

REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE
MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE



UNIVERSITE SAAD DAHLAB DE BLIDA 1
FACULTE DE TECHNOLOGIE
DEPARTEMENT DE MECANIQUE

Projet de Fin d'Etudes
Pour l'obtention du Diplôme de Master en
Construction mécanique

Thème :
**Calcul de K_{III} pour une section circulaire et carrée fissurée
par la méthode de collocation de frontière**

Proposé et encadré par :
Pr.FERDJANI Hicheme

Réalisé par :
SERGHINI Oussama
TEFIANI Billal

2018/2019

REMERCIEMENT

Au terme de ce travail, nous remercions le Dieu le tout puissant qui nous a donné la force, la patience, le courage et la volonté pour élaborer ce modeste travail.

Nous remercions notre encadreur, monsieur H.ferdjani Pour le soutien tout au long de la préparation de notre projet de fin d'étude.

Nous remercions également :

Les membres des jurys pour l'effort qu'ils feront dans le but d'examiner ce modeste travail.

Ainsi que tout l'ensemble des enseignants et des responsables du département de mécanique qui ont contribué à notre formation.

Sans oublier de remercier nos chers parents, qui ont toujours prié pour nous, qui n'ont pas cessé de nous encourager, de nous soutenir et qui ont fait de nous ce que nous sommes aujourd'hui

Et à tous ceux qui nous ont aidés de près ou de loin.

Merci 

Dédicaces

Pour commencer je prends le temps de remercier le bon DIEU de m'avoir donné la force et le courage pour terminer mes études.

A ma chère mère ,pour tous les sacrifices ,l' amour ,la compassion ,le soutien et les prières tout au long de mes études,

A mes frères et mes sœurs pour leurs encouragements permanents, et leur soutien moral,

*A tous mes amis de la faculté plus particulièrement :
Mokrane,Ahmed.Dhaia ,Nour el islem*

Je remercie mes amis intimes et préférés : Imad, Aziz, Abdenour.

A tous mes professeurs à qui je témoigne leur soutien, leur générosité à qui Je dois un profond respect et ma loyale considération.

En fin, je remercie mon binôme Tefiani Billal.

OUSSAMA

Dédicaces

*Pour commencer je prends le temps de remercier le bon DIEU de m'avoir
donné la force et le courage pour terminer mes études*

*Chère maman en ce jour-là qui spéciale pour moi j'aurai aimé que tu sois
présente à mes côtés pour me soutenir le destin a voulu que tu partes trop tôt
mais là où tu es dans ton paradis je sais que tu es fière de moi .je dédie ce
travail à toi maman, je t'aime*

*A mon cher père, pour tous ses sacrifices, son amour, son soutien et son prière
tout au long de mes études,*

*A mes frères et mes sœurs pour leurs encouragements permanents, et leur
soutien moral,*

*A tous mes amis de la faculté plus particulièrement :Dhaia,Nour el
Islem,Oussama*

Je remercier mes amis intimes et préférer :Ousssama ,Abd el samed

*A tous mes professeurs à qui je témoigne leur soutien, leur générosité à qui je
dois un profond respect et ma loyale considération.*

En fin, je remercie mon binôme Serghini Oussama.

BILLAL

Nomenclatures

Im	partie imaginaire
Re	partie réelle.
σ_{ij}	Champ de contrainte
Z	nombre complexe
C_n	Coefficient complexe
i	nombre imaginaire
A_n, B_n	facteurs réels
σ	la contrainte.
ε	déformation.
FIC	facteur d'intensité de contrainte.
KI, KII et KIII	facteurs d'intensité de contrainte respectivement en mode 1, 2 et 3.
m	nombre de points de collocation.
n	vecteur normale.
μ	coefficient de cisaillement.
π	le nombre ascendant 3,14.
r, θ	composantes du repère polaire.
t	composante du vecteur contrainte.
τ	contrainte de cisaillement.
X_1, X_2	composantes du repère cartésien.
P	nombre de trmes
f	longueur de la fissure

Sommaire

REMERCIEMENTS

Liste des figures

Liste des tableaux

Introduction générale 1

Chapitre 1 :Rappels Théoriques 2

I.1.Introduction 3

I.2. Définition de la mécanique de la rupture [1] 3

I.2.1. Modes de rupture [2] 3

I.3 Le facteur d'intensité de contrainte K [2] 4

Chapitre 2 : Développement des contraintes et méthode de collocation de frontière 6

II.1.Introduction 7

II.2. Développement des contraintes en série infinie 7

II.3 Méthode de collocation de frontière 9

Chapitre 3:Problèmes Traités 11

III.1 Introduction 12

III.2 Cas de Fissure centrale 12

III.2.1 Résultats 13

III.3.Cas de Fissure non centrale 15

III.3.1 Résultats 16

III.3.2Détermination de l'expression analytique du K_{III} 17

III.3.3Confirmation de la validité de l'expression (III-7) 18

III.4.Détermination de K_{III} pour une fissure centrale dans une section carrée 19

III.4.1 Résultats 21

III.4.2 Influence de h 23

Conclusion général 24

Bibliographie

Annexes 1 :Les programmes de calcul du FIC dans une section circulaire fissurée

A1-1Programme pour fissure central

A1-2 Programme pour fissure non central.

Annexe 2 Les programmes de calcul du FIC dans une section carrée fissurée

A2-1 Programme pour fissure centrale.

A2-2 Programme pour Influence de h

Annexe 3 : programmes pour les expressions du KIII

A3-1 Programme pour l'expression de KIII

A3-2 Programme pour confirmer l'expression

. Annexe 4 : Résultats pour le cas d'une fissure non centrale

Résultats pour $f=0.1$

Résultats pour $f=0.2$

Résultats pour $f=0.3$

Résultats pour $f=0.4$

Résultats pour $f=0.5$

Résultats pour $f=0.6$

Résultats pour $f=0.7$

Résultats pour $f=0.8$

Résultats pour $f=0.9$

Résultats pour $f= 1$

Résultats pour $f= 1.1$

Résultats pour $f= 1.2$

Résultats pour $f= 1.3$

Résultats pour $f= 1.4$

Résultats pour $f= 1.5$

Résultats pour $f= 1.6$

Résultats pour $f= 1.7$

Liste des figures :

Figure I-1: Les trois modes de rupture.....	4
Figure I-2: Champ de contrainte.....	4
Figure II-1: Fissure droite et coordonnées polaire.....	9
Figure II-2 : Section fissurée et points de collocation.....	10
Figure III-1 : Fissure centrale dans une section circulaire.....	12
Figure III-2 : Fissure centrale dans une section circulaire, points de collocation.....	13
Figure III-2 : Facteur d'intensité de contrainte K_{III} en fonction de p pour une fissure centrale dans une section circulaire.....	14
Figure III-3 : Fissure non centrale dans une section circulaire.....	15
Figure III-4 : Fissure non centrale, points de collocation.....	15
Figure III-4 : Fissure dans une section rectangulaire.....	20
Figure III-5 : Points de collocation.....	20
Figure III-5 : Valeurs de K_{III} en fonction de P pour le carrée.....	22
Figure III-5 : Valeurs de K_{III} en fonction de P ($h=1.8$).....	23
FigureA4-1 : Facteur d'intensité de contrainte K_{III} en fct de P ($f=0.1$)	
FigureA4-2 : Facteur d'intensité de contrainte K_{III} en fct de P ($f=0.2$)	
FigureA4-3 : Facteur d'intensité de contrainte K_{III} en fct de P ($f=0.3$)	
FigureA4-4 : Facteur d'intensité de contrainte K_{III} en fct de P ($f=0.4$)	
FigureA4-5 : Facteur d'intensité de contrainte K_{III} en fct de P ($f=0.5$)	
FigureA4-6 : Facteur d'intensité de contrainte K_{III} en fct de P ($f=0.6$)	
FigureA4-7 : Facteur d'intensité de contrainte K_{III} en fct de P ($f=0.7$)	
FigureA4-8 : Facteur d'intensité de contrainte K_{III} en fct de P ($f=0.8$)	
FigureA4-9 : Facteur d'intensité de contrainte K_{III} en fct de P ($f=0.9$)	
FigureA4-10 : Facteur d'intensité de contrainte K_{III} en fct de P ($f=1$)	
FigureA4-11 : Facteur d'intensité de contrainte K_{III} en fct de P ($f=1.1$)	
FigureA4-12 : Facteur d'intensité de contrainte K_{III} en fct de P ($f=1.2$)	
FigureA4-13 : Facteur d'intensité de contrainte K_{III} en fct de P ($f=1.3$)	
FigureA4-14 : Facteur d'intensité de contrainte K_{III} en fct de P ($f=1.4$)	

FigureA4-15 : Facteur d'intensité de contrainte KIII en fct de P (f=1.5)

FigureA4-16 : Facteur d'intensité de contrainte KIII en fct de P (f=1.6)

FigureA4-17 : Facteur d'intensité de contrainte KIII en fct de P (f=1.7)

Liste des tableaux

Tableau III-1	K_{III} en fonction de p pour une fissure centrale dans une section circulaire.....	14
Tableau III-2	Valeurs de K_{III} pour différentes valeurs de f	16
Tableau III-3	Comparaison entre Tableau (III-2) et (III-7).....	18
Tableau III-4	Comparaison entre l'expression (III-7) avec les résultats obtenus par le système (III-2).....	19
Tableau III-5	Les valeurs pour chaque secteur.....	21
Tableau III-6	Les valeurs du facteur d'intensité de contrainte en fonction du nombre de termes.....	22
Tableau III-7	: Les valeurs du facteur d'intensité de contrainte en fonction du nombre de termes $p(h=1.8)$	23
Tableau A4-1	K_{III} en fonction de $P(f=0.1)$	
Tableau A4-2	K_{III} en fonction de $P(f=0.2)$	
Tableau A4-3	K_{III} en fonction de $P(f=0.3)$	
Tableau A4-4	K_{III} en fonction de $P(f=0.4)$	
Tableau A4-5	K_{III} en fonction de $P(f=0.5)$	
Tableau A4-6	K_{III} en fonction de $P(f=0.6)$	
Tableau A4-7	K_{III} en fonction de $P(f=0.7)$	
Tableau A4-8	K_{III} en fonction de $P(f=0.8)$	
Tableau A4-9	K_{III} en fonction de $P(f=0.9)$	
Tableau A4-10	K_{III} en fonction de $P(f=1)$	
Tableau A4-11	K_{III} en fonction de $P(f=1.1)$	
Tableau A4-12	K_{III} en fonction de $P(f=1.2)$	
Tableau A4-13	K_{III} en fonction de $P(f=1.3)$	
Tableau A4-14	K_{III} en fonction de $P(f=1.4)$	
Tableau A4-15	K_{III} en fonction de $P(f=1.5)$	
Tableau A4-16	K_{III} en fonction de $P(f=1.6)$	
Tableau A4-17	K_{III} en fonction de $P(f=1.7)$	

Introduction générale

Dans la mécanique de la rupture fragile, les contraintes sont singulières en pointe de fissure. Cette singularité est quantifiée par le Facteur d'Intensité de Contrainte (FIC). Le calcul du FIC est très important car il permet d'estimer la dangerosité d'une fissure pour une structure donnée. Cette estimation est basée sur l'application des critères de rupture directement liés au FIC.

Il existe plusieurs méthodes numériques pour calculer le FIC. L'une des plus utilisées est « la méthode de collocation de frontière ». Cette méthode a déjà été utilisée dans des précédents master en mode III .Y . Mezouani[2] a calculé le FIC en mode III d'une section circulaire avec une fissure centrale. Mekkaoui et Belhadj[3] ont calculé le FIC en mode I d'une section elliptique avec une fissure centrale et non centrale.

Dans ce travail, nous allons utiliser la méthode de collocation de frontière pour calculer le FIC en mode III dans deux sections, une circulaire et une carrée.

Nous envisageons deux cas pour une section circulaire : fissure centrale et non centrale, et un seul cas pour une section carrée : fissure centrale.

Nous déduisons une expression analytique du K_{III} en fonction de la longueur de la fissure dans la cas d'une fissure non centrale dans une section circulaire.

Le mémoire se divise en trois chapitres :

- Le premier chapitre présente les principaux concepts de la mécanique de la rupture utilisés dans notre travail, à savoir : modes de rupture et facteur d'intensité de contrainte.
- Dans le deuxième chapitre, on parlera du développement des contraintes dans une section fissurée et présentons la méthode de collocation de frontière.
- Dans le troisième chapitre, on va calculer la facteur d'intensité de contrainte K_{III} , pour une section circulaire avec une fissure centrale et non centrale. Il contient également la détermination d'une expression polynomiale du K_{III} pour différentes valeurs de la longueur de la fissure dans le cas d'une fissure non centrale. Nous déterminons également K_{III} pour une section carrée avec une fissure centrale.
- Nous terminons par une conclusion générale.

Chapitre I

Rappels Théoriques

I.1.Introduction :

Dans ce chapitre, on va présenter les bases théoriques de notre travail en deux parties :

- Dans la première partie, nous présentons quelques notions de la mécanique de la rupture.
- Dans la seconde partie, nous intéressons au facteur d'intensité de contrainte.

I.2. Définition de la mécanique de la rupture [1] :

La théorie de la mécanique de la rupture est un moyen pour estimer la stabilité des fissures qui peuvent survenir à cause des défauts. Elle permet de prévoir l'évolution de la fissure jusqu'à la ruine de la structure. L'objet de mécanique de la rupture est l'étude de la propagation de la fissure en fonction des chargements appliqués et des caractéristiques du matériau.

I.2.1.Modes d'ouverture d'une fissure [2] :

Toute ouverture de fissure peut être ramenée à la superposition de trois modes élémentaires

(Fig.I-1):

- Le mode I (ou mode d'ouverture) : où les lèvres de la fissure se déplacent dans des directions opposées, perpendiculairement au plan de fissuration,
- Le mode II (ou mode de cisaillement dans le plan) : où les lèvres de la fissure se déplacent dans le même plan, dans une direction perpendiculaire au front de fissure,
- Le mode III (ou mode de cisaillement hors plan) : où les lèvres de la fissure se

déplacent dans le même plan, dans une direction parallèle au front de fissure.

Remarque :

Notons que dans le cas des modes II et III, les lèvres de la fissure restent en contact et entraînent donc des frottements qui diminuent l'énergie disponible pour la propagation de fissure. Ces deux modes sont ainsi généralement moins dangereux que le mode I.

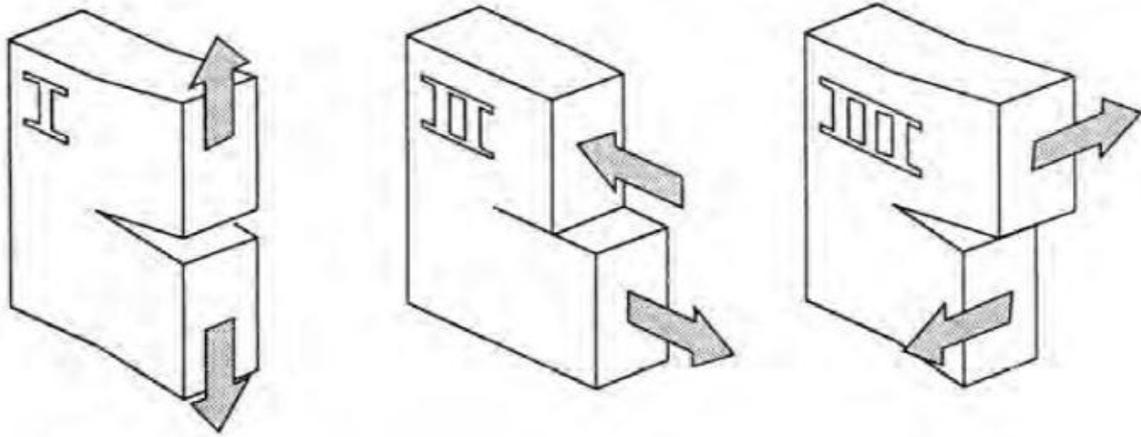


Figure I-1 Les trois modes de rupture

I.3 Le facteur d'intensité de contrainte K [2] :

Le champ de contraintes (Figure I-2) présente une singularité en $r^{-1/2}$ proche de la pointe de fissure. L'intensité de la singularité est caractérisée par les paramètres appelés facteurs d'intensité de contraintes (FIC), notés K_I, K_{II} et K_{III} correspondants aux modes d'ouverture élémentaires.

A l'aide de la théorie de l'élasticité, Irwin a montré que les contraintes dans cette zone singulière peuvent être exprimées en fonction des facteurs d'intensité de contraintes de la manière suivante :

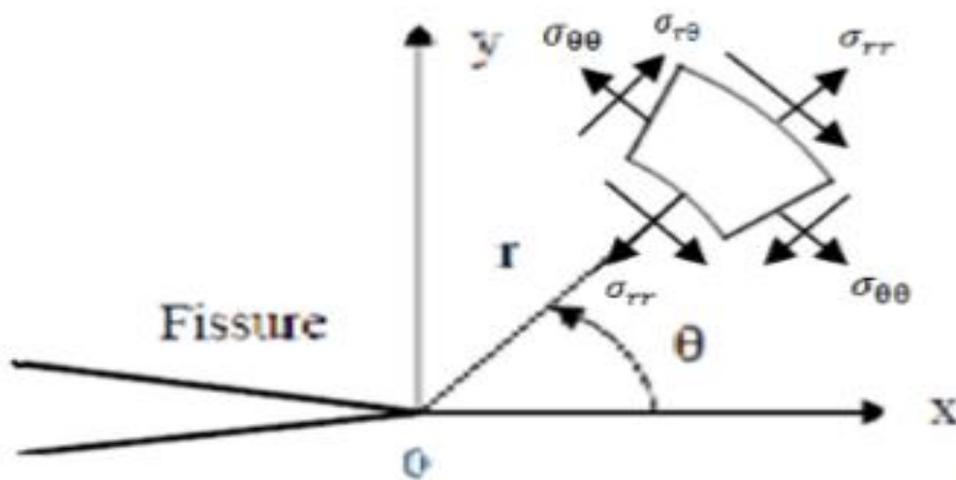


Figure I-2 Champ de contrainte

Mode I :

$$(I-1) \quad \begin{cases} \sigma_{11} = KI \frac{1}{\sqrt{2\pi r}} \cos \frac{\theta}{2} [1 - \sin \frac{\theta}{2} \sin \frac{3\theta}{2}] \\ \sigma_{22} = KI \frac{1}{\sqrt{2\pi r}} \cos \frac{\theta}{2} [1 + \sin \frac{\theta}{2} \sin \frac{3\theta}{2}] \\ \tau_{12} = KI \frac{1}{\sqrt{2\pi r}} \cos \frac{\theta}{2} \sin \frac{\theta}{2} \sin \frac{3\theta}{2} \end{cases}$$

Mode II :

$$(I-2) \quad \begin{cases} \sigma_{11} = -KII \frac{1}{\sqrt{2\pi r}} \sin \frac{\theta}{2} [2 + \cos \frac{\theta}{2} \cos \frac{3\theta}{2}] \\ \sigma_{22} = KII \frac{1}{\sqrt{2\pi r}} \sin \frac{\theta}{2} [\cos \frac{\theta}{2} \cos \frac{3\theta}{2}] \\ \tau_{12} = KII \frac{1}{\sqrt{2\pi r}} \cos \frac{\theta}{2} [1 - \sin \frac{\theta}{2} \sin \frac{3\theta}{2}] \end{cases}$$

Mode III:

$$(I-3) \quad \begin{cases} \tau_{13} = -KIII \frac{1}{\sqrt{2\pi r}} \sin(\frac{\theta}{2}) \\ \tau_{13} = KIII \frac{1}{\sqrt{2\pi r}} \cos(\frac{\theta}{2}) \end{cases}$$

Où r et θ sont respectivement le rayon et l'angle en coordonnées polaires

Dans les formules précédentes σ_{11} , σ_{22} , τ_{12} , τ_{13} , τ_{23} sont les composantes du tenseur des contraintes.

