

الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية  
République Algérienne démocratique et populaire

وزارة التعليم العالي و البحث العلمي  
Ministère de l'enseignement supérieur et de la recherche scientifique

جامعة سعد دحلب البليدة  
Université SAAD DAHLAB de BLIDA

كلية التكنولوجيا  
Faculté de Technologie

قسم الإلكترونيك  
Département d'Électronique



# Mémoire de Projet de Fin d'Étude

présenté par

Touam Fouad

&

Hadj Mihoub Sidi Moussa Fayçal

pour l'obtention Master en Électronique option automatique

---

Thème

---

# Détection et localisation des défauts des capteurs

---

Proposé par : Salhi Hassen & Khentout Nour Eddine

Année Universitaire 2012-2013

## Remerciements

---

A l'issue de cette fin de travail, nous remercions le Dieu tout puissant pour la volonté, la santé et la patience qu'il nous a donné durant toutes ces longues années d'études.

Le mémoire de master présenté ici est le résultat d'un travail continu de plus d'une année.

Il n'aurait pas pu être élaboré sans l'aide et la collaboration, de près ou de loin, de nombreuses personnes que nous tenons ici à remercier.

Nous remercions chaleureux à nos parents, qui ont été toujours à nos côtés pour nous encourager à atteindre nos objectifs académique et personnel. Nous souhaitons qu'ils soient fiers de nous.

Nous tenons à exprimer nos remerciements à nos grandes familles, qu'ont été aussi parmi les partenaires qui nous encourager.

Notre mémoire a été réalisée au Laboratoire de Recherche d'Electronique Nucléaire du Centre de la Recherche Nucléaire de Birine (CRNB). Nous exprimons nos sincères remerciements à Monsieur Khentout Nour eddine qui a dirigé et initié cette activité de recherche. Sa connaissance du sujet, ses conseils et son aide continus ont été essentiels pour les résultats de notre travail.

Nous souhaiterons exprimer nos sincères remerciements à Monsieur Salhi Hassen, notre professeur et notre guide de ce travail. Nous voudrions aussi lui exprimer nos profondes reconnaissances pour la confiance qu'il nous a toujours témoignée.

Nous adressons nos remerciements à tous les professeurs qui nous ont enseigné pendant notre périple académique.

Nous avons été sensibles à l'honneur que nous fait l'ensemble des professeurs de participer aux jurys et nous les remerciant sincèrement.

Enfin, nos reconnaissances s'adressent à tous nos camarades d'Université pour les bons moments que nous avons passés en leur compagnie et nos ami(e)s.

---

**ملخص:** الهدف الرئيسي من هذا اطروحة هو اقتراح طريقة لكشف و تعيين (تحديد) موضع عيوب أجهزة القياس و الاستشعار ذات نموذج النظام الخطية الديناميكي متغير مع الوقت . هذا الأسلوب يعتمد أساسا على تقدير قيمة العيوب عن طريق خوارزمية وحدة المربعات إلى جانب مرشح كالمان, هذا الأخير يقدر أيضا حالة النظام. المنهجية المقترحة تسمح لنا بأخذ العيوب ذات طبيعة اضافية بنسبة للقياسات والتي يتزامن حدوثها مع الوقت .

**كلمات المفاتيح:** كشف ؛ تعيين موضع (تحديد) ؛ عيوب ؛ الانحرافات ؛ أجهزة الاستشعار ؛ تقدير ؛ مرشح كالمان ؛ وحدة المربعات ؛ نظام ديناميكي.

---

**Résumé :** L'objectif fondamental de ce mémoire est de proposer une méthode permettant de détecter et localiser des défauts des capteurs sur un système dynamique linéaire à temps variant. Cette méthode consiste à estimer l'amplitude des défauts à partir d'un module de moindres carrés couplé au filtre de Kalman estimant l'état du système. L'approche proposée permet de considérer des défauts additifs et d'occurrence simultanée.

**Mots clés :** détection, localisation, défauts, dérives, capteurs, estimation, filtre de Kalman, moindres carrés, système dynamique.

---

**Abstract:** This thesis deals with a method for detection and isolation sensors faults on a dynamic linear time-varying system. This method consists in estimating the faults magnitude thanks to a least square module coupled to the Kalman filter estimating the system state. The proposed approach allows considering additive and simultaneous faults.

**Keywords:** detection, localization, faults, drifts, sensors, estimation, Kalman filter, least squares, dynamical systems.

---

## Listes des acronymes et abréviations

FK : Filtre de Kalman

MC : Moindres carrés

MCR : Moindres carrés récursifs

GOS : Generalized Observer Scheme

DOS : Dedicated Observer Scheme

EQM : Erreur quadratique moyenne

E : Espérance mathématique

Var : Variance

Rang : Rang d'une matrice

Tr : Trace d'une matrice

EMM : Estimation par la méthode des moments

MCRFO : Moindres carrés récursifs à facteur d'oubli

MCRFG : Moindres carrés récursifs à fenêtre glissante

# Table des matières

---

<b>Introduction générale</b> .....	<b>1</b>
<b>Chapitre 1 Généralités sur la détection et localisation</b> .....	<b>4</b>
1.1 Introduction .....	4
1.2 Terminologies .....	4
1.3 Défauts des capteurs.....	6
1.3.1 Principe du capteur .....	6
1.3.2 Classes des défauts des capteurs .....	6
1.3.3 Modélisation de défauts .....	7
1.3.4 Types des défauts.....	8
1.4 Performances de détection .....	9
1.4.1 Pourcentage de fausse détection .....	9
1.4.2 Pourcentage de détection ratée .....	10
1.4.3 Dynamique du résidu .....	10
1.4.4 Caractéristiques temporelles .....	10
1.5 Méthodes de détections et localisation des défauts .....	11
1.5.1 Détection par comparaison a des seuils .....	11
1.5.2 Redondance.....	11
1.5.3 Par estimation .....	13
1.5.4 Espace de parité .....	14
1.5.5 Analyse en composantes principales .....	14
1.5.6 Détection par tests statistiques .....	15
1.6 Conclusion.....	15
<b>Chapitre 2 Méthodes d'estimation</b> .....	<b>16</b>
2.1 Introduction .....	16
2.2 Définition .....	16
2.3 Applications .....	16
2.4 Caractéristiques .....	17
2.4.1 Biais .....	17
2.4.2 Erreur quadratique moyenne.....	17

2.4.3	Convergence .....	18
2.4.4	Efficacité .....	18
2.4.5	Robustesse .....	18
2.5	Types d'estimation .....	18
2.5.1	Estimation des paramètres .....	18
2.5.2	Estimation d'état .....	19
2.6	Méthodes d'estimation .....	19
2.6.1	Moindres carrés.....	19
2.6.2	Filtre de Kalman .....	20
2.6.3	Observateur de Luenberger.....	20
2.6.4	Méthode du maximum de vraisemblance .....	21
2.6.5	Méthode des moments .....	22
2.7	Conclusion.....	23
<b>Chapitre 3</b>	<b>Le filtre de Kalman et Moindres carrés récursifs.....</b>	<b>24</b>
3.1	Introduction .....	24
3.2	Filtre de Kalman.....	24
3.2.1	Définition .....	24
3.2.2	Système Dynamique .....	25
3.2.3	Exemple d'application .....	25
3.2.4	Représentation d'état .....	26
3.2.5	Principe du filtre de Kalman .....	27
3.2.6	Théorie de filtre de Kalman .....	28
3.2.7	Filtre de kalman étendu.....	31
3.3	Moindres carrés récursifs .....	34
3.3.1	Moindre carrés .....	34
3.3.2	Moindres carrés récursifs.....	36
3.3.3	MCR à facteur d'oubli .....	37
3.3.4	MCR à fenêtre glissante.....	37
3.4	Conclusion.....	38
<b>Chapitre 4</b>	<b>Développements et applications.....</b>	<b>39</b>
4.1	Introduction .....	39
4.2	Détection et localisation par estimation de défaut .....	39
4.2.1	Problématique .....	40

4.2.2	Développement de la méthode.....	40
4.3	Application de la méthode .....	44
4.3.1	Description du système .....	45
4.3.2	Simulation en moindres carrées a fenêtre glissante .....	47
4.3.3	Simulation en moindres carrées a facteur d'oubli.....	54
4.4	Conclusion.....	58
	<b>Conclusion générale et perspectives .....</b>	<b>59</b>
	<b>Annexe A.....</b>	<b>60</b>
	Démonstration des équations de filtre de Kalman .....	60
	<b>Annexe B.....</b>	<b>63</b>
	Démonstration des équations des moindres carrés récursifs.....	63
	<b>Bibliographie .....</b>	<b>66</b>

## Liste des figures

<b>Figure 1.</b> Place occupée par les capteurs dans une installation industrielle	P.01
<b>Figure 1.1.</b> Principe de fonctionnement du capteur	P.06
<b>Figure 1.2.</b> Erreur : a) zéro ou « offset » ; b) d'échelle ou de gain	P.06
<b>Figure 1.3.</b> Erreur : a) de linéarité b) d'hystérésis	P.07
<b>Figure 1.4.</b> Modélisation de défauts : a) défaut additif; b) défaut multiplicatif	P.08
<b>Figure 1.5.</b> Evolutions temporelles de différents types de défauts : a) abrupt ; b) intermittent ; c) graduel.	P.09
<b>Figure 1.6.</b> Caractéristiques temporelles de la méthode de détection et localisation	P.11
<b>Figure 1.7.</b> Architecture de redondance physique et analytique	P.12
<b>Figure 1.8.</b> Les architectures de GOS et DOS	P.13
<b>Figure 2.1.</b> Schéma présente le principe de l'observateur de Luenberger	P.21
<b>Figure 3.1.</b> Schéma synoptique d'un système dynamique	P.25
<b>Figure 3.2.</b> Étapes du filtre de Kalman	P.29
<b>Figure 3.3.</b> Synoptique de l'algorithme du filtre de Kalman étendu.	P.31
<b>Figure 3.4.</b> Algorithme du filtre de Kalman étendu	P.34
<b>Figure 4.1.</b> Schéma descriptif de la méthode de détection de défauts par estimation	P.44
<b>Figure 4.2.</b> Schéma de commande par retour d'état	P.46
<b>Figure 4.3.</b> La forme des défauts simulés	P.47
<b>Figure 4.4.</b> États vrai, estimé et désiré en l'absence de défaut de capteur	P.48
<b>Figure 4.5.</b> L'innovation de filtre de Kalman en l'absence de défaut de capteur	P.48
<b>Figure 4.6.</b> Défaut simulés et estimés avec $z = 5$	P.49
<b>Figure 4.7.</b> Amplitudes estimées en l'absence de défaut de capteur et écarte-types correspondants avec $z = 5$	P.49
<b>Figure 4.8.</b> États vrai, estimé et désiré en présence de défaut de capteur	P.50



<b>Figure 4.9.</b> L'innovation de filtre de Kalman en présence de défaut de capteur	P.50
<b>Figure 4.10.</b> Défaut simulés et estimés avec $z = 5$	P.51
<b>Figure 4.11.</b> Amplitudes estimées en présence de défaut de capteur et écarte-types correspondants avec $z = 5$	P.51
<b>Figure 4.12.</b> Défauts simulés et estimés avec $z=50$ : (a) en absence de défaut ; (b) en présence de défaut	P.52
<b>Figure 4.13.</b> Amplitudes estimées et écarts-types correspondants avec $z=50$ : (a) en absence de défaut ; (b) en présence de défaut	P.53
<b>Figure 4.14.</b> Défaut simulés et estimés avec $\lambda = 0687$	P.54
<b>Figure 4.15.</b> Amplitudes estimées en absence de défaut de capteur et écarte-types correspondants avec $\lambda = 0687$	P.55
<b>Figure 4.16.</b> Défaut simulés et estimés avec $\lambda = 0.3$	P.55
<b>Figure 4.17.</b> Amplitudes estimées en présence de défaut de capteur et écarte-types correspondants avec $\lambda =0.3$	P.56
<b>Figure 4.18.</b> Défaut simulés et estimés avec $\lambda =0.687$	P.56
<b>Figure 4.19.</b> Amplitudes estimées en présence de défaut de capteur et écarte-types correspondants avec $\lambda =0.687$	P.56
<b>Figure 4.20.</b> Défaut simulés et estimés avec $\lambda =0.9$	P.57
<b>Figure 4.21.</b> Amplitudes estimées en présence de défaut de capteur et écarte-types correspondants avec $\lambda =0.9$ .	P.57

# Introduction générale

---

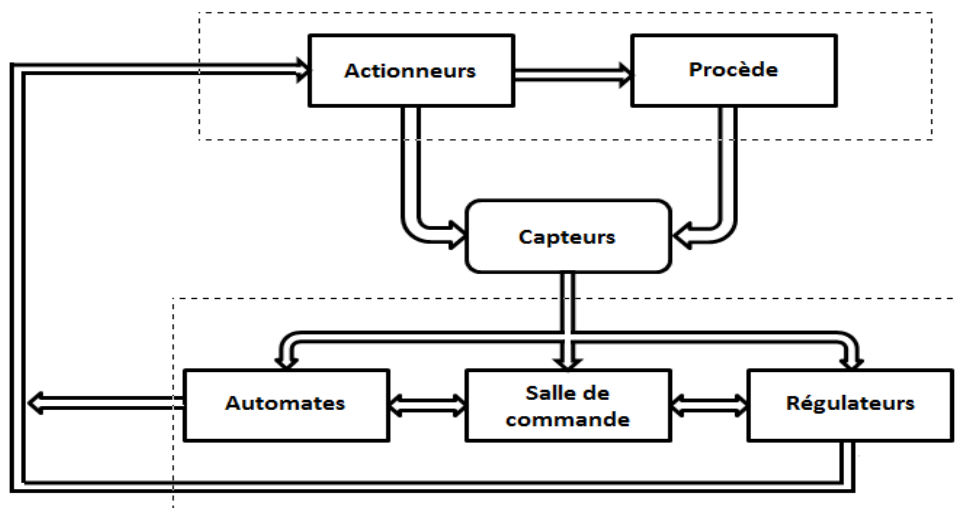
De plus en plus, les automaticiens se préoccupent des problèmes de surveillance des défauts, dans les processus industriels. En effet, l'automatisation des procédés dans l'industrie a atteint un niveau élevé, ce qui fait que la surveillance manuelle est devenue classique, difficile à réaliser et même à gérer.

En outre, pour certains processus, des pannes ou des erreurs de capteurs non détectées peuvent entraîner des fausses alarmes ou des accidents dangereux (centrales nucléaires, aéronautique, etc.).

La détection d'un défaut doit permettre d'éviter ce genre de problème, d'améliorer considérablement la disponibilité du processus et de réduire les coûts de sa maintenance.

On dit qu'il y a un défaut dans un système dynamique lorsque la différence entre le comportement du système et son modèle nominal est importante.

Le capteur occupe une place centrale dans une installation industrielle comme le montre *fig.1*.



*Figure 1.* Place occupée par les capteurs dans une installation industrielle [2]

Il est important de noter que le capteur étant le collecteur d'information sur le processus, on ne peut détecter un défaut sur celui-ci que si l'information qu'il délivre est comparée à une ou plusieurs autres informations redondantes.

Dans cette étude nous nous intéressons à la détection de défauts d'un instrument de mesure des paramètres physiques qui est le capteur, considéré l'organe de la chaîne de mesure le plus sensible car sa qualité est liée à la sienne.

Plusieurs approches de détection des défauts ont été élaborées selon leurs natures. Lorsque la sécurité de fonctionnement de l'installation industrielle est fondamentale, on a recours à la redondance matérielle qui utilise un ensemble de capteurs redondants (au moins trois). Dans les unités industrielles existantes, l'installation de capteurs supplémentaires pour réaliser la redondance est souvent irréalisable à cause de l'espace étroit qui est réservé pour un seul capteur, ou à cause du coût financier prohibitif. En outre, une panne commune à tous les capteurs est toujours possible du fait que ceux-ci peuvent avoir, par exemple, la même alimentation électrique.

Pour parer à ces inconvénients, il faut recourir aux informations délivrées par les autres capteurs. On utilise alors la redondance analytique qui est basée sur la combinaison des signaux d'information disponibles (les entrées et les mesures connues) et d'un modèle mathématique du système.

Dans le présent sujet, on se propose de détecter et localiser les défauts basés sur le modèle dynamique continu du procédé et plus précisément nous avons focalisé notre recherche sur les défauts provenant des capteurs.

Les divers défauts qui peuvent apparaître sur les capteurs doivent être inventoriés et modélisés (modélisation du défaut). Pendant le développement et la mise en œuvre les méthodes, nous avons basé sur la modélisation du défaut additif.

Ce mémoire comporte, outre cette introduction, quatre chapitres et une conclusion générale avec les perspectives.

Le premier chapitre expose la terminologie employée dans le domaine de détection et localisations des défauts des capteurs. Ensuite, la présentation des différentes classes

des défauts ainsi leurs modélisations et types. A la fin du chapitre on trouve une brève description de quelques méthodes de détection.

Le second chapitre est relatif à la méthode choisie pour la détection, qui est l'estimation. On a défini cette méthode ainsi que ses caractéristiques et ses différents types. Enfin, on a cité quelques méthodes d'estimation.

Le troisième chapitre est composé de deux sections pour détailler les deux méthodes d'estimation, citées dans le chapitre précédent. Ces deux méthodes seront développées pour la réalisation de la détection et localisation des défauts des capteurs.

La première section présente les filtres de Kalman classique pour les systèmes linéaires, et étendu pour les systèmes non linéaires. La deuxième partie présente la méthode des moindres carrés.

Le dernier chapitre présente un développement d'une méthode de détection et d'estimation des défauts des capteurs par un seul filtre de Kalman couplé avec l'algorithme des moindres carrés. Celle-ci est appliquée à un système linéaire.

# Chapitre 1 Généralités sur la détection et localisation

---

## 1.1 Introduction

Les besoins croissants d'économie d'énergie et de sûreté de fonctionnement ne peuvent être atteints qu'en utilisant des techniques avancées de surveillance en continu du fonctionnement des procédés et systèmes.

La détection de défaut est l'objet de recherche depuis des décennies. Au début, la recherche a été principalement concentrée sur l'aéronautique ensuite, elle a été appliquée sur d'autres secteurs comme le nucléaire. La littérature sur le sujet s'est enrichie grâce à l'apport de différents groupes de recherches qui ont proposé de variétés d'approches de la détection de défaut basées sur l'expertise de leur propre domaine. Des améliorations de ces méthodes ont été également enrichies en réponse aux exigences de l'industrie en matière de sûreté, fiabilité et automatisation des systèmes.

Ce chapitre est consacré principalement à présenter les différents types d'anomalies qui peuvent se présenter aux capteurs ainsi que les techniques de leurs détection et localisation. Afin de faciliter cette présentation, nous avons fait rappel à quelques définitions de terminologies utilisées.

## 1.2 Terminologies

La diversité des définitions trouvées dans différents travaux fait que nous avons jugé important d'établir un lexique sur les termes qui seront utiles pour la compréhension du présent mémoire [1].

- **Défaut** - Un défaut c'est tout ce qui est en contradiction avec le modèle de fonctionnement normal. Autrement, c'est un écart non permis d'au moins une propriété structurale ou d'un paramètre caractéristique du système par rapport au comportement nominal (usuel ou acceptable).
- **Défaillance** - Une interruption permanente de la capacité du système à remplir une fonction requise dans des conditions d'opérations spécifiées.
- **Dérive** - Une dérive ("Drift" en anglais) est phénomène plus long à détecter du fait de leur faible amplitude à l'origine et de leur lente évolution.
- **Panne** - La panne ("Failure" en anglais) est l'inaptitude d'un dispositif à accomplir une fonction requise. C'est un état résultant d'un ou plusieurs événement (s) de défaillance. Un défaut peut s'aggraver et devenir une panne en cas où il provoque un dysfonctionnement ou un arrêt du processus ou du système.
- **Erreurs** - L'erreur est défini comme la différence entre la valeur délivrée par le système (capteur) et la valeur réelle (physique) que l'on cherche à mesurer.
- **Perturbation** - C'est l'apparition imprévue, brusque ou progressive, d'informations.
- **Détection du défaut** - La détection permet de déceler tout écart du comportement normal du système et alerte les opérateurs humains de supervision de la présence d'un défaut et son temps d'apparition.
- **Localisation du défaut** - La localisation ou l'isolation d'un défaut consiste à déterminer la région physique du système dans laquelle la défaillance s'est produite.
- **Identification du défaut** - Elle permet de remonter à l'origine du défaut après sa détection et de déterminer sa taille et son comportement temporel.
- **Modèle analytique** - Les modèles analytiques étant une représentation mathématique des lois d'évolution des variables physiques du système, le système y est décrit par un ensemble d'équations issues des lois de la physique.
- **Résidu** - Nommé aussi innovation - Les signaux portants de l'information, basés sur l'écart entre les mesures et les calculs basés sur le modèle.
- **Seuil** - La valeur limite de l'écart d'un résidu par rapport à zéro de façon que si elle est dépassée, un défaut est considéré comme détecté.
- **Effet de défaillance** - La conséquence d'un mode de défaillance sur l'opération, la fonction, ou le statut d'une variable.
- **Modélisation du défaut** - Détermination d'un modèle mathématique pour décrire un effet spécifique du défaut.

## 1.3 Défauts des capteurs

### 1.3.1 Principe du capteur

Un capteur transforme une grandeur physique en une grandeur normée, généralement électrique, qui peut être interprétée par un dispositif de contrôle commande.

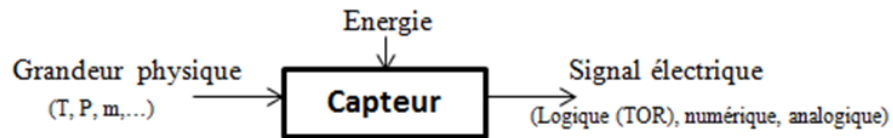


Figure 1.1. Principe de fonctionnement du capteur

### 1.3.2 Classes des défauts des capteurs

On peut classer les défauts de capteurs selon leur origine en deux classes : les erreurs et les pannes [2].

#### a Erreurs

Trois sortes d'erreurs ont été définies :

Les *erreurs de justesse* - les plus connus dans cette catégorie sont l'erreur de zéro ou « offset » et l'erreur d'échelle ou de gain (*fig. 1.2*).

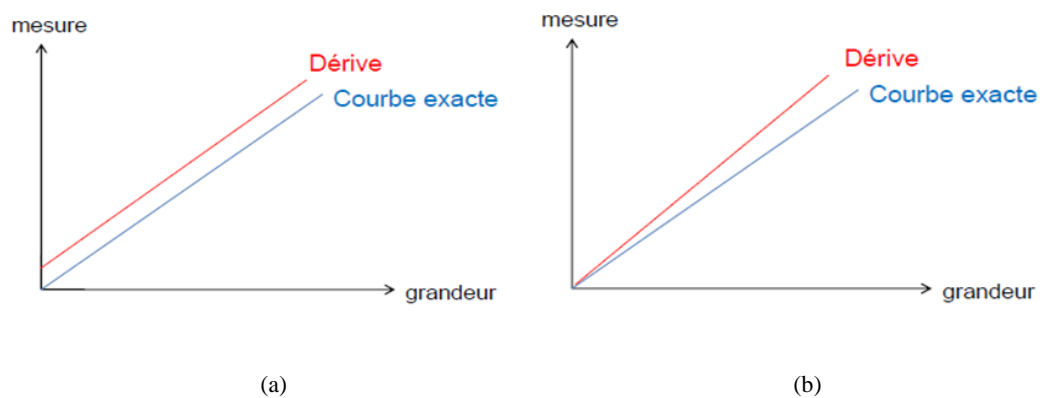


Figure 1.2. Erreur : a) zéro ou « offset » ; b) d'échelle ou de gain

Les *erreurs de fidélité* - les principales erreurs sont ceux de linéarité et de d'hystérésis (fig.1.3).

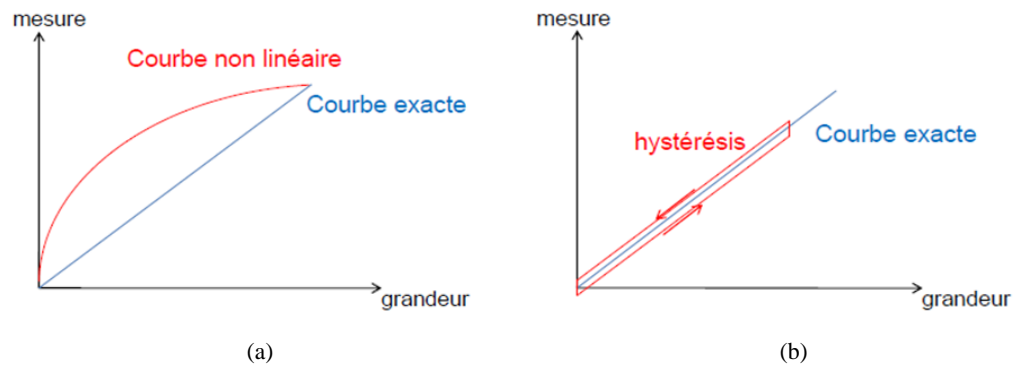


Figure 1.3. Erreur : a) de linéarité b) d'hystérésis

Les *erreurs de précision* - sont des erreurs globales qui regroupent les erreurs de justesse et les erreurs de fidélité.

### b Pannes

Plusieurs types de *pannes* peuvent être dénombrés:

- les pannes naissantes qu'on ne peut distinguer parfois des erreurs à variations aléatoires.
- les pannes passagères ou pannes intermittentes dont la modification s'apparente aux erreurs accidentelles.
- les pannes permanentes qui entraînent l'arrêt du fonctionnement du capteur.
- les pannes catastrophiques qui peuvent mettre en danger le produit fabriqué, le processus, le personnel, etc.

