

République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche
Scientifique



Université SAAD DAHLEB BLIDA-1-

Institut d'Aéronautique et des

Etudes Spatiales-IAES

Département de construction

aéronautique



Mémoire de fin d'études

En vue de l'obtention du diplôme de master en
Aéronautique

Option :

Structures Aéronautique

Thème

**COMPORTEMENT HYGROTHERMOMECHANIQUE DES PLAQUES
COMPOSITE CROISEES EPAISSES EN UTILISANT LA THEORIE
D'ORDRE ELEVEE DE REDDY**

Réalisé par :

GUERRAS Abdelkader

BOUGHENA Abdelhakim

Encadreur :

Mr. Boukert Billel.

Co-Encadreur :

Mr. Khodjet Kesba Mohamed.

Juillet 2021

Remerciement :

Nous tenons tout d'abord à remercier Dieu le tout puissant et miséricordieux, qui nous a donné la force et la patience d'accomplir ce modeste travail.

Nous tenons à remercier également notre encadreur Mr BOUKERT Billel et co-encadreur Mr KHODJET Kesba, pour ses directives, conseils et suivi tout au long de ce travail.

Nos vifs remerciements vont aussi aux membres du jury pour l'intérêt qu'ils ont porté à notre recherche en acceptant d'examiner notre travail.

A nos familles et nos amis qui par leurs prières et leurs encouragements, on a pu surmonter tous les obstacles

Enfin, nous remercions aussi Mr KRIM Mohamed Karim et toutes les personnes qui ont participé de près ou de loin à la réalisation de ce travail

DEDICACE

Je dédie le fruit de ce modeste travail comme un geste de gratitude à :

*Mes très chers parents, qui m'ont soutenu, encouragé pour que je
puisse mener à bien mes études, et qui attendu ce jour avec
impatience, que dieu les gardes et les protèges.*

Mes chères sœurs

Mon cher frère : Mouhamed

Mon neveu : Louaï

Ma petite nièce : Tasnîm

Mon cousin : Farouk

Familles : Guerras et Boustoïne.

Mon binôme : Abdelhakîm

*Mes très chers amis : Ahmed, Aymen, Khaled, Chamso, Amine, Fadi,
Amar, Mounir.*

Mes enseignants et mes amis d'étude.

Abdelkader

DEDICACE

Je dédie le fruit de ce modeste travail comme un geste de gratitude à :

*Mes très chers parents, qui m'ont soutenu, encouragé pour que je
puisse mener à bien mes études, et qui attendu ce jour avec
impatience, que dieu les gardes et les protèges.*

Mes chères sœurs

Mes chers frères : Aymen, Walid, Abdelhak, Allaadine, Anes, Amir

Mes cousins : Ayoub, Youcef

Familles : Boughena et Rebahí.

Mon binôme : Abdelkader

*Mes très chers amis : Khierdine, Oussama, Abdou, Amine, Fadi,
Amar, Mounir.*

Mes enseignants et mes amis d'étude.

Abdelhakim

ملخص

تعمل هياكل الطيران تحت ظروف طبيعية مختلفة مما يؤدي الى انخفاض وتدهور في صلابة وقوة الهيكل والحد من عمره، إن هذه الدراسة تتناول تأثير درجة الحرارة والرطوبة على الخواص الميكانيكية للمركبات الخشنة والغرض من هذا العمل هو دراسة سلوك هذه المركبات باستخدام نظرية النظام العالي لريدي مع الاخذ بعين الاعتبار الظروف البيئية التي تعمل فيها الصفيحة.

تم تطوير برنامج كمبيوتر يعمل على محاكاة سلوك الشرائح المركبة تحت تأثير الرطوبة الحرارية خلال مرحلة الاستعمال.

الكلمات المفتاحية: المواد المركبة، نظرية التصفيح الكلاسيكي، نظرية الرتبة العالية، درجة الحرارة، الرطوبة، الرطوبة الحرارية.

Résumé

Les structures aéronautiques fonctionnent dans des conditions naturelles différentes, ce qui entraîne une diminution et une détérioration de la rigidité et de la résistance de la structure et limite sa durée de vie. Cette étude traite de l'effet de la température et de l'humidité sur les propriétés mécaniques des véhicules bruts. Le travail consiste à étudier le comportement de ces composés en utilisant la théorie d'ordre élevés de REDDY en tenant compte des conditions environnementales dans lesquelles la plaque fonctionne.

Un programme informatique a été développé qui simule le comportement des stratifiés composites sous l'influence de l'humidité thermique pendant la phase d'absorption.

Mots clés : matériaux composites, théorie classique des stratifié, théorie d'ordre élevé, température, humidité, hygro thermomécanique.

Abstract

Aeronautical structures operate under different natural conditions, which leads to a decrease and deterioration of the rigidity and strength of the structure and limits its service life. This study deals with the effect of temperature and humidity on the mechanical properties of raw vehicles. The work consists of studying the behavior of these compounds using the high order theory of REDDY taking into account the environmental conditions under which the plate operates. A computer program has been developed which simulates the behavior of composite laminates under the influence of thermal humidity during the absorption phase.

Keywords: composite material, classical stratification theory, high ordre theory, temperature, humidity, hygrothermomechanical.

Table des matières

Introduction générale:	2
------------------------------	---

Chapitre I: Introduction générale sur les matériaux composites

1. Définition d'un matériau composite:.....	5
1.1. Grande diffusion (GD):	5
1.2. Hautes performances (HP):	5
2. Constituants des matériaux composites:	5
2.1. Renfort:	6
2.2. Matrice:	7
3. Classification des matériaux composites:	8
3.1. Selon la forme des constituants:	8
3.2. Selon la nature des constituants:.....	9
3.3. Les matériaux composites et les alliages:.....	9
4. Les grandes applications des composites:	9
4.1. Construction l'éolienne:	10
4.2. Construction aéronautique:.....	10
5. Les avantages:	10
6. Les inconvénients:	11
7. Mise en œuvre des matériaux composites:.....	11
7.1. Moulage à jet:	11
7.2. Moulage par roulage:.....	12
7.3. Moulage sous vide:.....	12
7.4. RTM (Resin Transfer Moulding):	12
7.5. RFI (Resin Film Infusion):	13
7.6. Moulage des pre-impregnés (prepregs):	13
7.7. Moulage de pultrusion:.....	14
7.8. moulage FW (Filament Winding):	14
8. Architecture des matériaux composites:	14
8.1. Les monocouches:	14
8.2. Les stratifiés:.....	15
8.3. Les Sandwiches:	15
9. Effets d'humidité et de la température sur les matériaux composites:.....	16

Chapitre II: Modélisation mécanique et hygrothermomécanique des matériaux composites

1. Introduction:	18
------------------------	----

2. Théories de déformation des plaques:	18
2.1. Théorie classique des plaques minces (CLPT):	18
2.2. Théorie de déformation en cisaillement du premier ordre (FSDT):	19
2.3. Théorie de déformation en cisaillement d'ordre supérieur (HSDT) :	20
3. Définitions:	21
3.1. Pli et stratifié:	21
3.2. Repère principaux:	22
3.3. Repère du stratifié:	22
4. Comportement mécanique et hygrothermomecanique:	22
4.1. Microanalyse:	22
4.2. Loi de comportement:	23
4.2.1. Matrice de rigidité:	24
5. La théorie d'ordre élevée de reddy (HSDT):	27
5.1. Contraintes Planes Généralisées:	27
5.2. Matrice de rigidité réduite dans les axes principaux:	27
5.3. Relation d'élasticité de chaque pli du stratifié:	28
5.4. Une théorie des plaques de troisième ordre:	28
5.4.1. Champs de déplacement:	28
5.4.2. Déformation et contrainte:	29
5.4.3. Matrice de passage de déformation et contrainte:	30
5.4.4. Equation des mouvements:	31
5.4.5. Solution de Navier:	33
5.4.6. Calcul des contraintes:	35
6. Modélisation du comportement hygrothermomecanique :	36

Chapitre III: Calcule numérique et résultat

1. Introduction:	39
2. Description générale sur le programme Matlab:	39
3. Organigramme de la plaque épaisse:	39
4. Interface graphique:	40
5. Résultats de simulation des plaques épaisses:	42
5.1. Influence du mode de sollicitation:	43
5.2. Influence de l'humidité opérationnelle:	49
5.3. Influence de l'humidité référentielle:	50
5.4. Influence de l'anisotropie:	52
5.5. Influence des paramètres géométriques:	55
5.5.1. Influence du rapport géométrique a/h:	55

5.5.2. Influence du rapport géométrique a/b:	56
5.6. Couplage T, C:.....	58
5.7. Influence de température opérationnelle Négative:	61
Conclusion générale:	633
Liste des symboles:	64
Références:	666

Liste des figures

Chapitre I : Introduction générale sur les matériaux composites

Figure (I.1): Différentes types des matériaux.....	6
Figure (I.2): Moulage par projection.....	11
Figure (I.3): Moulage au contact.....	12
Figure (I.4): Moulage sous vide ou «au sac».....	12
Figure (I.5): RTM (Résine Transfer Moulding).....	13
Figure (I.6): L'infusion.....	13
Figure (I.7): Compression à chaud.....	14
Figure (I.8): Couche de composite.....	15
Figure (I.9): Constitution d'un stratifié.....	15
Figure (I.10): Matériaux sandwiches à âmes pleines.....	16

Chapitre II : Modélisation mécanique et hygrothermomécanique des matériaux composites

Figure (II.1): Illustration de la loi de la plaque mince (CLPT).....	19
Figure (II.2): Illustration de la loi du premier ordre(FSDT).....	20
Figure (II.3): Illustration de la plaque d'ordre élevé.....	21
Figure (II.4): Pli et stratifié.....	21
Figure (II.5): Le repère local et globale d'un stratifié.....	22

Chapitre III : Calcul numérique et résultat

Figure (III.1): Organigramme de la plaque épaisse.....	39
Figure (III.2): La couverture de l'interface.....	40
Figure (III.3): L'interface principale.....	40
Figures (III.3.1): Les cases des données.....	41
Figure (III.3.2): L'affichage des graphes.....	41
Figure (III.4.1): Influence du mode de sollicitation cas mécanique.....	43
Figure (III.4.2): Influence du mode de sollicitation cas thermique.....	44
Figure (III.4.3): Influence du mode de sollicitation cas hygroscopique.....	45

Figure (III.4.4): Influence du mode de sollicitation cas thermomécanique.....	46
Figure (III.4.5): Influence du mode de sollicitation cas hygromécanique.....	47
Figure (III.5): Influence de l'humidité opérationnelle C.....	50
Figure (III.6): Influence de C_0	51
Figure (III.7.1): Influence de l'anisotropie.....	52
Figure (III.7.2): Influence de l'anisotropie.....	53
Figure (III.7.3): Influence de l'anisotropie.....	54
Figure (III.8.1): Influence des paramètres géométriques a/h.....	56
Figure (III.8.2): Influence des paramètres géométriques a/b.....	57
Figure (III.9.1): Couplage de l'humidité et la température.....	58
Figure (III.9.2): Couplage de l'humidité et la température.....	59
Figure (III.10): Influence de Température négative.....	61

Liste des tableaux

Tableau (I.1): différence entre matrice thermodurcissables et matrice thermoplastiques.....	8
Tableau (I.2): Les matériaux composites et les alliages.....	9
Tableau (III.1): les caractéristiques mécanique.....	42

Introduction générale

Introduction générale

Un matériau désigne toute matière utilisée pour réaliser un objet au sens large. Ce dernier est souvent une pièce d'un sous-ensemble c'est donc une matière de base sélectionnée en raison de propriété particulière et mise en œuvre d'un usage spécifique tel que les pièces et structures mécaniques.

La recherche scientifique ne cesse pas à évoluer pour satisfaire les besoins exprimés pour améliorer les innovations dans les domaines qui impliquent l'intervention des chercheurs dans le domaine des matériaux.

Si en revient à l'historique, l'être humain a commencé par l'utilisation du bois comme le premier matériau composite naturel utilisé. Après, il a inventé l'imperméable avec du caoutchouc sur des tissus par CHARLES MACINTOSH en 1823. Puis le chercheur FRANCOIS HENNEBIQUE a déposé le brevet du béton armé en 1892.

Les matériaux composites ont été créés à fin économique ainsi pour répondre à la rigidité, la durabilité et la performance.

L'optimisation des matériaux composites représente un souci majeur dans le domaine de l'industrie c'est-à-dire optimise un matériau désigne en premier lieu perfectionnement de ses caractéristiques tout en gardant l'aspect financier.

La technologie moderne fait appel à des nouveaux matériaux excellents des propriétés qui ne peuvent offrir que par des matériaux traditionnels tels métaux céramique polymère.

Des facteurs tel que la température et l'humidité font faire des changements sur les structures aéronautiques en composite. Le changement de température cause des effets antagonistes sur le matériau. L'élévation de la chaleur fait une dilatation par contre le matériau se contracte lorsqu'il refroidit. La variation de la température porte des altérations de la rigidité des matériaux.

L'exposition des matériaux à des environnements variables comme la température et l'humidité pendant leur usage structural nuit l'état des matériaux et pose des contraintes compliquées qui vont générer des déformations de nature hygrothermique à cause de l'absorption l'humidité par la matrice polymère qui contribué à la résistance du matériau.

Introduction générale

Préciser les contraintes internes de la température et l'humidité (hygrothermique) sur les plaques composites tout en sollicitant des solutions pour l'aboutissement d'une meilleure durabilité et une parfaite rigidité.

Notre travail vise de développer un programme informatique pour simuler cette problématique. La démarche suit dans ce travail se résume dans le plan ci-dessous :

Chapitre I : Introduction sur les matériaux composites.

On va donner une définition sur les matériaux composites, les constituants et leur classification, les avantages et les inconvénients, le domaine d'application.

Chapitre II : Modélisation mécanique et hygro thermomécanique des matériaux composites.

Dans ce chapitre, nous commencerons par une étude bibliographique de la théorie des panneaux composites existante, en accordant une attention particulière à la théorie HSDT de Reddy qui sera utilisée dans notre mémoire, et enfin nous terminerons la modélisation de la température et de l'humidité dans le panneau composite, ainsi que le matériau composite épais.

Chapitre III : Calcul numérique et résultats

Dans ce chapitre, nous décrirons d'abord le code de calcul développé dans ce travail à travers notre contribution à la méthode de calcul itérative et un organigramme explicatif. Les résultats obtenus seront présentés sous la forme d'une partie traitant des différents paramètres.

Chapitre I

INTRODUCTION SUR LES MATERIAUX COMPOSITES

Les matériaux composites sont des substituts des matériaux traditionnels comme le bois, les nouvelles technologies ne cessent pas à inventer des produits tout en gardant deux volets, le premier c'est l'opportunité des couts, le deuxième c'est la performance. Un courant cherche d'avoir les deux volets ensemble.

1. Définition d'un matériau composite

Un matériau composite est constitué de l'assemblage de deux matériaux de natures différentes, se complétant et permettant d'aboutir à un matériau dans l'ensemble des performances est supérieur à celui des composants pris séparément. [1]

Un matériau composite consiste des plusieurs phases discontinues réparties dans une phase continue, cette caractéristique nous donne une excellente combinaison des propriétés.

Les matériaux composites sont classés en deux types qui sont :

1.1. Grande diffusion (GD)

Les matériaux composites de grande diffusion dont les propriétés mécaniques sont plus faibles mais d'un cout compatible avec une production en grande série, ce qui représente 95% des matériaux composites utilisées qui se sont des plastiques armés ou plastique renforcés ou le taux volumique de renfort approximativement à 30%.

1.2. Hautes performances (HP)

Les matériaux composites de hautes performances présentant des propriétés mécaniques spécifiques élevées et un cout unitaire important se sont largement utilisées dans ces domaines d'aéronautique, industrie maritime, ... etc.

Les renforts utilisés sont plutôt des fibres longues dont le taux de renfort est supérieur à 50% inversement aux GD.

2. Constituants des matériaux composites

Un matériau composite est constitué d'une matrice et d'un renfort, constitué de fibres. Le renfort apporte au matériau composite ses performances mécaniques élevées, alors que la matrice a pour rôle de transmettre aux fibres les sollicitations mécaniques extérieures et de protéger les fibres vis-à-vis des agressions extérieures. [1]

2.1. Renfort

Les propriétés mécaniques des matériaux composites sont assurées par les renforts. Il existe sur le marché un grand nombre de fibres en fonction des coûts selon la structure réalisée. Les propriétés mécaniques des renforts apportent un plus à la résistance mécanique comme la rigidité, la durabilité.

Les renforts ont aussi des propriétés physiques comme la conductivité thermique, résistance à l'abrasion, ... etc.

Parmi les caractéristiques des renforts objet des recherches on peut citer les propriétés mécaniques élevées comme une masse volumique faible, une bonne compatibilité avec les résines, la facilité de mise en œuvre.

Les renforts sont classés selon des types couramment rencontrés comme indique ci-dessous figure (I.1).

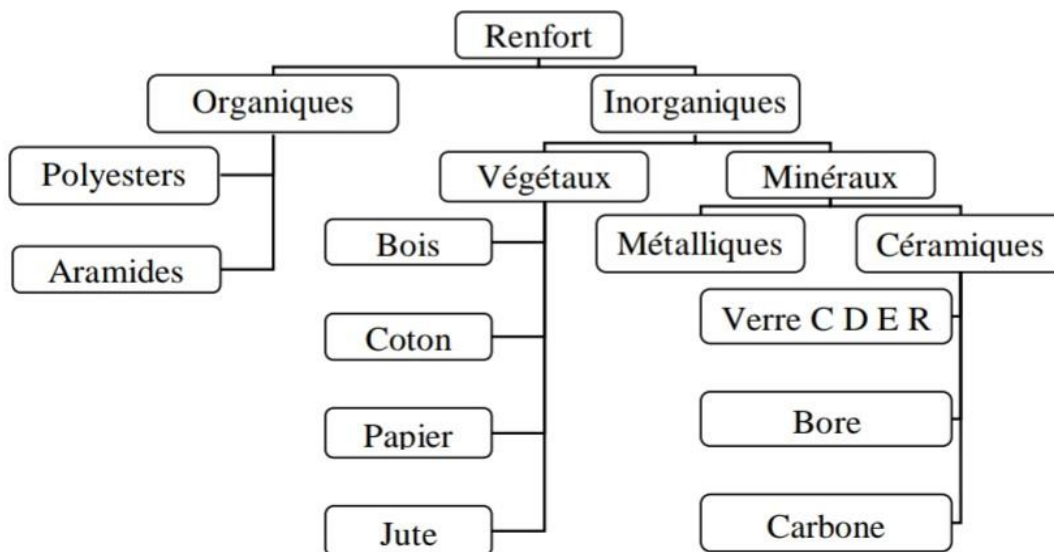


Figure (I.1) : Différents types des matériaux.

Les renforts des composites à matrice organique peuvent être la fibre de verre qui est la plus répandue, la fibre de carbone qui est très performante, la fibre d'aramide ou de polypropylène qui a une haute résistance.

Fibre de carbone : c'est la fibre la plus utilisée dans les applications hautes performances, car elle a de très fortes propriétés mécaniques, elle est obtenue par carbonisation de la PAN (polyacrylonitrile).

Fibre de verre : la fibre de verre, bien que pas aussi fort ou aussi rigide que la fibre de carbone, est beaucoup moins cher et beaucoup moins cassant lorsqu'il est utilisé pour fabriquer les matériaux composites.

Fibre d'aramide : KEVLAR, la fibre d'aramide est issue de la chimie des polyamides aromatiques. Ont des propriétés mécaniques faibles en compression mais une résistance élevée de traction.

Fibre céramique : sont principalement conçus pour des applications thermiques, électriques, et mécaniques soumises à des températures continues jusqu'à 1370°C, cette fibre s'utilise dans les parties chaudes comme les moteurs d'avions.

2.2. Matrice

La matrice est l'élément qui lie et maintient les fibres elle repartie les efforts (résistance à la compression on à la flexion) et assure la protection chimique des fibres. [1]

Les matrices doivent présenter une bonne compatibilité avec le renfort, ainsi qu'elles doivent avoir une masse volumique faible de manière à conserve aux matériaux composites des caractéristiques mécaniques spécifiques élevées.

La matrice elle-même composé d'une résine. [1] Il existe deux grandes familles de résines sont : les résines thermoplastiques et les résines thermodurcissables.

Les résines thermodurcissables : La majorité des résines qui sont utilisées dans l'industrie composite sont thermodurcissable. Et qui ont une stabilité thermique élevée aussi un grand avantage pour des applications vue la demande d'utilisation. On distingue trois genres de résines :

- Les résines polyesters insaturées : polyesters condensés, vinyesters, dérivés allyliques...etc.
- Les résines de condensation : phénoliques, aminoplastes, furaniques...etc.
- Les résines époxydes.

Les résines thermoplastiques : Contrairement aux résines thermodurcissables, les résines thermoplastiques ont une faible propriété mécanique. La consolidation la plus utilisée pour une résistance mécanique est les fibres courtes, une bonne stabilité dimensionnelle. Parmi les résines thermoplastiques :

Chapitre I : Introduction sur les matériaux composites

- Le polychlorure de vinyle (PVC).
- Le polystyrène.
- Le polycarbonate.

Les thermoplastiques ont un cout abordable par rapport aux autres :

Matrices	Thermodurcissables	Thermoplastiques
Etat de base	Liquide visqueux	Solide prêt à l'emploi
Stockage	Réduit	Illimité
Mouillabilité des renforts	Aisée	Difficile
Moulage	Chauffage continu	Chauffage + refroidissement
Cycle	Long (polymérisation)	Court
Tenue au choc	Limitée	Assez bonne
Tenue thermique	Meilleure	Réduite
Chutes et déchets	Perdus	Recyclables
Condition de travail	Emanations de solvants	Propreté

Tableau (I.1) : différence entre matrice thermodurcissables et matrice thermoplastiques.

3. Classification des matériaux composites

La classification courante des matériaux composites est souvent soit selon la forme soit selon la nature des composantes.

3.1. Selon la forme des constituants

En fonction de la forme des constituants les composites sont classés en deux classes :

- Les matériaux composites à particules et les matériaux composites à fibres. [1]
- Les composites à fibres : si le renfort se trouve sous forme de fibres, le composite est alors à fibres. Les fibres utilisées se présentent soit sous forme de fibres continues soit sous forme des fibres discontinues.

3.2. Selon la nature des constituants

Selon la nature de la matrice, les matériaux composites sont classés en trois catégories : à matrice organique, à matrice métallique ou à matrice minérale. [1]

- Composites à matrice organique (résine, charges) : fibres de verre, fibre d'aluminium, kevlar...etc.
- Composite à matrice métallique (alliages légers et ultra légers) : carbure de silicium, bore...etc.
- Composite à matrice minérale (céramique) : nitrures, ciments.

Les matériaux composites à matrice organique ne peuvent être utilisés que dans le domaine de température ne passant pas 200 à 300 °C, alors que les matériaux composites à matrice métallique ou minérale sont utilisés au-delà : jusqu'à 600°C pour une matrice métallique, jusqu'à 1000°C pour une matrice céramique.