Les coefficients KI, KII et KIII sont appelés facteurs d'intensité de contraintes et s'expriment en $\text{MPa}\sqrt{\text{M}}$. Ils sont indépendants de r et θ et ne dépendent que de la répartition des efforts extérieurs sur un solide donné, de sa géométrie et de la longueur de la fissure

Chapitre II

Développement des contraintes et méthode de collocation de frontière

II.1.Introduction :

Nous présentons dans ce chapitre, le développement des contraintes en série infinie pour une fissure en mode III. Nous présentons également la méthode de collocation de frontière.

II.1. Développement des contraintes en série infinie :

En mode III, on est en dans le cas de l'élasticité anti-plane. Nous rappelons qu'en élasticité anti-plane, toutes les contraintes sont nulles sauf τ_{13} et τ_{23} . Nous introduisons la formulation en variables complexes qui s'écrit dans ce cas (référence Zhender):

$$\begin{cases} \tau = \tau_{23} + i\tau_{13} \\ n = n_1 + in_2 \\ t = t_3 = \text{Im}(\tau n) \end{cases} \quad \text{II-1}$$

Où τ est la contrainte complexe, t est une abréviation pour t_3 la composante selon x_3 du vecteur contrainte, n est la normale unitaire extérieure au domaine, et n_1 et n_2 ses composantes selon x_1 et x_2 .

La contrainte complexe τ qui est une fonction analytique, peut être exprimée par une série infinie de fonctions puissance :

$$\tau = \sum_{N=-\infty}^{+\infty} C_N Z^{\lambda_N} \quad \text{II-2}$$

où les $C_N = A_N + iB_N$ sont des nombres complexes, les λ_N sont des réels et $Z = re^{i\theta}$ avec r et θ les coordonnées polaire.

En regroupant les parties réelles et imaginaires dans (II-2), il vient :

$$\tau = \sum_{N=-\infty}^{+\infty} r^{\lambda_N} \{ [A_N \cos(\lambda_N \theta) - B_N \sin(\lambda_N \theta)] + i[A_N \sin(\lambda_N \theta) + B_N \cos(\lambda_N \theta)] \} \quad \text{II-3}$$

Pour satisfaire les condition de bord libre sur les lèvres de la fissure (Figure II-1), et en utilisant (II-1) on a $\text{Re}(\tau) = \tau_{23} = 0$ pour pour $\theta = \pm\pi$. En prenant la partie réelle de II-3 et en remplaçant par π et $-\pi$ respectivement, on obtient les équations suivantes (en prenant $r \neq 0$):

$$A_N \cos(\lambda_N \pi) - B_N \sin(\lambda_N \pi) = 0 \quad \text{II-4}$$

$$A_N \cos(\lambda_N \pi) + B_N \sin(\lambda_N \pi) = 0 \quad \text{II-5}$$

Si $\lambda_N n$ 'est ni entier ni demi-entier, (II-4) et (II-5) donnent $A_N = B_N = 0$, solution triviale sans intérêt. Nous devons donc considérer séparément le cas entier et le cas demi-entier :

$$\begin{cases} \lambda_N = N - 1 \Rightarrow A_N = 0 & B_N \forall que \\ \lambda_N = N - \frac{3}{2} \Rightarrow B_N = 0 & A_N \forall que \end{cases} \quad \text{II-6}$$

avec N entier.

Pour éviter un déplacement infini en pointe de fissure, on doit avoir $\lambda_N \geq -1/2$ ($N \geq 1$) (référence, cours Ferdjani). En tenant compte de (II-6), (II-3) devient :

$$\begin{aligned} \tau = & \sum_{N=1}^{\infty} \left\{ \left[A_N r^{(-\frac{3}{2}+N)} \cos \left[\left(-\frac{3}{2} + N \right) \theta \right] - B_N r^{N-1} \sin((N-1)\theta) \right] + \right. \\ & \left. i \left[A_N r^{(-\frac{3}{2}+N)} \sin \left[\left(-\frac{3}{2} + N \right) \theta \right] + B_N r^{N-1} \cos((N-1)\theta) \right] \right\}, \quad (\text{II-7}) \end{aligned}$$

L'expression (II-7) est approximée par la série tronquée suivante :

$$\begin{aligned} \tau = & \sum_{N=1}^p \left\{ \left[A_N r^{(-\frac{3}{2}+N)} \cos \left[\left(-\frac{3}{2} + N \right) \theta \right] - B_N r^{N-1} \sin((N-1)\theta) \right] + \right. \\ & \left. i \left[A_N r^{(-\frac{3}{2}+N)} \sin \left[\left(-\frac{3}{2} + N \right) \theta \right] + B_N r^{N-1} \cos((N-1)\theta) \right] \right\}, \quad (\text{II-8}) \end{aligned}$$

où p est appelé *nombre de termes*. Nous constatons que (II-8) contient 2p constantes inconnues : A_N, B_N $N=1$ à p.

Nous avons besoin de l'expression de t (la composante selon x_3 du vecteur contrainte). En utilisant (II-1) et (II-8), on obtient :

$$\begin{aligned} t = & \sum_{N=1}^p \left\{ A_N r^{(-\frac{3}{2}+N)} \left[\cos \left[\left(-\frac{3}{2} + N \right) \theta \right] n_2 + \sin \left[\left(-\frac{3}{2} + N \right) \theta \right] n_1 \right] + B_N r^{N-1} \left[-\sin[(N-1)\theta] n_2 + \cos[(N-1)\theta] n_1 \right] \right\}. \quad (\text{II-9}) \end{aligned}$$

Facteur d'intensité de contrainte K_{III}

En développant (II-8) pour $N = 1$, on obtient :

$$\tau = A_1 r^{-\frac{1}{2}} \cos \left(\frac{\theta}{2} \right) + i \left(-A_1 r^{-\frac{1}{2}} \sin \frac{\theta}{2} + B_1 \right) + \dots = \tau_{23} + i\tau_{13}$$

En identifiant les parties réelles et imaginaires, de part et d'autre de l'équation, on obtient :

$$\begin{cases} \tau_{23} = A_1 r^{-\frac{1}{2}} \cos \left(\frac{\theta}{2} \right) + \dots \\ \tau_{13} = -A_1 r^{-\frac{1}{2}} \sin \left(\frac{\theta}{2} \right) + B_1 + \dots \end{cases} \quad \text{II-10}$$

D'autre part, nous savons que le développement asymptotique des contraintes en mode III s'écrit de la manière suivante (référence cours Ferdjani) :

$$\begin{cases} \tau_{23} = \frac{K_{III}}{\sqrt{2\pi r}} \cos \frac{\theta}{2} \\ \tau_{13} = -\frac{K_{III}}{\sqrt{2\pi r}} \sin \frac{\theta}{2} \end{cases} \quad \text{II-11}$$

Par identification, on obtient :

$$K_{III} = A_1 \sqrt{2\pi}. \quad \text{II-12}$$

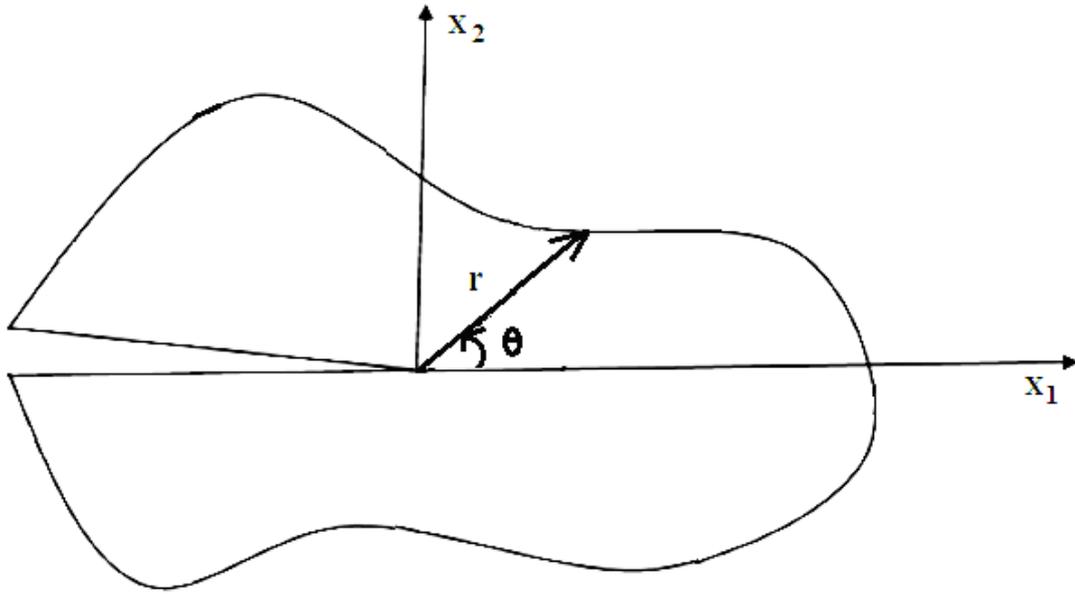


Figure II-1 : Fissure droite et coordonnées polaire.

II.2. Méthode de collocation de frontière :

Soit la section circulaire fissurée de forme quelconque représentée sur la Figure II-2. On suppose que la composante t soit connue en tout point de la frontière. Pour déterminer K_{III} , on choisit d'abord $2p$ points sur la frontière, appelés *points de collocation*. Pour chaque point q , on utilise (II-9). On obtient le système de $2p$ équations à $2p$ inconnues suivant :

$$t_q = \sum_{N=1}^p \left\{ A_N r_q^{(-\frac{3}{2}+N)} \left[\cos \left[\left(-\frac{3}{2} + N \right) \theta_q \right] n_2^q + \sin \left[\left(-\frac{3}{2} + N \right) \theta_q \right] n_1^q \right] + B_N r_q^{N-1} \left[-\sin \left[(N-1) \theta_q \right] n_2^q + \cos \left[(N-1) \theta_q \right] n_1^q \right] \right\}, \quad q = 1 \text{ à } 2p. \quad \text{(II-13)}$$

La résolution du système (II-13) donnera les inconnues A_N et B_N et en utilisant (II-12), on obtient K_{III} .

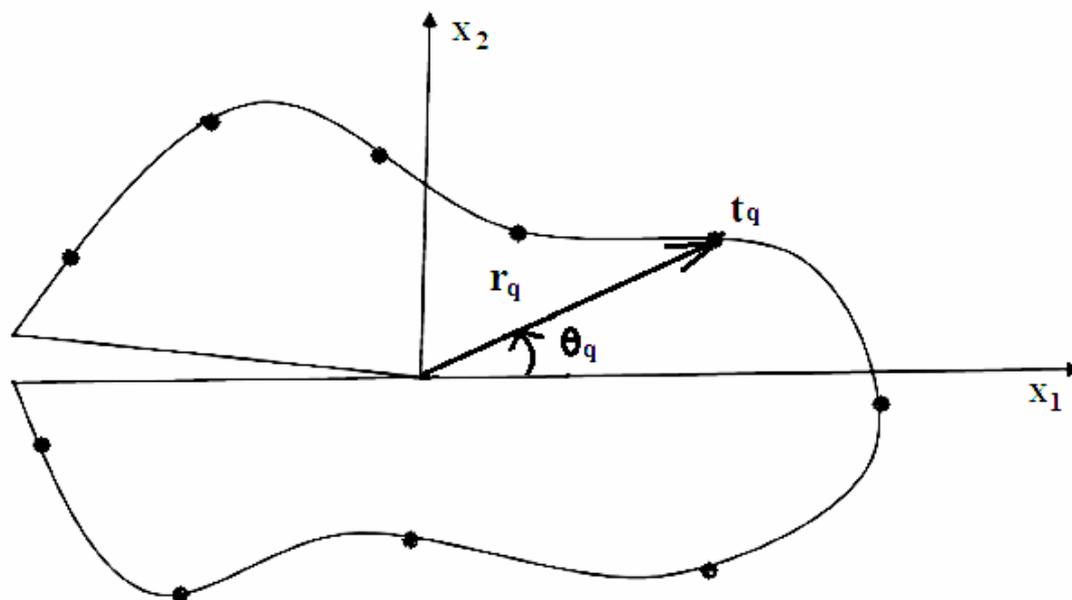


Figure II-2 : Section fissurée et points de collocation.

Chapitre III

Problèmes traités

III.1 Introduction :

Dans ce chapitre on va calculer la facteur d'intensité de contrainte K_{III} , pour trois structures différentes :

- La première consiste en une section circulaire avec une fissure centrale.
- La seconde consiste en une section circulaire avec une fissure non centrale. Dans ce cas une expression analytique de K_{III} est déduite.
- Le troisième consiste en une fissure centrale dans une section carrée.

III.2. Cas d'une Fissure centrale dans une section circulaire :

On considère une section circulaire de rayon R contenant une fissure centrale, sous chargement tangentiel $t_3 = T \sin \theta$ (Figure (III-1)). Afin d'adimensionaliser le problème, on prendra $R=1$ et $T=1$.

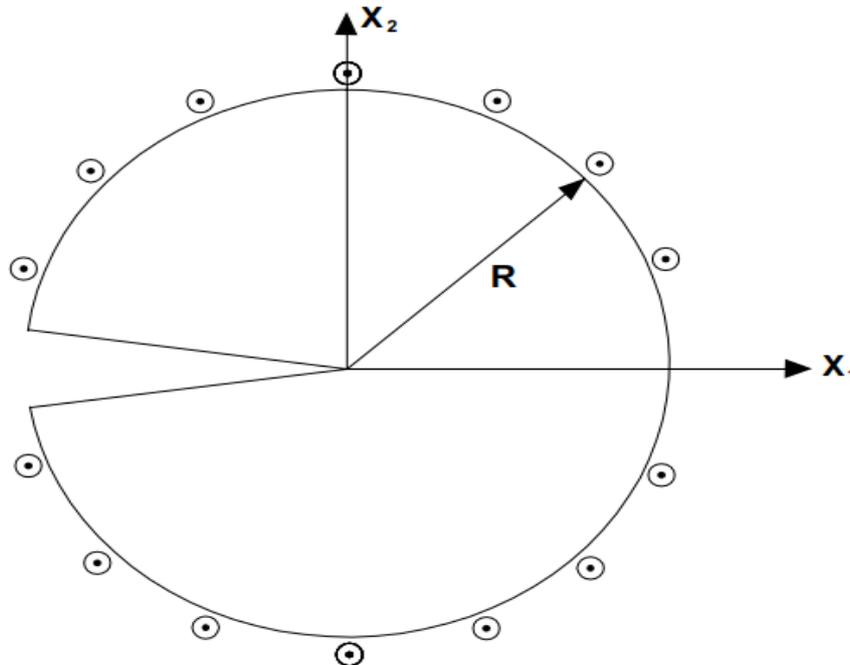


Figure III-1 : Fissure centrale dans une section circulaire

Nous choisissons $2p$ points de collocation équidistants, repartis uniformément sur la frontière du cercle (Figure III.2). L'angle θ_q pour chaque point est calculé par la formule suivante :

$$\theta_q = \frac{2 \cdot \pi \cdot q}{m+1} - \pi \quad q = 1 \dots 2p \quad (\theta \in]-\pi, \pi[) \quad (III-1)$$

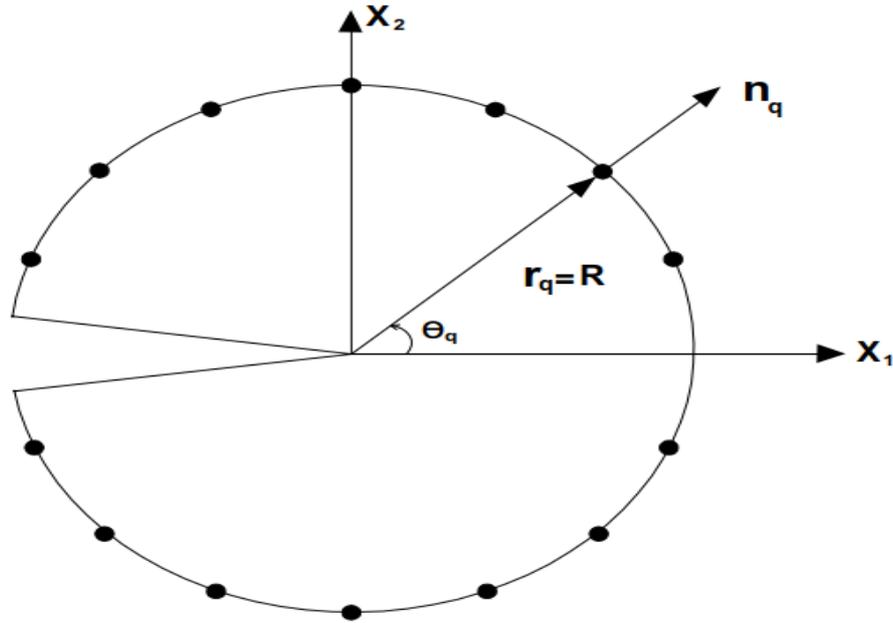


Figure III-2 : Fissure centrale dans une section circulaire, points de collocation.