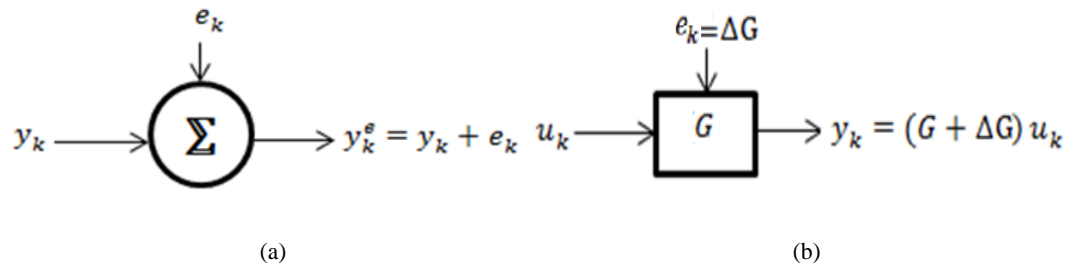
### 1.3.3 Modélisation de défauts

La modélisation de défauts est une représentation formelle de la connaissance que l'on a sur les défauts possibles et de leur influence sur le système. Partant du modèle, les défauts peuvent être classés conformément à fig . 1.4 en *défauts additif* et *multiplicatif* [1].

Les *défauts additifs* influencent une variable  $y_k$  par l'ajout du défaut  $e_k$ , alors que les *défauts multiplicatifs* le font par l'intermédiaire du produit d'une autre variable  $u_k$  avec  $e_k$ . Les défauts sont donc modélisés comme des termes additifs dans le modèle du système, ou comme des changements de paramètres.



La première modélisation est habituellement appropriée aux défauts de capteurs et d'actionneurs, alors que la seconde est destinée aux défauts au niveau de la dynamique du procédé.



**Figure 1.4.** Modélisation de défauts : a) défaut additif ; b) défaut multiplicatif [1]

### 1.3.4 Types des défauts

Les défauts peuvent être différenciés selon leur forme (systématique ou aléatoire), selon l'extension du défaut (local ou global) ou selon leur comportement dans le temps (*fig. 1.5*). La notation  $t_f$  représente l'instant d'occurrence du défaut [1].

On peut classer les défauts selon leur comportement dans le temps en trois types :

- Défaut abrupt
- Défaut Intermittent
- Défaut graduel

#### *a* Défaut abrupt

Ce défaut à un comportement temporel discontinu (*fig. 1.5a*) :

$$f(t - t_f) = \begin{cases} \delta & t \geq t_f \\ 0 & t < t_f \end{cases} \quad (1.1)$$

où  $f(t - t_f)$  représente le comportement temporel du défaut et  $\delta$  un seuil constant.

Ce type de défauts est caractérisé par une discontinuité dans l'évolution temporelle qui décrit le comportement dynamique d'une panne brutale traduit par un arrêt total ou partiel de l'élément sous surveillance.

### ***b* Défaut intermittent**

Ce défaut est un cas particulier de défaut abrupt avec la propriété particulière que le signal revient de façon aléatoire à sa valeur normale. Ce type de défauts caractérise les faux contacts (*fig. 1.5b*).

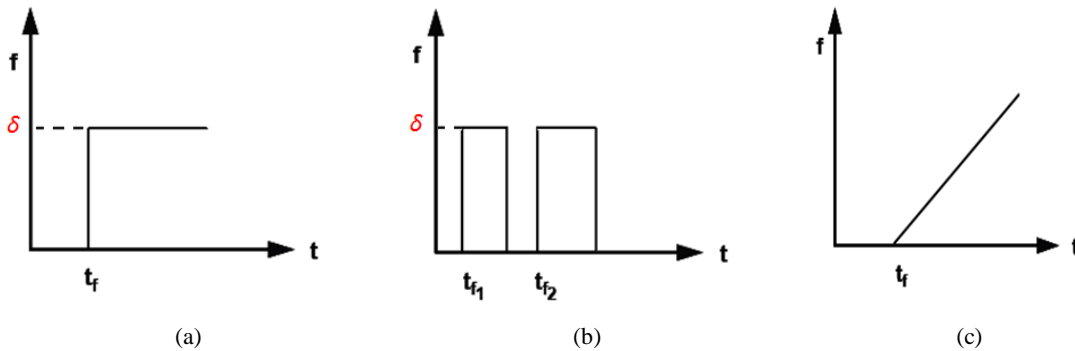
### ***c* Défaut graduel**

On l'appelle des fois *dérives*, à un comportement temporel lent (*fig. 1.5c*)

$$f(t - t_f) = \begin{cases} \delta(1 - e^{-\alpha(t-t_f)}) & t \geq t_f \\ 0 & t < t_f \end{cases} \quad (1.2)$$

où  $\alpha$  et  $\delta$  sont des constantes positives.

Il est très difficile à détecter ce type de défaut car son évolution temporelle à la même signature que celle d'une modification paramétrique lente représentant une non stationnarité du procédé.



**Figure 1.5.** Evolutions temporelles de différents types de défauts : a) abrupt ; b) intermittent ; c) graduel. [1]

## **1.4 Performances de détection**

Un autre aspect important lors de la conception du module de détection et localisation est la performance du système obtenu. Afin de quantifier cette caractéristique, il est nécessaire de définir certains aspects importants pour obtenir une bonne exécution [1].

### **1.4.1 Pourcentage de fausse détection**

Une fausse détection (fausse alarme) correspond à la détection d'un défaut bien qu'aucun défaut ne se soit produit. La méthode de détection et localisation conçue de telle manière que le nombre de fausses alarmes soit le plus bas possible. Ceci pourrait

signifier que par exemple un seuil élevé est choisi pour éviter une fausse détection provoquée par des perturbations ou du bruit de mesure.

### 1.4.2 Pourcentage de détection ratée

Une détection ratée (manquée) décrit la situation où aucune alarme n'est activée bien qu'un défaut soit présent. Le taux d'alarmes manquées doit être le plus bas possible. Pour cela, il faut choisir un seuil assez bas pour assurer également que les défauts de petite taille puissent être détectés. Cependant, c'est évidemment l'opposé de la solution pour éviter de fausses détections.

### 1.4.3 Dynamique du résidu

La dynamique du résidu c'est sa période de détection d'un changement, le résultat pourrait être une fausse localisation. Soit l'exemple suivant : deux défauts sont considérés  $e_1$  et  $e_2$  avec les vecteurs de défaut respectivement  $D_1 = (1,0)$  et  $D_2 = (1,1)$ . Le deuxième résidu  $r_2$  réagit d'une manière lentement que le premier résidu  $r_1$ . Quand le défaut  $e_2$  se produit et que l'évaluation des résidus est effectuée, le premier résidu  $r_1$  a réagi, mais le second  $r_2$  ne l'a pas encore fait, ceci mené à une évaluation fautive du résidu. En conséquence le défaut  $e_1$  apparaît avant  $e_2$ .

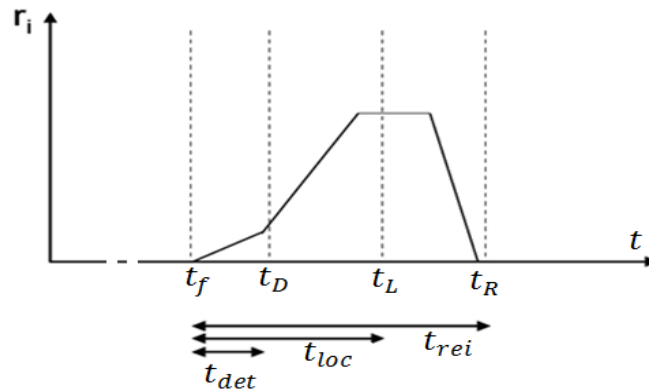
D'autre part, le temps d'apparition du résidu provoqué par un défaut est important. Si le résidu atteint le seuil tandis que le défaut est présent, une détectabilité forte est obtenue. Cependant, quand il atteint le seuil pendant la transition du défaut, il est difficile de le détecter en présence du bruit de mesure. Ceci pourrait provoquer une localisation fautive ou une détection manquée. Une possibilité pour améliorer l'exécution de la méthode de détection et localisation pourrait être le filtrage du résidu.

### 1.4.4 Caractéristiques temporelles

Afin de quantifier temporellement la méthode de détection et localisation, nous définissons le temps de détection et localisation d'un défaut mais aussi le temps minimum entre deux défauts multiples (temps de réinitialisation). Le temps de détection ( $t_{det}$ ) correspond à la différence entre l'instant de Détection ( $t_D$ ) et l'instant d'occurrence du défaut ( $t_f$ ). Le temps de localisation ( $t_{loc}$ ) se détermine en faisant la différence entre l'instant de localisation ( $t_L$ ) et l'instant ( $t_f$ ). Le temps de

réinitialisation ( $t_{rei}$ ) se quantifie par la différence entre l'instant de retour des résidus à leurs valeurs initiale ( $t_R$ ) et l'instant ( $t_f$ ) à condition que la méthode proposée soit capable de réinitialiser.

$$\begin{aligned} t_{det} &= t_D - t_f \\ t_{loc} &= t_L - t_f \\ t_{rei} &= t_R - t_f \end{aligned} \tag{1.3}$$



*Figure 1.6.* Caractéristiques temporelles de la méthode de détection et localisation [1]

## 1.5 Méthodes de détections et localisation des défauts

Dans cette partie, nous présentons quelques méthodes de détection de défauts qui peuvent être appliquées sur des processus linéaires dynamique.

Nous ne donnons ici que des indications sur les principes des différentes techniques, notre but est de montrer leur diversité, et de choisir l'approche la mieux adaptée à notre application.

### 1.5.1 Détection par comparaison a des seuils

Cette technique traditionnelle consiste à comparer chaque variable à des seuils de vraisemblance définis expérimentalement par apprentissage. En cas de dépassement de ces seuils par une ou plusieurs variables dû à des défaillances, il y a alarme. Cette méthode simple est utilisée essentiellement pour détecter des pannes franches [2].

### 1.5.2 Redondance

Le moyen le plus direct pour obtenir une information fiable sur une même variable est de disposer de plusieurs systèmes ou instruments la mesurant simultanément.

Alors, la détection des défauts par redondance peut être faite par deux méthodes selon la nature (hardware ou software) des dispositifs mis en, parallèle ; soit par redondance matérielle ou par redondance analytique (algorithmique) [3].

### *a Redondance Matérielle*

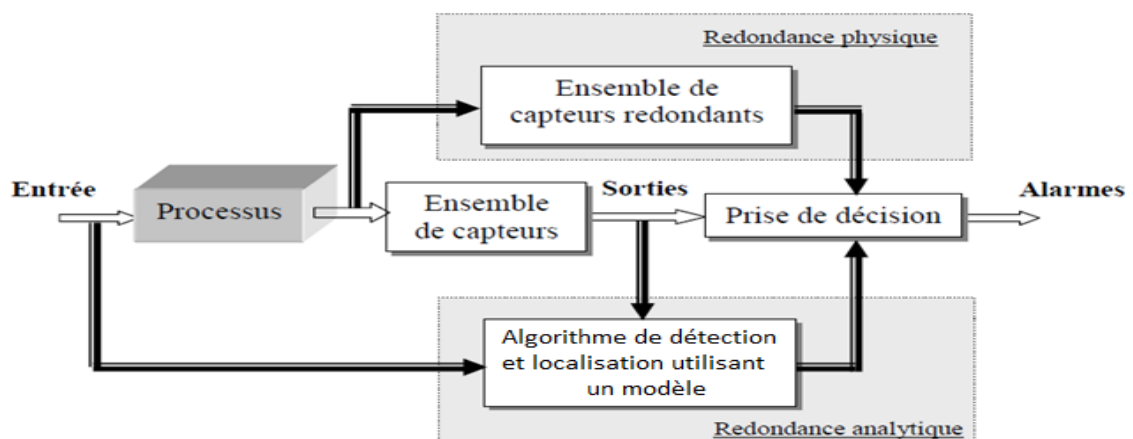
La redondance permettra facilement de détecter un capteur défaillant. Néanmoins cette technique souffre d'un désavantage majeur qui réside dans le fait d'augmenter le nombre de capteurs revient à accroître considérablement son coût et à affronter des problèmes d'encombrement liées à l'installation et sa maintenance.

### *b Redondance analytique*

Ce type de redondance fait appel à des modèles analytiques représentatifs des relations de causalité et aux autres contraintes existant entre les signaux présents dans le système.

Les procédés ainsi modélisés ne suivent pas toujours une telle représentation idéale ceci est dû à la présence d'incertitudes sur les paramètres du modèle à savoir les modifications structurelles du système, les non-linéarités et finalement l'effet des perturbations et des bruits de mesure.

Un couplage entre ces deux méthodes (redondante et analytique) peut se faire comme le montre *fig. 1.7* qui permettra d'avoir des informations additionnelles en exploitant les avantages de chacune [3].



**Figure 1.7.** Architecture de redondance physique et analytique [3]

Les relations de redondance analytique dynamiques sont très bénéfiques car elles offrent la possibilité de détecter aussi bien des défauts de type capteur que des défauts de type actionneur [1].

### 1.5.3 Par estimation

La détection par estimation d'état en utilisant un ensemble de filtres de Kalman. Chaque filtre opère avec un ou plusieurs capteurs défaillants. Parmi les architectures existantes utilisant cette technique, on trouve les approches GOS et DOS.

La technique GOS (Generalized Observer Scheme), illustré par *fig. 1.8a*, consiste à faire fonctionner en parallèle  $n_y$  filtres de Kalman indépendants. Le  $i^{\text{ème}}$  filtre de Kalman se sert de l'intégralité des composantes du vecteur de mesures  $y_k$  à l'exception de la  $i^{\text{ème}}$ , notée  $y_{i,k}$ . Ainsi, si un défaut apparaît sur le capteur mesurant  $y_{i,k}$ , alors l'estimée du  $i^{\text{ème}}$  filtre de Kalman n'en sera pas affectée, ce qui n'est pas le cas des estimées des autres filtres. En mettant en œuvre un test adéquat, il est alors aisé de trouver l'origine du défaut. L'inconvénient majeur du GOS est qu'il ne peut **détecter** et **localiser** qu'un seul défaut à la fois. La localisation s'effectue seulement dans le cas où un FK ne détecte pas de défaut.

Pour détecter et localiser plusieurs défauts éventuellement simultanés, l'architecture DOS (Dedicated Observer Scheme), illustré par *fig. 1.8b*, semble plus indiquée. Son principe est également de faire fonctionner en parallèle  $n_y$  filtres de Kalman indépendants. Toutefois, à la différence du GOS, le  $i^{\text{ème}}$  filtre de Kalman utilise une seule mesure qui est  $y_{k,i}$ . Ainsi, en cas de défaut sur le capteur mesurant cette grandeur, seul le  $i^{\text{ème}}$  filtre de Kalman sera affecté, ce qui rend là encore aisée l'opération de détection et de localisation de défaut, même en cas de défauts multiples.

On note qu'on cas de deux capteurs, les deux configurations, GOS et DOS, sont similaire.

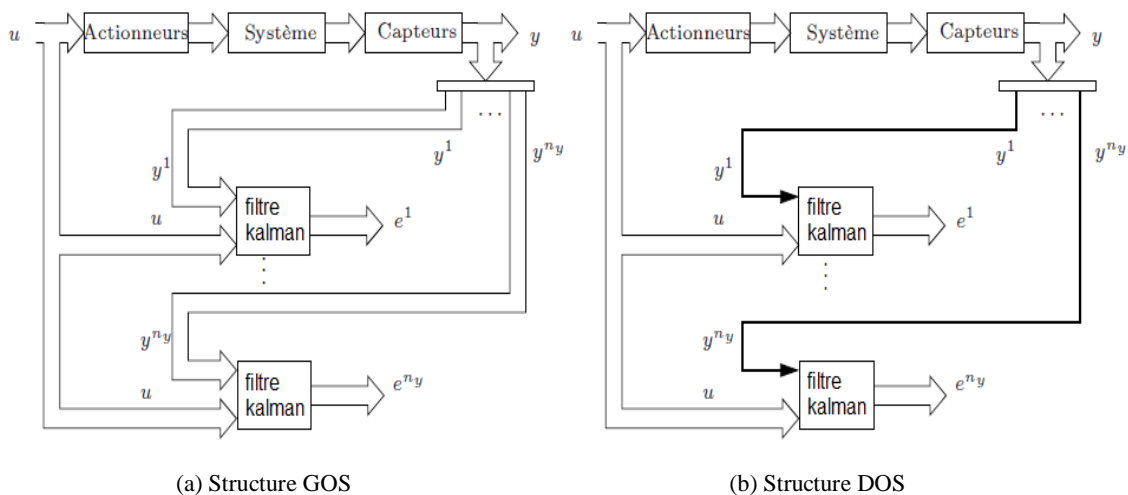


Figure 1.8. Les architectures de GOS et DOS [5]

Il est à remarquer que la technique de détection par estimation est utilisée essentiellement lorsque le processus évolue en régime dynamique [4], [5].

#### **1.5.4 Espace de parité**

Dans [6], Patton et Chen décrivent les relations de parité comme étant des équations qui génèrent un résidu. Ces relations de redondance analytique lient différentes variables du système et peuvent être de deux types :

- *Statiques* - ce sont des relations entre les différentes sorties du système à un instant  $k$ . Ce type de relations permet de détecter l'apparition d'un défaut capteur par la déviation du résidu. Idéalement, en l'absence de défaut le résidu est nul. Toute déviation est synonyme de l'apparition d'un défaut.
- *Dynamiques* - ce sont des fonctions traduisant le lien dynamique entre les sorties mesurées et les entrées du système à différents instants.

Dans le cadre du diagnostic, les relations de parité sont très utiles pour la détection et la localisation de défauts uniques ([7], [8]) dont l'effet sur le système est (ou peut être approximé comme) une entrée additive. Elles offrent également un meilleur temps de détection par rapport aux défauts abrupts, comparativement à l'estimation paramétrique [7], [9].

#### **1.5.5 Analyse en composantes principales**

Récemment, les méthodes de détection et de localisation de défauts reposant sur l'analyse en composantes principales (ACP) ont reçu une attention particulière et ont été largement utilisées pour la surveillance des processus industriels ([10], [11], [12], [13]).

Le but de l'analyse en composantes principales est d'identifier les relations linéaires existantes parmi les différentes variables du système, en utilisant les données d'entrée et de sortie du système. La première étape de cette méthode est la construction d'une matrice contenant l'ensemble des données disponibles sans effectuer une distinction entre les entrées et les sorties du système.

Le principe de cette approche est d'utiliser l'analyse en composantes principales pour modéliser le comportement du processus en fonctionnement normal et les défauts sont alors détectés en comparant le comportement observé et celui donné par le modèle [12].

### **1.5.6 Détection par tests statistiques**

A l'origine, les statisticiens se sont intéressés à vérifier le caractère aléatoire et l'hypothèse de normalité de la loi de distribution d'une série de mesures classées par ordre d'apparition d'une part et de déterminer des valeurs extrêmes d'autre part [14], [15], [16]. Ces statistiques peuvent être adaptées au problème qui nous préoccupe c'est-à-dire celui de la détection de défauts de capteurs. L'idée consiste à calculer des paramètres statistiques sur un ou plusieurs horizons temporels mobiles. Lorsque les valeurs de référence sont connues (en général fonctionnement normal du capteur), une des solutions consiste à traiter sur une fenêtre mobile un échantillon de mesures et à calculer des valeurs statistiques qui sont comparées à la valeur de référence connue a priori. Le résultat de la comparaison détermine la présence ou l'absence d'un défaut de capteur. Les tests utilisés peuvent être par exemple de moyenne, d'écart-type ou de dérive.

Lorsque les valeurs de référence sont inconnues, on peut appliquer des tests statistiques de comparaison à partir de deux horizons mobiles. Quelques tests cités précédemment peuvent être appliqués. De plus, quelques tests de comparaison peuvent être envisagés tels que, la moyenne, la variance, etc. D'autre part, tous les tests de détection de valeurs extrêmes peuvent être aussi adaptés à la détection de défauts de capteurs [2].

## **1.6 Conclusion**

Après avoir défini la terminologie utilisée dans le domaine de la détection des défauts, et présenter les principaux défauts pouvant apparaître sur les capteurs ainsi leur modélisation, nous avons cité les méthodes de détection de défauts les plus utilisées avec peu de détail.

Dans notre mémoire, on a appliqué la méthode d'estimation (analytique) dans la surveillance des défauts des capteurs et ce vu les résultats encourageants qu'elle a donnés dans des différents domaines et principalement dans l'aéronautique et le nucléaire.



# Chapitre 2 Méthodes d'estimation

---

## 2.1 Introduction

Pendant de nombreux siècles, l'estimation est utilisée dans le domaine de navigation, de l'astronomie ...etc. Actuellement, on se trouve avec de nombreuses applications et spécialement dans le domaine de l'ingénierie, le nucléaire, l'économie, la sociologie, etc.

Ainsi l'utilise-t-on lorsqu'il est nécessaire, pour caractériser le phénomène que l'on veut étudier, d'extraire des informations de l'observation de grandeurs physiques. Le plus souvent, l'étape d'estimation est rendue nécessaire du fait de la nature même des observations qui sont réalisées au moyen de capteurs.

## 2.2 Définition

L'estimation, nommée aussi prédiction, fait partie des mathématiques statistiques et qui permet, à partir des observations effectuées sur un système, de prévoir par des valeurs proches les différents paramètres de ce système qui sont supposés inconnus.

Soit  $\theta$  un paramètre de la distribution, dont la vraie valeur, considérée inconnue, est  $\theta_0$ . Un estimateur est une fonction des observations (statistiques) de l'échantillon et dont la valeur sera utilisée en lieu et place de la valeur vraie  $\theta_0$  du paramètre  $\theta$ . La valeur prise par un estimateur sur un échantillon donné est appelé une estimation (de  $\theta_0$ ) [17].

## 2.3 Applications

L'estimation est largement utilisée, elle se trouve dans nombreux domaines, par exemple se trouve dans :

- **Détection de défauts** - Estimer les défauts du capteur ou d'un actionneur. Dans notre travail, on s'intéresse sur la détection par estimation.
- **Navigation** - En radar le but est estimer d'objet (avion, bateaux,.. etc.).
- **Economie** - Estimer la resette d'une industrie chaque année.

- *Statistique* - Estimer le nombre de la population dans une région.

## 2.4 Caractéristiques

Un estimateur est une valeur  $\hat{\theta}$  calculée sur un échantillon tiré au hasard. La valeur  $\hat{\theta}$  est donc une variable aléatoire possédant une espérance  $E[\hat{\theta}]$  et une variance  $Var[\hat{\theta}]$ . On comprend alors que sa valeur puisse fluctuer selon l'échantillon. Elle a de très faibles chances de coïncider exactement avec la valeur  $\theta$  qu'elle est censée représenter. L'objectif est alors de minimiser l'erreur entre la valeur réelle  $\theta$  et son estimation  $\hat{\theta}$ .

La qualité d'estimateur s'exprime par leur convergence, biais, efficacité, erreur quadratique et robustesse.

### 2.4.1 Biais

Le biais d'estimation  $\hat{\theta}$  d'un paramètre  $\theta$  est défini par :

$$Biais[\hat{\theta}] = E[\hat{\theta}] - \theta \quad (2.1)$$

On dit que l'estimateur  $\hat{\theta}$  est :

- sans biais (non biaisé) si  $Biais[\hat{\theta}] = 0$ , c'est-à-dire si  $E[\hat{\theta}] = \theta$ .
- avec biais (biaisé) si  $Biais[\hat{\theta}] \neq 0$ , c'est-à-dire si  $E[\hat{\theta}] \neq \theta$ .

### 2.4.2 Erreur quadratique moyenne

On mesure la précision globale d'un estimateur par son *erreur quadratique moyenne*.

Soit  $\hat{\theta}$  un estimateur d'un paramètre  $\theta$ , on définit l'erreur quadratique moyenne de  $\hat{\theta}$  par :

$$EQM[\hat{\theta}] = E[\hat{\theta} - \theta]^2 \quad (2.2)$$

On a toujours :

$$EQM[\hat{\theta}] = Var[\hat{\theta}] + [Biais[\hat{\theta}]]^2 \quad (2.3)$$

Lorsque  $\hat{\theta}$  est sans biais pour  $\theta$ , on a :

$$Biais[\hat{\theta}] = 0 \quad (2.4)$$

et

$$EQM[\hat{\theta}] = Var[\hat{\theta}]$$

Le critère de l'erreur quadratique moyenne permet de comparer les estimateurs d'un même paramètre. Ainsi, si  $\hat{\theta}_1$  et  $\hat{\theta}_2$  sont deux estimateurs d'un paramètre  $\theta$ , le plus

efficace des deux est celui ayant la plus petite erreur quadratique moyenne. Si on considère que  $\hat{\theta}_1$  est plus efficace que  $\hat{\theta}_2$  alors,  $EQM[\hat{\theta}_1] < EQM[\hat{\theta}_2]$ , [18].