3.3. Les matériaux composites et les alliages

Matériau	Masse volumique Kg/m ³	Module de Young MPa	Contrainte de rupture MPa	Module spécifique MN.m/kg	Contrainte spécifique Kn.m/kg
Acier	7850	210000	360	26.75	45.86
Alliage d'aluminium	2700	70000	620	25.93	229.63
Kevlar	1500	130000	2800	86.67	1866.67
Carbone	1900	390000	2100	205.26	1105.26
Epoxydiques	1500	5000	80	3.33	53.33

Tableau (I.2) : Les matériaux composites et les alliages.

4. Les grandes applications des composites

Les matériaux composites sont utilisés dans de nombreuses applications et inondent de plus en plus notre quotidien. Outre dans les utilisations aéronautiques et aérospatiales, ils sont également présents dans les secteurs du génie civil, de l'automobile, de la construction navale, du sport, du l'éolien.

4.1. Construction l'éolienne

La plupart des pales d'éoliennes sont fabriquées à partir de matériaux composites alliant légèreté et solidité. La réalisation d'éoliennes de très grande taille, notamment pour les besoins de l'éolien offshore, poussent les chercheurs à concevoir des matériaux de plus en plus performants. la construction des pales d'éolienne nécessite la légèreté et la solidité [2].

Pour la fabrication des pales, on utilise des matériaux composites qui sont des mélanges de fibre de verre, de fibre de carbone, de résines polyester ou de résines d'époxy.

4.2. Construction aéronautique

Au départ, l'introduction des composites dans l'aviation commerciale s'est faite sur de petites surfaces comme les trappes d'accès ou de visite, le plancher cabine... Petit à petit, la masse de composites dans l'avion a augmenté, pour être utilisés entre autres au niveau des trappes de train, au niveau de la jonction avec la voilure ou des nacelles de moteurs. Puis sont venus les ensembles structuraux de type caisson dans lesquels sont intégrés les réservoirs, les empennages, plus récemment les poutres maitresses supportant les planchers cabines, et dernièrement donc le fuselage.

La façon la plus simple de réduire la consommation de carburant d'un appareil est d'en diminuer son poids, puisqu'à distance égale, un moins lourd va requérir moins de carburant.

Ces dernières années, les composites sont d'ailleurs devenus les matériaux dominant des nouveaux avions commerciaux. Les composites représentent par exemple 50% de la masse du Boeing 787 Dreamliner et 80% de son volume. Cela diminue son poids de 20% par rapport à une structure en aluminium. C'est le premier avion à avoir une enveloppe composite, à base de fibre de carbone plastifiée pour le fuselage et les ailes. Cet avion est donc plus léger et moins gourmand en kérosène, de l'ordre de 20%.

Plus récemment, l'A350, la société Airbus utilise 52% de matériaux composites. Cet avion est donc plus léger, avec un poids réduit de 10 à 15 tonnes [3].

5. Les avantages

- La légèreté : c'est le facteur clé pour les utilisés dans la structure des avions.
- Résistance à la fatigue : ils ne se fissurent pas à cause de la fatigue comme le métal.

- Faible vieillissement sous l'action de l'humidité, la chaleur et la corrosion : ils résistent bien aux environnements de flexion structurelle.
- Maintenance réduite : la conception composite dure plus longtemps ce qui réduit les coûts d'entretien et de réparation.
- Une isolation électrique élevée.
- Ils insensibles aux produits chimiques tels que les huiles, les liquides hydrauliques...etc.

6. Les inconvénients

L'inconvénient le plus important de l'utilisation des matériaux composites est la difficulté de dire si la structure intérieure est endommagée ou non car ces derniers ne se cassent pas facilement.

- Ils présentent des difficultés de réparation, bien qu'il existe des possibilités par collage ou stratification. Ce qui finit par devenir coûteux.
- La tenue à la chaleur des matériaux composites est inférieure à celle du métal, la résine utilisée dans un matériau s'affaiblit à des températures inférieures à 150°C, ce qui nécessite la prise de précautions pour éviter les incendies.

7. Mise en œuvre des matériaux composites

La plupart des méthodes de mise en œuvre consistent à élaborer les pièces en matériaux composites par couches successives comportant matrice et renfort. Cette technique générale appelée stratification, conduisant à l'élaboration de stratifiés, nous amènera ensuite à nous intéresser à l'architecture des matériaux composites. [1]

7.1. Moulage à jet

C'est un jet en pression de résine et fibres courtes pré-mélangées [4].

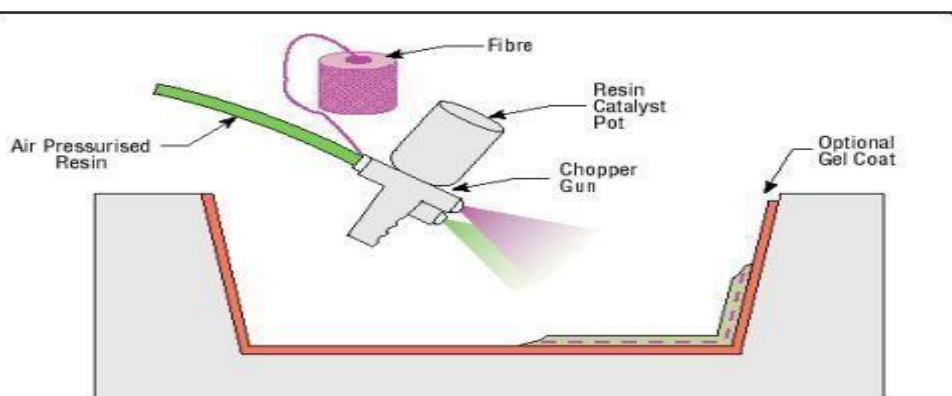


Figure (I.2) : Moulage par projection.

7.2. Moulage par roulage

La résine est appliquée à la main sur une couche de fibres pré-appliquée au moule. Dans les deux cas, la polymérisation se fait, normalement, à froid, d'habitude avec ajout d'un catalyseur [4].



Figure (I.3) : Moulage au contact.

7.3. Moulage sous vide

La polymérisation se fait dans un moule sous vide, avec vacuum bag, qui permet de comprimer l'objet à la pression atmosphérique [4].

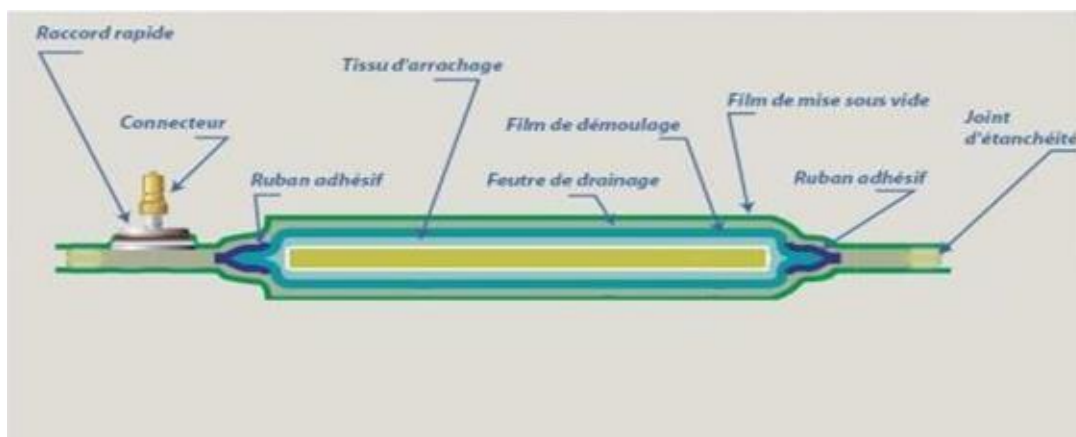


Figure (I.4) : Moulage sous vide ou « au sac ».

7.4. RTM (Resin Transfer Moulding)

Le renfort est placé à sec dans le moule ; ensuite, on procède à l'injection de résine en pression, parfois avec moule sous vide.

La polymérisation peut se faire à froid ou à chaud, avec sans catalyseur. Cette technologie est la plus employée dans la production de grande série de pièces à faibles qualités structurales. Parfois, on fait l'injection de la résine non en pression mais sous vide.

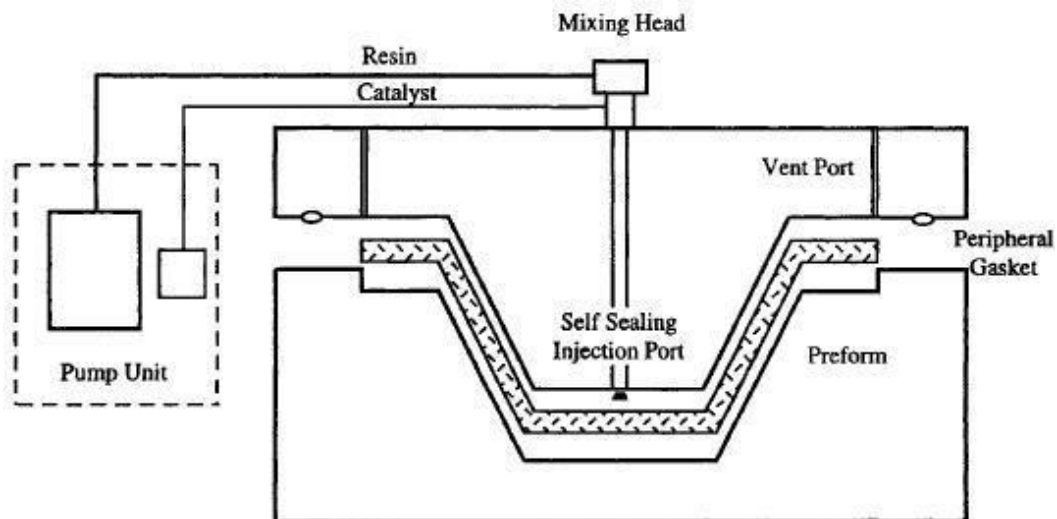


Figure (I.5) : RTM (Résine Transfer Moulding).

7.5. RFI (Resin Film Infusion)

La résine est pré-appliquée à un état semi-solide, sur une couche de support, et le moule est placé sous vide. Ensuite, la résine est faite fondre d'abord et polymériser ensuite par l'apport de chaleur.

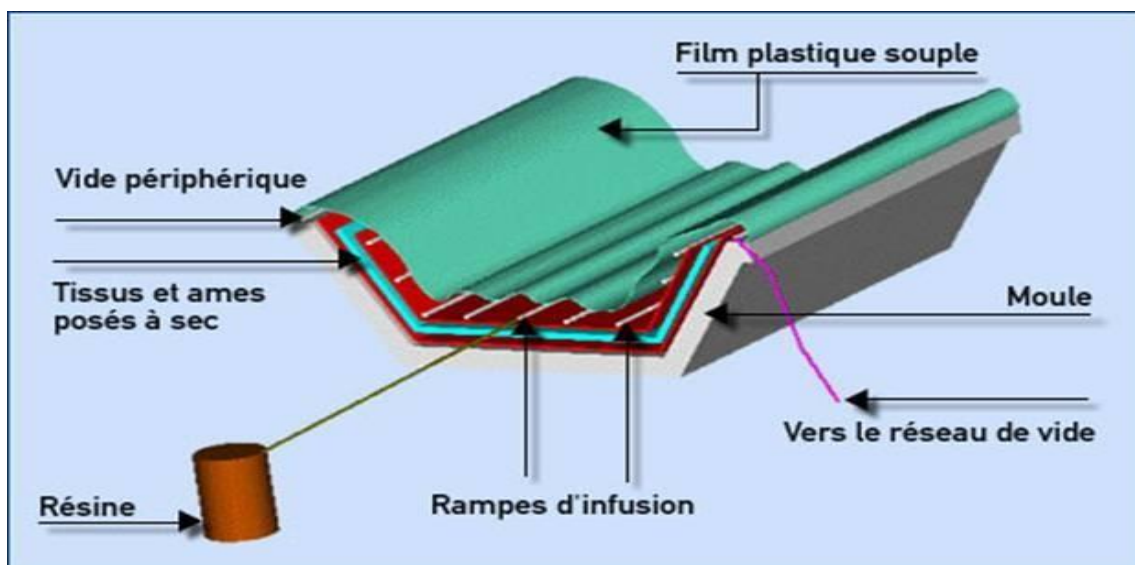


Figure (I.6) : L'infusion.

7.6. Moulage des pre-impregnés (prepregs)

Cette technologie est la plus utilisée pour fabriquer des stratifiés plans ou même, en autoclave, avec une certaine courbure. La stratifié est préparé à froid, par empilement de différentes couches de pre-impregné. La stratifié est ensuite placé en autoclave ou dans des presses chauffantes, pour polymériser sous pression et à chaud (environ 180°C). Cette

technologie, très chère, permet d'obtenir des composantes mécaniques prisées et de bonne qualité de production, en limitant au minimum les défauts de fabrication.

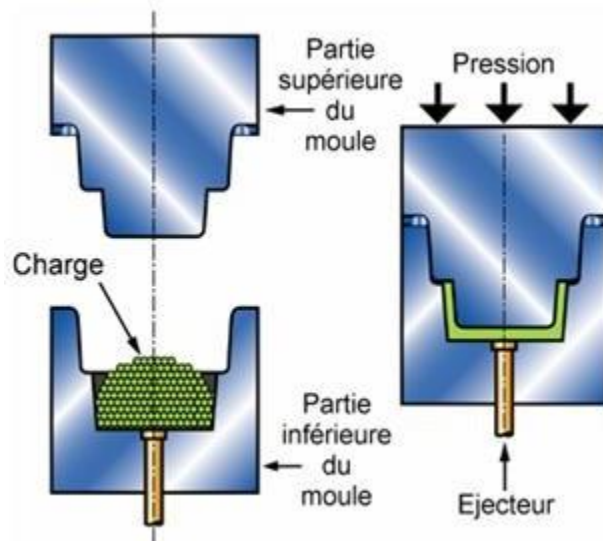


Figure (I.7) : Compression à chaud.

7.7. Moulage de pultrusion

Elle est employée industriellement pour la production de grande série et en continu de profilés (les mêmes des séries en acier). La polymérisation se fait à chaud et rapidement.

7.8. moulage FW (Filament Winding)

C'est une technologie industrielle pour la fabrication de pièces à symétrie cylindrique ou quand même avec une section convexe. La fibre est pre-impregnée de résine et ensuite enroulée de façon régulière et programmée sur un mandrin de la forme voulue. La polymérisation se fait à froid ou à chaud, avec ajout de catalyseur ou de lumière ou de rayons UV. C'est une technologie très employée pour la fabrication de réservoirs en pression, mais aussi de grandes pièces, comme le fuselage de fusées ou d'avions.

8. Architecture des matériaux composites

Les structures des matériaux composites sont classées dans trois types [1] :

- 1- Les monocouches.
- 2- Les stratifiés.
- 3- Les sandwiches.

8.1. Les monocouches

Les monocouches représentent l'élément de base de la structure composite. Les différents types de monocouches sont caractérisés par la forme du renfort : à fibres longues (unidirectionnelles ou réparties aléatoirement), à fibres tissées, à fibres courtes.

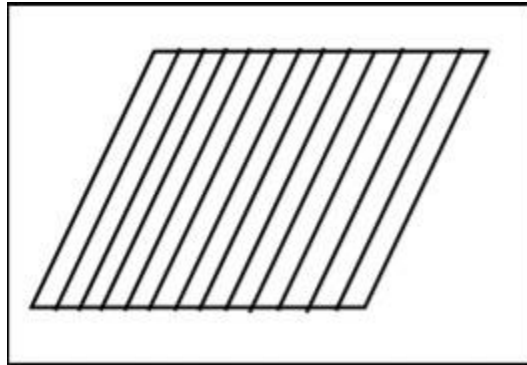


Figure (I.8): Couche de composite.

8.2. Les stratifiés

Ils sont obtenus par empilement de couches, généralement à renfort unidirectionnel ou tissu, disposées selon différentes orientations. Les stratifiés sont utilisés, comme matériaux structuraux, à chaque fois qu'on a, d'un côté, la nécessité d'excellentes performances mécaniques en termes de résistance, rigidité, comportement à la fissuration, et de l'autre, l'exigence de limiter le poids.

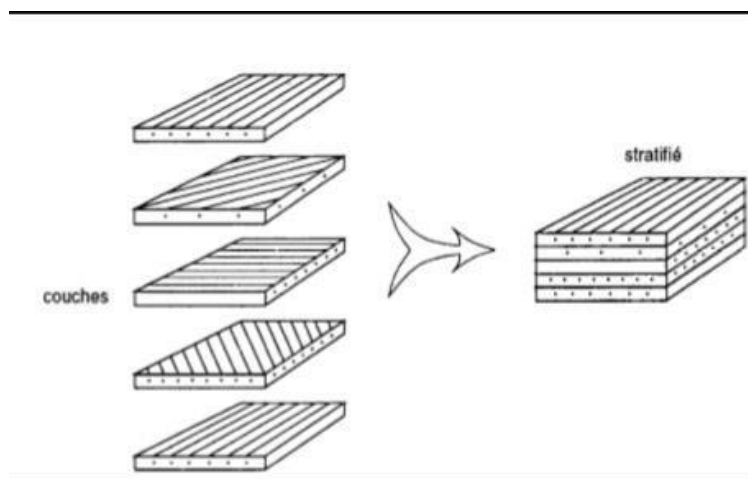


Figure (I.9): Constitution d'un stratifié.

8.3. Les Sandwiches

Matériaux composés de deux semelles (ou peaux) de grande rigidité et de faible épaisseur enveloppant une âme (ou cœur) de forte épaisseur et faible résistance. L'ensemble forme une structure d'une grande légèreté. Le matériau sandwich possède une grande rigidité en flexion et c'est un excellent isolant thermique.

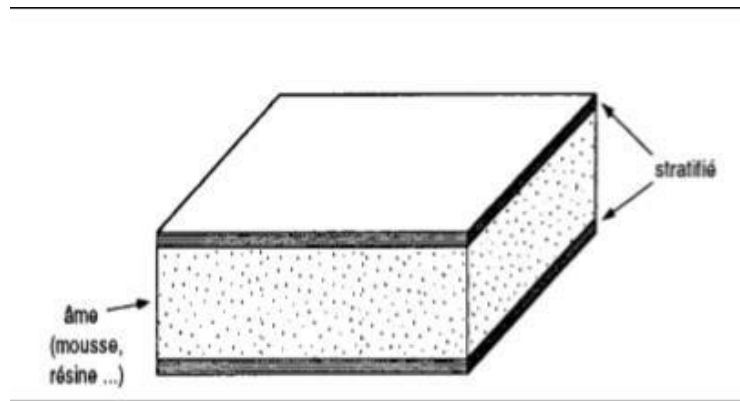


Figure (I.10) : Matériaux sandwichs à âmes pleines.

9. Effets d'humidité et de la température sur les matériaux composites

Les conditions d'environnement sont des facteurs néfastes sur les matériaux composites, parmi les variations introduites on peut citer la déformation de la matrice. Si on explique beaucoup plus l'humidité engendre le gonflement quand la matrice absorbe la vapeur, tandis que la température provoque un flambement sur les matériaux composites.

Chapitre II

MODELISATION MECANIQUE ET HYGROTHERMOMECHANIQUE DES MATERIAUX COMPOSITES

1. Introduction

Les structures composites présentent des propriétés mécaniques différentes des métaux, il est donc nécessaire de bien comprendre la mécanique des matériaux à travers des recherches expérimentales et numériques de courte importance. Afin de comprendre les problèmes de ces structures composites, il est nécessaire de choisir correctement une théorie qui décrit correctement le comportement mécanique de la structure. Plusieurs théories des plaques ont été développées, La théorie des plaques minces (également appelée théorie classique ou théorie de KirchhoffLove), La théorie des plaques semi-épaisses (théorie des déformations du premier ordre appelée aussi théorie de Mindlin-Reissner). Ensuite, des théories d'ordre supérieur (J-N Reddy) sont venues améliorer les hypothèses des théories classiques et du premier ordre lorsque l'épaisseur de la plaque devient importante.

2. Théories de déformation des plaques

Les théories classiques permettent une bonne étude des champs des contraintes et des déformations des matériaux composites [5].

2.1. Théorie classique des plaques minces (CLPT)

Les hypothèses cinématiques adoptées pour les plaques minces sont les suivantes [6] :

- La plaque est d'épaisseur petite devant les autres dimensions (rapport d'élanement h/a ou $h/b < 0.05$). Elle possède un plan moyen, également appelé plan neutre.
- Les sections droites, initialement normales au plan neutre, restent planes et normales à celui-ci après déformation. La déformation en cisaillement transverse est donc négligée.
- Les termes non linéaires du déplacement sont négligés. L'inertie de rotation est aussi négligée.
- La contrainte normale dans la direction transversale est petite, donc négligeable comparativement aux contraintes appartenant au plan de la plaque.

Cette théorie ignore la flexibilité du cisaillement transversal, ce qui conduit à une surestimation de la rigidité en flexion et donc à une surestimation des fréquences de vibration et à minimiser les déplacements.

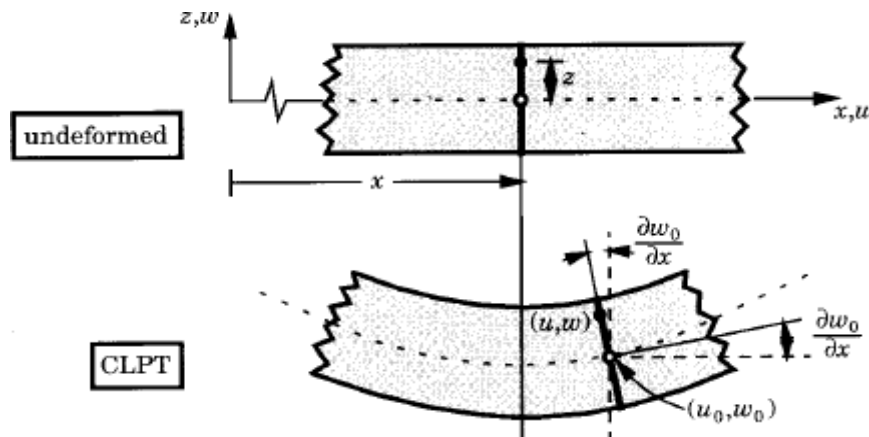


Figure (II.1): Illustration de la loi de la plaque mince (CLPT).

$$U(x, y, z) = u_0(x, y, t) - z \frac{\partial w_0}{\partial x}$$

$$V(x, y, z) = v_0(x, y, t) - z \frac{\partial w_0}{\partial x} \quad \text{II.1}$$

$$W(x, y, z) = w_0(x, y, t)$$

Avec (u_0, v_0, w_0) sont les composantes du champ de déplacement sur le plan moyen de la plaque ($z = 0$) [6].

2.2. Théorie de déformation en cisaillement du premier ordre (FSDT)

Lorsque l'épaisseur de la plaque ne permet plus de vérifier l'hypothèse de Kirchhoff Concernant leur mouvement de flexion, une théorie plus complète qui s'appelle la théorie des plaques du premier ordre (FSDT) basée sur la théorie des poutres Nécessite Timochenko (Rayleigh 1945), dans ce cas les contraintes et les déformations sont constantes à travers l'épaisseur de la plaque, ce qui oblige l'introduction d'un du facteur de correction. Les études sur cette théorie peuvent être référées dans [Reissner, 1945] [7].

