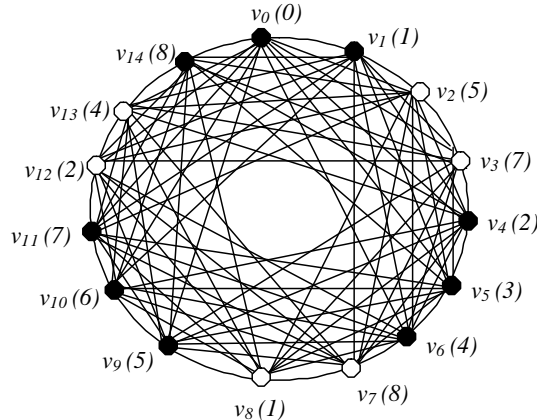


FIGURE 3.1. Exemple d'un graphe de Harary  $H_{12,15}$  avec  $b(G) = 9$ .

## 3.2 Graphe milieu et graphe total

Nous déterminons dans cette partie, les valeurs exactes du nombre  $b$ -chromatique du graphe milieu et du graphe total des graphes suivants:  $P_n$ ,  $C_n$ ,  $W_n$ ,  $Cr(P_n)$ .

### 3.2.1 Graphe milieu

**Définition 3.4** (Hamada et Yoshimura [44]). Soit  $G = (V(G), E(G))$  un graphe où  $V(G)$  est l'ensemble des sommets et  $E(G)$  est l'ensemble des arêtes. Le graphe milieu de  $G$ , noté  $M(G)$ , est défini comme suit: L'ensemble des sommets de  $M(G)$  est  $V(G) \cup E(G)$ . Deux sommets  $x, y$  de  $M(G)$  sont adjacents si l'une des conditions suivantes est vérifiée.

- $x, y \in E(G)$  et  $x, y$  sont adjacents dans  $G$ .
- $x \in V(G), y \in E(G)$  et  $x$  est incident à  $y$  dans  $G$ .

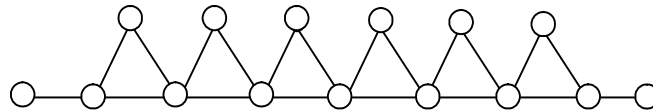


FIGURE 3.2. Le graphe milieu d'une chaîne d'ordre 8.

### 3.2.2 Graphe total

**Définition 3.5** (Behzad [45]). Le graphe total de  $G$ , noté  $T(G)$ , est défini comme suit. L'ensemble des sommets de  $T(G)$  est  $V(G) \cup E(G)$ . Deux sommets  $x, y$  de  $T(G)$  sont adjacents si l'une des conditions suivantes est vérifiée:

- $x, y \in V(G)$  et  $x, y$  sont adjacents dans  $G$ .
- $x, y \in E(G)$  et  $x$  est adjacent à  $y$  dans  $G$ .
- $x \in V(G), y \in E(G)$  et  $x$  est incident à  $y$  dans  $G$ .

**Remarque 3.6.** Le graphe  $T(G)$  de  $G$  est obtenu à partir du graphe  $M(G)$  en joignant par des arêtes les paires de sommets qui sont adjacents dans  $G$ .

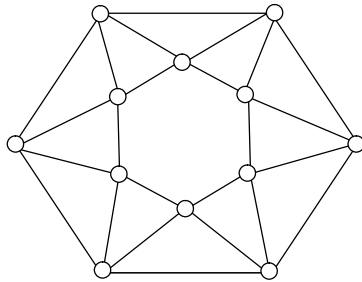


FIGURE 3.3. Le graphe total d'un cycle d'ordre 6.

Nous commençons par montrer la proposition suivante.

**Proposition 3.7.** *Pour tout graphe  $G$  de degré maximum  $\Delta(G)$ , on a :*

$$\min \{b(M(G)), b(T(G))\} \geq \Delta(G) + 1.$$

Preuve. Posons  $H = M(G)$  ou  $T(G)$ . Soit  $x$  un sommet de  $G$  tel que  $d_G(x) = \Delta(G)$ . Soient  $v_1, v_2, \dots, v_\Delta$  les voisins de  $x$ . Pour  $i \in \{1, 2, \dots, \Delta\}$ , on note par  $u_i$  un sommet de  $V(H)$  correspondant à l'arête  $xv_i$ . Il est facile de vérifier que les sommets  $x, u_1, u_2, \dots, u_\Delta$  induisent une clique de taille  $\Delta(G) + 1$  dans  $H$ . Ceci implique que  $b(H) \geq \Delta(G) + 1$ .  $\square$

Notons que cette borne est atteinte pour les étoiles.

Maintenant, nous allons montrer la proposition 3.8 qui sera utile pour la suite.

**Proposition 3.8.** *Si  $G$  est un graphe connexe  $(n-2)$ -régulier d'ordre  $n$ , alors  $b(G) = \frac{n}{2}$ .*

Preuve. Soit  $G = (V, E)$  un graphe connexe  $(n-2)$ -régulier d'ordre  $n$ . Alors  $G$  est un graphe complet moins un couplage parfait d'ordre  $n$  pair. Les sommets de  $V$  peuvent être partitionnés en deux sous-ensembles  $V_1 = \{v_1, v_2, \dots, v_{\frac{n}{2}}\}$  et  $V_2 = \{v_{\frac{n}{2}+1}, v_{\frac{n}{2}+2}, \dots, v_n\}$  tels que tout sommet  $v_i \in V_1$  est adjacent à  $v_j \in V_2$  ( $j \neq i + \frac{n}{2}$ ) et pour tout  $i$ ,  $1 \leq i \leq \frac{n}{2}$ ,  $v_i$  est non adjacent à  $v_{i+\frac{n}{2}}$ . Soit  $c$  une  $b$ -coloration de  $G$  avec  $b(G)$  couleurs. Supposons que  $v_i$ , ( $1 \leq i \leq \frac{n}{2}$ ) est un  $b$ -sommet de couleur  $l$ . Puisque  $v_i$  et  $v_{\frac{n}{2}+i}$  ont le même voisinage, alors  $v_{\frac{n}{2}+i}$  est un  $b$ -sommet de couleur  $l$  car  $v_{\frac{n}{2}+i}$  a toutes les couleurs, sauf sa propre couleur bien sûr, dans son voisinage. En conséquence, les couleurs qui apparaissent dans  $A$  sont les mêmes qui se trouvent dans  $B$ . Ceci implique  $b(G) \leq \frac{n}{2}$ . Comme  $\omega(G) = \frac{n}{2}$ , alors  $b(G) \geq \frac{n}{2}$ . D'où  $b(G) = \frac{n}{2}$ .  $\square$

### 3.2.3 Le nombre $b$ -chromatique de $M(P_n)$ et $T(P_n)$

**Théorème 3.9.** *Pour toute chaîne  $P_n$  d'ordre  $n \geq 2$ , on a:*

$$i) b(M(P_n)) = \begin{cases} 2 & \text{si } n = 2 \\ 3 & \text{si } n = 3, 4 \\ 4 & \text{si } n = 5, 6, 7 \\ 5 & \text{si } n \geq 8 \end{cases}, \quad ii) b(T(P_n)) = \begin{cases} 3 & \text{si } n = 2, 3 \\ 4 & \text{si } n = 4 \\ 5 & \text{si } n \geq 5 \end{cases}$$

Preuve. *i)* Tout d'abord, il est facile de voir que le  $m$ -degré de  $M(P_8)$  est égal à 5. D'autre part, la Figure 3.4 présente une  $b$ -coloration de  $M(P_8)$  avec 5 couleurs. Ceci implique que  $b(M(P_8)) = 5$ . Soit  $H = M(P_8)$  un sous-graphe de  $M(P_n)$ ,  $n \geq 9$  et considérons une  $b$ -coloration  $c$  de  $H$  avec 5 couleurs (coloration partielle de  $M(P_n)$ ). Puisque pour  $n \geq 9$ ,  $\Delta(M(P_n)) = 4$ , alors  $c$  peut s'étendre à  $M(P_n)$ . En conséquence,  $b(M(P_n)) = 5$ . Pour  $2 \leq n \leq 7$ , la Figure 3.4 donne les  $b$ -colorations optimales des graphes milieux des chaînes  $P_2, P_3, \dots$  et  $P_8$ .

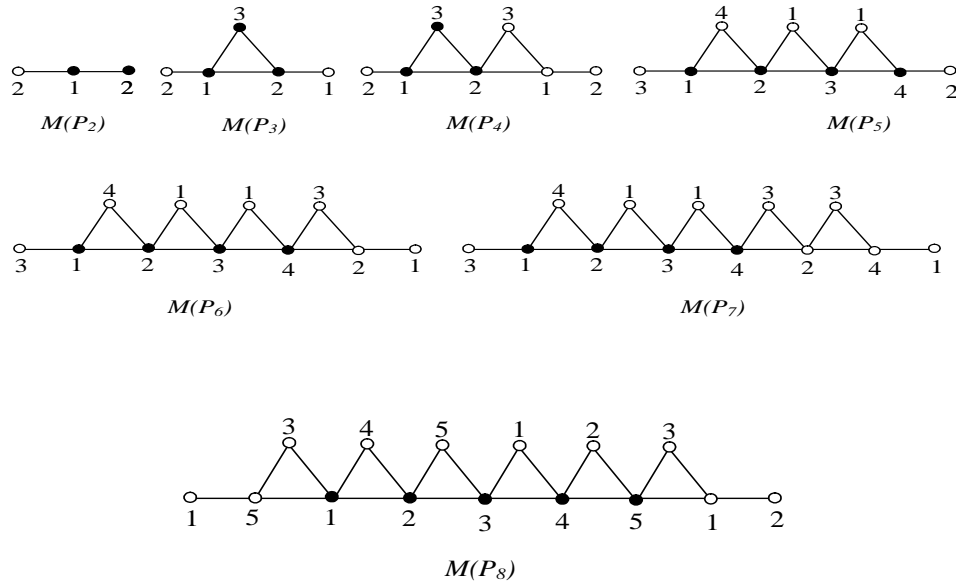


FIGURE 3.4. Une  $b$ -coloration optimale de  $M(P_n)$ ,  $2 \leq n \leq 8$ .

*ii)* Pour  $2 \leq n \leq 4$ , on peut facilement vérifier que  $b(T(P_2)) = b(T(P_3)) = 3$  et  $b(T(P_4)) = 4$  (Voir Figure 3.5).

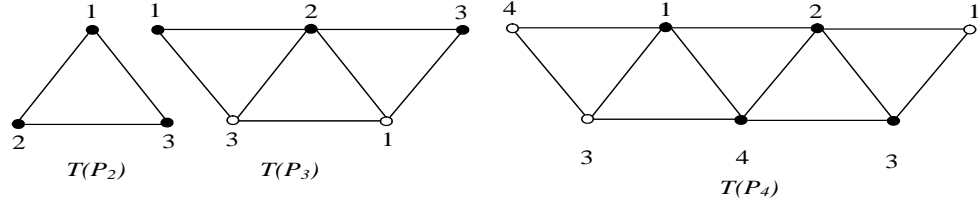


FIGURE 3.5. Une  $b$ -coloration optimale du graphe  $T(P_n)$  où  $n = 2, 3, 4$ .

Pour  $n \geq 5$ . Posons  $V(P_n) = v_1, v_2, \dots, v_n$  et  $E(P_n) = e_1, e_2, \dots, e_{n-1}$  avec  $e_j = v_j v_{j+1}$ ,  $1 \leq j \leq n-1$ . Par définition de  $T(P_n)$ , on a  $V(T(P_n)) = V(P_n) \cup E(P_n)$ . Le graphe  $T(P_n)$  contient au moins 5 sommets de degré au moins 4 mais il ne contient pas au moins 6 sommets de degré au moins 5. Donc  $m(T(P_n)) = 5$ . D'où  $b(T(P_n)) \leq 5$ . Construisons maintenant une coloration  $c$  de la manière suivante:  $c(v_i) \equiv i - 1[5]$ ,  $1 \leq i \leq n$  et  $c(e_j) \equiv j + 2[5]$ ,  $1 \leq j \leq n-1$ . Il est facile de vérifier que  $c$  est une  $b$ -coloration propre avec 5 couleurs. En conséquence,  $b(T(P_n)) = 5$ ,  $n \geq 9$ .  $\square$

### 3.2.4 Le nombre $b$ -chromatique de $M(C_n)$ et $T(C_n)$

**Théorème 3.10.** *Pour tout cycle  $C_n$  d'ordre  $n \geq 3$ , on a:*

$$b(M(C_n)) = b(T(C_n)) = \begin{cases} n & \text{si } n = 3, 4 \\ 5 & \text{si } n \geq 5 \end{cases}$$

Preuve. *i)* Par une simple vérification, on peut constater que le nombre  $b$ -chromatique des graphes  $M(C_n)$ ,  $2 \leq n \leq 7$ , est égal à son  $m$ -degré (Voir Figure 3.6).

Pour  $n \geq 8$ , il est facile de voir que  $M(P_8)$  est un sous-graphe de  $M(C_n)$ . Posons alors  $H = M(P_8)$  et  $G = M(C_n)$ . Nous allons montrer que toute  $b$ -coloration optimale de  $H$  peut s'étendre à une  $b$ -coloration optimale de  $G$  et par conséquent  $b(G) = b(H)$ . D'après le Théorème 3.9,  $b(H) = 5$ . Soit  $c$  une  $b$ -coloration de  $H$  avec 5 couleurs (une coloration partielle de  $G$ ). Comme  $\Delta(G) = 4$ , alors il existe une couleur disponible pour tout sommet non coloré de  $G$ . Donc  $c$  peut s'étendre à  $G$  et par conséquent,  $G$  admet une  $b$ -coloration avec  $\Delta(G) + 1$  couleurs. En conséquence,  $b(G) = 5$ , pour tout  $n \geq 8$ .



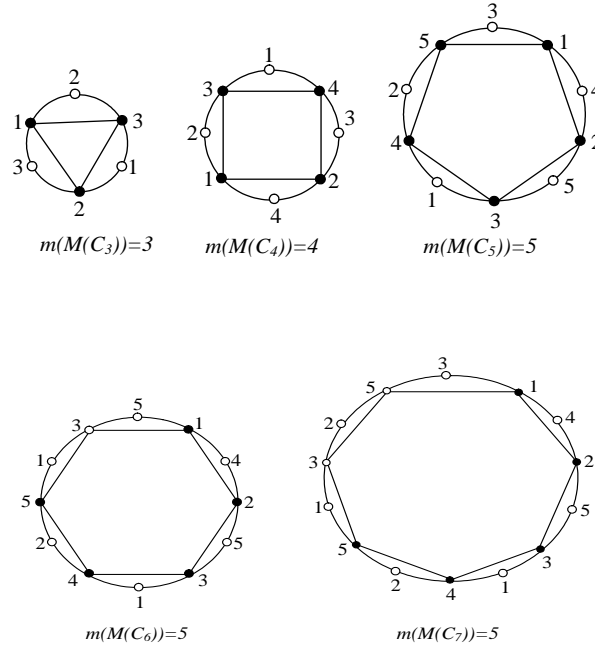


FIGURE 3.6. Le  $m$ -degré et la  $b$ -coloration optimale des graphes  $M(C_n)$ ,  $3 \leq n \leq 7$ .

ii) Pour  $n = 3$ ,  $T(C_3)$  est un graphe connexe 4-régulier d'ordre 6 (Voir Figure 3.7). D'après la Proposition 3.8,  $b(T(C_3)) = 3$ .

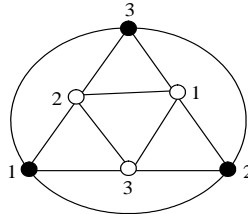


FIGURE 3.7. Une  $b$ -coloration de  $T(C_3)$  avec 3 couleurs.

Pour  $n = 4$ , l'ordre de  $T(C_4)$  est égal à 8. Vu que  $\Delta(T(C_4)) = 4$ , alors  $b(T(C_4)) \leq 5$ . Supposons que  $b(T(C_4)) = 5$ . Soit  $c$  une  $b$ -coloration de  $T(C_4)$  avec 5 couleurs. Soient  $v_1, v_2, v_3, v_4$  et  $v_5$  les  $b$ -sommets de  $c$  de couleurs 1, 2, 3, 4 et 5 respectivement. L'un de ces sommets, disons  $v_1$ , est le seul sommet de  $T(C_4)$  de couleur 1 car sinon l'ordre de  $T(C_4)$  serait au moins 10. Notons par  $u_1, u_2$  et  $u_3$  les autres sommets de  $T(C_4)$  (Voir Figure 3.8 (a)). Puisque  $v_5$  est un  $b$ -sommets, alors il a besoin des couleurs 2, 3. Ceci implique

que l'un des deux sommets  $u_1, u_2$ , disons  $u_1$ , reçoit la couleur 3 et l'autre la couleur 2. Dans ce cas, la couleur 2 est répétée dans le voisinage de  $v_3$ . Ainsi,  $v_3$  aura une couleur manquante dans son voisinage, contradiction. D'où  $b(T(C_4)) \leq 4$ . Par ailleurs, la Figure 3.8 (b) présente une  $b$ -coloration du graphe  $T(C_4)$  avec 4 couleurs. D'où  $b(T(C_4)) = 4$ .

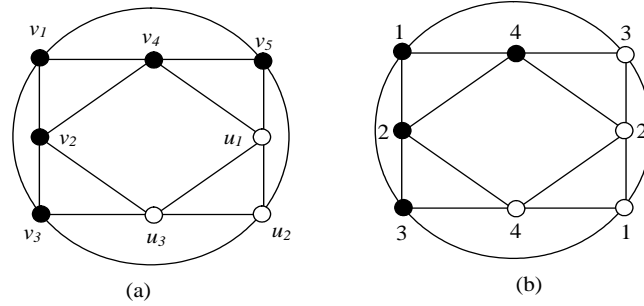


FIGURE 3.8. Une  $b$ -coloration de  $T(C_4)$  avec 4 couleurs.

La Figure 3.9 donne une  $b$ -coloration de  $T(C_5)$  avec 5 couleurs. Vu que  $\Delta(T(C_5)) = 4$ , alors  $b(T(C_5)) = 5$ . Montrons maintenant que pour  $n > 5$ ,  $b(T(C_n)) = 5$ . Comme  $T(C_n)$  est un graphe 4-régulier d'ordre au moins 10, alors  $m(T(C_n)) = 5$ . Donc  $b(T(C_n)) \leq 5$ . Pour avoir l'égalité, il suffit de donner une  $b$ -coloration de  $T(C_n)$  avec 5 couleurs. Pour cela, considérons un sous-graphe  $H$  de  $T(C_n)$  obtenu à partir de  $T(C_6)$  en supprimant un seul sommet de  $T(C_6)$ . Puisque  $m(H) \leq m(T(C_6))$ , alors  $b(H) \leq 5$ . Par ailleurs, la Figure 3.10 présente une  $b$ -coloration  $c$  de  $H$  avec 5 couleurs. Par conséquent,  $b(H) = 5$ . Soit  $c$  une  $b$ -coloration de  $H$  avec 5 couleurs. Comme  $\Delta(T(C_n)) = 4$ , alors  $c$  peut s'étendre à  $T(C_n)$ ,  $n > 5$ . D'où  $b(T(C_n)) = 5$ , pour  $n > 5$ .  $\square$

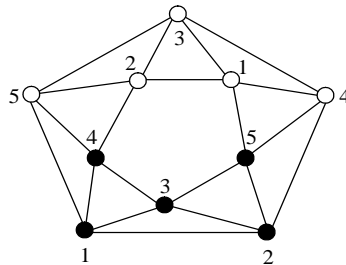


FIGURE 3.9. Une  $b$ -coloration de  $T(C_5)$  avec 5 couleurs.

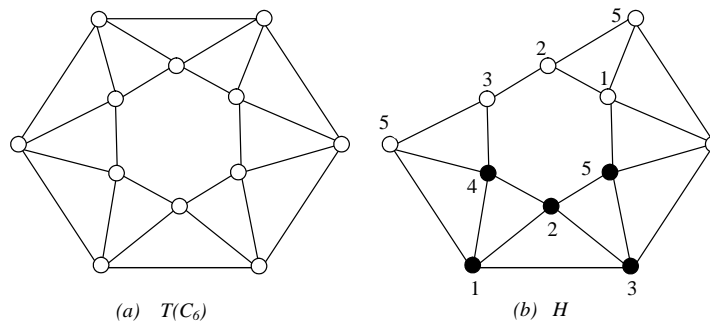


FIGURE 3.10. (a) Le graphe total de  $C_6$  (b) Une  $b$ -coloration de  $H$  avec 5 couleurs

### 3.2.5 Le nombre $b$ -chromatique de $M(W_n)$ et $T(W_n)$

**Théorème 3.11.** Soit  $W_n$  la roue d'ordre  $n \geq 4$ . Alors,

$$i) b(M(W_n)) = \begin{cases} n + 1 & \text{si } 4 \leq n \leq 6 \\ n & \text{si } n \geq 7 \end{cases}, \quad ii) b(T(W_n)) = n.$$

Preuve. *i)* Pour  $n = 4$ , posons  $H_1 = M(W_4)$ . On peut facilement vérifier que le  $m$ -degré et l'ordre de  $H_1$  sont respectivement 6 et 10 (Voir Figure 3.11); alors  $b(H_1) \leq 6$ . Supposons que  $H_1$  admet une  $b$ -coloration  $c$  avec 6 couleurs. Soit  $A$  l'ensemble des sommets denses de  $H_1$  (les sommets de  $A$  sont représentés en gras sur la Figure 3.11). Comme  $|A| = 6$ , alors tous les sommets de  $A$  sont des  $b$ -sommets et de couleurs distinctes. A cet effet, il existe une classe de couleur contenant exactement un seul sommet, disons  $x$ , sinon  $n(H_1) \geq 12$ . Dans ce cas,  $x$  est un  $b$ -sommets. Ceci implique que tout sommet de  $A \setminus \{x\}$  est adjacent à  $x$ , ce qui n'est pas vrai pour le graphe  $H_1$ . En conséquence,  $b(H_1) \leq 5$ . La Figure 3.11 montre aussi que  $H_1$  admet une  $b$ -coloration utilisant 5 couleurs. Donc  $b(H_1) = 5$ .