### 2.4.3 Convergence

Un estimateur  $\hat{\theta}$  est convergent si sa distribution tend à se concentrer autour de la valeur inconnue à estimer  $\theta$ , à mesure que la taille d'échantillon augmente, c'est-à-dire si :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} Var[\hat{\theta}] = 0. \quad (2.5)$$

### 2.4.4 Efficacité

Un estimateur sans biais est efficace si sa variance est la plus faible parmi les variances des autres estimateurs sans biais. Ainsi, si  $\hat{\theta}_1$  et  $\hat{\theta}_2$  sont deux estimateurs sans biais du paramètre  $\theta$ , l'estimateur  $\hat{\theta}_1$  est efficace si :

$$Var[\hat{\theta}_1] < Var[\hat{\theta}_2]$$

et

$$E[\hat{\theta}_1] = E[\hat{\theta}_2] = \theta$$

(2.6)

### 2.4.5 Robustesse

On dit que l'estimateur est robuste, si les valeurs de l'estimateur change d'une manière très faible.

## 2.5 Types d'estimation

On cite deux types d'estimation ; estimation des paramètres et d'état.

### 2.5.1 Estimation des paramètres

Un estimateur du paramètre inconnu  $\theta$  d'un modèle est une fonction qui fait correspondre à une suite d'observation  $x_1, x_2, \dots, x_n$  issues du modèle la valeur  $\hat{\theta}$  que l'on nomme estimé ou estimation.

$$\hat{\theta} = f(x_1, x_2, \dots, x_n) \quad (2.7)$$

Un estimateur ne doit évidemment jamais dépendre de  $\theta$ , il ne dépend que des observations empiriques.

## 2.5.2 Estimation d'état

L'estimation d'état est basée sur la représentation d'état qui décrit le processus physique fondamentale de l'application, alors cette estimation consiste à contracter l'ensemble  $x(t)$  à temps continu ou  $x_k$  à temps discret, en utilisant l'information fournie par les mesures [19].

On remarque qu'il y a une différence fondamentale entre les problèmes d'estimation du paramètre d'une part, et l'estimation de l'état d'autre part. Il s'agit de la commande en temps (ou en espace) dans l'estimation d'état, qui est absent dans l'estimation des paramètres.

## 2.6 Méthodes d'estimation

Nous présentons quelques méthodes plus connues d'estimation qui peuvent être appliquées dans la détection des défauts des capteurs.

### 2.6.1 Moindres carrés

Historiquement, la méthode des moindres carrés est le premier outil d'estimation. Elle reste encore très utile et appréciée pour son caractère intuitif et le peu de concepts mathématiquement et d'hypothèses qu'elle nécessite. En fait la méthode des moindres carrés reste la référence partout où elle est applicable.

Le principe de cette méthode est de minimiser une fonction de l'erreur quadratique qu'on l'appelle fonction de coût  $J$  définie par :

$$J = \sum_{k=1}^N [\varepsilon(k)]^2 \quad (2.8)$$

où  $\varepsilon(k)$  représente l'erreur de prédiction commise sur l'estimation [20].

Parmi les avantages de la méthode MC est sa simplicité à implémenter, et son traitement du problème d'estimation de la même manière que celui d'optimisation déterministe. Cela veut dire que ne nécessite pas des hypothèses stochastiques.

Le principal inconvénient de cette méthode est le faite que les performances d'estimation sont basés sur la nécessité de la connaissance des caractéristiques du bruit (moyenne, covariance). En plus, elle utilise une large mémoire dans ses calculs, car en fait elle exploite à chaque instant toutes les données de l'archive calculées auparavant. On revient avec plus des détails sur la théorie du MC dans le chapitre suivant.

## 2.6.2 Filtre de Kalman

Le *filtre de Kalman*, également connu sous le nom *estimation linéaire quadratique*, est développé par R. E. Kalman dans les années soixante. Cet algorithme fonctionne de manière récursive dans les cas stochastiques. Il utilise une série de mesures observées au cours de temps, contenant du bruit et d'autres inexactitudes (défauts du système), et il produit des estimations de variables inconnues qui sont plus précises que celles basées sur une seule mesure [21].

Le filtre de Kalman expose beaucoup d'avantages, parmi ses avantages que le principe de cette méthode est de minimiser l'erreur quadratique moyenne pour pouvoir estimer les états passés, présents et futurs d'une manière récursive sans avoir toutes les données avant de commencer les calculs. Ainsi, c'est un outil indispensable d'estimation d'état pour les systèmes dynamiques, car il est rapide et facile à implémenter.

C'est vrai que le FK est le meilleur estimateur dans le cas linéaire, par contre il expose un inconvénient dans le cas non-linéaire, le FK étendu n'a pas encore atteint les bonnes performances relatives à d'autres algorithmes, mais généralement il donne de bons résultats.

On revient dans le chapitre suivant sur cette théorie.

## 2.6.3 Observateur de Luenberger

Soit le système linéaire discret décrit par Eq. 2.9 suivante :

$$\begin{cases} x_{k+1} = F x_k + G u_k \\ y_k = H x_k \end{cases} \quad (2.9)$$

Les matrices  $F$ ,  $G$  et  $H$  sont constantes. On se place dans le cadre déterministe (les bruits sont négligés). L'observabilité du système doit être confirmée en premier lieu, par le critère de Kalman qui dit que le *système* est *observable*, si et seulement si Eq. 2.10 est vérifiée.

$$\text{rang} \begin{bmatrix} H \\ H F \\ \vdots \\ H F^{n-2} \\ H F^{n-1} \end{bmatrix} = n \quad (2.10)$$

où  $n$  étant la dimension de l'espace d'état.

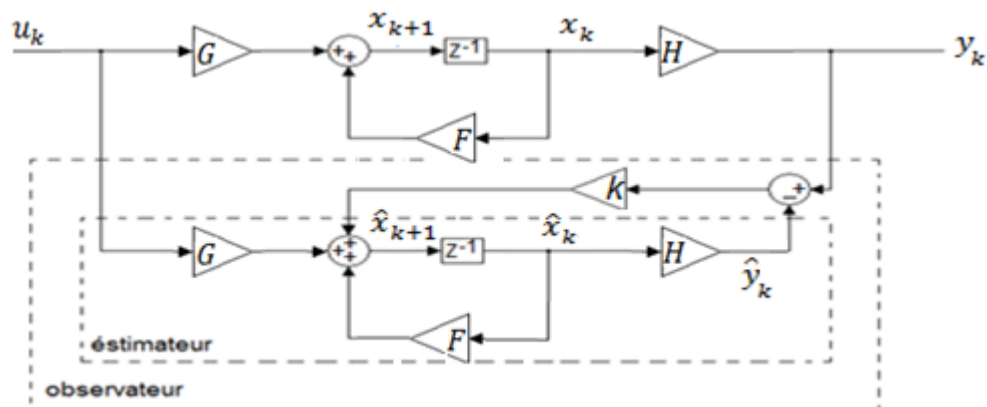
L'observateur linéaire de Luenberger est composé d'un estimateur fonctionnant en boucle ouverte qui est caractérisé par la même dynamique que celle du système. La structure fonctionnant en boucle fermée obtenue par l'intermédiaire du gain  $K$ , impose la dynamique propre de cet observateur (voir *fig. 2.1*). L'erreur  $e = (\hat{y} - y) = H(\hat{x} - x)$  assure le fonctionnement en boucle fermée. Elle est multipliée par une matrice de gain  $K$  et envoyée à l'entrée de l'observateur pour corriger les variables d'états estimées. L'observateur de Luenberger est décrit par *Eq. 2.11*, suivante :

$$\hat{x}_{k+1} = (F - KH)\hat{x}_k + Gu_k \quad (2.11)$$

Un choix judicieux du gain  $K$  tel que les valeurs propres de la matrice  $(F - KH)$  soient à parties réelles strictement négatives, peut modifier la dynamique de l'observateur et de la vitesse de convergence de l'erreur vers zéro [22].

Les différentes grandeurs citées sur *fig. 2.1* sont:

- $u$ : Vecteur d'entrée du système et de l'observateur ;
- $x$ : Vecteur d'état ;
- $y$ : Vecteur de sortie du système ;
- $\hat{x}$ : Vecteur d'état reconstruit par l'observateur;
- $\hat{y}$ : Vecteur de sortie de l'observateur.



**Figure 2.1.** Schéma présente le principe de l'observateur de Luenberger

## 2.6.4 Méthode du maximum de vraisemblance

Cette méthode consiste, étant donné un échantillon de valeurs  $x_1, x_2, \dots, x_n$  à prendre comme estimation de  $\theta$  la valeur de  $\theta$  qui rend maximale la vraisemblance :

$$L(x_1, x_2, \dots, x_n; \theta) \quad (2.12)$$

En pratique on prend comme estimation de  $\theta$  une solution de l'équation :

$$\frac{\partial}{\partial \theta} \ln L(X; \theta) = 0 \quad (2.13)$$

Eq. 2.13 dite "*équation de la vraisemblance*".

Intuitivement, puisque  $L$  représente une densité de probabilité, cela revient à supposer que l'événement qui s'est produit était le plus probable [23].

## 2.6.5 Méthode des moments

C'est la méthode la plus naturelle, que nous avons déjà utilisée sans la formaliser.

L'idée de base est d'estimer une espérance mathématique par une moyenne empirique, une variance par une variance empirique, etc...

Si le paramètre à estimer est l'espérance de la loi des  $X_i$ , alors on peut l'estimer par la moyenne empirique de l'échantillon. Autrement dit, si  $\theta = E(X)$ , alors l'estimateur de  $\theta$  par la méthode des moments (EMM) est :

$$\hat{\theta} = \bar{X}_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i \quad (2.14)$$

Plus généralement, pour  $\theta \in R$ , si  $E(X) = \varphi(\theta)$ , où  $\varphi$  est une fonction inversible, alors l'estimateur de  $\theta$  par la méthode des moments est  $\tilde{\theta} = \varphi^{-1}(\bar{X}_n)$ . De la même manière, on estime la variance de la loi des  $X_i$  par la variance empirique de l'échantillon :

$$\text{Var}[\hat{\theta}] = S_n^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X}_n)^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i^2 - \bar{X}_n^2 \quad (2.15)$$

Plus généralement, si la loi des  $X_i$  a deux paramètres  $\theta_1$  et  $\theta_2$  tels que

$(E(X), \text{Var}(X)) = \varphi(\theta_1; \theta_2)$ , où  $\varphi$  est une fonction inversible, alors les estimateurs de  $\theta_1$  et  $\theta_2$  par la méthode des moments sont :

$$(\hat{\theta}_{1n}, \hat{\theta}_{2n}) = \varphi^{-1}(\bar{X}_n, S_n^2) \quad (2.16)$$

Ce principe peut naturellement se généraliser aux moments de tous ordres, centrés ou non centrés :

$$E[(X - E(X))^K] \quad (2.17)$$

et

$$E(X)^K, K \geq 1 \quad (2.18)$$

Cette méthode est avantageée par la simplicité de la mise en œuvre, ainsi que ne nécessite pas d'hypothèses sur la loi  $X_i$ . Par contre le majeur inconvénient de cette méthode que n'y pas d'optimalité et elle nécessite aussi l'analyse statistique cas par cas [24].

## **2.7 Conclusion**

Dans ce chapitre, on a défini les notions d'estimation, ses caractéristiques, ses différents types, ainsi que les méthodes les plus utilisés.

Dans notre travail, on veut faire la détection des défauts dans les capteurs, pour cela, le système doit satisfaire nos besoins, c'est-à-dire le système soit en régime dynamique, donc la modélisation du ce système est représenté par l'équation d'état. Et pour assurer le bon fonctionnement de capteur, il faut le surveiller à chaque instant. Pour cela nous sommes obligées de choisir un estimateur qu'est applicable dans ces conditions. Dans ce cas le filtre de Kalman c'est le meilleur estimateur. Dans le chapitre suivant, on va décrire ce filtre en détaille.



# Chapitre 3 Le filtre de Kalman et Moindres carrés récursifs

## 3.1 Introduction

Dans ce chapitre, on présente les deux méthodes d'estimations, la première section présente le filtre Kalman et la seconde est consacrée pour les moindres carrés. On s'intéresse au cas discret qui est plus simple et plus utilisé dans les développements.

## 3.2 Filtre de Kalman

En 1960, R.E. Kalman a publié un article intitulé "A new Approach to Linear Filtering and Prediction Problems". Ce travail a été amélioré par la suite et qui a pris son nom ; filtre de Kalman.

Le FK est un outil mathématique puissant de l'automatique et du traitement du signal. Il est utilisé dans une large gamme de domaines technologiques (radar, vision électronique, communication, etc.). Il permet d'estimer l'état courant d'un système en fonction de son état précédent, des commandes et de mesures bruitées. Il est appliqué, en temps réel, aux systèmes linéaire ou non-linéaire. Dans le cas d'un système non-linéaire, ce filtre a été étendu en utilisant la linéarisation de système [21], [25].

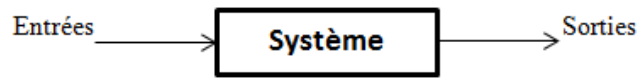
### 3.2.1 Définition

Utilisant la représentation d'état du système, le FK se présente sous la forme d'un ensemble d'équations récurrentes faciles à résoudre d'un point de vue numérique. Cela signifie que pour estimer l'état courant, seule l'estimation de l'état précédent et les mesures actuelles sont nécessaires. Sa réalisation fournit non seulement l'estimation optimale de l'état  $x(t)$  du système, mais aussi la minimisation de la variance de l'erreur d'estimation  $\tilde{x}(t)$  [26], [27].

$$E[\tilde{x}(t)\tilde{x}(t)^T] = E\{[x(t) - \hat{x}(t)][x(t) - \hat{x}(t)]^T\} \quad (3.1)$$

### 3.2.2 Système Dynamique

Un système est dit dynamique si son comportement évolue au cours du temps et du point de vue conceptuel il peut être présenté par *fig. 3.1* :



*Figure 3.1.* Schéma synoptique d'un système dynamique

Le comportement d'un système dynamique traduit ainsi l'évolution au cours du temps des sorties en fonction des entrées appliquées. D'une autre manière, on peut dire qu'un système dynamique traduit la relation de causalité entre les entrées (causes) et les sorties (effets). Cette relation constitue le modèle ou le processus du système [28].

Un système dynamique est caractérisé par trois concepts suivants :

- les fonctions à réaliser correspondant aux objectifs pour lesquels le système a été créé.
- la structure qui correspond aux moyens mis en œuvre pour accomplir la fonction du système. Généralement, la structure d'un système correspond à l'organisation matérielle et/ou logicielle des ressources qui peuvent faire intervenir plusieurs technologies. Classiquement, on peut classer les différentes structures des systèmes dynamiques selon leur nature technologique (thermo-hydrauliques, mécaniques, électriques informatiques, électriques, électroniques, chimiques, etc.).
- le comportement qui caractérise la forme d'accomplissement par le système d'une ou plusieurs fonctions.

### 3.2.3 Exemple d'application

Dans le cas des radars où l'on désire suivre une cible, des données sur sa position, sa vitesse et son accélération sont mesurées à chaque instant mais avec énormément de perturbations dues aux bruits ou aux erreurs de mesure. Le FK fait appel à la dynamique de la cible qui définit son évolution dans le temps pour obtenir de meilleures données, éliminant ainsi l'effet du bruit. Ces données peuvent être calculées à l'instant présent (filtrage), au passé (lissage), ou au futur (prédiction).

### 3.2.4 Représentation d'état

En automatique, une représentation d'état permet de modéliser un système dynamique sous forme matricielle en utilisant des variables d'état. Cette représentation, qui peut être linéaire ou non-linéaire, continue ou discrète, permet de déterminer l'état du système à n'importe quel instant futur si l'on connaît l'état à l'instant initial et le comportement des effets de perturbation qui peuvent influencer sur le système.

Les variables d'état sont des grandeurs, souvent ont une signification physique, et qui sont rassemblées dans un vecteur  $x$ . La connaissance de toutes les variables d'état à un instant  $t$  quelconque ainsi que de l'entrée sur un intervalle  $[t, t + T]$ , où  $T$  est une valeur de temps arbitraire, permet de connaître la valeur de toutes les variables du système à l'instant  $t + T$ . Le nombre de variables d'état, désigné par  $n$ , est l'ordre du système.

#### *a* Système linéaire

La représentation d'état des systèmes linéaires en temps continu, s'écrit :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = F(t) x(t) + G(t) u(t) \\ y(t) = H(t) x(t) + D(t) u(t) \end{cases} \quad (3.2)$$

où:

- $x(t) \in R^n$  - colonne qui représente les  $n$  variables d'état ;
- $u(t) \in R^m$  - colonne qui représente les  $m$  commandent
- $y(t) \in R^p$  - colonne qui représente les  $p$  sorties
- $F(t) \in R^{n \times n}$  - Matrice d'état variant dans le temps
- $G(t) \in R^{n \times m}$  - Matrice de commande variant dans le temps
- $H(t) \in R^{p \times n}$  - Matrice d'observation variant dans le temps
- $D(t) \in R^{p \times m}$  - Matrice d'action directe variant dans le temps.

Dans le cas d'un système linéaire en temps discret, obtenu par la discrétisation du système à temps continu, la représentation d'état s'écrit de la manière suivante :

$$\begin{cases} x_{k+1} = F_k x_k + G_k u_k \\ y_k = H_k x_k + D_k u_k \end{cases} \quad (3.3)$$

#### *b* Système non-linéaire

Une représentation d'état classique d'un système non-linéaire s'écrit sous la forme :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = f(x, u, t) \\ y(t) = h(x, u, t) \end{cases} \quad (3.4)$$

où  $x$  est le vecteur d'état,  $y$  le vecteur de sortie et  $u$  le vecteur d'entrée.

Ces variables sont définies sur un intervalle ouvert non vide  $Z$  de la droite réelle. On suppose que  $x(t) \in X', u(t) \in U, y(t) \in Y, \forall t \in Z$ , où  $X', U$  et  $Y$  sont des intervalles ouverts non vides de  $R^n, R^m$  et  $R^p$ , respectivement. La première équation est celle d'évolution et la seconde est celle d'observation. La représentation d'état linéaire décrite précédemment est un cas particulier de l'état non-linéaire, obtenue lorsque les fonctions  $f$  et  $h$  sont linéaires par rapport à  $(x, u)$ .

Dans le cas d'un système non-linéaire à temps discret, la représentation d'état s'écrit :

$$\begin{cases} x_{k+1} = f(x_k, u_k) \\ y_k = h(x_k, u_k) \end{cases} \quad (3.5)$$

### 3.2.5 Principe du filtre de Kalman

Le FK discret permet d'estimer l'état  $x_k$ , connue de point de vue statistique, d'un système évoluant au cours du temps (discret) à partir d'observations partielles et bruitées.

Cet état est gouverné par

$$x_{k+1} = F_k x_k + G_k u_k + w_k \quad (3.6)$$

On dispose d'une suite de mesures  $y_k$ , obtenus grâce aux capteurs, reliées à l'état du système par

$$y_k = H_k x_k + v_k \quad (3.7)$$

Lorsque l'on regroupe ces deux équations linéaires on obtient le système dynamique *Eq. 3.6 – Eq. 3.7*.

Les matrices  $w_k$  et  $v_k$  représentent respectivement le bruit de d'état et le bruit de mesure.

Selon l'équation de mesure, à chaque itération  $k$  on a une mesure  $y_k$  qui nous donne des informations sur l'état du système bruité. Sachant qu'à l'itération  $k$ , un ensemble de mesures précédentes  $\sigma_k = \{y_0, \dots, y_k\}$  est déjà mémorisé pour utilisation dans l'état actuelle.

Le système vérifiant *Eq. 3.6 – 3.7* doit être **commandable** et **observable**.

D'après le critère de Kalman, un système est:

- observable, si et seulement si *Eq. 2.10* est vérifiée.
- commandable, si et seulement si la condition :

$$\text{rang} [ G (GF) \dots (GF^{n-1}) ] = n \quad (3.8)$$

Où  $n$  est une dimension de l'espace d'état.

### 3.2.6 Théorie de filtre de Kalman

Comme on a dit précédemment, le principe du FK est de minimiser la covariance de l'erreur d'état (Eq. 3.1). Afin de pouvoir appliquer cette condition, certaines hypothèses doivent être prises en considération [27].

#### a Hypothèses

On applique ici le FK sur des systèmes qui peuvent être modélisés par des équations différentielles linéaires stochastiques.

Pour pouvoir appliquer le FK sur ces systèmes il faut :

1. Un système dynamique linéaire bruité. L'évolution du système peut donc s'écrire sous la forme Eq. 3.6. Où  $F_k$  et  $G_k$  sont des matrices qui dépendent de la modélisation du système,  $x_k$  est un vecteur représentant l'état du système,  $u_k$  est un vecteur représentant les commandes appliquées et  $w_k$  est un bruit. Chaque terme est pris à l'instant  $k$ .
2. L'équation de mesures Eq. 3.7, liées linéairement à l'état du système, et bruitées. Où  $y_k$  est le vecteur contenant les mesures effectuées à l'instant  $k$ ,  $H_k$  est une matrice, et  $v_k$  le bruit de mesure.
3. Des bruits blancs, centrés, indépendants, de matrices de covariance  $Q_k$ ,  $R_k$  connues :

$$\begin{aligned}\forall i, j, v_i \perp w_j & \quad (\text{Incorrélé}) \\ \forall i \neq j, v_i \perp v_j & \quad (\text{Incorrélé}) \\ \forall i \neq j, w_i \perp w_j & \quad (\text{Incorrélé}) \\ w_k \sim (0, Q_k) & \quad (\text{Bruit blanc gaussienne}) \\ v_k \sim (0, R_k) & \quad (\text{Bruit blanc gaussienne})\end{aligned}$$

Si les hypothèses citées ci-dessus sont réunies, le FK est le filtre optimal pour l'estimation de l'état du système. Ce filtre garantit que l'erreur sur l'estimation est en moyenne nulle et minimise l'incertitude sur cette erreur [21].

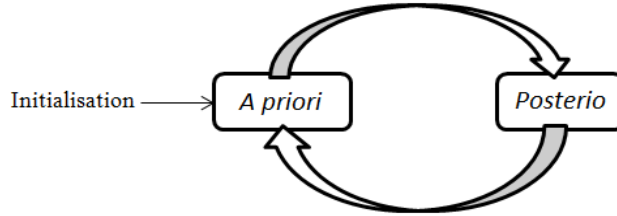
#### b Étapes de calcul

Le FK est très puissant grâce à l'utilisation d'un contrôle en feedback. En fait, il estime l'état du système puis améliore son résultat avec les mesures bruitées fournies par les capteurs. Alors ; on cherche à trouver l'estimation de  $x_k$  qui minimise la covariance  $P_k$  [25].

Le calcul de l'état estimé  $\hat{x}$ , à chaque instant, nécessite deux étapes comme est illustré par *fig. 3.2* :

- Étape a priori- On estime  $\hat{x}_{k+1}^-$  à l'aide de l'estimation corrigée de  $\hat{x}_k^+$ .
- Étape posteriori - À l'aide de  $y_k$ , on corrige l'estimation de  $\hat{x}_{k+1}^+$ .

Notons que les deux étapes citées ci-dessus sont précédées par une initialisation.



**Figure 3.2.** Étapes du filtre de Kalman

### i Initialisation

À l'instant  $k = 1$ , on a aucune mesure disponible. La première mesure arrive à l'instant  $k = 2$ . La valeur initiale de l'état est une variable aléatoire. Il paraît logique en l'absence de mesure que l'estimation de  $x_1$  est donné en fonction de son espérance.

$$\hat{x}_1 = E[x_1] \quad (3.9)$$

Afin de minimiser la covariance de l'erreur, on a besoin de calculer la covariance initiale :

$$P_1 = E[(x_1 - \hat{x}_1)(x_1 - \hat{x}_1)^T] \quad (3.10)$$

On note que si la valeur de l'état de départ estimé  $\hat{x}_1$  du système est la même que celle de l'état initial  $x_1$ , ( $\hat{x}_1 = x_1$ ) alors la covariance initiale  $P_1$  sera nulle.

Dans le cas contraire où l'état du système est inconnu, la covariance  $P_1$  est de norme infinie, ce qui rend les calculs numériques impossibles (codage en binaire de l'infini est pratiquement impossible).

### ii à priori

Soit  $x$  une variable aléatoire et son estimation  $\hat{x}$ , l'erreur sur l'estimation vaut  $x - \hat{x}$  et est noté  $\tilde{x}$ . Dans cette étape on cherche à trouver l'estimation  $\hat{x}_k^-$  qui minimise la covariance  $P_k^-$  ce qui nécessite alors deux équations. La première estime l'état à priori et la deuxième calcule la covariance de l'erreur a priori [21], [29].

L'estimation d'état à priori :

$$\hat{x}_{k+1}^- = F_k \hat{x}_k^+ + G_k u_k \quad (3.11)$$

Calcul la covariance de l'erreur a priori :

$$P_{k+1}^- = F_k P_k^+ F_k^T + Q_k \quad (3.12)$$

*iii à posteriori*

Maintenant, on utilise la mesure  $y_{k+1}$  pour corriger l'estimation a priori  $\hat{x}_k^-$  et obtenir l'estimation a posteriori notée  $\hat{x}_k^+$ . En appliquant le théorème récursif des moindres carrés, cette étape nécessite trois équations. La première calcule le gain de Kalman, la deuxième estime l'état posteriori et la troisième calcule la covariance de l'erreur à posteriori [21].