La théorie du premier ordre est basé sur le champ de déplacement suivant

$$U(x, y, z, t) = u_0(x, y, t) - z \phi_x(x, y, t)$$

$$V(x, y, z, t) = v_0(x, y, t) - z \phi_y(x, y, t) \quad \text{II.2}$$

$$W(x, y, z) = W_0(x, y, t)$$

Avec (u_0, v_0, w_0) et (ϕ_x, ϕ_y) sont les déplacements en membrane et les rotations autour des axes x et y, respectivement.

Le champ de déplacement définis dans l'expression ci-dessus permet de reprendre la théorie classique des plaques décrite dans la dernière section par le remplacement.

$$\phi_x = -\frac{\partial W_0}{\partial x} \qquad \phi_y = -\frac{\partial W_0}{\partial y}$$

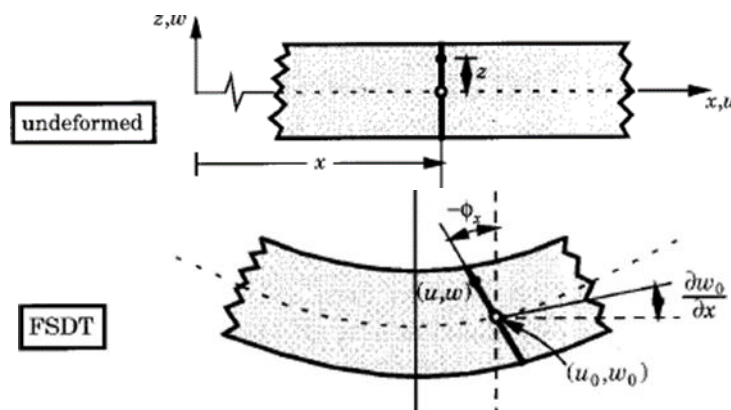


Figure (II.2) : Illustration de la loi du premier ordre(FSDT).

2.3. Théorie de déformation en cisaillement d'ordre supérieur (HSDT)

Les théories de déformation par cisaillement d'ordre supérieur différente de la théorie CPT et de la théorie FSDT qui acceptent la distribution linéaire de déplacement d'épaisseur, l'HSDT est basée sur la distribution non linéaire du champ d'épaisseur. Une amélioration a été observée dans l'étude des plaques épaisses la première consiste à tenir compte du cisaillement transverse, la deuxième consiste à modifier la théorie(FSDT), en introduisant des facteurs de correction aux modules de cisaillement transverse du stratifié. Cette approche, est une extension, aux cas des stratifiés, des théories développées par E. Reissner [7] et Reddy [5], Mindlin[8].

Les hypothèses qui sont à la base du développement de cette théorie sont [9] :

- Les déplacements sont petits comparés à l'épaisseur de la plaque.
- Les sections transversales, initialement planes et normales au plan moyen, ne restent pas nécessairement planes et normales à celui-ci après déformation.

- La déformation axiale dans la direction transversale n'est pas négligeable.
- La contrainte normale dans la direction transversale n'est en général pas négligeable.

Le champ de déplacement est :

$$\begin{aligned}
 U(x, y, z, t) &= u_0(x, y, t) - z\phi_x(x, y, t) + z^3\lambda_x(x, y, t) \\
 V(x, y, z, t) &= v_0(x, y, t) - z\phi_y(x, y, t) + z^3\lambda_y(x, y, t) \\
 W(x, y, z) &= w_0(x, y, t)
 \end{aligned}
 \tag{II.3}$$

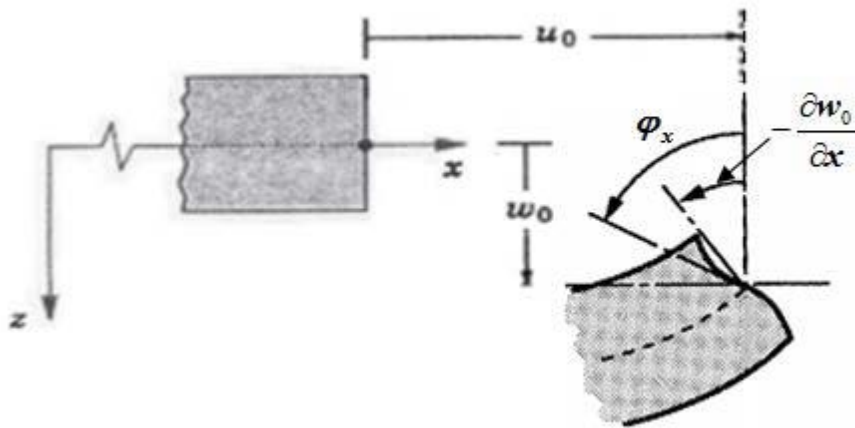


Figure (II.3) : Illustration de la plaque d'ordre élevé.

3. Définitions

3.1. Pli et stratifié

Le pli est le produit matrice + renfort, qui peut être unidirectionnel + matrice, tissu (2D) + matrice, matrice + matrice, et l'empilement de plusieurs plis se faisant face dans des directions différentes est défini comme un stratifié.

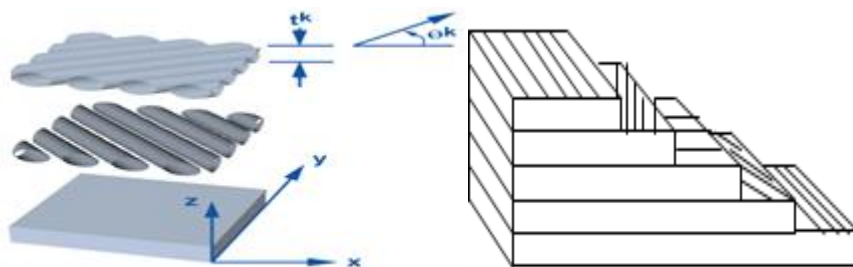


Figure (II.4): Pli et stratifié.

3.2. Repère principaux

On définit le repère principal, le repère (LT) lié à une couche. La direction L parallèle aux fibres est notée direction longitudinale, la direction normale aux fibres est appelée direction transversale [5].

3.3. Repère du stratifié

Les stratifiés étant élaborés par couches successives dont la direction des fibres ou trame (tissu) est décalée d'une couche à une autre, il est nécessaire de rapporter le comportement élastique de chaque couche à un système d'axes noté (xyz), appelé repère du stratifié. [5]

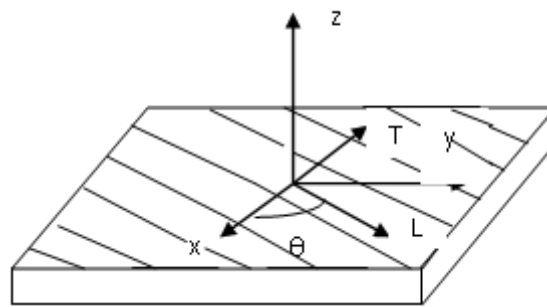


Figure (II.5): Le repère local et globale d'un stratifié.

4. Comportement mécanique et hygro thermomécanique

4.1. Microanalyse

L'analyse des matériaux composites à l'échelle microscopique fait intervenir les caractéristiques de base de la composition (fibre et matrice). Le problème de la détermination du module d'élasticité (en fonction du module et de la fraction volumique de la fibre et de la matrice) est assez complexe. C'est un rapport de recherche détaillé de plusieurs auteurs qui ont construit différents modèles, Shapery (1968), Jones (1975), Christenson (1979), Chamis (1975), Gibson (1994) [1].

➤ Fraction de fibre en volume :

$$V_f = \frac{\text{Volume de renfort}}{\text{Volume composite}} \%$$

➤ Fraction de matrice en volume :

$$V_m = \frac{\text{Volume de la matrice}}{\text{Volume composite}} \%$$

$$V_f + V_m = 1$$

➤ Module d'élasticité longitudinal E_L :

$$E_L = E_f V_f + E_m V_m$$

➤ Module d'élasticité transversal E_T :

$$E_T = E_m \left(\frac{1}{(1-V_f) + \left(\frac{E_m}{E_f}\right)V_f} \right)$$

➤ Module de cisaillement G_{LT} :

$$G_{LT} = G_m \left(\frac{1}{(1-V_f) + \left(\frac{G_m}{G_f}\right)V_f} \right)$$

➤ Coefficients de Poisson ν_{LT} :

$$\nu_{LT} = \nu_f V_f + \nu_m V_m$$

➤ Coefficient d'expansion thermique longitudinal α_L :

$$\alpha_L = \frac{V_f \alpha_f E_f + (1-V_f) \alpha_m E_m}{V_f E_f + (1-V_f) E_m}$$

➤ Coefficient de dilatation thermique transversal α_T :

$$\alpha_T = V_f (\alpha_f + \nu_f \alpha_f) + V_m \alpha_m (1 + \nu_m) - (V_f \nu_f + V_m \nu_m) \alpha_L$$

➤ Coefficient d'expansion hygroscopique longitudinale β_L :

$$\beta_L = \frac{V_f \beta_f E_f + (1-V_f) \beta_m E_m}{V_f E_f + (1-V_f) E_m}$$

➤ Coefficient d'expansion hygroscopique transversal β_T :

$$\beta_T = V_f (\beta_f + \nu_f \beta_f) + V_m \beta_m (1 + \nu_m) - (V_f \nu_f + V_m \nu_m) \beta_L$$

4.2. Loi de comportement

Les champs des déformations et des contraintes dans un milieu sont liés par des lois de comportement, caractérisant le comportement mécanique dans un milieu, ces lois permettent de rendre compte aux mieux des phénomènes observés, cette loi est la loi de Hook généralisée[1].

4.2.1. Matrice de rigidité

La loi de Hook généralisée introduit la matrice de rigidité C qui est généralement symétrique.

$$[\sigma_{ij}] = [C_{ij}] [\varepsilon_i] \quad i, j = \overline{1,6}$$

$$\begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \sigma_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} & \cdot & \cdot & C_{16} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ C_{16} & \cdot & \cdot & C_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \varepsilon_6 \end{bmatrix}$$

4.2.2. Matrice de flexibilité

$$[S_{ij}] = [C_{ij}]^{-1} \quad , \quad [\varepsilon_i] = [S_{ij}] [\sigma_i] \quad i, j = \overline{1,6}$$

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \cdot \\ \cdot \\ \varepsilon_{16} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S_{11} & \cdot & \cdot & S_{16} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ S_{61} & \cdot & \cdot & S_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_{11} \\ \cdot \\ \cdot \\ \sigma_{16} \end{bmatrix}$$

[S] c'est la matrice inverse de la matrice de rigidité appelé la matrice flexibilité ou souplesse.

- Relation d'élasticité dans le repère (LT):

$$\begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \sigma_4 \\ \sigma_5 \\ \sigma_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{12} & 0 & 0 & 0 \\ C_{12} & C_{22} & C_{23} & 0 & 0 & 0 \\ C_{12} & C_{23} & C_{22} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{C_{22} - C_{23}}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C_{66} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & C_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \varepsilon_4 \\ \varepsilon_5 \\ \varepsilon_6 \end{bmatrix}$$

Où :

II.4

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \varepsilon_4 \\ \varepsilon_5 \\ \varepsilon_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} & S_{12} & 0 & 0 & 0 \\ S_{12} & S_{22} & S_{23} & 0 & 0 & 0 \\ S_{12} & S_{23} & S_{22} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2(S_{22} - S_{23}) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & S_{66} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & S_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \sigma_4 \\ \sigma_5 \\ \sigma_6 \end{bmatrix}$$

- Constantes de rigidité dans le repère (LT) :

$$\begin{aligned} C_{11} &= E_L + 4\nu_{LT}^2 K_L & C_{12} &= 2K_L \nu_{LT} & C_{22} &= G_{TT'} + K_L \\ C_{23} &= -G_{TT'} + K_L & C_{66} &= G_{LT} & \text{avec } K_L &= \frac{1}{2(S_{22} + S_{23} - 2\frac{S_{12}^2}{S_{11}})} \end{aligned}$$

- Constantes de souplesse :

$$\begin{aligned} S_{11} &= \frac{1}{E_L} & S_{12} &= -\frac{\nu_{LT}}{E_L} & S_{22} &= \frac{1}{E_T} \\ S_{23} &= -\frac{\nu_{TT'}}{E_T} & S_{66} &= \frac{1}{G_{LT}} \end{aligned}$$

- Relation d'élasticité dans le repère (XY) :

$$\begin{bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{zz} \\ \sigma_{yz} \\ \sigma_{xz} \\ \sigma_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C'_{11} & C'_{12} & C'_{13} & 0 & 0 & C'_{16} \\ C'_{12} & C'_{22} & C'_{23} & 0 & 0 & C'_{26} \\ C'_{13} & C'_{23} & C'_{33} & 0 & 0 & C'_{36} \\ 0 & 0 & 0 & C'_{44} & C'_{45} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C'_{45} & C'_{55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & C'_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \varepsilon_{zz} \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{xz} \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix}$$

Où :

II.5

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \varepsilon_{zz} \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{xz} \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S'_{11} & S'_{12} & S'_{13} & 0 & 0 & S'_{16} \\ S'_{12} & S'_{22} & S'_{23} & 0 & 0 & S'_{26} \\ S'_{13} & S'_{23} & S'_{33} & 0 & 0 & S'_{36} \\ 0 & 0 & 0 & S'_{44} & S'_{45} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & S'_{45} & S'_{55} & 0 \\ S'_{16} & S'_{26} & S'_{36} & 0 & 0 & S'_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{zz} \\ \sigma_{yz} \\ \sigma_{xz} \\ \sigma_{xy} \end{bmatrix}$$

- Constantes de rigidité dans le repère (XY) :

$$\begin{aligned}
 C'_{11} &= C_{11} c^4 + C_{22} s^4 + 2(C_{12} + 2C_{66}) s^2 c^2 \\
 C'_{12} &= (C_{11} + C_{22} - 4C_{66}) s^2 c^2 + C_{12} (s^4 + c^4) \\
 C'_{13} &= C_{12} c^2 + C_{23} s^2 \\
 C'_{14} &= 0 \quad C'_{15} = 0 \\
 C'_{16} &= (C_{11} - C_{12} - 2C_{66}) s c^3 + (C_{12} - C_{22} + 2C_{66}) s^3 c \\
 C'_{22} &= C_{11} s^4 + 2(C_{12} + 2C_{66}) s^2 c^2 + C_{22} c^4 \\
 C'_{23} &= C_{12} s^2 + C_{23} c^2 \quad C'_{24} = 0 \quad C'_{25} = 0 \\
 C'_{26} &= (C_{11} - C_{12} - 2C_{66}) s^3 c + (C_{12} - C_{22} + 2C_{66}) s c^3 \\
 C'_{33} &= C_{22} \quad C'_{34} = 0 \quad C'_{35} = 0 \\
 C'_{36} &= (C_{12} - C_{23}) s c \\
 C'_{44} &= \frac{C_{22} - C_{23}}{2} c^2 + C_{66} s^2 \\
 C'_{45} &= (C_{66} - \frac{C_{22} - C_{23}}{2}) s c \quad C'_{46} = 0 \\
 C'_{55} &= \frac{C_{22} - C_{23}}{2} s^2 + C_{66} c^2 \quad C'_{56} = 0 \\
 C'_{66} &= [C_{11} + C_{22} - 2(C_{12} + C_{66})] s^2 c^2 + C_{66} (s^4 + c^4)
 \end{aligned}$$

Avec :

$$\begin{aligned}
 c &= \cos\theta \\
 s &= \sin\theta
 \end{aligned}$$

Constantes de souplesse dans le repère (XY) :

$$\begin{aligned}
 S'_{11} &= S_{11} c^4 + S_{22} s^4 + (2S_{12} + S_{66}) s^2 c^2 \\
 S'_{12} &= (S_{11} + S_{22} - S_{66}) s^2 c^2 + S_{12} (s^4 + c^4) \\
 S'_{13} &= S_{12} c^2 + S_{23} s^2 \\
 S'_{14} &= 0 \quad S'_{15} = 0 \\
 S'_{16} &= [2(S_{11} - S_{12}) - S_{66}] s c^3 + [2(S_{12} - S_{22}) + S_{66}] s^3 c \\
 S'_{22} &= S_{11} s^4 + (2S_{12} + S_{66}) s^2 c^2 + S_{22} c^4 \\
 S'_{23} &= S_{12} s^2 + S_{23} c^2 \quad S'_{24} = 0 \quad S'_{25} = 0 \\
 S'_{26} &= [2(S_{11} - S_{12}) - S_{66}] s^3 c + [2(S_{12} - S_{22}) + S_{66}] s c^3 \\
 S'_{33} &= S_{33} \quad S'_{34} = 0 \quad S'_{35} = 0 \\
 S'_{36} &= 2(S_{12} - S_{23}) s c \\
 S'_{44} &= 2(S_{22} - S_{23}) c^2 + S_{66} s^2 \\
 S'_{45} &= [S_{66} - 2(S_{22} - S_{23})] s c \quad S'_{46} = 0 \\
 S'_{55} &= 2(S_{22} - S_{23}) s^2 + S_{66} c^2 \quad S'_{56} = 0 \\
 S'_{66} &= 2[2(S_{11} + S_{22} - 2S_{12}) - S_{66}] s^2 c^2 + S_{66} (s^4 + c^4)
 \end{aligned}$$

L'analyse de la constant de rigidité à l'échelle microscopies montre que les avantages de performance de base de la fibre et de la matrice sont évidents. Le volume de la fibre est un paramètre décisif concernant le comportement élastique. Avant toute tentative de modélisation, le calcul de la matrice de rigidité est un outil indispensable.

5. La théorie d'ordre élevée de reddy (HSDT)

5.1. Contraintes Planes Généralisées

$$[\sigma(M)] = \begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{xy} & \sigma_{yy} & \tau_{yz} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & 0 \end{bmatrix} \quad \text{II.6}$$

La direction z est la direction principale et la déformation dans cet axe est nulle.

5.2. Matrice de rigidité réduite dans les axes principaux

$$[Q]_j = \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} & 0 & 0 & 0 \\ Q_{12} & Q_{22} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & Q_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & Q_{55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & Q_{66} \end{bmatrix} \quad \text{II.7}$$

Les constantes de rigidités réduites sont :

$$Q_{11} = \frac{E_L}{1 - \frac{E_T}{E_L} \nu_{LT}^2}$$

$$Q_{22} = \frac{E_T}{1 - \frac{E_T}{E_L} \nu_{LT}^2} = \frac{E_T}{E_L} Q_{11}$$

$$Q_{12} = \frac{\nu_{LT} E_T}{1 - \nu_{LT} \nu_{TL}} = \nu_{LT} Q_{22}$$

$$Q_{66} = G_{LT}$$

$$Q_{55} = G_{LT''}$$

$$Q_{44} = G_{TT''}$$

5.3. Relation d'élasticité de chaque pli du stratifié

$$[Q'_j] = \begin{bmatrix} Q'_{11} & Q'_{12} & Q'_{16} & 0 & 0 \\ Q'_{12} & Q'_{22} & Q'_{26} & 0 & 0 \\ Q'_{16} & Q'_{26} & Q'_{36} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & Q'_{44} & Q'_{45} \\ 0 & 0 & 0 & Q'_{45} & Q'_{55} \end{bmatrix} \quad \text{II.8}$$

Ces constantes de rigidités de chaque pli de stratifié sont :

$$\begin{aligned} Q'_{11} &= Q_{11} c^4 + Q_{22} s^4 + 2(Q_{12} + 2Q_{66}) s^2 c^2 \\ Q'_{12} &= (Q_{11} + Q_{22} - 4Q_{66}) s^2 c^2 + Q_{12} (s^4 + c^4) \\ Q'_{16} &= (Q_{11} - Q_{12} - 2Q_{66}) s c^3 + (Q_{12} - Q_{22} + 2Q_{66}) s^3 c \\ Q'_{22} &= Q_{11} s^4 + 2(Q_{12} + 2Q_{66}) s^2 c^2 + Q_{22} c^4 \\ Q'_{26} &= (Q_{11} - Q_{12} - 2Q_{66}) s^3 c + (Q_{12} - Q_{22} + 2Q_{66}) s c^3 \\ Q'_{44} &= Q_{44} c^2 + Q_{55} s^2 \\ Q'_{45} &= (Q_{55} - Q_{44}) s c \\ Q'_{55} &= Q_{44} s^2 + Q_{55} c^2 \\ Q'_{66} &= [Q_{11} + Q_{22} - 2(Q_{12} + Q_{66})] s^2 c^2 + Q_{66} (s^4 + c^4) \end{aligned}$$

Avec:

$$\begin{aligned} c &= \cos\theta \\ s &= \sin\theta \end{aligned}$$

5.4. Une théorie des plaques de troisième ordre

5.4.1. Champs de déplacement

La théorie des plaques de troisième ordre développée par Reddy [5]

$$\begin{aligned} u &= u_0 + z \phi_x + z^2 \theta_x + z^3 \lambda_x \\ v &= v_0 + z \phi_y + z^2 \theta_y + z^3 \lambda_y \\ w &= w_0 \end{aligned} \quad \text{II.9}$$

Où : (ϕ_x, ϕ_y) , (θ_x, θ_y) et (λ_x, λ_y) sont des paramètres à déterminer

$$u_0 = u(x, y, 0) \quad v_0 = v(x, y, 0) \quad w_0 = w(x, y, 0) \quad \text{II.9.1}$$

La condition limite libre pour la face supérieure et inférieure du stratifié:

$$\sigma_{xz}(x, y, \mp \frac{h}{2}) = 0 \quad , \quad \sigma_{yz}(x, y, \mp \frac{h}{2}) = 0$$

$$\begin{aligned}\sigma_{xz}(x, y, \mp \frac{h}{2}) &= Q_{55} \gamma_{xz}(x, y, \mp \frac{h}{2}) + Q_{45} \gamma_{yz}(x, y, \mp \frac{h}{2}) = 0 \\ \sigma_{yz}(x, y, \mp \frac{h}{2}) &= Q_{45} \gamma_{xz}(x, y, \mp \frac{h}{2}) + Q_{44} \gamma_{yz}(x, y, \mp \frac{h}{2}) = 0 \\ \gamma_{xz}(x, y, \mp \frac{h}{2}) &= \phi_x + \frac{\partial w_0}{\partial x} + (2z\theta_x + 3z^2\lambda_x)_{z=\mp \frac{h}{2}} = 0 \\ \gamma_{yz}(x, y, \mp \frac{h}{2}) &= \phi_y + \frac{\partial w_0}{\partial x} + (2z\theta_y + 3z^2\lambda_y)_{z=\mp \frac{h}{2}} = 0 \\ \phi_x + \frac{\partial w_0}{\partial x} + (-h\theta_x + \frac{3h^2}{4}\lambda_x) &= 0 \\ \phi_x + \frac{\partial w_0}{\partial x} + (h\theta_x + \frac{3h^2}{4}\lambda_x) &= 0 \\ \phi_y + \frac{\partial w_0}{\partial y} + (-h\theta_y + \frac{3h^2}{4}\lambda_y) &= 0 \\ \phi_y + \frac{\partial w_0}{\partial y} + (h\theta_y + \frac{3h^2}{4}\lambda_y) &= 0\end{aligned}$$