Pour  $n = 5$ , posons  $H_2 = M(W_5)$ . L'ordre de  $H_2$  est 13. De plus,  $H_2$  a 4 sommets de degré 7, 4 sommets de degré 6, un sommet de degré 4 et 4 sommets de degré 3. Donc  $m(H_2) = 7$ . Supposons alors que  $b(H_2) = 7$  et considérons une  $b$ -coloration  $c$  de  $H_2$  avec 7 couleurs. Pour le même argument cité précédemment, on peut constater que  $H_2$  contient 7 sommets denses qui sont tous des  $b$ -sommets et de couleurs distinctes. En vue de cela, il existe une classe de couleur contenant un seul sommet, disons  $x$ , car sinon  $n(H_2) \geq 14$ .

Ceci implique que tous les  $b$ -sommets (sommets denses) de  $c$  sont adjacents à  $x$ , ce qui n'est pas vrai pour le graphe  $H_2$ . En conséquence,  $b(H_2) \leq 6$ . La Figure 3.12 montre que  $H_2$  admet une  $b$ -coloration avec 6 couleurs. D'où  $b(H_2) = 6$ .

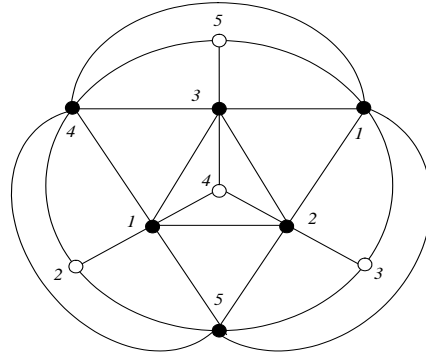


FIGURE 3.11. Une  $b$ -coloration du graphe  $H_1 = M(W_4)$  avec 5 couleurs.

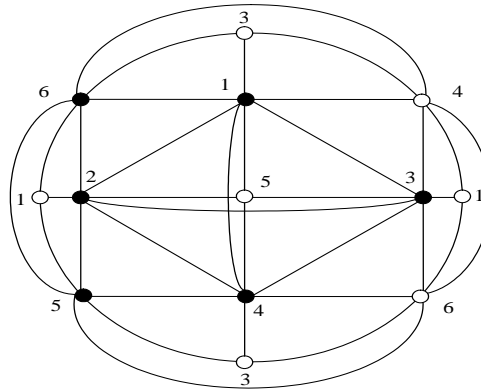


FIGURE 3.12. Une  $b$ -coloration du graphe  $H_2 = M(W_5)$  avec 6 couleurs.

Pour  $n = 6$ , il est facile de voir que, le  $m$ -degré de  $M(W_6)$  est égal à 7. D'autre part, la Figure 3.13 présente une  $b$ -coloration de  $M(W_6)$  avec 7 couleurs. En vue de cela,  $b(M(W_6)) = 7$ .

Pour  $n \geq 7$ , posons  $G = M(W_n)$ . On peut vérifier que  $G$  a  $n - 1$  sommets de degré  $n + 2$ ,  $n - 1$  sommets de degré 6,  $n - 1$  sommets de degré 3 et un seul sommet de degré  $n - 1$ . Ceci implique que  $m(G) = n$ . Donc  $b(G) \leq n$ . D'autre part, il est clair que  $\Delta(W_n) = n - 1$  et donc par la Proposition 3.7,  $b(G) \geq n$ . D'où  $b(G) = n$ .

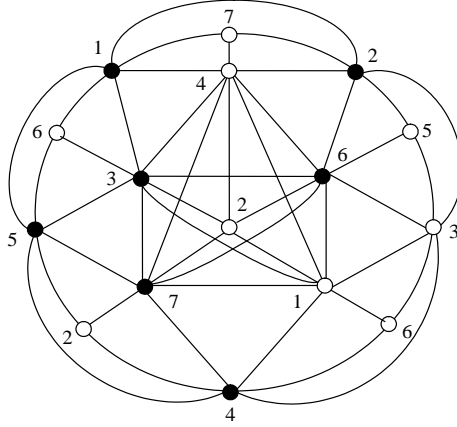


FIGURE 3.13. Une  $b$ -coloration de  $M(W_6)$  avec 7 couleurs. Les  $b$ -sommets sont dessinés en noir.

*ii)* Pour  $n \geq 4$ , posons  $G = T(W_n)$ . Le graphe  $G$  a  $n - 1$  sommets de degré  $n + 2$ ,  $2(n - 1)$  sommets de degré 6 et un seul sommet de degré  $2(n - 1)$ . En vue de cela,  $m(G) = n$ . D'où  $b(G) \leq n$ . D'autre part, on peut vérifier que  $G$  contient un sous-graphe complet d'ordre  $n$ . Donc  $b(G) \geq n$ . En conséquence,  $b(G) = n$ .  $\square$

### 3.2.6 Le nombre $b$ -chromatique de $M(Cr(P_n))$ , $M(Cr(C_n))$ , $T(Cr(P_n))$ et $T(Cr(C_n))$

**Théorème 3.12.** *Pour toute chaîne  $P_n$  d'ordre  $n \geq 2$ , on a :*

$$i) \quad b(M(Cr(P_n))) = \begin{cases} 3 & \text{si } n = 2 \\ 4 & \text{si } n = 3 \\ 5 & \text{si } n = 4, 5, 6 \\ 6 & \text{si } n = 7, 8, 9 \\ 7 & \text{si } n \geq 10 \end{cases} \quad ii) \quad b(T(Cr(P_n))) = \begin{cases} 4 & \text{si } n = 2 \\ 5 & \text{si } n = 3, 4 \\ 6 & \text{si } n = 5 \\ 7 & \text{si } n \geq 6 \end{cases}$$

*Preuve.* Pour  $2 \leq n \leq 9$ , posons  $G_n = M(Cr(P_n))$ . Les Figure 3.14 et 3.15 présentent une  $b$ -coloration des graphes  $M(G_n)$ ,  $2 \leq n \leq 9$ , avec  $m(G_n)$  couleurs. En vu de cela,  $b(G_n) = m(G_n)$ .

Pour  $n > 10$ , posons  $G = M(Cr(P_n))$ . Soit  $H = M(Cr(P_8))$  un sous-graphe de  $G$ . Considérons une  $b$ -coloration  $c$  de  $H$  avec 7 couleurs (coloration partielle de  $G$ ). Vu que  $\Delta(G) = 6$ ,

alors on peut étendre  $c$  à  $G$ . En conséquence,  $b(G) = 7$ .

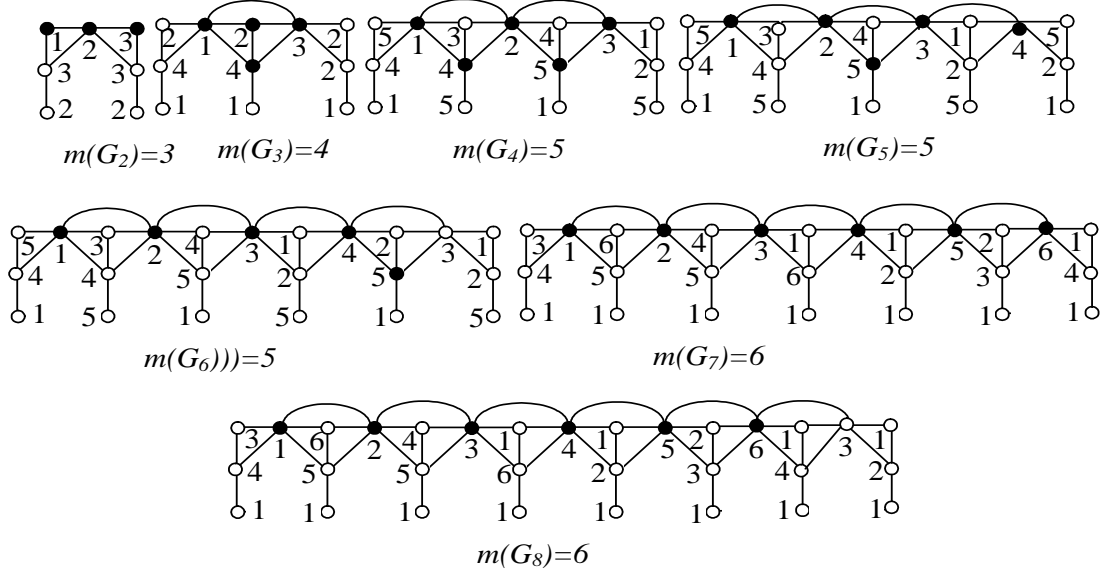


FIGURE 3.14. Le  $m$ -degré et la  $b$ -coloration optimale de  $M(Cr(P_n))$ ,  $2 \leq n \leq 8$

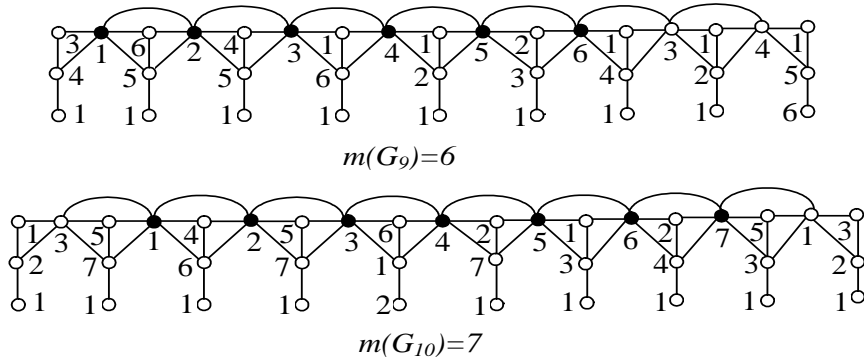


FIGURE 3.15. Le  $m$ -degré et la  $b$ -coloration optimale de  $M(Cr(P_n))$  avec  $2 \leq n \leq 10$ .

ii) Pour  $2 \leq n \leq 6$ , on peut facilement vérifier le nombre  $b$ -chromatique des graphes  $T(Cr(P_2))$ ,  $T(Cr(P_3))$ ,  $T(Cr(P_4))$ ,  $T(Cr(P_5))$  et  $T(Cr(P_6))$  est égal à son  $m$ -degré (Voir Figure 3.16).

Pour  $n > 5$ , posons  $G = T(Cr(P_n))$ . Le graphe  $G$  a au moins 7 sommets de degré 6 mais il n'a pas 8 sommets de degré 7. D'où  $m(G) = 7$ . Par conséquent,  $b(G) \leq 7$ . Pour avoir égalité, il suffit de donner une  $b$ -coloration de  $G$  avec 7 couleurs. Soit  $H = T(Cr(P_6))$

un sous graphe de  $G$ . Soit  $c$  une  $b$ -coloration de  $H$  avec 7 couleurs (coloration partielle de  $G$ ). Vu que  $\Delta(G) = 6$ , alors on peut étendre  $c$  à tous les sommets de  $G$ . En conséquence  $b(G) = 7$ .

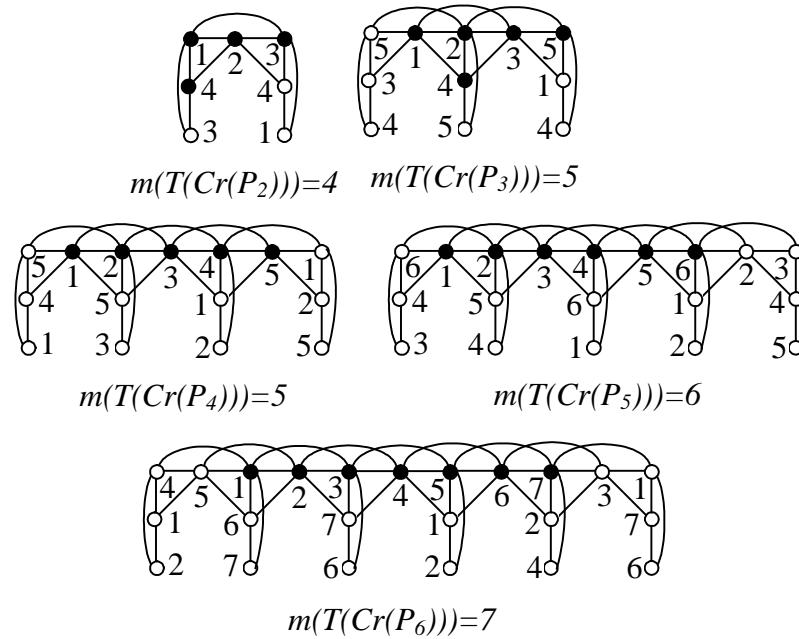


FIGURE 3.16. Le  $m$ -degré et la  $b$ -coloration optimale de  $T(Cr(P_n))$ ,  $2 \leq n \leq 6$ .

□

## CHAPITRE 4

# CARACTÉRISATION DE CERTAINS GRAPHES ARÊTE $b$ -CRITIQUES

Dans ce chapitre, nous étudions l'effet de la suppression d'une arête quelconque sur le nombre  $b$ -chromatique de certains graphes particuliers. Un graphe  $G$  est dit arête  $b$ -critique si pour toute arête  $e$  de  $G$ ,  $b(G - e) < b(G)$ . Dans ce sens, nous allons caractériser les graphes  $P_4$ -sparse arête  $b$ -critiques et les graphes quasi-adjoints arête  $b$ -critiques.

Le contenu de ce chapitre a été publié dans la revue *Australasian Journal of Combinatorics* [71].

Dans [54] T. Faik a montré que la suppression d'une arête quelconque de  $G$  peut faire diminuer le nombre  $b$ -chromatique de  $G$  par au plus un.

**Proposition 4.1.** [54] *Soit  $G$  un graphe et  $e$  une arête de  $G$ , alors  $b(G - e) \geq b(G) - 1$ .*

Au vu de la définition ci-dessus et de la proposition 4.1, on a immédiatement la définition suivante.

**Définition 4.2.** *Un graphe  $G$  est dit arête  $b$ -critique si pour toute arête  $e$  de  $G$ ,  $b(G - e) = b(G) - 1$ .*

Il convient de remarquer qu'il est inutile de considérer les graphes possédant des sommets isolés car cela ne change rien à la définition 4.2. C'est pour cette raison que nous nous restreignons notre étude au cas de graphes sans sommets isolés.

### 4.1 Résultats préliminaires sur les graphes arêtes $b$ -critiques.

Dans cette section, nous montrons que, pour un graphe arête  $b$ -critique  $G = (V, E)$ , le  $b$ -système  $S$  de toute  $b$ -coloration optimale de  $G$  est unique, l'ensemble  $V \setminus S$  est un stable



et  $b(G) = \Delta(G) + 1$ . Aussi, nous montrons que tout graphe scindé différent d'une clique n'est pas arête  $b$ -critique.

Nous commençons notre étude par le théorème suivant:

**Théorème 4.3.** *Soit  $G = (V, E)$  un graphe arête  $b$ -critique et soit  $c$  une  $b$ -coloration de  $G$  avec  $b(G)$  couleurs. Alors,*

*i)  $c$  ne possède pas deux  $b$ -sommets de même couleur.*

*ii) Le  $b$ -système  $S$  de  $c$  est unique.*

*iii)  $V \setminus S$  est un stable.*

*vi)  $\forall x \in V \setminus S, d_G(x) \leq |S| - 2$ .*

Preuve. Soit  $G = (V, E)$  un graphe arête  $b$ -critique et soit  $c$  une  $b$ -coloration de  $G$  avec  $b(G)$  couleurs.

*i)* Supposons qu'il existe deux  $b$ -sommets de  $c$ , disons  $x_1, x_2$ , de même couleur. Ceci implique que tous les voisins de  $x_i$  ( $i = 1, 2$ ) sont des  $b$ -sommets. En effet, s'il existe un non  $b$ -sommets  $u \in N(x_i)$  ( $i = 1$  ou  $2$ ), alors  $b(G - ux_i) \geq b(G)$ , contradiction. De ce fait, puisque  $x_i$  ( $i = 1, 2$ ) a toutes les couleurs, sauf sa propre couleur bien évidemment, dans son voisinage, alors pour tout  $b$ -sommets  $z \in N(x_i)$ ,  $b(G - zx_i) \geq b(G)$ , contradiction.

*ii)* Est une conséquence directe de *(i)*.

*iii)* Soient  $u$  et  $v$  deux sommets de  $V \setminus S$ . D'après *(ii)*,  $u$  et  $v$  sont des non  $b$ -sommets. De ce fait,, si  $u$  est adjacent à  $v$ , alors  $b(G - uv) \geq b(G)$ , contradiction.

*vi)* Soit  $u \in V \setminus S$ . Alors  $u$  est adjacent à au plus  $|S| - 2$  sommets de  $S$ , sinon,  $u$  serait un  $b$ -sommets. □

Nous allons maintenant établir le résultat suivant.

**Théorème 4.4.** *Si  $G$  est un graphe arête  $b$ -critique, alors  $b(G) = \Delta(G) + 1$ .*

Preuve. Posons  $b(G) = k$ . Pour un graphe  $G$ , il est facile de remarquer que  $k \leq \Delta(G) + 1$ . Pour avoir l'autre inégalité, il suffit de montrer que tout sommets  $x$  d'un graphe arête  $b$ -critique  $G$  satisfait  $d_G(x) \leq k - 1$ . Supposons au contraire qu'il existe un sommets  $y$  tel que

$d_G(y) > k - 1$ . Au vu du Théorème 4.3, on en conclut que  $y$  est un  $b$ -sommet. De ce fait, le voisinage de  $y$  contient au moins deux sommets, disons  $u, v$ , de même couleur tels que l'un des deux, disons  $u$ , n'est pas un  $b$ -sommet car sinon, on aura une contradiction avec le Théorème 4.3. Mais dans ce cas,  $b(G - yu) \geq b(G)$ , contradiction. Donc  $k = \Delta(G) + 1$ .  $\square$

L'observation suivante est immédiate.

**Observation 4.5.** *Soient  $G = (V, E)$  un graphe arête  $b$ -critique et  $c$  une  $b$ -coloration optimale de  $G$ . Si  $x \in V$  est un  $b$ -sommet de  $c$ , alors  $d_G(x) = \Delta(G)$ .*

**Théorème 4.6.** *Un graphe  $d$ -régulier  $G$  est arête  $b$ -critique si et seulement si  $G$  est un graphe complet.*

Preuve. Posons  $k = b(G)$ . Soit  $G$  un graphe  $d$ -régulier arête  $b$ -critique. Par le Théorème 4.4,  $k = d + 1$ . Considérons une  $b$ -coloration  $c$  de  $G$  avec  $k$  couleurs. Soit  $S$  un  $b$ -système de  $c$ . La définition de  $S$  implique que  $|S| = k$ . Supposons que  $S$  n'est pas une clique. Comme  $G$  est  $d$ -régulier et  $V \setminus S$  est un stable, alors  $V \setminus S$  contient au moins un sommet  $u$  adjacent à  $d$  sommets de  $S$ . Dans ce cas,  $u$  serait un  $b$ -sommet de couleur répétée, ce qui contredit le Théorème 4.3 (i). Donc  $S$  est une clique d'ordre  $d + 1$  et par conséquent,  $V \setminus S$  est un ensemble vide. D'où  $G$  est un graphe complet.

Inversement, il est facile de vérifier que les graphes complets sont arête  $b$ -critiques.  $\square$

Nous allons montrer ci-après que les graphes scindés ne sont pas arête  $b$ -critiques.

