UNIVERSITE SAAD DAHLAB DE BLIDA

Faculté des Sciences
Département de Mathématiques

MEMOIRE DE MAGISTER

Spécialité : Recherche Opérationnelle

CONTRIBUTION A L'ETUDE DE LA γ_L-EXCELLENCE ET DE LA γ_L –UNICITE DANS LES ARBRES

Par

M[me] LOUNES Rahma née ABERKANE

Devant le jury composé de :

F. HANNANE	Professeur, U. de Blida	Président
M. BLIDIA	Professeur, U. de Blida	Promoteur
I. BOUCHEMAKH	Maître de conférences, USTHB, Alger	Examinateur
M. CHELLALI	Maître de conférences, U. de Blida	Examinateur
A. SEMRI.	Maître de conférences, USTHB, Alger	Examinateur

Blida, janvier 2008

مــــلـــخـــص

ليكن $G = (V,E)$ بيانا بسيطا. الجوار المفتوح لرأس u $N(u)=\{u \text{ € } V \mid uv \text{ € } E\}$. نسمي المجموعة S من V مجموعة مسيطرة إذا كان كل رأس من $V\text{-}S$ يملك جارا في S. الأصلي الأدنى لمجموعة مسيطرة المرموز له$\gamma(G)$ يسمى عدد السيطرة للبيان G و كل مجموعة مسيطرة ذات أصلي $\gamma(G)$ تسمى $\gamma(G)$ مجموعة. تعرف وسائط أخرى للسيطرة بفرض شروط أخرى على المجموعة المسيطر. المجموعة مسيطرة هي مسيطرة مصنفة إ ذا كان من أجل كل عنصرين x,y من $V\text{-}S$ $N(x)\cap S \neq N(y)\cap S$

يرمز لعدد السيطرة المصنفة ب$\gamma_L(G)$. يكون البيان G γ_L- ممتازا إذا كان كل رأس من G ينتمي إلى$\gamma_L(G)$ مجموعة. في هذا البحث نتعرض إلى دراسة الأشجار الممتازة بالنسبة للوسيطγ_L و كذلك التي تملك γ_L مجموعة وحيدة. أعطينا خلال هذا العمل تمييزا للأشجارγ_L ممتازة.

اقترحنا أيضا تمييزا للأشجار ذات γ_L مجموعة وحيدة . و أخيرا برهننا أن في حالة الأشجار $\gamma_L(T) \leq \frac{n+l-s}{2} \leq \beta(T) \leq \gamma_2(T)$ و أعطينا تمييزا للأشجار الحدية.

Abstract

Let $G = (V, E)$ be a simple graph, the open neighborhood of a vertex u of V is $N(u) = \{v \in V \mid uv \in E\}$. A subset S of V is an dominating set of G if every vertex of $V - S$ has at least a neighbour in S. The minimum cardinality of a dominating set of G, denoted $\gamma(G)$, is called the domination number of G. A dominating set of cardinality $\gamma(G)$ is called $\gamma(G)$-set. Other types of domination are defined by imposing an additional condition on the dominating set. A dominating set S of G is a locating-dominating set of G if for every two vertices x, y, of $V - S$, we have $N(x) \cap S \neq N(y) \cap S$. The domination locating number of G is denoted by $\gamma_L(G)$. A graph G is γ_L-excellent graph if every vertex of G is in at least one $\gamma_L(G)$ –set.

In this thesis we are interested to study an γ_L-excellence and γ_L-unicity in trees. We have given a characterization of γ_L-excellent trees, based on the definition of a set of vertices which are in no $\gamma_L(G)$-set. We have proposed a constructive characterization of trees with an unique $\gamma_L(T)$-set. Finally in the case of trees, we have shown that $\gamma_L(T) \leq \frac{(n+l-s)}{2} \leq \beta(T) \leq \gamma_2(T)$ and we have characterized the extremal trees.

RESUME

Soit $G=(V,E)$ un graphe simple. Le voisinage ouvert d'un sommet u de V est $N(u)=\{v\in V \mid uv\in E\}$. Un sous enemble S de V est un ensemble dominant de G si tout sommet de $V-S$ possède au moins un voisin dans S. Le cardinal minimum d'un ensemble dominant de G, noté $\gamma(G)$, est appelé le nombre de domination de G. Un dominant de G de taille $\gamma(G)$ est un $\gamma(G)$-ensemble. Si on impose une condition sur les sommets de S, on définit d'autres types de domination. Le voisinage dans S d'un sommet u de $V-S$ est noté $N(u)\cap S$. Un ensemble dominant S de G est un ensemble dominant localisateur de G si pour toute paire de sommets x,y de $V-S$, $N(x)\cap S\neq N(y)\cap S$. Le nombre de domination localisateur de G est noté $\gamma_L(G)$. Un graphe G est dit γ_L-excellent si tout sommet de G est contenu dans au moins un $\gamma_L(G)$-ensemble.

Dans ce mémoire on s'intéresse à l'étude de la γ_L-excellence et la γ_L-unicité dans les arbres. Dans mon travail on a donné une caractérisation des arbres γ_L-excellents, basée sur la définition de l'ensemble des sommets n'appartenant à aucun $\gamma_L(T)$-ensemble noté par $\mathsf{N}_L(T)$. On a proposé ensuite une caractérisation constructive des arbres ayant un $\gamma_L(T)$-ensemble unique. Enfin on a montré que dans le cas des arbres $\gamma_L(T)\leq \dfrac{(n+l-s)}{2}\leq \beta(T)\leq \gamma_2(T)$ et on a caractérisé les arbres extrémaux.

REMERCIEMENTS

Je tiens à exprimer en premier lieu toute ma reconnaissance et ma gratitude à Monsieur Mostafa BLIDIA, Professeur à l’université Saad Dahleb de Blida, pour son aide et ses precieux conseils qui m’ont permis de réaliser ce travail. Je le remercie aussi pour son soutien et sa comprehension.

J’adresse également mes remerciements à Monsieur Mustapha CHELLALI, Maitre de conférences à l’université Saad Dahleb de Blida pour ses brillantes suggèstions, et sa diponibilité.

Je remercie sincèrement Monsieur Farouk HANNANE, Professeur à l’université Saad Dahleb de Blida pour avoir accépté de présider le jury.

Je remercie également Melle Isma BOUCHEMAKH, Professeur à l’U S T H.B, et Monsieur Ahmed SEMRI, Maître de conférences à l U S T H B, qui ont accepté d’évaluer mon travail.

Mes remerciements s’adressent aussi à mes collègues Monsieur Noureddine IKHLEF ECHOUF, et Monsieur Brahim DEROUKDAL.

Je tiens à ne pas oublier ma famille, en particulier mon mari, et mes enfants pour leur soutien, leur patience, et leurs encouragements.

TABLE DES MATIERES

LISTE DES ILLUSTRATIONS GRAPHIQUES

INTRODUCTION

Au début de la deuxième guerre mondiale, des scientifiques de disciplines diverses se regroupèrent dans le but de résoudre des problèmes opérationnels d'importance. C'est ainsi que naquit la Recherche Opérationnelle en tant que science appliquée.

En 1939-40, l'équipe du physicien anglais Blackett eut le grand mérite d'élaborer une stratégie qui permit à la Royal Air Force (R A F) de traiter éfficacement le problème de l'implantation des radars de surveillance. Face aux succès obtenus durant la guerre, les scientifiques furent tentés d'appliquer leur approche à des problèmes industriels et économiques.

Parmi les principales techniques mathématiques de la Recherche Opérationnelle, nous citerons la Théorie des graphes.

En effet, les graphes se trouvent être un outil formidable, du fait qu'on peut les visualiser, pour la modélisation de problèmes réels, tels les réseaux électriques, les réseaux de transport, de communication,...etc. La schématisation de ces problémes par un graphe permet l'utilisation de méthodes mathématiques dont les résultats peuvent être mis à profit par les utilisateurs selon leurs besoins et objectifs.

La Théorie des graphes recouvre de nombreux domaines, dont celui de la domination dans les graphes qui enregistre plus de 1200 références concenant différents types de domination. Nous nous proposons de contribuer modestement à l'enrichissement de ce domaine par l'apport de quelques résultats que nous exposons dans ce mémoire.

Nous nous sommes intéréssés dans ce mémoire, qui comporte cinq chapitres, au problème de l'exellence d'un graphe par rapport à différents paramètres de domination, (cette notion a été introduite par Fricke dans [16]), à l'unicité d'un ensemble dominant localisateur minimum, et enfin à quelques relations entre le paramètre de domination localisateur, de 2-domination, et de stabilité.

Le **chapitre 1** comporte trois sections. La première est consacrée à quelques définitions générales de la Théorie des graphes, et à des notions qui nous sont utiles dans ce mémoire.

Dans la seconde section, nous faisons une brève présentation de la complexité algorithmique. Un aperçu du cheminement historique du problème de la domination sera donné dans la troisième partie, au niveau de laquelle nous définissons aussi quelques types de domination. Nous clorons cette partie par l'exposé de quelques problèmes intéréssant le domaine de la domination.

Le **chapitre 2** est consacré aux différents résultats obtenus à ce jour dans la classe des graphes excellents par rapport à quelques paramètres de domination, plus précisément aux arbres excellents par rapport à la domination, à la domination totale, à la domination double, et à la domination couplée.

Dans le **chapitre 3** aprés un récapitulatif des résultats connus dans le domaine de la domination localisateur, nous exposons les résultats que nous avons obtenus, et ce, en collaboration avec M. Blidia. Nous commençons par caractériser les chaînes et chenilles excellentes par rapport à la domination localisateur, ensuite nous proposons une caractérisation des arbres excellents par rapport au même paramètre, basée sur l'art de l'élagage. Nous terminerons par la présentation d'un algotithme de reconnaissance des arbres excellents par rapport à la domination localisateur, opérant en temps polynimial.

Au niveau du **chapitre 4** nous présentons une caractérisation des arbres admettant un ensemble dominant localisateur minimum unique. Ce résultat obtenu en collaboration avec M.Blidia, repose sur la construction d'une famille d'arbres admettant un ensemble dominant localisateur minimimum unique, laquelle construction est effectuée à partir d'un ou de deux arbres ayant cette propriété d'unicité d'ensemble dominant localisateur minimum.