II.9.2

$$\begin{aligned}\phi_y + \frac{\partial w_0}{\partial y} + (-h\theta_y + \frac{3h^2}{4}\lambda_y) &= 0 \\ \lambda_y = -\frac{4}{3h^2}(\phi_y + \frac{\partial w_0}{\partial y}) = 0 & \quad \lambda_x = -\frac{4}{3h^2}(\phi_x + \frac{\partial w_0}{\partial x}) = 0 \\ \theta_x = 0 & \quad \theta_y = 0\end{aligned}$$

Le champ de déplacement s'écrit :

$$\begin{aligned}u(x, y, z) &= u_0(x, y) + z\phi_x(x, y) - \frac{4}{3h^2}z^3(\phi_x + \frac{\partial w_0}{\partial x}) \\ v(x, y, z) &= v_0(x, y) + z\phi_y(x, y) - \frac{4}{3h^2}z^3(\phi_y + \frac{\partial w_0}{\partial y}) \\ w(x, y, z) &= w_0(x, y) \\ \phi_x &= \left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)_{z=0} \quad \phi_y = \left(\frac{\partial v}{\partial z}\right)_{z=0}\end{aligned}$$

II.9.3

5.4.2. Déformation et contrainte [5]

$$\begin{Bmatrix} \mathcal{E}_{xx} \\ \mathcal{E}_{yy} \\ \mathcal{E}_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ \mathcal{E}_{xx} \\ \mathcal{E}_{yy} \\ 0 \end{Bmatrix} + z \begin{Bmatrix} \mathcal{E}_{xx} \\ \mathcal{E}_{yy} \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} + z^3 \begin{Bmatrix} \mathcal{E}_{xx} \\ \mathcal{E}_{yy} \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix}$$

II.10

$$\begin{Bmatrix} \gamma_{yz} \\ \gamma_{xz} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \gamma_{yz}^0 \\ \gamma_{xz}^0 \end{Bmatrix} + z^2 \begin{Bmatrix} \gamma_{yz}^2 \\ \gamma_{xz}^2 \end{Bmatrix}$$

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx}^0 \\ \varepsilon_{yy}^0 \\ \gamma_{xy}^0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial u_0}{\partial x} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w_0}{\partial x} \right)^2 \\ \frac{\partial v_0}{\partial y} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w_0}{\partial y} \right)^2 \\ \frac{\partial u_0}{\partial x} + \frac{\partial v_0}{\partial y} + \frac{\partial w_0}{\partial x} \frac{\partial w_0}{\partial y} \end{Bmatrix}, \quad \begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx}^1 \\ \varepsilon_{yy}^1 \\ \gamma_{xy}^1 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial \phi_x}{\partial x} \\ \frac{\partial \phi_y}{\partial y} \\ \frac{\partial \phi_x}{\partial y} + \frac{\partial \phi_y}{\partial x} \end{Bmatrix} \quad \text{II.10.1}$$

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx}^3 \\ \varepsilon_{yy}^3 \\ \gamma_{xy}^3 \end{Bmatrix} = -c_1 \begin{Bmatrix} \frac{\partial \phi_x}{\partial x} + \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} \\ \frac{\partial \phi_y}{\partial y} + \frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} \\ \frac{\partial \phi_x}{\partial y} + \frac{\partial \phi_y}{\partial x} + 2 \left(\frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial y} \right) \end{Bmatrix} \quad \text{II.10.2}$$

$$\begin{Bmatrix} \gamma_{yz}^0 \\ \gamma_{xz}^0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial w_0}{\partial y} + \phi_y \\ \frac{\partial w_0}{\partial x} + \phi_x \end{Bmatrix}, \quad \begin{Bmatrix} \gamma_{yz}^2 \\ \gamma_{xz}^2 \end{Bmatrix} = -c_2 \begin{Bmatrix} \frac{\partial w_0}{\partial y} + \phi_y \\ \frac{\partial w_0}{\partial x} + \phi_x \end{Bmatrix} \quad \text{II.10.3}$$

Avec :

$$c_1 = \frac{4}{3h^2}, \quad c_2 = 3c_1$$

5.4.3. Matrice de passage de déformation et contrainte

$$\begin{bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{yz} \\ \sigma_{xz} \\ \sigma_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos^2 \theta & \sin^2 \theta & 0 & 0 & -\sin 2\theta \\ \sin^2 \theta & \cos^2 \theta & 0 & 0 & \sin 2\theta \\ 0 & 0 & \cos \theta & \sin \theta & 0 \\ 0 & 0 & -\sin \theta & \cos \theta & 0 \\ \sin 2\theta & -\sin 2\theta & 0 & 0 & \cos^2 \theta - \sin^2 \theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_L \\ \sigma_T \\ \sigma_{TT'} \\ \sigma_{LT'} \\ \sigma_{LT} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \varepsilon_{yz} \\ \varepsilon_{xz} \\ \varepsilon_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos^2 \theta & \sin^2 \theta & 0 & 0 & -\sin 2\theta \\ \sin^2 \theta & \cos^2 \theta & 0 & 0 & \sin 2\theta \\ 0 & 0 & \cos \theta & \sin \theta & 0 \\ 0 & 0 & -\sin \theta & \cos \theta & 0 \\ \sin 2\theta & -\sin 2\theta & 0 & 0 & \cos^2 \theta - \sin^2 \theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_L \\ \varepsilon_T \\ \varepsilon_{TT'} \\ \varepsilon_{LT'} \\ \varepsilon_{LT} \end{bmatrix} \quad \text{II.11}$$

5.4.4. Equation des mouvements

Les équations des mouvements sont tirées du principe de déplacement virtuel, pour le cas de la théorie d'ordre élevé les équations du mouvement impliquent l'énergie de déplacement virtuel et le travail virtuel résultant des forces appliquées, et l'énergie cinétique virtuelle. [1] :

$$\begin{aligned} \frac{\partial N_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial N_{xy}}{\partial y} = 0 \quad , \quad \frac{\partial N_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial N_{xy}}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial \overline{Q}_x}{\partial x} + \frac{\partial \overline{Q}_y}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial x} (N_{xx} \frac{\partial w_0}{\partial x} + N_{yy} \frac{\partial w_0}{\partial y}) + \frac{\partial}{\partial y} (N_{xy} \frac{\partial w_0}{\partial x} + N_{yy} \frac{\partial w_0}{\partial y}) + cl(\frac{\partial^2 P_{xx}}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 P_{xy}}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 P_{yy}}{\partial y^2}) + q = 0 \\ \frac{\partial \overline{M}_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \overline{M}_{xy}}{\partial y} - \overline{Q}_x = 0 \\ \frac{\partial \overline{M}_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \overline{M}_{yy}}{\partial y} - \overline{Q}_y = 0 \end{aligned} \quad \text{II.12}$$

Avec :

$$\overline{M}_{ij} = M_{ij-c1p_{ij}} (i, j = 1, 2, 6), \overline{Q}_i = Q_{ij} - c2 R_{ij}, (i, j = 4, 5)$$

Les résultantes des contraintes sont reliées à la déformation avec cette équation ci-dessus :

$$\begin{Bmatrix} [N] \\ [M] \\ [P] \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} [A] & [B] & [E] \\ [B] & [D] & [F] \\ E & [F] & [H] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathcal{E}^0 \\ \mathcal{E}^1 \\ \mathcal{E}^3 \end{Bmatrix} \quad \text{II.13}$$

$$\begin{Bmatrix} \{Q\} \\ \{R\} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} [A] & [D] \\ [D] & [F] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathcal{V}^0 \\ \mathcal{V}^2 \end{Bmatrix} \quad \text{II.14}$$

$$(A_{ij}, B_{ij}, D_{ij}, E_{ij}, F_{ij}, H_{ij}) = \sum_{K=1}^N \int_{z_k}^{z_{k+1}} Q_{ij}^K (1, z^1, z^2, z^3, z^4, z^6) dz, i, j = 1, 2, 3$$

$$(A_{ij}, D_{ij}, F_{ij}) = \sum_{K=1}^N \int_{z_k}^{z_{k+1}} Q_{ij}^K (1, z^2, z^4,) dz, i, j = 4, 5$$

$$A_{ij} = \sum_{i=1}^{(\frac{h}{dz})+1} (z_i - z_{i-1}) \cdot Q_{ij}^i$$

$$B_{ij} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{(\frac{h}{dz})+1} (z_i^2 - z_{i-1}^2) \cdot Q_{ij}^i$$

$$D_{ij} = \frac{1}{3} \sum_{i=1}^{(\frac{h}{dz})+1} (z_i^3 - z_{i-1}^3) \cdot Q_{ij}^i$$

$$E_{ij} = \frac{1}{4} \sum_{i=1}^{\left(\frac{h}{dz}\right)+1} (z_i^4 - z_{i-1}^4) \cdot Q_{ij}^i \quad \text{II.15}$$

$$F_{ij} = \frac{1}{5} \sum_{i=1}^{\left(\frac{h}{dz}\right)+1} (z_i^5 - z_{i-1}^5) \cdot Q_{ij}^i$$

$$H_{ij} = \frac{1}{7} \sum_{i=1}^{\left(\frac{h}{dz}\right)+1} (z_i^7 - z_{i-1}^7) \cdot Q_{ij}^i$$

$$\{[N], [M], [P]\} = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_{xy} \end{bmatrix} (1, z^2, z^3) dz \quad \text{II.15.1}$$

$$\{[Q], [R]\} = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \begin{bmatrix} \sigma_{xz} \\ \sigma_{yz} \end{bmatrix} (1, z^2) dz \quad \text{II.15.2}$$

$$N = \begin{bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \end{bmatrix}, M = \begin{bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{bmatrix}, P = \begin{bmatrix} P_x \\ P_y \\ P_{xy} \end{bmatrix}, Q = \begin{bmatrix} Q_{xy} \\ Q_{xz} \end{bmatrix}, R = \begin{bmatrix} R_{xy} \\ R_{xz} \end{bmatrix} \quad \text{II.15.3}$$

5.4.5. Solution de Navier

Dans ce paragraphe on va développer les solutions de Navier pour un stratifié croisé simplement supporté, pour le cas déjà citer les constantes de rigidité suivantes sont égales à zéro [5].

$$A_{16} = A_{26} = A_{45} = B_{16} = B_{26} = D_{16} = D_{26} = 0$$

$$E_{16} = E_{26} = F_{16} = F_{26} = H_{16} = H_{26} = D_{45} = F_{45} = 0$$

II.16

Les conditions aux limites sont :

$$u_0(x, 0) = \phi_x(x, 0) = u_0(x, b) = \phi_x(x, b) = 0$$

$$v_0(0, y) = \phi_y(0, y) = v_0(a, y) = \phi_y(a, y) = 0$$

$$w_0(x, 0) = w_0(x, b) = w_0(0, y) = w_0(a, y) = 0$$

II.16.1

$$N_{xx}(0, y) = N_{xx}(a, y) = N_{yy}(x, 0) = N_{yy}(x, b) = 0$$

$$\overline{M}_{xx}(0, y) = \overline{M}_{xx}(a, y) = \overline{M}_{yy}(x, 0) = \overline{M}_{yy}(x, b) = 0$$

Les inconnus sont exprimés en termes de doubles séries :

$$u_0(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} U_{mn} \cos(\alpha x) \sin(\beta y)$$

$$v_0(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} V_{mn} \sin(\alpha x) \cos(\beta y)$$

$$w_0(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} W_{mn} \sin(\alpha x) \sin(\beta y)$$

II.17.1

$$\phi_x(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} X_{mn} \cos(\alpha x) \sin(\beta y)$$

$$\phi_y(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} Y_{mn} \cos(\alpha x) \sin(\beta y)$$

Avec :

$$\alpha = \frac{n\pi}{a}, \quad \beta = \frac{m\pi}{b}$$

$$\Delta = \begin{Bmatrix} U_{mn} \\ V_{mn} \\ W_{mn} \\ X_{mn} \\ Y_{mn} \end{Bmatrix} \quad \text{II.17.2}$$

Le chargement mécanique transversal est aussi développé en double séries comme suite :

$$q(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} Q_{mn} \sin(\alpha x) \sin(\beta y)$$

$$Q_{mn}(x, y) = \frac{4}{ab} \int_0^a \int_0^b q(x, y) \sin(\alpha x) \sin(\beta y) dx dy \quad \text{II.18}$$

Les coefficients du vecteur Δ sont obtenus à travers la résolution du système suivant (cas d'un chargement mécanique) :

$$\begin{Bmatrix} S_{11} & S_{12} & S_{13} & S_{14} & S_{15} \\ S_{12} & S_{22} & S_{23} & S_{24} & S_{25} \\ S_{13} & S_{23} & S_{33} & S_{34} & S_{35} \\ S_{14} & S_{24} & S_{34} & S_{44} & S_{45} \\ S_{15} & S_{25} & S_{35} & S_{45} & S_{55} \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} U_{mn} \\ V_{mn} \\ W_{mn} \\ X_{mn} \\ Y_{mn} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ Q_{mn} \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad \text{II.19}$$

Avec :

$$s_{11} = A_{11} \alpha^2 + A_{66} \beta^2$$

$$s_{12} = (A_{12} + A_{66}) \alpha \beta$$

$$s_{13} = -c_1 [E_{11} \alpha^2 + (E_{12} + 2E_{66}) \beta^2] \alpha$$

$$s_{14} = \hat{B}_{11} \alpha^2 + \hat{B}_{66} \beta^2$$

$$s_{15} = (\hat{B}_{12} + \hat{B}_{66}) \alpha \beta$$

$$s_{22} = A_{66} \alpha^2 + A_{22} \beta^2$$

$$s_{23} = -c_1 [E_{22} \beta^2 + (E_{12} + 2E_{66}) \alpha^2] \beta$$

$$s_{24} = s_{15}$$

$$s_{25} = \hat{B}_{66} \alpha^2 + \hat{B}_{22} \beta^2$$

$$s_{33} = \bar{A}_{55} \alpha^2 + \bar{A}_{44} \beta^2 + c_1^2 [H_{11} \alpha^4 + 2(H_{12} + 2H_{66}) \alpha^2 \beta^2 + H_{22} \beta^4]$$

$$s_{34} = \bar{A}_{55} \alpha - c_1 [\hat{F}_{11} \alpha^3 + (\hat{F}_{12} + 2 \hat{F}_{66}) \alpha \beta^2]$$

$$s_{35} = \bar{A}_{44} \beta - c_1 [\hat{F}_{11} \alpha^3 + (\hat{F}_{12} + 2 \hat{F}_{66}) \alpha^2 \beta]$$

$$s_{44} = \bar{A}_{55} + \bar{D}_{11} \alpha^2 + D_{66} \beta^2$$

$$s_{45} = (\bar{D}_{12} + \bar{D}_{66}) \alpha \beta$$

$$s_{55} = \bar{A}_{44} + \bar{D}_{66} \alpha^2 + D_{22} \beta^2$$

$$\hat{A}_{ij} = A_{ij} - c_1 D_{ij}, \hat{B}_{ij} = B_{ij} - c_1 E_{ij}, \hat{D}_{ij} = D_{ij} - c_1 F_{ij} \quad (i, j = 1, 2, 6)$$

$$\hat{F}_{ij} = F_{ij} - c_1 H_{ij}, \bar{A}_{ij} = \hat{A}_{ij} - c_1 \hat{D}_{ij} = A_{ij} - 2 c_1 D_{ij} + c_1^2 F_{ij}, (i, j = 1, 2, 6)$$

$$\bar{D}_{ij} = \hat{D}_{ij} - c_1 \hat{F}_{ij} = D_{ij} - 2 c_1 F_{ij} + c_1^2 H_{ij}, (i, j = 1, 2, 6)$$

$$\bar{A}_{ij} = \hat{A}_{ij} - c_2 \hat{D}_{ij} = A_{ij} - 2 c_2 D_{ij} + c_2^2 F_{ij}, (i, j = 1, 2, 6)$$

5.4.6. Calcul des contraintes

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{xy} \end{Bmatrix}^{(k)} = \begin{bmatrix} Q'_{11} & Q'_{12} & 0 \\ Q'_{12} & Q'_{22} & 0 \\ 0 & 0 & Q'_{66} \end{bmatrix}^{(k)} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} \quad \text{II.20}$$

D'où :

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx}^0 \\ \varepsilon_{yy}^0 \\ \gamma_{xy}^0 \end{Bmatrix} + z \begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx}^1 \\ \varepsilon_{yy}^1 \\ \gamma_{xy}^1 \end{Bmatrix} + z^3 \begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx}^3 \\ \varepsilon_{yy}^3 \\ \gamma_{xy}^3 \end{Bmatrix} = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \begin{Bmatrix} R_{mn}^{xx} + z S_{mn}^{xx} + c_1 z^3 T_{mn}^{xx} \\ R_{mn}^{yy} + z S_{mn}^{yy} + c_1 z^3 T_{mn}^{yy} \\ R_{mn}^{xy} + z S_{mn}^{xy} + c_1 z^3 T_{mn}^{xy} \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} s(\alpha x) s(\beta y) \\ s(\alpha x) c(\beta y) \\ c(\alpha x) c(\beta y) \end{Bmatrix}$$

$$\begin{Bmatrix} R_{mn}^{xx} \\ R_{mn}^{yy} \\ R_{mn}^{xy} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -\alpha U_{mn} \\ -\beta V_{mn} \\ \beta U_{mn} + \alpha V_{mn} \end{Bmatrix}, \begin{Bmatrix} S_{mn}^{xx} \\ S_{mn}^{yy} \\ S_{mn}^{xy} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -\alpha X_{mn} \\ -\beta Y_{mn} \\ \beta X_{mn} + \alpha Y_{mn} \end{Bmatrix}$$

$$\begin{Bmatrix} T_{mn}^{xx} \\ T_{mn}^{yy} \\ T_{mn}^{xy} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \alpha X_{mn} + \alpha^2 W_{mn} \\ \beta Y_{mn} + \beta^2 W_{mn} \\ -(\beta X_{mn} + \alpha Y_{mn} + 2 \alpha \beta W_{mn}) \end{Bmatrix} \quad \text{II.21}$$

Les contraintes de cisaillement transverses des équations constitutives sont données par [8] :

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{yz} \\ \sigma_{xz} \end{Bmatrix}^k = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \begin{bmatrix} Q'_{44} & 0 \\ 0 & Q'_{55} \end{bmatrix}^k \begin{Bmatrix} \gamma_{yz}^0 \\ \gamma_{xz}^0 \end{Bmatrix} + z \begin{Bmatrix} \gamma_{yz}^2 \\ \gamma_{xz}^2 \end{Bmatrix} = (1 - c_2 z^2) \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \begin{bmatrix} Q'_{44} & 0 \\ 0 & Q'_{55} \end{bmatrix}^k \begin{Bmatrix} Y_{mn} + \beta W_{mn} \\ X_{mn} + \alpha W_{mn} \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} s(\alpha x) c(\beta y) \\ c(\alpha x) s(\beta y) \end{Bmatrix} \quad \text{II.22}$$

Où : $c_2 = \frac{4}{h^2}$ ne signifie pas que les contraintes de cisaillement transverses sont quadratiques par couches dans l'épaisseur.

6. Modélisation du comportement hygrothermomecanique [10]

$$\begin{Bmatrix} S_{11} & S_{12} & S_{13} & S_{14} & S_{15} \\ S_{12} & S_{22} & S_{23} & S_{24} & S_{25} \\ S_{13} & S_{23} & S_{33} & S_{34} & S_{35} \\ S_{14} & S_{24} & S_{34} & S_{44} & S_{45} \\ S_{15} & S_{25} & S_{35} & S_{45} & S_{55} \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} U_{mn} \\ V_{mn} \\ W_{mn} \\ X_{mn} \\ Y_{mn} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -\alpha N_{mn}^{T1} - \beta N_{mn}^{C1} \\ -\alpha N_{mn}^{T2} - \beta N_{mn}^{C2} \\ Q_{mn} \\ -\alpha \bar{M}_{mn}^{T1} - \beta \bar{M}_{mn}^{C1} \\ -\alpha \bar{M}_{mn}^{T2} - \beta \bar{M}_{mn}^{C2} \end{Bmatrix} \quad \text{II.23}$$

$$N_{mn}^{Ti} = \sum_{K=1}^N \int_{z_x}^{z_{x+1}} [Q_i]^K \{\alpha\}^K \Delta T dz$$

$$N_{mn}^{Ci} = \sum_{K=1}^M \int_{z_x}^{z_{x+1}} [Q_i]^K \{\beta\}^K \Delta C dz$$

$$M_{mn}^{Ti} = \sum_{K=1}^N \int_{z_x}^{z_{x+1}} [Q_i]^K \{\alpha\}^K \Delta T z dz$$

$$M_{mn}^{Ci} = \sum_{K=1}^M \int_{z_x}^{z_{x+1}} [Q_i]^K \{\beta\}^K \Delta C z dz$$

$$P_{mn}^{Ti} = \sum_{K=1}^N \int_{z_x}^{z_{x+1}} [Q_i]^K \{\alpha\}^K \Delta T z^3 dz$$

$$P_{mn}^{Ci} = \sum_{K=1}^M \int_{z_x}^{z_{x+1}} [Q_i]^K \{\beta\}^K \Delta C z^3 dz$$

$$\bar{M}_{mn}^{Ti} = M_{mn}^{Ti} - \frac{4}{3h^2} P_{mn}^{Ti}$$

$$\bar{M}_{mn}^{Ci} = M_{mn}^{Ci} - \frac{4}{3h^2} P_{mn}^{Ci}$$

$$T_{mn}^i = \frac{4}{ab} \int_0^a \int_0^b T^i \sin(\alpha x) \sin(\beta y) dx dy$$

$$C_{mn}^i = \frac{4}{ab} \int_0^a \int_0^b C^i \sin(\alpha x) \sin(\beta y) dx dy$$

II.24

$$\Delta T = T - T_0$$

$$\Delta C = C - C_0$$

Chapitre III

Calcul numérique et résultats

1. Introduction

Dans ce chapitre on a étudié les comportements des stratifiés composites plaque épaisse à matrice polymère basés sur la théorie d'ordre élevée HSDT, en tenant compte la température et l'humidité.

On utilise le logiciel Matlab pour développer un code de calcul permet de déterminer les différentes propriétés mécaniques, thermiques et hygroscopiques des matériaux composites.

2. Description générale sur le programme Matlab

MATLAB (matrix laboratory) est un langage de programmation de quatrième génération émulé par un environnement de développement du même nom ; il est utilisé à des fins de calcul numérique. Développé par la société « The Math Works ». MATLAB permet de manipuler des matrices, d'afficher des courbes et des données, de mettre en œuvre des algorithmes, de créer des interfaces utilisateurs, et peut s'interfacer avec d'autres langages comme le C, C++, Java et Fortran.

On a utilisé ce programme pour être avoir réalisé le comportement Hygrothemomecanique des stratifiés composite croisées épaisses à matrice polymère en utilisant la théorie d'ordre élevée de Reddy.

3. Organigramme de la plaque épaisse

Ce sous-programme affiche l'état de contrainte du stratifié ou on a utilisé la théorie d'ordre élevée (HSDT), ci-dessous l'organigramme de ce dernier.