**Définition 4.7.** *Un graphe scindé est un graphe dont les sommets admettent une partition en deux sous-ensembles  $S$  et  $K$  où  $S$  est un stable et  $K$  est une clique.*

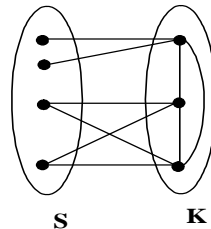


FIGURE 4.1. Exemple d'un graphe scindé

**Observation 4.8.** *Si  $G$  est un graphe scindé, alors  $b(G) = \omega(G)$ .*

En utilisant cette observation, on obtient le résultat suivant:

**Observation 4.9.** *Tout graphe scindé différent d'un graphe complet n'est pas arête  $b$ -critique.*

Preuve. Soit  $G \neq K_n$  un graphe scindé. Par l'Observation 4.8,  $b(G) = \omega(G)$ . Soit  $K$  une clique maximum de  $G$ . Soit  $E' = \{xy \in E(G) : x \in K, y \in V \setminus K\}$ . Vu que  $G$  est sans sommets isolés, alors  $E' \neq \emptyset$ . Par conséquent, pour toute arête  $e$  de  $E'$ ,  $b(G - e) \geq \omega(G) = b(G)$ .  $\square$

## 4.2 Graphes $P_4$ -sparse arête $b$ -critiques

Dans cette section, nous allons étudier la notion des graphes arête  $b$ -critiques pour une classe de graphes très étudiée, à savoir les graphes  $P_4$ -sparse. Ces graphes sont une généralisation naturelle des graphes sans  $P_4$ . Dans [72] Hoàng a introduit la notion de  $P_4$ -sparse comme étant un graphe dont tout sous-ensemble à cinq sommets induit au plus un  $P_4$ . Cette classe de graphes a suscité l'intérêt de beaucoup de chercheurs. Par exemple, dans [26] les auteurs ont présenté un algorithme qui détermine une  $b$ -coloration optimale pour cette classe de graphes.

Commençons cette section par la définition suivante.

**Définition 4.10.** *Une araignée est un graphe qui peut être partitionné en trois ensembles de sommets  $S$ ,  $K$  et  $R$ , avec  $R$  éventuellement vide, tels que :*

1.  $S$  est un stable et  $K$  est une clique et  $|S| = |K| \geq 2$ ;
2. Tous les sommets de  $R$  sont adjacents à tous les sommets de  $K$  et à aucun sommet de  $S$ ;
3. Il existe une bijection  $f : S \rightarrow K$  telle que:
  - (a) soit  $\forall x \in S, N(x) \cap K = \{f(x)\}$ .
  - (b) soit  $\forall x \in S, N(x) \cap K = K \setminus \{f(x)\}$ .

Une araignée qui vérifie la condition 3(a) est dite *fine*, et épaisse si elle vérifie la condition 3(b). Une araignée avec  $|S| = |K| = 2$  est à la fois fine et épaisse. Le triplet  $(S, K, R)$  (ou  $(S, K)$  si  $R$  est vide) est appelé la partition d'araignée, et peut être trouvé en temps linéaire [73]. Un exemple d'araignée est donné dans la Figure 4.2.

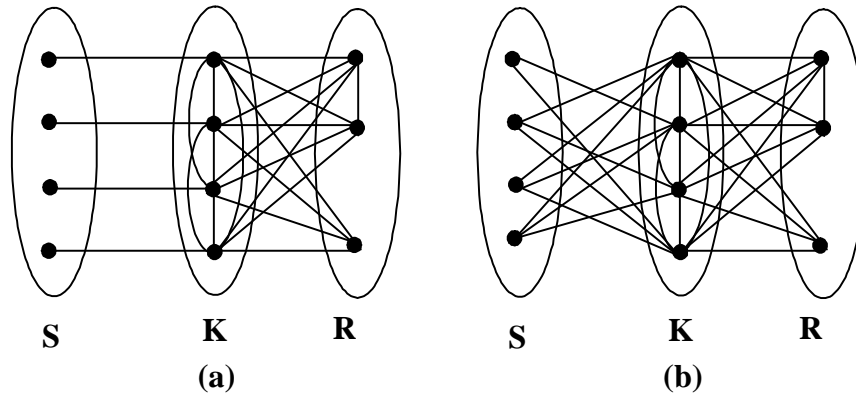


FIGURE 4.2. (a) araignée fine (b) araignée épaisse.

Il est à noter que le graphe complémentaire d'une araignée fine est une araignée épaisse et vice versa.

Les graphes  $P_4$ -sparse ont été caractérisés par Hoàng dans [72] et indépendamment par Jamison & Olariu dans [33].

**Théorème 4.11.** [72, 33] *Si  $G$  est un graphe  $P_4$ -sparse, alors  $G$  ou  $\overline{G}$  est non connexe, ou  $G$  est une araignée.*

Du Théorème 4.11, on peut déduire l'observation suivante:

**Observation 4.12.** *Soit  $G$  un graphe  $P_4$ -sparse non connexe. Alors, toute composante connexe de  $G$  est soit une araignée ou le joint de deux graphes.*

Le résultat suivant est une caractérisation des araignés arête  $b$ -critiques.

**Théorème 4.13.** *Soit  $G$  une araignée. Alors  $G$  est arête  $b$ -critique si et seulement si  $G$  est un graphe complet.*

Preuve. Soit  $G = (V, E)$  une araignée arête  $b$ -critique avec  $V = R \cup K \cup S$ . La définition de  $G$  implique que,

$$\Delta(G) \geq |K| + |R|. \quad (4.1)$$

Soit  $c$  une  $b$ -coloration de  $G$  avec  $b(G)$  couleurs. Nous allons montrer que  $R \cup S$  ne contient aucun  $b$ -sommets et que tout sommet de  $K$  est un  $b$ -sommets. Supposons au contraire que  $R \cup S$  contient un  $b$ -sommets, disons  $x$ . La définition de l'araignée implique que  $d_G(x) \leq |R| + |K| - 1$ . En appliquant l'Observation 4.5, on obtient  $\Delta(G) \leq |K| + |R| - 1$ . Ceci contredit la condition 4.1. Donc  $R \cup S$  ne contient aucun  $b$ -sommets. Supposons maintenant que  $K$  contient un certain non  $b$ -sommets  $y$ . Soit  $x$  un voisin de  $y$  dans  $S$ . Il est immédiat de voir que  $b(G - xy) \geq b(G)$ , ce qui constitue une contradiction. D'où, tous les sommets de  $K$  sont des  $b$ -sommets. En conséquence, toutes les couleurs de  $c$  sont présentes dans  $K$ . Ceci implique que  $S \cup R = \emptyset$  car sinon  $b(G - e) \geq b(G)$ , pour toute arête  $e \notin E(G[K])$ . D'où,  $G$  est un graphe complet d'ordre  $|K|$ .

La condition suffisante est simple à vérifier. Ceci achève la preuve du Théorème.  $\square$

Du Théorème 4.13 et l'observation 4.5, on peut déduire le résultat suivant

**Observation 4.14.** *Soit  $G$  un graphe  $P_4$ -sparse arête  $b$ -critique non connexe et soit  $G_i$  une composante connexe de  $G$ . Si  $G_i$  est une araignée  $(S, K, R)$ , alors:*

- i)  $S \cup R$  ne contient aucun  $b$ -sommets et tous les sommets de  $K$  sont des  $b$ -sommets.*
- ii) Pour toute  $b$ -coloration de  $G$  avec  $b(G)$  couleurs, toute couleur dans  $S$  n'apparaît pas dans  $R$ .*

Définissons maintenant la famille de graphes suivante qui nous sera utile pour la suite.

**Définition 4.15.** *Soit  $G_i$  un graphe connexe d'ensemble de sommets  $S^i \cup K^i \cup R^i$  qui satisfait les conditions suivantes:*

- 1.  $K^i$  est une clique et  $R^i, S^i$  sont des stables.*
- 2.  $K^i \neq \emptyset, S^i \cup R^i \neq \emptyset$ .*
- 3.  $G_i$  est une araignée fine  $(S^i, K^i, R^i)$  ou le joint de deux graphes  $G[R^i]$  et  $G[K^i]$  (différent d'une clique). Si  $R^i = \emptyset$ , alors  $G_i$  est une araignée fine  $(S^i, K^i)$ .*

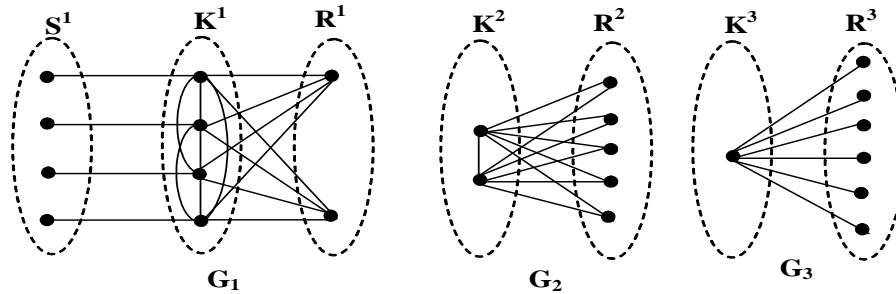
Pour tout entier  $p \geq 2$ , soit  $G = \bigcup_{i=1}^p G_i$  l'union des  $p$  composantes connexes  $G_1, G_2, \dots, G_p$  tels que, outre les trois conditions précédentes, les ensembles  $S, K$  et  $R$  satisfont la condition suivante:

$$\text{Si } S^i = \emptyset, \text{ alors } |R^i| = \left| \bigcup_{j=1}^p K^j \right| \text{ sinon } |R^i| = \left| \bigcup_{j=1}^p K^j \right| - 1.$$

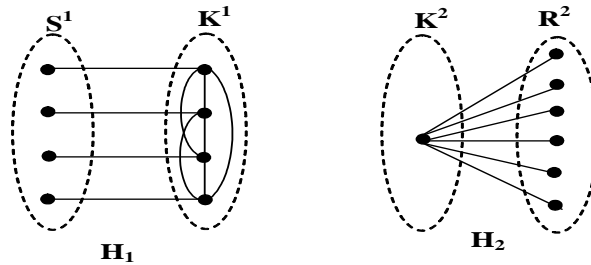
Soit  $\mathcal{G}$  une collection de graphes définie comme ci-dessus. Alors, Il est aisé de remarquer que tout graphe  $G \in \mathcal{G}$  satisfait,

$$\Delta(G) = \Delta(G_i) = \sum_{i=1}^p |K^i| - 1, \quad i \in \{1, \dots, p\}.$$

Un exemple de deux graphes de la famille  $\mathcal{G}$  est donné dans la Figure 4.3.



(a) Graphe  $G = G_1 + G_2 + G_3$



(b) Graphe  $H = H_1 + H_2$

FIGURE 4.3. Deux graphes de la famille  $\mathcal{G}$

L'observation suivante est facile à vérifier.

**Observation 4.16.** *Si  $G \in \mathcal{G}$ , alors  $b(G) = \Delta(G) + 1$ .*

Preuve. Soit  $G$  un graphe de  $\mathcal{G}$ . Une  $b$ -coloration de  $G$  avec  $\Delta(G) + 1$  couleurs est obtenue en colorant chaque sommet de  $\bigcup_{i=1}^p K^i$  avec une couleur différente et, pour tout stable  $R^i$ , nous colorons les  $|R^i|$  sommets par une couleur qui n'apparaît dans  $K^i$ . Finalement, nous colorons chaque sommet  $S^i$  avec la même couleur de telle sorte que cette couleur n'apparaît pas dans  $(K^i \cup R^i)$ .  $\square$

Par ailleurs, par une simple vérification, on peut constater que les graphes de la famille  $\mathcal{G}$  sont arête  $b$ -critiques.

**Observation 4.17.** *Si  $G \in \mathcal{G}$ , alors il est arête  $b$ -critique.*

**Lemme 4.18.** *Si  $G_i$  est une composante connexe d'un graphe  $P_4$ -sparse arête  $b$ -critique, alors tous les  $b$ -sommets de  $G_i$  forment une clique.*

Preuve. Soit  $G$  un graphe  $P_4$ -sparse arête  $b$ -critique non connexe et soit  $G_i$  une composante connexe de  $G$ . Par l'Observation 4.12, on peut distinguer deux cas.

**Cas 1:**  $G_i$  est une araignée. L'Observation 4.14 nous permet de constater que tous les  $b$ -sommets de  $G_i$  forment une clique.

**Cas 2:**  $G_i$  est le joint de deux graphes, disons  $G[A]$  et  $G[B]$ . Supposons que  $G_i = G[A] \vee G[B]$  contient deux sommets  $x, u \in A$  de même couleur. Théorème 4.3 (i) implique que  $x$  ou  $u$ , disons  $u$ , est un non  $b$ -sommet. Il s'en suit que, pour tout sommet  $z \in B$ ,  $b(G - uz) \geq b(G)$ , contradiction. Ainsi, aucune couleur ne peut apparaître deux fois dans  $A$ . Similairement, tous les sommets de  $B$  sont de couleurs différentes. Par conséquent, tous les  $b$ -sommets de  $G_i$  forment une clique.  $\square$

Il convient de noter que le lemme 4.18 reste vrai même pour les graphes  $P_4$ -sparse arête  $b$ -critique connexes. Ainsi, une conséquence directe de ce lemme est:

**Observation 4.19.** *Soit  $G = G_1 \vee G_2$  le joint de deux graphes  $G_1$  et  $G_2$ . Alors  $G$  est un graphe  $P_4$ -sparse arête  $b$ -critique si et seulement si  $G$  est un graphe complet.*

Le lemme suivant a été prouvé par C.T. Hoàng and M. Kouider [42].

**Lemme 4.20.** [42] *Soit  $p \geq 1$  un entier. Soit  $G'$  et  $K_p$  deux graphes de sommets disjoints où  $K_p$  est une clique de  $p$  sommets, et soit  $G = G' + K_p$ . Alors, on a  $b(G) = \max\{b(G'), p\}$ .*

Maintenant, nous donnons une caractérisation des graphes  $P_4$ -sparse arête  $b$ -critiques.

**Théorème 4.21.** *Soit  $G = (V, E)$  un graphe  $P_4$ -sparse. Alors  $G$  est arête  $b$ -critique si et seulement si  $G$  est un graphe complet où  $G \in \mathcal{G}$ .*

*Preuve.* Soit  $G = (V, E)$  un graphe  $P_4$ -sparse. Il est immédiat de voir que les graphes complets sont arête  $b$ -critiques. Par ailleurs, l'Observation 4.17 implique que tout graphe de  $\mathcal{G}$  est arête  $b$ -critique. Il suffit donc de montrer la condition nécessaire. Par le Théorème 4.11, on peut distinguer trois cas.

**Cas 1:**  $\overline{G}$  est non connexe. Alors  $G$  est le joint de deux graphes  $G_1$  et  $G_2$ . Au vu de l'Observation 4.19, on en conclut que  $G$  est un graphe complet.

**Cas 2:**  $G$  est non connexe. Alors  $G$  est l'union d'au moins deux composantes connexes. Soit  $G_i$  une composante de  $G$ . Puisque  $G$  est non connexe, alors  $G = G' + G_i$ , où  $G'$  est un sous-graphe induit de  $G$ . Comme  $G$  est sans sommets isolés, alors  $E(G') \neq \emptyset$  et  $|V(G_i)| \geq 2$ .

**Fait 5.**  $G_i$  n'est pas une clique.

*Preuve du Fait 5.* Supposons que  $G_i$  est une clique d'ordre  $p$ . Le Lemme 4.20 implique que,  $b(G) = b(G')$  ou  $p$ . Si  $b(G) = p$  alors  $b(G - e) \geq b(G)$ , pour toute arête  $e$  de  $G'$  sinon  $b(G - e) \geq b(G)$ , pour toute arête  $e$  de  $G_i$ . On a donc une contradiction dans les deux cas, ce qui prouve que  $G_i$  n'est pas une clique.

**Fait 6.**  $\Delta(G_i) = \Delta(G)$ .



*Preuve du Fait 6.* Supposons que  $\Delta(G_i) < \Delta(G)$ . Au vu de l'Observation 4.5,  $G_i$  ne contient aucun  $b$ -sommets. Par conséquent,  $b(G_i - e) \geq b(G_i)$ , pour toute arête  $e$  de  $G_i$ , contradiction.

**Fait 7.**  $G_i$  est un graphe scindé d'ensemble de sommets  $K^i \cup S^i$ , où  $K^i$  est une clique et  $S^i$ ,  $|S^i| \geq 2$ , est un stable. En outre, tous les sommets de  $K^i$  ont le même nombre de voisins dans  $S^i$ .

*Preuve du Fait 7.* Soit  $c$  une  $b$ -coloration de  $G$  avec  $b(G)$  couleurs. Soit  $K^i$  l'ensemble de tous les  $b$ -sommets de  $c$  dans  $G_i$ . Le Lemme 4.18 implique que  $K^i$  est une clique. En revanche, le Théorème 4.3 et le Fait 5 montrent que  $V(G_i) \setminus K^i$  est un ensemble stable non vide. Donc  $G_i$  est un graphe scindé. Posons  $S^i = V(G_i) \setminus K^i$ . Supposons que  $S^i$  contient un seul  $u$ . Vu que  $G_i$  est sans sommets isolés, alors  $u$  a au moins un voisin dans  $K^i$ . Montrons que tout sommet de  $K^i$  est un voisin de  $u$ . Supposons au contraire qu'il existe un sommet  $x \in K^i$  qui n'est pas adjacent à  $u$ . Il est immédiat de voir que  $d_{G_i}(x) = \Delta(G_i) - 1$ , cela découle de la définition de  $G_i$ . Par ailleurs, le Fait 6 implique que,  $d_{G_i}(x) = \Delta(G) - 1$ . De ce fait, selon l'Observation 4.5,  $y$  est un non  $b$ -sommets, contradiction. Ceci implique que  $G_i$  est une clique; ce qui contredit le Fait 5. D'où,  $S^i$  contient au moins deux sommets. Enfin, il convient de signaler que l'Observation 4.5 implique que tous les sommets de  $K^i$  ont le même nombre de sommets dans  $S^i$ .

**Fait 8.**  $G_i$  n'est pas une araignée épaisse.

*Preuve du Fait 8.* Supposons que  $G_i$  est une araignée  $(S, K, R)$ . Si  $|S| = |K| = 2$ , alors on peut considérer  $G_i$  comme étant une araignée fine. Supposons donc que  $G_i$  est une araignée épaisse avec  $|S| \geq 3$  et considérons une  $b$ -coloration de  $G$  utilisant  $b(G)$  couleurs. Nous allons montrer que tous les sommets de  $S$  sont de couleurs différentes. En effet, supposons que  $S$  contient deux sommets, disons  $s_1, s_2$  de même couleur. Puisque  $|K| = |S| \geq 3$ , alors la structure de  $G_i$  implique qu'il existe un sommet  $x \in K$  qui est adjacent à  $s_1, s_2$ . Au vu de l'Observation 4.14,  $s_1$  et  $s_2$  sont des non  $b$ -sommets. De ce fait,  $b(G_i - xs_i) \geq b(G_i)$  pour  $i = 1$  ou  $2$ , contradiction. D'où, tous les sommets de  $S$  sont de couleurs distinctes. Etant donné que chaque sommet de  $K$  n'est pas adjacent à tous les

sommets de  $S$ , alors chaque sommet de  $K$  a un voisin dans  $R$  tel que sa couleur apparaît dans  $S$ . Ceci contredit l'Observation 4.14. D'où,  $G_i$  n'est pas une araignée épaisse.

Enfin, il convient de souligner que le Fait 7 implique que,  $G[R]$  est soit un graphe discret ou bien un graphe scindé. Donc sans perte de généralité, on peut supposer que  $S \cup R = S^i$  et  $K = K^i$ .

**Fait 9.** *Si  $G_i$  est une araignée  $(K, S)$ , alors  $G = Cr(K_p) + K_{1,p}$ , où  $p = |K|$  et  $|V(G)| = 3p + 1$  (Voir Figure 4.3 (b))*

*Preuve du Fait 9.* Soit  $G_i$  une araignée  $(K, S)$ . D'après les Faits 7 et 8,  $G_i$  est une couronne d'une clique  $Cr(K_p)$  où  $K = K^i$  et  $S = S^i$  et  $p = |K|$ . De plus, l'Observation 4.14 implique que  $G_i$  contient  $|K|$   $b$ -sommets. Vu que  $\Delta(G_i) = |K|$ , alors le Théorème 4.4 et le Fait 6 impliquent que  $b(G) = |K| + 1$ . Donc  $G = G_i + G'$  où  $G'$  est un sous graphe induit de  $G$  qui contient un seul  $b$ -sommet, disons  $y$ . Le Théorème 4.3 et le Fait 5 impliquent que  $V(G') \setminus \{y\}$  est un ensemble stable non vide. Puisque  $G$  est sans sommets isolés, alors tous les sommets de  $V(G') \setminus \{y\}$  sont adjacents à  $y$ . Ceci implique que  $G'$  est une étoile d'ordre  $|K| + 1$ . D'où  $G = Cr(K) + K_{1,p}$ , avec  $|V(G)| = 3|K| + 1$ .

En utilisant l'Observation 4.12 et les Faits 5-9, on peut déduire que,  $G_i$  est soit le joint de deux graphes  $G[K^i]$  et  $G[S^i]$  où  $K^i$  et  $S^i$  sont, respectivement, clique et stable vérifiant  $\Delta(G_i) = |K^i| + |S^i| - 1$ , soit il est une araignée fine  $(S, K, R)$  avec  $\Delta(G_i) = |K| + |R|$  où  $S \cup R = S^i$  et  $K = K^i$ , ou bien il est une araignée fine  $(S, K)$  où  $S = S^i$ ,  $K = K^i$ . D'autre part, le Lemme 4.18 et le Théorème 4.3 impliquent que  $\bigcup_{i=1}^k K^i$  est un  $b$ -système de  $G$ . Donc  $b(G) = \sum_{i=1}^k |K^i|$ . Le Théorème 4.4 et le Fait 6 impliquent que  $\sum_{i=1}^k |K^i| = \Delta(G) + 1 = \Delta(G_i) + 1$ . En conséquence,  $G \in \mathcal{G}$ .