Le **chapitre 5** est consacré à l'étude des relations d'ordre entre les paramètres de domination loclisateur, de 2-domination, et de stablilité, et nous y présentons une caractérisation des arbres vérifiant les égalités entre ces paramètres.

CHAPITRE 1

GENERALITES SUR LES GRAPHES

La première partie de ce chapitre est consacrée aux définitions de base de la théorie des graphes. Nous définirons les notions propres à un chapitre donné au niveau de celui-ci. Dans la seconde partie, nous donnons un aperçu de la compléxité algorithmique. La troisième partie sera une introduction à la domination dans les graphes, on y présentera aussi quelques paramètres de domination ainsi que quelques problèmes liés au concept de la domination dans les graphes.

Pour plus de détails concernant la théorie des graphes, nous invitons le lecteur à consulter les ouvrages de C.Berge [1] et de Chartrand et Lesniak [6]. Pour la théorie de la domination, on pourra se référer aux ouvrages de Haynes et al [18] et [19] .

1.1 Définitions et notations

1.1.1 Graphe et sous-graphe

Un graphe G est la donnée d'un couple $G = (V, E)$ où V est un ensemble fini d'éléments appelés *sommets* et E un ensemble de paires d'éléments de V appelés *arêtes*. Le cardinal de V, appelé *ordre* de G, est noté n. Le cardinal de E est noté m. Si $n = 1$ et donc $m = 0$, et que le graphe G est sans boucles, G est dit graphe *trivial*. Les sommets sont notés par des lettres minuscules v, u, x, a, b, y,... etc. Les arêtes sont notées vu, xy, ab,... etc.

Dans le plan, les sommets d'un graphe sont représentés par des points et ses arêtes par des lignes joignant deux points. La figure 1.1 représente un graphe G.

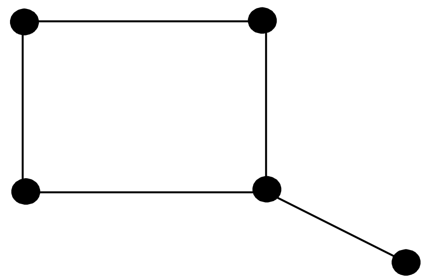


Figure 1.1 Un graphe G

Un graphe *simple* est un graphe sans boucles dans lequel toute paire de sommets est reliée par au plus une arête.

Si l'arête uv est un élément de E on dit que:

- Les sommets u et v sont *adjacents.*
- Les sommets u et v sont *voisins.*
- Les sommets u et v sont les extrémites de l'arête uv.
- L'arête uv est incidente aux sommets u et v.

Etant donnés un graphe $G = (V, E)$ et H un sous ensemble de sommets de V, on appelle *sous graphe induit* ou (*engendré*) par H et noté $\langle H \rangle$ ou $G[H]$, le graphe dont l'ensemble des sommets est l'ensemble H, et l'ensemble des arêtes le sous ensemble des arêtes de E qui ont leurs extremités dans H. Voir figure 1.2, un graphe $G = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\}$ et le sous graphe induit par $H = \{v_2, v_3, v_4, v_5\}$.

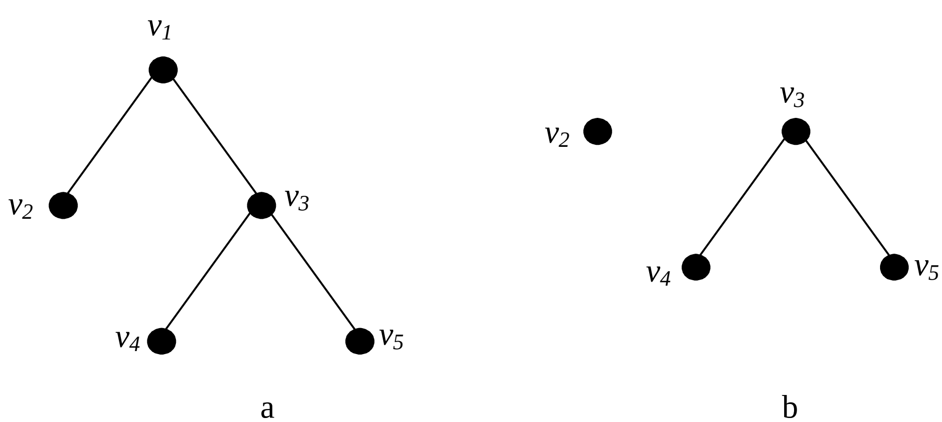


Figure 1.2. (a) un graphe G (b) un sous graphe induit $< H >$

Dans tout ce qui suit, nous ne considérerons que des graphes simples et finis.

Un sous-ensemble A de V est dit est *minimal* (resp. *maximal*) par rapport à une propriété $\mathcal{P}$ s'il n'existe pas d'ensemble $B \subset A$ (resp. $B \supset A$) tel que $G[B]$ le sous graphe induit par B vérifie la propriété $\mathcal{P}$.

Un sous-ensemble A de V est dit *minimum* ou de *taille minimale* (resp. *maximum* ou de *taille maximale*) par rapport à une propriété $\mathcal{P}$ s'il n'existe pas d'ensemble $B \subset V$ tel que $G[B]$ le sous graphe induit par B vérifie la propriété $\mathcal{P}$, et tel que $|A| > |B|$ (resp. $|B| > |A|$) où $|A|$ désigne le cardinal de l'ensemble A, c'est-à-dire le nombre d'éléments de l'ensemble A.

1.1.2 Voisinages et degré d'un sommet

Etant donnés un graphe $G = (V, E)$ et v un sommet de V, on définit le voisinage ouvert (resp. le voisinage fermé) de v par l'ensemble $N_G(v) = \{u \in V \mid uv \in E\}$ (resp. par l'ensemble $N_G[v] = N_G(v) \cup \{v\}$). S'il n'y a aucun risque de confusion, les voisinages ouvert et fermé d'un sommet v seront notés simplement par $N(v)$ et $N[v]$ au lieu de $N_G(v)$ et $N_G[v]$ respectivement. L'ensemble $N_G(S) = \bigcup_{v \in S} N_G(v)$ (resp. $N_G[S] = N_G(S) \cup S$) définit le voisinage ouvert (resp. fermé) d'un sous-ensemble S. De même, nous utiliserons les notations $N(S)$ et $N[S]$ au lieu de $N_G(S)$ et $N_G[S]$ respectivement.

Le degré d'un sommet v de $V(G)$, noté $\deg_G(v)$, est égal au cardinal de son voisinage ouvert $N(v)$. Un sommet de degré nul est dit un *sommet isolé* et un sommet de degré égal à un est dit un *sommet pendant*. Un sommet adjacent à au moins un sommet pendant est appelé un *sommet support*. On note par $\Delta(G)$ et $\delta(G)$ le *degré maximum* et *minimum* dans G respectivement. S'il n'y a aucun risque de confusion, on écrira $\deg(v)$, Δ et δ pour désigner respectivement $\deg_G(v)$, $\Delta(G)$ et $\delta(G)$.

Le voisinage privé d'un sommet v de $V(G)$ par rapport à un ensemble $S \subset V$ est l'ensemble des sommets du voisinage fermé de v qui n'ont pas d'autres voisins dans S. Cet ensemble noté $pn[v, S]$ est défini par: $pn[v, S] = \{u : N[u] \cap S = \{v\}\}$

1.1.3 Chaînes et cycles

Une chaîne C d'un graphe $G = (V, E)$ est une séquence $[v_1, v_2, ..., v_k]$ de sommets de V distincts tels que pour tout indice $i \in \{1, ..., k-1\}$, $v_i v_{i+1}$ est une arête de E, si de plus $v_1 v_k$ est une arête de E, alors $[v_1, v_2, ..., v_k]$ est appelé un *cycle*. Pour simplifier les notations, la chaîne $[v_1, v_2, ..., v_k]$ sera notée $v_1, v_2, ..., v_{k-1}, v_k$. Les sommets v_1, v_k sont appelés les extremités de la chaîne, les sommets $v_2, ..., v_{k-1}$ sont appelés sommets intermédiaires de la chaîne.

La distance entre deux sommets u et v notée $d(u, v)$ représente le nombre d'arêtes d'une plus courte chaîne reliant les sommets u et v. *Le diamètre* du graphe G, noté $Diam(G)$, est defini par $Diam(v) = \underset{u,v \in V}{Max}(d(u, v))$.

Une *corde* est une arête qui relie deux sommets non consécutifs dans une chaîne ou dans un cycle.

Une chaîne (resp. cycle) sans cordes est dite (resp. dit) *induite* (resp. *induit*). La longueur d'une chaîne (resp. d'un cycle) est égale au nombre d'arêtes qui séparent (ou relient) ses extremités. Donc la longueur de la chaîne $v_1, v_2, ..., v_k$ est egale à $k-1$. Une chaîne induite par k sommets est notée P_k. Voir figure 1.3 une chaîne d'ordre 5.

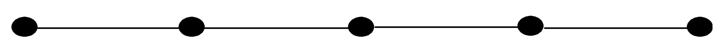


Figure 1.3. Une chaîne P_5

Un graphe G est dit *connexe* si pour chaque paire de sommets v et u de V, il existe une chaîne reliant les sommets v et u. Une *composante connexe* d'un graphe est un sous-graphe *maximal connexe.*

1.1.4 Quelques graphes

Un *graphe* G est dit *complet si toute paire de sommets de* G est reliéé par exactement une arête. On note K_n le graphe complet d'ordre n. Voir figure1.4 le graphe complet K_4

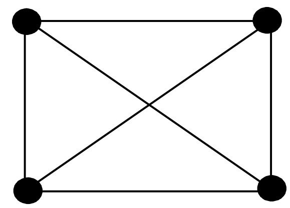


Figure 1.4. Un graphe complet d'ordre 4, K_4

Un graphe $G = (V, E)$, ou $G = (V_1, V_2, E)$ est dit graphe biparti si l'ensemble de ses sommets peut être partitionné en deux sous ensembles V_1 et V_2 tels que deux sommets d'un même sous ensemble ne soient jamais adjacents. Si de plus tout sommet de V_1 est adjacent à un sommet de V_2 alors G sera dit un graphe biparti complet. Voir figure 1.5 le graphe biparti complet $K_{2,3}$.