Remarque :

Les points $\theta_q = \pm\pi$ sont à éviter car ce sont des points anguleux, où la normale n'est pas Définie.

Nous reprenons le système d'équations (II-13) :

$$t_q = \sum_{N=1}^p \left\{ A_N r_q^{(-\frac{3}{2}+N)} \left[\cos \left[\left(-\frac{3}{2} + N \right) \theta_q \right] n_2^q + \sin \left[\left(-\frac{3}{2} + N \right) \theta_q \right] n_1^q \right] + B_N r_q^{N-1} \left[-\sin \left[(N-1) \theta_q \right] n_2^q + \cos \left[(N-1) \theta_q \right] n_1^q \right] \right\}, \quad q = 1 \text{ à } 2p. \quad (\text{III-2})$$

Dans ce cas :

$$\begin{cases} t_q = \sin\theta_q \\ r_q = 1 \\ n_1^q = \cos\theta_q, \quad n_2^q = \sin\theta_q \end{cases} \quad (\text{III-3})$$

La résolution du système (III-2) en tenant compte de (III-3), permet d'obtenir les A_N et B_N . Le FIC est donné par : $K_{III} = A_1 \sqrt{2\pi}$.

III.2.1 Résultats :

Le système d'équations (III-2) est résolu numériquement à l'aide du logiciel Matlab. Le programme correspondant est présenté dans l'Annexe 1. Nous effectuons plusieurs calculs, en augmentant à chaque fois le nombre de termes p jusqu'à convergence. Les résultats sont présentés dans le Tableau III.1 et la Figure III.2 ci-dessous.

P	K_{III}	P	K_{III}
1	4.3416	80	2.1281
2	2.6356	90	2.1280
4	2.2647	100	2.1280
8	2.1646	110	2.1279
12	2.1446	120	2.1279
16	2.1374	129	2.1278
20	2.1340	130	2.1278
30	2.1305	145	2.1278
50	2.1287	150	2.1278
60	2.1284	155	2.1278
70	2.1282	170	2.1278

Tableau III- 1 K_{III} en fonction de p pour une fissure centrale dans une section circulaire.

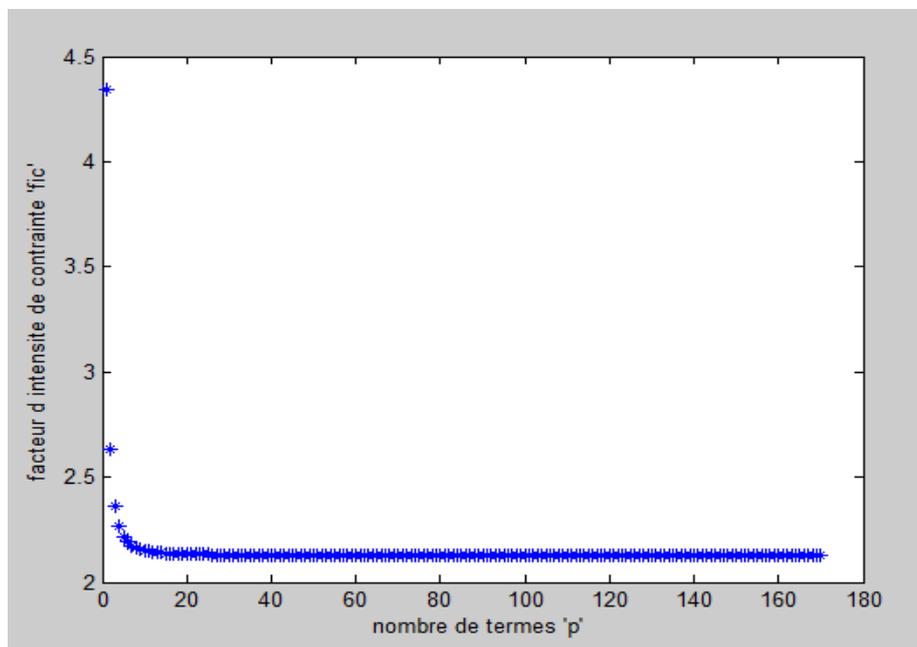


Figure III-2 : Facteur d'intensité de contrainte K_{III} en fonction de p pour une fissure centrale dans une section circulaire

Discussion des résultats :

On constate sur le tableau III-1 et la figure III-2, que le facteur d'intensité de contrainte converge à partir de $p=129$ vers la valeur de 2.1278.

III.3. Cas d'une Fissure non centrale dans une section circulaire :

On considère une section circulaire de rayon R , contenant une fissure non centrale de longueur f , et sous chargement tangentiel $t_3 = T \sin \theta$ (Figure (III-3)). Afin d'adimensionaliser le problème, on prendra $R=1$ et $T=1$.

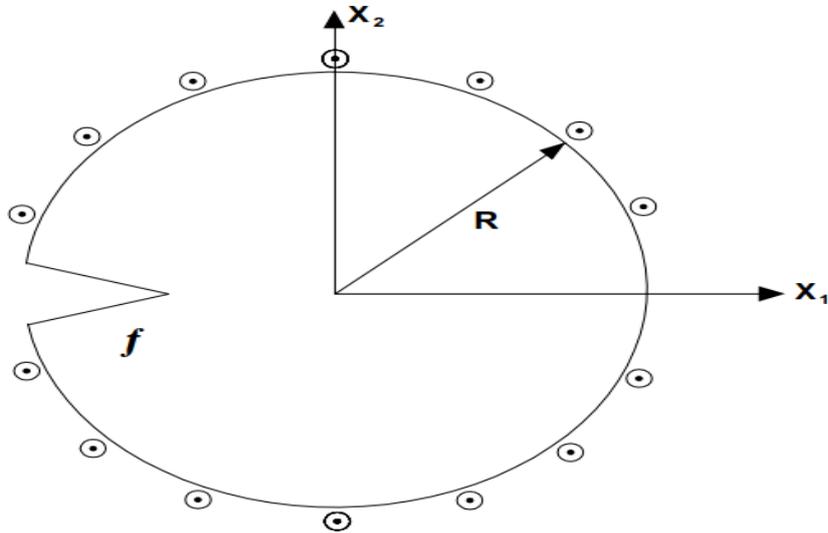


Figure III-3 : Fissure non centrale dans une section circulaire.

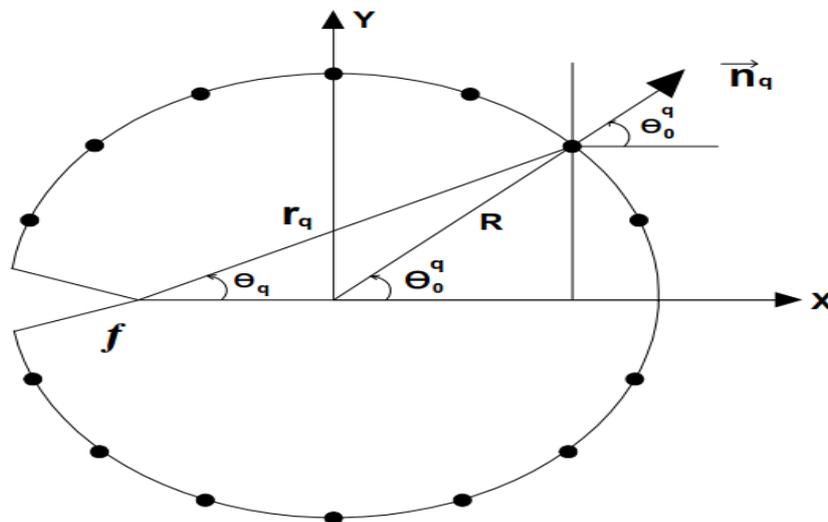


Figure III-4 : Fissure non centrale, points de collocation

Nous choisissons des points de collocation équidistants, repartis uniformément sur la frontière du cercle (Figure III.4). L'angle θ_0^q pour chaque point est calculé par la formule suivante :

$$\theta_0^q = \frac{2 \cdot \pi \cdot q}{m+1} - \pi \quad q = 1 \dots 2p$$

Le rayon de cercle R est donné par : $R=1$

La coordonnée radiale du point q est donnée par :

$$r_q = \sqrt{(R - f + R \cos(\theta_0^q))^2 + (R \sin(\theta_0^q))^2} \quad \text{III-4}$$

L'angle θ_q est calculé par l'expression suivante :

$$\theta_q = \text{atan2}(R \sin(\theta_0^q), R - f + R \cos(\theta_0^q)) \quad \text{III-5}$$

Les composantes radiales et tangentielles de la normale n_q sont données par :

$$n_1^q = \cos(\theta_0^q) \quad n_2^q = \sin(\theta_0^q) \quad \text{III-6}$$

La résolution du système (III-2) en tenant compte de (III-4), (III-5) et (III-6) permet d'obtenir les A_N et B_N . Le FIC est donné par : $K_{III} = A_1 \sqrt{2\pi}$.

F	K_{III}	f	K_{III}
0.1	0.5672	0.9	1.9628
0.2	0.8137	1	2.1280
0.3	1.0096	1.1	2.3048
0.4	1.1831	1.2	2.4987
0.5	1.3445	1.3	2.7176
0.6	1.4993	1.4	2.9731
0.7	1.6517	1.5	3.2850
0.8	1.8052	1.6	3.6889

Tableau-III-2 : Valeurs de K_{III} pour différentes valeurs de f

III-3.1. Résultats :

Le système d'équations est résolu numériquement à l'aide du logiciel Matlab. Le programme correspondant est présenté dans l'Annexe 1. Nous effectuons des calculs pour $f \in [0.1, 1.7]$. Pour chaque valeur de f, nous augmentons le nombre de points de collocation jusqu'à convergence du K_{III} . Les résultats détaillés, pour chaque valeur de f sont présentés dans l'Annexe 4.

Remarque :

Pour $f < 0.1$ ou $f > 1.7$, les calculs sont instables et les résultats non précis.

Nous présentons dans le Tableau III-2 ci-dessous, les valeurs de K_{III} pour différentes valeurs de f.

Discussion des résultats :

Nous remarquons que K_{III} est un fonction croissante de la longueur de la fissure f . Ce résultat est logique, car plus une fissure est longue plus elle est dangereuse.

III-3-2. Détermination de l'expression analytique de K_{III} :

Dans ce paragraphe, on recherche une expression analytique de K_{III} en fonction de f . Nous choisissons la forme polynomiale suivante utilisée par Mekkaoui et Belhadj [3] :

$$K_{III}(f) = [d_1(f)^{1/2} + d_2(f)^{3/2} + d_3(f)^{5/2} + d_4(f)^{7/2} + d_5(f)^{9/2}] \quad (III-5)$$

Où les coefficients $d_1 \dots d_5$ seront déterminés par indentification avec les résultats du Tableau (III-2). On obtient le système surdéterminé de 16 équations à 5 inconnues suivant :

$$\left\{ \begin{array}{l} d_1 * 0.1^{\frac{1}{2}} + d_2 * 0.1^{\frac{3}{2}} + d_3 * 0.1^{\frac{5}{2}} + d_4 * 0.1^{\frac{7}{2}} + d_5 * 0.1^{\frac{9}{2}} = 0.5672 \\ d_1 * 0.2^{\frac{1}{2}} + d_2 * 0.2^{\frac{3}{2}} + d_3 * 0.2^{\frac{5}{2}} + d_4 * 0.2^{\frac{7}{2}} + d_5 * 0.2^{\frac{9}{2}} = 0.8137 \\ d_1 * 0.3^{\frac{1}{2}} + d_2 * 0.3^{\frac{3}{2}} + d_3 * 0.3^{\frac{5}{2}} + d_4 * 0.3^{\frac{7}{2}} + d_5 * 0.3^{\frac{9}{2}} = 1.0096 \\ d_1 * 0.4^{\frac{1}{2}} + d_2 * 0.4^{\frac{3}{2}} + d_3 * 0.4^{\frac{5}{2}} + d_4 * 0.4^{\frac{7}{2}} + d_5 * 0.4^{\frac{9}{2}} = 1.1831 \\ d_1 * 0.5^{\frac{1}{2}} + d_2 * 0.5^{\frac{3}{2}} + d_3 * 0.5^{\frac{5}{2}} + d_4 * 0.5^{\frac{7}{2}} + d_5 * 0.5^{\frac{9}{2}} = 1.3445 \\ d_1 * 0.6^{\frac{1}{2}} + d_2 * 0.6^{\frac{3}{2}} + d_3 * 0.6^{\frac{5}{2}} + d_4 * 0.6^{\frac{7}{2}} + d_5 * 0.6^{\frac{9}{2}} = 1.4993 \\ d_1 * 0.7^{\frac{1}{2}} + d_2 * 0.7^{\frac{3}{2}} + d_3 * 0.7^{\frac{5}{2}} + d_4 * 0.7^{\frac{7}{2}} + d_5 * 0.7^{\frac{9}{2}} = 1.6517 \\ d_1 * 0.8^{\frac{1}{2}} + d_2 * 0.8^{\frac{3}{2}} + d_3 * 0.8^{\frac{5}{2}} + d_4 * 0.8^{\frac{7}{2}} + d_5 * 0.8^{\frac{9}{2}} = 1.8052 \\ d_1 * 0.9^{\frac{1}{2}} + d_2 * 0.9^{\frac{3}{2}} + d_3 * 0.9^{\frac{5}{2}} + d_4 * 0.9^{\frac{7}{2}} + d_5 * 0.9^{\frac{9}{2}} = 1.9628 \\ d_1 * 1^{\frac{1}{2}} + d_2 * 1^{\frac{3}{2}} + d_3 * 1^{\frac{5}{2}} + d_4 * 1^{\frac{7}{2}} + d_5 * 1^{\frac{9}{2}} = 2.1280 \\ d_1 * 1.1^{\frac{1}{2}} + d_2 * 1.1^{\frac{3}{2}} + d_3 * 1.1^{\frac{5}{2}} + d_4 * 1.1^{\frac{7}{2}} + d_5 * 1.1^{\frac{9}{2}} = 2.3048 \\ d_1 * 1.2^{\frac{1}{2}} + d_2 * 1.2^{\frac{3}{2}} + d_3 * 1.2^{\frac{5}{2}} + d_4 * 1.2^{\frac{7}{2}} + d_5 * 1.2^{\frac{9}{2}} = 2.4987 \\ d_1 * 1.3^{\frac{1}{2}} + d_2 * 1.3^{\frac{3}{2}} + d_3 * 1.3^{\frac{5}{2}} + d_4 * 1.3^{\frac{7}{2}} + d_5 * 1.3^{\frac{9}{2}} = 2.7176 \\ d_1 * 1.4^{\frac{1}{2}} + d_2 * 1.4^{\frac{3}{2}} + d_3 * 1.4^{\frac{5}{2}} + d_4 * 1.4^{\frac{7}{2}} + d_5 * 1.4^{\frac{9}{2}} = 2.9731 \\ d_1 * 1.5^{\frac{1}{2}} + d_2 * 1.5^{\frac{3}{2}} + d_3 * 1.5^{\frac{5}{2}} + d_4 * 1.5^{\frac{7}{2}} + d_5 * 1.5^{\frac{9}{2}} = 3.2850 \\ d_1 * 1.7^{\frac{1}{2}} + d_2 * 1.7^{\frac{3}{2}} + d_3 * 1.7^{\frac{5}{2}} + d_4 * 1.7^{\frac{7}{2}} + d_5 * 1.7^{\frac{9}{2}} = 3.6889 \end{array} \right. \quad III-6$$

Le système est résolu par la méthode des moindres carrés, le programme matlab correspondant est présenté dans l'Annexe 3. Nous obtenons finalement l'expression suivante :

$$K_{III}(f) = [1.8876 * f^{\frac{1}{2}} - 0.7553 * f^{\frac{3}{2}} + 2.4737 * f^{\frac{5}{2}} - 2.2748 * f^{\frac{7}{2}} + 0.7996 * f^{\frac{9}{2}}] \quad III-7$$

A titre de vérification, nous recalculons K_{III} pour les valeurs de f du Tableau(III-2) avec l'expression (III-7), et nous comparons avec les valeurs de K_{III} du même Tableau. Les résultats sont présentés dans le Tableau III-3 ci-dessous.

F	K_{III} Tableau(III-2)	K_{III} (III-7)	Erreur %
0.4	1.1831	1.1739	0.77
0.5	1.3445	1.3393	0.39
0.6	1.4993	1.5006	0.086
0.7	1.6517	1.6589	0.43
0.8	1.8052	1.8151	0.55
0.9	1.9628	1.9712	0.44
1	2.1280	2.1308	0.13
1.1	2.3048	2.2999	0.21
1.2	2.4987	2.4873	0.46
1.3	2.7176	2.7048	0.47

Tableau III-3 : Comparaison entre Tableau (III-2) et (III-7).

Nous constatons que l'erreur est très petite, cela veut dire que l'expression (III-7) est valide.

III-3-3 : Confirmation de la validité de l'expression(III-7)

Pour plus de confirmation, nous recalculons K_{III} avec l'expression (III-7) pour d'autres valeurs de f et nous comparons avec les valeurs obtenues en résolvant le système (III-2).

Les résultats obtenus sont présentés dans le Tableau III-4 ci-dessous.