**Cas 3:**  $G$  est une araignée. Alors, le Théorème 4.13 implique que  $G$  est un graphe complet. Ceci termine la preuve du Théorème 4.21.  $\square$

### 4.3 Graphes quasi-adjoints arête $b$ -critiques

Cette section est consacrée à l'étude des graphes quasi-adjoints arête  $b$ -critiques. Un graphe est dit quasi-adjoint si le voisinage de tout sommet peut être couvert par deux cliques (c'est à dire, se partage en deux clique); ce qui est équivalent à dire que le complémentaire du voisinage de tout sommet est un graphe biparti. La classe des graphes adjoints est contenue strictement dans la classe des graphes quasi-adjoints qui, elle même, est contenue strictement dans la classe des graphes sans  $K_{1,3}$ . Par exemple, le graphe sans  $K_{1,3}$  de la Figure 4.4 n'est pas un graphe quasi-adjoint et le graphe quasi-adjoint  $H_0$  d'ordre 6 de la Figure 4.5 n'est pas un graphe adjoint.

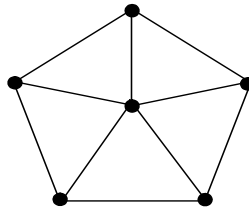


FIGURE 4.4. Graphe sans  $K_{1,3}$  qui n'est pas un graphe quasi-adjoint.

Pour commencer, introduisons un certain graphe  $H_0$  qui joue un rôle important dans cette section.

**Définition 4.22.** Soient  $K_n$  une clique d'ordre  $n \geq 3$  et  $x, y$  deux sommets de  $K_n$ . Le graphe  $H_0$  est obtenu à partir de la clique  $K_n$  en supprimant l'arête  $xy$  et en ajoutant deux arêtes pendantes  $xu, yv$ , où  $u, v \notin K_n$  sont deux sommets supplémentaires.

L'observation suivante est facile à vérifier.

**Observation 4.23.**  $H_0$  est arête  $b$ -critique. De plus,  $b(H_0) = b(K_n) = n$ .

Dans le but de caractériser les graphes quasi-adjoints arêtes  $b$ -critiques, plusieurs résultats intermédiaires sont nécessaires pour la démonstration de ce résultat.

**Lemme 4.24.** Soit  $G$  un graphe quasi-adjoint arête  $b$ -critique. Soient  $c$  une  $b$ -coloration de  $G$  utilisant  $b(G)$  couleurs et  $S$  un  $b$ -système de  $c$ . Alors tout sommet de  $S$  a au plus deux voisins dans  $V \setminus S$ .

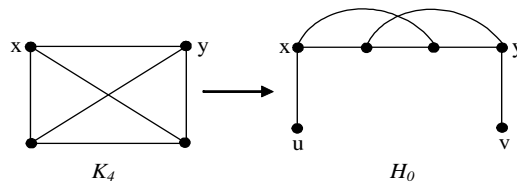


FIGURE 4.5. Exemple d'un graphe  $H_0$  obtenu à partir d'une clique d'ordre 4.

Preuve. Soit  $x$  un sommet de  $S$ . Par le Théorème 4.3,  $V \setminus S$  est un ensemble stable. De ce fait,  $x$  est adjacent à au plus deux sommets de  $V \setminus S$ , sinon  $G$  contient  $K_{1,3}$  comme sous-graphe induit.  $\square$

**Lemme 4.25.** *Soit  $G$  un graphe quasi-adjoint arête  $b$ -critique. Soient  $c$  une  $b$ -coloration de  $G$  utilisant  $b(G)$  couleurs et  $S$  un  $b$ -système de  $c$ . Si  $G \neq K_n, H_0$ , alors tout sommet de  $S$  a au moins un voisin dans  $V \setminus S$ .*

Preuve. Soit  $G \neq K_n, H_0$  un graphe quasi-adjoint arête  $b$ -critique et soit  $x$  un  $b$ -sommet d'une certaine  $b$ -coloration optimale  $c$  de  $G$ . En premier lieu, il convient de noter que  $N(x)$  est l'union de deux cliques, disons  $A$  et  $B$ . Supposons que tous les voisins de  $x$  sont des  $b$ -sommets. Au vu de l'Observation 4.5 et du Théorème 4.3, on en conclut que  $S = N[x]$ . Si  $N(x)$  est une clique, alors par le Théorème 4.4,  $b(G) = \Delta(G) + 1 = \omega(G)$ . Vu que  $G$  est sans sommets isolés, alors l'Observation 4.9 implique que  $G = K_n$ , contradiction. Donc  $N(x)$  n'est pas une clique. Par conséquent,  $N(x)$  contient deux  $b$ -sommets  $x_1 \in A$ ,  $x_2 \in B$  tels que  $x_1$  est non adjacent à  $x_2$ . Ceci implique que  $x_1$  (resp.  $x_2$ ) est adjacent à un certain sommet  $u_1$  (resp.  $u_2$ ) de couleur  $c(x_2)$  (resp.  $c(x_1)$ ). D'après le Théorème 4.3,  $u_1$  et  $u_2$  sont des non  $b$ -sommets; de plus, ils sont non adjacents. Par supposition,  $x$  n'est pas adjacent à  $u_1, u_2$ . Ceci nous amène à réclamer le fait suivant:

**Fait 10.**  $x_i$  ( $i = 1, 2$ ) est adjacent exactement à un seul non  $b$ -sommet.

*Preuve du Fait 10.* Supposons que  $x_i$  ( $i = 1, 2$ ) est adjacent à un autre non  $b$ -sommet  $v_i \neq u_i$ . D'après le Théorème 4.3,  $v_i$  n'est pas adjacent à  $u_i$ . Ainsi, par supposition,  $x$  n'est pas adjacent à  $v_i$ . De ce fait, les sommets  $x, x_i, u_i, v_i$  induisent un  $K_{1,3}$ , contradiction. D'où,  $x_i$  ( $i = 1, 2$ ) est adjacent exactement à un seul non  $b$ -sommet. D'où le Fait 10 est

démontré.

Cela signifie qu'à l'exception de  $x_i$  ( $i = 1, 2$ ), le sommet  $x_j$  ( $j = 1, 2$  et  $j \neq i$ ) est adjacent à tous les  $b$ -sommets de  $G$ . Montrons maintenant que, tout  $b$ -sommet de  $N(x)$  autre que  $x_1, x_2$  est adjacent à tous les  $b$ -sommets de  $G$ . Supposons au contraire qu'il existe un  $b$ -sommet  $x_3 \in A$ , ( $x_3 \neq x_1$ ), qui n'est pas adjacent à un certain  $b$ -sommet  $x_4 \in B$ , ( $x_4 \neq x_2$ ). En vue de cela,  $x_3$  est adjacent à un certain non  $b$ -sommet  $u_3$  de couleur  $c(x_4)$ . D'après le Fait 10, la couleur  $c(x_3)$  apparaît dans le voisinage de  $x_1$  et  $x_2$ . De ce fait,  $x_1$  et  $x_2$  sont non adjacents à  $u_3$  car sinon pour  $i = 1, 2$ ,  $b(G - x_i u_3) \geq b(G)$ , ce qui contredit le fait que  $G$  est arête  $b$ -critique. Par conséquent, les sommets  $x_1, x_3, u_3, x_2$  induisent un  $K_{1,3}$ , contradiction. D'où, tout  $b$ -sommet de  $N(x)$  autre que  $x_1, x_2$  est adjacent à tous les  $b$ -sommets de  $G$ .

Ceci implique que  $G = H_0$ , contradiction. Ceci termine la preuve du Lemme 4.25.  $\square$

Soit  $\mathcal{F} = \{F_1, \dots, F_7\}$  l'ensemble des graphes de la Figure 4.6.

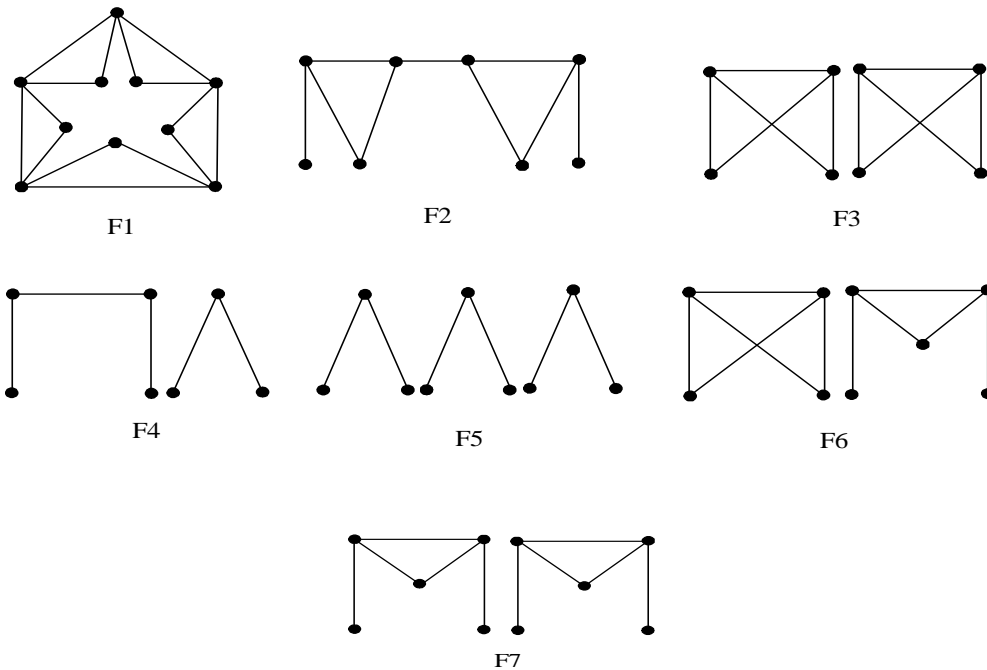


FIGURE 4.6. La Classe  $\mathcal{F} = \{F_1, \dots, F_7\}$

**Lemme 4.26.** *Soit  $G = (V, E)$  un graphe quasi-adjoint arête  $b$ -critique différent des graphes  $F_i$  ( $i = 4, 5, 6, 7$ ) de la classe  $\mathcal{F}$  et soit  $c$  une  $b$ -coloration de  $G$  utilisant  $b(G)$  couleurs. Alors, tous les non  $b$ -sommets de  $c$  sont de couleurs distinctes.*

*Preuve.* Soit  $G = (V, E)$  un graphe quasi-adjoint arête  $b$ -critique différent de  $F_i$  ( $i = 4, 5, 6, 7$ ). Soit  $S$  un  $b$ -système d'une certaine  $b$ -coloration optimale  $c$  de  $G$ . Trois cas sont à distinguer selon la valeur de  $b(G)$ .

**Cas 1:**  $b(G) \geq 4$ .

Supposons qu'il existe deux sommets  $u_1, u_2 \in V \setminus S$  de même couleur. Ceci nous amène à réclamer le fait suivant:

**Fait 11.**  $N(u_1) \cap N(u_2) = \emptyset$ .

*Preuve du Fait 11.* Supposons que  $N(u_1) \cap N(u_2)$  contient au moins un sommet, disons  $x$ . Au vu du Théorème 4.3,  $x \in S$ , cela découle du fait que  $V \setminus S$  est un stable. De ce fait, pour  $i = 1, 2$ ,  $b(G - xu_i) \geq b(G)$ , contradiction. D'où  $N(u_1) \cap N(u_2) = \emptyset$ . Ceci termine la preuve du Fait 11.

Vu que  $G$  est sans sommets isolés, alors  $N(u_i) \cap S \neq \emptyset$  ( $i = 1, 2$ ). Soient  $x_1, x_2$  deux sommets de  $S$  tels que pour  $i = 1, 2$ ,  $u_i$  est adjacent à  $x_i$ . Par le Théorème 4.3,  $c(x_1) \neq c(x_2)$ . Soit  $x_3$  un sommet de  $S$  de couleur  $c(u_1)$ . Le Théorème 4.3 implique que  $c(x_3) \neq c(x_i)$  ( $i = 1, 2$ ). Par ailleurs,  $x_3$  n'est pas adjacent à  $x_1, x_2$  car sinon  $b(G - x_i u_i) \geq b(G)$  ( $i = 1, 2$ ). Soient  $v_1, v_2 \in N(x_3)$  deux sommets de couleurs  $c(x_1)$  et  $c(x_2)$  respectivement. Au vu du Théorème 4.3,  $v_1, v_2 \in V \setminus S$ ; de plus, ils sont non adjacents. Posons  $I = S \setminus \{x_1, x_2, x_3\}$ . Comme  $b(G) \geq 4$ , alors  $I \neq \emptyset$ . Comme  $x_3$  est un  $b$ -sommet, alors il a besoin de toutes les couleurs qui apparaissent dans  $I$ . Par ailleurs, vu que  $x_3$  a deux voisins dans  $V \setminus S$ , alors le Lemme 4.24 implique que,

$$x_3 \text{ est adjacent à tous les sommets de } I. \quad (4.1)$$

Supposons que  $x_1$  n'est pas adjacent à  $x_2$ . D'après le Théorème 4.3, la couleur  $c(x_i)$ , ( $i = 1, 2$ ), n'apparaît pas dans  $I$ , cela découle du fait que deux  $b$ -sommets quelconques

sont de couleurs distinctes. Donc, pour  $i = 1, 2$ ,  $x_i$  est adjacent à un certain non  $b$ -sommet, disons  $w_i$ , de couleur  $c(x_j)$  ( $j = 1, 2$  et  $j \neq i$ ). Alors,  $x_i$  ( $i = 1, 2$ ) a exactement deux voisins,  $u_i, w_i$  dans  $V \setminus S$ . Il est immédiat de voir que  $c(w_i) \neq c(u_i)$ . Par ailleurs, puisque  $x_i$  ( $i = 1, 2$ ) est un  $b$ -sommet, alors il a besoin de toutes les couleurs qui apparaissent dans  $I$ . Or, d'après le Lemme 4.24, on peut constater que  $x_i$  ( $i = 1, 2$ ) est adjacent à tous les sommets de  $I$ . De plus, la condition 4.1 nous permet de conclure que  $x_1, x_2$  et  $x_3$  ont le même voisinage dans  $I$ . De ce fait, pour tout sommet  $y \in I$ , les sommets  $y, x_1, x_2, x_3$  induisent un  $K_{1,3}$ , contradiction.

Supposons maintenant que  $x_1$  est adjacent à  $x_2$ . Montrons d'abord que  $x_1$  ou  $x_2$  a exactement deux voisins dans  $V \setminus S$ . Supposons le contraire. D'après les Lemmes 4.24 et 4.25, pour  $i = 1, 2$ ,  $u_i$  est le seul voisin de  $x_i$  dans  $V \setminus S$ . Vu que  $x_i$  ( $i = 1, 2$ ) a besoin de toutes les couleurs qui apparaissent dans  $I$ , alors  $x_i$  est adjacent à tous les sommets de  $I$ . D'où, la condition 4.1 implique que,  $x_1, x_2$  et  $x_3$  ont le même voisinage dans  $I$ . De ce fait, pour tout sommet  $w \in I$ ,  $w$  est non adjacent à  $v_1, v_2$  car sinon  $b(G - wv_i) \geq b(G)$  ( $i = 1, 2$ ). Dans ce cas, pour tout sommet  $w \in I$ , les sommets  $w, x_3, v_1, v_2$  induisent un  $K_{1,3}$ , contradiction. D'où,  $x_1$  ou  $x_2$ , disons  $x_1$ , a exactement deux voisins  $u_1$  et  $w_1$  dans  $V \setminus S$ .

Il est immédiat de voir que  $c(w_1) \neq c(x_i)$ , ( $i = 1, 2, 3$ ). Si  $x_2$  est non adjacent à  $w_1$ , alors  $x_1, x_2, u_1, w_1$  induisent un  $K_{1,3}$ , contradiction. Sinon, on distingue deux sous cas selon la valeur de  $b(G)$ .

Si  $b(G) = 4$ , alors  $I$  contient un seul sommet, disons  $w$ . Au vu du Théorème 4.3,  $c(w) = c(w_1)$ . Le sommet  $w$  n'est adjacent à aucun sommet de l'ensemble  $\{x_1, x_2, u_1, u_2, w_1\}$  car sinon  $b(G - x_1w_1) \geq b(G)$  ou  $b(G - x_2w_1) \geq b(G)$  ou  $b(G - wu_1) \geq b(G)$  ou  $b(G - wu_2) \geq b(G)$ . Si  $w$  est adjacent à  $v_1$  et  $v_2$ , alors, en utilisant la condition 4.1, on trouve que  $G = F_6$  (Voir Figure 4.6), contradiction. Si  $w$  est adjacent uniquement à  $v_1$ , alors puisque  $w$  est un  $b$ -sommet, il est adjacent à un autre non  $b$ -sommet, disons  $v_3$ , de couleur  $c(v_2)$ . En utilisant la condition 4.1, on trouve que  $G = F_7$ , contradiction. Si  $w$  n'est pas adjacent à  $v_1$  et  $v_2$ , alors la condition 4.1 implique que les sommets  $x_3, v_1, v_2, w$  induisent un  $K_{1,3}$ , contradiction.

Si  $b(G) \geq 5$ , alors d'après le Lemme 4.24,  $I$  contient un sommet  $w' \neq w$  qui est adjacent à  $x_1$  et  $x_2$ . Dans ce cas,  $w'$  ne peut pas être adjacent à  $v_1$  et  $v_2$ . Ceci implique que l'ensemble  $\{w', x_3, v_1, v_2\}$  forme une étoile  $K_{1,3}$ , contradiction.

**Cas 2 :**  $b(G) = 3$ .

Soient  $x_1, x_2$  et  $x_3$  trois  $b$ -sommets de couleurs 1, 2 et 3 respectivement. Supposons que pour  $i = 1, 2$ ,  $x_i$  est adjacent à un non  $b$ -sommet  $u_i$  de couleur 3. Il est clair que  $u_i$  ( $i = 1, 2$ ) n'est pas adjacent à  $x_j$ ;  $u_j$  ( $j = 1, 2$  et  $j \neq i$ ) et  $x_3$  n'est pas adjacent à  $x_i, u_i$  ( $i = 1, 2$ ). De ce fait,  $x_3$  est adjacent à deux non  $b$ -sommets  $v_1$  et  $v_2$  de couleurs 1 et 2, respectivement. Le sommet  $x_i$  ( $i = 1, 2$ ) n'est pas adjacent à  $v_j$  ( $j = 1, 2$  et  $j \neq i$ ), sinon  $v_j$  serait un  $b$ -sommet, ce qui contredit le Théorème 4.3. Ainsi, il est immédiat de voir que  $x_i$  n'est pas adjacent à  $v_i$  puisque ils ont la même couleur. D'après le Théorème 4.3, les sommets  $u_i, v_i$  ( $i = 1, 2$ ) induisent un stable. Si  $x_1$  n'est pas adjacent à  $x_2$ , alors  $x_i$  ( $i = 1, 2$ ) est adjacent à un certain sommet  $w_j$  ( $j = 1, 2$  et  $j \neq i$ ) de couleur  $j$ . Ceci implique que,  $G = F_5$ , contradiction. Si  $x_1$  est adjacent à  $x_2$ , alors  $G = F_4$ , contradiction.

Finalement, il est facile de voir que, si  $G$  est arête  $b$ -critique avec  $b(G) = 2$ , alors  $G = K_2$ . Donc, tout sommet de  $G$  est un  $b$ -sommet, c'est à dire  $V \setminus S = \emptyset$ .  $\square$

**Lemme 4.27.** *Si  $G \neq K_n, H_0$  est un graphe quasi-adjoint arête  $b$ -critique, alors  $b(G) \leq 5$ .*

Preuve. Soit  $G \neq K_n, H_0$  un graphe quasi-adjoint arête  $b$ -critique. Il est facile de vérifier que  $b(F_4) = b(F_5) = 3 \leq 5$  et  $b(F_6) = b(F_7) = 4 \leq 5$ . En vue de cela, on peut supposer que  $G \neq F_i$  ( $i = 4, 5, 6, 7$ ). Soit  $x$  un  $b$ -sommet quelconque d'une certaine  $b$ -coloration  $c$  de  $G$  avec  $b(G)$  couleurs. Au vu du Théorème 4.4,

$$\text{Toutes les couleurs de } N(x) \text{ sont distinctes.} \quad (4.2)$$

Par ailleurs, la définition de  $G$  implique que  $N(x) = A \cup B$  où  $A$  et  $B$  sont deux cliques d'ordre  $|A|$  et  $|B|$  respectivement. Sans perte de généralité, on peut supposer que  $|A| \geq |B|$ . Ceci nous amène à réclamer le fait suivant:

**Fait 12.** *Tous les non  $b$ -sommets de  $V \setminus N[x]$  dont leurs couleurs apparaissent dans  $A$  (resp.,  $B$ ) sont non adjacents à  $A$  (resp.  $B$ ).*



*Preuve du Fait 12.* Soit  $z \in V \setminus N[x]$  un non  $b$ -sommet dont sa couleur apparaît dans  $A$ . Supposons que  $z$  a un voisin, disons  $x_1$ , dans  $A$ . Le Théorème 4.3 implique que  $x_1$  est un  $b$ -sommet. Puisque la couleur  $c(z)$  apparaît deux fois dans le voisinage de  $x_1$ , alors  $b(G - zx_1) \geq b(G)$ , contradiction. En conséquence, la symétrie entre  $A$  et  $B$  nous permet de conclure que tout non  $b$ -sommet de  $V \setminus N[x]$  dont sa couleur apparaît dans  $A$  (resp.,  $B$ ) est non adjacent à  $A$  (resp.  $B$ ). D'où, le Fait 12 est démontré.