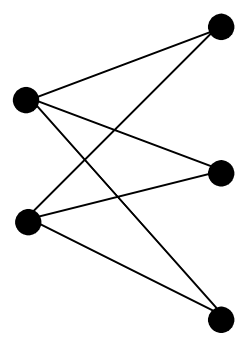
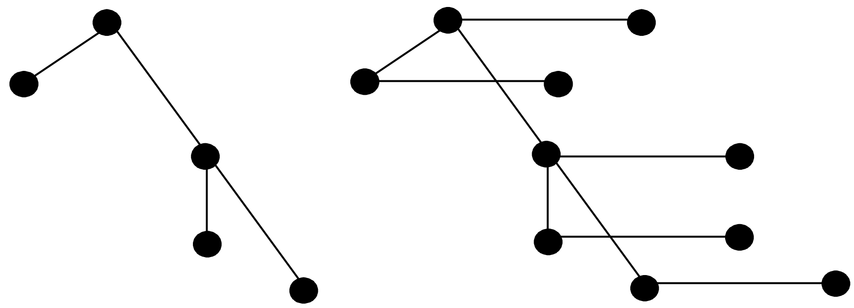


Figure 1.5. Un graphe biparti $K_{2,3}$

Un arbre est un graphe connexe sans cycle. Un arbre comporte exactement $(n - 1)$ arêtes, il est habituellement noté T.

La couronne $G = H \circ K_1$ d'un graphe H est le graphe obtenu d'une copie de H dans laquelle on attache un sommet pendant à chaque sommet de H. Il est évident que l'ordre de G est égal à $2|H|$ ($|H|$ désigne le nombre d'éléments de H). Un graphe $G \circ K_1$ est illustré par la figure 1.6.



(a) (b)

Figure 1.6. (a) un graphe G (b) la couronne de G.

L'etoile notée $S_{1,P}$ est le graphe biparti complet $G = (V_1, V_2, E)$ vérifiant $|V_1| = 1$ et $|V_2| = p$. L'étoile $S_{1,p}$ est representée par la figure 1.7.

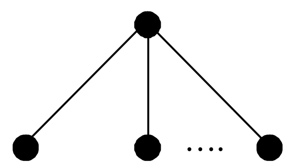


Figure 1.7. L'étoile $S_{1,p}$

L'étoile double, notée $S_{p,q}$, $p \geqslant 2$, $q \geqslant 2$est le graphe obtenu en reliant par une arête le sommet non pendant de l'étoile $S_{1,p}$ au sommet non pendant de l'étoile $S_{1,q}$. Voir figure 1.8 l'étoile double $S_{p,q}$.

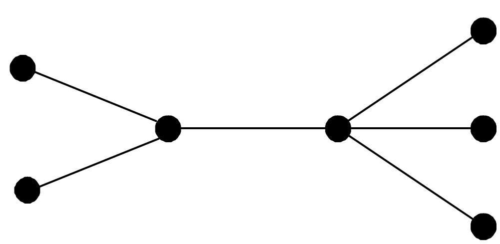


Figure 1.8. L'toile double $S_{p,q}$

L'étoile subdivisée SS_p est le graphe obtenu en subdivisant tout sommet pendant de l'étoile $S_{1,p}$ par une arête. Voir figure 1.9 l'etoile subdivisée SS_p.

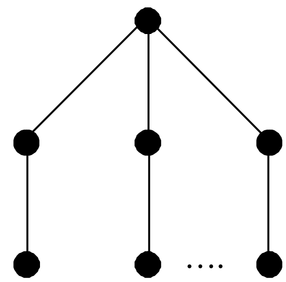


Figure 1.9 L'étoile subdivisée SS_p

1.1.5 Quelques paramètres structurels d'un graphe

Un *stable* ou (ensemble *indépendant*) d'un graphe $G = (V, E)$ est un sous ensemble S de sommets de V tel que le sous graphe induit par S, à savoir $\langle S \rangle$, est un graphe sans arêtes. La cardinalité minimum (resp. maximum) d'un stable maximal de G est notée $i(G)$ (resp. $\beta(G)$).

Une *clique* d'un graphe $G = (V, E)$ est un sous ensemble K de sommets de V tel que le sous graphe induit par K, à savoir $\langle K \rangle$, est un graphe complet. Voir figure 1.10, un graphe G contenant deux cliques d'ordre 3.

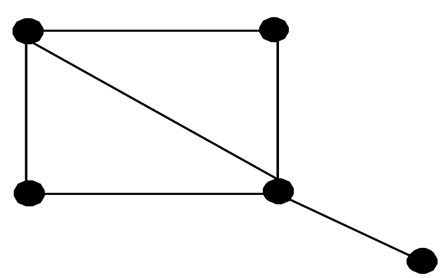


Figure 1.10. Un graphe G contenant deux cliques d'ordre 3.

Un *couplage* d'un graphe $G = (V, E)$ est un sous ensemble E' de E constitué des arêtes de E qui sont deux à deux non incidentes. Si de plus tout sommet v de V est incident à une arête de E', le couplage E' sera dit un *couplage parfait*.

1.2 Complexité algoritmique

Un algorithme de résolution d'un problème (P) donné est une procédure décomposable en opérations élémentaires telles la comparaison, l'affectation, les quatre opérations usuelles,... etc, transformant une chaîne de caractères représentant les données de n'importe quel exemple ou instance du problème (P) en une chaîne de caractères représentant les résultats de (P).

La performance d'un algorithme est généralement mesurée selon la relation existante entre la taille de l'exemple traité (exprimée en termes du nombre n de caractères nécessaires pour le codage des données) et le temps d'éxecution (exprimé en termes du nombre $f(n)$ d'opérations élémentaires). Le codage des données est tel que l'encombrement mémoire nécessaire pour stocker un nombre positif N, est égal au plus petit entier supérieur ou égal à $\log_2(N+1)$.

Un algorithme est dit efficace, ou encore polynomial, si le nombre total d'opérations $f(n)$, nécessaires pour la résolution d'un exemple de taille n, est borné par un polynôme en la taille du problème. Autrement dit, s'il existe deux constantes C et k telles que $f(n) = Cn^k$. Un tel algorithme est de complexité $O(n^k)$.

Un problème est dit polynomial ou appartenant à la classe P (problèmes déterministes polynomiaux) s'il existe un algorithme polynomial (ou efficace) pour le résoudre. Les problèmes de la classe P sont dits "faciles".

Un problème d'optimisation combinatoire consiste à chercher une meilleure solution parmi un ensemble fini de solutions réalisables.

Un problème de décision ou de reconnaissance est un problème dont la réponse attendue ne peut être que oui ou non. A chaque problème d'optimisation combinatoire, on peut associer un problème de reconnaissance.

Un problème de décision est dit dans NP (problèmes non déterministes polynomiaux) (resp. CO-NP) si dans le cas où la réponse est affirmative (resp. négative), on peut produire un certificat qui permet de vérifier en temps polynomial la réponse donnée.

Etant donné que les algorithmes efficaces sont des algorithmes non déterministes, il est clair que P $\subseteq$ NP. Mais la classe NP contient des problèmes pour lesquels on ne connaît pas d'algorithme polynomial de résolution. La conjecture P$\neq$NP demeure cependant ouverte.

On dit qu'un problème (P_1) se réduit en temps polynomial à un problème (P_2), s'il existe un algorithme pour (P_1) qui fait appel à un algorithme de résolution de (P_2) et si cet algorithme de résolution de (P_1) est polynomial lorsque la résolution de (P_2) est comptabilisée comme une opération élémentaire.

Un problème de décision dans NP est dit NP-complet si tout problème de la classe NP peut lui être réduit en temps polynomial. Ainsi, s'il existe un algorithme polynomial permettant de résoudre un problème NP-complet, il existerait un algorithme polynomial pour tous les problèmes de la classe NP. Les problèmes NP complets sont dits "difficiles".

Les problèmes NP-durs sont des problèmes au moins aussi difficiles que les problèmes NP-complets et, tout problème d'optimisation combinatoire dont le problème de reconnaissance est NP-complet est NP-dur.

1.3 Introduction à la domination dans les graphes et paramètres de domination

1.3.1 Aperçu sur la domination

Nous commençons par donner la définition d'un ensemble *dominant*:

Définition 1.1. *Soit $G = (V, E)$ un graphe, S un sous ensemble de sommets de V est appelé un ensemble dominant de G si tout sommet v de $V - S$ est adjacent à (ou dominé par) au moins un sommet de S. La cardinalité minimale (respectivement maximale) d'un ensemble dominant minimal de G, notée $\gamma(G)$, (respectivement $\Gamma(G)$), est appelée le nombre de dominatoin inférieur (respectivement supérieur) de G. Un ensemble dominant de G de cardinalité $\gamma(G)$ est appelé un $\gamma(G)$-ensemble.*

Il existe dans la littérature d'autres définitions d'un ensemble dominant dont les suivantes:

- Un ensemble $S \subseteq V$ est un ensemble *dominant* de G si pour tout sommet v de V $|N[v] \cap S| \geq 1$.

- Un ensemble $S \subseteq V$ est un ensemble *dominant* de G si pour tout sommet v de $V - S$, $N(v) \cap S) \neq \varnothing$.

- Un ensemble $S \subseteq V$ est un ensemble *dominant* de G si $N[S] = \cup_{v \in S} N[v] = V$.

Le conçept de domination trouve son origine dans le "Problème des Cinq Reines", lequel problème consiste en la détérmination du nombre minimum de reines pouvant attaquer ou (dominer) toutes les cases d'un échiquier standard 8×8. En effet, sachant que les règles du jeu d'echecs font qu'une reine, peut en un seul mouvement se déplacer d'une case à une autre de l'échiquier et ce, soit horizontalement ou verticalement ou en diagonale, on désire déterminer le nombre minimum de reines qu'il faudrait pour pouvoir dominer (ou couvrir) toutes les cases d'un échiquier de 64 cases. Voir figure 1.11 un échiquier 8×8.