F	K_{III} système (III-2)	K_{III} (III-7)	Erreur %
0.45	1.2645	1.2748	0.80
0.55	1.4224	1.4400	1.22
0.65	1.5754	1.5953	1.25
0.75	1.7281	1.7435	0.88
0.85	1.8833	1.8887	0.29
0.95	2.0442	2.0362	0.39
1.05	2.2146	2.1930	0.44
1.15	2.3992	2.3681	1.32
1.25	2.6044	2.5727	1.22
1.35	2.8398	2.8206	0.67

Tableau III-4: Comparaison entre l'expression (III-7) avec les résultats obtenus par le système (III-2)

Discussion

L'erreur étant très faible, le Tableau III-4 est une confirmation supplémentaire de l'expression III-7

III-4 : Détermination de K_{III} pour une fissure centrale dans une section carrée :

Le problème traité est une fissure dans une section rectangulaire (Figure III-4). Les conditions aux limites sur la frontière sont données par :

- $x_1 = -a, 0 < x_2 < h, t_3 = T.$
- $x_1 = -a, -h < x_2 < 0, t_3 = -T.$
- $x_1 = 2h - a, 0 < x_2 < h, t_3 = T.$
- $x_1 = 2h - a, -h < x_2 < 0, t_3 = -T.$
- $x_2 = h, -a < x_1 < 2h - a, t_3 = 0.$
- $x_2 = -h, -a < x_1 < 2h - a, t_3 = 0.$

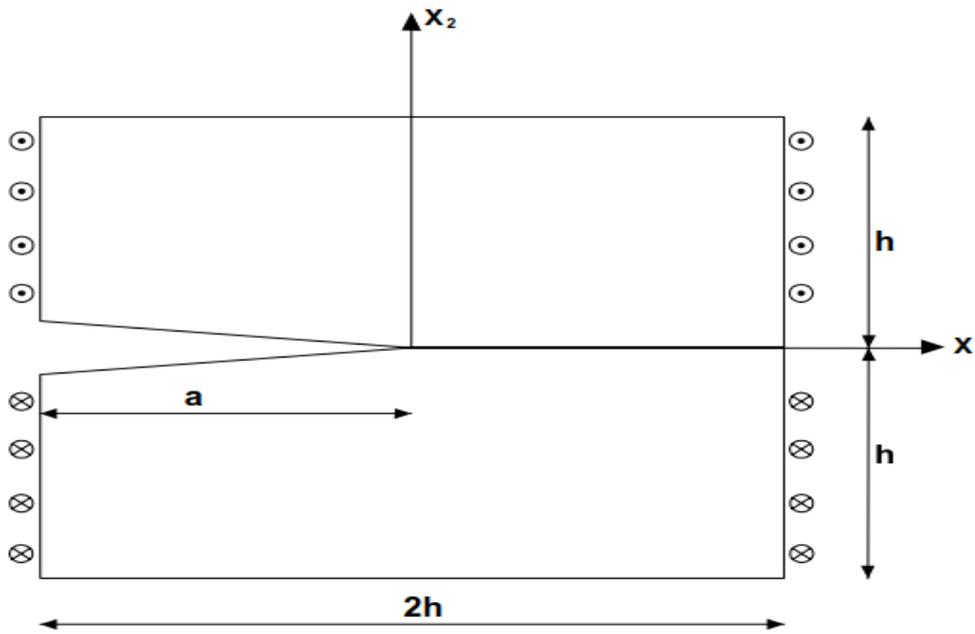


Figure III-4 : Fissure dans une section rectangulaire.

2p points de collocation sont répartis sur la frontière (Figure III-5).

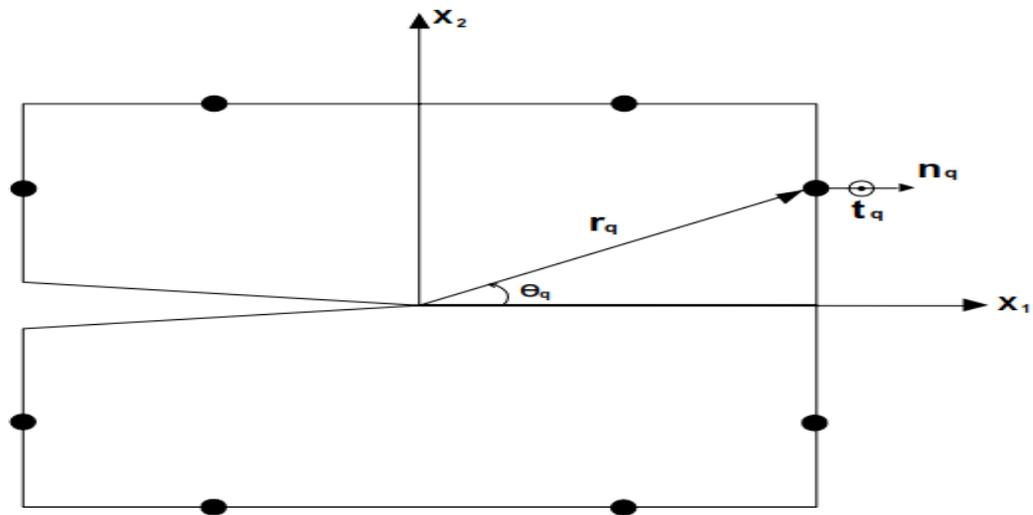


Figure III-5 : Points de collocation.

L'angle θ_q pour chaque point est calculé par la formule suivante :

$$\theta_q = \frac{2 \cdot \pi \cdot q}{m+1} - \pi \quad q = 1 \dots 2p$$

Les valeurs de r_q , les composantes de n_q et t_q dépendent du secteur où se situe le point de collocation. Le Tableau (III-5) ci-dessous donne ses valeurs pour chaque secteur.

Secteur	r_q	n_2^q	n_1^q	t_q
$-\pi + \tan^{-1}\left(\frac{h}{a}\right) < \theta_q < -\tan^{-1}\left(\frac{h}{2h-a}\right)$	$\left \frac{h}{\sin(\theta_q)} \right $	-1	0	0
$-\tan^{-1}\left(\frac{h}{2h-a}\right) < \theta_q < 0$	$\left \frac{2h-a}{\cos(\theta_q)} \right $	0	1	-T
$0 < \theta_q < \tan^{-1}\left(\frac{h}{2h-a}\right)$	$\left \frac{2h-a}{\cos(\theta_q)} \right $	0	1	T
$\tan^{-1}\left(\frac{h}{2h-a}\right) < \theta_q < \pi - \tan^{-1}\left(\frac{h}{a}\right)$	$\left \frac{h}{\sin(\theta_q)} \right $	1	0	0
$\theta_q > \pi - \tan^{-1}\left(\frac{h}{a}\right)$	$\left \frac{a}{\cos(\theta_q)} \right $	0	-1	T
$\theta_q < -\pi + \tan^{-1}\left(\frac{h}{a}\right)$	$\left \frac{a}{\cos(\theta_q)} \right $	0	-1	-T

Tableau III-5 : Les valeurs pour chaque secteur

Remarque :

Aux points anguleux les vecteurs normaux ne sont pas définis. Nous évitons donc ces points dans nos calculs.

Pour adimensionaliser le problème on prend $a = 1$ et $T=1$.

La résolution du système (III-2) en tenant compte des valeurs du Tableau III-5 permet d'obtenir les A_N et B_N . Le FIC est donné par : $K_{III}=A_1\sqrt{2\pi}$.

III-4-2-Résultats :

Pour les calculs, on prend $h=1$. Le système d'équations est résolu numériquement à l'aide du logiciel Matlab. Le programme

correspondant est présenté dans l'Annexe 2. Nous procédons de la manière suivante : nous augmentons le p à partir de 1 et nous calculons à chaque fois le FIC correspondant. Nous nous arrêtons lorsque la valeur du FIC se stabilise. Nous présentons les résultats obtenus dans le Tableau III-7 et la figure III-5

P	K _{III}	P	K _{III}
1	0	10	1.4724
2	0	12	1.4763
3	0	14	1.4765
4	1.4830	16	1.4760
5	1.5064	32	1.4760
6	1.4904	35	1.4760
7	1.4287	45	1.4760
8	1.4763	58	1.4760
9	1.4711	60	1.4760

Tableau III-6 : Les valeurs du facteur d'intensité de contrainte en fonction du nombre de termes

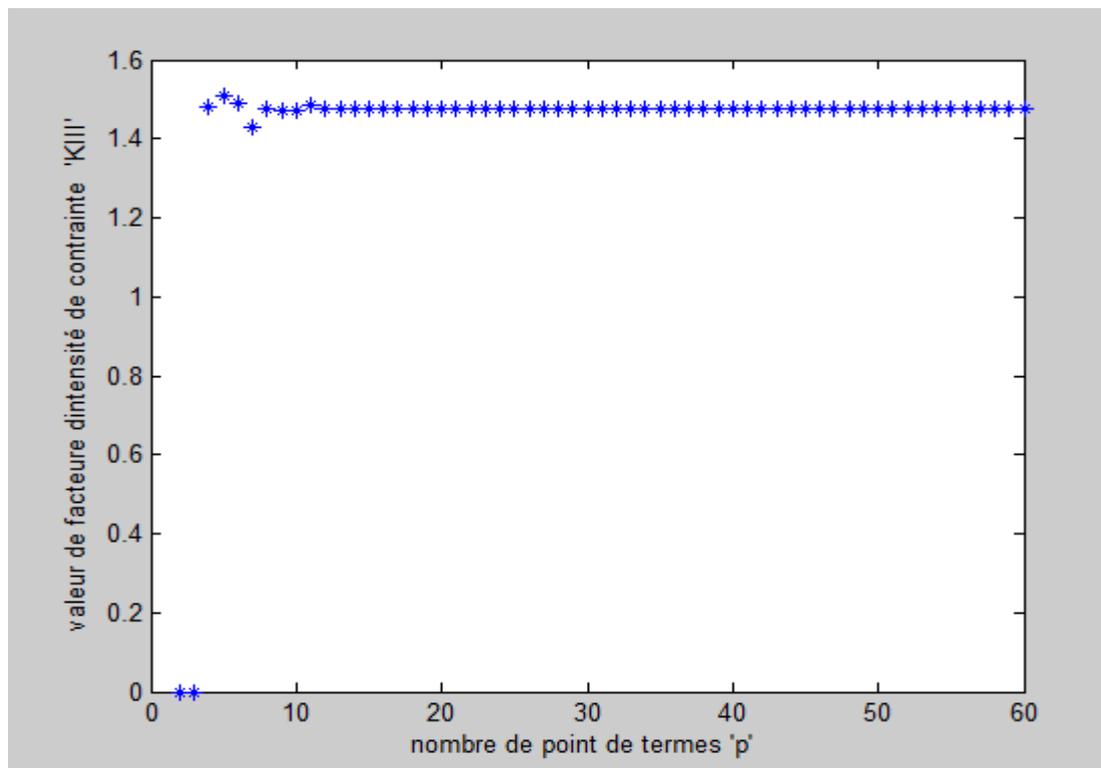


Figure III-5 : Valeurs de KIII en fonction de P pour le carrée

Nous constatons que le K_{III} converge vers la valeur de 1.476 à partir de p=16.

Influence de h

Nous avons tenté de faire varier h pour étudier son influence. Cependant pour toutes les valeurs de h différentes de 1, les résultats sont instables et K_{III} ne converge pas. A titre d'exemple, nous présentons ci-dessous les résultats pour $h=1.8$.

Nous pensons que ces instabilités sont dues à la méthode de résolution choisie. En effet, nous avons utilisé la méthode d'inversion matricielle.

p	KIII	P	KIII
1	1.9930	23	35.6662
2	1.9920	24	0.7678
3	1.9902	25	-1.0743
5	1.8892	42	0.1000
12	1.9381	44	0.0389
16	1.7924	46	0.0878
17	2.0167	48	0.0796
19	1.5883	49	0.0902
22	5.3089	50	0.0949

Tableau III-7 : Les valeurs du facteur d'intensité de contrainte en fonction du nombre de termes p(h=1.8)

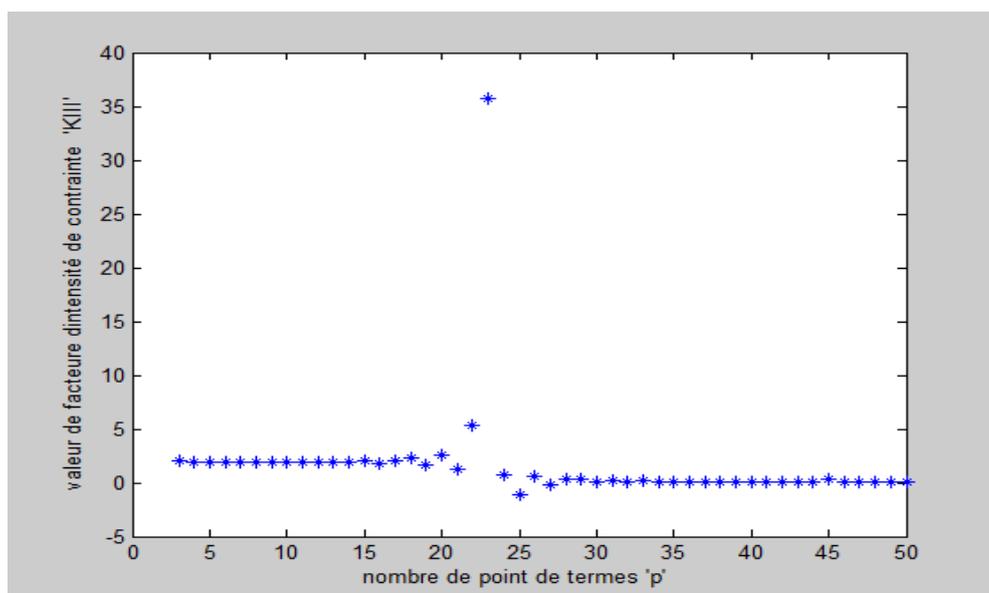


Figure III-5 : Valeurs de KIII en fonction de P (h=1.8)

Nous constatons que le K_{III} ne converge pas et instables.

Conclusion générale :

Ce travail a pour but l'application de la méthode de la méthode de collocation de frontière pour le calcul du K_{III} dans le cas de l'élasticité anti-plane. Notre point de départ est un calcul du FIC dans une section circulaire. Deux cas ont été considérés : fissure centrale et non centrale. Les principaux résultats pour cette section sont les suivants :

- Dans le cas de la fissure centrale, le facteur d'intensité de contrainte a été calculé pour $R = 1$ et un chargement $t_3 = \sin\theta$.
- Dans le cas de la fissure non centrale, nous avons calculé K_{III} pour $R=1, t_3 = \sin\theta$ et pour plusieurs longueurs de fissure $f \in [0.1, 1.6]$. Une expression analytique du K_{III} en fonction de f a été déduite et confirmée. Nous avons constaté que les calculs sont instables pour $f < 0.1$ ou $f > 1.6$.

Nous avons également calculé le K_{III} dans une section carrée avec fissure centrale. Nous avons essayé de faire varier les dimensions de la section, mais les résultats obtenus sont très instables et non exploitables.

Les principales insuffisances de ce travail sont les suivantes :

- Les résultats obtenus n'ont pas été comparés avec d'autres méthodes. Nous envisageons dans un autre travail, de les comparer avec autre méthode.
- Nous pensons que l'instabilité numérique constatée est due au mauvais conditionnement de la matrice du système. La méthode utilisée pour la résolution est la méthode de l'inversion matricielle qui est mal adaptée dans ce cas. La bonne méthode est la méthode SVD. Nous envisageons de l'utiliser dans un prochain travail.

Bibliographie

- [1] Bouza Mohamed, Bouras Zekri « Application de la méthode de collocation de frontière au calcul du facteur d'intensité de contrainte mode I » mémoire de master, Université Saad Dahleb Blida (2016/2017).
- [2] MEZOUANI Yassine « Application de la méthode de collocation de frontière au calcul du facteur d'intensité de contrainte en mode III » mémoire de master, Université Saad Dahleb Blida (2013/2014).
- [3] Mekkaoui ahmed ,Belhadj Mokrane «calcul de KI pour une section elliptique fissurée par la méthode de collocation de frontière» » mémoire de master, Université Saad Dahleb Blida (2018/2019).

Annexe 1

**Les programmes de calcul du
FIC dans une section
circulaire fissurée**

Programme pour la fissure centrale

```
clc
clear
syms H
pmax=input('nombre de termes maximal=');
r=1
for p=1:pmax;
    m=2*p;
    for q=1:m
        teta(q)=q*2*pi/(m+1)-pi;
        T(q)=sin(teta(q));
        n1=cos((teta(q)));
        n2=sin((teta(q)));
        for N=1:p
            u(q,N)=r^((-3/2)+N)*(cos(((3/2)+N)*teta(q))*n2+sin(((3/2)+N)*teta(q))*n1);
            e(q,N)=r^((N-1))*-sin((N-1)*teta(q))*n2+(cos((N-1)*teta(q))*n1);
            H=[u,e];
        end
    end
end

%resolution systeme lineaire par la methode directe
C=inv(H)*T';
%calcul le FIC
fic(p)=C(1)*sqrt(2*pi)
end
fic
p=1:pmax
figure
plot(p,fic(p), 'b*')
xlabel('nombre de termes "p" ')
ylabel('facteur d intensite de contrainte "fic" ')
```

Programme pour fissure non centrale

```
clc
clear
%converge pour 0.1<=f<=1.7
Pmax=100
R=1

f=input ('donne la longueur de la fissure f= ');
for p=1:Pmax;
    m=2*p;
    for q=1:m

        teta0=q*2*pi/(m+1)-pi;
        x=R*cos(teta0)+R-f; y=R*sin(teta0);
        r=sqrt(power(x,2)+power(y,2));
        teta=atan2(y,x);
        T(q)=sin(teta0);
        nx=cos(teta0);
        ny=sin(teta0);
        for N=1:p
            u(q,N)=r^(N-3/2)*(cos((N-3/2)*teta)*ny+sin((N-3/2)*teta)*nx);
            e(q,N)=r^(N-1)*(-sin((N-1)*teta)*ny+cos((N-1)*teta)*nx);
            H=[u,e];
        end
    end
    %resolution systemelineairepar la methodedirecte
    C=inv(H)*T';
    %calcul le FIC
    fic(p)=C(1)*sqrt(2*pi);
end
fic
p=1:Pmax
figure
plot(p,fic(p),'b*')
xlabel('nombre de termes "P" ')
ylabel('facteur d intensite de contraint "kIII" ')
```