Les contraintes présentes dans les graphes seront calculées par la manière suivante :

$$\bar{\sigma}_{xx} = \sigma_{xx}(a/2, b/2, h/2) \left(\frac{h^2}{b^2 q_0} \right)$$

$$\bar{\sigma}_{yy} = \sigma_{yy}(a/2, b/2, h/4) \left(\frac{h^2}{b^2 q_0} \right)$$

$$\bar{\sigma}_{xy} = \sigma_{xy}(0,0, h/2) \left(\frac{h^2}{b^2 q_0} \right)$$

$$\bar{\sigma}_{yz} = \sigma_{yz}(a/2, 0,0) \left(\frac{h^2}{b^2 q_0} \right)$$

$$\bar{\sigma}_{xz} = \sigma_{xz}(0, b/2, 0) \left(\frac{h^2}{b^2 q_0} \right)$$

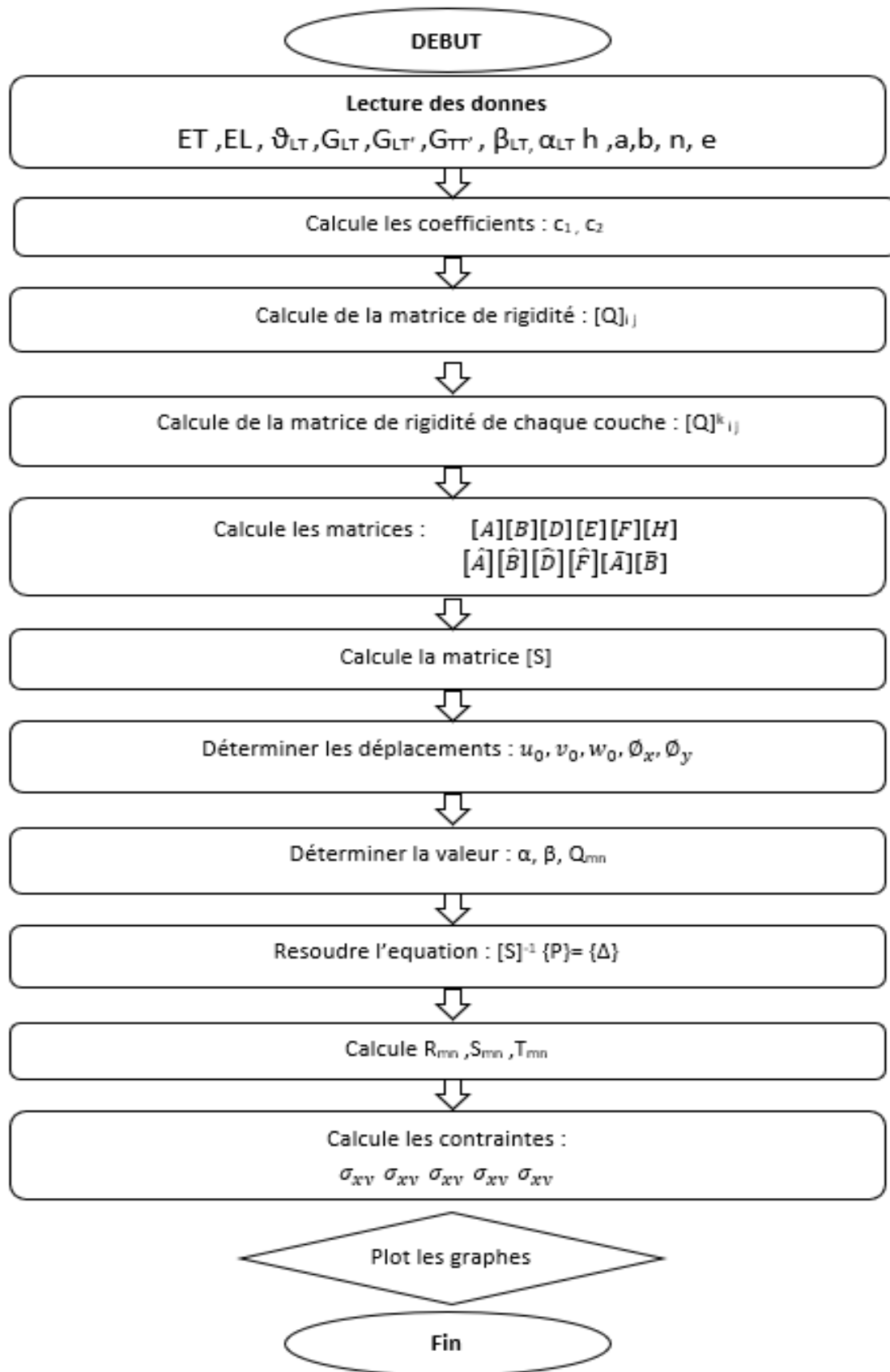


Figure (III.1) : Organigramme de la plaque épaisse.

4. Interface graphique

Les interfaces graphiques permettent de contrôler des applications logicielles avec des commandes de type pointer-cliquer. On a développé une interface d'exécution en MATLAB en utilisant l'application GUI (Graphical User Interface) [11]. Les diverses composantes de l'interface sont détaillées ci-dessous :



Figure (III.2) : La couverture de l'interface.

- L'interface principale : Introduit des données de chaque simulation:

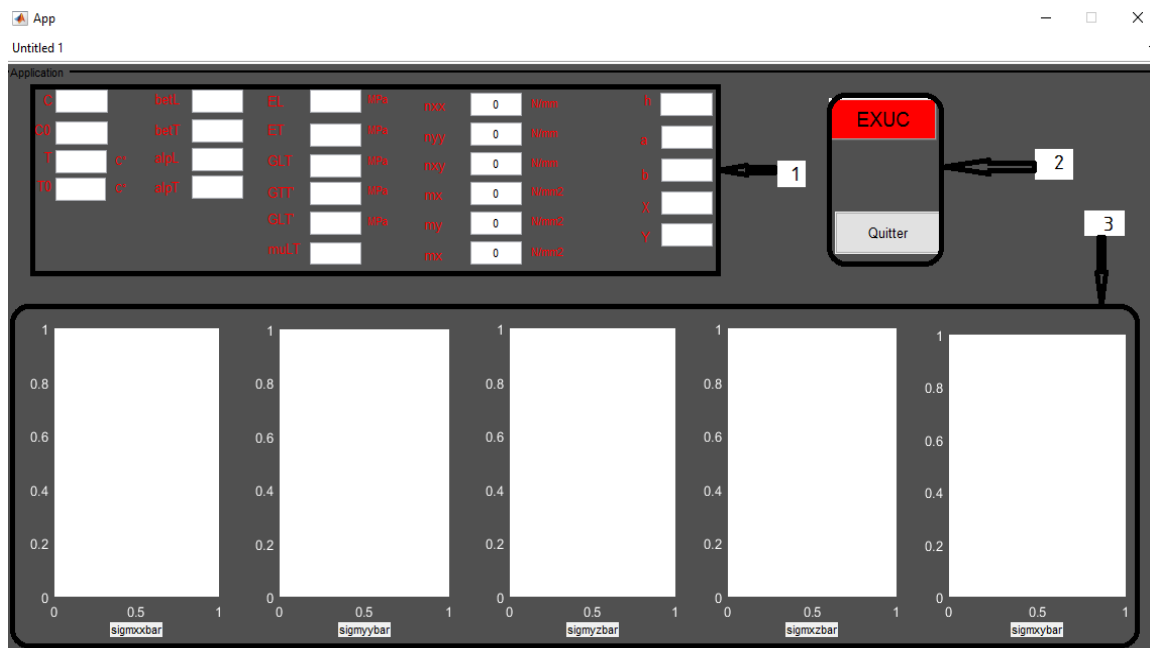


Figure (III.3) : L'interface principale.

1- Les cases des données :

Colonne 1 : les conditions environnementales.

Colonne 2 : les coefficients de dilatation thermique et d'expansion hygroscopique.

Colonne 3 : les propriétés mécaniques.

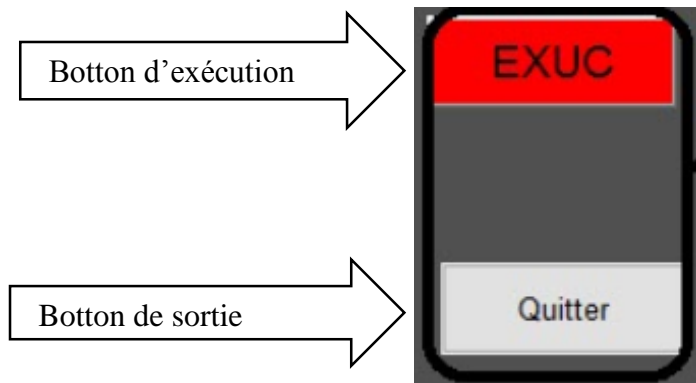
Colonne 4 : les sollicitations mécaniques.

Colonne 5 : les géométries de la plaque.

C	h _{at}	EL	MPa	mx	0	W/m	h
CO	h _{at}	ET	MPa	myy	0	W/m	a
T	c [*]	GLT	MPa	oxy	0	W/m	b
TD	c [*]	GTT	MPa	mx	0	W/m ²	X
		GLT'	MPa	my	0	W/m ²	Y
		md.T		mx	0	W/m ²	

Figures (III.3.1) : Les cases des données.

2- Les cases de boutons :



3- L'affichage des graphes:

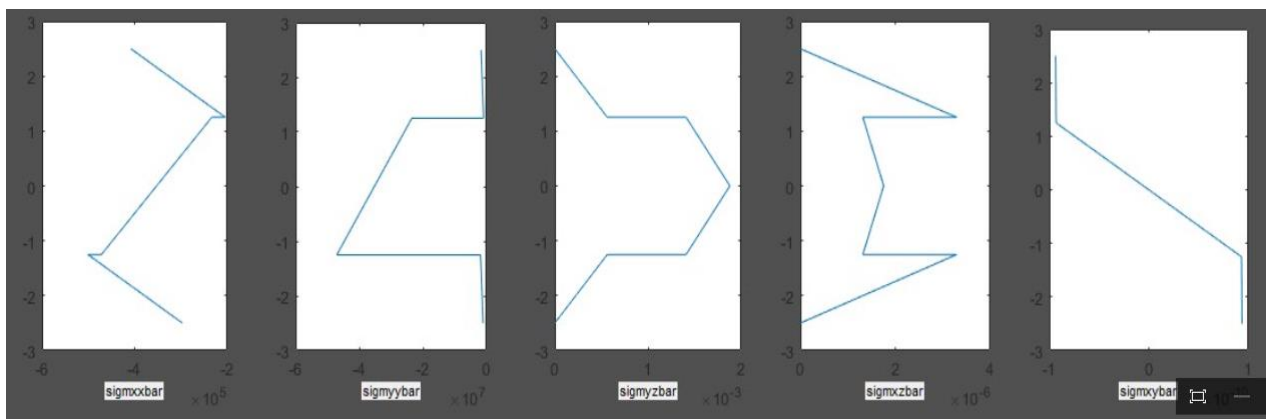


Figure (III.3.2): L'affichage des graphes.

5. Résultats de simulation des plaques épaisses

Le stratifié étudié est un stratifié ou les caractéristiques mécaniques sont données dans le tableau suivant :

Module d'Young longitudinal	$E_L = 175\text{GPa}$
Module d'Young transverse	$E_T = 7\text{GPa}$
Module de cisaillement	$G_{LT} = 3.5\text{GPa}$ $G_{LT'} = 3.5\text{GPa}$ $G_{TT'} = 1.4\text{GPa}$
Coefficient de Poisson principal	$\nu_{LT} = 0.25$
Les dimensions de la plaque	$a = 20\text{mm}$
	$b = 1\text{mm}$
	$h = 5\text{mm}$
Orientation des couches	$[0^\circ/90^\circ/90^\circ/0^\circ]$
Coefficient de dilatation hygroscopique	$B_L = 0, \beta_T = 0.6$
Coefficient de dilatation thermique	$\alpha_L = 5 \cdot 10^{-6}, \alpha_T = 20 \cdot 10^{-6}$.

Tableau (III.1): les caractéristiques mécaniques.

5.1. Influence du mode de sollicitation

- Cas mécanique

$$q_0=100, \Delta T=0, \Delta C=0$$

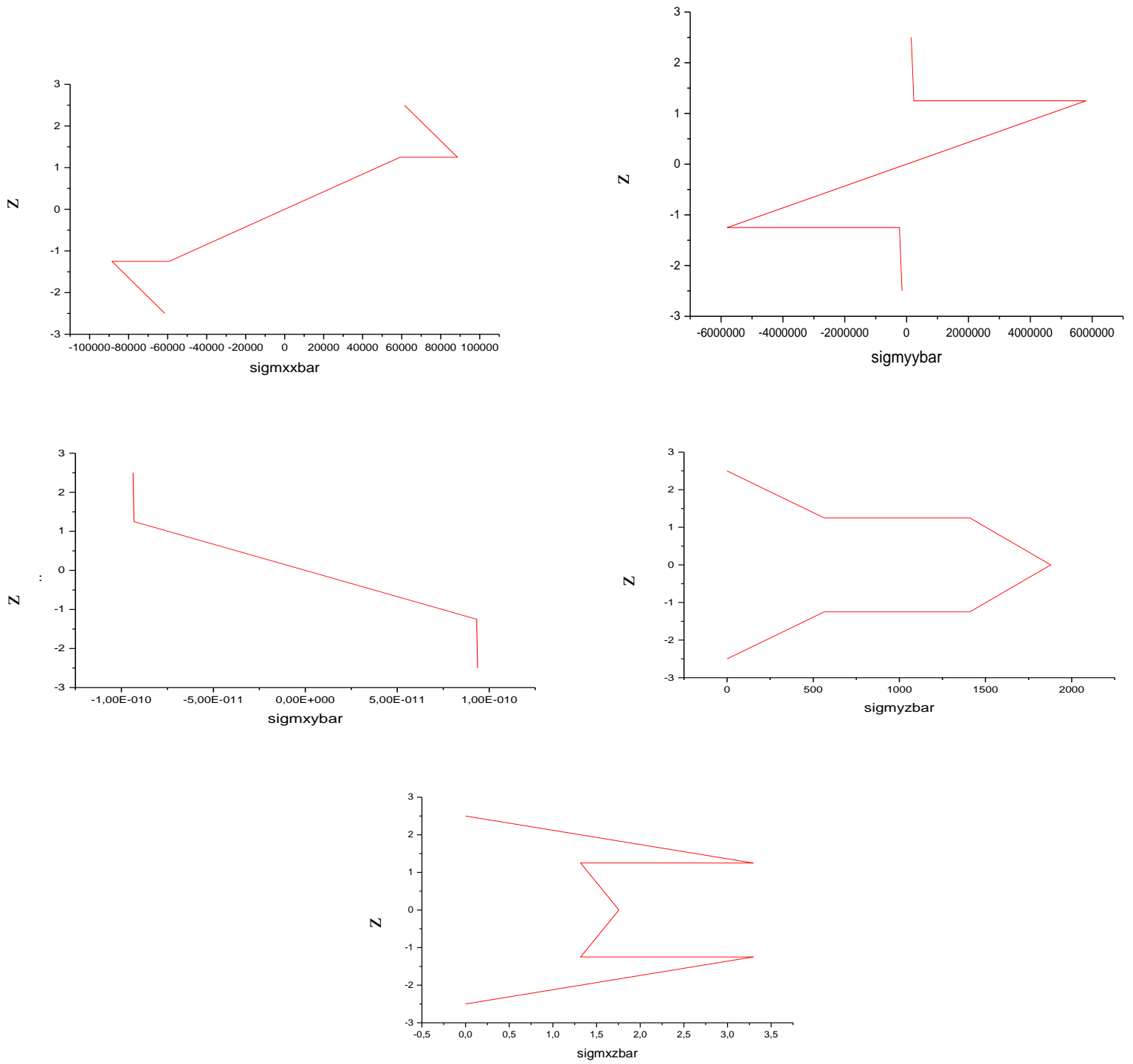


Figure (III.4.1) : Influence du mode de sollicitation cas mécanique.

• Cas thermique

$q_0=0, \Delta C=0, T_0=180^\circ\text{C}, T_{opr}=60^\circ\text{C}$

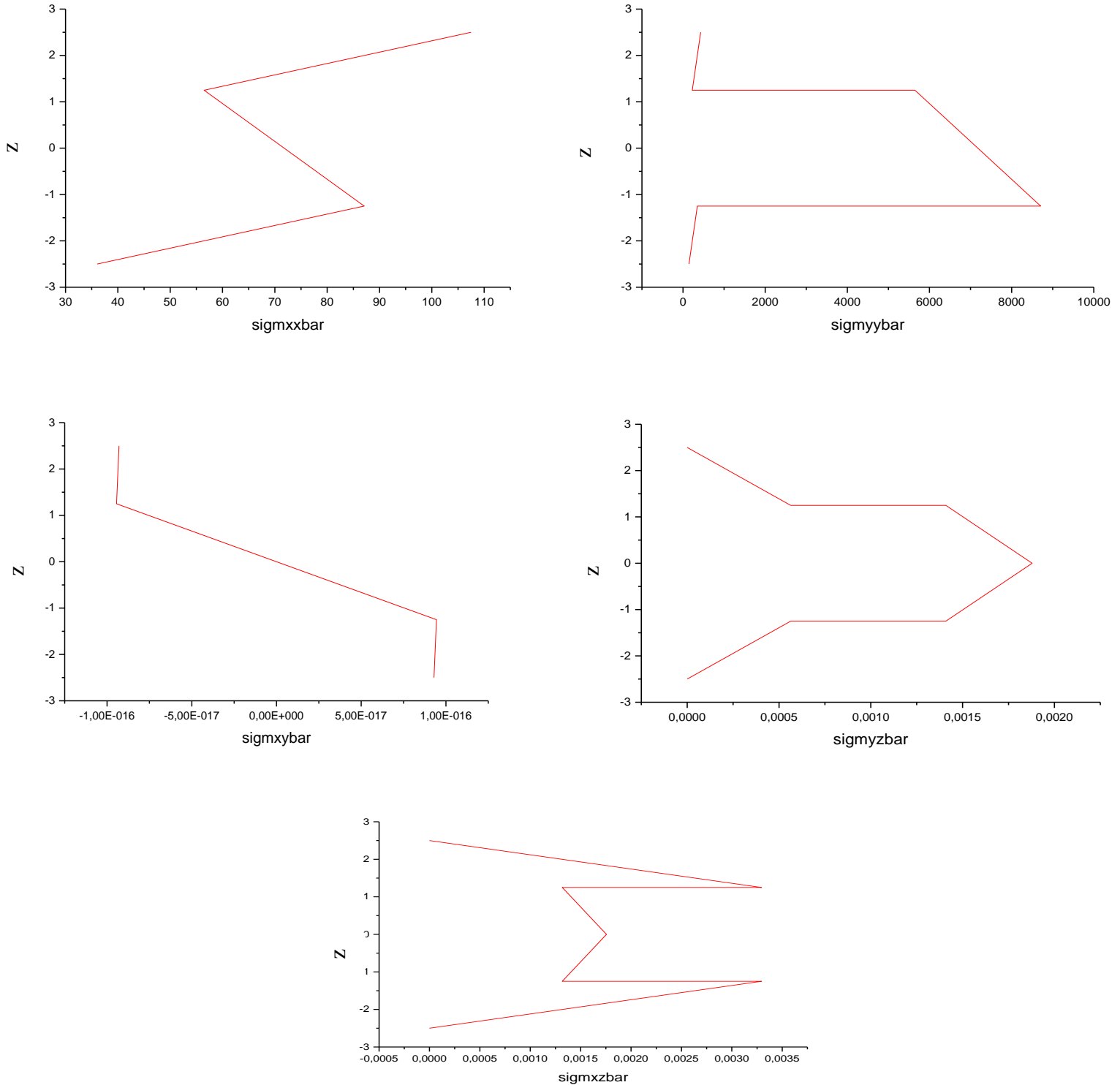


Figure (III.4.2) : Influence du mode de sollicitation cas thermique.

• Cas hygroscopique

$q_0=0, \Delta T=0, \Delta C=0.1431$

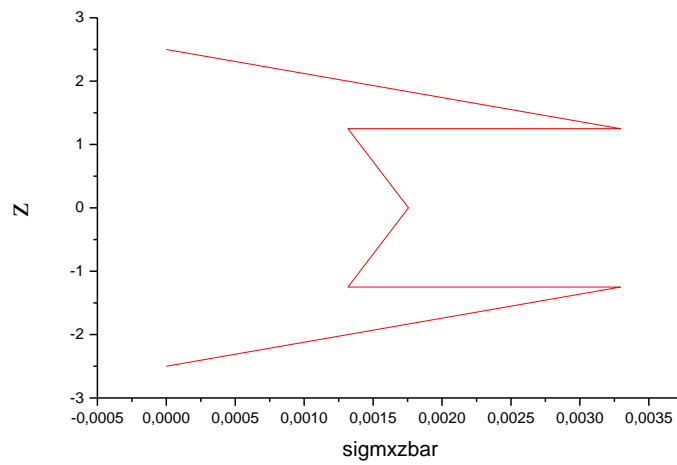
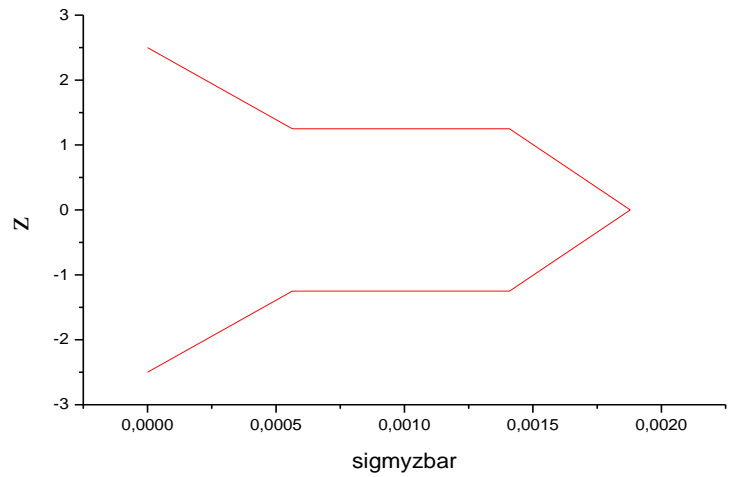
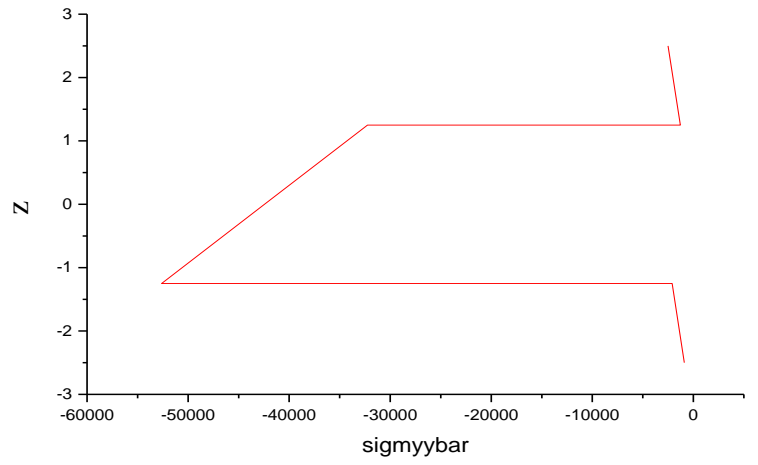
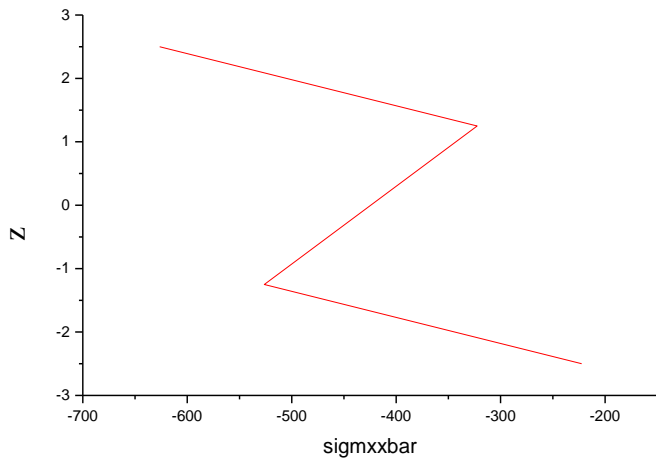


Figure (III.4.3) : Influence du mode de sollicitation cas hygroscopique.