	X		X				
X	X	X					
X	**R**	X	X	X	X	X	X
X	X	X					
	X		X				
	X			X			
	X				X		
	X					X	

R							
							R
	R						
						R	
		R					
			R				

Figure 1.11. L'échiquier 8×8

Dans la figure 1.11, nous observons qu'une reine peut se déplacer vers toutes les cases de l'échiquier qui sont marquées d'un"X" et que, six reines peuvent dominer toutes les cases de l'échiquier 8×8. En fait, le nombre minimum de reines nécéssaires pour dominer toutes les cases de l'échiquier 8×8 est cinq.

On notera qu'au $XIX^{i\grave{e}me}$ siècle, les échéphiles européens considérèrent le problème consistant à déterminer le nombre minimum de reines qui pourraient être placées sur un échiquier $n \times n$ de telle manière que toutes les cases de l'échiquier puissent être dominées par l'une des reines.

Le problème de la domination des cases d'un échiquier par une pièce quelconque du jeu peut être perçu comme un problème de domination des sommets d'un graphe. En effet, il suffit de considérer le graphe dont l'ensemble des sommets V représente les cases de l'échiquier et tel que deux sommets u et v de V sont adjacents si la pièce considérée peut en un seul mouvement se deplacer de l'une vers l'autre des deux cases représentées par les sommets u et v. L'étude mathématique des ensembles dominants a débuté à la fin des années 50 bien que en 1862 dans [26], Jaenish ait dejà étudié le problème des reines dans un jeu d'echecs.

En 1958 dans [2] C.Berge donna une formulation de la domination dans les graphes orientés, et appela le nombre de domination le *nombre de stabilité.* En 1962, dans [31] Ore utilisa les termes "ensemble dominant" et "nombre de domination". En 1977 dans [9] Cocayne et Hedetniemi publièrent un article dans lequel ils recapitulèrent tous les résultats ayant trait à la domination. Depuis le domaine de la domination s'est enrichi de nombreuses publications et références dont plus de 950 figurent dans le livre de Haynes et al [18]. On notera aussi un numéro de Discrete Maths [23] qui a été entièrement consacré à la domination.

L'idée d'introduire une condition supplémentaire sur les sommets d'un ensemble dominant, donna naissance à de nouveaux paramètres de domination. Nous expliciterons cette notion dans le paragraphe suivant.

1.3.2 Paramètres de domination

Etant donnés un graphe $G = (V, E)$ et S un ensemble dominant de G, on peut définir différents types de domination. A titre d'exemple, on peut citer la *domination clique* qui impose que le sous graphe induit par tout ensemble dominant de G soit une clique dans G. Le nombre de *domination clique,* noté $\gamma_c(G)$, est égal à la cardinalité minimale d'un ensemble dominant clique de G.

Nous définissons ci-dessous les types de domination dont il sera question dans ce mémoire, et nous explicitons quelques uns par des exemples concrets.

La domination stable: *Un sous ensemble S de V est dit ensemble stable (ou indépendant) de G si le sous graphe induit $\langle S \rangle$ ne contient pas d'arêtes. Le nombre de domination stable, noté $i(G)$, désigne la cardinalité minimale d'un ensemble stable maximal de G. La cardinalité maximale d'un ensemble stable maximal de G, notée $\beta(G)$, désigne le nombre de stabilité de G.*

La domination totale: La domination totale a été introduite par Cockayne, Daves, et Hedetniemi dans [10].

Un sous ensemble S de V est dit ensemble dominant total de G si tout sommet de V possède au moins un voisin dans S, autrement dit, si le sous graphe induit par S, $\langle S \rangle$ ne contient pas de sommets isolés. Le nombre de domination totale, noté $\gamma_t(G)$, désigne la cardinalité minimale d'un ensemble dominant total de G.

Considérons un groupe d'individus. On veut sélectionner parmi ce groupe un comité restreint tel que, toute personne du groupe ait des affinités avec au moins un membre de ce comité. Si nous modélisons ce problème par un graphe G dont l'ensemble des sommets représente le groupe d'individus et, deux sommets sont adjacents s'il y a affinités entre les personnes représentées. Alors le comité restreint sélectionné est un dominant total du graphe G.

La domination couplée: La domination couplée a été introduite par Haynes et Slater dans [22].

Un sous ensemble S de V est dit ensemble dominant couplé de G si S est un dominant de G et si le sous graphe induit par S, $\langle S\rangle$ admet un couplage parfait. Le nombre de domination couplée, noté $\gamma_{pr}(G)$, désigne la cardinalité minimale d'un ensemble dominant couplé.

Considérons un village au sein duquel on veut placer un groupe de vigiles tel qu'un vigile assure la protection de ses voisins tout en s'assurant lui même une protection mutuelle avec un collègue. Le plus petit groupe de vigiles représente un ensemble dominant couplé minimum du graphe représentatif des habitants du village.

La domination double: On notera que le concept de la domination double a été intrduit par Harary et Haynes dans [21].

Un sous ensemble S de V est dit ensemble dominant double de G si tout sommet de V est dominé par au moins deux sommets de S, autrement dit, si v est un sommet de $V-S$ alors v possède au moins deux voisins dans S et si v est un sommet de S alors v admet au moins un voisin dans S. Le nombre de domination double, noté $\gamma_{\times 2}(G)$, designe la cardinalité minimale d'un ensemble dominant double de G.

Si nous reprenons l'exemple précédent, en spécifiant que tout villageois soit protégé par au moins deux vigiles et que chaque vigile soit lui même protégé par un de ses collègues, alors le plus petit groupe constitué est un ensemble dominant double minimum du graphe représentatif des habitants du village.

La 2-domination: Le concept de la $k-$domination a été introduite par Fink et Jacobson dans [15].

Un sous ensemble S de V est dit ensemble 2-dominant de G si tout sommet de $V-S$ est dominé par au moins deux sommets de S (c-à-d : $|N_G(v)\cap S|\geq 2\ \forall v\in V-S$). Le nombre de 2-domination, noté $\gamma_2(G)$, designe la cardinalité minimale d'un ensemble 2-dominant de G.

La domination localisatrice: La notion d'ensemble dominant localisateur a été introduite par P.J. Slater dans [33]

Un sous ensemble S de V est dit dominant localisateur de G si S est un ensemble dominant de G et, si de plus, pour toute paire de sommets u, v de $V-S$, $N(v)\cap S \neq N(u)\cap S$. Le nombre de domination localisateur, noté $\gamma_L(G)$, désigne la cardinalité minimale d'un ensemble dominant localisateur de G.

1.3.3 Problèmes étudiés

1) Trouver des bornes supérieures et inférieures pour ces différents paramètres de domination (leur valeur exacte n'étant pas connue en général). Ces bornes sont des fonctions de n, $\Delta(G)$ ou $\delta(G)$, et caracteriser les graphes pour lesquels ces bornes sont atteintes.

2) Determiner des relations entre deux ou plusieurs paramètres de domination telles que la chaîne d'inégalités suivante $\gamma(G) \leq i(G) \leq \beta(G) \leq \Gamma(G)$.

3) Caracteriser les graphes pour lesquels on a égalité entre deux paramètres de domination.

4) Trouver pour certaines classes de graphes tels que les graphes bipartis, les cactus ou les arbres, des algorithmes polynomiaux pour la détermination de la valeur exacte d'un paramètre de domination (il faut signaler que ce problème est NP complet en général).

5) Trouver pour un paramètre donné $\mu(G)$ des relations entre $\mu(G)$ et $\mu\left(\overline{G}\right)$ du type **Nordauss Gaddum**; autrement dit, trouver deux fonctions $f_1(n,\Delta,\delta)$ et $f_2(n,\Delta,\delta)$ telles que $\mu(G)+\mu\left(\overline{G}\right) \leq f_1(n,\Delta,\delta)$ et $\mu(G)\times\mu\left(\overline{G}\right) \leq f_2(n,\Delta,\delta)$.

CHAPITRE 2

Les graphes μ-excellents

Nous présentons dans ce chapitre quelques résultats obtenus dans la classe des graphes μ-excellents relativement à quelques paramètres de domination, tels la domination sans condition, la domination totale, la domination double, et la domination couplée. Vu que l'étude de la classe des graphes μ-excellents s'avère difficile, ces résultats intéressent des graphes dont la structure est simple, tels que les arbres.

Nous définissons d'abord la notion de graphe μ-excellent.

Définition 2.1. *Etant donnés un graphe $G = (V, E)$ et un paramètre $\mu(G)$ On dit qu'un sommet v de V est μ-bon s'il est contenu dans au moins un $\mu(G)$-ensemble, et qu'il est μ-mauvais sinon. Si μg (resp. μb) désigne le nombre de sommets de V qui sont μ-bons (resp. μ-mauvais) alors le graphe G est dit:*

- *μ-excellent si tout sommet de V est μ-bon, en d'autres termes si $\mu b = 0$*
- *μ-recommandable* (ou *μ-acceptable*) si $\mu g > \mu b \geq 1$
- *μ-juste* ou (*μ-équitable*) si $\mu g = \mu b$
- *μ-pauvre* ou (*μ-indésirable*) si $0 < \mu g < \mu b$

Ce concept a été introduit par Fricke et al dans [16], où ils ont posé le problème de la caractérisation des graphes μ-excellents pour un paramètre $\mu(G)$ tel, $\mu(G) = i(G)$, $\gamma(G)$ ou $\beta(G)$.

A titre d'exemple, il est aisé de voir que les graphes bipartis complets, les cycles ainsi que les couronnes de graphes $G \circ K_1$ sont des graphes γ-excellents. Les étoiles subdivisées SS_p sont des graphes γ-recommandables. Les étoiles $S_{1,p}$ et les doubles étoiles $S_{p,q}$ sont des graphes γ-indesirables. La figure 2.1 montre un graphe γ-juste.

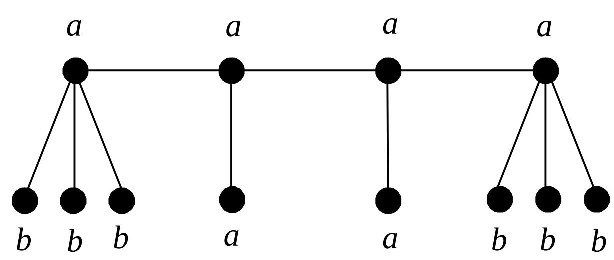


FIGURE 2.1. Un graphe $\gamma-$juste

2.1 Les arbres γ-excellents

Avant de présenter les arbres γ-excellents, nous donnons quelques résultats concernant les graphes γ-excellents d'une manière générale. On rappelle qu'un graphe $G = (V, E)$ est γ-excellent si tout sommet de V appartient à un $\gamma(G)$-ensemble. Dans [31], Ore a donné une conditon néssecaire et suffisante pour qu'un ensemble dominant soit un dominant minimal.