Annexe 2

Les programmes de calcul du FIC dans une section Carrée fissurée

Programme pour fissure centrale

```
clc
clear
pmax=input('nombre des termes maximaux =');
h=1;
a=1;
for p=1:pmax;
    m=2*p;
    for q=1:m
        teta(q)=q*2*pi/(m+1)-pi
        if(teta(q)>atan(h/(2*h-a)) && teta(q)<pi-atan(h/a))
            r(q)=abs(h/sin(teta(q)))
            nx=0
            ny=1
            T(q)=0
            for N=1:p
                u(q,N)=r(q)^(N-3/2)*(cos((N-3/2)*teta(q))*ny+sin((N-3/2)*teta(q))*nx)
                e(q,N)=r(q)^(N-1)*(-sin((N-1)*teta(q))*ny+cos((N-1)*teta(q))*nx)
            end
        end

        if (teta(q)>pi-atan(h/a))
            r(q)=abs(a/cos(teta(q)))
            nx=-1
            ny=0
            T(q)=1
            for N=1:p
                u(q,N)=r(q)^(N-3/2)*(cos((N-3/2)*teta(q))*ny+sin((N-3/2)*teta(q))*nx)
                e(q,N)=r(q)^(N-1)*(-sin((N-1)*teta(q))*ny+cos((N-1)*teta(q))*nx)
            end
        end

        if (teta(q)<-pi+atan(h/a))
            r(q)=abs(a/cos(teta(q)))
            nx=-1
            ny=0
            T(q)=-1
            for N=1:p
                u(q,N)=r(q)^(N-3/2)*(cos((N-3/2)*teta(q))*ny+sin((N-3/2)*teta(q))*nx)
                e(q,N)=r(q)^(N-1)*(-sin((N-1)*teta(q))*ny+cos((N-1)*teta(q))*nx)
            end
        end

        if (teta(q)>-pi+atan(h/a) && teta(q)<-atan(h/(2*h-a)))
            r(q)=abs(h/sin(teta(q)))
            nx=0
            ny=-1
```

```

    T(q)=0
for N=1:p
u(q,N)=r(q)^(N-3/2)*(cos((N-3/2)*teta(q))*ny+sin((N-3/2)*teta(q))*nx)
e(q,N)=r(q)^(N-1)*(-sin((N-1)*teta(q))*ny+cos((N-1)*teta(q))*nx)

end
end

if (teta(q)>-atan(h/(2*h-a)) && teta(q)<0)
    r(q)=abs((2*h-a)/cos(teta(q)))
    nx=1
    ny=0
    T(q)=-1
for N=1:p
    u(q,N)=r(q)^(N-3/2)*(cos((N-3/2)*teta(q))*ny+sin((N-3/2)*teta(q))*nx)
    e(q,N)=r(q)^(N-1)*(-sin((N-1)*teta(q))*ny+cos((N-1)*teta(q))*nx)

end
end
if (teta(q)<atan(h/(2*h-a)) && teta(q)>0)
    r(q)=abs((2*h-a)/cos(teta(q)))
    nx=1
    ny=0
    T(q)=1
for N=1:p
    u(q,N)=r(q)^(N-3/2)*(cos((N-3/2)*teta(q))*ny+sin((N-3/2)*teta(q))*nx)
    e(q,N)=r(q)^(N-1)*(-sin((N-1)*teta(q))*ny+cos((N-1)*teta(q))*nx)

end
end
end
T
H=[u,e]
C=inv(H)*T';
fic(p)=C(1)*sqrt(2*pi)
end
fic
p=1:pmax
figure
plot(p,fic(p),'b*')
xlabel ('nombre de point de termes "p" ')
ylabel ('valeur de facturedintensité de contrainte "KIII" ')

```

Programme pour Influence de h

```
clc
clear
pmax=input('nombre des termes maximaux =');
h=1.8;
a=1;
for p=1:pmax;
    m=2*p;

    for q=1:m
        teta(q)=q*2*pi/(m+1)-pi
        if(teta(q)>atan(h/(2*h-a)) && teta(q)<pi-atan(h/a))
            r(q)=abs(h/sin(teta(q)))
            nx=0
            ny=1
            T(q)=0
            for N=1:p
                u(q,N)=r(q)^(N-3/2)*(cos((N-3/2)*teta(q))*ny+sin((N-3/2)*teta(q))*nx)
                e(q,N)=r(q)^(N-1)*(-sin((N-1)*teta(q))*ny+cos((N-1)*teta(q))*nx)
            end
        end

        if (teta(q)>pi-atan(h/a))
            r(q)=abs(a/cos(teta(q)))
            nx=-1
            ny=0
            T(q)=1
            for N=1:p
                u(q,N)=r(q)^(N-3/2)*(cos((N-3/2)*teta(q))*ny+sin((N-3/2)*teta(q))*nx)
                e(q,N)=r(q)^(N-1)*(-sin((N-1)*teta(q))*ny+cos((N-1)*teta(q))*nx)
            end
        end

        if (teta(q)<-pi+atan(h/a))
            r(q)=abs(a/cos(teta(q)))
            nx=-1
            ny=0
            T(q)=-1
            for N=1:p
                u(q,N)=r(q)^(N-3/2)*(cos((N-3/2)*teta(q))*ny+sin((N-3/2)*teta(q))*nx)
                e(q,N)=r(q)^(N-1)*(-sin((N-1)*teta(q))*ny+cos((N-1)*teta(q))*nx)
            end
        end

        if (teta(q)>-pi+atan(h/a) && teta(q)<-atan(h/(2*h-a)))
            r(q)=abs(h/sin(teta(q)))
            nx=0
```

```

ny=-1
    T(q)=0
for N=1:p
u(q,N)=r(q)^(N-3/2)*(cos((N-3/2)*teta(q))*ny+sin((N-3/2)*teta(q))*nx)
e(q,N)=r(q)^(N-1)*(-sin((N-1)*teta(q))*ny+cos((N-1)*teta(q))*nx)

end
end

if (teta(q)>-atan(h/(2*h-a)) && teta(q)<0)
    r(q)=abs((2*h-a)/cos(teta(q)))
    nx=1
    ny=0
    T(q)=-1
    for N=1:p
        u(q,N)=r(q)^(N-3/2)*(cos((N-3/2)*teta(q))*ny+sin((N-3/2)*teta(q))*nx)
        e(q,N)=r(q)^(N-1)*(-sin((N-1)*teta(q))*ny+cos((N-1)*teta(q))*nx)

    end
end
if (teta(q)<atan(h/(2*h-a)) && teta(q)>0)
    r(q)=abs((2*h-a)/cos(teta(q)))
    nx=1
    ny=0
    T(q)=1
    for N=1:p
        u(q,N)=r(q)^(N-3/2)*(cos((N-3/2)*teta(q))*ny+sin((N-3/2)*teta(q))*nx)
        e(q,N)=r(q)^(N-1)*(-sin((N-1)*teta(q))*ny+cos((N-1)*teta(q))*nx)

    end
end
end
end
T
H=[u,e]
C=inv(H)*T';
fic(p)=C(1)*sqrt(2*pi)
end
fic
p=1:pmax
figure
plot(p,fic(p),'b*')
xlabel ('nombre de point de termes "p" ')
ylabel ('valeur de facteuredintensité de contrainte "KIII" ')

```

Annexe 3
programmes pour les
expressions du KIII

Programme pour l'expression de KIII

```
clearall
clc
F=[ 0.5672;0.8137;1.0096 ;1.1831; 1.3445;1.4993;1.6517; 1.8052;
1.9628;2.1280;2.3048;2.4987;2.7176;2.9731;3.2850;3.6889;4.2600];
M=[ 0.1^0.5 0.1^1.5 0.1^2.5 0.1^3.5 0.1^4.5;
0.2^0.5 0.2^1.5 0.2^2.5 0.2^3.5 0.2^4.5;
0.3^0.5 0.3^1.5 0.3^2.5 0.3^3.5 0.3^4.5;
0.4^0.5 0.4^1.5 0.4^2.5 0.4^3.5 0.4^4.5;
0.5^0.5 0.5^1.5 0.5^2.5 0.5^3.5 0.5^4.5;
0.6^0.5 0.6^1.5 0.6^2.5 0.6^3.5 0.6^4.5;
0.7^0.5 0.7^1.5 0.7^2.5 0.7^3.5 0.7^4.5;
0.8^0.5 0.8^1.5 0.8^2.5 0.8^3.5 0.8^4.5;
0.9^0.5 0.9^1.5 0.9^2.5 0.9^3.5 0.9^4.5;
1^0.5 1^1.5 1^2.5 1^3.5 1^4.5;
1.1^0.5 1.1^1.5 1.1^2.5 1.1^3.5 1.1^4.5;
1.2^0.5 1.2^1.5 1.2^2.5 1.2^3.5 1.2^4.5;
1.3^0.5 1.3^1.5 1.3^2.5 1.3^3.5 1.3^4.5;
1.4^0.5 1.4^1.5 1.4^2.5 1.4^3.5 1.4^4.5;
1.5^0.5 1.5^1.5 1.5^2.5 1.5^3.5 1.5^4.5;
1.6^0.5 1.6^1.5 1.6^2.5 1.6^3.5 1.6^4.5;
1.7^0.5 1.7^1.5 1.7^2.5 1.7^3.5 1.7^4.5;];
%moindre carre

D=M'
L=D*M
G= M'*F
%resoudre par la methode directe
A=[L G];
n=size(A,1);
for k=1:n-1 ;
fori=k+1:n ;
w=A(i,k)/A(k,k);
for j=k:n+1;
A(i,j)=A(i,j)-w*A(k,j);
end
end
end
A ;
for i=n:-1:1 ;
s=0;
for j=i+1:n ;
s=s+A(i,j)*x(j);
end
x(i)=((A(i,n+1)-s)/A(i,i) );
end
H=x'
%vecteur du facteur de forme
a=input('f=')
y=1.8876*(f)^0.5 -0.7553*(f)^1.5+ 2.4737*(f)^2.5-2.2748*(f)^3.5+ 0.7996*(f)^4.5
```

Programme pour confirmer l'expression

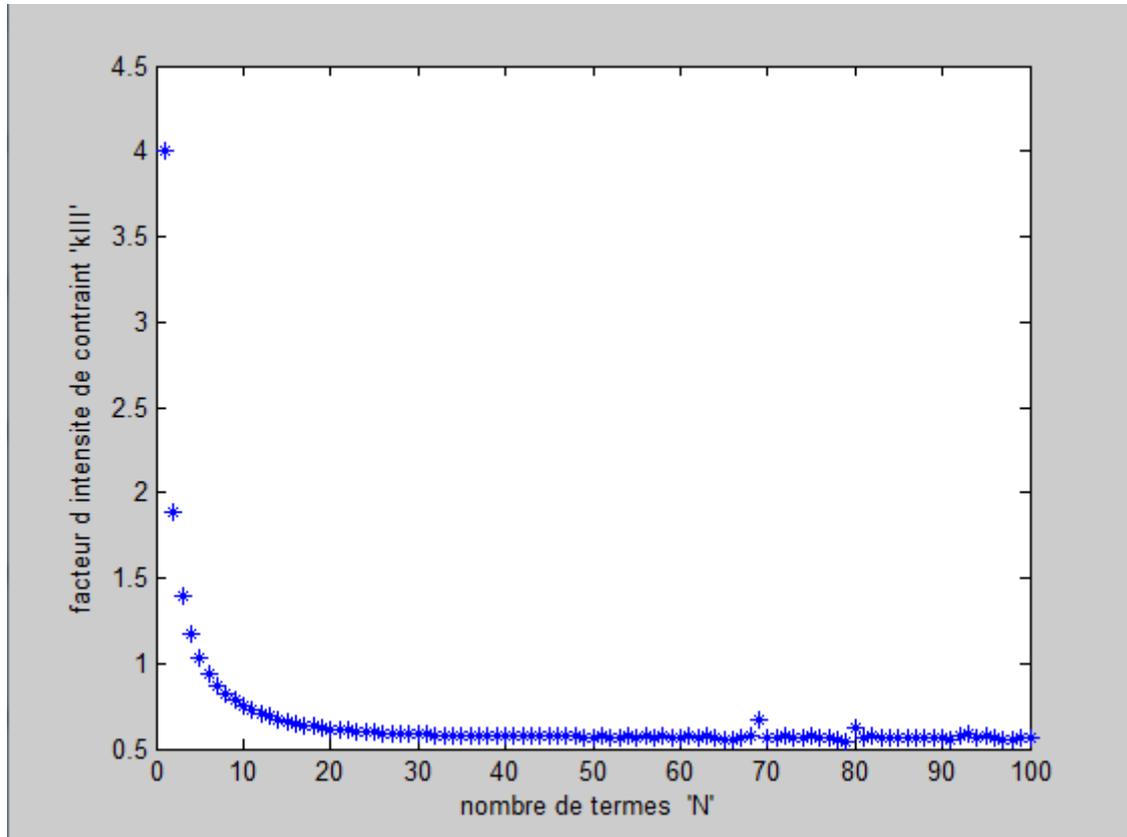
```
clear all
clc
F=[ 0.7011;0.9154;1.0963;1.2645;1.4224;1.5754;1.7281;1.8833;2.0442;2.2146;
2.3992;2.6044;2.8398;3.1203;3.4721;3.9459;4.6595];
M=[ 0.15^0.5 0.15^1.5 0.15^2.5 0.15^3.5 0.15^4.5;
0.25^0.5 0.25^1.5 0.25^2.5 0.25^3.5 0.25^4.5;
0.35^0.5 0.35^1.5 0.35^2.5 0.35^3.5 0.35^4.5;
0.45^0.5 0.45^1.5 0.45^2.5 0.45^3.5 0.45^4.5;
0.55^0.5 0.55^1.5 0.55^2.5 0.55^3.5 0.55^4.5;
0.65^0.5 0.65^1.5 0.65^2.5 0.65^3.5 0.65^4.5;
0.75^0.5 0.75^1.5 0.75^2.5 0.75^3.5 0.75^4.5;
0.85^0.5 0.85^1.5 0.85^2.5 0.85^3.5 0.85^4.5;
0.95^0.5 0.95^1.5 0.95^2.5 0.95^3.5 0.95^4.5;
1.05^0.5 1.05^1.5 1.05^2.5 1.05^3.5 1.05^4.5;
1.15^0.5 1.15^1.5 1.15^2.5 1.15^3.5 1.15^4.5;
1.25^0.5 1.25^1.5 1.25^2.5 1.25^3.5 1.25^4.5;
1.35^0.5 1.35^1.5 1.35^2.5 1.35^3.5 1.35^4.5;
1.45^0.5 1.45^1.5 1.45^2.5 1.45^3.5 1.45^4.5;
1.55^0.5 1.55^1.5 1.55^2.5 1.55^3.5 1.55^4.5;
1.65^0.5 1.65^1.5 1.65^2.5 1.65^3.5 1.65^4.5;
1.75^0.5 1.75^1.5 1.75^2.5 1.75^3.5 1.75^4.5;];
%moindre carre

D=M'
L=D*M
G= M'*F
%resoudre par la methode directe
A=[L G];
n=size(A,1);
for k=1:n-1 ;
for i=k+1:n ;
w=A(i,k)/A(k,k);
for j=k:n+1;
A(i,j)=A(i,j)-w*A(k,j);
end
end
end
A ;
for i=n:-1:1 ;
s=0;
for j=i+1:n ;
s=s+A(i,j)*x(j);
end
x(i)=((A(i,n+1)-s)/A(i,i) );
end
H=x'
%vecteur du facteur de forme
a=input('a=')
y= 1.6606*(a)^0.5 +0.5532*(a)^1.5+0.2110*(a)^2.5-0.7799*(a)^3.5+0.4680*(a)^4.5
```

Annexe 4

**Résultats pour le cas
d'une fissure non
centrale dans une
section fissurée**

Résultats pour $f=0.1$



FigureA4-1 :Facteur d'intensité de contrainte KIII en fct de P ($f=0.1$)

P	KIII	P	KIII
1	4.0001	51	0.5708
2	1.8830	56	0.5705
3	1.3986	61	0.5703
4	1.1695	63	0.5702
5	1.0325	76	0.5677
6	0.9403	81	0.5674
7	0.8737	81	0.5672
8	0.8233	85	0.5672
9	0.7838	86	0.5672
10	0.7522	93	0.5672

TableauA4-1 :KIII en fct de P($f=0.1$)

Résultats pour $f=0.2$

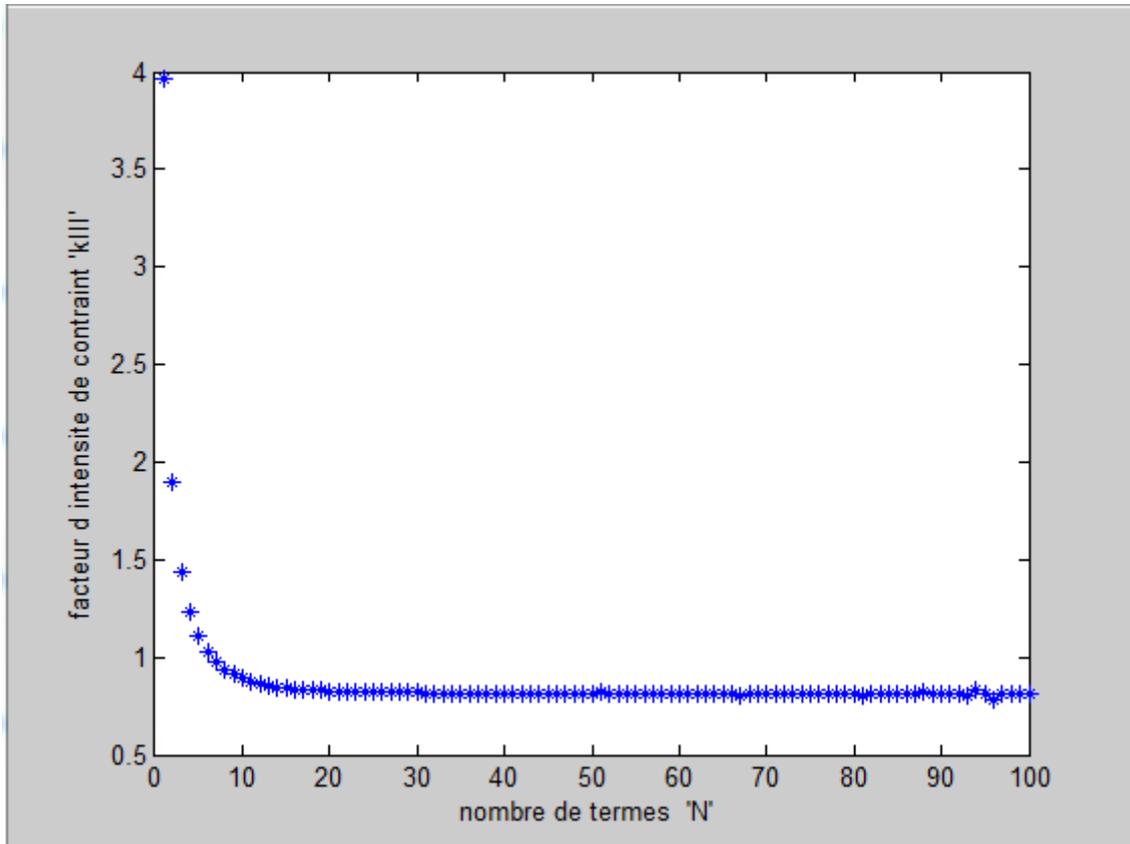


FigurA4-2 : Facteur d'intensité de contrainte KIII en fct de P (f=0.2)