Pour prouver que  $b(G) \leq 5$ , il suffit de montrer que  $d_G(x) \leq 4$ . Supposons au contraire que  $d_G(x) \geq 5$ . Ceci implique que  $|A| \geq 3$ . D'après les Lemmes 4.24 et 4.25,  $N(x)$  contient  $r$  non  $b$ -sommets,  $1 \leq r \leq 2$ . De ce fait, deux cas sont à distinguer selon la valeur de  $r$ .

**Cas 1:**  $r = 2$ .

Soit  $u, v \in N(x)$  deux non  $b$ -sommets. Au vu du Lemme 4.24, tous les sommets de  $N(x) \setminus \{u, v\}$  sont des  $b$ -sommets. Tandis que le Lemme 4.26 implique que  $c(u) \neq c(v)$ . Par le Théorème 4.3,  $u$  est non adjacent à  $v$ , cela découle du fait que les non  $b$ -sommets forment un stable. De ce fait,  $u, v$  ne peuvent pas être à la fois dans  $A$  (ou dans  $B$ ). D'où, on peut supposer que  $u \in A$  et  $v \in B$ . Soit  $y$  un  $b$ -sommet de couleur  $c(u)$ . Il est immédiat de voir que  $y \notin A$  et  $y \neq x$ . Par ailleurs,  $y \notin B$  car sinon,  $b(G - xu) \geq b(G)$ . Donc  $y \in V \setminus N[x]$ . Vu que  $y$  est un  $b$ -sommet, alors il est adjacent à un certain sommet  $u_1$  de couleur  $c(x)$ . D'après le Théorème 4.3,  $u_1$  est un non  $b$ -sommet (car sinon  $u_1$  serait un  $b$ -sommet de couleur répétée). Montrons alors que  $y$  n'a aucun voisin dans  $A$ . Supposons au contraire que  $y$  est adjacent à un certain sommet  $w \in A$  tel que  $w \neq u$ . Dans ce cas,  $b(G - uw) \geq b(G)$ , contradiction. Donc  $y$  n'est adjacent à aucun sommet de  $A$ . Vu que  $y$  est un  $b$ -sommet, alors le fait que  $|A| \geq 3$  et la condition 4.2 impliquent que  $y$  est adjacent à au moins deux sommets  $u_2, u_3$  dont leurs couleurs apparaissent dans  $A$ . D'après le Théorème 4.3,  $u_2$  et  $u_3$  sont des non  $b$ -sommets. De plus,  $u_2, u_3 \notin B$  car sinon pour  $i = 2$  ou  $3$ ,  $b(G - xu_i) \geq b(G)$ . Puisque les non  $b$ -sommets  $u_1, u_2, u_3$  sont deux à deux non adjacents, alors les sommets  $y, u_1, u_2, u_3$  induisent un  $K_{1,3}$ , contradiction.

**Cas 2:**  $r = 1$ .

Alors  $N(x)$  contient un seul non  $b$ -sommet, disons  $u$ . En d'autres termes, les sommets de

l'ensemble  $N(x) \setminus \{u\}$  sont des  $b$ -sommets. Vu que  $|A| \geq 3$ , alors par un raisonnement semblable au Cas 1, on peut montrer que  $u \notin A$ . Ceci implique que  $u \in B$  et  $1 \leq |B| \leq 2$ . Le sommet  $u$  ne peut pas être adjacent à tous les sommets de  $A$ , sinon, lui même serait un  $b$ -sommet. D'où,  $A$  contient un certain  $b$ -sommet, disons  $x_1$ , qui n'est pas adjacent à  $u$ . Vu que  $x_1$  est un  $b$ -sommet, alors il est adjacent à un sommet, disons  $y$ , de couleur  $c(u)$ . D'après le Lemme 4.26,  $y$  est un  $b$ -sommet. De plus,  $y$  n'est pas adjacent à  $x$ , sinon,  $b(G - xu) \geq b(G)$ . D'où,  $y \in V \setminus N[x]$ . Le sommet  $y$  a besoin de la couleur  $c(x)$  dans son voisinage. De ce fait,  $y$  est adjacent à un certain sommet  $u_1$  de couleur  $c(x)$ . D'après le Théorème 4.3,  $u_1$  est un non  $b$ -sommet. Clairement,  $u_1$  n'est adjacent à aucun sommet de  $N(x)$ . Ceci nous amène à réclamer le fait suivant:

**Fait 13.**  $y$  est adjacent à tous les sommets de  $A$ .

*Preuve du Fait 13.* Supposons qu'il existe un sommet  $x_2 \in A$  tel que  $y$  n'est pas adjacent à  $x_2$ . Vu que  $y$  est un  $b$ -sommet, alors il est adjacent à un certain sommet  $u_2$  de couleur  $c(x_2)$ . D'après le Théorème 4.3,  $u_2$  est un non  $b$ -sommet. Le Fait 12 implique que  $u_2$  n'est adjacent à aucun sommet de  $A$ . Ainsi, le Théorème 4.3 implique que  $u_2$  n'est pas adjacent à  $u_1$ . Ceci implique que les sommets  $x_1, y, u_1, u_2$  induisent un  $K_{1,3}$ , contradiction. Donc  $y$  est adjacent à tous les sommets de  $A$ . D'où le Fait 13 est démontré.

Si  $B = \{u\}$ , alors  $|A| \geq 4$  et  $G = H_0$ , contradiction. Si  $B = \{u, x'\}$  où  $x'$  est un  $b$ -sommet, alors nous réclamons le fait suivant:

**Fait 14.**  $x'$  est adjacent à tous les sommets de  $A$ ,  $|A| \geq 3$ .

*Preuve du Fait 14.* Supposons qu'il existe un sommet  $x_i \in A$  non adjacent à  $x'$ . De ce fait,  $x'$  est adjacent à un certain non  $b$ -sommet, disons  $u_3$ , de couleur  $c(x_i)$ . Le Lemme 4.24 implique que  $x'$  est adjacent à tous les sommets de  $A \setminus \{x_i\}$ . Le Fait 12 implique que  $u_3$  n'a aucun voisin dans  $A$ . Puisque tous les sommets de  $A$  sont adjacents à  $y$ , alors il est clair que  $u$  n'est adjacent à aucun sommet de  $A$ . Dans ce cas, pour tout sommet  $x_l \neq x_i$  de  $A$ , l'ensemble  $\{x_l, x', u, u_3\}$  forme une étoile  $K_{1,3}$ , contradiction. Donc  $x'$  est adjacent à tous les sommets de  $A$ . D'où, le Fait 14 est démontré.

Le sommet  $y$  ne peut pas être adjacent à  $x'$  car sinon  $b(G - ux') \geq b(G)$ . Puisque  $y$  est un

$b$ -sommet de couleur  $c(u)$ , alors il est adjacent à un certain non  $b$ -sommet  $u_4$  de couleur  $c(x')$ . Comme  $x'$  est adjacent à tous les sommets de  $A$ , alors  $u_4$  n'est adjacent à aucun sommet de  $A$ . D'après le Théorème 4.3,  $u_1$  n'est pas adjacent à  $u_4$ . Ceci implique que l'ensemble  $\{x_1, y, u_1, u_4\}$  forme une étoile  $K_{1,3}$ , contradiction. Ceci termine la preuve du Lemme 4.27.  $\square$

Nous sommes maintenant en position de caractériser les graphes quasi-adjoints arête  $b$ -critiques.

**Théorème 4.28.** *Soit  $G$  un graphe quasi-adjoint. Alors  $G$  est arête  $b$ -critique si et seulement si  $G = K_n, H_0$  ou  $G \in \mathcal{F}$  (Voir Figure 4.6).*

Preuve. La condition suffisante peut être vérifiée en examinant les graphes  $K_n, H_0$  et ceux de la Figure 4.5. Etablissons alors la condition nécessaire. Soit  $G$  un graphe quasi-adjoint arête  $b$ -critique. Si  $b(G) \geq 6$ , alors d'après le Lemme 4.27,  $G = K_n$  ou  $H_0$ . Considérons maintenant le cas où  $b(G) \leq 5$ . Il est facile de voir que le théorème est vérifié pour  $G = F_i$  ( $i = 4, 5, 6, 7$ ). Supposons alors que  $G \neq F_i$  ( $i = 4, 5, 6, 7$ ). Soit  $x$  un  $b$ -sommet d'une certaine  $b$ -coloration optimale  $c$  de  $G$ . D'après le Théorème 4.3, tous les  $b$ -sommets de  $c$  ont des couleurs différentes. Aussi, le Lemme 4.26 implique que, tous les non  $b$ -sommets de  $c$  sont de couleurs différentes. En d'autres termes, si  $G$  contient deux sommets de même couleur, alors l'un des deux sommets est un  $b$ -sommet et l'autre est un non  $b$ -sommet. Puisque que  $G$  est quasi-adjoint, alors  $N(x) = A \cup B$  où  $A$  et  $B$ , ( $|A| \geq |B|$ ), sont deux cliques. D'après le Théorème 4.4 et l'Observation 4.5,  $|A \cup B| = b(G) - 1 \leq 4$ . Vu que  $|A| \neq \emptyset$  et  $|B| \neq \emptyset$ , alors  $\max\{|A|, |B|\} \leq 3$ . D'après les Lemmes 4.24 et 4.25,  $N(x)$  contient un ou deux non  $b$ -sommets. De ce fait, deux cas sont à distinguer:

**Cas 1:**  $N(x)$  contient un seul non  $b$ -sommet.

Soient  $u \in N(x)$  un non  $b$ -sommet et  $\{x_i : 1 \leq i \leq 3\}$  l'ensemble de tous les  $b$ -sommets de  $N(x)$ .

**Cas 1.1:**  $b(G) = 5$ . Alors  $|A \cup B| = 4$ . D'où, trois cas sont à distinguer.

a)  $A = \{x_1, x_2\}$  et  $B = \{x_3, u\}$ .

Le sommet  $u$  ne peut pas être adjacent à tous les sommets de  $A$ , sinon, lui même serait un  $b$ -sommet. Donc  $A$  contient un sommet, disons  $x_1$ , qui n'est pas adjacent à  $u$ . Vu que  $x_1$  est un  $b$ -sommet, alors il est adjacent à un certain sommet  $y \notin N[x]$  de couleur  $c(u)$ . D'après le Lemme 4.26,  $y$  est un  $b$ -sommet. Puisque  $y$  n'est pas adjacent à  $x$ , alors il est adjacent à un sommet  $u_1$  de couleur  $c(x)$ . Il est immédiat de voir que  $u_1 \notin N(x)$ . Ainsi,  $u_1$  est un non  $b$ -sommet, sinon, on aura une contradiction avec le Théorème 4.3. Par ailleurs,  $u_1$  n'est adjacent à aucun sommet de  $A$  car sinon, pour  $i = 1$  ou  $2$ ,  $b(G - x_i u_1) \geq b(G)$ . Ceci nous amène à réclamer le fait suivant:

**Fait 15.**  $y$  est adjacent à  $x_2$ .

*Preuve du Fait 15.* Supposons le contraire. Alors  $y$  est adjacent à un sommet  $u_2$  de couleur  $c(x_2)$ . D'après le Théorème 4.3,  $u_2$  est un non  $b$ -sommet. Par ailleurs,  $u_2$  n'est pas adjacent à  $x_1$ , sinon,  $b(G - x_1 u_2) \geq b(G)$ . Ceci implique que l'ensemble  $\{x_1, y, u_1, u_2\}$  forme un  $K_{1,3}$ , contradiction. D'où  $y$  est adjacent à  $x_2$ . Ceci termine la preuve du Fait 15.

D'un autre côté,  $y$  n'est pas adjacent à  $x_3$ , sinon,  $b(G - x_3 u) \geq b(G)$ . Il s'en suit alors que  $y$  est adjacent à un sommet  $u_3$  de couleur  $c(x_3)$ . Le Théorème 4.3 implique que  $u_1$  n'est pas adjacent à  $u_3$ . De ce fait,  $u_3$  est adjacent à tous les sommets de  $A$ , sinon, les sommets  $y, u_1, u_3, x_i$  ( $i = 1$  ou  $2$ ) induisent un  $K_{1,3}$ . Il s'en suit alors que  $x_3$  n'est adjacent à aucun sommet de  $A$  car sinon, pour  $i = 1$  ou  $2$ ,  $b(G - x_i u_3) \geq b(G)$ . D'où  $x_3$  est adjacent à deux non  $b$ -sommets  $u_4$  et  $u_5$  de couleurs  $c(x_1)$  et  $c(x_2)$ . Dans ce cas, l'ensemble  $\{x_3, u, u_4, u_5\}$  forme une étoile  $K_{1,3}$ , contradiction. Donc, ce cas ne peut pas se produire.

b)  $A = \{x_1, x_2, x_3\}$  et  $B = \{u\}$ .

Puisque  $u$  est un non  $b$ -sommet, alors il existe un sommet de  $A$ , disons  $x_1$ , qui n'est pas adjacent à  $u$ . Ceci implique que  $x_1$  est adjacent à un sommet  $y$  de couleur  $c(u)$ . Par un raisonnement semblable au cas précédent, on en conclut que,  $y$  est un  $b$ -sommet qui est adjacent à  $x_2$ . Par symétrie,  $y$  est adjacent à  $x_3$ . Aussi, il existe un non  $b$ -sommet, disons  $u_1$ , de couleur  $c(x)$  qui est adjacent à  $y$  et qui n'a aucun voisin dans  $N(x)$ . Ceci implique que  $G = H_0$  avec  $|V(H_0)| = 7$ .

c)  $A = \{x_1, x_2, u\}$  et  $B = \{x_3\}$ .

Le sommet  $u$  ne peut pas être adjacent à  $x_3$ , sinon,  $u$  serait un  $b$ -sommet. Alors  $x_3$  est adjacent à un certain sommet  $y$  de couleur  $c(u)$ . De façon similaire au Cas 1, on peut constater que  $y$  est un  $b$ -sommet qui est adjacent à un non  $b$ -sommet  $u_1$  de couleur  $c(x)$ , et  $u_1$  n'est adjacent à aucun sommet de  $N(x)$ . Par ailleurs,  $y$  n'est pas adjacent à  $x_1, x_2$ , sinon, pour  $i = 1$  ou  $2$ ,  $b(G - x_i u) \geq b(G)$ . Il s'en suit alors que  $y$  est adjacent à deux sommets  $u_3$  et  $u_4$  de couleurs  $c(x_1)$  et  $c(x_2)$  respectivement.. D'après le Théorème 4.3,  $u_2$  et  $u_3$  sont des non  $b$ -sommets. Le Théorème 4.3 implique que  $\{u_1, u_2, u_3\}$  est un stable. Ceci implique que  $G$  contient  $K_{1,3}$  comme sous-graphe induit, contradiction. Donc, ce cas ne peut pas se produire.

**Cas 1.2:**  $b(G) = 4$ . Alors  $|A \cup B| = 3$ . Deux cas sont à distinguer.

a)  $A = \{x_1, x_2\}$  et  $B = \{u\}$ .

Avec un argument similaire à celui utilisé plus haut, on constate que  $A$  contient un sommet, disons  $x_1$ , qui n'est pas adjacent à  $u$ . Ceci implique que  $x_1$  est adjacent à un sommet  $y$  de couleur  $c(u)$ . De manière similaire, on peut aussi montrer que  $y$  est un  $b$ -sommet qui est adjacent à un non  $b$ -sommet, disons  $u_1$ , de couleur  $c(x)$ . Ainsi,  $u_1$  n'a aucun voisin dans  $N(x)$ . Par le Fait 15, on constate que  $y$  is adjacent à  $x_2$ . Ceci implique que  $G = H_0$  avec  $|V(H_0)| = 6$ .

b)  $A = \{x_1, u\}$  et  $B = \{x_2\}$ .

Similairement,  $u$  ne peut pas être adjacent à  $x_2$ . De ce fait,  $x_2$  est adjacent à un sommet  $y$  de couleur  $c(u)$ . On utilisera les arguments précédents, on constate que  $y$  est un  $b$ -sommet qui est adjacent à un  $b$ -sommet  $u_1$  de couleur  $c(x)$ . Clairement,  $u_1$  n'est adjacent à aucun sommet de  $N(x)$ . Aussi,  $y$  n'est pas adjacent à  $x_1$ , sinon,  $b(G - x_1 u) \geq b(G)$ . D'où  $y$  est adjacent à un certain non  $b$ -sommet  $u_2$  de couleur  $c(x_1)$ . Le sommet  $u_2$  est adjacent à  $x_2$ , sinon, l'ensemble  $\{x_2, y, u_1, u_2\}$  forme un  $K_{1,3}$ . Comme  $x_1$  est un  $b$ -sommet, alors  $x_1$  est adjacent à un certain non  $b$ -sommet  $u_3$  de couleur  $c(x_2)$ . Ceci implique que  $G = F_2$ .

**Cas 1.3:**  $b(G) = 3$ .

Supposons que  $A = \{x_1\}$  et  $B = \{u\}$ . Le sommet  $u$  ne peut pas être adjacent à  $x_1$ , sinon,

lui même serait un  $b$ -sommet. Alors  $x_1$  est adjacent à un  $b$ -sommet, disons  $y$ , de couleur  $c(u)$ . Puisque  $y$  n'est pas adjacent à  $x$ , alors il est adjacent à un certain sommet  $u_1$  de couleur  $c(x)$ . Il est facile de montrer que  $u_1$  n'a aucun voisin dans  $N(x)$ . Ceci implique que  $G = P_5 = H_0$  avec  $|V(H_0)| = 5$ .

**Cas 2:**  $N(x)$  contient deux non  $b$ -sommets.

Soit  $u, v \in N(x)$  deux non  $b$ -sommets et soit  $\{x_i : 1 \leq i \leq 2\}$  l'ensemble de tous les  $b$ -sommets de  $N(x)$ . Par un raisonnement semblable au Cas 1 du Lemme 4.27, on constate que  $u, v$  ne peuvent pas être à la fois dans  $A$  ou  $B$ . D'où, on peut supposer que  $u \in A$  et  $v \in B$ .

**Cas 2.1:**  $b(G) = 5$ . Deux cas sont à distinguer.

a)  $A = \{x_1, u\}$  et  $B = \{x_2, v\}$ .

Soient  $y_1$  et  $y_2$  deux sommets de couleurs  $c(u)$  et  $c(v)$  respectivement. Le Lemme 4.26 implique que  $y_1$  et  $y_2$  sont des  $b$ -sommets. Le sommet  $y_1$  n'est pas adjacent à  $x_1$ , sinon,  $b(G - x_1u) \geq b(G)$ . Alors  $y_1$  n'est adjacent à aucun sommet de  $A$ . D'où  $y_1$  est adjacent à un certain sommet  $u_1$  de couleur  $c(x_1)$ . D'après le Théorème 4.3,  $u_1$  ne peut pas être adjacent à  $u$ . Par symétrie,  $y_2$  n'est adjacent à aucun sommet de  $B$ . Par ailleurs,  $y_2$  est adjacent à un certain sommet  $u_2$  de couleur  $c(x_2)$ , et  $u_2$  ne peut pas être adjacent à  $v$ . Ceci nous amène à réclamer le fait suivant:

**Fait 16.**  $y_1, y_2$  sont adjacents à un certain sommet, disons  $u_3$ , de couleur  $c(x)$ .

*Preuve du Fait 16.* Puisque  $y_1$  n'est pas adjacent à  $x$ , alors  $y_1$  est adjacent à un certain sommet  $u'$  de couleur  $c(x)$ . De même,  $y_2$  est adjacent à un certain sommet  $u''$  de couleur  $c(x)$ . D'après le Théorème 4.3,  $u'$  et  $u''$  sont non  $b$ -sommets. Mais le Lemme 4.26 implique que  $u' = u''$ . Si nous posons  $u_3 = u' = u''$ , alors le Fait 16 est montré.

D'autre part, il est clair que  $u_3$  n'est adjacent à aucun sommet de  $N(x)$ . Si  $y_1$  est adjacent à  $v$ , alors  $\{v, y_1, u_1, u_3\}$  forme un  $K_{1,3}$ , contradiction. Similairement,  $y_2$  n'est pas adjacent à  $u$ . Par un argument similaire,  $y_1$  n'est pas adjacent à  $u_2$  et  $y_2$  n'est pas adjacent à  $u_1$ .