Théorème 2.2. *[31] Un ensemble dominant est minimal si et seulement si pour chaque sommet $v \in S$, une des deux conditions suivantes est satisfaite:*

1. *v est un sommet isolé dans $\langle S \rangle$.*
2. *Il existe un sommet $u \in V - S$ pour lequel $N(u) \cap S = \{v\}$.*

Dans [16], Fricke donne les remarques et propositions suivantes:

Remarque 2.3. *[16] Pour tout graphe G tel que $G \neq K_2$, tout sommet support de G est γ-bon et il existe un $\gamma(G)$-ensemble qui contient tous les sommets support de G.*

Remarque 2.4. *[16] Si G est un graphe γ-excellent, alors tout sommet pendant de G est contenu dans un $\gamma(G)$-ensemble, et il n'exite aucun sommet pendant de G qui soit contenu dans tout $\gamma(G)$-ensemble.*

Notons que si v, un sommet support d'un graphe G est adjacent à au moins deux sommets pendants alors compte tenu de la remarque 2.3, aucun des sommets pendants de G n'appartient à un $\gamma(G)$-ensemble, d'où la remarque suivante:

Remarque 2.5. *[16] Si G est un graphe γ-excellent, alors tout sommet support de G n'est adjacent qu'à un seul sommet pendant.*

Proposition 2.6. *[16] Tout graphe est un sous graphe induit d'un graphe γ-excellent.*

En effet, considérons un graphe H quelconque et, soit $G = H \circ K_1$ la couronne du graphe H. Comme tout sommet de $V(H)$ est un sommet support dans G, alors $V(H)$ est un $\gamma(G)$-ensemble et l'ensemble des sommets pendants de G est aussi un $\gamma(G)$-ensemble. Donc, tout sommet de $V(G)$ est un sommet γ-bon, d'où G est un graphe γ-excellent et donc H est un sous graphe induit d'un graphe γ-excellent. Comme conséquence, il s'ensuit la remarque suivante:

Remarque 2.7. *[16] Il n'existe pas de caractérisation des graphes γ-excellents en terme de sous graphes induits interdits.*

2.1.1 Caractérisation descriptive des arbres γ-excellents

Dans [16], Fricke et al ont donné une caractérisation descriptive des arbres γ-excellents. On définit par $\mathcal{C}$ la famille des couronnes d'étoiles et des couronnes de doubles étoiles. Voir figure 2.2, la famille des couronnes d'étoiles et des couronnes de doubles étoiles.

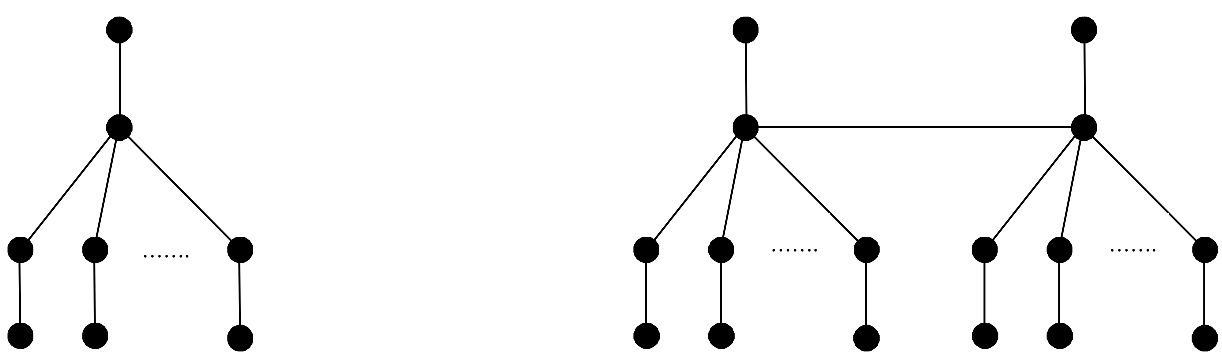


Figure 2.2. La famille des couronnes d'étoiles et des couronnes de doubles étoiles

Comme la couronne $G \circ K_1$ de tout graphe G est γ-excellente, dans [16], Fricke et al ont montré que tous les arbres T γ-excellents avec $diam(T) \leq 5$, sont des couronnes.

Théorème 2.8. *[16] Un arbre non trivial T avec diam $(T) \leq 5$ est γ-excellent si et seulement si $T \in \mathcal{C}$.*

Corollaire 2.9. *[16] Si T est un arbre γ-excellent et $T \notin \mathcal{C}$, alors diam $(T) \geq 6$.*

Il est clair que, la couronne $P_5 \circ K_1$ qui est γ-excellente atteint cette borne, mais les couronnes ne sont pas les seuls graphes excellents atteignant cette borne inférieure, parmi les graphes excellents atteignant cette borne nous pouvons citer la famille des étoiles subdivisées.

2.1.2 Construction d'une classe d'arbres γ-excellents

Dans [16], Fricke et al ont "construit" une classe d'arbres γ-excellents, c'est à dire qu'en partant de deux arbres γ-excellents d'ordre au moins 4, et en opérant sur ces deux arbres une "construction" qu'on définira plus loin, ils produisent une famille d'arbres γ-excellents. Cette construction est fondée sur le lemme suivant:

Lemme 2.10. *[16] Si T est un arbre γ-excellent d'ordre $n \geq 4$ alors, il existe un $\gamma(T)$-ensemble S tel que S n'est pas un ensemble indépendant dans T.*

Nous définissons à présent la "construction" des arbres, notée $\mathcal{A}$, développée dans [16], obtenus aprés les étapes suivantes:

1. Soient T_1 et T_2 deux arbres γ-excellents d'ordre au moins 4 et soient S_1 un $\gamma(T_1)$-ensemble et S_2 un $\gamma(T_2)$-ensemble tels que S_1 (resp. S_2) n'est pas un ensemble indépendant de T_1 (resp. de T_2). Soient u un sommet non isolé dans $\langle S_1 \rangle$, le sous graphe induit par S_1 et v un sommet non isolé dans $\langle S_2 \rangle$ le sous graphe induit par S_2.

2. Soit T l'arbre obtenu à partir des deux arbres T_1 et T_2 en reliant le sommet u de S_1 au sommet v de S_2 par l'arête uv alors, il s'ensuit la proposition suivante:

Proposition 2.11. *[16] L'arbre obtenu par la construction $\mathcal{A}$ est un arbre γ-excellent.*

2.1.3 Une caractérisation des arbres γ-excellents

Nous présentons dans ce paragraphe une caractérisation des arbres γ-excellents basée sur la détermination des sommets contenus dans tout ou dans aucun γ-ensemble d'un arbre.

1− Les sommets contenus dans tout ou dans aucun γ-ensemble d'un arbre

Dans [30], Mynhardt a défini les sommets contenus dans tout ou dans aucun γ-ensemble d'un arbre T, ce qui permet une caractérisation des arbres γ-excellents du fait qu'un arbre T est γ-excellent si et seulement si l'ensemble de ses sommets qui n'appartiennent à aucun $\gamma(T)$-ensemble est un ensemble vide.

Pour un arbre T, on définit les ensembles $\mathcal{A}(T)$ et $\mathcal{N}(T)$ par:

Définition 2.12. *[30]* $\mathcal{A}(T) = \{v \in V \mid v \textit{ est dans tout } \gamma(T)\textit{-ensemble}\}$

$$\mathcal{N}(T) = \{v \in V \mid v \textit{ n'est dans aucun } \gamma(T)\textit{-ensemble}\}.$$

Afin de faciliter la représentation, nous utiliserons souvent des arbres enracinés. On définit un arbre enraciné en un sommet r comme un arbre pendu par r, c'est à dire une arborescence de racine r (arbre orienté) où l'orientation est implicite, c'est à dire que les sommets sont classés par niveaux suivant leur distance par rapport au sommet racine r. On définit le sommet parent $p(v)$ d'un sommet v comme étant le sommet de niveau plus haut que v et adjacent à v. Le sommet u est un sommet fils de v si $p(u) = v$. Un sommet fils n'a qu'un seul parent mais un parent peut avoir plusieurs fils. Un sommet u est un descendant de v s'il est situé sur un niveau inférieur à celui de v, et s'il existe une chaîne (allant d'un niveau à un niveau plus bas) reliant v et u. On note pour un sommet w d'un arbre enraciné T :

$C(w)$=$\{u \in V \mid u$ est un sommet fils de $w\}$,

$D(w) = \{u \in V \mid u$ est un sommet descendant de $w\}$,

$D[w] = D(w) \cup \{w\}$, et

$T_w = D[w] \cap T.$

On note par $L(T)$ l'ensemble des sommets pendants de T et par $S(T)$ l'ensemble de ses sommets supports. Un sommet de degré au moins trois est dit sommet *branche* et on note par $B(T)$ l'ensemble des sommets branches de T. Une chaîne P dans T est dite une $v-L$ chaîne, si elle joint le sommet v à un sommet pendant de T. On note la longueur de P par $l(P)$ et pour $j=0,1$ et 2, on définit:

$$C^j(v)=\{u\in C(v): T_u \text{ contient une } u-L \text{ chaîne } P \text{ avec } l(P)\equiv j \pmod 3\}.$$

Pour un arbre T enraciné en un sommet v $(T=T_v)$ dans lequel $\deg_T(u)\leq 2$ $\forall u\in V(T)-\{v\}$, les ensembles $\mathcal{A}(T)$ et $\mathcal{N}(T)$ sont caractérisés par le théorème suivant:

Théorème 2.13. *[30] Soit T un arbre enraciné en un sommet v avec $\deg_T(u)\leq 2$ $\forall u\in V(T)-\{v\}$, alors:*

- *$v\in\mathcal{N}(T)$ si et seulement si $C^0(v)=\emptyset$ et $C^1(v)\neq\emptyset$.*
- *$v\in\mathcal{A}(T)$ si et seulement si $|C^0(v)|\geq 2$.*

2− Processus d'élagage d'un arbre par rapport à la domination [30]:

Nous décrivons maintenant une technique appelée *élagage d'un arbre* (en anglais, tree pruning) qui permet de caractériser les ensembles $\mathcal{A}(T)$ et $\mathcal{N}(T)$ pour un arbre T quelconque.