P	KIII	P	KIII
1	3.9660	42	0.8148
2	1.8966	43	0.8146
3	1.4367	44	0.8145
4	1.2268	47	0.8143
5	1.1065	50	0.8139
6	1.0294	53	0.8138
7	0.9768	54	0.8137
8	0.9393	66	0.8137
9	0.9118	89	0.8137
10	0.8913	99	0.8137

Tableau A4-2 :KIII en fct de P(f=0.2)

Résultats pour $f=0.3$

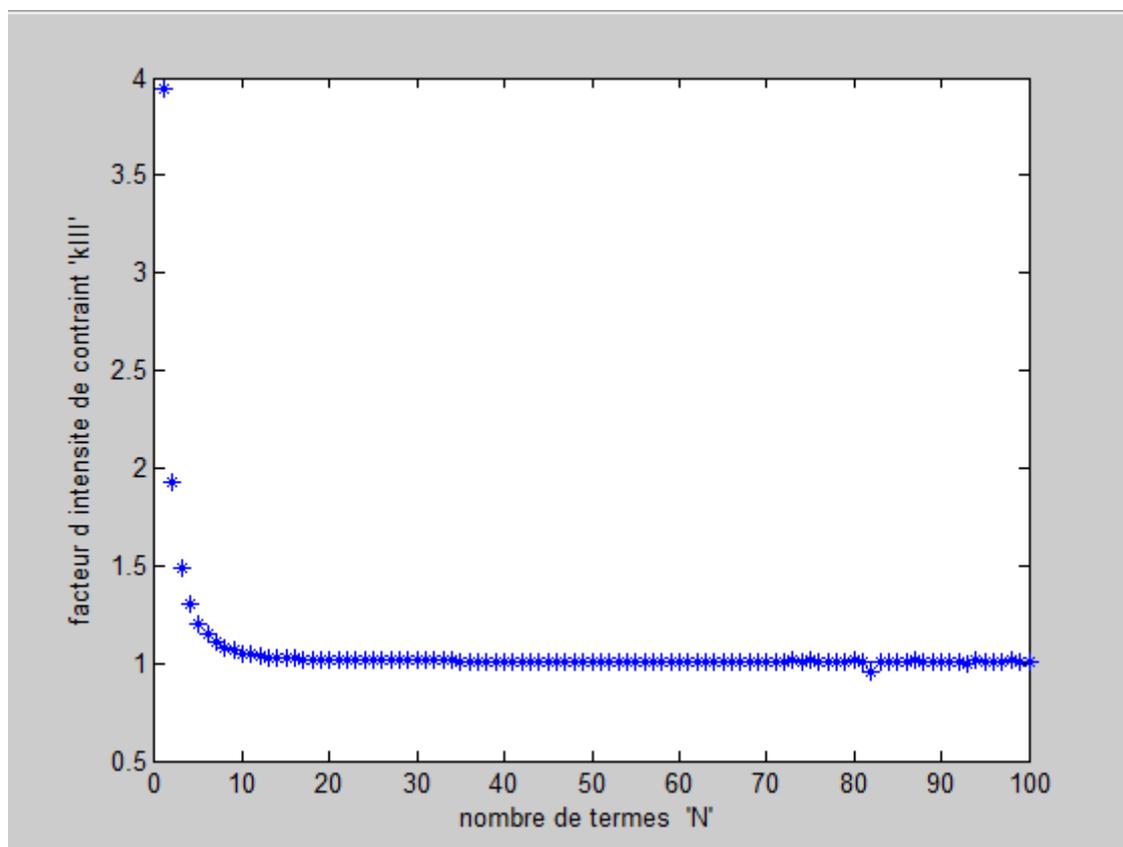


FigurA4-3 : Facteur d'intensité de contrainte k_{III} en fct de P ($f=0.3$)

P	k_{III}	P	k_{III}
1	3.9396	43	1.0106
2	1.9228	44	1.0105
3	1.4923	46	1.0104
4	1.3057	48	1.0103
5	1.2050	49	1.0102
6	1.1448	50	1.0099
7	1.1065	55	1.0096
8	1.0811	56	1.0096
9	1.0638	62	1.0096
10	1.0516	64	1.0096

Tableau A4-3 : k_{III} en fct de P ($f=0.3$)

Résultats pour $f=0.4$

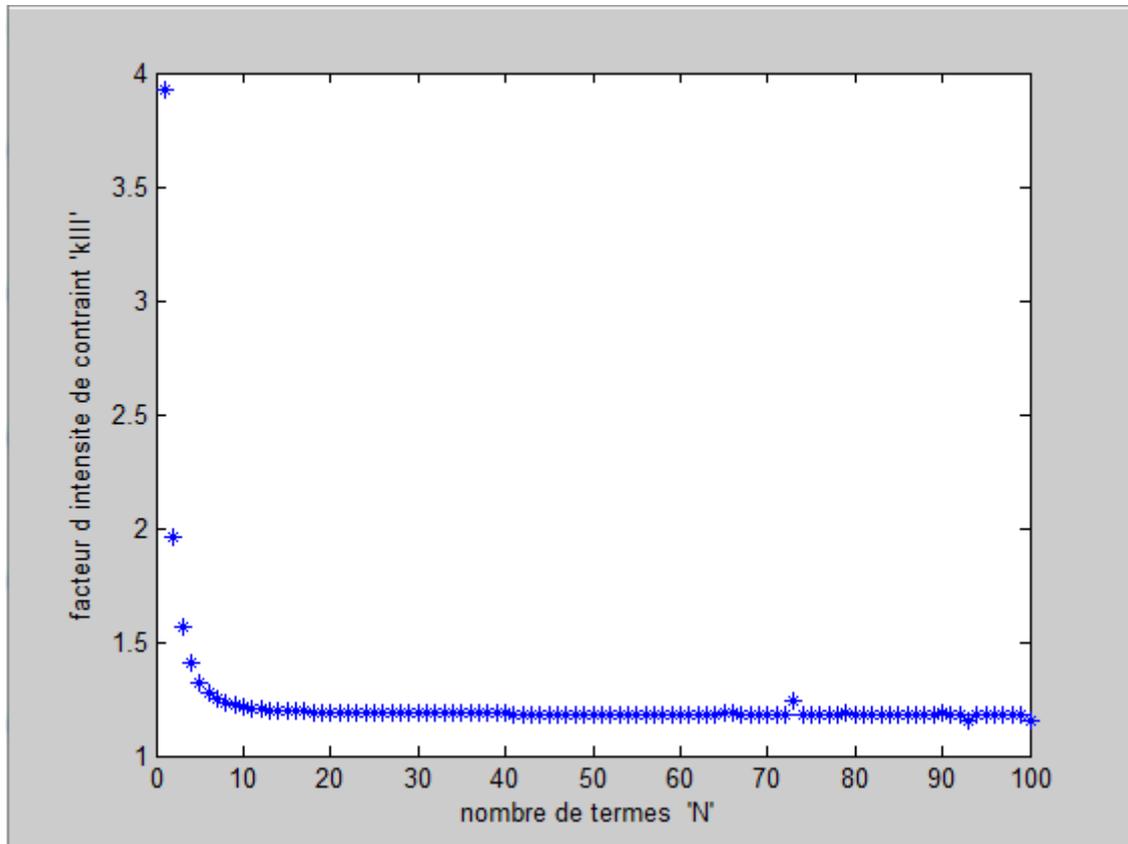


FigurA4-4 : Facteur d'intensité de contrainte KIII en fct de P ($f=0.4$)

P	KIII	P	KIII
1	3.9235	39	1.1844
2	1.9640	40	1.1843
3	1.5670	42	1.1841
4	1.4055	50	1.1836
5	1.3241	54	1.1834
6	1.2785	63	1.1832
7	1.2510	64	1.1831
8	1.2336	67	1.1831
9	1.2220	95	1.1831
10	1.2140	96	1.1831

TableauA4-4 : KIII en fct de P($f=0.4$)

Résultats pour $f=0.5$

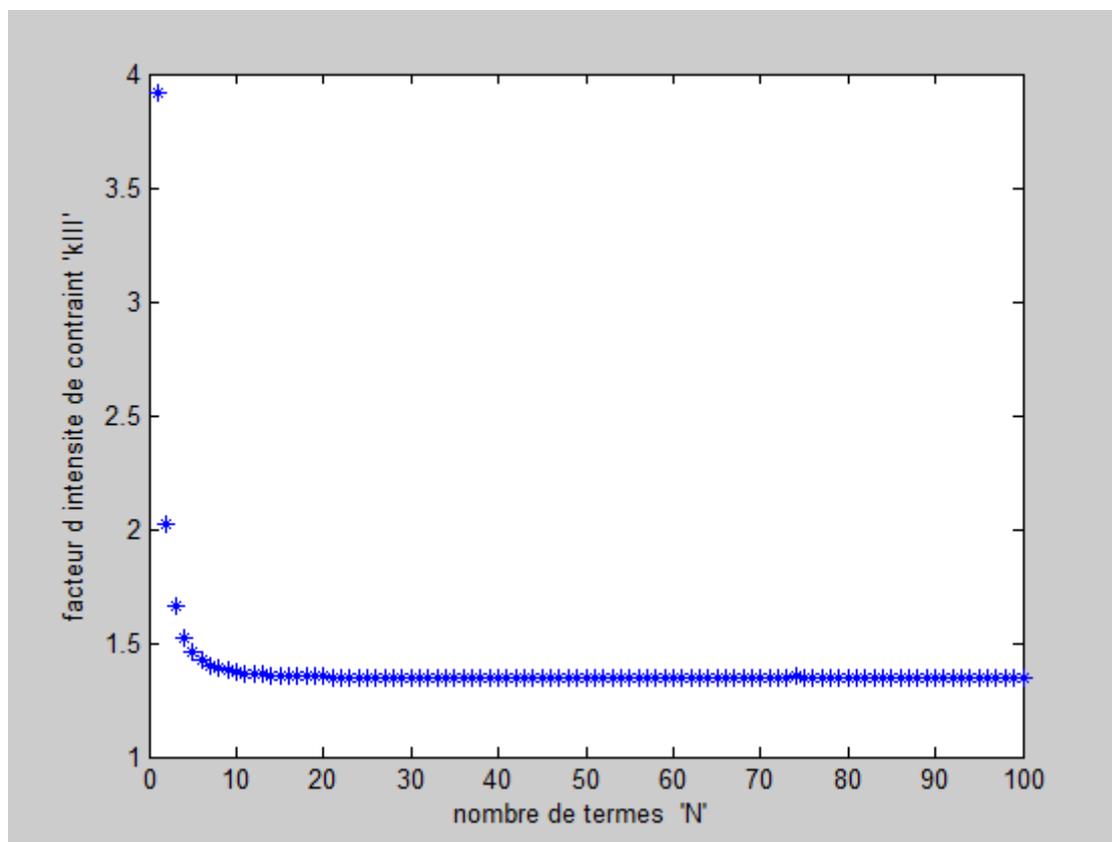
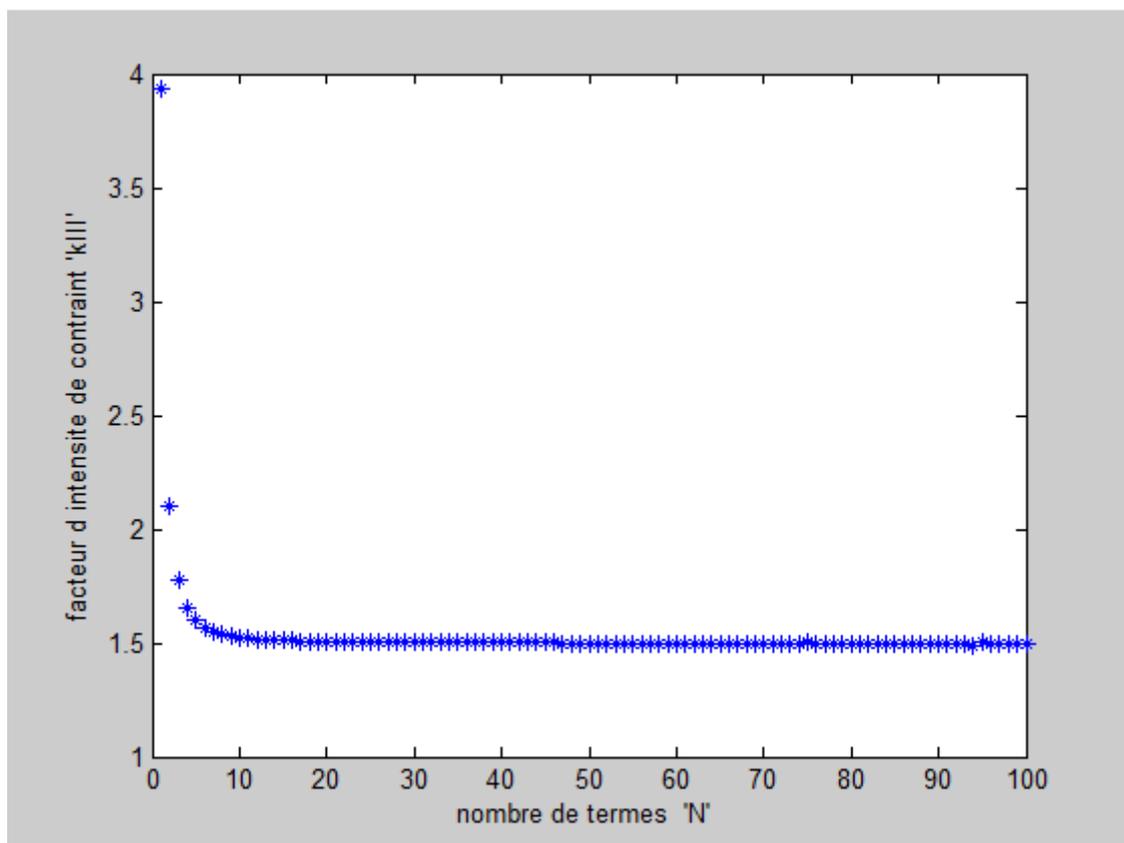


FigurA4-5 : Facteur d'intensité de contrainte K_{III} en fct de P ($f=0.5$)

P	K_{III}	P	K_{III}
1	3.9208	44	1.3452
2	2.0230	48	1.3450
3	1.6613	50	1.3449
4	1.5233	52	1.3448
5	1.4574	55	1.3447
6	1.4218	58	1.3446
7	1.4006	59	1.3445
8	1.3871	66	1.3445
9	1.3780	73	1.3445
10	1.3716	96	1.3445

Tableau A4-5 : K_{III} en fct de P ($f=0.5$)

Résultats pour $f=0.6$

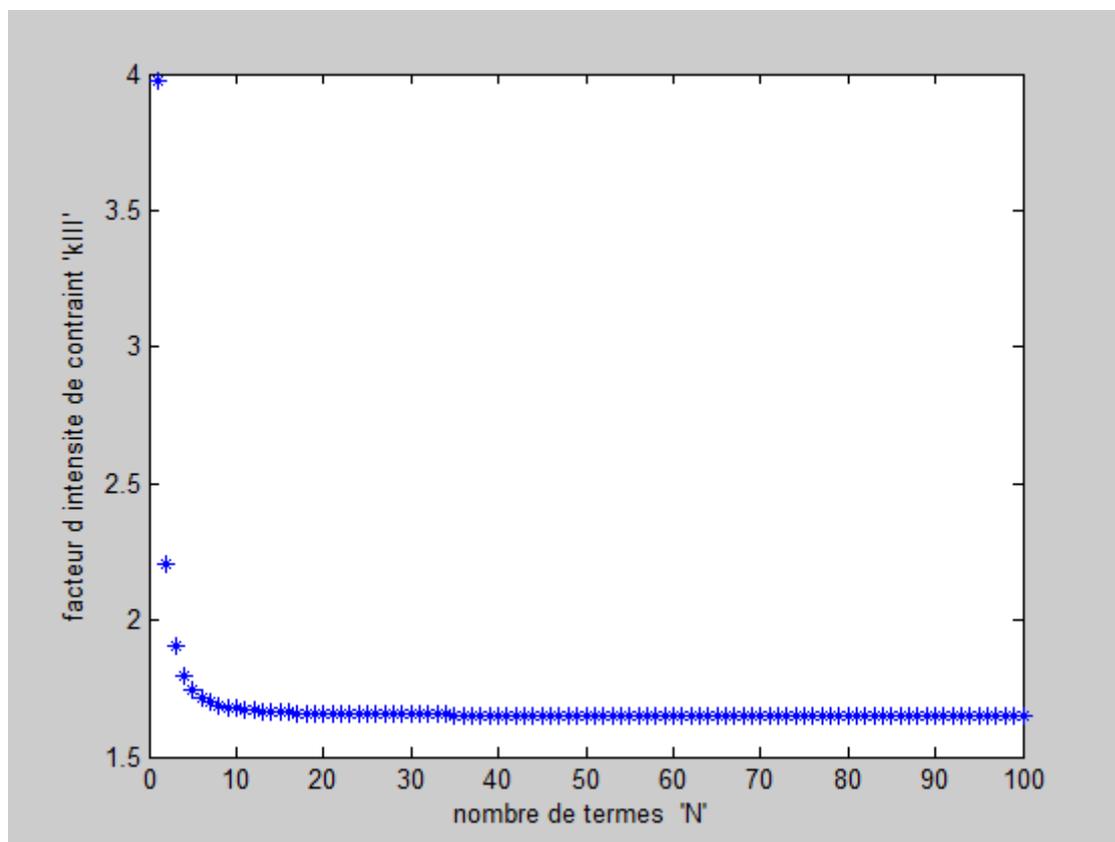


FigureA4-6 : Facteur d'intensité de contrainte KIII en fct de P ($f=0.6$)

P	KIII	P	KIII
1	3.9361	49	1.4999
2	2.1020	51	1.4998
3	1.7740	54	1.4997
4	1.6548	56	1.4996
5	1.5991	60	1.4995
6	1.5690	65	1.4994
7	1.5508	66	1.4993
8	1.5389	67	1.4993
9	1.5308	68	1.4993
10	1.5249	73	1.4993