Calcul du gain de kalman :

$$K_{k+1} = P_{k+1}^- H_{k+1}^T (H_{k+1} P_{k+1}^- H_{k+1}^T + R_{k+1})^{-1} \quad (3.13)$$

L'estimation d'état à posteriori :

$$\hat{x}_{k+1}^+ = \hat{x}_{k+1}^- + K_{k+1} (y_{k+1} - H_{k+1} \hat{x}_{k+1}^-) \quad (3.14)$$

Calcul de la covariance de l'erreur à posteriori :

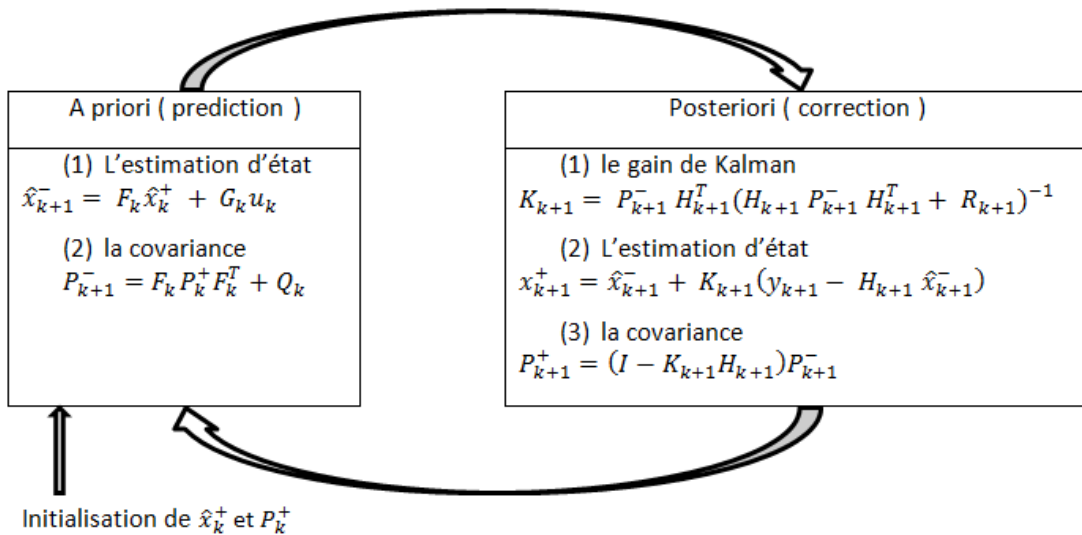
$$\begin{aligned} P_{k+1}^+ &= (I - K_{k+1} H_{k+1}) P_{k+1}^- (I - K_{k+1} H_{k+1})^T + K_{k+1} R_{k+1} K_{k+1}^T \\ &= (I - K_{k+1} H_{k+1}) P_{k+1}^- \end{aligned} \quad (3.15)$$

***Démonstrations des Eq. 3. 11 – Eq. 3. 16 - voir l'annexe A***

On remarque que l'estimation ***à priori*** est corrigée par l'ajout du terme

$K_{k+1} (y_{k+1} - H_{k+1} \hat{x}_{k+1}^-)$ . Celui-ci est appelé ***innovation*** car il représente les informations supplémentaires apportées par la mesure. En effet il est proportionnel à la différence entre la mesure qu'on a obtenue et celle qu'on aura dû obtenir si la mesure et le processus lui-même n'étaient pas bruités. Il est également proportionnel à  $K_k$ , le gain de Kalman au temps  $k$ , qui traduit l'importance relative à accorder à la mesure par rapport à l'estimation a priori [21].

On présente sur *fig. 3.3* la synoptique de l'algorithme du FK par un diagramme plus détaillé que le précédent qui a été présenté par *fig. 3.2*.



**Figure 3.3.** Synoptique de l'algorithme du filtre de Kalman étendu.

La plupart des systèmes physiques se trouvent en l'état non-linéaire et la méthode d'estimation par FK est très efficace dans le cas des systèmes linéaires. Malheureusement, l'application directe du FK n'est pas possible ce qui nécessite une nouvelle version connue par FK étendu.

### 3.2.7 Filtre de kalman étendu

Le filtre de Kalman étendu est l'une des techniques d'estimation les plus populaires et largement étudiées dans le domaine d'estimation de l'état des systèmes dynamiques non-linéaires. Ce filtre consiste à utiliser les équations du FK standard appliqué sur un modèle non-linéaire qui est linéarisé par la formule de Taylor du premier ordre.

Pour pouvoir appliquer ce filtre, il faut prendre en considération certaines hypothèses (comme a été mentionné précédemment).

#### a Hypothèses

Pour le cas d'un système non-linéaire, les équations d'état et de sortie sont données par Eq. 3.16 et Eq. 3.17 respectivement.

1. Dans le cas d'un système dynamique non-linéaire bruité, l'évolution du système peut s'écrire sous la forme :

$$x_{k+1} = f(x_k, u_k, w_k) \tag{3.16}$$

où  $f$  est la fonction d'évolution du système,  $x_k$  représente l'état du système,  $u_k$  est la commande appliquée et  $w_k$  est un bruit.



2. L'équation de mesures s'écrit sous la forme :

$$y_k = h(x_k, v_k) \quad (3.17)$$

3. Les bruits  $w_k$  et  $v_k$  sont blancs, centrés, indépendants, de covariances  $Q_k$ ,  $R_k$  respectivement.

Dans ces conditions, l'application du FK étendu nécessite la linéarisation autour du point estimé à l'aide des dérivées partielles Jacobienne.

### ***b Linéarisation***

La fonction  $f$  de Eq. 3.16 peut être utilisée pour calculer l'état *à priori* à partir de l'état estimé précédent et, semblablement, la fonction  $h$  de Eq. 3.17 peut être employée pour calculer l'observation prédite par l'état *à priori*. Cependant,  $f$  et  $h$  ne peuvent pas être appliqués directement au calcul de la *covariance*, pour cela on applique des dérivées partielles de Jacobienne [21], [29].

Les matrices de transition et d'observation sont définies comme étant les Jacobéennes suivantes :

$$F_k = \frac{\partial f}{\partial X} (x_k, u_k, 0)|_{x=\hat{x}_k^+} \quad (3.18)$$

$$W_k = \frac{\partial f}{\partial w} (x_k, u_k, 0)|_{x=\hat{x}_k^+} \quad (3.19)$$

$$H_{k+1} = \frac{\partial h}{\partial X} (x_{k+1}, 0)|_{x=\hat{x}_{k+1}^-} \quad (3.20)$$

$$V_{k+1} = \frac{\partial h}{\partial v} (x_{k+1}, 0)|_{x=\hat{x}_{k+1}^-} \quad (3.21)$$

Les matrices de transition et d'observation doivent être calculées pour chaque instant  $k$ . C'est-à-dire à chaque instant, la Jacobéenne est évaluée avec les états estimés courants. Ces matrices peuvent être employées dans les équations du FK.

### ***c Étapes de calcul***

Les étapes de calcul du FK étendu dans les cas des systèmes non-linéaires sont semblables à ceux du FK classique relatif aux systèmes linéaires, à l'exception de petits changements dans certaines équations, mais l'algorithme garde la même synoptique et le même objectif. Alors comme le FK classique, le FK étendu présente deux étapes de

calcul ; *à priori* et *à posteriori* ainsi qu'une étape d'initialisations d'état  $\hat{x}_k^+$  et de covariance  $P_k^+$  par  $\hat{x}_1$  et  $P_1$  respectivement [21], [25], [29].

**Note** - La démonstration des équations du FK étendu est la mêmes que celles du FK à la différence de la linéarisation.

### *i à priori*

Cette étape est répartie en deux équations : la première estime l'état à priori à l'aide de l'équation non-linéaire et la deuxième calcule la covariance de l'erreur à priori par la matrice  $F_k$  calculée par la Jacobienne. Les deux équations sont :

1. L'estimation d'état à priori

$$\hat{x}_{k+1}^- = f(\hat{x}_k^+, u_k, 0) \quad (3.22)$$

Cette formule est calculée à chaque instant  $k$ , mais il faut éliminer le bruit dynamique.

2. calcule la covariance de l'erreur à priori

$$P_{k+1}^- = F_k P_k^+ F_k^T + W_k Q_k W_k^T \quad (3.23)$$

### *ii à posteriori*

Dans cette étape on utilise les mesures et le gain de Kalman pour corriger l'estimation d'état.

Les équations de l'estimation à posteriori sont présentées comme suit :

1. calcul du gain de Kalman :

$$K_{k+1} = P_{k+1}^- H_{k+1}^T (H_{k+1} P_{k+1}^- H_{k+1}^T + V_{k+1} R_{k+1} V_{k+1}^T)^{-1} \quad (3.24)$$

2. L'estimation d'état posteriori :

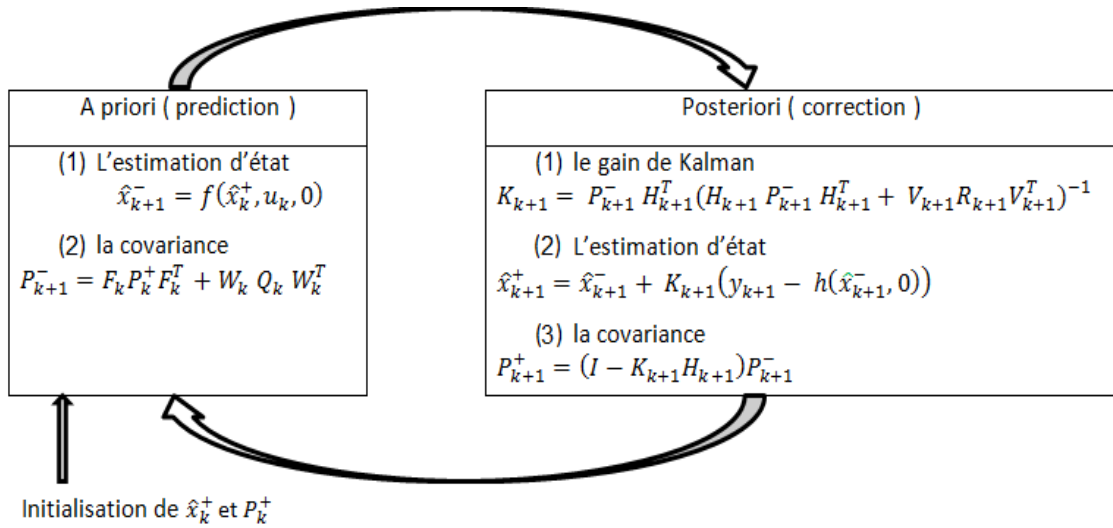
$$\hat{x}_{k+1}^+ = \hat{x}_{k+1}^- + K_{k+1} (y_{k+1} - h(\hat{x}_{k+1}^-, 0)) \quad (3.25)$$

où  $h(\hat{x}_{k+1}^-, 0)$  est la fonction de mesure estimée sans bruit.

3. Calcul de la covariance de l'erreur à posteriori :

$$\begin{aligned} P_{k+1}^+ &= (I - K_{k+1} H_{k+1}) P_{k+1}^- (I - K_{k+1} H_{k+1})^T + K_{k+1} R_{k+1} K_{k+1}^T \\ &= (I - K_{k+1} H_{k+1}) P_{k+1}^- \end{aligned} \quad (3.26)$$

On peut traduire les étapes d'exécution de l'algorithme du FK étendu par le diagramme présenté sur *fig. 3.4*.



*Figure 3.4.* Algorithme du filtre de Kalman étendu

### 3.3 Moindres carrés récursifs

La méthode des moindres carrés, indépendamment élaborée par Legendre en 1805 et Introduit par Gauss en 1809 dans le but d'extraire généralement des paramètres de mesures entachées de bruit par comparaisent à un modèle mathématique censé décrire ces données. Ce modèle peut prendre diverses formes. Il peut s'agir de lois de conservation que les quantités mesurées doivent respecter. La méthode des moindres carrés permet alors de minimiser l'impact des erreurs expérimentales en « ajoutant de l'information » dans le processus de mesure. Cette technique est aujourd'hui largement utilisée dans de nombreux domaines [31].

#### 3.3.1 Moindre carrés

La méthode des moindres carrés classique est applicable sur les régressions linéaires de type :

$$y_k = \mathbb{H}_k x_k + b_k \quad (3.27)$$

où  $\mathbb{H}_k$  est une matrice des paramètres supposée connue à chaque instant  $k$ ,  $x_k$  est le vecteur des états inconnus et  $b_k$  une séquence de bruit blanc gaussien centré de covariance  $\Sigma_k$  ( $b_k \sim (0, \Sigma_k)$ ).

L'estimation basée sur le critère des moindres carrés consiste à minimiser la **fonction de coût** qui est définie par *Eq. 2.8* ou bien à partir de *Eq. 3.28*.

$$J = \frac{1}{2} (y_k - \mathbf{H}_k \hat{x}_k)^T \Sigma_k^{-1} (y_k - \mathbf{H}_k \hat{x}_k) \quad (3.28)$$

avec  $\hat{x}$  est l'estimation de  $x$ .

$$J = \frac{1}{2} (y_k^T y_k \Sigma_k^{-1} - y_k^T \mathbf{H}_k \hat{x}_k \Sigma_k^{-1} - \hat{x}_k^T \mathbf{H}_k^T y_k \Sigma_k^{-1} + \hat{x}_k^T \mathbf{H}_k^T \mathbf{H}_k \hat{x}_k \Sigma_k^{-1}) \quad (3.29)$$

On dérive la fonction de coût  $J$  par rapport à  $\hat{x}$

$$\frac{dJ}{d\hat{x}_k} = \frac{1}{2} \left( \frac{d(y_k^T y_k \Sigma_k^{-1})}{d\hat{x}_k} - \frac{d(y_k^T \mathbf{H}_k \hat{x}_k \Sigma_k^{-1})}{d\hat{x}_k} - \frac{d(\hat{x}_k^T \mathbf{H}_k^T y_k \Sigma_k^{-1})}{d\hat{x}_k} + \frac{d(\hat{x}_k^T \mathbf{H}_k^T \mathbf{H}_k \hat{x}_k \Sigma_k^{-1})}{d\hat{x}_k} \right) \quad (3.30)$$

Soit  $\mathbf{Tr}$  la trace d'une matrice. En Utilisant les propriétés suivantes :

$$\mathbf{Tr}(AB) = \mathbf{Tr}(BA), \mathbf{Tr}(ABC) = \mathbf{Tr}(CAB) = \mathbf{Tr}(BCA),$$

$$f(A) = \mathbf{Tr}(AB), \frac{d}{dA} \mathbf{Tr}(AB) = B^T, \mathbf{Tr}(A) = \mathbf{Tr}(A^T), \quad (3.31)$$

$$\frac{d}{dA} \mathbf{Tr}(ABA^T C) = CAB + C^T A B^T$$

Eq. 3.30 devient :

$$\frac{dJ}{d\hat{x}_k} = \frac{d}{d\hat{x}_k} \mathbf{Tr}(0 - 2\hat{x}_k^T \mathbf{H}_k^T y_k \Sigma_k^{-1} + \hat{x}_k \hat{x}_k^T \mathbf{H}_k^T \mathbf{H}_k \Sigma_k^{-1}) \quad (3.32)$$

Le calcul des deux facteurs de Eq. 3.32 sera :

$$\frac{d}{d\hat{x}_k} \mathbf{Tr}(-2\hat{x}_k^T \mathbf{H}_k^T y_k \Sigma_k^{-1}) = -2\mathbf{H}_k^T \Sigma_k^{-1} y_k \quad (3.33)$$

$$\frac{d}{d\hat{x}_k} \mathbf{Tr}(\hat{x}_k \hat{x}_k^T \mathbf{H}_k^T \mathbf{H}_k \Sigma_k^{-1}) = \mathbf{H}_k^T \mathbf{H}_k \hat{x}_k \Sigma_k^{-1} + \mathbf{H}_k^T \mathbf{H}_k \hat{x}_k \Sigma_k^{-1} = 2\mathbf{H}_k^T \mathbf{H}_k \hat{x}_k \Sigma_k^{-1} \quad (3.34)$$

alors Eq. 3.34 va devenir:

$$\frac{dJ}{d\hat{x}_k} = \frac{1}{2} (2\mathbf{H}_k^T \Sigma_k^{-1} \mathbf{H}_k \hat{x}_k - 2\mathbf{H}_k^T \Sigma_k^{-1} y_k) \quad (3.35)$$

Le calcul de  $\frac{dJ}{d\hat{x}_k} = 0$  nous permet de minimiser la fonction du coût  $J$  est donc d'obtenir le vecteur  $\hat{x}_k$ .

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} (2\mathbf{H}_k^T \Sigma_k^{-1} \mathbf{H}_k \hat{x}_k - 2\mathbf{H}_k^T \Sigma_k^{-1} y_k) &= 0 \\ (\mathbf{H}_k^T \Sigma_k^{-1} \mathbf{H}_k \hat{x}_k - \mathbf{H}_k^T \Sigma_k^{-1} y_k) &= 0 \end{aligned} \quad (3.36)$$

$$\mathbf{H}_k^T \Sigma_k^{-1} \mathbf{H}_k \hat{x}_k = \mathbf{H}_k^T \Sigma_k^{-1} y_k$$

soit

$$\hat{x}_k = (\mathbf{H}_k^T \Sigma_k^{-1} \mathbf{H}_k)^{-1} \mathbf{H}_k^T \Sigma_k^{-1} y_k \quad (3.37)$$

$\hat{x}_k$  peut être déterminé à condition que la matrice  $(\mathbb{H}_k^T \Sigma_k^{-1} \mathbb{H}_k)$  soit non-singulière (invertible)

**Biais d'estimation par MC :**

Remplaçant  $y_k$  de Eq. 3.27 dans Eq. 3.37, on obtient :

$$\begin{aligned} \hat{x}_k &= (\mathbb{H}_k^T \Sigma_k^{-1} \mathbb{H}_k)^{-1} \mathbb{H}_k^T \Sigma_k^{-1} (\mathbb{H}_k x_k + b_k) \\ &= (\mathbb{H}_k^T \Sigma_k^{-1} \mathbb{H}_k)^{-1} \mathbb{H}_k^T \mathbb{H}_k x_k \Sigma_k^{-1} + (\mathbb{H}_k^T \Sigma_k^{-1} \mathbb{H}_k)^{-1} \mathbb{H}_k^T b_k \Sigma_k^{-1} \\ &= x_k + (\mathbb{H}_k^T \Sigma_k^{-1} \mathbb{H}_k)^{-1} \mathbb{H}_k^T b_k \Sigma_k^{-1} \end{aligned} \quad (3.38)$$

alors :

$$\hat{x}_k - x_k = (\mathbb{H}_k^T \Sigma_k^{-1} \mathbb{H}_k)^{-1} \mathbb{H}_k^T b_k \Sigma_k^{-1} \quad (3.39)$$

ou encore :

$$(\mathbb{H}_k^T \Sigma_k^{-1} \mathbb{H}_k)(\hat{x}_k - x_k) = \mathbb{H}_k^T b_k \Sigma_k^{-1} \quad (3.40)$$

L'espérance mathématique de l'égalité Eq. 3.40 sera:

$$\begin{aligned} E[(\mathbb{H}_k^T \Sigma_k^{-1} \mathbb{H}_k)(\hat{x}_k - x_k)] &= E[\mathbb{H}_k^T \Sigma_k^{-1} \mathbb{H}_k] E[(\hat{x}_k - x_k)] \\ &= \mathbb{H}_k^T \Sigma_k^{-1} \mathbb{H}_k E[(\hat{x}_k - x_k)] \end{aligned} \quad (3.41)$$

L'estimation  $\hat{x}$  de  $x$  sera non-biaisée si :

$$E[\hat{x}_k] = E[x_k] = x_k \quad (3.42)$$

et

$$E[\mathbb{H}_k^T b_k] = \Sigma_k^{-1} \mathbb{H}_k^T E[b_k] = 0 \quad (3.43)$$

avec  $b_k$  est un bruit blanc.

### 3.3.2 Moindres carrés récursifs

En pratique, le volume de données est en général important. Ceci rend le calcul des solutions des équations normales des estimations malaisé en raison du problème de stockage et éventuellement de la taille des matrices à inverser. D'autre part, les mesures dépendent fréquemment du temps. Il est intéressant de pouvoir intégrer cette dépendance par rapport au temps dans le processus d'estimation de façon à définir des procédures fonctionnant en temps réel ou capables d'effectuer le traitement des données en ligne. De ce point de vue, les algorithmes permettant le calcul récurrent d'un estimateur méritent une attention particulière. De plus, nous verrons par la suite que la

forme récursive peut se transformer facilement pour permettre l'estimation d'états évoluant lentement au cours du temps [31].

L'algorithme des MCR peut se résumer comme suit :

$$S_k = S_{k-1} \left( I - \mathbb{H}_k^T (\Sigma_k + \mathbb{H}_k S_{k-1} \mathbb{H}_k^T)^{-1} \mathbb{H}_k S_{k-1} \right) \quad (3.44)$$

$$L_k = S_k \mathbb{H}_k \Sigma_k^{-1} = \left( \frac{S_{k-1} \mathbb{H}_k}{\Sigma_k + \mathbb{H}_k S_{k-1} \mathbb{H}_k^T} \right) \quad (3.45)$$

$$\hat{x}_k = \hat{x}_{k-1} + L_k [y_k - \mathbb{H}_k^T \hat{x}_{k-1}] \quad (3.46)$$

**Démonstrations des Eq. 3.44 – Eq. 3.46 - voir l'annexe B**

### 3.3.3 MCR à facteur d'oubli

Dans le cas d'un système à variation lente dans le temps, on introduit un **facteur d'oubli** qui a pour effet de donner plus de poids aux données récentes et d'oublier d'une manière exponentielle les données anciennes.

En introduisant ce facteur, l'algorithme récursif devient :

$$S_k = \frac{1}{\lambda} \left( I - \mathbb{H}_k^T (\Sigma_k \lambda + \mathbb{H}_k S_{k-1} \mathbb{H}_k^T)^{-1} \mathbb{H}_k S_{k-1} \right) S_{k-1} \quad (3.47)$$

$$L_k = \frac{S_{k-1} \mathbb{H}_k}{\Sigma_k \lambda + \mathbb{H}_k^T S_{k-1} \mathbb{H}_k} \quad (3.48)$$

$$\hat{x}_k = \hat{x}_{k-1} + L_k [y_k - \mathbb{H}_k^T \hat{x}_{k-1}] \quad (3.49)$$

où  $\lambda$  est la valeur de facteur d'oubli, avec  $0 < \lambda < 1$ .

### 3.3.4 MCR à fenêtre glissante

Le principe de la méthode des moindres carrés à **fenêtre glissante** est de prendre en considération que les données récentes qui sont à l'intérieur de la fenêtre et de négliger les données anciennes qui sont à l'extérieur. Notons que cette fenêtre glissante est caractérisée par sa largeur  $z$ .

Dans le, l'algorithme des moindres carrés devient sous la forme suivant [32]:

Initialisation : pour  $k = 1$ , initialiser  $\hat{x}_1$  et  $S_1$

Pour  $1 < k \leq z$ , calculer :

$$S_k = S_{k-1} - S_{k-1} \mathbb{H}_k^T (\underline{\Sigma}_k + \mathbb{H}_k S_{k-1} \mathbb{H}_k^T)^{-1} \mathbb{H}_k S_{k-1} \quad (3.50)$$

$$L_k = S_k \mathbb{H}_k^T \underline{\Sigma}_k^{-1} \quad (3.51)$$

$$\hat{x}_k = \hat{x}_{k-1} + L_k (y_k - \mathbb{H}_k \hat{x}_{k-1}) \quad (3.52)$$

Pour  $k \geq z$ , calculer :

$$S_k^* = S_{k-1} + S_{k-1} \mathbb{H}_{k-z}^T (\underline{\Sigma}_{k-z} + \mathbb{H}_{k-z} S_{k-1} \mathbb{H}_{k-z}^T)^{-1} \mathbb{H}_{k-z} S_{k-1} \quad (3.53)$$

$$S_k = S_k^* + S_k^* \mathbb{H}_k^T (\underline{\Sigma}_k + \mathbb{H}_k S_k^* \mathbb{H}_k^T)^{-1} \mathbb{H}_k S_k^* \quad (3.54)$$

$$L_{k-z} = S_k \mathbb{H}_{k-z}^T \underline{\Sigma}_{k-z}^{-1} \quad (3.55)$$

$$L_k = S_k \mathbb{H}_k^T \underline{\Sigma}_k^{-1} \quad (3.56)$$

$$\hat{x}_k = \hat{x}_{k-1} + L_k (y_k - \mathbb{H}_k \hat{x}_{k-1}) - L_{k-z} (y_{k-z} - \mathbb{H}_{k-z} \hat{x}_{k-1}) \quad (3.57)$$

D'où  $S_k$  présente la covariance d'erreur d'estimation, et  $z$  c'est la largeur de la fenêtre glissante.

### 3.4 Conclusion

Dans ce chapitre nous avons présenté le FK classique appliqué aux systèmes linéaires, le FK étendu pour les systèmes non-linéaires et la méthode des moindres carrés récursive. Il est évident que l'algorithme du FK est dérivé des moindres carrés récursifs car la mise à jour d'estimation par FK passe par la minimisation du critère des moindres carrés.

Les deux techniques (FK et MCR) sont récurrentes, fonctionnent en temps réel et donnent de meilleurs résultats dans le cas des systèmes linéaires.

Le FK possède plus d'avantages par rapport aux MCR car en fait il est plus facile à implémenter parce que il ne tient pas en considération l'archive des données et il estime mieux la dynamique des systèmes qui revient à son utilisation de la représentation d'état au lieu des équations aux différences pour les MCR.

L'algorithme du FK peut être exploité individuellement dans le domaine de la surveillance, détection et localisation, des défauts des capteurs ou en association avec la méthode des MCR.