Pour tout sommet u d'un arbre enraciné T, l'ensemble de toutes les $u-L$ chaînes dans T_u est noté $\Pi(u)$. Pour $j=0,1,2$, on définit

$$\Pi^j(u)=\{P\in\Pi(u): l(P)\equiv j (\mathrm{mod}\, 3)\}.$$

L'élagage de T est effectué par rapport au sommet racine. Supposons que T est enraciné en v $(T=T_v)$. Soit u le sommet branche à distance maximum de v (notons que $|C(u)|\geq 2$ et $\deg_T(x)\leq 2$ pour tout $x\in D(u)$).

Pour tout $w\in C(u)$, une priorité est assignée à w ou à la chaîne $P\in\Pi(w)$, où $w^0\in C^0(u)$ et $P^0\in\Pi^0(u)$ ont une priorité supérieure à celle de $w^1\in C^1(u)$ et $P^1\in\Pi^1(u)$ qui ont encore une priorité supérieure à celle de $w^2\in C^2(u)$ et $P^2\in\Pi^2(u)$.

Soit z le fils de u ayant la plus grande priorité. Pour tout $w \in C(u) - \{z\}$, effacer $D[w]$. Cette étape de l'élagage, où tous les fils de u excepté un seul, sont effacés avec leurs descendants pour donner un arbre dans lequel lesommet u est de degré 2, est appelé un élagage de T_v en u. Ce processus est répété jusqu'à l'obtention d'un arbre $\bar{T}_v$ dans lequel $\deg(u) \leq 2\ \forall u \in V(\bar{T}_v) - \{v\}$. ($\bar{T}_v$ est l'arbre élagué obtenu à partir de T_v). Afin de simplifier les notations, on écrit $\bar{C}^j(v)$ au lieu de $C^j_{\bar{T}_v}(v)$.

Nous énonçons à présent les résultats qui illustrent l'efficacité du procéssus d'élagage à savoir que ce procéssus conserve la propriété d'appartenance ou de non appartenance d'un sommet v de T à un $\gamma(T)$-ensemble.

Théorème 2.14. *[30] Soit un arbre T enraciné en un sommet v et soit $\bar{T}_v$ l'arbre élagué obtenu à partir de T. Pour tout γ-ensemble $\bar{X}$ de $\bar{T}_v$, il existe un γ-ensemble X de T tel que $v \in X$ si et seulement si $v \in \bar{X}$. Réciproquement, pour tout γ-ensemble X de T, il existe un γ-ensemble $\bar{X}$ de $\bar{T}_v$ tel que $v \in \bar{X}$ si et seulement si $v \in X$.*

Corollaire 2.15. *[30] Pour tout arbre T et tout sommet v de T,*

- *$v \in \mathcal{A}(T)$ si et seulement si $\left|\bar{C}^0(v)\right| \geq 2$.*
- *$v \in \mathcal{N}(T)$ si et seulement si $\bar{C}^0(v) = \emptyset$ et $\bar{C}^1(v) \neq \emptyset$.*

Ayant caractérisé l'ensemble $\mathcal{N}(T)$ des sommets de T qui n'appartiennent à aucun $\gamma(T)$-ensemble pour tout arbre T, nous en déduisons le corollaire suivant qui donne une caractérisation des arbres γ-excellents.

Corollaire 2.16. *Un arbre T est γ-excellent si et seulement si pour tout sommet v de T, $\bar{C}^0(v) \neq \emptyset$ ou $\bar{C}^1(v) = \emptyset$.*

2.2 Les arbres i-excellents

2.2.1 Une caractérisation constructive des arbres i-excellents

Un arbre T est dit i-excellent si tout sommet de T appartient à au moins un $i(T)$-ensemble.

Avant de passer à la caractérisation des arbres i-excellents, nous présentons un résultat obtenu par Fricke et al dans [16], au niveau duquel il est prouvé que tout arbre γ-excellent est un arbre i-excellent.

Théorème 2.17. *[16] Si T est un arbre γ-excellent, alors $\gamma(T) = i(T)$ et T est un arbre i-excellent.*

Notons que la réciproque de ce théorème n'est pas vraie, à savoir qu'un arbre i-excellent n'est pas nécessairement γ-excellent. En effet, prenons par exemple la double étoile $S_{p,p}$ avec $p \geq 2$, $S_{p,p}$ est i-excellente mais elle n'est pas γ-excellente. Notons aussi que le théorème précédent ne peut être étendu aux graphes bipartis complets. En effet, le graphe biparti complet $K_{p,p}$ avec $p \geq 3$, est γ-excellent et i-excellent.

Mais $\gamma(K_{p,p}) = 2 \neq i(K_{p,p}) = p$, et pour $3 < p < q$, $K_{p,q}$ est γ-excellent mais non i-excellent et de plus $\gamma(K_{p,q}) = 2 \neq i(K_{p,q}) = p$.

Dans [24] Haynes et Henning ont établi une caractérisation des arbres i-excellents en construisant la famille $\mathcal{I}$ des arbres i-excellents et ce en effectuant de manière récursive les deux opérations définies ci-dessous:

La famille $\mathcal{I}$: Soit $\mathcal{I}$ la famille d'arbres qui peuvent être obtenus à partir de la séquence d'arbres $T_1, ..., T_j$ $(j \geq 1)$ tels que T_1 est une double étoile $S_{p,p}$ avec $p \geq 1$ et $T = T_j$ et si $j \geq 2$, T_{i+1} peut être obtenu récursivement à partir de T_i pour $i = 1, ...j - 1$ à l'aide de l'une des deux opérations $\mathcal{I}_1$ et $\mathcal{I}_2$ definies comme suit:

Le statut d'un sommet v, noté sta(v), peut être A ou B. Initialement, sta$(v)= A$ si $v \in S(T_1)$ ($S(T_1)$ est l'ensemble des sommets support de T_1) et sta$(v)= B$ pour tout sommet pendant de T_1. Une fois qu'un statut est attribué à un sommet, ce statut demeure inchangé au cours des opérations de construction de l'arbre T.

Opération $\mathcal{I}_1$: T_{i+1} est obtenu à partir de T_i en ajoutant une étoile $S_{1,t}$ $(t \geq 1)$ de centre w, une arête wy où $y \in V(T_i)$ et sta$(y) = A$ et $t - 1$ sommets pendants adjacents à y. Poser sta$(w) = A$ et sta$(v) = B$ pour tout nouveau sommet pendant v.

Opération $\mathcal{I}_2$: T_{i+1} est obtenu à partir de T_i en ajoutant une double étoile $S_{t,t+1}$ et l'arête wy où w est le sommet de $S_{t,t+1}$ qui est adjacent à $t \geq 0$ sommets pendants et $y \in V(T_i)$ avec $\text{sta}(y) = B$. Poser $\text{sta}(v) = A$ si $v \in S(S_{t,t+1}) \cup \{w\}$ et $\text{sta}(v) = B$ pour chaque nouveau sommet pendant ajouté à T_i.

Il s'ensuit de cette construction le théorème qui donne une caractérisation des arbres i-excellents:

Théorème 2.18. *[24] Un arbre T est i-excellent si et seulement si $T \in \{K_1, K_2\}$ ou bien $T \in \mathcal{I}$*

2.3 Les arbres γ_t-excellents

On rappelle qu'un graphe $G = (V, E)$ est γ_t-excellent si tout sommet de V appartient à un $\gamma_t(G)$-ensemble. Partant de cette définition on peut voir que tout graphe complet est γ_t-excellent. Il en est de même pour tous les cycles ainsi que pour tous les graphes bipartis complets $K_{p,q}$ et ce quels que soient $p \geq 1$ et $q \geq 1$.

Nous présentons à présent quelques remarques et propositions concernant les graphes γ_t-excellents d'une manière générale, ensuite nous nous intéresserons à une classe particulière de graphes γ_t-excellents que sont les arbres.

Remarque 2.19. *[14] Tout sommet support d'un graphe G doit appartenir à tout $\gamma_t(G)$-ensemble.*

Proposition 2.20. *[14] Tout graphe H est un sous graphe induit d'un graphe γ_t-excellent.*

En effet, soit H un graphe. Considérons $G = H \circ K_2$ la 2-couronne de H, (la 2-couronne d'un graphe H étant le graphe obtenu à partir d'une copie de H dans laquelle tout sommmet de H est relié par une arête à un sommet d'un K_2). D'aprés l'observation 2.19, tout sommet support de G doit appartenir à tout $\gamma_t(G)$-ensemble et il doit aussi avoir au moins un voisin dans tout $\gamma_t(G)$-ensemble.

Ce qui permet d'affirmer que les ensembles $S(G) \cup L(G)$ et $S(G) \cup V(H)$ sont des $\gamma_t(G)$-ensembles, sachant que $S(G)$ (resp.$L(G)$) désigne l'ensemble des sommmets support (resp. l'ensemble des sommets pendants) de G.

Dans la figure 2.3, on peut voir la chaîne P_4 et la 2-couronne $P_4 \circ K_2$ de la chaîne P_4.

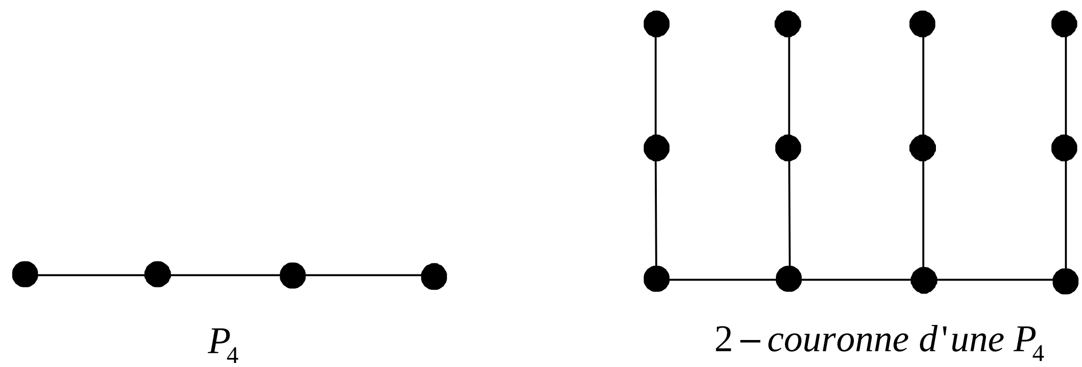


Figure 2.3 La chaîne P_4 et la $2-$couronne de P_4

Suite à cette proposition Dauterman a déduit le corollaire ci-aprés:

Corollaire 2.21. *[14] Il n'existe pas de caractérisation des graphes γ_t-excellents en terme de sous graphes induits interdits.*

Dans [14] Dauterman a montré une propositon concernant les chaînes γ_t-excellentes.