Tableau A4-6 : KIII en fct de P($f=0.6$)

Résultats pour $f=0.7$

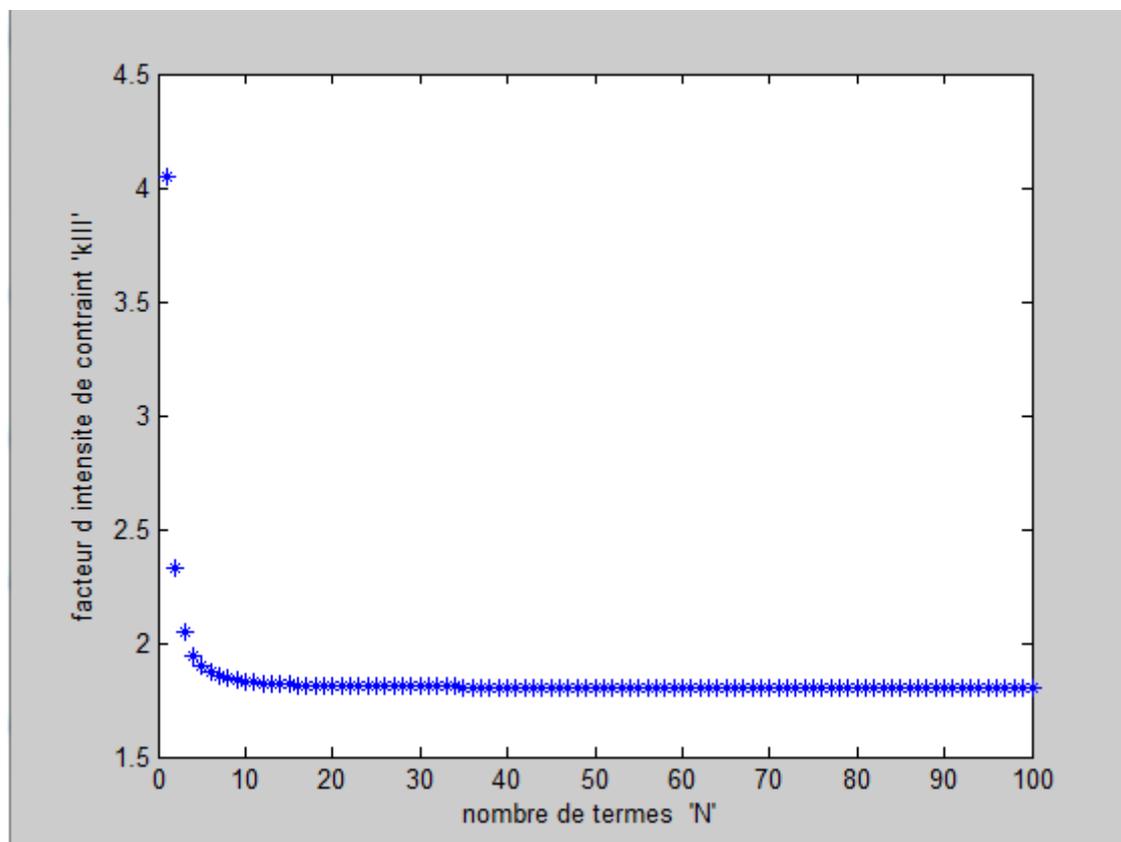


FigureA4-7 : Facteur d'intensité de contrainte KIII en fct de P ($f=0.7$)

P	KIII	P	KIII
1	3.9753	53	1.6523
2	2.2030	55	1.6522
3	1.9028	61	1.6521
4	1.7959	65	1.6520
5	1.7458	71	1.6519
6	1.7181	79	1.6518
7	1.7011	80	1.6517
8	1.6899	91	1.6517
9	1.6821	92	1.6517
10	1.6765	94	1.6517

Tableau A4-7 : KIII en fct de P($f=0.7$)

Résultats pour $f=0.8$

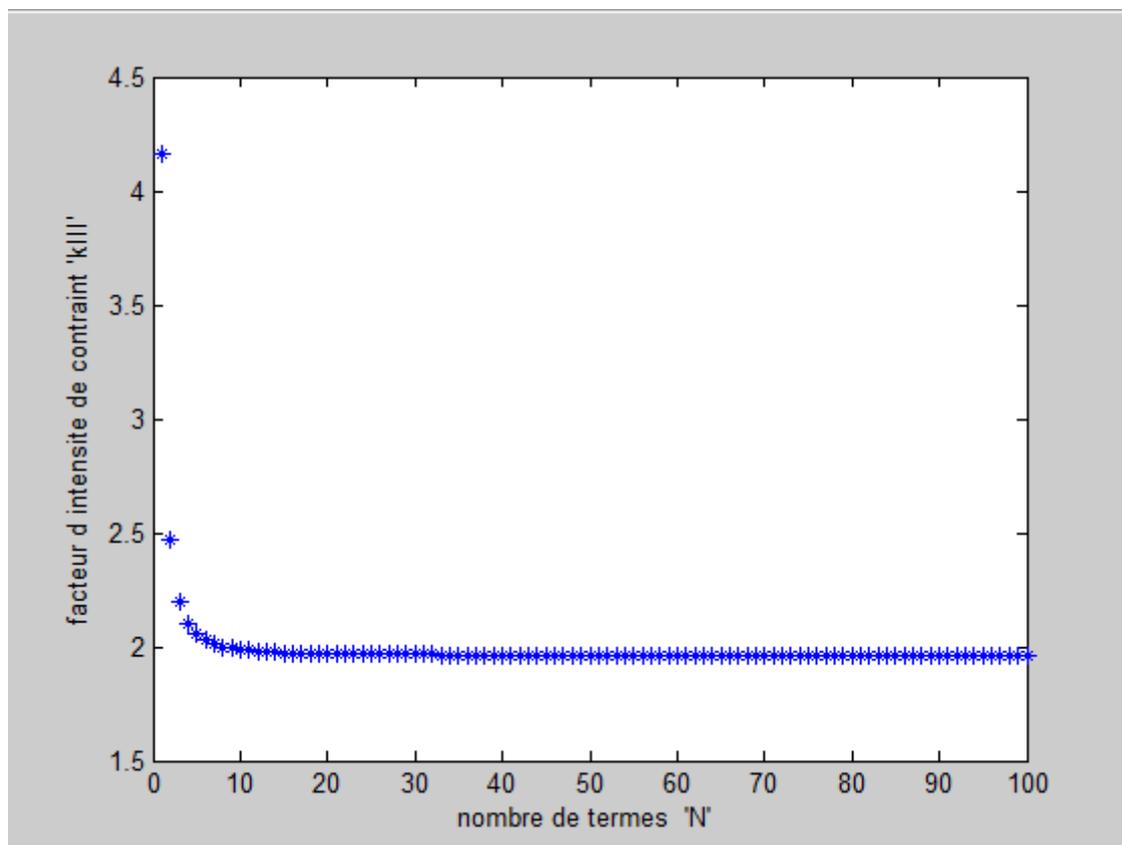


FigureA4-8 : Facteur d'intensité de contrainte KIII en fct de P ($f=0.8$)

P	KIII	P	KIII
1	4.0470	54	1.8058
2	2.3264	57	1.8057
3	2.0449	62	1.8056
4	1.9444	67	1.8055
5	1.8966	74	1.8054
6	1.8699	84	1.8053
7	1.8534	85	1.8052
8	1.8425	97	1.8052
9	1.8349	98	1.8052
10	1.8294	99	1.8052

Tableau A4-8 : KIII en fct de P($f=0.8$)

Résultats pour $f=0.9$

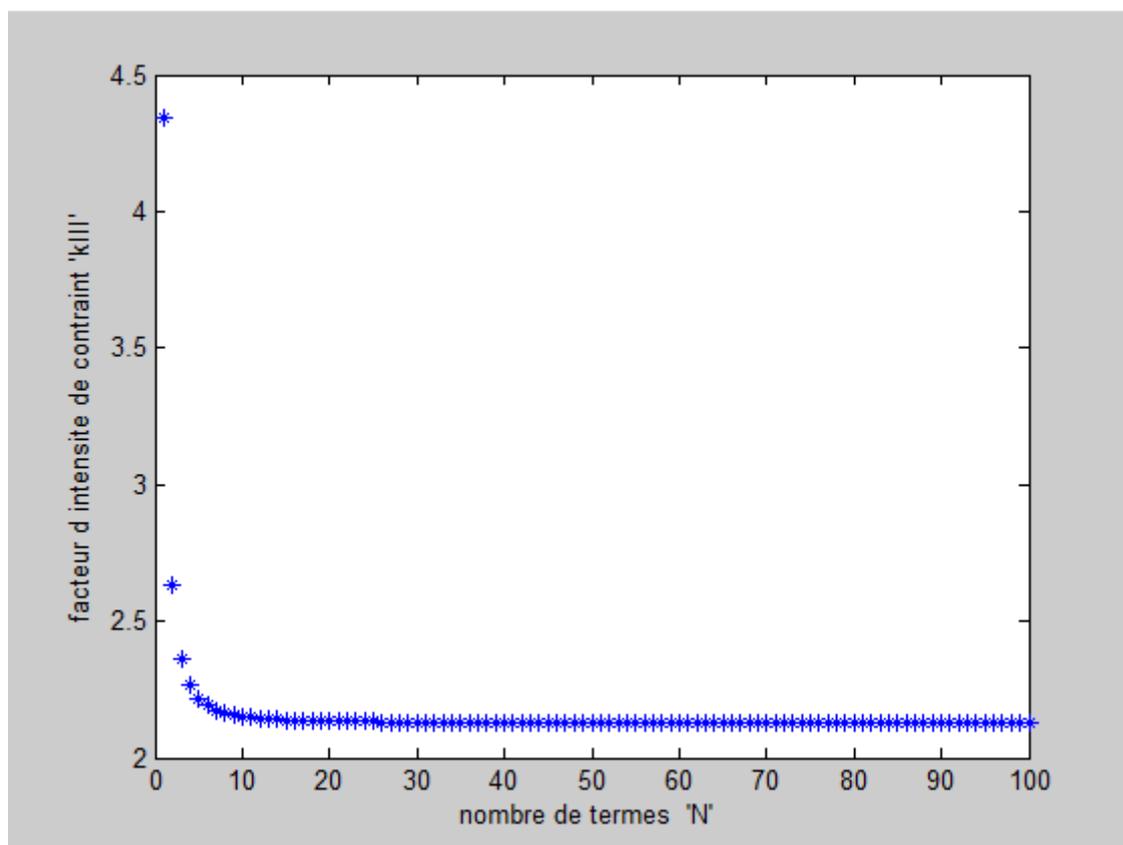


FigureA4-9 : Facteur d'intensité de contrainte KIII en fct de P ($f=0.9$)

P	KIII	P	KIII
1	4.1633	56	1.9634
2	2.4715	60	1.9633
3	2.1983	64	1.9632
4	2.1000	70	1.9631
5	2.0529	87	1.9630
6	2.0266	90	1.9629
7	2.0103	91	1.9628
8	1.9996	98	1.9628
9	1.9921	99	1.9628
10	1.9867	100	1.9628

Tableau A4-9 : KIII en fct de P($f=0.9$)

Résultats pour f=1

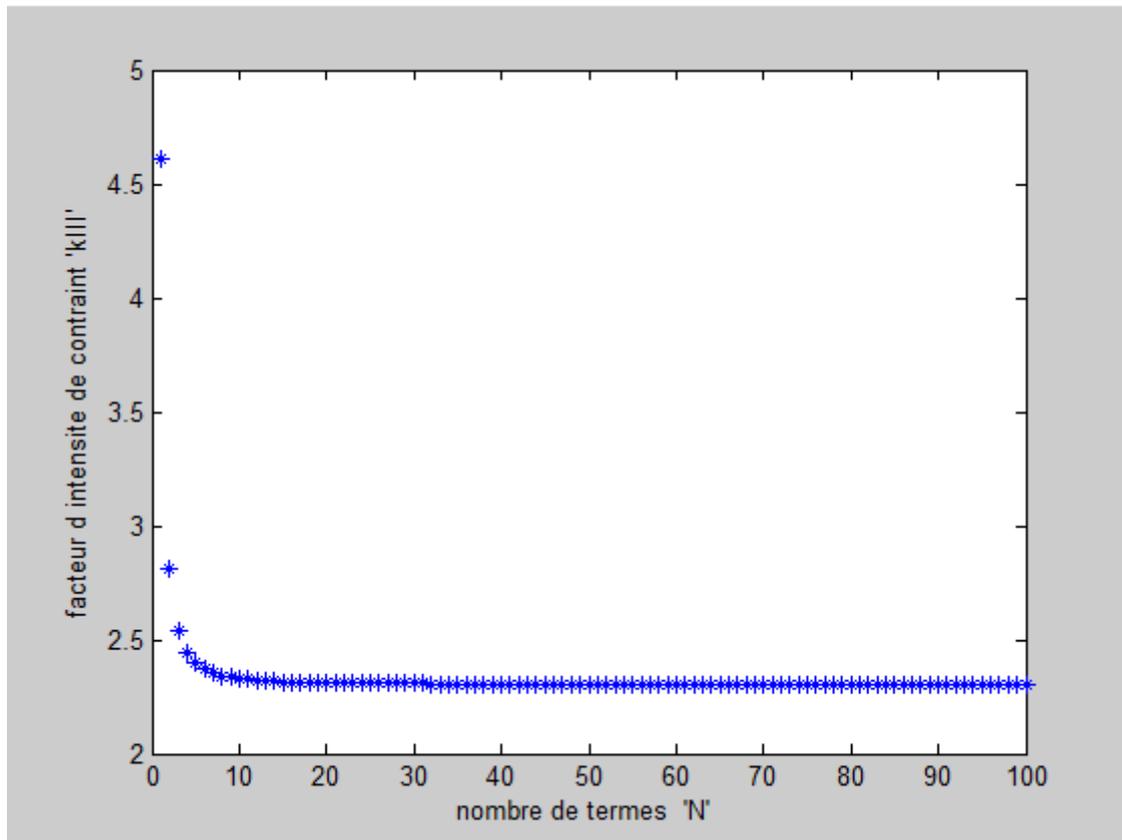


FigureA4-10 : Facteur d'intensité de contrainte KIII en fct de P(f=1)

P	KIII	P	KIII
1	4.3416	54	2.1286
2	2.6356	58	2.1285
3	2.3628	62	2.1284
4	2.2647	68	2.1283
5	2.2177	75	2.1282
6	2.1915	85	2.1281
7	2.1753	86	2.1280
8	2.1646	98	2.1280
9	2.1571	99	2.1280
10	2.1517	100	2.1280

Tableau A4-10 : KIII en fct de P(f=1)

Résultats pour $f=1.1$

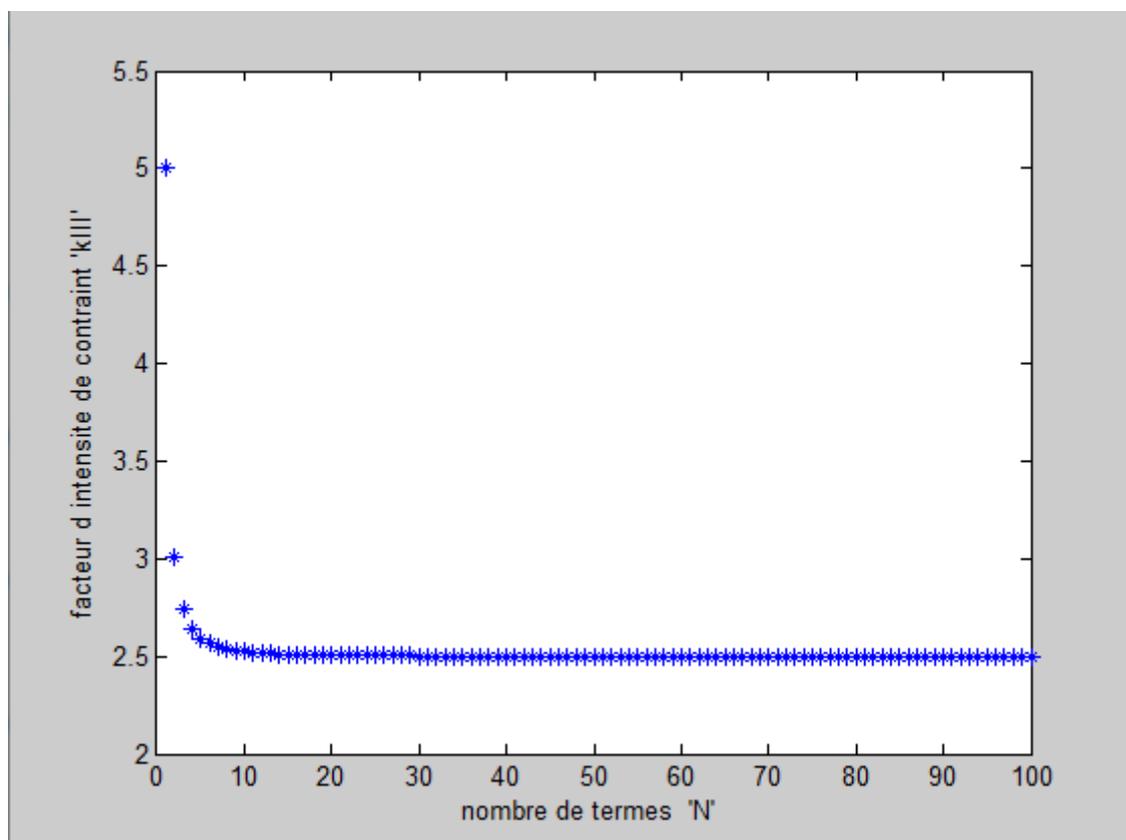


FigureA4-11 : Facteur d'intensité de contrainte KIII en fct de P ($f=1.1$)

P	KIII	P	KIII
1	4.6078	55	2.3054
2	2.8149	59	2.3053
3	2.5414	63	2.3052
4	2.4423	69	2.3051
5	2.3950	76	2.3050
6	2.3686	86	2.3049
7	2.3524	87	2.3048
8	2.3416	98	2.3048
9	2.3341	99	2.3048
10	2.3287	100	2.3048

Tableau A4-11 : KIII en fct de P($f=1.1$)