Comme  $y_1$  est un  $b$ -sommet, alors il est adjacent à  $x_2$ , sinon, on aura une contradiction avec le Lemme 4.26. Similairement,  $y_2$  est adjacent à  $x_1$ . D'un autre coté,  $u_1$  est adjacent à  $x_2$ , sinon,  $\{x_2, y_1, u_1, u_3\}$  forme un  $K_{1,3}$ , contradiction. Ainsi,  $u_2$  est adjacent à  $x_1$ . Le sommet  $y_1$  est adjacent à  $y_2$ , sinon, on aura une contradiction avec le Lemme 4.26. Ceci implique que  $G = F_1$ .

b)  $A = \{x_1, x_2, u\}$  et  $B = \{v\}$ .

Soit  $y$  un  $b$ -sommet de couleur  $c(u)$ . De manière similaire au cas précédent, on peut montrer que  $y$  n'a aucun voisin dans  $A \cup \{x\}$ . Alors  $y$  est adjacent à 3 non  $b$ -sommets de couleurs  $c(x)$ ,  $c(x_1)$  et  $c(x_2)$ . D'après le Théorème 4.3,  $N[y]$  contient  $K_{1,3}$  comme sous-graphe induit, contradiction. D'où, ce cas ne peut pas se produire.

**Cas 2.2:**  $b(G) = 4$ . Vu que deux non  $b$ -sommets ne peuvent pas être adjacents, alors posons  $A = \{x_1, u\}$  et  $B = \{v\}$ .

Soient  $y_1$  et  $y_2$  deux  $b$ -sommets de couleurs  $c(u)$  et  $c(v)$  respectivement. Le sommet  $y_1$  ne peut pas être adjacent à  $x_1$ , sinon,  $b(G - x_1u) \geq b(G)$ . Alors  $y_1$  est adjacent à un certain sommet  $u_1$  de couleur  $c(x_1)$ . Il est clair que  $u_1$  est un non  $b$ -sommet qui n'a aucun voisin dans  $N(x)$ . Puisque  $y_1$  et  $y_2$  sont non adjacents à  $x$ , alors par un raisonnement similaire aux cas précédents, on peut montrer qu'il existe un non  $b$ -sommet  $u_2$  de couleur  $c(x)$  qui est adjacent à  $y_1$  et  $y_2$ . Clairement,  $u_2$  n'a aucun voisin dans  $N(x)$ . Si  $y_1$  est adjacent à  $v$ , alors  $\{v, y_1, u_1, u_2\}$  forme un  $K_{1,3}$ , contradiction. Le sommet  $y_1$  est adjacent à  $y_2$ , sinon, on aura une contradiction avec le Lemme 4.26. Si  $y_2$  est adjacent à  $u_1$ , alors  $x_1$  est adjacent à  $v$ . Ceci implique que  $G = F_3$ . Si  $y_2$  n'est pas adjacent à  $u_1$ , alors  $y_2$  est adjacent à  $x_1$ . Dans ce cas,  $G = F_2$ .

**Cas 2.3:**  $b(G) = 3$ .

On peut supposer que  $A = \{u\}$  et  $B = \{v\}$ .

Soient  $y_1$  et  $y_2$  deux  $b$ -sommets de couleurs  $c(u)$  et  $c(v)$  respectivement. Si  $y_1$  et  $y_2$  ont un voisin en commun, disons  $x'$ , alors  $x'$  est un  $b$ -sommet de couleur  $c(x)$ , ce qui contredit le Théorème 4.3. Il s'en suit alors que  $y_1$  (resp.  $y_2$ ) est adjacent à un certain non  $b$ -sommet

$u_1$  (resp.  $u_2$ ) de couleur  $c(x)$ , ce qui contredit le Lemme 4.26. Donc, ce cas ne peut pas se produire.

Enfin, il est facile de montrer que, si  $G$  est arête  $b$ -critique avec  $b(G) = 2$ , alors  $G = K_2$ . Ceci termine la preuve du Théorème 4.28.  $\square$

Dans [74], L.W. Beineke a montré qu'un graphe  $G$  est le graphe adjoint d'un autre graphe si et seulement si  $G$  ne contient pas comme sous-graphe induit un membre de la liste des neuf graphes présentés dans la Figure 4.7; autrement dit, tout graphe qui n'est pas le graphe adjoint d'un autre graphe contient un de ces neuf graphes comme sous-graphe induit.

Il est facile de vérifier le graphe  $H_0$  d'ordre  $n > 3$  n'est pas un graphe adjoint puisque il contient le graphe (f) de la Figure 4.7 comme sous-graphe induit. Pour  $n = 3$ ,  $H_0 = P_5$  qui est bien le graphe adjoint de  $P_6$ . Par ailleurs, par une simple vérification, on peut constater que  $K_n$  et tous les graphes de la classe  $\mathcal{F}$  ne contiennent aucun membre de la Figure 4.7 comme sous-graphe induit. De ce fait, le corollaire suivant est immédiat.

**Corollaire 4.29.** *Soit  $G$  un graphe adjoint. Alors  $G$  est arête  $b$ -critique si et seulement si  $G = K_n, P_5$  ou  $G \in \mathcal{F}$ .*

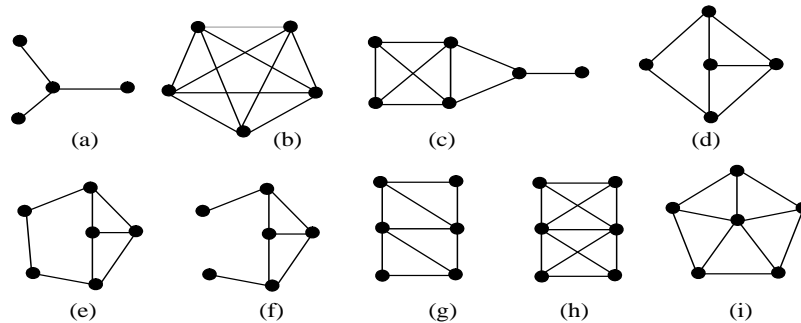


FIGURE 4.7. Neuf graphes minimaux qui ne sont pas des graphes adjoints.



## CHAPITRE 5

### CARACTÉRISATION DES ARBRES B-CRITIQUES

Dans ce chapitre, nous proposons d'étudier l'effet de la suppression d'un sommet quelconque d'un graphe  $G$  sur le nombre  $b$ -chromatique  $b(G)$ . Un graphe  $G$  est appelé  $b$ -critique si la suppression de tout sommet de  $G$  fait diminuer son nombre  $b$ -chromatique. Nous étudions ci-après les propriétés d'un tel graphe dans le cas d'un arbre  $T$ , ensuite nous montrons que son nombre  $b$ -chromatique est égal à  $\Delta(T)$  ou  $\Delta(T) + 1$ . Enfin, nous caractérisons les arbres  $b$ -critiques.

Ce travail a été accepté comme communication au colloque COSI'2011 [75] et a été accepté aussi dans la revue *Opuscula Mathematica* [76].

#### 5.1 Résultats sur les arbres $b$ -critiques

Nous rappelons quelques définitions et résultats qui nous seront utiles pour la suite.

**Définition 5.1.** [3] *Un arbre  $T = (V, E)$  est pivoté si  $T$  a exactement  $m$  sommets denses et contient un sommet spécial  $v$  tel que:*

- (1)  *$v$  n'est pas dense.*
- (2) *Tout sommet dense est adjacent à  $v$  ou à un sommet dense adjacent à  $v$ .*
- (3) *Tout sommet dense adjacent à  $v$  et à un autre sommet dense est de degré  $m - 1$ .*

Le sommet  $v$  est dit *pivot*.

Dans [3], Irving et Manlove ont montré qu'à l'exception de l'arbre pivoté le nombre  $b$ -chromatique d'un arbre  $T$  est égal  $m(T)$  où  $m(T)$  est le  $m$ -degré de  $T$ .

**Théorème 5.2.** [3] *Si  $T = (V, E)$  est un arbre pivoté, alors  $b(T) = m(T) - 1$ ; sinon  $b(T) = m(T)$ .*

Nous commençons notre étude par quelques résultats spécifiques que nous utilisons à plusieurs reprises dans la suite de ce chapitre.

**Lemme 5.3.** *Soient  $T$  un arbre  $b$ -critique et  $c$  une  $b$ -coloration de  $T$  avec  $b(T)$  couleurs.*

*Soit  $S$  l'ensemble de tous les  $b$ -sommets de  $c$ . Alors:*

*(i) Tout sommet de  $V(T) \setminus S$  a un voisin dans  $S$ .*

*(ii) Si  $z$  est un sommet support, alors  $z \in S$  et il est le seul  $b$ -sommet de couleur  $c(z)$ .*

*De plus,  $z$  ne peut pas avoir deux voisins de même couleur de telle sorte que l'un deux est une feuille.*

Preuve. (i) Si un sommet  $u \in V(T) \setminus S$  n'a aucun voisin dans  $S$ , alors  $c$  reste une  $b$ -coloration de  $T \setminus u$  avec  $b(T)$  couleurs.

(ii) Si chaque partie de (ii) n'est pas vérifiée, alors la suppression d'une certaine feuille adjacente à  $z$  ne fait pas diminuer le nombre  $b$ -chromatique.  $\square$

**Théorème 5.4.** *Soient  $T$  un arbre  $b$ -critique et  $c$  une  $b$ -coloration de  $T$  avec  $b(T)$  couleurs.*

*Soit  $S$  l'ensemble de tous les  $b$ -sommets de  $c$ . Alors:*

*(i)  $c$  ne peut pas avoir deux  $b$ -sommets de même couleur, c'est à dire,  $|S| = b(T)$ .*

*(ii) Tout sommet  $u \in V(T) \setminus S$  satisfait  $d_T(u) \leq b(T) - 1$ .*

*(iii) Tout sommet  $x \in S$  satisfait  $b(T) - 1 \leq d_T(x) \leq b(T)$ .*

Preuve. Posons  $k = b(T)$ . Si  $k = 2$ , il est immédiat de voir que  $T = P_2$  et le théorème est vérifié. Donc, on peut supposer que  $k \geq 3$ .

(i) Supposons que  $c$  a deux  $b$ -sommets  $x$  et  $y$  de même couleur. Si  $x$  ou  $y$  est un sommet support, adjacent à une feuille  $z$ , alors  $c$  reste une  $b$ -coloration avec  $k$  couleurs de  $T \setminus z$ , contradiction. D'où  $x$  et  $y$  ne sont pas des sommets supports. Enracinons maintenant  $T$  en  $x$ . Soient  $u_1, \dots, u_h$  les voisins de  $x$ . Comme  $x$  est un  $b$ -sommet, alors  $h \geq k - 1$ . Pour tout  $i \in \{1, \dots, h\}$ , soit  $T_i$  une composante de  $T \setminus x$  qui contient  $u_i$ . Vu que  $x$  n'est pas un sommet support, alors  $T_i$  contient un sommet support  $z_i$  de  $T$ . Le Lemme 5.3 (ii) implique que  $z_i$  est le seul  $b$ -sommet de couleur  $c(z_i)$  dans  $T$ ; en particulier,  $c(z_i) \neq c(x)$ . De ce fait,  $T$  contient au moins  $k - 1$   $b$ -sommets supports  $z_1, \dots, z_h$  de couleurs distinctes. Si le nombre des sommets supports est plus que  $k - 1$ , alors deux entre eux ont la même couleur,

ce qui contredit le Lemme 5.3 (ii). Donc  $h = k - 1$ , et chaque  $T_i$  contient exactement un seul sommet support. Si un sommet quelconque  $u$  de  $V(T) \setminus \{x, z_1, \dots, z_{k-1}\}$  est de degré au moins 3, alors le sous-graphe  $T_i$  qui contient  $u$  contient deux sommets supports de  $T$ , contradiction. D'où  $d_T(u) \leq 2$ . En particulier,  $d_T(y) \leq 2$ . Ceci implique que  $k = 3$ ,  $d_T(x) = d_T(y) = 2$ , et par le Lemme 5.3 (ii) on a aussi  $d_T(z_1) = d_T(z_2) = 2$ . Donc,  $T$  est une chaîne. Comme  $T$  contient au moins quatre b-sommets dont deux entre eux ( $x$  et  $y$ ) sont des sommets non-supports de même couleur, il s'en suit alors que  $T$  est une chaîne contenant au moins 7 sommets. Mais dans ce cas,  $T$  n'est pas b-critique, contradiction. D'où (i) est vérifiée.

D'après (i), on a  $S = \{s_1, s_2, \dots, s_k\}$ , où  $s_i$  est l'unique b-sommet de  $c$  de couleur  $i$ , pour tout  $i \in \{1, \dots, k\}$ . Par le Lemme 5.3 (i), on a  $V(T) = N[s_1] \cup \dots \cup N[s_k]$ .

(ii) Soit  $u$  un sommet quelconque de  $V(T) \setminus S$  et supposons que  $d_T(u) \geq k$ . Puisque  $V(T) = N[s_1] \cup \dots \cup N[s_k]$ , on peut supposer que  $u \in N(s_1)$ . Le sommet  $u$  est adjacent à au plus  $k - 2$  b-sommets, sinon  $u$  serait un b-sommet ou bien il n'y a pas une couleur disponible pour  $u$ . Donc, on peut supposer que  $N(u) \cap S = \{s_1, \dots, s_r\}$  avec  $1 \leq r \leq k - 2$ . Comme  $T$  est un arbre, alors  $u$  a au plus un voisin dans  $N[s_i]$  pour tout  $i \in \{1, \dots, k\}$ . D'où,  $d_T(u) = k$ ,  $u$  a un voisin  $u_j \in N(s_j)$  pour tout  $j \in \{r + 1, \dots, k\}$  et  $u_{r+1}, \dots, u_k$  sont deux à deux distincts. On peut supposer que  $c(u) = r + 1$ . Pour tout  $j \in \{r + 1, \dots, k - 1\}$ , soit  $v_j$  un sommet de couleur  $j + 1$  dans  $N(s_j)$  (peut-être  $v_j = u_j$ ). On définit une coloration  $\pi$  de  $T$  avec  $k$  couleurs obtenue à partir de  $c$  de la façon suivante. Pour tout  $j \in \{r + 1, \dots, k - 1\}$ , si  $v_j \neq u_j$ , alors on interchange les couleurs de  $u_j$  et  $v_j$ . Tous les autres sommets conservent leurs couleurs. On obtient alors une b-coloration  $\pi$  de  $T$  avec  $k$  couleurs telle que  $u$  et  $s_{r+1}$  sont des b-sommets de même couleur, ce qui contredit le Théorème 5.4 (i) pour  $\pi$ .

(iii) Soit  $x$  un b-sommet et  $p = d_T(x)$ . Il est clair que  $p \geq k - 1$  puisque  $x$  est un b-sommet. Soient  $T_1, T_2, \dots, T_p$  les composantes connexes de  $T \setminus x$ . Supposons que  $p \geq k + 1$ . Alors  $N(x)$  contient une au moins feuille, sinon le Théorème 5.4 (i) et le Lemme 5.3 (ii) impliquent que  $|S| \geq d_T(x) + |\{x\}| \geq k + 2$ , contradiction. Pour tout  $r \in \{1, \dots, k\}$ , soit  $N^r(x)$  l'ensemble des voisins de  $x$  de couleur  $r$ . Soit  $u$  une feuille adjacente à  $x$ , et soit  $\ell$

la couleur de  $u$ . Alors  $|N^\ell(x)| = 1$ , sinon  $c$  reste une b-coloration de  $T \setminus u$  avec  $k$  couleurs, contradiction. Vu que  $p \geq k + 1$ , alors il y a une couleur  $t \neq \ell$  telle que  $|N^t(x)| \geq 2$ . Alors deux cas sont à considérer.

**Cas 1:**  $|N^t(x)| \geq 3$ .

Soient  $x_1, x_2, x_3$  trois sommets de  $N^t(x)$ . On peut supposer que  $x_i \in T_i$ , pour  $i = 1, 2, 3$ . Le Lemme 5.3 (ii) et le Théorème 5.4 (i) impliquent que l'une des composantes  $T_1, T_2, T_3$ , disons  $T_1$ , ne contient aucun b-sommet de couleur  $t$  ou  $\ell$ . On recolore les sommets de  $V(T_1) \cup \{u\}$  par un échange de couleur entre  $t$  et  $\ell$ . On obtient une b-coloration dont la couleur de  $u$  apparaît sur un autre sommet de  $N(x)$ . D'où,  $c$  reste une b-coloration de  $T \setminus u$  avec  $k$  couleurs, contradiction.

**Cas 2:**  $\forall r$  dans  $\{1, \dots, k\}$ ,  $|N^r(x)| \leq 2$ .

Vu que  $d_T(x) \geq k + 1$ , alors il y a deux couleurs qui apparaissent exactement deux fois dans  $N(x)$ . Sans perte de généralité, on peut supposer que  $x_1, x_2 \in N^t(x)$  et  $x_3, x_4 \in N^h(x)$ , avec  $h \neq t, \ell$ . Aussi, on peut supposer que  $x_i \in T_i$  pour tout  $i \in \{1, 2, 3, 4\}$ . D'après le Théorème 5.4 (i), il existe une composante  $T_w$  avec  $1 \leq w \leq 4$  qui ne contient aucun b-sommet de couleur  $t$  ou  $\ell$  (ou bien  $h$  ou  $\ell$ ). Sans perte de généralité, on peut supposer que  $T_1$  ne contient aucun b-sommet de couleur  $t$  ou  $\ell$ . Dans ce cas, on peut recolorer les sommets de  $V(T_1) \cup \{u\}$  en interchangeant les couleurs  $t$  et  $\ell$ . On obtient alors une contradiction comme c'est décrit à la fin du Cas 1. Ceci termine la preuve de ce théorème.  $\square$

Une conséquence immédiate du Théorème 5.4 est le suivant.

**Corollaire 5.5.** *Si  $T$  est un arbre b-critique, alors  $\Delta(T) \leq b(T) \leq \Delta(T) + 1$ .*

## 5.2 Caractérisation des arbres b-critiques

Dans cette section, nous allons donner une caractérisation des arbres b-critiques. Cela revient à caractériser les arbres b-critiques ayant un nombre b-chromatique égal à  $\Delta(T)$  ou  $\Delta(T) + 1$ .

Rappelons que dans un arbre  $T$ , il existe un chemin unique simple entre deux sommets distincts de  $T$ .

Un arbre *enraciné* est un arbre orienté (arborescence) dans lequel on distingue un sommet unique  $r$  que l'on appelle racine et à partir duquel il existe un chemin à tout autre sommet de  $T$ . Grace au sommet  $r$ , on définit une relation de parenté  $p$  d'un sommet de  $T$ . Pour un sommet  $x$  d'un arbre enraciné, le *parent*  $p(x)$  de  $x$  est l'unique sommet tel que il existe un arc de  $p(x)$  vers  $x$ . Le *fil* de  $x$  est un sommet  $y$  tel que  $p(y) = x$  et un *descendant* de  $x$  est un sommet  $z$  pour lequel il existe un chemin de  $x$  à  $z$  dans  $T$ . Il faut noter que quand on considère un arbre enraciné, l'orientation ne sera pas mentionnée explicitement et on parlera aussi d'arêtes au lieu d'arcs.

Soient  $T = (V, E)$  un arbre enraciné en  $x$  et  $A$  un sous-ensemble de  $V$ . Alors, on utilisera les notations suivantes:

$$D(x) = \{y \in V : y \text{ est un descendant de } x\}, \quad D[x] = D(x) \cup \{x\}.$$

$$D(A) = \{y \in A : y \text{ est un descendant de } x\}, \quad D[A] = D(A) \cup A.$$

$$L_x = \{y \in V : d_T(y) = 1 \text{ et } p(y) = x\}.$$

Un sous arbre maximal enraciné en  $v$  noté par  $T_v$  est le sous arbre de  $T$  induit par  $D[v]$ .

### 5.2.1 Arbres b-critique avec $b(T) = \Delta(T)$

Afin de caractériser les arbres  $b$ -critiques  $T$  vérifiant  $b(T) = \Delta(T)$ , nous définissons une famille  $\mathcal{T}_1$  comme suit:

**Définition 5.6 (Classe  $\mathcal{T}_1$ ).** *Un arbre  $T$  est dans la classe  $\mathcal{T}_1$ , si et seulement si, pour certains entiers  $k$  et  $p$  avec  $k \geq 4$  et  $2 \leq p \leq k - 2$ , l'ensemble des sommets de  $T$  peut être partitionné en quatre ensembles  $\{v\}$ ,  $D_1$ ,  $D_2$ ,  $X$  avec les propriétés suivantes:*

- $|D_1| = p$ , et tout sommet de  $D_1$  est adjacent à  $v$ ;
- $|D_2| = k - p$ , et tout sommet de  $D_2$  a un voisin dans  $D_1$ ;
- Tout sommet de  $X$  a un voisin dans  $D_1 \cup D_2$ ;
- Il y a un sommet  $w \in D_1$  tel que  $w$  a un voisin dans  $D_2$ ,  $w$  est de degré  $k$ , et tout sommet de  $D_1 \cup D_2 \setminus \{w\}$  est de degré  $k - 1$ .