Proposition 2.22. *[14] Toute chaîne P_n avec $n = 3$ ou $n \equiv 2 \pmod 4$ est γ_t-excellente.*

2.3.1 Une caracterisation constructive des arbres γ_t-excellents

Dans [25], Henning a donné une caractérisation construtive des arbres γ_t-excellents. Avant de présenter cette caractérisation, nous présentons la famille $\mathcal{D}$ des arbres γ_t-excellents.

La famille $\mathcal{D}$: Soit $\mathcal{D}$ la famille d'arbres qui peuvent être obtenus à partir de la séquence d'arbres $T_1, ..., T_j$ $(j \geq 1)$ tels que T_1 est une étoile $S_{1,r}$, $r \geq 1$ et $T = T_j$ et si $j \geq 2$, T_{i+1} peut être obtenu récursivement à partir de T_i pour $i = 1, ..., j-1$ à l'aide de l'une des quatre opérations $\mathcal{D}_1$, $\mathcal{D}_2$, $\mathcal{D}_3$ et $\mathcal{D}_4$ définies ci-dessous.

Le statut d'un sommet v, noté $\text{sta}(v)$, peut être A, B ou C. Initialement, si $T_1 = K_2$, alors $\text{sta}(v) = A$ pour tout sommet v de T_1 et si $T_1 = K_{1,r}$ avec $r \geq 2$, alors $\text{sta}(v) = A$ pour le sommet central de T_1, $\text{sta}(v) = B$ pour tout sommet pendant de T_1 excepté pour un seul auquel le statut C est attribué. Une fois qu'un statut est attribué à un sommet, ce statut demeure inchangé au cours de la construction de l'arbre T sauf pour un sommet de statut C qui peut passer au statut A.

Opération $\mathcal{D}_1$: T_{i+1} est obtenu à partir de T_i en ajoutant la chaîne u, w', w, z et l'arête uy où $y \in V(T_i)$ et $\text{sta}(y) = A$. Poser $\text{sta}(u) = sta(w') = B$ et $\text{sta}(w) = sta(z) = A$.

Opération $\mathcal{D}_2$: T_{i+1} est obtenu à partir de T_i en ajoutant une étoile $S_{1,t}$ pour $t \geq 3$ de centre w telle que l'arête uw est subdivisée et en ajoutant aussi l'arête uy où $y \in V(T_i)$ avec $\text{sta}(y) = A$. Poser $\text{sta}(w) = A$, $\text{sta}(z) = C$ pour exactement un sommet pendant z adjacent à w et $\text{sta}(v) = B$ pour tout sommet v restant ayant été ajouté à T_i.

Opération $\mathcal{D}_3$: T_{i+1} est obtenu à partir de T_i en ajoutant la chaîne u, w, z et l'arête uy où $y \in V(T_i)$ et $\text{sta}(y) = B$. Poser $\text{sta}(u) = B$ et $\text{sta}(w) = sta(z) = A$. Si le sommet y' de statut A adjacent à y est adjacent à un sommet c de statut C et si y' n'est pas un support fort dans T, alors on change le statut du sommet c qui passe du statut C au statut A.

Opération $\mathcal{D}_4$: T_{i+1} est obtenu à partir de T_i en ajoutant une étoile $S_{1,t}$ pour $t \geq 3$ de centre w et l'arête uy où $y \in V(T_i)$ avec $\text{sta}(y) = B$ et u est un sommet adjacent à w. Poser $\text{sta}(w) = A$, $\text{sta}(z) = C$ pour exactement un sommet pendant z ($z \neq u$) adjacent à w et et $\text{sta}(v) = B$ pour tout sommet v restant ayant été ajouté à T_i. Si le sommet y' de statut A adjacent à y est adjacent à un sommet c de statut C, et si y' n'est pas un support fort dans T, alors on change le statut du sommet c qui passe du statut C au statut A.

Le principal résultat de ce paragraphe est le suivant:

Théorème 2.23. *[25] Un arbre non trivial T est γ_t-excellent si et seulement si $T \in \mathcal{D}$.*

2.3.2 Une autre caractérisation des arbres γ_t-excellents

Nous présentons dans le paragraphe qui suit une caractérisation des arbres γ_t-excellents laquelle caractérisation est basée sur le fait qu'un arbre T est γ_t-excellent si et seulement si l'ensemble de ses sommets qui n'appartiennent à aucun $\gamma_t\,(T)$-ensemble est un ensemble vide.

1− Les sommets contenus dans tout ou dans aucun γ_t-ensemble d'un arbre.

Dans [11], Cockayne, Henning, et Mynhardt, ont caracterisé pour un arbre T l'ensemble de ses sommets qui ne sont contenus dans aucun $\gamma_t\,(T)$-ensemble.

Avant de donner les résultats dûs à Cockayne, Henning, et Mynhardt, nous donnons d'abord les définitions et notations suivantes:

Définition 2.24. *[11] Dans un arbre T, On définit les ensembles $\mathcal{A}_t(T)$ et $\mathcal{N}_t(T)$ par:*

$\mathcal{A}_t(T) = \{v \in V \mid v \text{ est dans tout } \gamma_t(T)\text{-ensemble}\}$.

$\mathcal{N}_t(T) = \{v \in V \mid v \text{ n'est dans aucun } \gamma_t(T)\text{-ensemble}\}$.

Définition 2.25. *[11] On définit dans un arbre T enraciné en un sommet v, les ensembles suivants:*

- $L(v) = D(v) \cap L(T)$.
- $L^j(v) = \{u \in L(v) \mid d(u,v) \equiv j \pmod 4\}$ *et ce pour* $j = 0, 1, 2$ *ou* 3.

Pour un arbre T enraciné en un sommet v dans lequel $\deg_T(u) \leq 2\ \forall u \in V(T) - \{v\}$, les ensembles $\mathcal{A}_t(T)$ et $\mathcal{N}_t(T)$ sont caractérisés par le théorème suivant:

Théorème 2.26. *[11] Soit T un arbre enraciné en un sommet v avec $\deg_T(u) \leq 2\ \forall u \in V(T) - \{v\}$, alors:*

- $v \in \mathcal{A}_t(T)$ *si et seulement si v est un sommet support ou bien* $|L^1(v) \cup L^2(v)| \geq 2$.
- $v \in \mathcal{N}_t(T)$ *si et seulement si* $L^1(v) \cup L^2(v) = \emptyset$.

2– Processus d'élagage d'un arbre par rapport à la domination totale [11]

Nous décrivons à présent le procéssus d'élagage d'un arbre T qui permet de caractériser ses ensembles $\mathcal{A}_t(T)$ et $\mathcal{N}_t(T)$. Etant donné un sommet $u \in T$, on dit qu'on attache une chaîne de longueur q au sommet u si on joint par une arête le sommet u à un sommet pendant de la chaîne P_q.

Soit v un sommet de T qui n'est pas un sommet un support. L'élagage de l'arbre T est effectué par rapport au sommet racine. Supposons alors que l'arbre T est enraciné en un sommet v $(T = T_v)$. Si $\deg_T(u) \leq 2$ $\forall u \in V(T_v) - \{v\}$, alors $\bar{T}_v = T_v$. Sinon, soit w un sommet de $B(T)$ à distance maximum du sommet racine v, notons que $|C(w)| \geq 2$ et $\deg_T(x) \leq 2$ $\forall x \in D(w)$.

On applique alors le procéssus d'élagage suivant:

• Si $|L^2(w)| \geq 1$, effacer $D(w)$ et attacher une chaîne de longueur 2 à w.

• Si $|L^1(w)| \geq 1$, $L^2(w) = \emptyset$ et $|L^3(w)| \geq 1$, effacer $D(w)$ et attacher une chaîne de longueur 2 à w.

• Si $|L^1(w)| \geq 1$, $L^2(w) = L^3(w) = \emptyset$, effacer $D(w)$ et attacher une chaîne de longueur 1 à w.

• Si $L^1(w) = L^2(w) = \emptyset$ et $|L^3(w)| \geq 1$, effacer $D(w)$ et attacher une chaîne de longueur 3 à w.

• Si $L^1(w) = L^2(w) = |L^3(w)| = \emptyset$, effacer $D(w)$ et attacher une chaîne de longueur 4 à w.

Cette étape du procéssus d'élagage où tous les descendants du sommet w sont effacés et où une chaîne de longueur 1, 2, 3 ou 4 est attachée au sommet w pour donner un arbre dans lequel $deg(w) = 2$ est appelée l'élagage de T en w. On répète ce procèssus jusqu'à ce qu'un arbre $\bar{T}_v$, verifiant $\deg_T(x) \leq 2$ $\forall x \in \bar{T}_v - \{v\}$ soit obtenu. Pour simplifier les notations, nous écrirons $\bar{L}^j(v)$ au lieu de $L^j_{\bar{T}_v}(v)$.

Puisque l'arbre $\bar{T}_v$ vérifie les conditions du théorème 2.26, le résultat suivant devient évident:

Théorème 2.27. *[11] Soit v un sommet d'un arbre T, alors:*

- *$v \in \mathcal{A}_t(T)$ si et seulement si v est un sommet support ou $\left|\bar{L}^1(v) \cup \bar{L}^2(v)\right| \geq 2$.*
- *$v \in \mathcal{N}_t(T)$ si et seulement si $\bar{L}^1(v) \cup \bar{L}^2(v) = \varnothing$.*

2.4 Les arbres $\gamma_{\times 2}$-excellents

Un graphe $G = (V, E)$ est dit $\gamma_{\times 2}$-excellent si tout sommet de V est contenu dans un $\gamma_{\times 2}(G)$ ensemble. Avant d'énoncer les résultats relatifs aux arbres $\gamma_{\times 2}$-excellents, nous donnons quelques résultats concernant la domination double d'une manière générale.