Résultats pour $f=1.2$

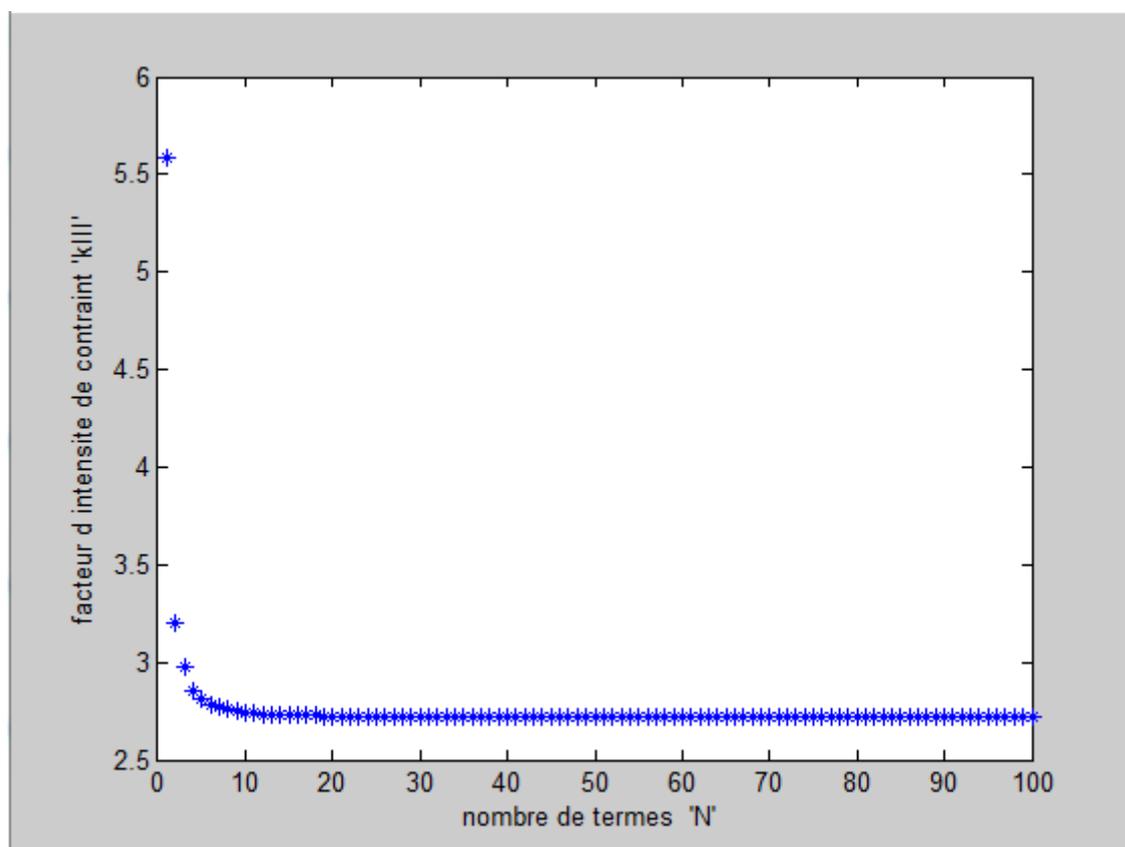


FigureA4-12 : Facteur d'intensité de contrainte KIII en fct de P($f=1.2$)

P	KIII	P	KIII
1	5.0012	56	2.4993
2	3.0045	61	2.4992
3	2.7416	66	2.4991
4	2.6381	72	2.4990
5	2.5905	81	2.4989
6	2.5636	93	2.4988
7	2.5470	94	2.4987
8	2.5361	98	2.4987
9	2.5285	99	2.4987
10	2.5230	100	2.4987

Tableau A4-12 : KIII en fct de P($f=1.2$)

Résultats pour $f=1.3$

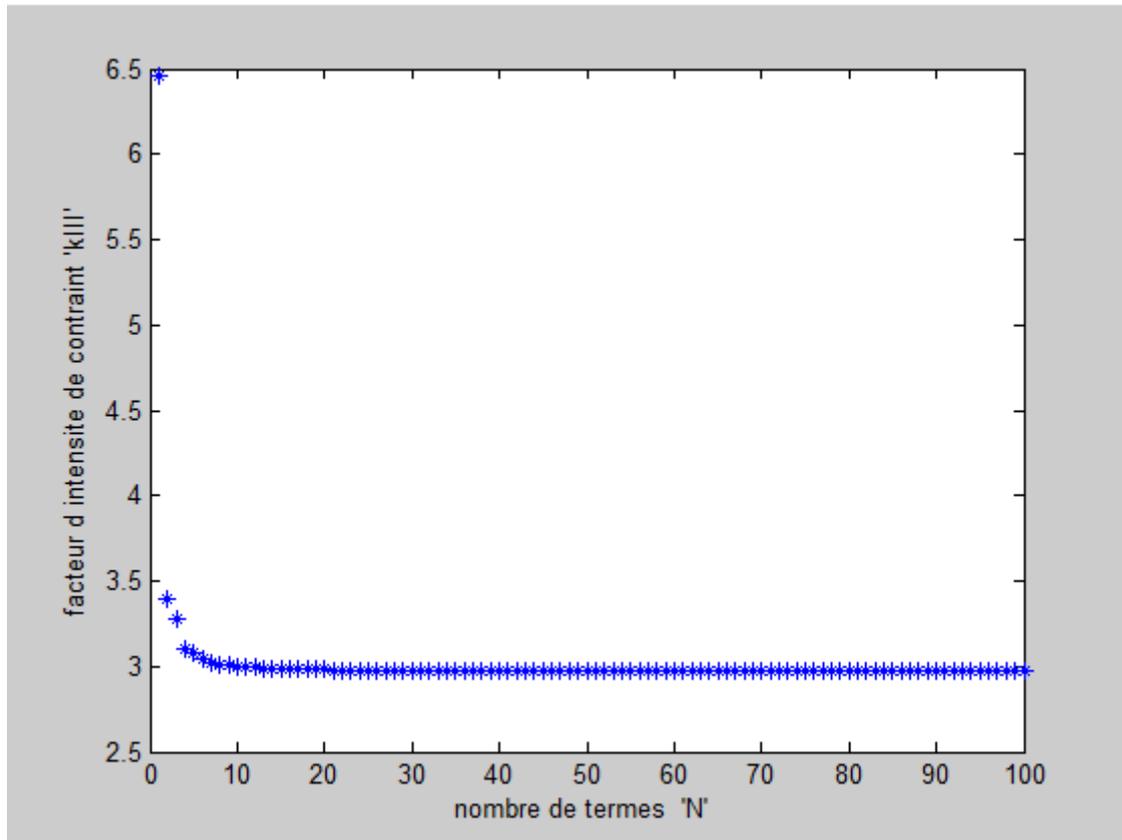


FigureA4-13 : Facteur d'intensité de contrainte KIII en fct de P($f=1.3$)

P	KIII	P	KIII
1	5.5836	55	2.7182
2	3.1998	57	2.7181
3	2.9786	62	2.7180
4	2.9786	66	2.7179
5	2.8127	74	2.7178
6	2.7839	83	2.7177
7	2.7673	84	2.7176
8	2.7559	98	2.7176
9	2.7481	99	2.7176
10	2.7425	100	2.7176

Tableau A4-13 : KIII en fct de P($f=1.3$)

Résultats pour $f=1.4$

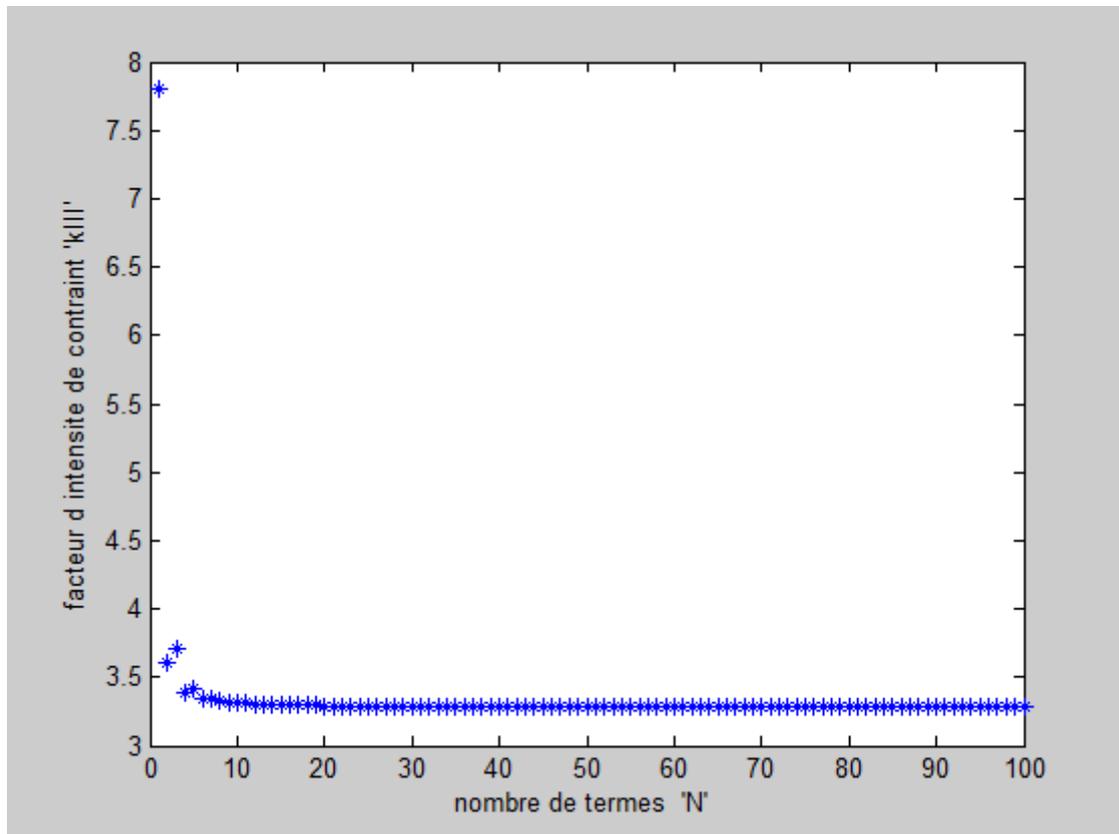


FigureA4-14 : Facteur d'intensité de contrainte KIII en fct de P ($f=1.4$)

P	KIII	P	KIII
1	6.4574	56	2.9737
2	3.3982	61	2.9736
3	3.2821	65	2.9735
4	3.1061	73	2.9734
5	3.0774	84	2.9733
6	3.0402	88	2.9732
7	3.0256	89	2.9731
8	3.0128	98	2.9731
9	3.0051	99	2.9731
10	2.9990	100	2.9731

TableauA4-14 : KIII en fct de P($f=1.4$)

Résultats pour $f=1.5$

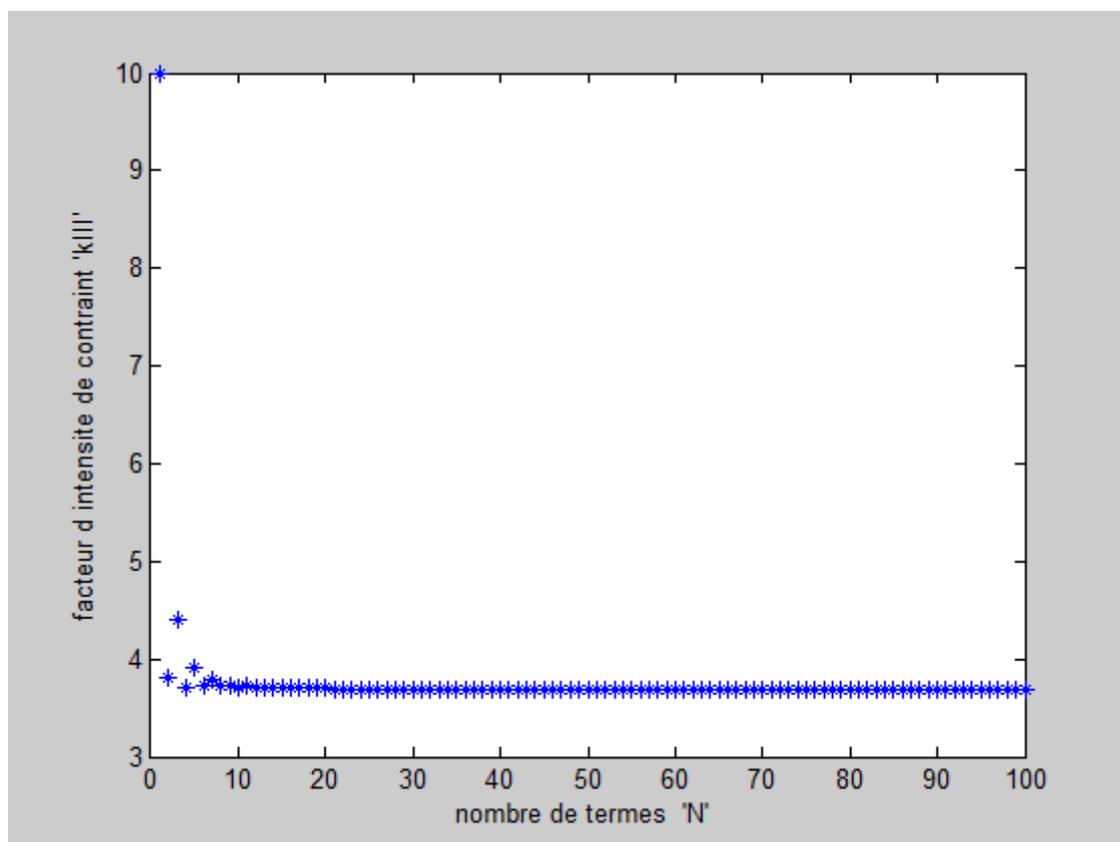


FigureA4-15 : Facteur d'intensité de contrainte KIII en fct de P ($f=1.5$)

P	KIII	P	KIII
1	7.8053	57	3.2856
2	3.6015	60	3.2855
3	3.7117	64	3.2854
4	3.3869	70	3.2853
5	3.4169	79	3.2852
6	3.3461	87	3.2851
7	3.3455	88	3.2850
8	3.3245	98	3.2850
9	3.3200	99	3.2850
10	3.3118	100	3.2850

Tableau A4-15 KIII en fct de P($f=1.5$)

Résultats pour $f=1.6$

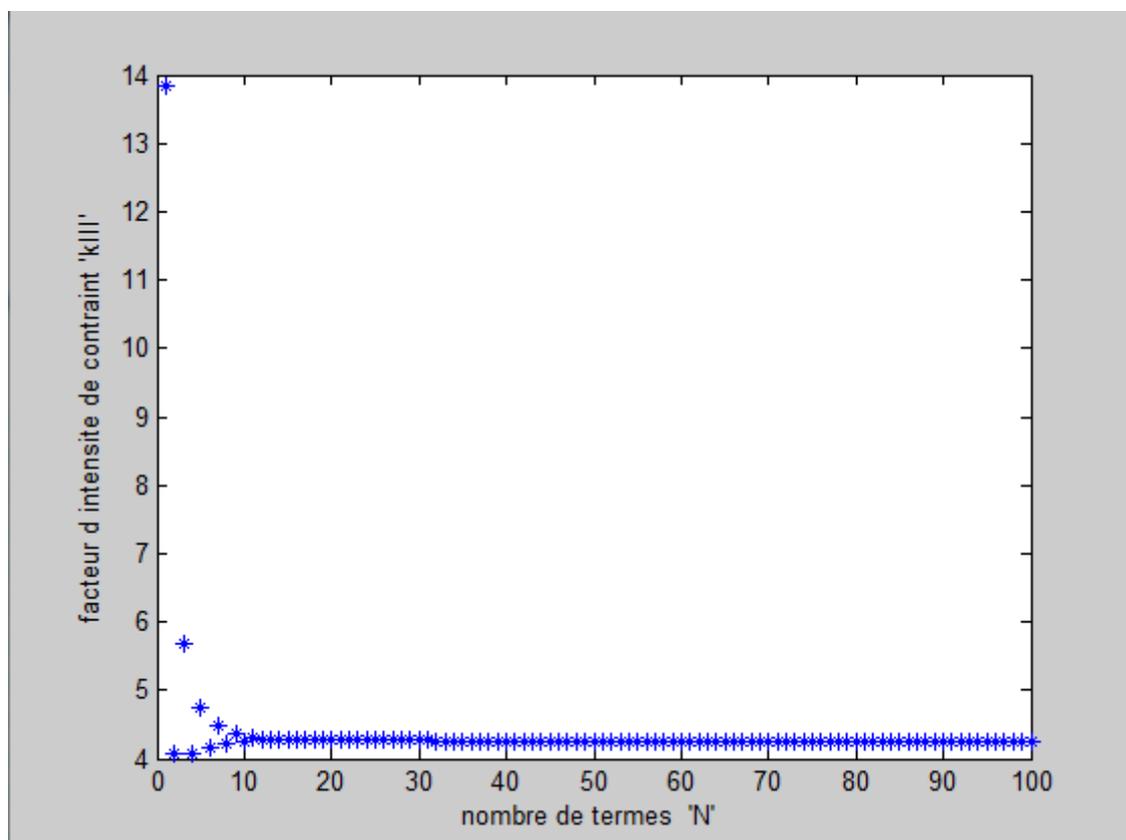


FigureA4-16 :Facteur d'intensité de contrainte KIII en fct de P ($f=1.6$)

P	KIII	P	KIII
1	9.9894	61	3.6895
2	3.8181	66	3.6894
3	4.3999	69	3.6893
4	3.7025	76	3.6892
5	3.9074	85	3.6891
6	3.7170	91	3.6890
7	3.7795	92	3.6889
8	3.7179	98	3.6889
9	3.7353	99	3.6889
10	3.7131	100	3.6889

Tableau A4-16 : KIII en fct de P($f=1.6$)

Résultats pour $f=1.7$



FigureA4-17 : Facteur d'intensité de contrainte KIII en fct de P ($f=1.7$)

P	KIII	P	KIII
1	13.8492	61	4.2606
2	4.0634	62	4.2605
3	5.6794	66	4.2604
4	4.0619	68	4.2603
5	4.7584	81	4.2602
6	4.1692	86	4.2601
7	4.4726	96	4.2600
8	4.2286	90	4.2600
9	4.3624	98	4.2600
10	4.2553	99	4.2600

Tableau A4-17 : KIII en fct de P($f=1.7$)