Notons qu'il n'y a pas d'arêtes autres que celles mentionnées dans la définition, parce que  $T$  est un arbre. Par ailleurs, il est facile de voir que la définition implique que  $|X| = k^2 - 3k + p + 1$ . Donc  $T$  a  $k^2 - 2k + p + 2$  sommets. Aussi,  $\Delta(T) = k$ ,  $m(T) = k$ , les sommets denses sont les sommets de  $D_1 \cup D_2$ , et  $b(T) = k$ .

La classe  $\mathcal{T}_1$  peut contenir plusieurs membres non-isomorphes avec la même valeur de  $k$  et  $p$ , dépendant de l'adjacence entre  $D_1$  et  $D_2$ .

Alors, nous avons le résultat suivant

**Lemme 5.7.** *Si  $T \in \mathcal{T}_1$ , alors  $T$  est b-critique.*

Preuve. Comme nous l'avons observé ci-dessus, on a  $b(T) = k$  et  $m(T) = k$ . Soit  $Y = D_1 \cup D_2 \setminus \{w\}$ . Considérons un sommet quelconque  $x$  de  $T$ . Si  $x \in N[Y] \cup \{w\}$ , alors  $b(T \setminus x) \leq m(T \setminus x) \leq m(T) - 1 = k - 1$ . Si  $x \in N(w)$ , alors  $T \setminus x$  est un arbre pivoté. Par le Théorème 5.2,  $b(T \setminus x) = m(T) - 1 = k - 1$ . D'où,  $T$  est b-critique.  $\square$

Nous sommes maintenant en mesure de caractériser les arbres b-critique ayant un nombre b-chromatique égal à  $\Delta(T)$ .

**Théorème 5.8.** *Soit  $T$  un arbre avec  $b(T) = \Delta(T)$ . Alors  $T$  est b-critique si et seulement si  $T \in \mathcal{T}_1$ .*

Preuve. Si  $T \in \mathcal{T}_1$ , alors d'après le Lemme 5.7,  $T$  est b-critique. Pour prouver la réciproque, considérons un arbre b-critique  $T$  avec  $b(T) = \Delta(T)$ . Posons  $k = b(T)$ . Considérons une b-coloration  $c$  de  $T$  avec  $k$  couleurs et soit  $S$  l'ensemble de tous les b-sommets de  $c$ . Par le Théorème 5.4, il y a un unique b-sommet  $s_i$  de couleur  $i$  pour tout  $i \in \{1, \dots, k\}$ , et donc  $S = \{s_1, \dots, s_k\}$ .

Considérons un sommet  $x$  de degré maximum, et enracinons  $T$  en  $x$ . Soit  $L_x$  l'ensemble des feuilles adjacentes à  $x$ , soit  $S_x = S \cap N(x)$  et  $Y_x = S(x) \setminus (S_x \cup L_x)$ . Posons  $Y_x = \{y_1, \dots, y_q\}$ . Par le Théorème 5.4,  $x$  est un b-sommet. Comme  $d_T(x) = k$ , alors il y a deux sommets de même couleur dans  $N(x)$ . D'autre part, puisque  $x$  est un b-sommet de degré  $k$ , alors tous les voisins de  $x$  à l'exception de ces deux sommets doivent avoir des couleurs différentes. Nous appelons ces deux sommets la paire répétée. Par le Lemme 5.3 (ii)

ces deux sommets ne sont pas dans  $L_x$ , et par le Théorème 5.4 (i), l'un des de ces deux sommets n'est pas dans  $S$ . Doù, l'un des deux est dans  $Y_x$ , et donc  $q \geq 1$ .

Pour tout  $i \in \{1, \dots, q\}$ , soit  $T_i$  la composante de  $T \setminus x$  qui contient  $y_i$ , et soit  $S_i = S \cap V(T_i)$ . Soit  $S'_x = S \cap D(S_x)$ . La définition de  $L_x$  et  $Y_x$  implique que  $T_i$  contient un sommet support de  $T$ , et le Lemme 5.3 implique qu'un tel sommet est un b-sommet. D'où,  $|S_i| \geq 1$  pour tout  $i \in \{1, \dots, q\}$ . Donc,  $|S| \geq q + 1 + |S_x|$ . Si  $L_x = \emptyset$ , cette inégalité implique  $|S| \geq d_T(x) + 1$ , contradiction. De ce fait,  $L_x \neq \emptyset$ . Pour tout  $i \in \{1, \dots, q\}$ , soit  $L_i = \{v \in L_x \mid S_{c(v)} \in S_i\}$  et  $L' = \{v \in L_x \mid S_{c(v)} \in S'_x\}$ . Notons que d'après le Lemme 5.3, pour tout sommet  $z \in L_x$ , la couleur  $c(z)$  n'apparaît pas dans  $N(x) \setminus z$ . D'où  $L_x = L_1 \cup \dots \cup L_q \cup L'$ .

On observe que:

Soient  $s_i, s_j \in S$  et  $y \in N(x)$ . Supposons que  $c(x) \neq i, j$  et,  $s_i$  et  $s_j$  sont à la fois soit dans  $D(y)$  ou bien ne sont pas dans  $D(y)$ . Alors un échange de couleurs entre  $i$  et  $j$  dans  $G[D(y)]$  permet de produire une b-coloration de  $T$  avec  $k$  couleurs. (5.1)

En effet, après l'échange, la coloration est propre (car  $c(x) \neq i, j$ ), tout b-sommet  $s_h$  avec  $h \neq i, j$  reste un b-sommet de couleur  $h$ , et  $s_i$  et  $s_j$  sont soit des b-sommets de couleur  $j$  et  $i$  respectivement ou bien leurs couleurs sont restées inchangées. D'où le Fait (5.1) est vérifié.

Toutes les couleurs qui apparaissent dans  $Y_x$  sont différentes. (5.2)

Supposons au contraire que deux sommets  $y_1, y_2$  dans  $Y_x$  ont la même couleur  $h$  (donc ils forment l'unique paire répétée). Par symétrie, on peut supposer que  $s_h \notin S_1$ . Rappelons que  $L_x \neq \emptyset$ . Soit  $z$  un sommet quelconque de  $L_x$  et soit  $\ell = c(z)$ . D'après le Lemme 5.3,  $\ell \neq h$ . Si  $s_\ell$  n'est pas dans  $T_1$ , alors on intergange les couleurs  $h$  et  $\ell$  dans  $T_1$ . D'après (5.1), ceci produit une b-coloration  $\pi$  de  $T$  avec  $k$  couleurs telle que  $z$  est une feuille de couleur répétée dans  $N(x)$ . D'où,  $\pi$  reste une b-coloration de  $T \setminus z$  avec  $k$  couleurs, contradiction. Ceci implique toute couleur qui apparisse dans  $L_x$  a son b-sommet dans  $T_1$ , c'est à dire,  $L_x = L_1$ , et  $L_2 = \dots = L_q = L' = \emptyset$ . Alors  $s_h \in T_2$ , sinon on aura aussi  $L_x = L_2$ . L'ensemble  $S_3 \cup \dots \cup S_q$  (si  $q \geq 3$ ) doit contenir  $q - 2$  b-sommets (car  $S_j \neq \emptyset$  pour

tout  $j \in \{1, \dots, q\}$ ), et ces sommets doivent être des b-sommets dont leurs couleurs sont dans  $\{y_3, \dots, y_q\}$  (car toutes les autres couleurs ont leurs b-sommets dans  $S_x \cup S_1 \cup \{s_h\}$ ). Par le principe des tiroirs, on a  $|S_i| = 1$  pour tout  $i \in \{3, \dots, q\}$  et aussi  $|S_2| = 1$ , c'est à dire,  $S_2 = \{s_h\}$ . Si  $T_2$  a un sommet de degré au moins 3 autre que  $s_h$ , alors il y a au moins deux sommets supports dans  $T_2$  qui sont des b-sommets, contradiction. Donc  $T_2$  est une chaîne entre  $y_2$  et  $s_h$  plus les feuilles attachées à  $s_h$ . Il est facile de recolorer les sommets de  $T_2$  de telle sorte que la coloration est propre,  $y_2$  obtient la couleur  $\ell$  et  $s_h$  reste un b-sommet de couleur  $h$ . Ceci produit une b-coloration  $\pi$  de  $T$  avec  $k$  couleurs telle que  $z$  est une feuille de couleur répétée dans  $N(x)$ . D'où,  $\pi$  reste une b-coloration de  $T \setminus z$  avec  $k$  couleurs, contradiction. D'où le Fait (5.2) est vérifié.

Le fait (5.2) implique que la paire répétée peut être écrite comme  $\{y_1, s_t\}$  avec  $y_1 \in Y_x$  et  $s_t \in S_x$ . De plus, on réclame que:

$$Y_x = \{y_1\}. \quad (5.3)$$

Supposons au contraire que  $|Y_x| \geq 2$ . Alors  $D(y_2)$  contient un sommet support de  $T$ , et par le Lemme 5.3, ce sommet est un b-sommet  $s_r$ . Notons que  $r \neq t$  et  $T_1$  ne contient pas de b-sommets de couleur  $r$  ou  $t$ . On interchange les couleurs  $t$  et  $r$  dans  $G[T_1]$ . Par (5.1), ceci produit une b-coloration  $\pi$  avec  $k$  couleurs. Le sommet  $x$  a un voisin  $x^r$  de couleur  $r$ , et on a  $x^r \in L_x \cup Y_x$ . Supposons que  $x^r \in Y_x$ . Alors  $x^r \neq y_1$ , et  $Y_x$  contient deux sommets de couleur  $r$  (dans  $\pi$ ), contradiction à (5.2). D'où,  $x^r \in L_x$ . Alors  $x^r$  est un sommet de couleur répétée dans  $N(x)$ . Donc,  $\pi$  reste une b-coloration de  $T \setminus x^r$  avec  $k$  couleurs, contradiction. D'où, le Fait (5.3) est vérifié.

$$\text{Chaque enfant d'un sommet appartenant à } S_x \text{ est une feuille.} \quad (5.4)$$

Supposons le contraire. Alors, pour un certain sommet  $\beta \in S_x$ , l'ensemble  $D(\beta)$  contient un sommet support de  $T$ , et par le Lemme 5.3, ce sommet est un b-sommet  $s_r$ . Il est clair que  $r \neq t$ . Alors  $T_1$  ne contient aucun b-sommet de couleur  $t$  ou  $r$ . Le Fait (5.3) et le fait que  $x$  est un b-sommet impliquent que  $L_x$  contient un sommet  $x^r$  de couleur  $r$ . On interchange les couleurs  $t$  et  $r$  dans  $T_1$ . Par le Fait (5.1), ceci produit une b-coloration  $\pi$  de  $T$  avec  $k$  couleurs telle que  $x^r$  est une feuille de couleur répétée dans  $N(x)$ . D'où,



$\pi$  reste une b-coloration de  $T \setminus x^r$  avec  $k$  couleurs, contradiction. Donc le Fait (5.4) est vérifié.

Chaque enfant de  $y_1$  est un b-sommet. (5.5)

Supposons qu'un certain enfant  $u$  de  $y_1$  n'est pas un b-sommet. D'après le Lemme 5.3 (i),  $u$  est adjacent à un b-sommet  $s_r$ . Clairement,  $r \neq t$  et  $c(u) \neq r, t$ . Vu que  $x$  est un b-sommet, alors en utilisant le Fait (5.3), on constate que  $L_x$  contient un sommet  $x^r$  de couleur  $r$ . Notons que  $D(y_1) \setminus D[u]$  ne contient aucun b-sommet de couleur  $r$  ou  $t$ . On interchange les couleurs  $t$  et  $r$  dans  $G[T_1 \setminus D[u]]$ . Par le Fait (5.1), ceci produit une b-coloration  $\pi$  de  $T$  avec  $k$  couleurs telle que  $x^r$  est un sommet de couleur répétée dans  $N(x)$ . D'où,  $\pi$  reste une b-coloration de  $T \setminus x^r$  avec  $k$  couleurs, contradiction. Donc le Fait (5.5) est vérifié.

$L_x = L_1$ . (5.6)

Soient  $z$  un sommet quelconque de  $L_x$  et  $\ell = c(z)$ . Supposons que  $s_\ell$  n'est pas dans  $T_1$ . Rappelons que  $s_t \in S_x$ . D'où,  $s_t$  et  $s_\ell$  ne sont pas dans  $T_1$ . On interchange les couleurs  $t$  et  $\ell$  dans  $T_1$ . Par le Fait (5.1), ceci produit une b-coloration  $\pi$  de  $T$  avec  $k$  couleurs telle que  $z$  est une feuille de couleur répétée dans  $N(x)$ . Donc,  $\pi$  reste une b-coloration de  $T \setminus z$  avec  $k$  couleurs, contradiction. Ceci implique que toute couleur qui apparaisse dans  $L_x$  a son b-sommet dans  $T_1$ . D'où le Fait (5.6) est vérifiée.

Notons que les faits précédents impliquent que  $S = \{x\} \cup S_x \cup S_1$ .

Tout b-sommet  $s_r$  dans  $S_1$  satisfait  $\text{dist}(y_1, s_r) \leq 2$ . (5.7)

Supposons qu'il existe un b-sommet  $s_r \in S_1$  tel que  $\text{dist}(y_1, s_r) \geq 3$ . Sans perte de généralité, on peut supposer que  $\text{dist}(y_1, s_r) = \max\{\text{dist}(y_1, v) \mid v \in S_1\}$ . Ceci et le Lemme 5.3 (ii) impliquent que  $s_r$  est un sommet support. Le fait (5.3) et le fait que  $x$  est un b-sommet impliquent que  $L_x$  contient un sommet  $u$  de couleur  $r$ . Soit  $z_0$  le parent de  $s_r$  et  $z_1$  le parent de  $z_0$ . Notons que  $z_0$  n'est pas adjacent à  $y_1$  (en particulier,  $z_1 \neq y_1$ ), sinon  $\text{dist}(y_1, s_r) < 3$ . Alors il y a deux cas à considérer.

**Cas 1:**  $c(z_0) \neq t$ . D'après le Théorème 5.4 (i),  $D(y_1) \setminus D[z_0]$  ne contient aucun b-sommet de couleurs  $r$  et  $t$ . Donc, un interchange de couleurs entre  $t$  et  $r$  dans  $G[T_1 \setminus D[z_0]]$  produit une b-coloration  $\pi$  de  $T$  avec  $k$  couleurs telle que  $u$  est un sommet de couleur répétée dans  $N(x)$ . D'où,  $\pi$  reste une b-coloration de  $T \setminus u$  avec  $k$  couleurs, contradiction.

**Cas 2:**  $c(z_0) = t$ . Alors  $z_0$  n'est pas un b-sommet. Aussi,  $D(z_0)$  ne contient aucun b-sommet de couleurs  $c(x)$  et  $t$ . Si  $c(z_1) \neq c(x)$ , alors on interchange les couleurs  $t$  et  $c(x)$  dans  $D[z_0]$ . D'où,  $c(z_0) = c(x) \neq t$ . Ceci implique qu'un échange de couleur comme décrit dans le Cas 1 produit une nouvelle b-coloration  $\pi$  de  $T$  avec  $k$  couleurs telle que  $u$  est un sommet de couleur répétée dans  $N(x)$ . Donc,  $\pi$  reste une b-coloration de  $T \setminus u$  avec  $k$  couleurs, contradiction. Si  $c(z_1) = c(x)$ , alors  $z_1$  n'est pas un b-sommet. Dans ce cas, on peut interchanger les couleurs  $t$  et  $r$  dans  $T_1 \setminus D[z_1]$ . Ceci est possible puisque  $T_1 \setminus D[z_1]$  ne contient aucun b-sommet de couleurs  $t$  et  $r$ . On obtient alors une b-coloration  $\pi$  de  $T$  avec  $k$  couleurs telle que  $u$  est un sommet de couleur répétée dans  $N(x)$ . Donc,  $\pi$  reste une b-coloration de  $T \setminus u$  avec  $k$  couleurs, contradiction. D'où, le Fait (5.7) est vérifié.

$$\text{Tout sommet } v \text{ dans } S \setminus \{x\} \text{ satisfait } d_T(v) = \Delta(T) - 1. \quad (5.8)$$

Rappelons que  $S = \{x\} \cup S_x \cup S_1$ . D'abord, supposons que  $v \in D_x$ . D'après le Fait (5.4), chaque enfant de  $v$  est une feuille. Par le Lemme 5.3 (ii),  $d_T(v) = \Delta(T) - 1$ . Maintenant, supposons que  $v \in S_1$ . Si  $\text{dist}(v, y_1) = 2$ , alors tous les enfants de  $v$  sont des feuilles, sinon, le Lemme 5.3 (ii) implique que  $D(y_1)$  contient un b-sommet qui se trouve à distance au moins trois de  $y_1$ , ce qui contredit la Fait (5.7). Par le Lemme 5.3 (ii), on a  $d_T(v) = \Delta(T) - 1$ . Si  $\text{dist}(v, y_1) = 1$  (c'est à dire,  $v$  est un enfant de  $y_1$ ), alors d'après le Théorème 5.4 (iii), on a  $d_T(v) \geq \Delta(T) - 1$ . Si  $d_T(v) = \Delta(T)$ , alors  $v$  peut jouer le même rôle que  $x$  avec  $Y(v) = \{y_1\}$ . Alors par analogie avec le Fait (5.3), on constate que  $S_v$  contient un b-sommet de couleur  $t$  qui est différent de  $s_t$ . Ceci contredit le Théorème 5.4 (i). Donc,  $d_T(v) = \Delta(T) - 1$ . D'où, le Fait (5.8) est vérifié.

Les faits (5.3)–(5.8) impliquent que  $T \in \mathcal{T}_1$  (où  $y_1$  joue le rôle de  $v$  et  $x$  joue le rôle de  $w$ ). Ceci termine la preuve du Théorème 5.8.  $\square$

### 5.2.2 Arbre b-critique avec $b(T) = \Delta(T) + 1$

Posons  $k = \Delta(T) + 1$ . Afin de caractériser les arbres  $b$ -critiques avec  $b(T) = k$ , nous définissons la famille  $\mathcal{T}_2$  comme suit. Un arbre  $T$  est dans  $\mathcal{T}_2$  s'il existe une séquence d'arbres  $T_1, T_2, \dots, T_k$ , avec  $T = T_k$ , où  $T_1$  est une étoile d'ordre  $k$ , et pour tout  $i \in \{1, \dots, k-1\}$ ,  $T_{i+1}$  peut être obtenu récursivement à partir de  $T_i$  par l'une des trois opérations ci-dessous.

**Opération  $O_1$**  : Identifier le centre d'une étoile d'ordre  $k-1$  avec une feuille d'un sommet support de degré  $k-1$  de  $T_i$ .

**Opération  $O_2$**  : Attacher une étoile d'ordre  $k-1$  de centre  $x$  en joignant  $x$  à un sommet  $u$  de  $T_i$  tel que  $1 \leq d_{T_i}(u) \leq k-3$ .

**Opération  $O_3$**  : Attacher une étoile d'ordre  $k$  en joignant l'une des ses feuilles à un sommet  $u$  de  $T_i$  tel que  $1 \leq d_{T_i}(u) \leq k-3$ .

Soit  $\mathcal{P}$  la classe des arbres pivotés.

**Lemme 5.9.** *Si  $T \in \mathcal{P}$ , alors  $T$  n'est pas  $b$ -critique.*

Preuve. Puisque  $T$  est pivoté, alors  $b(T) = m(T) - 1$ . Soit  $z$  une feuille quelconque de  $T$ . Alors il est facile de voir que  $b(T \setminus z) = b(T)$ . D'où,  $T$  n'est pas  $b$ -critique.  $\square$

**Lemme 5.10.** *Si  $T \in \mathcal{T}_2 \setminus \mathcal{P}$ , alors  $T$  est  $b$ -critique avec  $b(T) = \Delta(T) + 1$ .*

Preuve. Puisque  $T$  est dans  $\mathcal{T}_2$ , alors il est facile de vérifier que  $\Delta(T) = m(T) - 1$ . Comme  $T$  est non pivoté, alors  $b(T) = m(T)$ . Donc,  $b(T) = \Delta(T) + 1$ . Soit  $x$  un sommet quelconque de  $T$ . La définition de  $\mathcal{T}_2$  implique que  $m(T \setminus x) \leq m(T) - 1$ , et en conséquence  $b(T \setminus x) \leq \Delta(T)$ . D'où,  $T$  est  $b$ -critique.  $\square$

Maintenant, on présente un théorème qui caractérise les arbres  $b$ -critiques  $T$  avec  $b(T) = \Delta(T) + 1$ .