• Cas thermomécanique

$q_0=100, T_{opr}=60^\circ\text{c}, \Delta C=0$

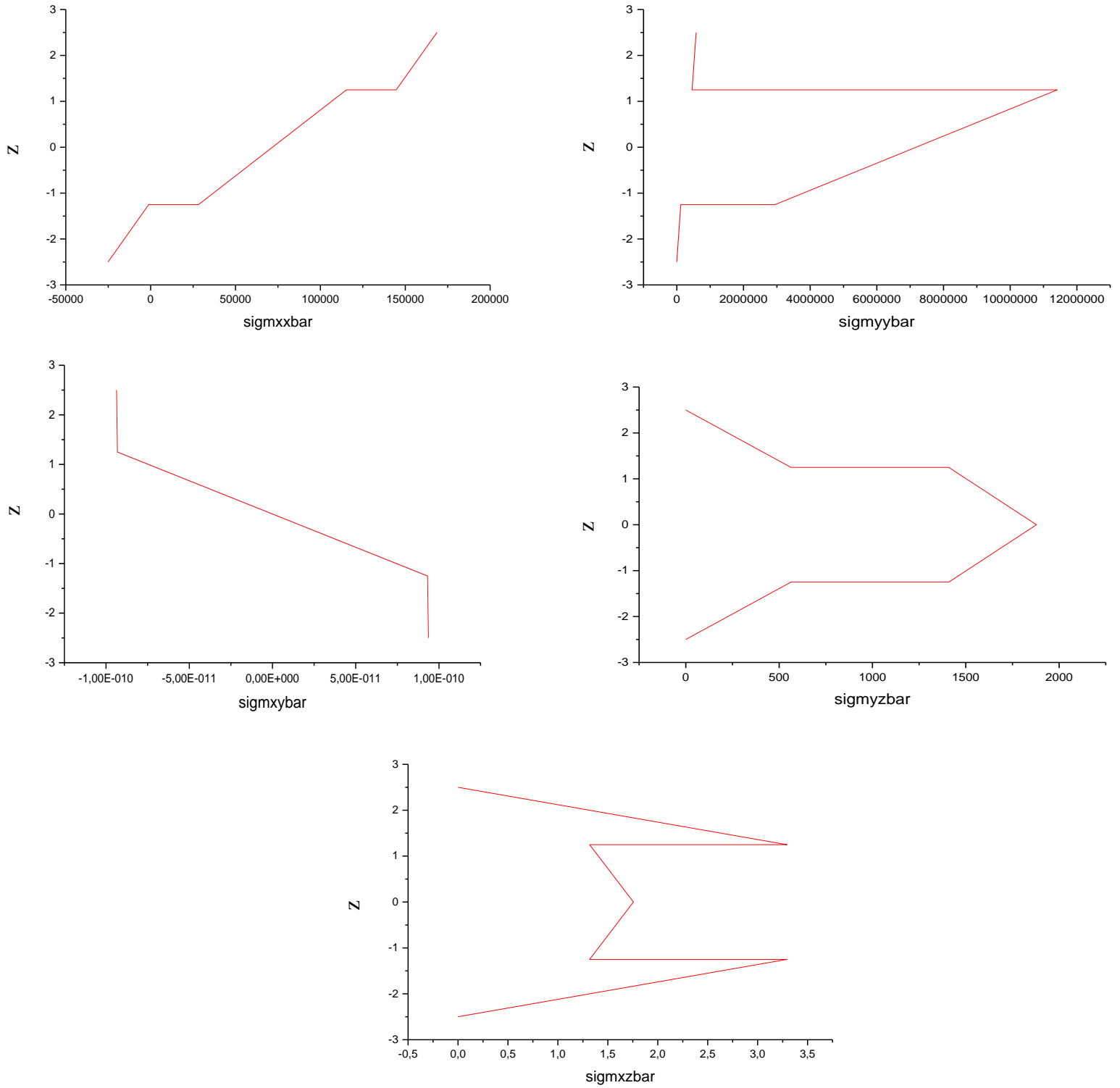


Figure (III.4.4) : Influence du mode de sollicitation cas thermomécanique.

• Cas hygromécanique

$q_0=100, \Delta T=0, \Delta C=0.1431$

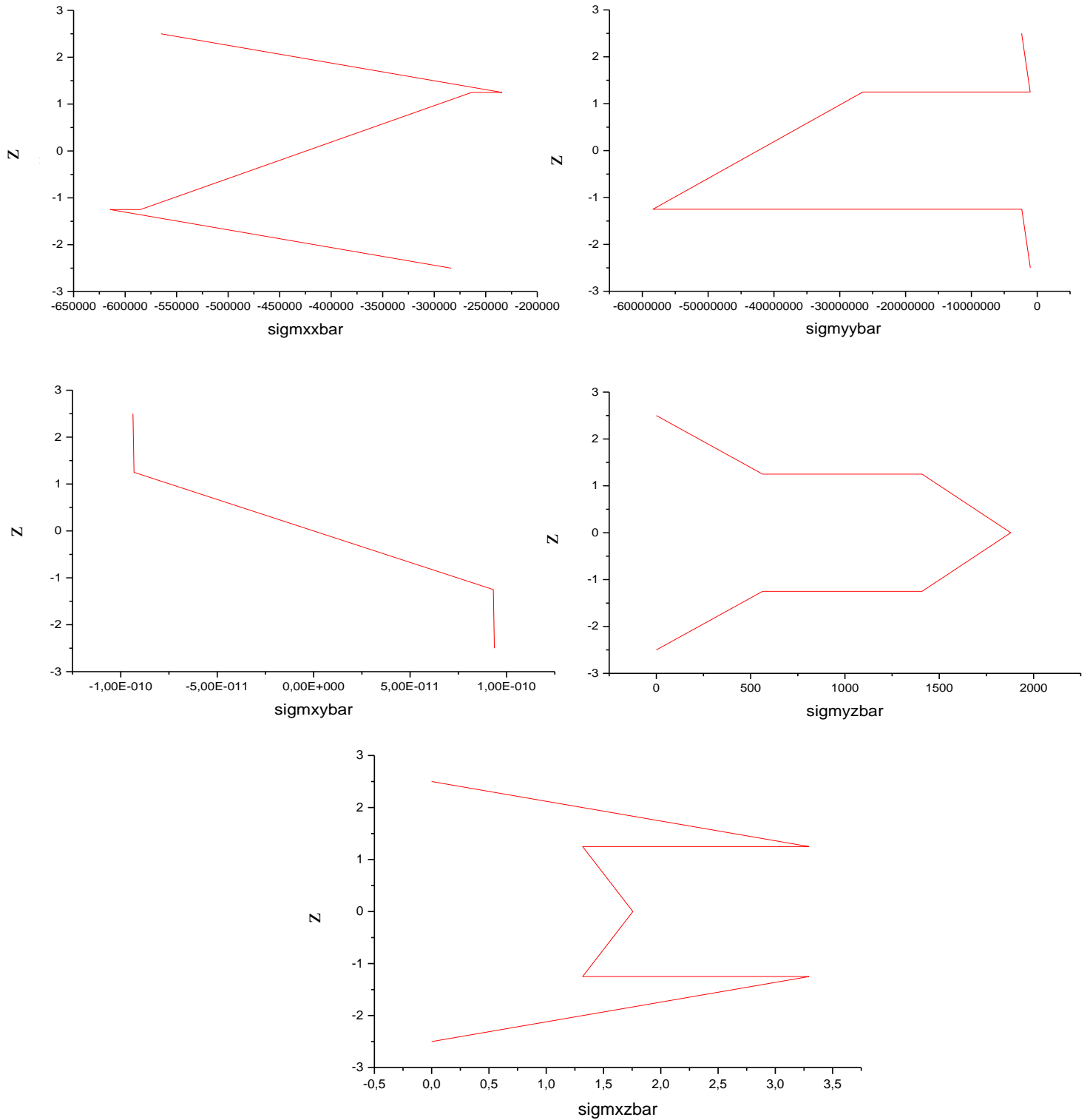


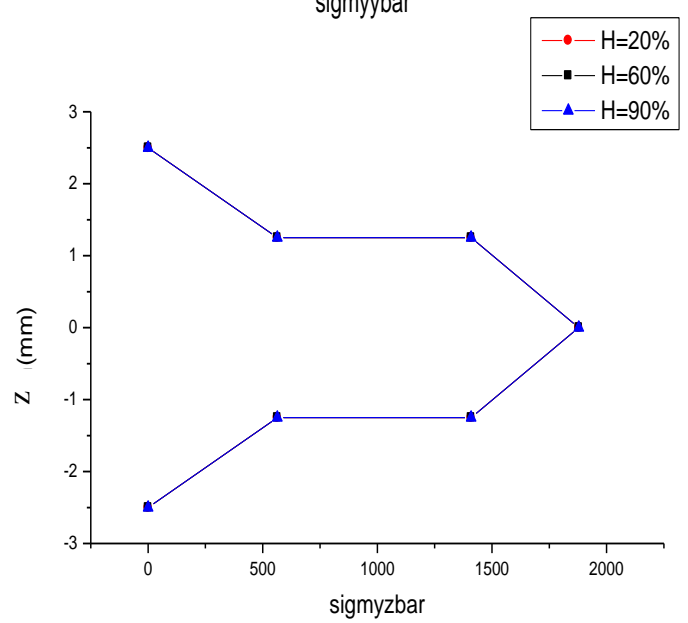
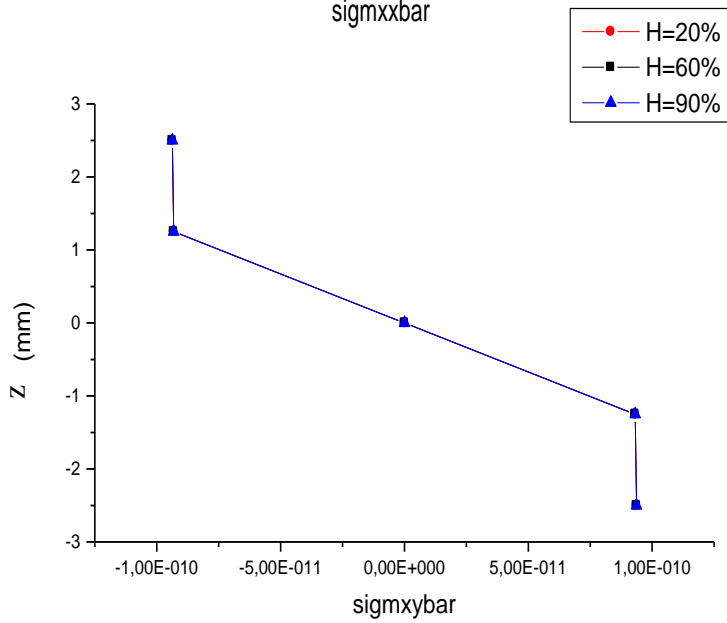
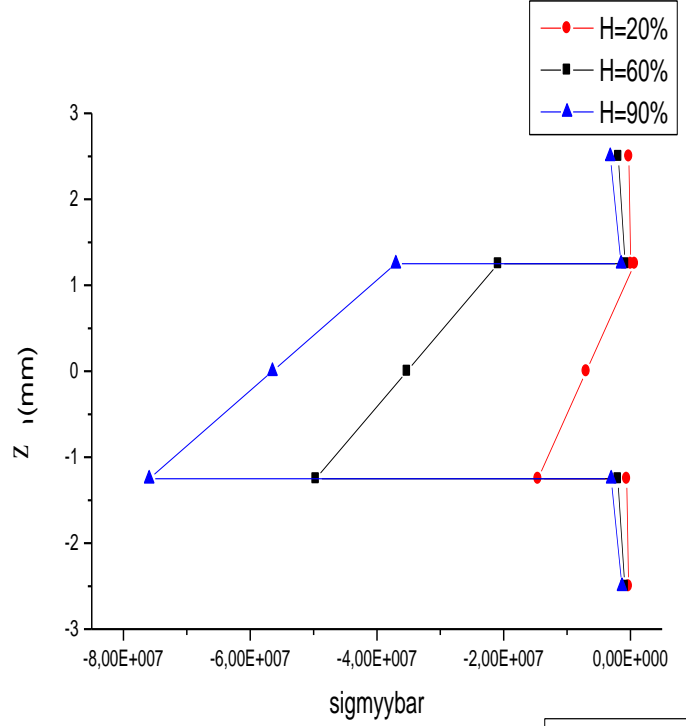
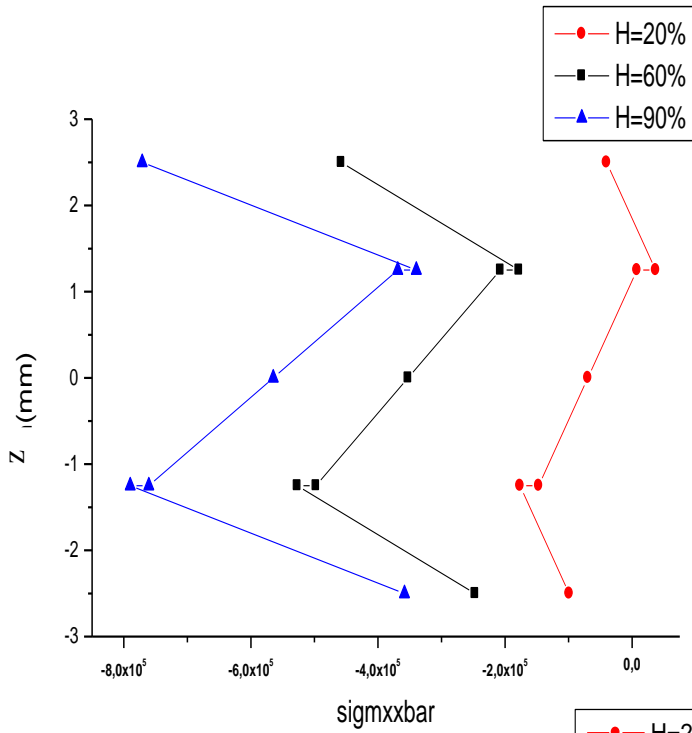
Figure (III.4.5) : Influence du mode de sollicitation cas hydro mécanique.

Les figures (III.4.1,2,3,4,5) montre le comportement de plaques composites épaisses sous différents modes de contraintes externes, Mode mécanique ou le stratifiés est soumis à une force mécanique , mode thermique avec absence de force mécanique dans ce cas on tient compte de la température opérationnelle dans laquelle se trouve notre plaque ,mode hygrosopique dans ce cas il n'y a pas de force mécanique, mode thermomécanique les deux modes mécanique et thermique, mode hygro mécanique la superposition des deux mécanique et hygrosopique, en termes d'allure de graphes les résultats montrent une dépendance entre le mode de sollicitation et le comportement de la plaque. Nous avons remarqué au plan (xx, yy) que l'ordre de grandeur des contraintes hygrosopique très importante par apport à l'ordre de grandeur des contraintes thermique.

5.2. Influence de l'humidité opérationnelle

$q_0=100, T_0=180^\circ, T_{opr}=60^\circ, C_0=0$

ENV1	ENV2	ENV3
20%	60%	90%



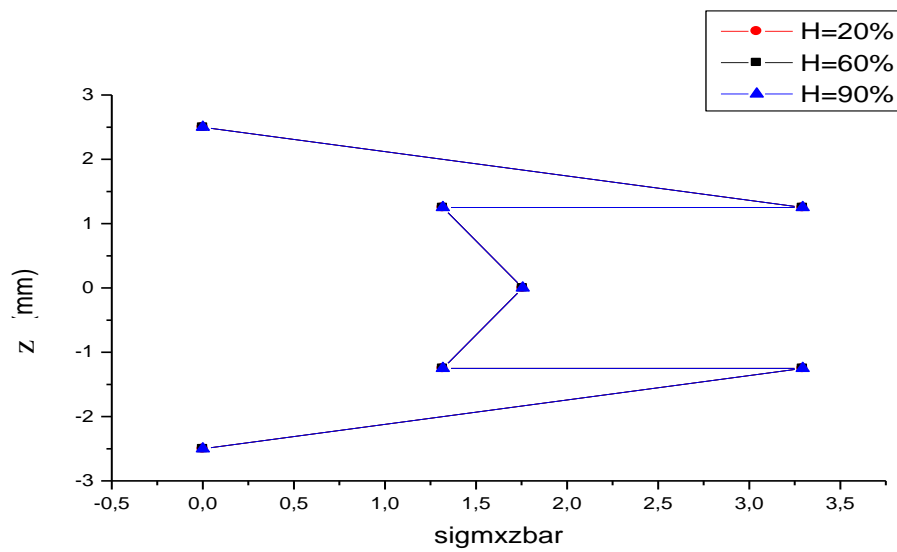


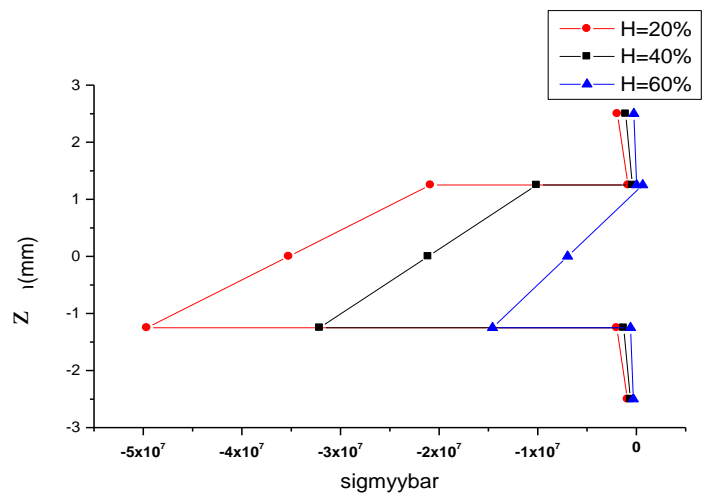
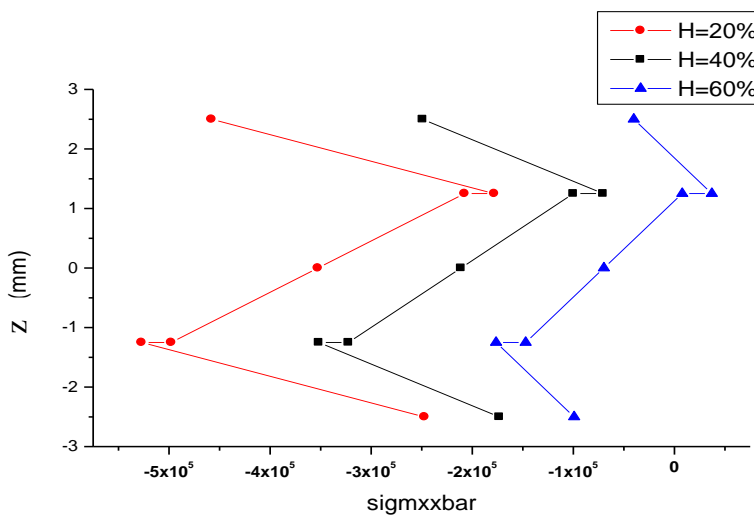
Figure (III.5) : Influence de l’humidité opérationnelle C.

Figures (III.5) présentent le comportement du stratifié dans différents cas d’humidité opérationnelle, les graphes montre une forte influence d’humidité sur l’état des contraintes longitudinales et transversales, plus l’humidité opérationnelle augmente l’état de contraintes est plus important, les contraintes dans le plan (x, y) sont pas influencées par le changement de l’humidité opérationnelle

5.3. Influence de l’humidité référentielle

- L’environnement entourant H=80%

H_0	H_0	H_0
20%	40%	60%



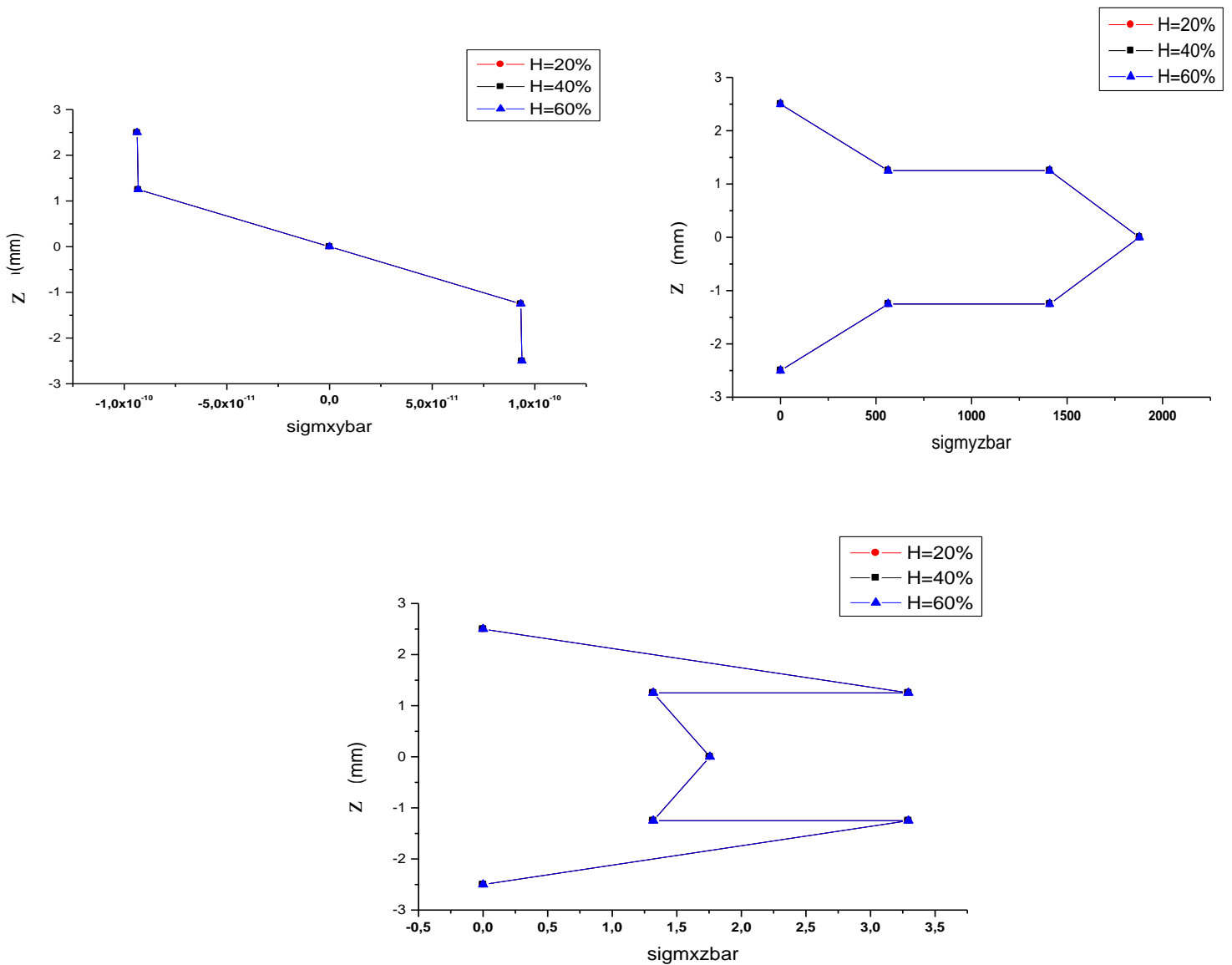


Figure (III.6) : Influence de C_0 .