# Chapitre 4 Développements et applications

---

## 4.1 Introduction

Dans ce travail, on s'intéresse à la détection et localisation des défauts des capteurs. Les techniques qui traitent tel problème sont parfois lourdes à mettre en œuvre et ne permettent pas toujours de détecter et localiser. Alors, on propose une méthode alternative qui consiste à estimer l'amplitude (potentiellement variable) des défauts associés à chaque mesure.

La section suivante expose tout d'abord le problème considéré. Ensuite, elle contient les développements mathématiques liés à l'approche proposée. Cette dernière est appliquée sur l'exemple d'un système linéaire de deuxième ordre.

Les résultats sont obtenus par simulation du programme MATLAB, ainsi, ils sont discutés par des commentaires associés à chaque partie.

## 4.2 Détection et localisation par estimation de défaut

Cette technique consiste à estimer l'amplitude des défauts additifs entachant des mesures à partir d'un module de moindres carrés couplé au filtre de Kalman estimant l'état du système. L'approche est très largement inspirée de la technique d'estimation d'entrée proposée par Chan et Al [33] puis développée sous forme récursive par Wang et Varshney [34], ces travaux étant eux-mêmes très proches de ceux menés par Willsky ([35], [36]). À noter qu'il existe dans la littérature d'autres travaux sur l'estimation de défauts [37], [38], [39], [40], [41], [42], [43].

Dans ce grand titre, la section suivante expose tout d'abord le problème considéré. Ensuite, on fait les développements mathématiques liés à l'approche proposée. Cette dernière est appliquée sur un exemple simple dans la dernière section avec les commentaires.



### 4.2.1 Problématique

Nous considérons le système linéaire décrit par *Eq.3.6* et *Eq.3.7* qui est supposé *commandable* et *observable* pour toutes instants  $k$ , c'est-à-dire que les conditions données par *Eq.3.8* et *Eq.2.10* sont vérifiées.

Nous cherchons à détecter et localiser des défauts additifs du capteur. Ceci revient à trouver une technique qui s'adapte mieux à la dynamique du capteur. Le FK comme a été présenté en chap. 3, répond bien à cette exigence, si en le comparant avec d'autres approches.

Dans le cas de plusieurs capteurs dépendant du point de vue modélisation (certains capteurs peuvent influencer sur les autres) et afin d'éviter les cas de non-observabilité du modèle du système, nous utilisons un FK qui opère sur l'ensemble des capteurs. Afin de pouvoir détecter chaque défaut seul, on associe au FK un module des MCR estimant les défauts additifs associé à chacun des  $n_y$  capteurs.

### 4.2.2 Développement de la méthode

Quand le système est affecté par un défaut additif  $e$  entachant les mesures, l'équation de mesure de système dynamique s'écrit de manière suivante :

$$y_k = H_k x_k + v_k + D_k e \quad (4.1)$$

qui n'est autre que *Eq.3.7* à laquelle on a ajouté le terme  $D_k e$ , avec :

- $D_k$  est la matrice de direction qui est connue et qui peut varier avec le temps. Elle est de dimensions  $n_e \times n_y$ , tel que  $n_e$  le nombre de défauts affectant les capteurs et  $n_y$  le nombre de capteurs. Elle représente la modélisation de défaut entachant les mesures  $y_k$ .
- $e \in R^{n_e}$  (avec  $n_e \leq n_y$ ) représente les amplitudes des défauts, lesquelles sont pour l'instant supposées constantes.

Pour avoir une idée sur l'allure de la matrice  $D_k$ , on prend un exemple que l'on sache que sur les  $n_y$  mesures, seules la première et la troisième peuvent être affectées par des défauts de capteur. Ce qui implique que le vecteur  $e$  ne présentera que deux composantes ( $n_e = 2$ ) et que par conséquent, la matrice  $D_k$  aura l'allure suivante :

$$D_k = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ \vdots & \vdots \end{bmatrix} \quad (4.2)$$

L'objectif de la méthode est d'estimer l'amplitude du défaut  $e$  en plus des états  $\{x_k\}$ . Il est remarquable que l'estimation d'état  $\{x_k\}$  puisse être obtenue par un seul filtre de Kalman, mais l'estimation d'amplitude de défauts pas facile à l'identifier, donc on proposera dans les paragraphes suivants un développement qui puisse estimer les défauts.

Admettons dans un premier temps que le défaut  $e$  soit connu, dans ce cas en applique l'ensemble des équations du FK présentées au chap. 3, à l'exception du rajout du terme  $D_k e$  à Eq. 3.14 qui devient Eq. 4.3. Sachant, pour permettre appliquer ce filtre le système doit vérifier Eq. 27 et Eq. 112.

Le changement sera alors :

$$\hat{x}_{k+1}^+ = \hat{x}_{k+1}^- + K_{k+1}(y_{k+1} - H_{k+1} \hat{x}_{k+1}^- - D_k e) \quad (4.3)$$

Le FK contient l'ensemble des équations : Eq. 3.11, Eq. 3.12, Eq. 3.13, Eq. 4.3 et Eq. 3.15.

Pour pouvoir développer cette méthode, les équations du FK sont assemblées comme suit :

$$\hat{x}_{k+1}^- = F_k \hat{x}_k^- + F_k K_k \tilde{y}_k + G_k u_k \quad (4.4)$$

$$\tilde{y}_k = y_k - H_{k+1} \hat{x}_k^- - D_k e \quad (4.5)$$

$$K_k = P_k^- H_k^T \Sigma_k^{-1} \quad (4.6)$$

$$\Sigma_k = H_k P_k^- H_k^T + R_k \quad (4.7)$$

$$P_k^- = F_k (I - K_k H_k) P_k^+ F_k^T + Q_k \quad (4.8)$$

Avec:  $\tilde{y}_k$  est l'innovation du filtre de Kalman et  $\Sigma_k$  sa matrice de covariance.

Pour obtenir Eq. 4.4, on remplace  $\hat{x}_{k+1}^+$  de Eq. 4.3 dans Eq. 3.11 et pour obtenir Eq. 4.8, on intègre  $P_k^+$  de Eq. 3.15 dans Eq. 3.12.

Considérons maintenant deux filtres de Kalman qui utilisent le même modèle Eq. 3.6 et Eq. 4.1. C'est-à-dire les mêmes commandes  $u_k$ , mesures  $y_k$ , covariances  $R_k$ ,  $Q_k$  et initialisations d'état  $\hat{x}_1^+$  et de covariance  $P_1^+$ .

- Le premier filtre estime l'état  $\{x_k\}$  en utilisant l'ensemble d'équations récurrentes : Eq. 4.4, Eq. 4.5, Eq. 4.6, Eq. 4.7 et Eq. 4.8. Ce filtre fournit des estimations non-biaisées (*nb*). Par conséquent, le modèle utilisé par ce filtre soit le même que celui du système réel.
- Le second filtre utilise lui aussi le même ensemble d'équations récurrentes que le premier filtre sauf qu'on considère que  $e = 0$  (0 désignant le vecteur nul de dimension appropriée). Les estimées fournies par ce filtre sont donc biaisées (*b*) car celui-ci n'adopte pas la bonne valeur de  $e$ .

On remarque que les équations de covariances ; Eq. 4.7 et Eq. 4.8 et du gain de Kalman Eq. 4.6 sont indépendantes de  $e$  pour les deux filtres au contraire des équations d'estimations d'état  $\hat{x}_k^-$  (Eq. 4.4) et d'innovation  $\tilde{y}_k$  (Eq. 4.5). Alors, les couples d'état et d'innovation non-biaisés (*nb*)  $(\hat{x}_k^{-nb}, \tilde{y}_k^{nb})$ , d'état et d'innovation biaisés (*b*)  $(\hat{x}_k^{-b}, \tilde{y}_k^b)$ , sont a priori différents l'un de l'autre. La prochaine étape, consiste à trouver la relation entre ces deux couples. Pour cela on pose :

$$\varepsilon_k = \hat{x}_k^{-nb} - \hat{x}_k^{-b} \quad (4.9)$$

avec  $\varepsilon_1 = 0$  car  $\hat{x}_k^{-nb} = \hat{x}_k^{-b} = \hat{x}_1$ .

On fait la différence entre les innovations, ce qui conduit directement à :

$$\begin{aligned} \tilde{y}_k^b - \tilde{y}_k^{nb} &= y_k - H_k \hat{x}_k^{-b} - y_k + H_k \hat{x}_k^{-nb} + D_k e \\ &= H_k (\hat{x}_k^{-nb} - \hat{x}_k^{-b}) + D_k e \end{aligned} \quad (4.10)$$

$$\begin{aligned} \tilde{y}_k^b &= H_k (\hat{x}_k^{-nb} - \hat{x}_k^{-b}) + D_k e + \tilde{y}_k^{nb} \\ &= H_k \varepsilon_k + D_k e + \tilde{y}_k^{nb} \end{aligned} \quad (4.11)$$

De même, la différence entre les états conduit à :

$$\hat{x}_{k+1}^{-nb} - \hat{x}_{k+1}^{-b} = F_k \hat{x}_k^{-nb} + F_k K_k \tilde{y}_k^{nb} + G_k u_k - F_k \hat{x}_k^{-b} - F_k K_k \tilde{y}_k^b - G_k u_k \quad (4.12)$$

avec :

$$\begin{aligned} \varepsilon_{k+1} &= F_k \hat{x}_k^{-nb} + F_k K_k \tilde{y}_k^{nb} + G_k u_k - F_k \hat{x}_k^{-b} - F_k K_k \tilde{y}_k^b - G_k u_k \\ &= F_k (\hat{x}_k^{-nb} - \hat{x}_k^{-b}) + F_k K_k (\tilde{y}_k^{nb} - \tilde{y}_k^b) \\ &= F_k \varepsilon_k + F_k K_k (\tilde{y}_k^{nb} - \tilde{y}_k^b) \end{aligned} \quad (4.13)$$

On remplace  $\hat{y}_k^b$  de Eq. 4.11 dans Eq. 4.13 :

$$\begin{aligned}\varepsilon_{k+1} &= F_k \varepsilon_k + F_k K_k (\tilde{y}_k^{nb} - H_k \varepsilon_k - D_k e - \tilde{y}_k^{nb}) \\ &= F_k \varepsilon_k - F_k K_k H_k \varepsilon_k - F_k K_k D_k e \\ &= F_k (I - F_k K_k H_k) \varepsilon_k - F_k K_k D_k e\end{aligned}\quad (4.14)$$

avec  $\varepsilon_1 = 0$ , on trouve:

$$\varepsilon_k = M_k e \quad (4.15)$$

ce qui veut dire que :  $\varepsilon_{k+1} = M_{k+1} e$ .

Remplaçons  $\varepsilon_k$  de Eq. 4.15 dans Eq. 4.14, on aura:

$$M_{k+1} e = F_k (I - K_k H_k) M_k e - F_k K_k D_k e$$

On obtient:

$$\begin{cases} M_{k+1} = F_k (I - K_k H_k) M_k - F_k K_k D_k \\ M_1 = 0 \end{cases} \quad (4.16)$$

Remplaçons  $\varepsilon_k$  de Eq. 4.15 dans Eq. 4.11 :

$$\begin{aligned}\tilde{y}_k^b &= H_k M_k e + D_k e + \tilde{y}_k^{nb} \\ &= (H_k M_k + D_k) e + \tilde{y}_k^{nb}\end{aligned}\quad (4.17)$$

Admettant :

$$U_k = H_k M_k + D_k \quad (4.18)$$

Pratiquement, le défaut  $e$  est inconnu. Dans ce cas, il est un impossible d'implémenter directement le filtre de Kalman non biaisé. Par contre, la mise en œuvre du filtre biaisé est possible puisque ce dernier n'a pas éliminé le biais de l'innovation directement (posons  $e = 0$  dans Eq. 4.5).

La relation donnée par Eq. 4.17 représente une régression linéaire perturbée par l'innovation  $\tilde{y}_k^{nb}$ , assimilable à un bruit blanc centré de covariances  $\Sigma_k$ . Il est alors évident d'exploiter cette équation pour estimer  $e$  via un module des moindres carrés récursifs. En pratique, pour estimer des défauts d'amplitude variable, il est préférable d'utiliser un algorithme de moindres carrés à facteur d'oubli ou fenêtre glissante, ou bien par la combinaison des deux.

L'opération de détection (et implicitement la localisation) des défauts s'effectue en comparant à un seuil les amplitudes de défaut estimées. La  $i^{\text{ème}}$  composante de ce seuil

vectorel peut par exemple être proportionnelle à l'écart-type estimé, c'est-à-dire la racine carrée du  $i^{\text{ème}}$  terme u diagonal de la matrice de covariance d'erreur d'estimation  $S_k$  propagée par le module des moindres carrés. Dans le cas particulier où les bruits  $\{w_k\}$  et  $\{v_k\}$  ainsi que l'état initial  $x_1$  sont distribués selon une loi normale, l'innovation  $\{\tilde{y}_k^b\}$  suit elle aussi une loi normale. Par conséquent, l'erreur d'estimation de  $e$  par  $\hat{e}_k$  est également décrite par une gaussienne.

A l'aide de la table [44], il est alors possible de quantifier la probabilité pour que l'estimée  $\hat{e}_k$  dépasse un seuil de  $n$  fois l'écart-type alors que la valeur réelle est nulle : cela revient à évaluer la probabilité de fausse alarme. Par exemple, si le seuil adopté est de trois fois l'écart-type, alors la probabilité de fausse alarme est inférieure à 1%.

Pour mieux comprendre, on va résumer et traduire ce travail sur un schéma qui montre le déroulement de la méthode (fig. 4.1).

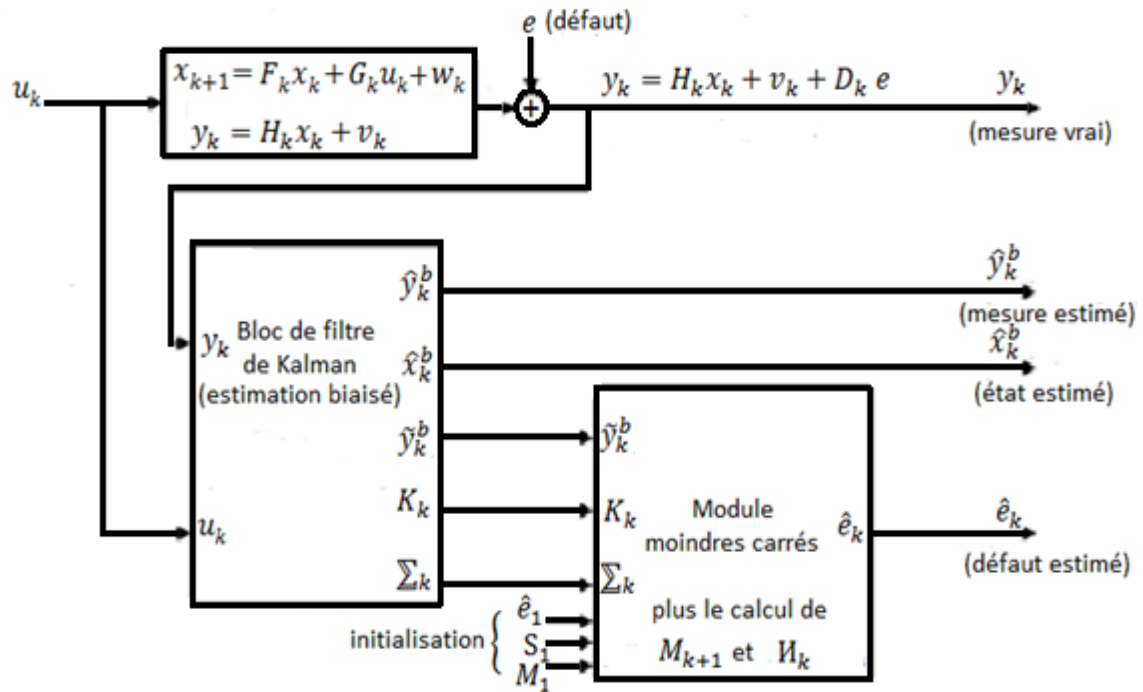


Figure 4.1. Schéma descriptif de la méthode de détection de défauts par estimation

### 4.3 Application de la méthode

Soit la méthode de détection décrite dans la section précédente est appliquée à un système linéaire. Durant l'application, des commentaires sont donnés pour expliquer les étapes du chapitre précédent pour accomplir la conception proposée.

### 4.3.1 Description du système

Soit un système décrit par Eq. 3.6 et Eq. 3.7 avec :

$$F_k = \begin{bmatrix} -7 & 2 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}, G_k = H_k = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, x_1 = [3 \quad -2]^T, \quad (4.19)$$

$$P_1 = Q_k = R_k = D_k = I$$

Le système contient deux composantes de mesure  $y_k$ , alors nous appelons capteur  $i$  ( $i = 1, 2$ ) pour la  $i^{\text{ème}}$  composante de  $y_k$ .

Avant d'appliquer la méthode, certaines conditions doivent être vérifiées sur le système :

1. **Commandabilité** qui se vérifie à l'aide de Eq. 3.8.

$$\begin{aligned} \text{rang} [ G (GF) ] &= \text{rang} \left[ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \left( \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -7 & 2 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} \right) \right] \\ \text{rang} [ G (GF) ] &= \text{rang} \left[ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \left( \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -7 & 2 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} \right) \right] = \text{rang} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -7 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 4 \end{bmatrix} = 2 \end{aligned} \quad (4.20)$$

le système est commandable car  $n = 2$ .

2. **Observabilité** qui se vérifie à l'aide de Eq. 2.10.

$$\text{rang} \begin{bmatrix} H \\ HF \end{bmatrix} = \text{rang} \left[ \begin{array}{c} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \\ \left( \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -7 & 2 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} \right) \end{array} \right] = \text{rang} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ -7 & 2 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} = 2 \quad (4.21)$$

Ce qui signifie que le système est observable.

Par contre, si on utilise uniquement le deuxième capteur, le système ne devient pas **observable**, ce qui empêche l'utilisation d'un banc de filtres DOS, équivalent à un GOS car il existe que deux observations ( $n_y = 2$ ).

3. **Stabilité** - on rappelle que le système soit stable, les modules des pôles des valeurs propres de la matrice d'état  $F$  doivent être dans le cercle unité.

$$\begin{aligned} |(\lambda I - A)| &= \left| \lambda \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -7 & 2 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} \right| = \left| \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -7 & 2 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} \right| \\ &= \left| \begin{array}{cc} \lambda + 7 & -2 \\ 0 & \lambda - 4 \end{array} \right| = (\lambda + 7)(\lambda - 4) \end{aligned} \quad (4.22)$$

On a  $|\lambda_1| = 4$  et  $|\lambda_2| = 7$  qui sont supérieurs à un, alors le **système est instable**.  
Mais comme le système est commandable et afin de rendre le système stable,

nous lui appliquons un simple retour d'état de façon que les pôles du système en boucle fermée soient 0,6 et 0,8.

La commande par retour d'état est associée à loi de commande:

$$u_k = c_k - k \hat{x}_k^+ \quad (4.23)$$

où  $\hat{x}_k^+$  est l'état estimé à posteriori par le filtre de Kalman et  $c_k$  est la consigne que l'on imposé comme suit :

$$c_k = \begin{bmatrix} 18 \sin(0.3k) \\ 12 \sin(0.2k) \end{bmatrix} \quad (4.24)$$

Pour simplifier les choses, on prend une commande  $u_k = c_k - k x_k$ , alors on aura :

$$\begin{cases} x_{k+1} = F_k x_k + G_k (c_k - k x_k) \\ y_k = H_k x_k + D_k e \end{cases}$$

ou encore :

$$\begin{cases} x_{k+1} = (F_k - k G_k) x_k + G_k c_k \\ y_k = H_k x_k + D_k e \end{cases} \quad (4.25)$$

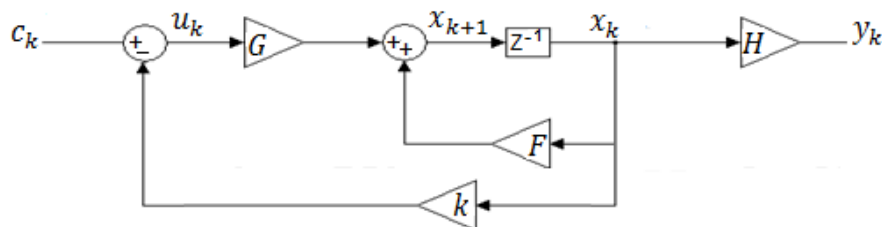
où, l'équation précédente présente l'état désiré.

$$F_k - k G_k = \begin{bmatrix} 0.6 & 0 \\ 0 & 0.8 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} -7 & 2 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} k_1 & k_2 \\ k_3 & k_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.6 & 0 \\ 0 & 0.8 \end{bmatrix}$$

Cela conduit à la matrice de retour d'état suivante :

$$k = \begin{bmatrix} -7.6 & 2 \\ 0 & 3.2 \end{bmatrix}$$

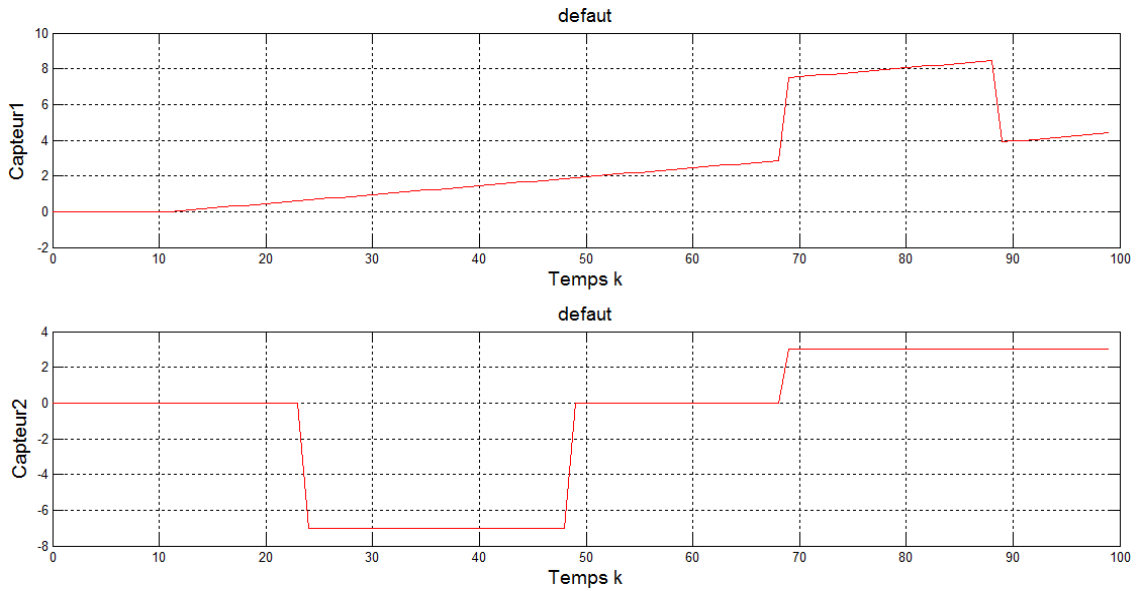


**Figure 4.2.** Schéma de commande par retour d'état

En ce qui concerne les amplitudes de défauts, nous cherchons à estimer celles relatives à chacun des deux capteurs, c'est pour ça on a choisi  $D_k$  comme matrice identité, ainsi la modélisation en absence du défaut du capteur est caractérisé par  $e_k = 0$ , par contre sa présence est modélisé par un signal  $e_k$  que nous l'avons défini nous-même. Le signal  $e_k$

contient deux composants, chaque composante affecte un seul capteur. *fig.4.3* montre la forme des défauts simulés.

- dérive de 0,05 par unité de temps (une unité de temps étant égale à une période d'échantillonnage) sur le capteur 1 ;
- un biais d'amplitude 5 sur le capteur 1 entre les instants  $k = 70$  et  $k = 90$ , s'ajoutant à la dérive précitée ;
- un biais d'amplitude -7 entre les instants  $k = 25$  et  $k = 50$ , suivi d'un autre biais d'amplitude 3 à partir de l'instant  $k = 70$  sur le capteur 2.



**Figure 4.3.** La forme des défauts simulés

### 4.3.2 Simulation en moindres carrés a fenêtre glissante

En premier lieu, on considère que les deux capteurs ne sont pas affectés par des défauts (absence de défauts  $e_k = 0$ ). Dans le deuxième cas, on considère la présence des défauts sur le système. Concernant le module des moindres carrés, nous adoptons un algorithme à fenêtre glissante avec une largeur  $z = 5$  mesures et une covariance initiale  $S_1 = 10I$ . Les écarts-types des amplitudes des défauts estimées sont donnés par la racine carrée du terme diagonal de  $S_k$ .

Dans les deux cas on simule :

- La représentation du système désiré:

$$x_{k+1}^d = A_k x_k^d + G_k e_k \quad (4.26)$$



$$y_k = H_k x_k^d \quad (4.27)$$

on défini  $A_k = F_k - k G_k = \begin{bmatrix} 0.6 & 0 \\ 0 & 0.8 \end{bmatrix}$ .