**Théorème 5.11.** *Soit  $T$  un arbre avec  $b(T) = \Delta(T) + 1$ . Alors  $T$  est  $b$ -critique si et seulement si  $T \in \mathcal{T}_2 \setminus \mathcal{P}$ .*

Preuve. Posons  $k = \Delta(T) + 1$ . Le Lemme 5.10 implique la suffisance. Pour prouver la nécessité, considérons un arbre  $b$ -critique  $T$  avec  $b(T) = k$ . Nous montrons d'abord que  $T$  appartient à  $\mathcal{T}_2$ . Puisque  $b(T) = k = \Delta(T) + 1$ , alors le Théorème 5.4 implique que  $T$  a un  $b$ -sommets unique  $s_i$  de couleur  $i$ , pour tout  $i \in \{1, \dots, k\}$ , et que  $d_T(s_i) = k - 1$ . Posons  $S = \{s_1, s_2, \dots, s_k\}$ , et  $E_i = T[N[s_i]]$  pour tout  $i \in \{1, \dots, k\}$ . Alors  $E_i$  est une étoile d'ordre  $k$ . Enracinons  $T$  en  $s_1$  et supposons sans perte de généralité que  $\text{dist}(s_1, s_2) \leq \text{dist}(s_1, s_3) \leq \dots \leq \text{dist}(s_1, s_k)$ . Soit  $T_1 = E_1$ . Pour  $i = 2, \dots, k$ , soit  $T_i$  le sous-graphe de  $T$  engendré par  $V(E_1) \cup \dots \cup V(E_i)$ . Supposons que  $i \leq k - 1$ . Soit  $r \in \{1, \dots, i\}$  tel que  $\text{dist}(s_r, s_{i+1}) = \min\{\text{dist}(s_l, s_{i+1}) \mid 1 \leq l \leq i\}$ . Puisque  $T$  est un arbre, alors il existe une chaîne unique  $P$  reliant  $s_r$  à  $s_{i+1}$ . Le choix de  $s_r$  implique que tout sommet intérieur de  $P$  n'est pas un  $b$ -sommets.

Supposons que la longueur de  $P$  est au moins 4. Soit  $u$  un sommet de  $P$  qui n'est pas adjacent à  $s_r$  ou  $s_{i+1}$ . Le choix de  $s_r$  et  $s_{i+1}$  impliquent que  $u$  n'a aucun voisin dans  $S$ , d'où  $b(T \setminus u) \geq b(T)$ , contradiction.

Maintenant, supposons que  $P$  est de longueur 3. Soit  $P = s_r - u - v - s_{i+1}$ . Alors  $u$  et  $v$  ne sont pas des  $b$ -sommets, de plus  $u \in V(T_i)$  et  $v \notin V(T_i)$ . Donc  $T_{i+1}$  est obtenu à partir de  $T_i$  par la troisième opération appliquée à l'étoile  $E_{i+1}$ .

Supposons maintenant que la longueur de  $P$  est égale à 2. Soit  $P = s_r - u - s_{i+1}$ . Alors  $u$  n'est pas un  $b$ -sommets, et  $u \in V(T_i)$ . Donc  $T_{i+1}$  est obtenu à partir de  $T_i$  par la deuxième opération appliquée à l'étoile  $E_{i+1} \setminus \{u\}$ .

Enfin, supposons que  $P$  est de longueur 1, c'est à dire,  $s_r$  est adjacent à  $s_{i+1}$ . Alors  $T_{i+1}$  est obtenu à partir de  $T_i$  par la première opération appliquée à l'étoile  $E_{i+1} \setminus \{s_r\}$ .

A la fin de cette procédure, on aura  $T = T_k$ . Donc  $T$  est obtenu après  $k - 1$  étapes par l'une des trois opérations  $O_1, O_2$  ou  $O_3$ , à partir d'une étoile d'ordre  $k$ . D'où  $T \in \mathcal{T}_2$ . Par le Lemme 5.9,  $T \notin \mathcal{P}$ . Ceci termine la preuve de ce théorème.  $\square$

Nous pouvons maintenant résumer nos résultats comme suit.

**Théorème 5.12.** *Un arbre est  $b$ -critique si et seulement s'il appartient à  $\mathcal{T}_1 \cup \mathcal{T}_2 \setminus \mathcal{P}$ .*

## CONCLUSION ET PERSPECTIVES

Au cours de cette thèse, nous nous sommes intéressés principalement à la notion de la  $b$ -coloration dans les graphes. Plus précisément, nous nous sommes focalisés sur trois points importants: Etablissement des bornes sur le nombre  $b$ -chromatique et caractérisation des graphes atteignant ces bornes; détermination des valeurs exactes du nombre  $b$ -chromatique pour des classes particulières de graphes et caractérisation de certains graphes critiques par rapport au nombre  $b$ -chromatique.

Dans un premier temps, nous avons montré que tout graphe  $G$  satisfait l'inégalité  $b(G) \leq \lfloor \frac{n + \omega(G) - 1}{2} \rfloor$  où  $n$  et  $\omega(G)$  sont respectivement l'ordre et la clique maximum de  $G$ , ensuite nous avons montré qu'il existe une famille de graphes pour lesquels cette borne est atteinte. Ainsi, nous avons caractérisé les graphes bipartis tels que  $b(G) = \lceil \frac{n}{2} \rceil$ . Nous avons également établi une borne supérieure pour la différence  $b(G) - \chi(G)$  en fonction de l'ordre de  $G$  ensuite nous avons caractérisé les graphes pour lesquels cette borne est atteinte. A partir de ces résultats, nous avons déduit un autre résultat concernant la relation entre le nombre  $b$ -chromatique du graphe  $G$  et celui de  $G - v$  où  $v$  est un sommet quelconque de  $G$ .

Dans un second temps, nous avons présenté des bornes et des valeurs exactes du nombre  $b$ -chromatique de certains graphes particuliers, à savoir le graphe de Harary  $H_{k,n}$  lorsque  $k$  est pair, le graphe milieu et le graphe total d'une chaîne  $P_n$ , d'un cycle  $C_n$ , d'une roue  $W_n$  et d'une couronne d'une chaîne  $Cr(P_n)$ .

En dernier lieu, nous avons abordé la notion des graphes dits arête  $b$ -critiques, c'est à dire les graphes  $G$  dont la suppression d'une arête quelconque de  $G$  fait diminuer le nombre  $b$ -chromatique de  $G$ . En effet, après avoir donné quelques propriétés fondamentales de ces graphes, nous avons caractérisé deux classes de graphes arêtes  $b$ -critiques, à savoir les graphes  $P_4$  sparses et quasi-adjoints arête  $b$ -critiques. Nous avons ensuite étudié les graphes  $b$ -critiques. Un graphe  $G$  est dit  $b$ -critique si  $b(G - v) < b(G)$  où  $v$  est un sommet quelconque de  $G$ . Dans ce contexte, nous avons constaté que tout arbre  $b$ -critique satisfait

$b(T - v) = \Delta(T) + 1$  ou  $\Delta(T)$  est le degré maximum de  $T$  ensuite nous avons caractérisé les arbres vérifiant cette propriété.

Les travaux réalisés durant cette thèse ouvrent plusieurs perspectives de travaux futurs. En effet, au vu des résultats obtenus sur les graphes arête  $b$ -critiques et sommet  $b$ -critiques, il est naturel de poursuivre l'étude de ce problème sur des graphes ayant une structure proche des arbres: cactus, graphes en bloc, unicycles, etc. Il est possible également de prolonger le concept des graphes critiques aux classes de graphes critiques, qui ont été définies dans le premier chapitre. Une autre question intéressante est de caractériser les graphes  $G$  tels que  $b(G) = m(G)$ . Il serait intéressant aussi de déterminer la valeur exacte du nombre  $b$ -chromatique pour des graphes particuliers notamment le graphe milieu et le graphe total d'une clique.

## RÉFÉRENCES

- [1] G. Chartrand, P. Zhang. Chromatic graph theory. Discrete Mathematics and its Applications, Series Editor KENNETH H. ROSEN, CRC Press, 2009.
- [2] T.R. Jensen, B. Toft. Graph Coloring Problems. John Wiley & Sons, New York, 1994.
- [3] R.W. Irving, D.F. Manlove. The  $b$ -chromatic number of graphs. Discrete Appl. Math. 91, 127 – 141, 1999.
- [4] D.F. Manlove. Minimaximal and maximinimal optimization problems: a partial order-based approach. PhD thesis, technical report tr-1998 – 27 of the Computing Science Department of Glasgow University, 1998.
- [5] C. Berge. *Graphs*. North Holland, 1985.
- [6] J. A. Bondy, U. S. R. Murty. Graph theory with applications, North-Holland, New York, 1979.
- [7] K. Appel et W. Haken. Every planar map is four colorable: Part 1, discharging. Illinois. J. Maths., 21 : 429 – 490, 1977.
- [8] K. Appel et W. Haken. Every planar map is four colorable: Part 2, reducibility. Illinois. J. Maths., 21 : 491 – 567, 1977.
- [9] M. R. Garey, D. S., Johnson. Computers and Intractibility: A guide to the Theory of NP-completeness, W. H. Freeman and Company, New York, 1979.
- [10] R. Brooks. On coloring the nodes of a network. Math. Proc. Cambridge Philos. Soc., 37 : 194 – 197, 1941.
- [11] E. A. Nordhaus, J. W. Gaddum. On complementary graphs. Ann. Math. Monthly, 63 : 175 – 177, 1956.
- [12] F. Harary, S. Hedetniemi and G. Prins. An Interpolation theorem for graphical homomorphisms, Port. Math. 26 : 453 – 462, 1967.

- [13] L. Dekar, H. Kheddouci. A Graph  $b$ -Coloring Based Method for Composition-Oriented Web Services Classification. A. An et al. (Eds.): ISMIS, LNAI 4994, pp. 599 – 604, 2008.
- [14] L. Dekar, H. Kheddouci. Distance-2 Self-stabilizing Algorithm for a  $b$ -Coloring of Graphs. S. Kulkarni and A. Schiper (Eds.): SSS, LNCS 5340, pp. 19 – 31, 2008.
- [15] H. Elghazel, K. Benabdeslem. Towards  $b$ -coloring of SOM. P. Perner (Ed.). MLDM, LNAI 5632, pp. 322 – 336, 2009.
- [16] H. Elghazel, K. Benabdeslem, A. Dussauchoy. Constrained Graph  $b$ -Coloring Based Clustering Approach. I.Y. Song, J. Eder, and T.M. Nguyen (Eds.): DaWaK, LNCS 4654, pp. 262 – 271, 2007.
- [17] H. Elghazel, V. Deslandres, M. S. Hacid, A. Dussauchoy, H. Kheddouci. A New Clustering Approach for Symbolic Data and Its Validation: Application to the Healthcare Data. F. Esposito et al. (Eds.): ISMIS, LNAI 4203, pp. 473 – 482, 2006.
- [18] B. Effantin, H. Kheddouci. A distributed algorithm for a  $b$ -coloring of a graph. In: Guo, M., Yang, L.T., Di Martino, B., Zima, H.P., Dongarra, J., Tang, F. (eds.) ISPA. LNCS, vol. 4330, pp. 430 – 438, 2006.
- [19] H. Elghazel, H. Kheddouci, V. Deslandres, A. Dussauchoy. A Graph  $b$ -coloring Framework for Data Clustering. J Math Model Algor 7 : 389 – 423, 2008.
- [20] H. Elghazel, H. Kheddouci, V. Deslandres, A. Dussauchoy. A Partially Dynamic Clustering Algorithm for Data Insertion and Removal. V. Corruble, M. Takeda, and E. Suzuki (Eds.): DS 2007, LNAI 4755, pp. 78 – 90, 2007.
- [21] H. Elghazel, T. Yoshida, V. Deslandres, M.S Hacid, A. Dussauchoy. A New Greedy Algorithm for Improving  $b$ -Coloring Clustering. F. Escolano and M. Vento (Eds.): GbRPR, LNCS 4538, pp. 228 – 239, 2007.
- [22] J. Kratochvíl, Z. Tuza, M. Voigt. On the  $b$ -chromatic number of graphs. Lecture Notes in Computer Science 2573, 310 – 320, 2002.



- [23] V. Compos, C. Linhares, F. Maffray, A. Sliva. *b*-chromatic number of Cacti. *Electronic Notes In Discrete Mathematics*, 35 : 281 – 286, 2009.
- [24] A. Silva, F. Maffray. *b*-colouring outerplanar graphs with large girth. *Soumis à Discrete Mathematics*.
- [25] M. Blidia, N. Ikhlef Eschouf, F. Maffray. Characterization of *b*-gamma perfect graphs. Prépublier dans les cahiers de Leibniz, n°171, Juillet 2008 et soumis à *AKCE International Journal of Graphs and Combinatorics*.
- [26] F. Bonomo, G. Durán, F. Maffray, J. Marenco, M. Valencia-Pabon. On the *b*-coloring of cographs and  $P_4$ -sparse graphs. *Graphs and Combinatorics* 25 : 153 – 167, 2009.
- [27] A. El Sahili, M. Kouider. About *b*-colorings of regular graphs, Res. Rep. 1432, LRI, Univ. Orsay, France, 2006.
- [28] M. Blidia, F. Maffray, Z. Zemir. On *b*-colorings in regular graphs. *Discrete Applied Mathematics* 157 : 1787 – 1793, 2009.
- [29] M. Jakovac, S. Klavžar. The *b*-Chromatic Number of Cubic Graphs. *Graphs and Combinatorics* 26: 107 – 118, 2010.
- [30] S. Cabello, M. Jakovac. On the *b*-chromatic number of regular graphs. *Discrete applied mathematics*, vol. 159, no 13, pp. 1303 – 1310, 2011.
- [31] S. Shaebani. On The *b*-chromatic number of regular graphs without 4-Cycle. arXiv : 1103.152 v1 [math.CO] 08 Mars 2011.
- [32] S. Shaebani. The *b*-Chromatic Number of Regular Graphs via The Edge Connectivity. arXiv:1105.2909 v1 [math.CO] 14 May 2011.
- [33] B. Jamison, S. Olarui. A tree representation for  $P_4$ -sparse graphs. *Discrete Appl. Math.* 35 : 115 – 129, 1992.
- [34] V. Giakoumakis, F. Roussel, H. Thuillier. On  $P_4$ -tidy graphs. *Discrete Mathematics and Theoretical Computer Science* 1 : 17 – 41, 1997.

- [35] M. Kouider, M. Mahéo. Some bounds for the  $b$ -chromatic number of a graph. *Discrete Math.* 256 : 267 – 277, 2002.
- [36] M. Kouider, M. Zaker. Bounds for the  $b$ -chromatic number of some families of graphs. *Discrete mathematics*, vol. 306, no 7, pp. 617 – 623, 2006.
- [37] M. Chundovsky and P. D. Seymour, The structure of claw-free graphs, *Surveys in combinatorics (2005)*, 153–171 *London Math. Soc. Lecture Note Ser.*, 327, Cambridge Univ. Press (2005).
- [38] M. Kouider, M. Mahéo. The  $b$ -chromatic number of the cartesian product of two graphs. *Studia Scientiarum Mathematicarum Hungarica* 44 (1), 49 – 55, 2007.
- [39] F. Maffray, A. Silva. A  $b$ -colouring the cartesian product of trees and some other graphs. A paraître dans *Discrete Applied Mathematics*.
- [40] R. Javadi, B. Omoomi. On  $b$ -coloring of cartesian product of graphs. A paraître dans *Ars Combinatoria*.
- [41] M. Jakovac, I. Peterin. On the  $b$ -chromatic number of some graph products. A paraître dans *Stud. Sci. Math. Hung.*
- [42] C.T. Hoàng, M. Kouider. On the  $b$ -dominating coloring of graphs. *Discrete Appl. Math.* 152 : 176 – 186, 2005.
- [43] B. Effantin, H. Kheddouci. The  $b$ -chromatic number of some power graphs. *Discrete Mathematics and Theoretical Computer Science* 6 : 45 – 54, 2003.
- [44] T. Hamada, I. Yoshimura: Traversability and connectivity of the middle graph of a graph. *Discrete Math.* 14 : 247 – 256, 1976.
- [45] M. Behzad: A criterion for the planarity of the total graph of a graph. *Proc. Camb.Philos. Soc.* 63 : 679 – 681, 1967.
- [46] K.Thilagavathi, D.Vijayalakshmi, N.Roopesh.  $b$ -Colouring of Central Graphs. *International Journal of Computer Applications (0975 – 8887) Volume 3 – No.11, July 2010.*

- [47] H. Hajiabolhassan. On the  $b$ -chromatic number of Kneser graphs. *Discrete Applied Mathematics* 158 : 232 – 234, 2010.
- [48] R. Javadi, B. Omoomi. On  $b$ -coloring of the Kneser graphs. *Discrete Mathematics* 309 : 4399 – 4408, 2009.
- [49] F. Maffray, M. Mechebbek. On  $b$ -perfect chordal graphs. *Graphs and Combinatorics* 25 : 365 – 375, 2009.
- [50] C.T. Hoàng, C. Linhares Sales, F. Maffray. On minimally  $b$ -imperfect graphs. *Discrete Applied Mathematics* 157 : 3519 – 3530, 2009.
- [51] C.T. Hoàng, F. Maffray, M. Mechebbek. A characterization of  $b$ -perfect graphs. A paraître dans *Journal of Graph Theory*.
- [52] C.T. Hoàng, F. Maffray, M. Mechebbek. A characterization of  $b$ -perfect graphs. *CoRR*, Vol. abs/1004.5306, 2010.
- [53] J. Kara, J. Kratochvil, M. Voigt.  $b$ -continuity. Technical Report M 14/04, Technical University Ilmenau, Faculty of Mathematics and Natural Sciences, 2004.
- [54] T. Faik. La  $b$ -continuité des  $b$ -colorations: complexité, propriétés structurelles et algorithmes. Thèse de Doctorat, Université Paris XI Orsay, 2005.
- [55] T. Faik. About the  $b$ -continuity of graphs, *Elect. Notes in Discrete Mathematics* 17 : 151 – 156, 2004.
- [56] D. Barth, J. Cohen and T. Faik. Complexity of determining the  $b$ -continuity property of graphs, *PRiSM Technical Report*, 2003.
- [57] D. Barth, J. Cohen, T. Faik. On the  $b$ -Continuity Property of Graphs. *Discrete Applied Mathematics* 155, 13 : 1761 – 1768, 2007.
- [58] G. A. Dirac. Note on the colouring of graphs. *Math. Z.*54 : 347-353, 1951
- [59] G. A. Dirac. Property of 4-chromatic graphs and some remarks on critical graphs. *J. London, Math. Soc.* 27 : 85 – 92, 1952.

- [60] M.C. Golumbic. Algorithmic Graph Theory and Perfect Graphs, Annals of Discrete Mathematics 57, 2nd Edition, North Holland, 2004.
- [61] J. Ramirez-Alfonsin, B. Reed. Perfect Graphs. Wiley-Interscience Series in Discrete Mathematics and Optimization, Wiley, 2001.
- [62] M. Blidia, N. Ikhlef Eschouf, F. Maffray.  $b$ -coloring of some bipartite graphs. The Second International Symposium on Operational Research Algiers, Algeria : May 30th – June 02nd , 2011.
- [63] M. Blidia, N. Ikhlef Eschouf, F. Maffray.  $b$ -coloring of some bipartite graphs. A paraître dans Australasian Journal of Combinatorics.
- [64] S. François, R. Balakrishnan Raj. Bounds for the  $b$ -chromatic number of vertex-deleted subgraphs and the extremal graphs. Electronic Notes in Discrete Mathematics 34 : 353 – 358, 2009.
- [65] S. Francis Raj, R. Balakrishnan. Bounds for the  $b$ -chromatic number of  $G - v$ . A paraître dans Discrete Applied Mathematics.
- [66] N. Ikhlef-Eschouf, Z. Zémir, M. Blidia, Note on  $b$ -colorings in Harary graphs, COSI'2010, 18 – 20 Avril 2010, Ouargla, Algérie.
- [67] N. Ikhlef-Eschouf, Z. Zémir, M. Blidia, Note on  $b$ -colorings in Harary graphs, soumis à Australasian Journal of Combinatorics.
- [68] N. Ikhlef Eschouf, A. Reggab, D. Saadadou. Contribution à l'étude de  $b$ -coloration dans les graphes. Mémoire de Master, Université Saad Dahlab de Blida, Juillet 2011.
- [69] N. Ikhlef Eschouf, M. Kadri. Le nombre  $b$ -chromatique du graphe total de certains graphes particuliers. Mémoire de Master, Université Dr Yahia Farès de Médéa, Juillet 2011.
- [70] B. West. Introduction to graph theory. Printice Hall of India, 2003.
- [71] N. Ikhlef Eschouf. Characterization of some  $b$ -chromatic edge critical graphs. Australasian Journal of Combinatorics 47 : 21 – 35, 2010.

- [72] C.T. Hoàng. Perfect graphs, Ph.D. Thesis, School of Computer Science, McGill University, 1985.
- [73] B. Jamison, S. Olariu. Recognizing  $P_4$ -sparse graphs in linear time. *SIAM J. on Comput* 21 : 381 – 406, 1992.
- [74] L.W. Beineke : Characterizations of derived graphs. *Journal of Combinatorial Theory*, 9(2) : 129 – 135, 1970.
- [75] M. Blidia, N. Ikhlef Eschouf, F. Maffray. On graphs vertex critical with respect to  $b$ -chromatic number. *Colloque sur l'Optimisation et les Systèmes d'Informatique COSI'2011*, 24 – 28 Avril, Guelma, Algérie.
- [76] M. Blidia, N. Ikhlef Eschouf, F. Maffray. On vertex  $b$ -critical trees. A paraître dans *Opuscula Mathematica*.
- [77] D. Seince. On a property of the class of  $n$ -colorable graphs. *J. Comb. Theory Ser. B* 16 : 191 – 193, 1974.