Cette simulation traite l'influence de la concentration référentielle sur l'état de contrainte. Les graphes montrent une dépendance entre la concentration référentielle et l'état de contrainte, les contraintes dans le plan (x, y) et les cisaillements transversaux sont pas influencés par le changement de l'humidité référentielle.

5.4. Influence de l'anisotropie

- Le premier stratifié : $[0^\circ 90^\circ 90^\circ 0^\circ]$.

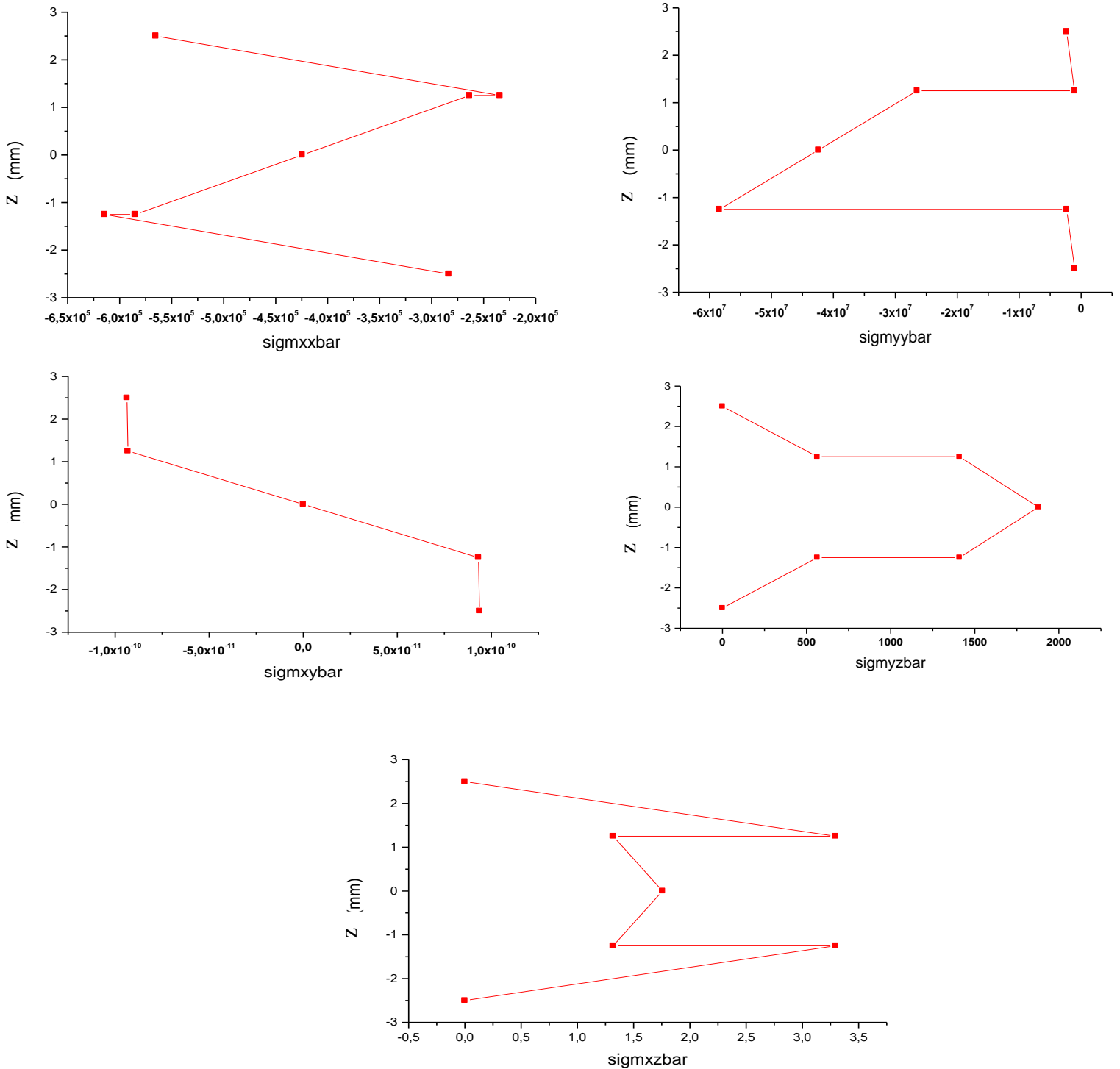


Figure (III.7.1) : Influence de l'anisotropie.

- Le deuxième stratifié: $[0^\circ 0^\circ 90^\circ 90^\circ 0^\circ 0^\circ]$.

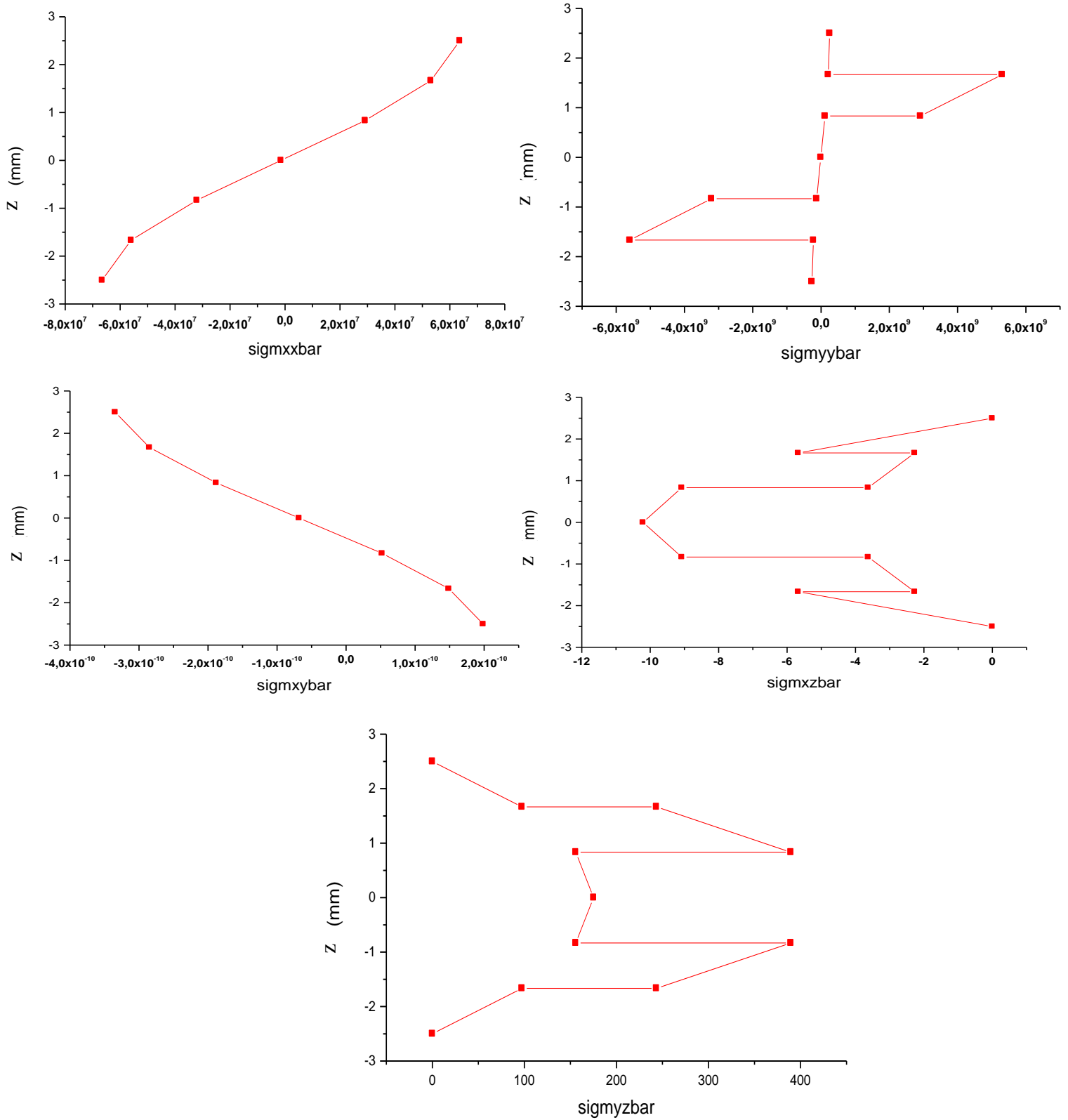


Figure (III.7.2) : Influence de l'anisotropie.

- Le troisième stratifié: $[0^\circ 90^\circ 0^\circ 0^\circ 90^\circ 0^\circ]$.

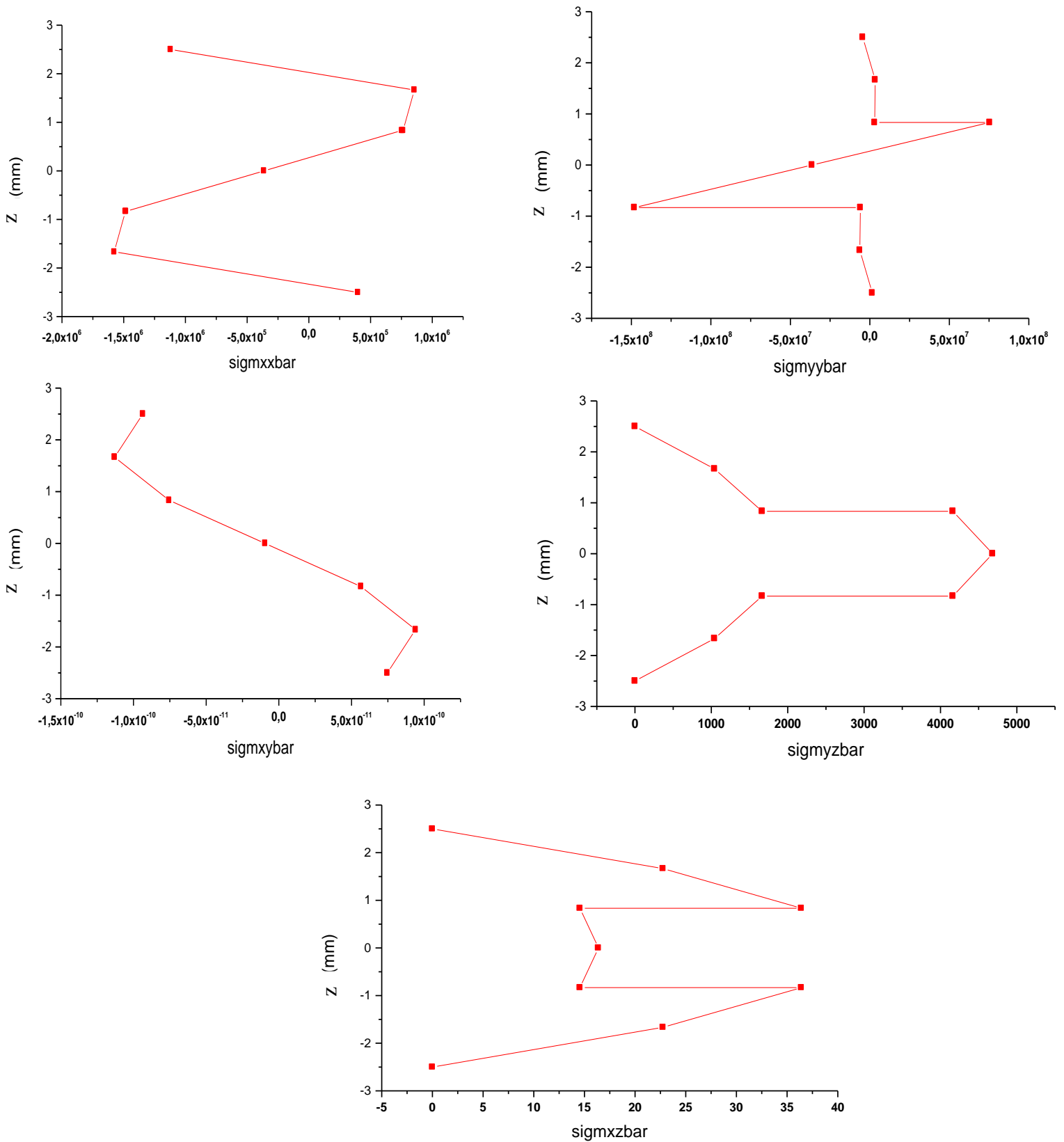


Figure (III.7.3) : Influence de l'anisotropie.

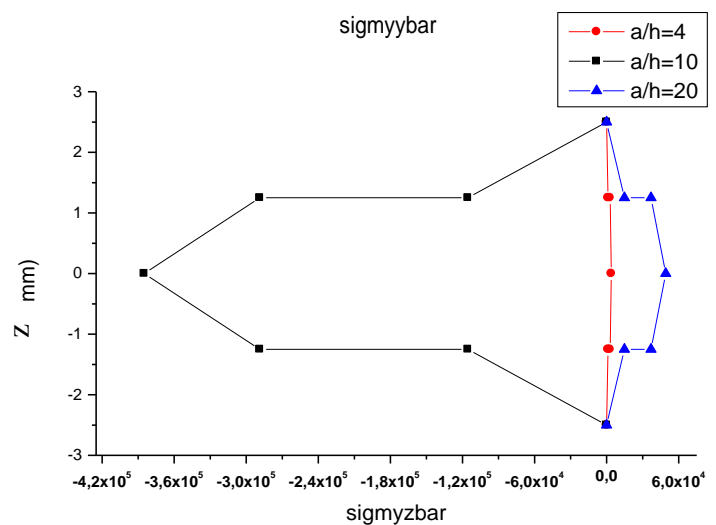
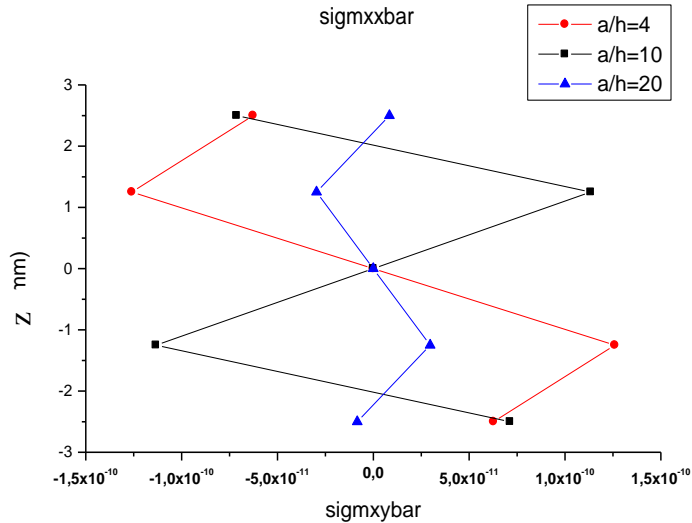
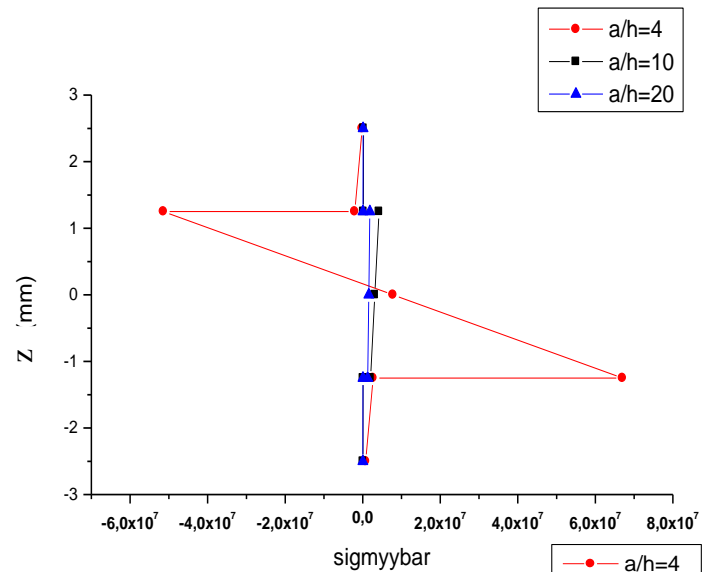
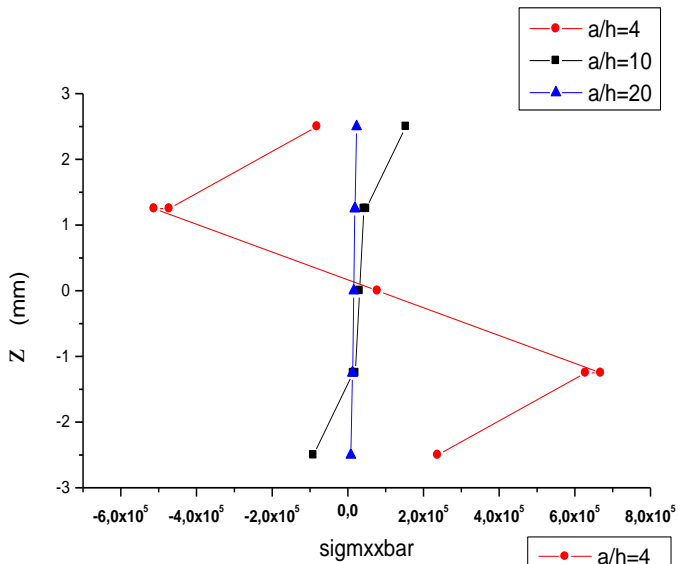
Cette section traite l'influence de l'anisotropie sur le comportement de la plaque, pour cela on a simulé le comportement de trois stratifiés d'architecture différentes [0.0.90.90.0.0], [0.90.0.0.90.0], [0.90.90.0] de même épaisseur, les graphes montrent une dépendance forte entre l'architecture du stratifié et l'état de contrainte, le nombre de couches a une influence directe aussi, pour les contraintes de cisaillement le comportement change selon le stratifié, les mêmes commentaires sont valables pour l'ordre de grandeur des contraintes.

5.5. Influence des paramètres géométriques

5.5.1. Influence du rapport géométrique a/h

$$q_0=100, \text{Topr}=60^\circ, T=180^\circ, C=0.1431, C_0=0, a/b=10$$

a/h=4	a/h=10	a/h=20
a=20	a=50	a=100



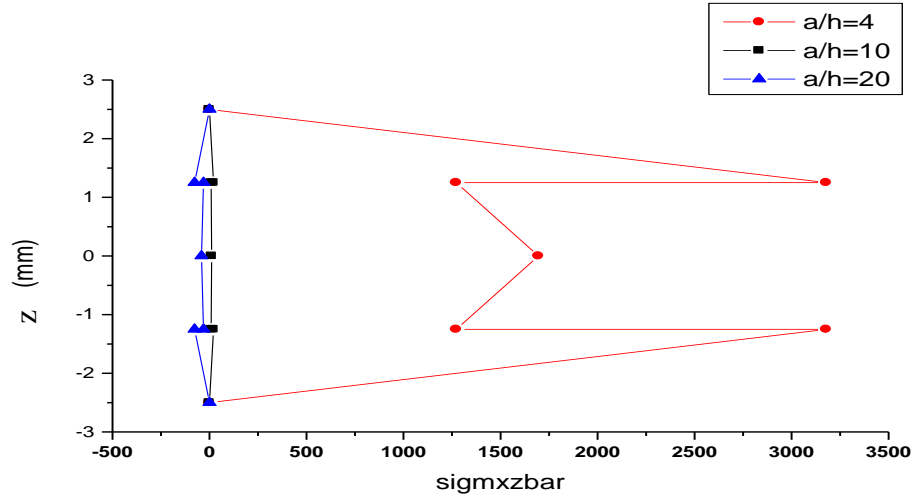
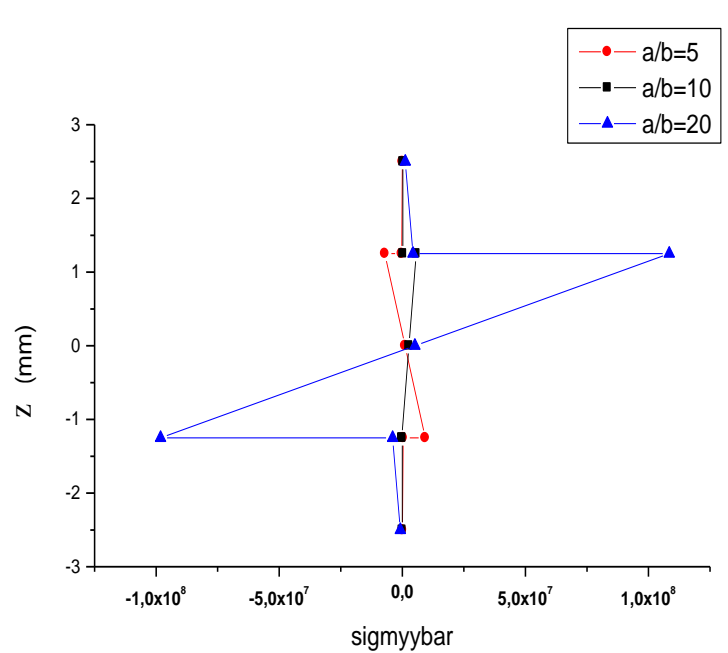
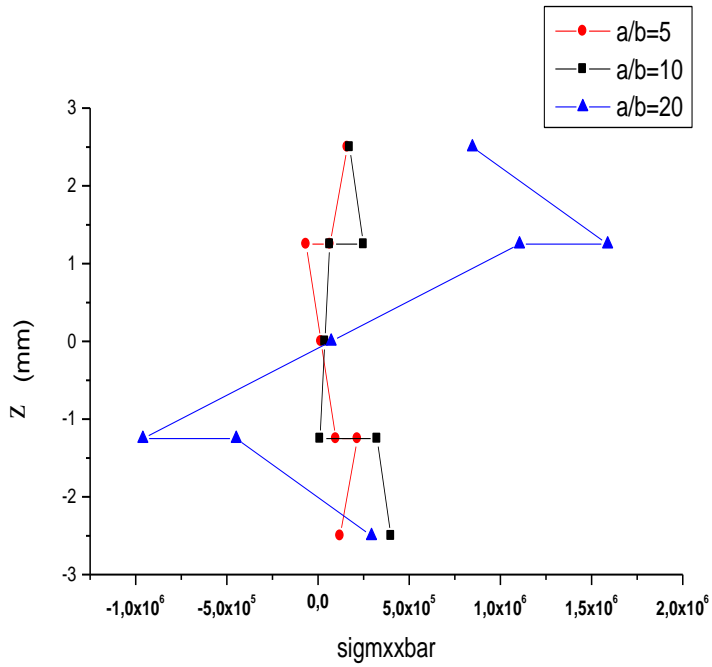


Figure (III.8.1) : Influence des paramètres géométriques a/h.