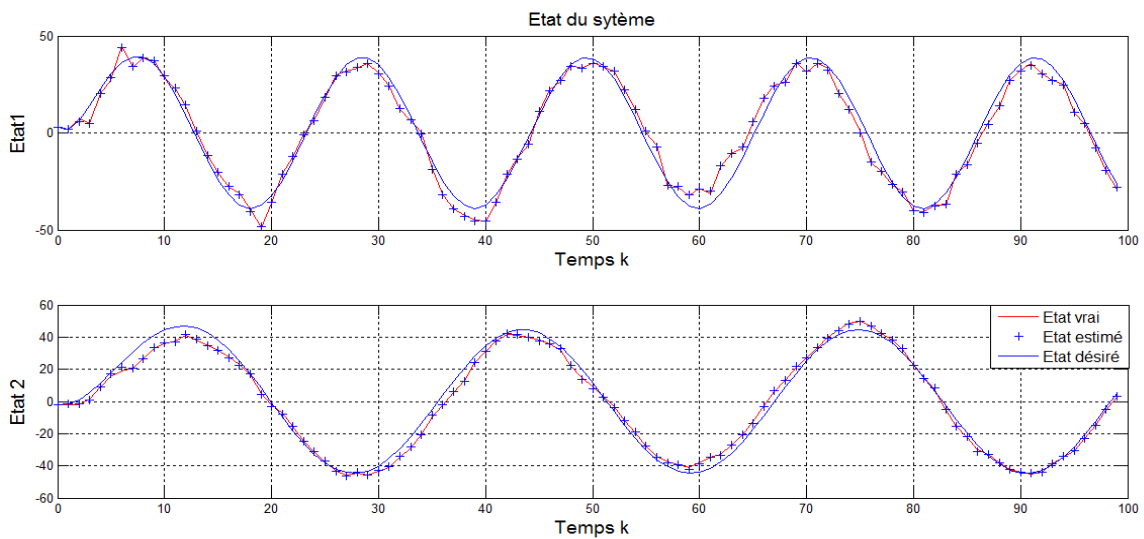
- La représentation du système réel, donné par Eq. 3.6 et Eq. 4.1 avec :

$$u_k = c_k - k \hat{x}_k^+$$

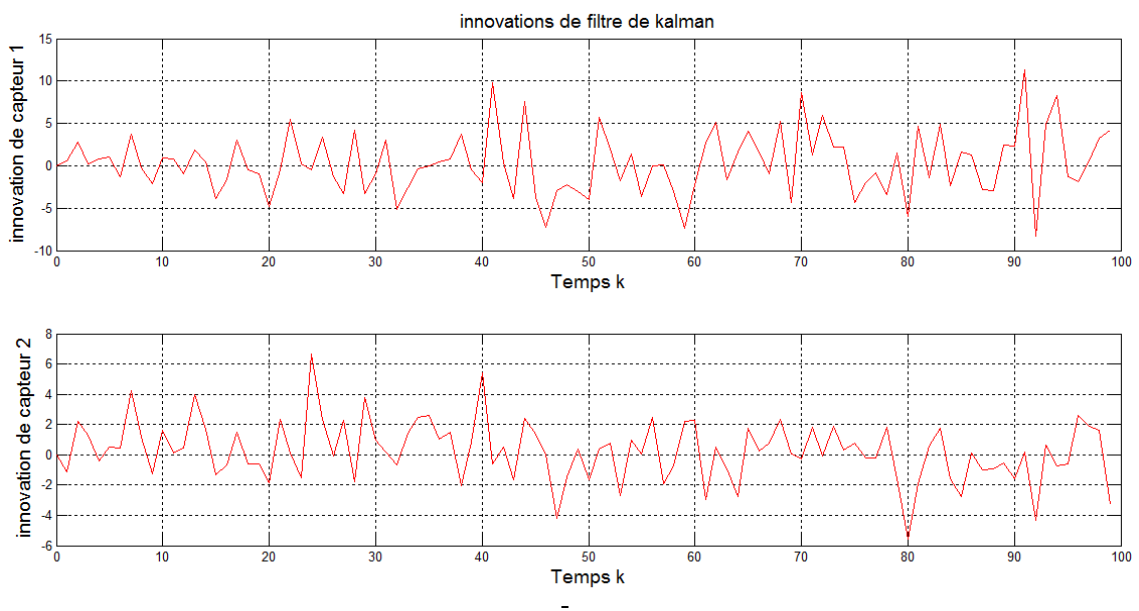
- Les états estimés via le filtre de Kalman.

**a Résultats en l'absence de défauts de capteurs**

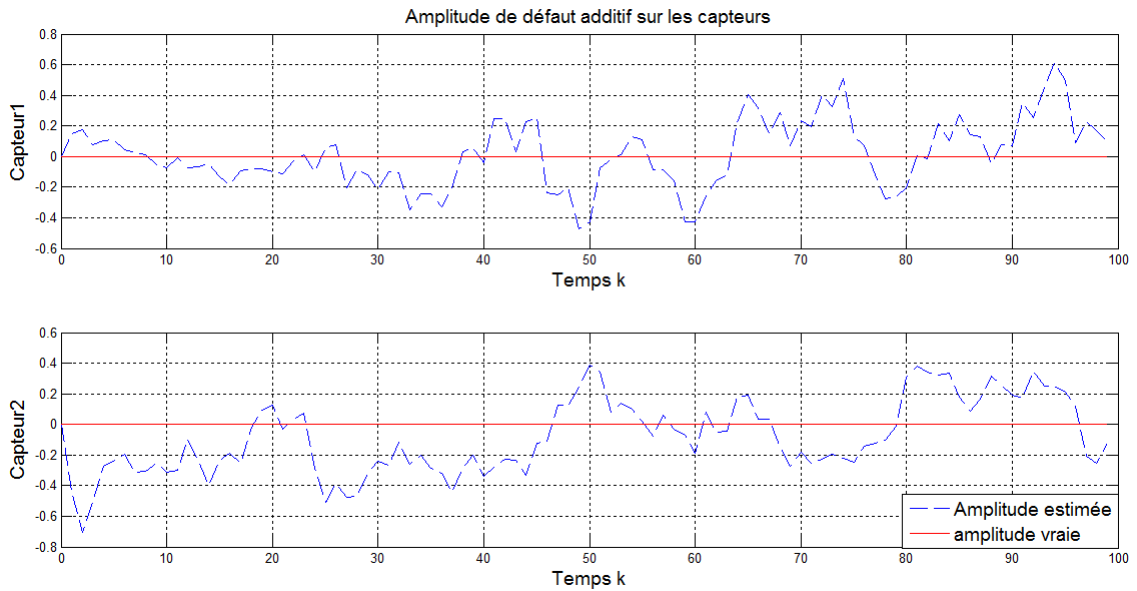
L'exécution du programme MATLAB pour une largeur de la fenêtre  $z = 5$  aboutira aux fig. 4.4 –fig. 4.7, suivantes :



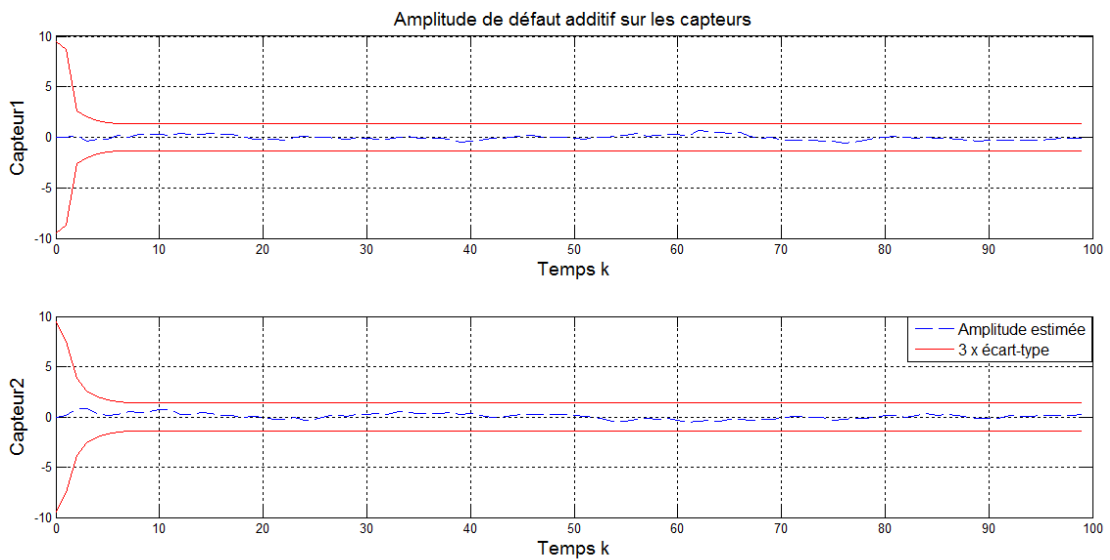
**Figure 4.4.** États vrai, estimé et désiré en l'absence de défaut de capteur



**Figure 4.5.** L'innovation de filtre de Kalman en l'absence de défaut de capteur



**Figure 4.6.** Défaut simulés et estimés avec  $z = 5$



**Figure 4.7.** Amplitudes estimées en l'absence de défaut de capteur et écarte-types correspondants avec  $z = 5$

D'après *fig.4.4*, les états réels et désirés sont proches et ce dû à la correction du système par retour d'état. Les états réels et estimés via un filtre de Kalman sont presque superposés, ce qui signifie que l'estimateur à base de FK est bien choisi.

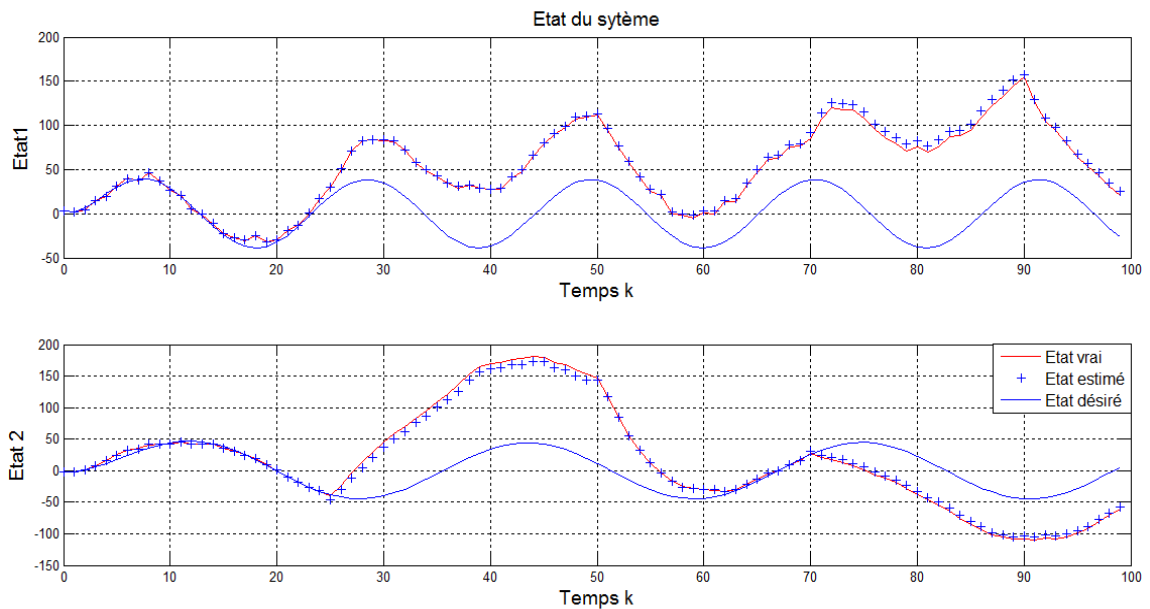
*fig.4.5* montre que les innovation sont autour de zéro, ce qui signifie que deux capteurs ne sont pas affectés par des défauts.

*fig.4.6* et *fig.4.7* montrent que les amplitudes des défauts estimées sont en moyenne nulle et comprises dans l'enveloppe des écarts-types correspondants, ce qui veut dire

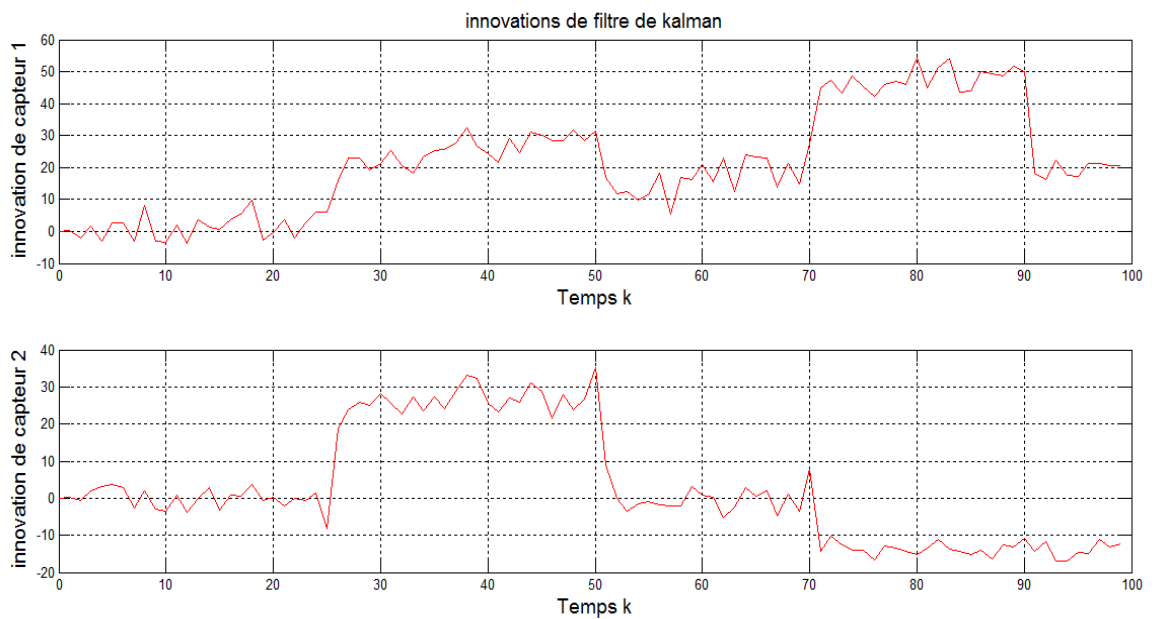
qu'il n'y a pas de détection de défauts et par conséquent n'y a pas de fausses alarmes et le choix (trois fois écart-type) est justifié.

***b Résultats en présence de défauts de capteur***

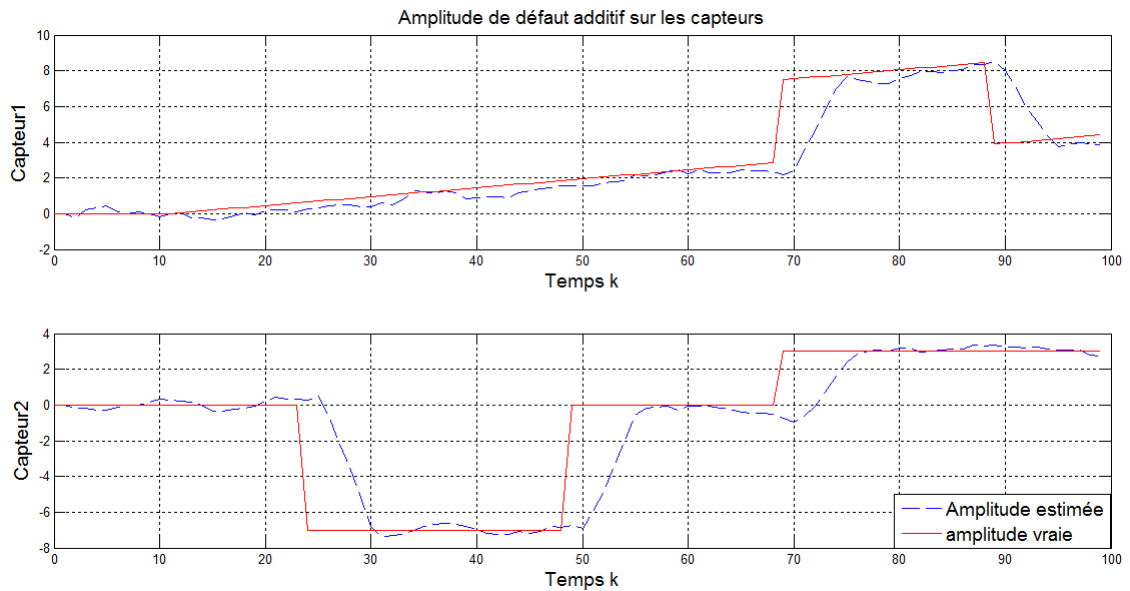
Nous conservons les mêmes réglages pour le module de moindres carrés. L'exécution du programme MATLAB aboutira aux *fig. 4.8 –fig. 4.11*, suivantes :



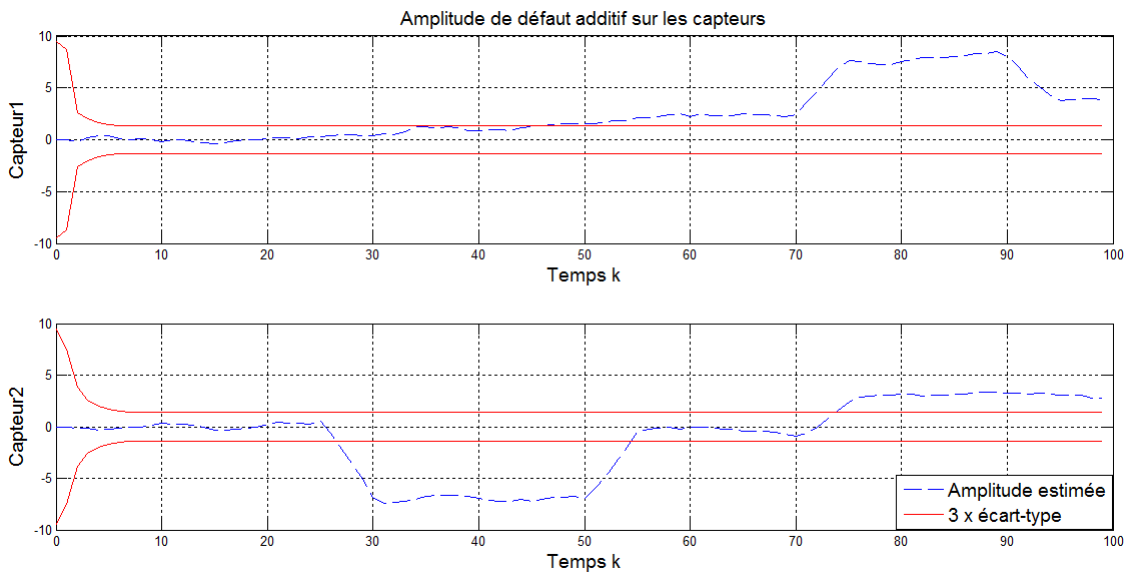
**Figure 4.8.** États vrai, estimé et désiré en présence de défaut de capteur



**Figure 4.9.** L'innovation de filtre de Kalman en présence de défaut de capteur



**Figure 4.10.** Défaut simulés et estimés avec  $z = 5$



**Figure 4.11.** Amplitudes estimées en présence de défaut de capteur et écart-types correspondants avec  $z = 5$

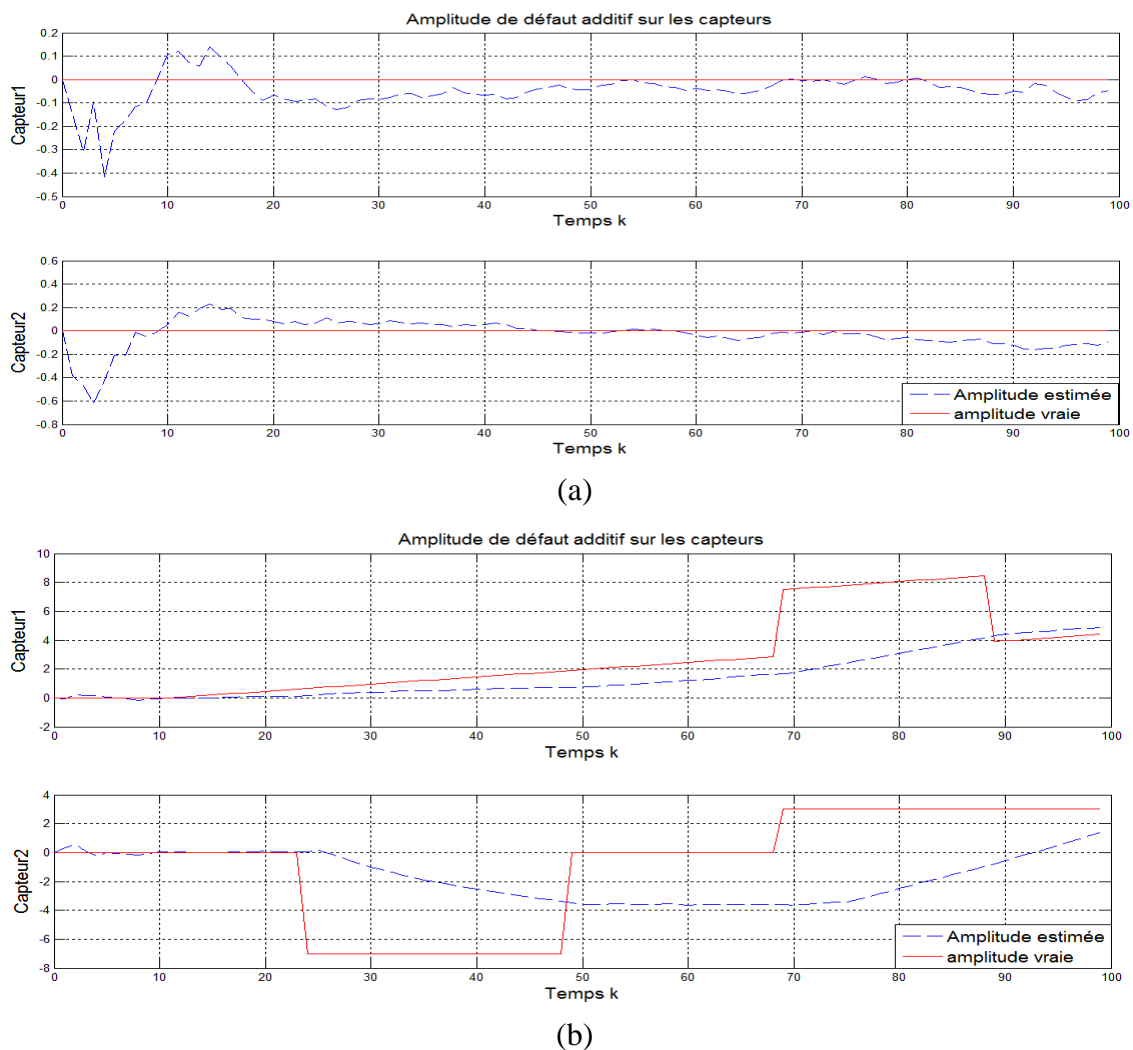
D'après *fig. 4.8* et par comparaison avec *fig. 4.4*, on remarque que l'état désiré reste le même (pas de bruits et de défauts) par contre les états réels et estimés sont différents à cause de l'apparition de défaut, cette différence sera importante si l'amplitude de défaut est grande.

*fig. 4.9* montre que les innovations sont autour de zéros dans le cas où l'amplitude de défaut est nul (pas de défaut) qui n'est pas le cas si l'amplitude est différente de zéros.

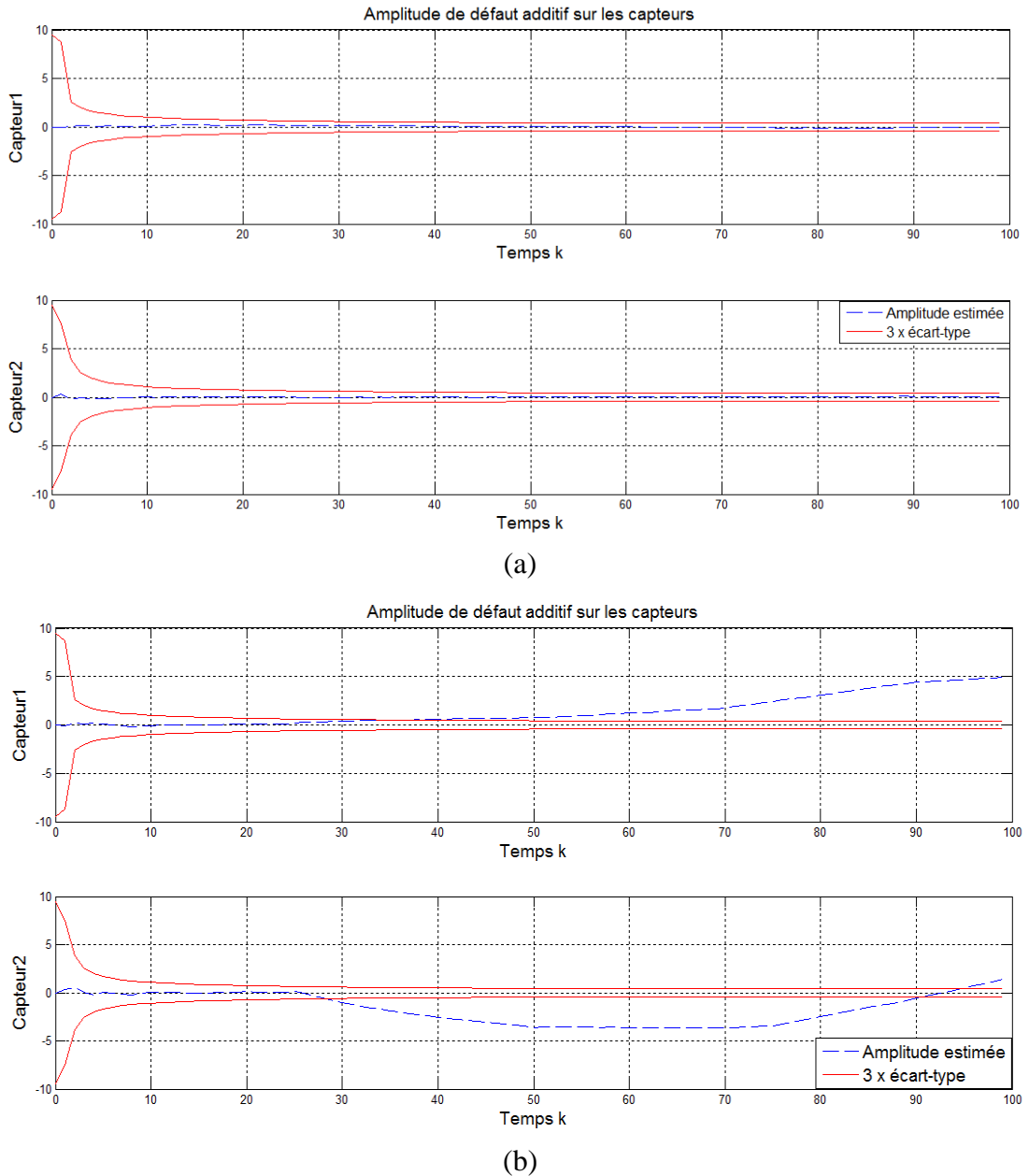
D'après *fig. 4.10* et *fig. 4.11*, on peut clairement constater qu'en absence de défaut dans les 15 premiers instants pour le capteur 1, et les 25 premiers instants et dans l'intervalle [53, 73] pour le capteur 2, les amplitudes de défaut estimées avoisinent de zéro et sont comprises dans l'enveloppe de plus ou moins trois fois l'écart-type. Ce n'est plus le cas lorsqu'il y a un défaut dans les autres instants, ce qui confirme par *fig. 4.11*.