5.5.2. Influence du rapport géométrique a/b

$q_0=100$, $Topr=60^\circ$, $T=180^\circ$, $C=0.1431$, $C_0=0$, $a/h=10$

a/b	a/b	a/b
5	10	20



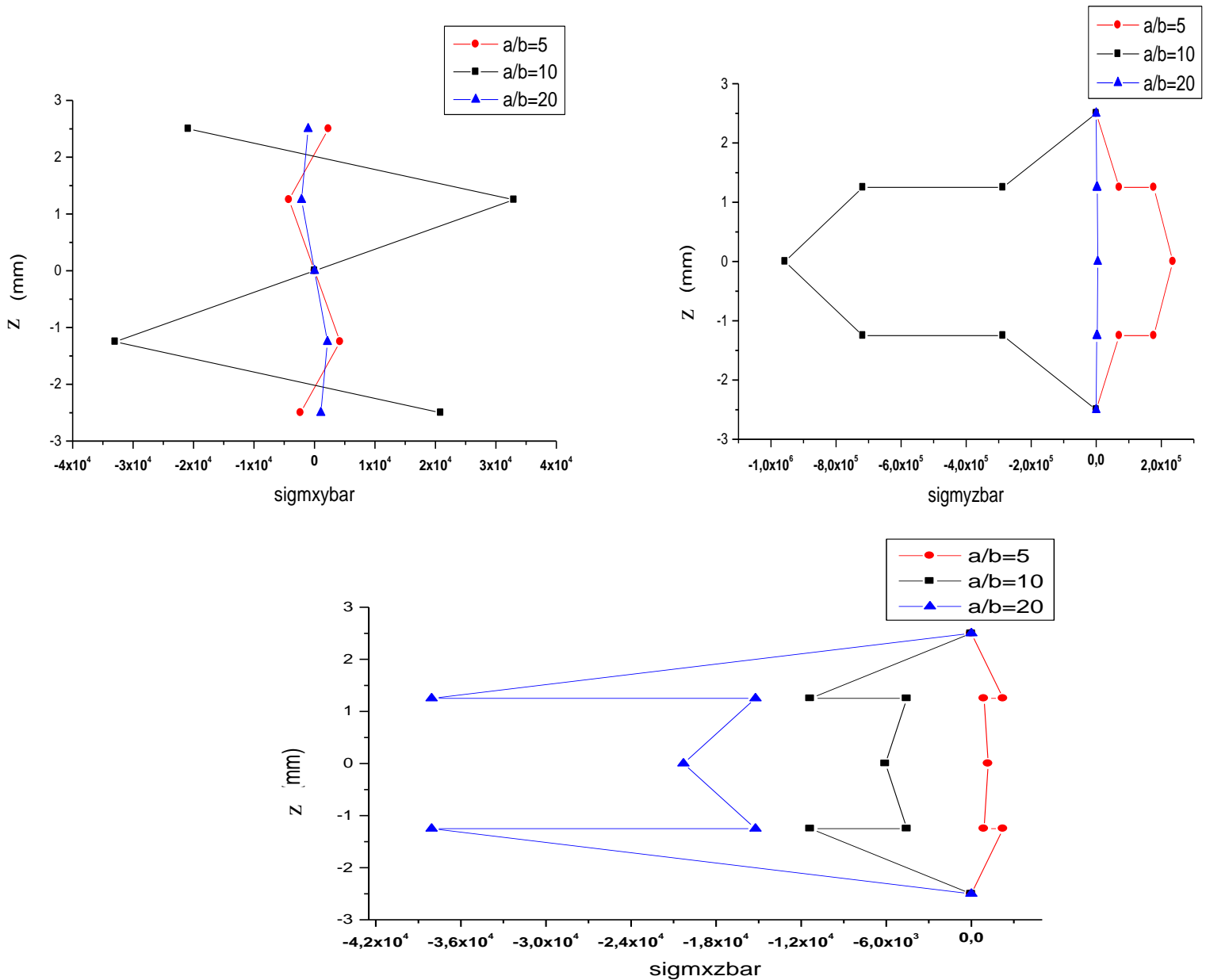


Figure (III.8.2) : Influence des paramètres géométriques a/b.

Dans cette partie on a varié les paramètres géométriques, d'abord on a commencé par varier le rapport a/h qui représente le rapport longueur sur l'épaisseur de plaque, les résultats sont représentés dans la figure (III.8.1) la variation de ce rapport montre une modification de l'état de contrainte par rapport aux différents plan (xx, xy, yy, xz, yz), plus le rapport a/h augmente, la contrainte selon (xx, yy) est négligeable, la variation du rapport géométrique a/b qui représente longueur sur largeur donne aussi une influence remarquable.

5.6. Couplage T, C

1- T : fixe, C : varié

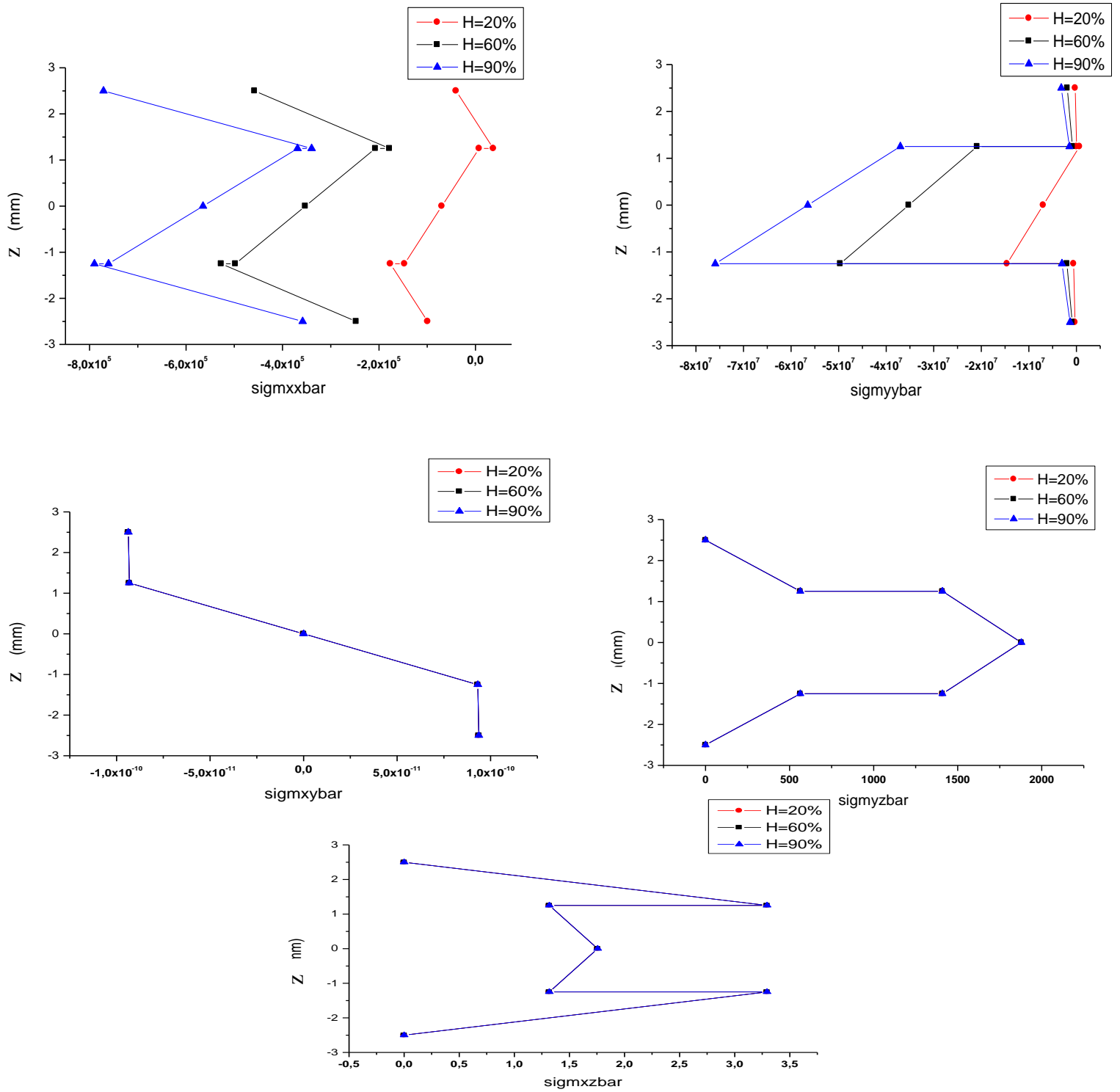


Figure (III.9.1) : Couplage de l'humidité et la température.

2- C : fixe, T : varié :

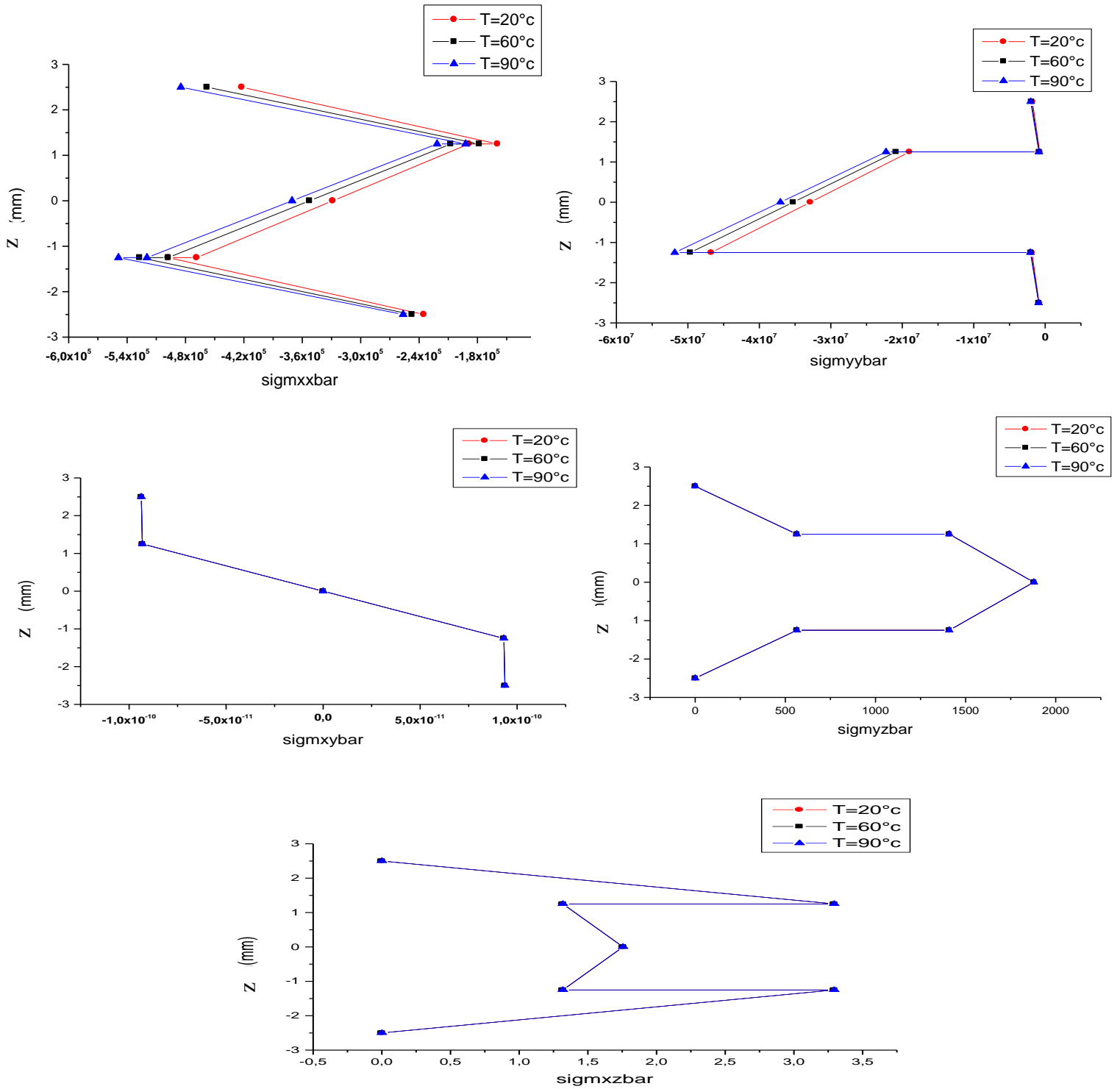


Figure (III.9.2) : Couplage de l'humidité et la température.

Dans cette section, nous avons simulé le comportement du stratifié composite dans un environnement de $T=60^{\circ}\text{C}$ avec une variation de l'humidité opérationnelle

Figure (III.9.1) On remarque que les graphes montrent une faible influence d'humidité sur l'état de contrainte au plan (xx, yy), et un environnement de $H=80\%$ avec une variation de température opérationnelle -Figure (III.9.2) -. Les graphes montrent une influence de température faible sur l'état de contrainte (xx, yy).

5.6.1. Influence de température opérationnelle négative

$$q_0=100, T=180^\circ, C=0.1431, C_0=0$$

Topr	Topr	Topr
-10°	-40°	-56°

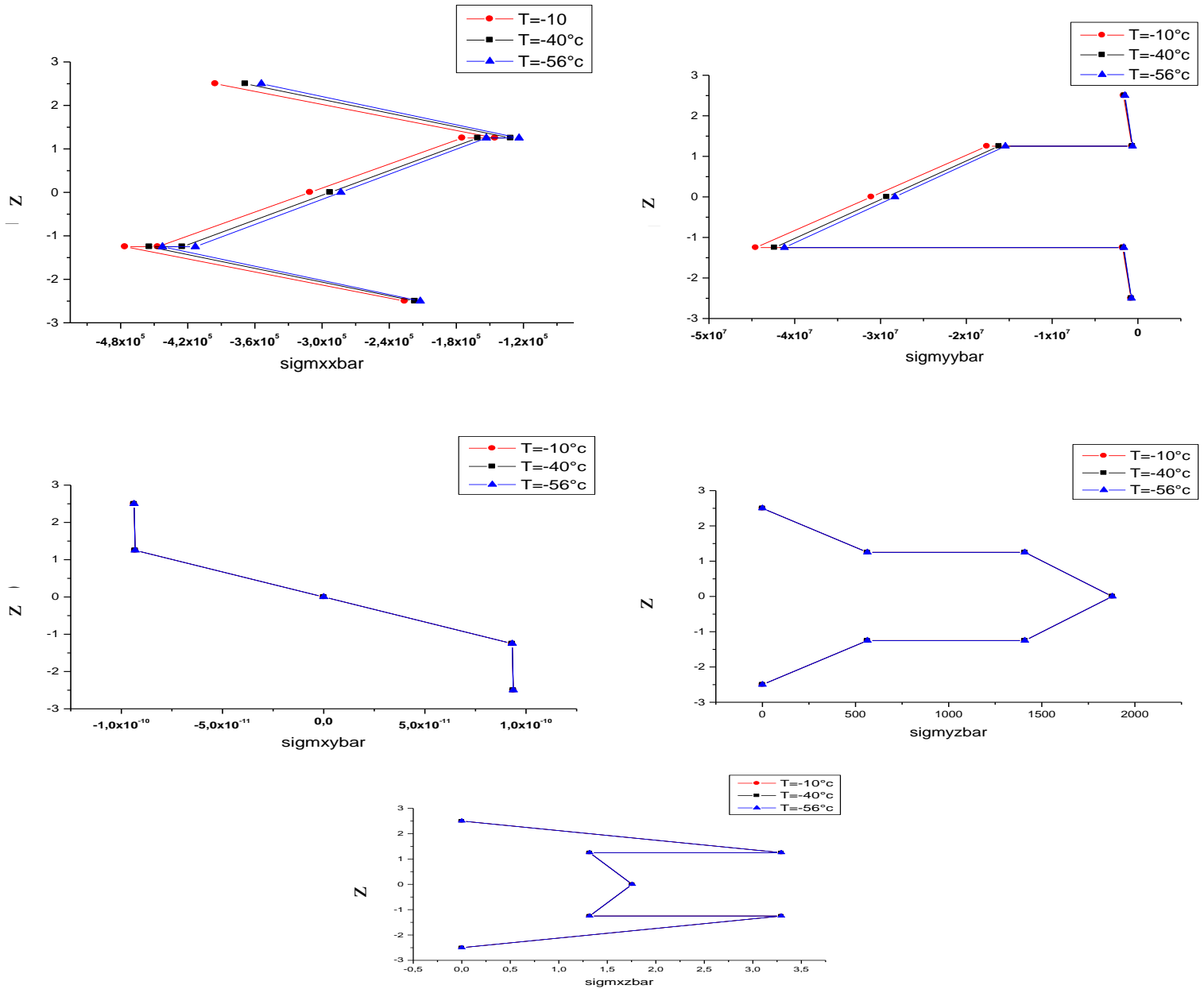


Figure (III.10) : Influence de Température négative.

Dans cette section nous avons simulé le comportement d'un stratifié composite dans un environnement d'humidité $H=60\%$ et changement de température opérationnelle négative les graphes montrent une influence faible dans les contraintes longitudinales et transversales.

Conclusion générale

Conclusion générale

Il ressort de cette étude que la résistance et la fiabilité de la structure composite dépendent non seulement de la charge mécanique, mais aussi des conditions environnementales. L'impact des conditions environnementales nécessite donc des méthodes de prédiction qui permettent d'utiliser leurs comportements à long terme dans les dimensions initiales, en tenant compte de l'espérance de vie requise ou imposée. Une étude prédictive sera donc nécessaire pour permettre d'utiliser les résultats obtenus.

Parmi ces études, la théorie d'ordre élevé développée par REDDY a été utilisée pour évaluer les influences de température et d'humidité sur les comportements des stratifiés composites des plaques épaisses.

Dans ce travail, un programme Matlab a été développé, ce qui nous a permis de simuler le comportement des stratifiés composites provoqué par des forces mécaniques externes et de travailler dans des conditions environnementales avec des changements de température et d'humidité.

Les résultats ont montré un rôle contributif des paramètres environnementaux dans le comportement des plaques composites épaisses.

Les résultats montrent que ces dernières contribuent beaucoup dans des conditions de contraintes, elles doivent donc être considérées dans la phase d'ingénierie des structures composites aéronautiques car ces dernières fonctionnent dans des conditions environnementales variables et extrêmes (altitude et vitesse).

Les résultats ont montré que l'ordre de grandeur des contraintes hygroscopique est beaucoup plus important par rapport aux contraintes thermiques.

Les résultats montrent que les paramètres de référence de fabrication (C_0) ont une influence sur l'état de contrainte.

L'architecture du stratifiée peut jouer un rôle important dans la réduction de la contrainte environnementale.

Dans ce travail l'effet de couplage entre la température et l'humidité n'a pas été abordé, seul le cas physique d'un stratifié saturer en humidité et ayant une température stationnaire a été traité, nous recommandons de traiter l'effet du couplage dans les futurs travaux.

LISTE DES SYMBOLES

a :	longueur de la plaque
b :	largeur de la plaque
h :	Epaisseur du stratifié
h_k :	Epaisseur du pli d'ordre k
k :	Numéro du pli
u_0 :	Déplacement du point M suivant l'axe x .
v_0 :	Déplacement du point M suivant l'axe y .
w_0 :	Déplacement du point M suivant l'axe z .
z_k :	Cote du pli d'ordre k
θ :	L'angle de l'orientation des fibre
α_L :	Coefficient de dilatation thermique longitudinal
α_T :	Coefficient de dilatation thermique transversal
β_L :	Coefficient d'expansion hygroscopique longitudinale
β_T :	Coefficient d'expansion hygroscopique transversal plan xy
ν_{LT} :	Coefficient de poisson dans le repère LT
$\sigma(M)$:	Tenseur des contraintes
$\sigma_{xx}, \sigma_{yy}, \tau_{xy}$:	Contraintes suivant les axes x, y , et la plan xy
τ_{yz}, τ_{xz} :	Contraintes suivant les axes yz , et la plan xz
$\varepsilon_{xx}^0, \varepsilon_{yy}^0, \varepsilon_{xy}^0$:	Déformations en membrane
$\varepsilon_{xx}, \varepsilon_{yy}, \varepsilon_{xy}$:	Déformations linéaires respectivement suivant les axes x, y , et le plan xy
M_x, M_y :	Moment de flexion
M_{xy} :	Moment de torsion
N_x, N_y, N_{xy}	Résultantes en membrane par unité de longueur

ΔC :	Humidité d'opération – humidité de cuisson
ΔT :	Température d'opération – température de cuisson
[S] :	Matrice de souplesse
[A _{ij}] :	Matrice des rigidités en membrane
[B _{ij}] :	Terme de couplage en membrane/flexion-torsion
[C _{ij}] :	Coefficients de la matrice de rigidité [C]
[D _{ij}] :	Matrice des rigidités en membrane flexion-torsion

Référence

- [1] J-M.BERTHELOT matériaux composites. Comportement mécanique et analyse des structure MASSON, ISMANS , institut supérieur des matériaux et mécaniques avancés le Mans, France Novembre 2010.
- [2] <https://lenergeek.com/2013/02/04/avec-quels-materiaux-sont-fabriquees-les-pales-des-eoliennes/> [mai 2021].
- [3] <https://www.industrie-techno.com/article/l-a350-xwb-premier-airbus-avec-plus-de-50-de-composites.23272> [mai 2021].
- [4] PAOLO Vannucci. Matériaux composites structuraux: Méthodes d'analyse et de conception. Master. France. 2007. cel-01529026.
- [5] J-N Reddy : “mechanics of laminated composite plates and shells theory and analysis”(second edition).
- [6] MERAZI, Mohamed, et al. Analyse mécanique des structures composites: Etude comparative entre les différentes théories des plaques. 2015. Thèse de doctorat.
- [7] Reissner : Une théorie simple d'ordre supérieur pour plate/ composite stratifiée. J. Appl. Mech., vol. 12, (1945).
- [8] Mindlin. R.D: Influence de l'inertie de rotation et de cisaillement sur les motions de flexion, plaques élastiques isotropes. Journal of Applied Mechanics, vol. 18, pages 31-38, (1951).
- [9] BOUKHARI, Ahmed, et al. Application des théories à ordre élevé de déformation de cisaillement pour l'étude du comportement mécanique des plaques épaisses. 2016. Thèse de doctorat.
- [10] BOUKERT, B., BENKHEDDA, A., BEDIA, EA Adda, et al. Hygrothermomechanical behavior of thick composite plates using high order theory. Procedia Structural Integrity, 2017, vol. 5, p. 115-122.
- [11] <https://fr.mathworks.com/discovery/matlab-gui.html>.