On veut changer la largeur de la fenêtre du module de moindres carrés, pour voir l'impact sur l'estimation de défaut, pour cela nous reprenons les mêmes conditions de simulation que précédemment, à l'exception près de la largeur de fenêtre qui est réglée à  $z = 50$  mesures.

Les résultats obtenus en l'absence de défauts sont donnés sur *fig. 4.12a* et *fig. 4.13a* tandis que ceux obtenus avec défaut sont disponibles sur *fig. 4.12b* et *fig. 4.13b*.



**Figure 4.12.** Défauts simulés et estimés avec  $z = 50$  :  
(a) en absence de défaut ; (b) en présence de défaut



**Figure 4.13.** Amplitudes estimées et écarts-types correspondants avec  $z = 50$  :  
 (a) en absence de défaut ; (b) en présence de défaut

On constate que les estimées obtenues sont moins bruitées, et surtout si on voit *fig.4.13a* et *fig.4.13b* mais lorsque les défauts sont présent, on remarque que l'estimation évalue d'une manière plus lente, ce qui introduit notamment un retard à la détection des défauts.

Alors, la largeur  $z$  de la fenêtre glissante résulte un compromis. Plus  $z$  est petit, meilleure sera l'aptitude du module de moindres carrés à estimer des défauts d'amplitude variable. En revanche, une trop faible valeur de  $z$  peut conduire à une mauvaise qualité d'estimation des amplitudes de défaut. Par contre une grande valeur de

z donne meilleure sera la qualité d'estimation des amplitudes de défaut. En revanche, cela se fait au détriment de la faculté du module à s'adapter à des défauts d'amplitude variable. Par conséquent, lors de l'apparition brusque d'un défaut (rupture), l'amplitude estimée mettra plus de temps à prendre une valeur sensiblement non nulle, ce qui risque de d'introduire un retard à la de détection du défaut.

Donc, il semble préférable d'opter pour une valeur de z pas trop élevée, malgré que l'estimation est un peu bruitée et attient les amplitudes variables des défauts  $e$ . Alors le réglage  $z = 5$  mesures se montrant satisfaisant.

### 4.3.3 Simulation en moindres carrés a facteur d'oubli

Les résultats des états réels, estimés et désirés restent les mêmes ainsi les résultats des innovations. On a changé dans cette section la méthode d'estimation de défaut par MCRFO.

#### a Résultats en l'absence de défauts de capteurs

On simule MCRFO pour  $\lambda$  égal à 0.687 les défauts estimés et écarte-types correspondants représenté sur les *fig* . 4.14 et . 4.15 .

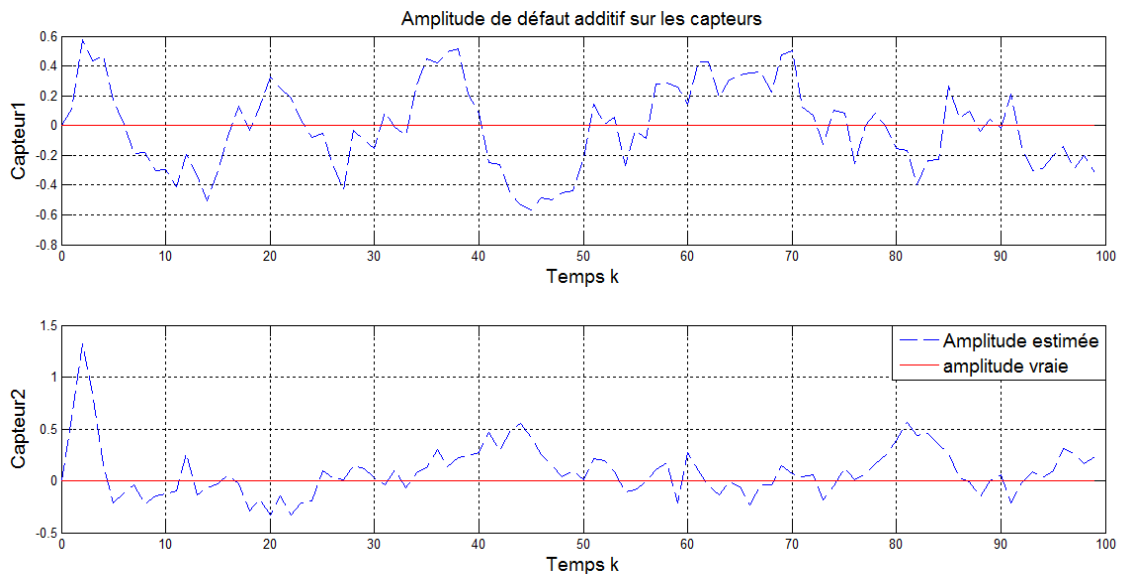
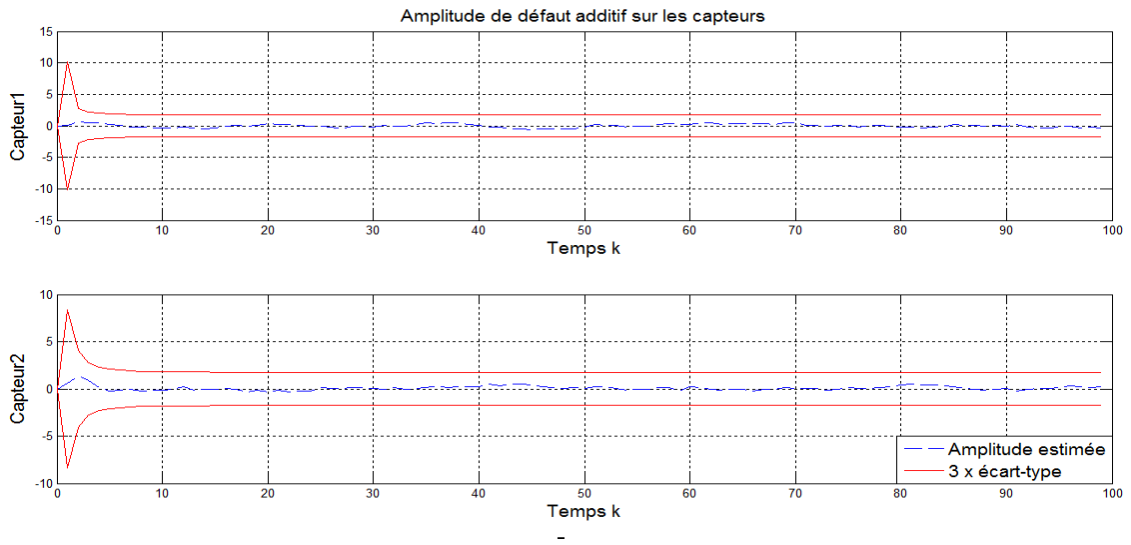


Figure 4.14. Défaut simulés et estimés avec  $\lambda = 0.687$

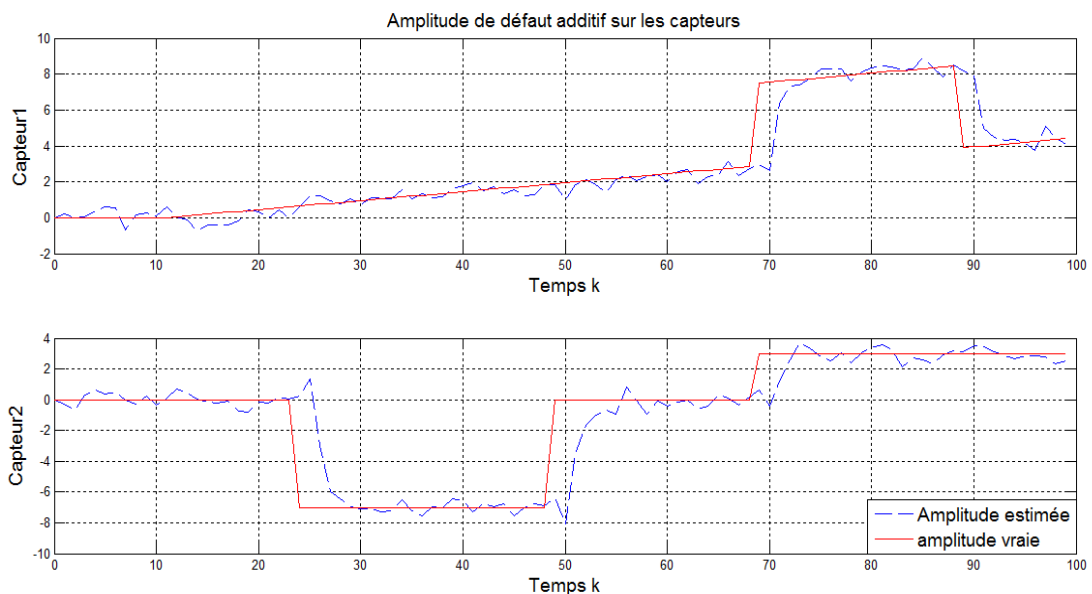


**Figure 4.15.** Amplitudes estimées en absence de défaut de capteur et écarts-types correspondants avec  $\lambda = 0.687$

*fig.4.14* et *fig.4.15* montrent que les amplitudes des défauts estimées sont en moyenne nulle et comprises dans l'enveloppe des écarts-types correspondants, ce qui veut dire qu'il n'y a pas de détection de défauts et par conséquent n'y a pas de fausses alarmes et le choix (trois fois écart-type) est justifié.

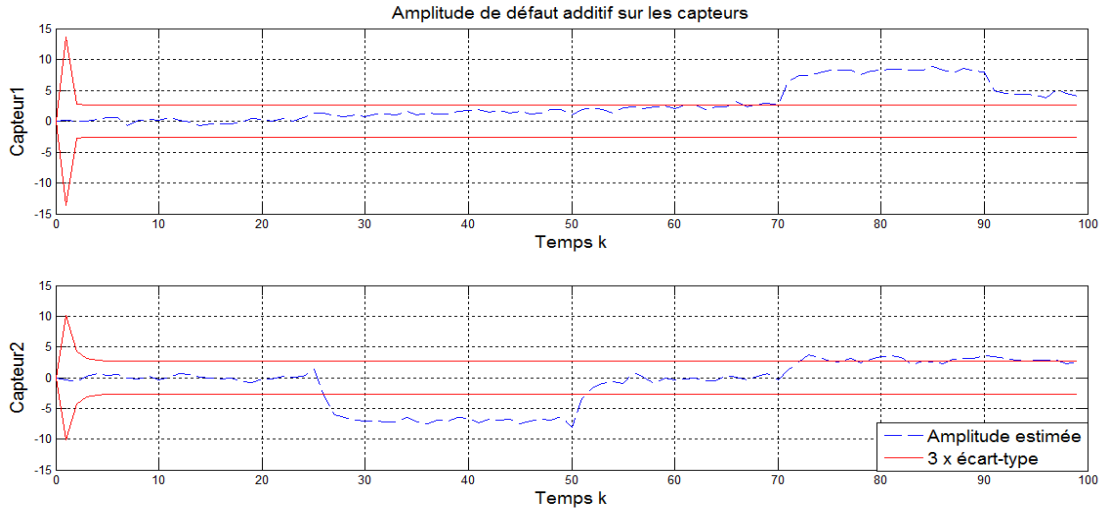
***b Résultats en présence de défauts de capteur***

On simule MCRFO pour trois valeurs de  $\lambda$  (0.3, 0.687, 0.9), l'exécution du programme MATLAB pour différentes valeurs de  $\lambda$  obtenues aux *fig. 4.16 - fig.4.21*.

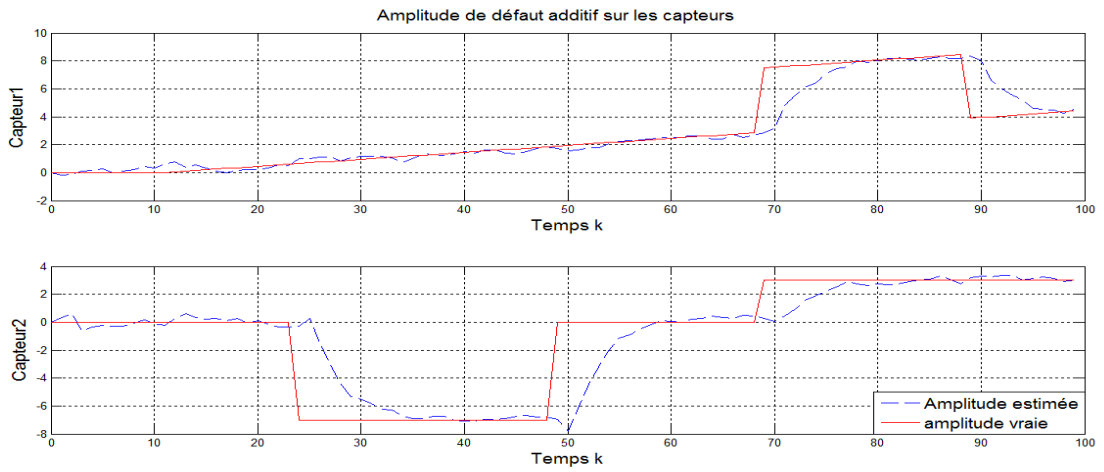


**Figure 4.16.** Défaut simulés et estimés avec  $\lambda = 0.3$

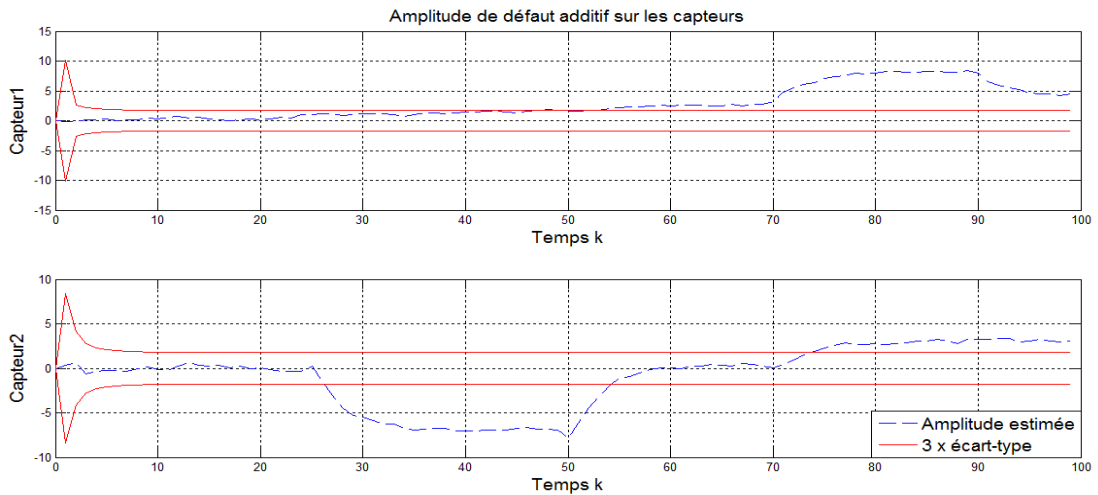




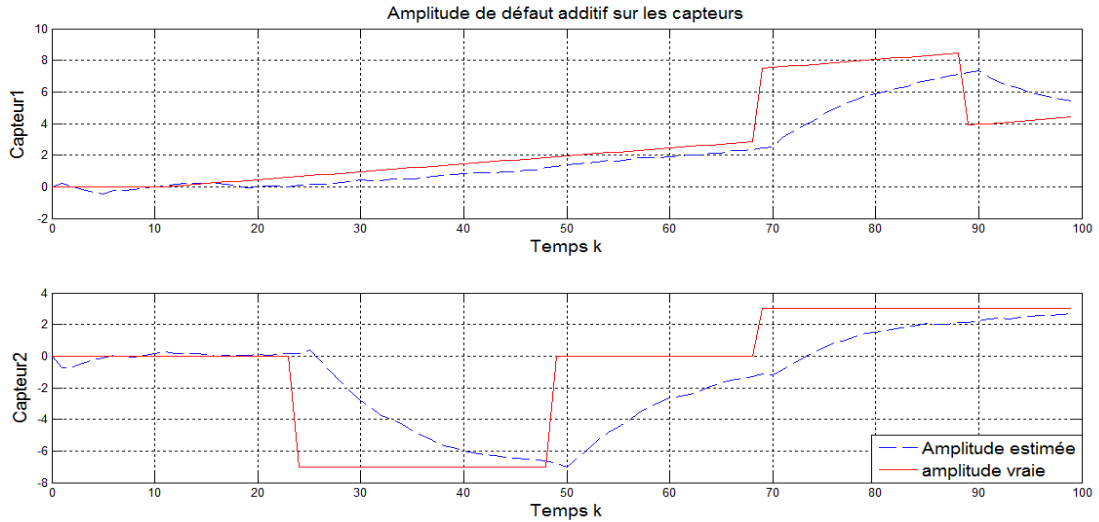
**Figure 4.17.** Amplitudes estimées en présence de défaut de capteur et écarte-types correspondants avec  $\lambda = 0.3$



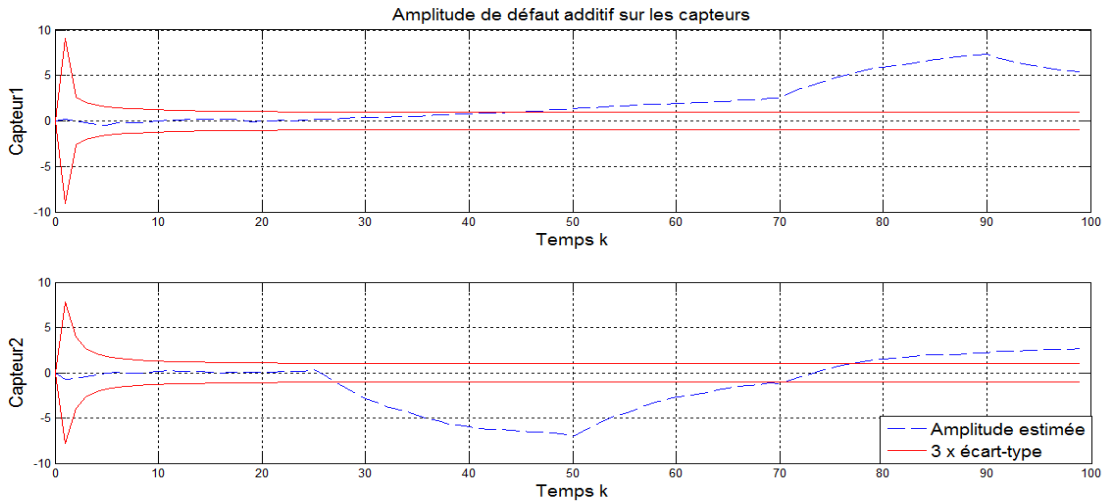
**Figure 4.18.** Défaut simulés et estimés avec  $\lambda = 0.687$



**Figure 4.19.** Amplitudes estimées en présence de défaut de capteur et écarte-types correspondants avec  $\lambda = 0.687$



**Figure 4.20.** Défaut simulés et estimés avec  $\lambda = 0.9$



**Figure 4.21.** Amplitudes estimées en présence de défaut de capteur et écarte-types correspondants avec  $\lambda = 0.9$

D'après *fig.4.16 – fig.4.21* , il est remarquable que pour les faibles valeurs de  $\lambda$  l'estimation atteint l'amplitude de défaut mais elle est bruitée. Ce dernier peut influencer sur la détection de défaut (manque de détection), et si  $\lambda$  est élevé, l'estimation est non bruitée mais n'atteint pas l'amplitude de défaut. Alors, il est préférable de choisir une valeur de  $\lambda$  pas trop élevée malgré que l'estimation est un peu bruitée, par contre la meilleure sera l'aptitude du module de moindres carrés à estimer les amplitudes des défauts variables tel que  $e$ . Alors le réglage  $\lambda = 0.687$  se montrant satisfaisant.

## 4.4 Conclusion

Dans ce chapitre nous avons analysé et donné les résultats de simulation pour un simple exemple, utilisant une méthode de détection, localisation et d'estimation des défauts simultanés des capteurs. Avec deux méthodes pour l'estimation de défauts qui sont plus utilisées dans la pratique, la première méthode est MCRFG et la deuxième méthode est MCRFO.

D'après les résultats obtenus, pour avoir une bonne estimation de défaut, celle-ci assure la détection et localisation, ainsi, pour éviter le manque et fausse détection, il faut bien choisi le facteur  $\lambda$  si on utilise MCRFO ou largeur de fenêtre  $z$  pour MCRFG.

La simulation pour différent valeurs indique que  $\lambda = 0.687$  et  $z = 5$  donnent meilleurs résultats.

## Conclusion générale et perspectives

---

Dans ce travail, nous avons considéré le problème des erreurs de mesures ou des pannes de capteurs. Pour minimiser le temps et le coût de la maintenance, et d'éviter les accidents surtout dans un milieu dangereux comme un réacteur nucléaire, il est nécessaire de détecter et localiser les défaillances de capteurs.

Alors, nous avons présenté une méthode d'estimation de défauts des capteurs qui sont supposés de type additifs de capteur. Celle-ci se base sur une relation de régression linéaire entre l'amplitude des défauts qui sont inconnues et les innovations de FK qui sont connues et assimilable à un bruit blanc centré de covariance connu pour chaque instant  $k$ , ce qui a permis de l'exploiter par un algorithme de moindres carrés récursifs. Admettant au premier temps une MCRFG et dans une autre simulation par une MCRFO.

L'efficacité de l'approche a été illustrée par un exemple simple d'un système linéaire de deuxième ordre. Une analyse de performances du système est faite par l'étude de commandabilité et d'observabilité a été traitée, ainsi leur stabilité est assurée par un retour d'état.

En outre, un des avantages de l'approche est sa structure, puisqu'elle se résume à la simple adjonction d'un module de moindres carrés au filtre de Kalman implémenté, sans affecter ce dernier. D'autre part, cette technique permet d'éliminer le problème de non-observabilité du système pour pouvoir détecter et localiser les défauts des capteurs.

Comme perspectives à ce travail, nous proposons la réalisation expérimentale de ce détecteur de défauts. Ceci permettra de valider les résultats obtenus en simulation. Il serait, aussi, intéressant de généraliser cette méthode au cas des défauts simultanés capteurs-actionneurs. Parmi les autres voies à explorer, il y a la généralisation de ce travail au cas non linéaire ce qui représente une tâche beaucoup plus ardue.

## Démonstration des équations de filtre de Kalman

L'estimation d'état à priori - utilisant Eq. 3.9 on aura :

$$\hat{x}_{k+1}^- = E[x_{k+1}] \quad (\text{A.1})$$

En utilisant Eq. 3.6 :

$$\begin{aligned} \hat{x}_{k+1}^- &= E[F_k x_k + G_k u_k + w_k] \\ &= F_k E[x_k] + G_k E[u_k] + E[w_k] \end{aligned} \quad (\text{A.2})$$

On a  $E[w_k] = 0$  car  $w_k$  est un bruit blanc de moyenne zéro. Eq. A.2 devient :

$$\hat{x}_{k+1}^- = F_k \hat{x}_k^+ + G_k u_k \quad (\text{A.3})$$

Eq. 3.11 est vérifiée.

La covariance de l'erreur a priori - la covariance de l'erreur se déduit également de Eq. 3.6 :

$$\begin{aligned} P_{k+1}^- &= E[(x_{k+1} - \hat{x}_{k+1}^-)(x_{k+1} - \hat{x}_{k+1}^-)^T] \quad (\text{A.4}) \\ &= E[(F_k x_k + G_k u_k + w_k - F_k \hat{x}_k^+ + G_k u_k)(F_k x_k + G_k u_k + w_k - F_k \hat{x}_k^+ + G_k u_k)^T] \\ &= E[(F_k(x_k - \hat{x}_k^+) + w_k)(F_k(x_k - \hat{x}_k^+) + w_k)^T] \\ &= E[F_k(x_k - \hat{x}_k^+)(x_k - \hat{x}_k^+)^T F_k^T + F_k(x_k - \hat{x}_k^+) w_k^T + w_k(x_k - \hat{x}_k^+)^T F_k^T + w_k w_k^T] \\ &= [F_k E[(x_k - \hat{x}_k^+)(x_k - \hat{x}_k^+)^T] F_k^T + F_k E[(x_k - \hat{x}_k^+)] E[(w_k^T)] + E[w_k] E[(x_k - \hat{x}_k^+)^T] F_k^T + \\ &\quad E[(w_k w_k^T)]] \end{aligned} \quad (\text{A.5})$$

avec  $E[(w_k w_k^T)] = Q_k$  est la variance du bruit blanc de l'équation d'évolution alors :

$$P_{k+1}^- = F_k P_k^+ F_k^T + Q_k \quad (\text{A.6})$$

Eq. 3.12 est vérifiée.

Soit un système vérifiant Eq. 3.6 – Eq. 3.7, pour déterminer l'équation récurrente de l'estimateur optimal, on a Eq. A.7 et Eq. A.8

$$\hat{x}_{k+1}^- = E[x_{k+1}] \quad (\text{A.7})$$

$$P_{k+1}^- = E[(x_{k+1} - \hat{x}_{k+1}^-)(x_{k+1} - \hat{x}_{k+1}^-)^T] \quad (\text{A.8})$$

L'utilisation de la formule d'estimation récursive [30] conduit :

$$\hat{x}_{k+1}^+ = \hat{x}_{k+1}^- + E[\tilde{x}_{k+1}^-/\tilde{y}_{k+1}] \quad (\text{A.9})$$

avec:

$$\tilde{x}_{k+1}^- = x_{k+1} - \hat{x}_{k+1}^- \quad (\text{A.10})$$

et

$$\begin{aligned} \tilde{y}_{k+1} &= y_{k+1} - \hat{y}_{k+1} \\ &= y_{k+1} - H_{k+1}\hat{x}_{k+1}^- \\ &= H_{k+1}x_{k+1} + v_{k+1} - H_{k+1} \\ &= H_{k+1}\tilde{x}_{k+1}^- + v_{k+1} \end{aligned} \quad (\text{A.11})$$

D'après les principes d'estimation linéaire optimale [30] on a :

$$E[\tilde{x}_{k+1}^-/\tilde{y}_{k+1}] = E[\tilde{x}_{k+1}^- \tilde{y}_{k+1}^T]E[\tilde{y}_{k+1} \tilde{y}_{k+1}^T]^{-1}\tilde{y}_{k+1} = K_{k+1}\tilde{y}_{k+1} \quad (\text{A.12})$$

alors

$$\begin{aligned} \hat{x}_{k+1}^+ &= \hat{x}_{k+1}^- + K_{k+1}\tilde{y}_{k+1} \\ &= \hat{x}_{k+1}^- + K_{k+1}(y_{k+1} - H_{k+1}\hat{x}_{k+1}^-) \end{aligned} \quad (\text{A.13})$$

Eq. 3.14 est vérifiée.

et

$$\begin{aligned} P_{k+1}^+ &= E[(x_{k+1} - \hat{x}_{k+1}^+)(x_{k+1} - \hat{x}_{k+1}^+)^T] \quad (\text{A.14}) \\ &= E[(x_{k+1} - \hat{x}_{k+1}^- - K_{k+1}(y_{k+1} - H_{k+1}\hat{x}_{k+1}^-))(x_{k+1} - \hat{x}_{k+1}^- - K_{k+1}(y_{k+1} - H_{k+1}\hat{x}_{k+1}^-))^T] \\ &= E[(x_{k+1} - \hat{x}_{k+1}^- - K_{k+1}H_{k+1}x_{k+1} - K_{k+1}v_{k+1} + K_{k+1}H_{k+1}\hat{x}_{k+1}^-) \\ &\quad (x_{k+1} - \hat{x}_{k+1}^- - K_{k+1}H_{k+1}x_{k+1} - K_{k+1}v_{k+1} + K_{k+1}H_{k+1}\hat{x}_{k+1}^-)^T] \\ &= E[((x_{k+1} - \hat{x}_{k+1}^-) - K_{k+1}H_{k+1}(x_{k+1} - \hat{x}_{k+1}^-) - K_{k+1}v_{k+1}) \\ &\quad ((x_{k+1} - \hat{x}_{k+1}^-) - K_{k+1}H_{k+1}(x_{k+1} - \hat{x}_{k+1}^-) - K_{k+1}v_{k+1})^T] \\ &= E[((x_{k+1} - \hat{x}_{k+1}^-)(I - K_{k+1}H_{k+1}) - K_{k+1}v_{k+1})((x_{k+1} - \hat{x}_{k+1}^-)(I - K_{k+1}H_{k+1}) - K_{k+1}v_{k+1})^T] \\ &= E[(x_{k+1} - \hat{x}_{k+1}^-)(I - K_{k+1}H_{k+1})(x_{k+1} - \hat{x}_{k+1}^-)^T(I - K_{k+1}H_{k+1})^T \\ &\quad - K_{k+1}v_{k+1}(x_{k+1} - \hat{x}_{k+1}^-)^T(I - K_{k+1}H_{k+1})^T - \\ &\quad (x_{k+1} - \hat{x}_{k+1}^-)(I - K_{k+1}H_{k+1})(K_{k+1}v_{k+1})^T + K_{k+1}^T v_{k+1}^T] \\ &= (I - K_{k+1}H_{k+1})P_{k+1}^-(I - K_{k+1}H_{k+1})^T + K_{k+1}R_{k+1}K_{k+1}^T \\ &= (P_{k+1}^- - P_{k+1}^-K_{k+1}H_{k+1})(I - K_{k+1}H_{k+1})^T + K_{k+1}R_{k+1}K_{k+1}^T \\ &= P_{k+1}^- - P_{k+1}^-K_{k+1}H_{k+1} - P_{k+1}^-K_{k+1}^T H_{k+1}^T + P_{k+1}^-K_{k+1}H_{k+1}K_{k+1}^T H_{k+1}^T + K_{k+1}R_{k+1}K_{k+1}^T \\ &= P_{k+1}^- - P_{k+1}^-K_{k+1}H_{k+1} - P_{k+1}^-K_{k+1}^T H_{k+1}^T + K_{k+1}(P_{k+1}^-H_{k+1}H_{k+1}^T + R_{k+1})K_{k+1}^T \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= P_{k+1}^- - P_{k+1}^- K_{k+1} H_{k+1} - P_{k+1}^- K_{k+1}^T H_{k+1}^T + P_{k+1}^- K_{k+1}^T H_{k+1}^T \\
&= P_{k+1}^- - P_{k+1}^- K_{k+1} H_{k+1} \\
P_{k+1}^+ &= P_{k+1}^- (I - K_{k+1} H_{k+1}) \tag{A.15}
\end{aligned}$$

Eq. 3.15 est vérifiée.

Pour obtenir le gain  $K_k$  qui minimise la covariance, on annule la dérive la covariance par rapport à  $K_k$ , on utilise MCR.

$$\begin{aligned}
\frac{dP_{k+1}^+}{dK_{k+1}} &= \frac{1}{2} \frac{d}{dK_{k+1}} E[(x_{k+1} - \hat{x}_{k+1}^- - K_{k+1}(y_{k+1} - H_{k+1}\hat{x}_{k+1}^-)) \\
&\quad (x_{k+1} - \hat{x}_{k+1}^- - K_{k+1}(y_{k+1} - H_{k+1}\hat{x}_{k+1}^-))^T] = 0 \tag{A.16}
\end{aligned}$$

On pose :

$$x_{k+1} - \hat{x}_{k+1}^- = y_{k+1}^* \tag{A.17}$$

$$y_{k+1} - H_{k+1}\hat{x}_{k+1}^- = x_{k+1}^* \tag{A.18}$$

Alors Eq. A. 16 sera :

$$\begin{aligned}
\frac{dP_{k+1}^+}{dK_{k+1}} &= \frac{1}{2} \frac{d}{dK_{k+1}} E[(y_{k+1}^* y_{k+1}^{*T} - y_{k+1}^{*T} x_{k+1}^* K_{k+1} - K_{k+1} x_{k+1}^{*T} y_{k+1}^* + K_{k+1}^T x_{k+1}^{*T} x_{k+1}^* K_{k+1}] = 0 \\
&= \frac{1}{2} E[(0 - 2 x_{k+1}^{*T} x_{k+1}^* K_{k+1} + 2 x_{k+1}^{*T} y_{k+1}^*)] = 0 \tag{A.19}
\end{aligned}$$

On obtient

$$\begin{aligned}
K_{k+1} &= E[x_{k+1}^{*T} y_{k+1}^*] E[(x_{k+1}^{*T} x_{k+1}^*)^{-1}] \\
&= E[(y_{k+1} - H_{k+1}\hat{x}_{k+1}^-)^T (x_{k+1} - \hat{x}_{k+1}^-)] E[((y_{k+1} - H_{k+1}\hat{x}_{k+1}^-)^T (y_{k+1} - H_{k+1}\hat{x}_{k+1}^-))]^{-1} \\
&= E[(H_{k+1} x_{k+1} + v_{k+1} - H_{k+1}\hat{x}_{k+1}^-)^T (x_{k+1} - \hat{x}_{k+1}^-)] \\
&\quad E[((H_{k+1} x_{k+1} + v_{k+1} - H_{k+1}\hat{x}_{k+1}^-)^T (H_{k+1} x_{k+1} + v_{k+1} - H_{k+1}\hat{x}_{k+1}^-))]^{-1} \\
&= E[(H_{k+1} (x_{k+1} - \hat{x}_{k+1}^-) + v_{k+1})^T (x_{k+1} - \hat{x}_{k+1}^-)] \\
&\quad E[((H_{k+1} (x_{k+1} - \hat{x}_{k+1}^-) + v_{k+1})^T (H_{k+1} (x_{k+1} - \hat{x}_{k+1}^-) + v_{k+1}))^{-1}] \\
&= (H_{k+1}^T E[(x_{k+1} - \hat{x}_{k+1}^-)^T (x_{k+1} - \hat{x}_{k+1}^-)] + E[v_{k+1}^T] E[(x_{k+1} - \hat{x}_{k+1}^-)]) \\
&\quad (H_{k+1}^T E[(x_{k+1} - \hat{x}_{k+1}^-)^T (x_{k+1} - \hat{x}_{k+1}^-)] + E[v_{k+1}^T] E[(x_{k+1} - \hat{x}_{k+1}^-)]) \\
&\quad (H_{k+1}^T H_{k+1} E[(x_{k+1} - \hat{x}_{k+1}^-)^T (x_{k+1} - \hat{x}_{k+1}^-)] + E[v_{k+1}^T] E[H_{k+1} (x_{k+1} - \hat{x}_{k+1}^-)] + \\
&\quad E[v_{k+1}^T] E[H_{k+1} (x_{k+1} - \hat{x}_{k+1}^-)^T] + E[v_{k+1} v_{k+1}^T])^{-1} \\
K_{k+1} &= (H_{k+1}^T P_{k+1}^-)(H_{k+1} P_{k+1}^- H_{k+1}^T + R_{k+1})^{-1} \tag{A.20}
\end{aligned}$$

Eq. 3.13 est vérifiée.

## Démonstration des équations des moindres carrés récursifs

Pour déterminer l'algorithme des MCR des Prenons Eq. 3.27 et la matrice

$$S_k = (\mathbb{H}_k^T \Sigma_k^{-1} \mathbb{H}_k)^{-1} \quad (\text{B.1})$$

Alors, on aura:

$$\hat{x}_k = S_k \mathbb{H}_k^T \Sigma_k^{-1} y_k \quad (\text{B.2})$$

où  $S_k$  présente la covariance d'erreur d'estimation.

On peut écrire:

$$\mathbb{H}_k^T \Sigma_k^{-1} \mathbb{H}_k = \sum_{i=1}^k \mathbb{H}_i \Sigma_i^{-1} \mathbb{H}_i^T \quad (\text{B.3})$$

$$\mathbb{H}_k^T \Sigma_k^{-1} y_k = \sum_{i=1}^k \mathbb{H}_i \Sigma_i^{-1} y_i \quad (\text{B.4})$$

donc :

$$\hat{x}_k = S_k \sum_{i=1}^k \mathbb{H}_i \Sigma_i^{-1} y_i \quad (\text{B.5})$$

Jusqu'à l'instant  $k - 1$  on aura :

$$\hat{x}_{k-1} = S_{k-1} \sum_{i=1}^{k-1} \mathbb{H}_i \Sigma_i^{-1} y_i \quad (\text{B.6})$$

alors :

$$S_{k-1}^{-1} \hat{x}_{k-1} = \sum_{i=1}^{k-1} \mathbb{H}_i \Sigma_i^{-1} y_i \quad (\text{B.7})$$

d'autre part on peut écrire :



$$\hat{x}_k = S_k \left( \sum_{i=1}^{k-1} \mathbb{H}_i \Sigma_i^{-1} y_i \right) + \mathbb{H}_k \Sigma_k^{-1} y_k \quad (\text{B.8})$$

et

$$\begin{aligned} S_k^{-1} &= \sum_{i=1}^k \mathbb{H}_i \Sigma_i^{-1} y_i \\ &= \sum_{i=1}^{k-1} \mathbb{H}_i \Sigma_i^{-1} \mathbb{H}_i^T + \mathbb{H}_k \Sigma_k^{-1} \mathbb{H}_k^T \\ &= S_{k-1}^{-1} + \mathbb{H}_k \Sigma_k^{-1} \mathbb{H}_k^T \\ &= S_k^{-1} - \mathbb{H}_k \Sigma_k^{-1} \mathbb{H}_k^T \end{aligned} \quad (\text{B.9})$$

$$\begin{aligned} \hat{x}_k &= S_k [S_{k-1}^{-1} \hat{x}_{k-1} - \mathbb{H}_k \Sigma_k^{-1} y_k] \\ &= S_k [(S_k^{-1} - \mathbb{H}_k \Sigma_k^{-1} \mathbb{H}_k^T) \hat{x}_{k-1} - \mathbb{H}_k \Sigma_k^{-1} y_k] \\ &= \hat{x}_{k-1} - S_k \mathbb{H}_k \Sigma_k^{-1} \mathbb{H}_k^T \hat{x}_{k-1} - S_k \mathbb{H}_k \Sigma_k^{-1} y_k \\ &= \hat{x}_{k-1} - S_k \mathbb{H}_k \Sigma_k^{-1} [\mathbb{H}_k^T \hat{x}_{k-1} - y_k] \end{aligned} \quad (\text{B.10})$$

$\mathbb{H}_k^T \hat{x}_{k-1}$  peut être considéré comme étant l'estimation  $y_k$ , c'est-à-dire :

$$\hat{y}_k = \mathbb{H}_{k-1}^T \hat{x}_k \quad (\text{B.11})$$

$$\begin{aligned} \hat{x}_k &= \hat{x}_{k-1} - S_k \mathbb{H}_k \Sigma_k^{-1} [\hat{y}_k - y_k] \\ &= \hat{x}_{k-1} - L_k [\hat{y}_k - y_k] \\ &= \hat{x}_{k-1} + L_k [y_k - \hat{y}_k] \\ \hat{x}_k &= \hat{x}_{k-1} + L_k [y_k - \mathbb{H}_{k-1}^T \hat{x}_k] \end{aligned} \quad (\text{B.12})$$

$L_k$  est le **gain de Kalman**

$$L_k = S_k \mathbb{H}_k \Sigma_k^{-1} \quad (\text{B.13})$$

$$\begin{aligned} S_k &= (\mathbb{H}_k^T \Sigma_k^{-1} \mathbb{H}_k)^{-1} \\ &= (\mathbb{H}_{k-1}^T \Sigma_{k-1}^{-1} \mathbb{H}_{k-1} + \mathbb{H}_k^T \Sigma_k^{-1} \mathbb{H}_k)^{-1} \\ S_k &= (S_{k-1}^{-1} + \mathbb{H}_k^T \Sigma_k^{-1} \mathbb{H}_k)^{-1} \end{aligned} \quad (\text{B.14})$$

Appliquant le lemme d'inversion de matrice :

$$(A + BCD)^{-1} = A^{-1} - A^{-1}B(C^{-1} + DA^{-1}B)^{-1}D A^{-1} \quad (\text{B.15})$$

on aura :

$$\begin{aligned}
S_k &= S_{k-1} - S_{k-1} \mathbb{H}_k^T (\underline{\Sigma}_k + \mathbb{H}_k S_{k-1} \mathbb{H}_k^T)^{-1} \mathbb{H}_k S_{k-1} \\
&= S_{k-1} \left( I - \mathbb{H}_k^T (\underline{\Sigma}_k + \mathbb{H}_k S_{k-1} \mathbb{H}_k^T)^{-1} \mathbb{H}_k S_{k-1} \right) \\
S_k &= S_{k-1} \left( I - \frac{\mathbb{H}_k S_{k-1} \mathbb{H}_k^T}{\underline{\Sigma}_k + \mathbb{H}_k S_{k-1} \mathbb{H}_k^T} \right)
\end{aligned} \tag{B.16}$$

Remplaçant  $S_k$  de Eq. B. 16 dans Eq. B. 13 , on aura :

$$\begin{aligned}
L_k &= S_{k-1} \left( I - \frac{\mathbb{H}_k S_{k-1} \mathbb{H}_k^T}{\underline{\Sigma}_k + \mathbb{H}_k S_{k-1} \mathbb{H}_k^T} \right) \mathbb{H}_k \underline{\Sigma}_k^{-1} \\
&= S_{k-1} \left( \frac{\underline{\Sigma}_k + \mathbb{H}_k S_{k-1} \mathbb{H}_k^T - \mathbb{H}_k S_{k-1} \mathbb{H}_k^T}{\underline{\Sigma}_k + \mathbb{H}_k S_{k-1} \mathbb{H}_k^T} \right) \mathbb{H}_k \underline{\Sigma}_k^{-1} \\
&= S_{k-1} \left( \frac{\underline{\Sigma}_k}{\underline{\Sigma}_k + \mathbb{H}_k S_{k-1} \mathbb{H}_k^T} \right) \mathbb{H}_k \underline{\Sigma}_k^{-1} \\
L_k &= \left( \frac{S_{k-1} \mathbb{H}_k}{\underline{\Sigma}_k + \mathbb{H}_k S_{k-1} \mathbb{H}_k^T} \right)
\end{aligned} \tag{B.17}$$

# Bibliographie

---

- [1] D. Fragkoulis : "*Détection et localisation des défauts provenant des actionneurs et des capteurs : application sur un système non linéaire*", thèse de doctorat, Université de Toulouse, 2008.
- [2] A. Aitouche : "*Détection et Localisation de défaillances de capteurs*", thèse de Doctorat, Université de Nancy, 1990.
- [3] R. Fellouah : "*Contribution au Diagnostic de Pannes pour les Systèmes Différentiellement Plats*", thèse de doctorat, Université de Toulouse, 2007.
- [4] D. Maquin et J. Ragot : "*Diagnostic des systèmes linéaires*". Hermès, 2000.
- [5] H. Baikeche : "*Diagnostic des systèmes linéaires en boucle fermée*", thèse de doctorat, l'Institut National Polytechnique de Lorraine, 2007.
- [6] R. Patton et J. Chen : "*A review of parity space approaches to fault diagnosis, in Proceedings of SAFEPROCESS'91*", (Baden Baden - Germany), pp. 239-255, IFACIMACS, 1991.
- [7] T. Höfling et T. Pfeufer : "*Detection of Additive and Multiplicative Faults – Parity Space vs. Parameter Estimation. In IFAC SAFEPROCESS'94*", 2, 539-544, Espoo, Finland, 1994.
- [8] R. Isermann : "*Integration of Fault Detection and Diagnosis Methods. In IFAC SAFEPROCESS'94*", 2, 597-612, Espoo, Finland, 1994.
- [9] F. Jia et J. Jiang : "*Fault Diagnosis in DC Servo Systems : A Comparative Study of Three Fault Diagnosis Schemes. In : International Conference on Fault Diagnosis - TOOLDIAG'93*", 2, 573-581. Toulouse France, 1993.
- [10] A. Simoglou, E. B. Martin et A. J. Morris : "*Multivariate statistical process control in chemicals manufacturing*", IFAC Conference SAFEPROCESS, Hull, UK, pp. 21-27, 1997.
- [11] R. Anne et A. Cinar : "*Statistical process monitoring and disturbance diagnosis in multivariable continuous processes*", AIChE Journal, vol. 42, N°4, pp. 995-1009, 1996.

- [12] A. J. Morris et E. B. Martin : "*Process performance monitoring and fault détection through multivariate statistical process control*", IFAC Conference SAFEPROCESS, Hull, UK, pp. 1-14, 1997.
- [13] F. MacGregor John, T. Kourti et P. Nomikos: "*Analysis, monitoring and fault diagnosis of industrial processes using multivariate statistical projection methods*", IFAC, 13th Triennial Word Congress, San Francisco, USA, pp. 145-150, 1996.
- [14] COMISSARIAT A L'ENERGIE ATOMIQUE. *Statistique appliquée à l'exploitation des mesures*, Tome 1 et 2, Masson, 1978.
- [15] W.J. Conover: *Practical nonparametric statistics*, Wiley & Son, New York, 1980.
- [16] E. Morice : "*Quelques tests non paramétriques*", Revue de statistique appliquée, Vol. 4, N° 4, pp. 75-107, 1956.
- [17] O. Gaudoin : "*Principes et Méthodes Statistiques*", Cours, Grenoble.
- [18] W. Maazoun : "*Estimation*", Ecole polytechnique de Montréal, Montréal, 2011.
- [19] G. Videau : "*Méthodes garanties pour l'estimation d'état et le contrôle de cohérence des systèmes non linéaires à temps continu*", thèse de doctorat, Université de Bordeaux, 2009.
- [20] A. Maddi, A. Guessoum, D. Berkani et O. Belkina : "*Etude de la méthode des moindres carrée récursive et application au signal de parole*", IEEE, 2005.
- [21] C. Keramsi, T. Porteboeuf et F. Thorey : "*Les filtres de Kalman*", mars 2011.
- [22] Kh. El Merraoui : "*Diagnostic de défauts à l'aide d'observateurs d'états*", thèse de magister, Université de Blida, 2008.
- [23] G. SAPORTA : *Probabilités Analyse Des Données Et Statistique*, Edition Technip, Paris., 2006.
- [24] O. Besson : "*Estimation en traitement du signal*", Institut supérieur de l'aéronautique et de l'espace.
- [25] C. Enzo, C. Kellya et D. Thibaut : "*Etude de cas : Filtre de Kalman*", mars 2010.
- [26] H. Abdelfettah: "*Estimation d'état et diagnostic de systèmes à commutation par filtrage multi-modèle*", thèse de doctorat, Nancy., 2006.
- [27] M. Mokhtari et A. Mesbah : *Apprendre et Maitriser Matlab*, Edition Springer, 1997.
- [28] B. Larroque : "*Observateurs de systèmes linéaires Application à la détection et localisation de fautes*", thèse de doctorat, Université de Toulouse, 2008.

- [29] G. Welch et G. Bishop : "*An Introduction to the Kalman Filter*", ACM, Chapel Hill, 2001.
- [30] F. Rotella, "*Filtrage Optimal*", Ecole Nationale d'Ingénieurs de Tabes.
- [31] J.Idier, H.Piet-Lahanier, G.Le Besnerais et F.Champagnat : "*Traitement numérique du signa. Deuxième partie :Algorithmes*", Mars 2004.
- [32] P. Borne, G. Dauphin-Tanguy, J.P. Richard, F. Rotella et I. Zambettakis : "***Modélisation et identification des processus***", Tome 2, Technip, 1992.
- [33] Y.T. Chan, A.G.C. HU et J.B. Plant : "*A Kalman filter based tracking scheme with input estimation*", IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems, 15(2): 237–244, 1979.
- [34] T.C.Wang et P.K. Varshney : "*A tracking algorithm for maneuvering targets*", IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems, 29(3):910–924, 1993.
- [35] A.S. Willsky et H.L. Jones : "*A generalized likelihood ratio approach to the detection and estimation of jumps in linear systems*", IEEE Transactions on Automatic Control, 21(1):108–112, 1976.
- [36] A.S. Willsky, E.Y. Chow, S.B. Gershwin, C.S. Greene, P.K. HOUPAND et A.L. Kurkjian : "*Dynamic model-based techniques for the detection of incidents on freeways*", IEEE Transactions on Automatic Control, 25(3):347–360, 1980.
- [37] F.M. Sami, P. Coloneri et N. Marius : "*H2 robust fault estimation for periodic systems. In American Control Conference*", pages 2973–2978, Denver, Co., U.S.A., 2003.
- [38] B. Jiang, M. Staroswiecki et V. Cocquempot : "*Fault estimation in nonlinear uncertain systems using robust/sliding-mode observers*", IEE Proceedings on Control Theory, 151(1):29–37, 2004.
- [39] B. Jiang et F.N. Chowdhury : "*Fault estimation and accomodation for linear MIMO discrete-time systems*", IEEE Transactions on Control System Technology, 13(3): 493–499, 2005.
- [40] C. Edwards et C.P. Tan : "*Sensor fault tolerant control using sliding mode observers*", Control Engineering and Practice, 14(8):897–908, 2006.
- [41] X.G. Yan et C. Edwards : "*Nonlinear robust fault reconstruction and estimation using a sliding mode observer*", Automatica, 43(9):1605–1614, 2007.
- [42] Z. Gao et S.X. Ding : "*Actuator fault robust estimation and fault-tolerant control for a class of nonlinear descriptor systems*", Automatica, 43(5):912–920, 2007.

[43] H. Jamouli et D. Sauter : "*A new adaptive Kalman estimator integrated in a fault-tolerant control system*", IEEE Mediterranean conference on control and automation, Athens, Greece, 2007.

[44] L. Devroye : *Non uniforme random variate generation*, Springer-Verlag, 1986.