Remarque 2.28. *[27] Dans un graphe tout ensemble dominant double contient tous les sommets support et tous les sommets pendants.*

Théorème 2.29. *[21] Tout graphe sans sommets isolés possède un ensemble dominant double et donc un nombre de domination double.*

Proposition 2.30. *[28] Tout graphe est un sous graphe induit d'un graphe $\gamma_{\times 2}$-excellent.*

Suite à cette proposition Khelifi a déduit le corollaire suivant:

Corollaire 2.31. *[28] Il n'existe pas de caractérisation des graphes $\gamma_{\times 2}$-excellents en terme de sous graphes induits interdits.*

2.4.1 Caractérisation des chaînes $\gamma_{\times 2}$-excellentes

Nous présentons dans ce paragraphe les résultats relatifs aux chaînes et chenilles $\gamma_{\times 2}$-excellentes.

Remarque 2.32. *[27] Pour toute chaîne P_n avec $n \geqslant 2$, on a*

$$\gamma_{\times 2}(P_n) = \begin{cases} 2n/3 + 1 & si\ n \equiv 0 (\mathrm{mod}\, 3) \\ 2\lceil n/3 \rceil & sinon \end{cases}$$

Remarque 2.33. *[27] La chaîne P_n avec $n \equiv 2 (\text{mod}\, 3)$ possède un dominant double minimum unique.*

Au vu de ces remarques Khelifi a caractérisé les chaînes $\boldsymbol{\gamma}_{\times 2}$-excellentes.

Proposition 2.34. *[28] Une chaîne P_n est $\boldsymbol{\gamma}_{\times 2}$-excellente si et seulement si $n = 2$ ou $n \equiv 0$ ou $1 (\text{mod}\, 3)$.*

2.4.2 Une caractérisation des arbres $\gamma_{\times 2}$-excellents

Nous présentons à présent une caractérisation des arbres $\gamma_{\times 2}$-excellents due à Blidia, Chellali et Khelifi [28] et [27]. Cette caractérisation est basée sur la détermination de l'ensemble des sommets n'appartenant à aucun $\gamma_{\times 2}$-ensemble d'un arbre.

1− Les sommets appartenant à tout ou à aucun $\gamma_{\times 2}$-ensemble d'un arbre:

Nous commençons tout d'abord par donner les définitions et résultats suivants:

Définition 2.35. *[28] Soit T un arbre enraciné en un sommet v, $P^j(w)$ est l'ensemble des sommets $u \in L(w)$ tels que $d(w,u) \equiv j (\text{mod}\, 3)$ et $\deg_T x = 2$ pour tout sommet intermédiaire x de la chaîne $w - u$ pour $j = 0, 1$ ou 2.*

Définition 2.36. *[28] Dans un arbre T, l'ensemble $\mathcal{A}_{\times 2}(T)$ (resp.$\mathcal{N}_{\times 2}(T)$) est l'ensemble des sommets de T qui sont contenus dans tout $\gamma_{\times 2}(T)$-ensemble (resp. dans aucun $\gamma_{\times 2}(T)$-ensemble).*

Lemme 2.37. *[28] et [27] Soient T' un arbre et v un sommet de T, et soit T l'arbre obtenu à partir de T' en attachant une chaîne P_3 à un sommet pendant u de l'arbre T' avec $v \notin N[u]$, alors:*

1. $\gamma_{\times 2}(T) = \gamma_{\times 2}(T') + 2.$
2. $v \in \mathcal{A}_{\times 2}(T)$ *si et seulement si* $v \in \mathcal{A}_{\times 2}(T')$.
3. $v \in \mathcal{N}_{\times 2}(T)$ *si et seulement si* $v \in \mathcal{N}_{\times 2}(T')$.

Définition 2.38. *[28] et [27] Soit T un arbre enraciné en un sommet v, on définit l'ensemble $W^*(T_v)$ par:*

$$W^*(T_v) = \{w^* \in C(v) \mid |P^2(w^*)| \geq 2 \text{ et } P^0(w^*) \cup P^1(w^*) = \varnothing\}.$$

Remarque 2.39. *[28] et [27] Soit T un arbre enraciné en v avec $|W^*(T_v) \geq 2|$, et $C(v) - W^*(v) \neq \varnothing$ et soit $w^* \in W^*(T_v)$, alors $v \in \mathcal{A}_{\times 2}(T_v)$ (resp.$\mathcal{N}_{\times 2}(T_v)$) si et seulement si $v \in \mathcal{A}_{\times 2}(T'_v)$ (resp.$\mathcal{N}_{\times 2}(T'_v)$) où $T'_v = T_v - \bigcup_{z \in W^*(T_v) - w^*} T_z$.*

Remarque 2.40. *[28] et [27] Soit T un arbre enraciné en v, soit $w^* \in W^*(T_v)$ avec $|P^2(w^*)| \geq 3$ alors $v \in \mathcal{A}_{\times 2}(T_v)$ (resp. $\mathcal{N}_{\times 2}(T_v)$) si et seulement si $v \in \mathcal{A}_{\times 2}(T'_v)$ (resp. $\mathcal{N}_{\times 2}(T'_v)$) où T'_v est l'arbre obtenu à partir de T_v en remplaçant $D(w^*)$ par une chaîne P_5 de centre w^*.*

Théorème 2.41. *[28] Soit T un arbre enraciné en v tel que* $\deg(u) \leq 2 \; \forall u \notin W^*(T) \cup \{v\}$ *alors:*

a) $v \in \mathcal{A}_{\times 2}(T)$ si et seulement si au moins une des conditions suivantes est vérifiée:

- *v est un sommet support dans T.*
- *v est un sommet pendant dans T.*
- $|P^1(v)| \geq 2$.
- $|P^0(v)| \geq 3$.
- $|P^1(v)| = 1$ *et* $|P^0(v)| \in \{1, 2\}$.
- $|P^1(v)| = 1, W^*(T) \neq \varnothing$ *et* $P^2(v) \cup P^0(v) = \varnothing$.
- $|P^0(v)| = 2$ *et* $|P^2(v)| \geq 1$.

b) $v \in .\mathcal{N}_{\times 2}(T)$ si et seulement si $|P^2(v)| \geq 2$ et $P^1(v) \cup P^0(v) = \varnothing$.

2− L'élagage d'un arbre par rapport à la domination double [28] et [27]

Nous décrivons à présent l'élagage propre à la domination double. Supposons que l'arbre T est enraciné en un sommet v qui n'est ni un sommet support, ni un sommet pendant. Si $\deg(x) \leq 2 \; \forall x \in (V(T) - W^*(T_v)) - \{v\}$, alors $\bar{T}_v = T_v$. Sinon, soit u un sommet de $B(T)$ à distance maximum de v. Notons que $|C(u)| \geq 2$ et $\deg_T(x) \leq 2$ $\forall x \in D(u)$.

Appliquer le procéssus d'élagage suivant:

- Si $|P^1(u)| \geq 1$, effacer $D(u)$ et attacher une chaîne P_1 (un sommet) à u.
- Si $|P^2(u)| \geq 1$, $|P^0(u)| \geq 1$ et $P^1(u) = \emptyset$, effacer $D(u)$ et attacher une chaîne P_1 à u.
- Si $|P^2(u)| \geq 2$ et $P^0(u) \cup P^1(u) = \emptyset$, alors
  - si $u \in C(v)$, effacer $D(u)$ et attacher deux chaînes P_2 à u.
  - si $d(v,u) = 2$ et $p(u) \notin B(T)$, effacer $D(u)$ et attacher une chaîne P_2 à u.
  - si $d(v,u) \neq 2$ ou bien $p(u) \in B(T)$, effacer $D[u]$.
- Si $|P^0(u)| \geq 2$ et $P^1(u) \cup P^2(u) = \emptyset$, effacer $D(u)$ et attacher une chaîne P_3 à u.

Il s'ensuit de tout ce qui a été developpé dans ce paragraphe le théorème qui donne une caractérisation des arbres $\gamma_{\times 2}$-excellents.

Théorème 2.42. *[28] et [27] Soit v un sommet d'un arbre T, alors*

- *$v \in \mathcal{A}_{\times 2}(T)$ si et seulement si $v \in \mathcal{A}_{\times 2}(\bar{T}_v)$.*
- *$v \in \mathcal{N}_{\times 2}(T)$ si et seulement si $v \in \mathcal{N}_{\times 2}(\bar{T}_v)$.*

Ayant caractérisé l'ensemble $\mathcal{N}_{\times 2}(T)$ pour un arbre T quelconque, alors la caractérisation des arbres $\gamma_{\times 2}$-excellents est équivalente à ce que cet ensemble soit vide.

Corollaire 2.43. *[28] Un arbre T est $\gamma_{\times 2}$-excellent si et seulement si pour tout $v \in T$, $|P^2(v)| \leq 1$ ou $P^1(v) \cup P^0(v) \neq \emptyset$ dans l'arbre élagué $\bar{T}_v$.*

2.5 Les graphes γ_{pr}-excellents

On rappelle qu'un graphe $G = (V, E)$ est dit γ_{pr}-excellent si tout sommet de V est contenu dans un $\gamma_{pr}(G)$-ensemble. Avant d'énnoncer les résultats relatifs aux arbres γ_{pr}-excellents, nous donnons des résultats et définitions concernant les graphes γ_{pr}-excellents d'une manière générale.

Proposition 2.44. *[28] Tout graphe est un sous graphe induit d'un graphe γ_{pr}-excellent.*

Corollaire 2.45. *[28] Il n'existe pas de caractérisation des graphes γ_{pr}-excellents en terme de sous graphes induits interdits.*

2.5.1 Caractérisation des chaines γ_{pr}-excellentes

Remarque 2.46. *[28] Pour toute chaîne,* $\gamma_{pr}(P_n) = 2\lceil \frac{n}{4} \rceil$ *et de plus on a:*

- $\gamma_{pr}(P_n) = \frac{n}{2}$ si $n \equiv 0 \pmod 4$.
- $\gamma_{pr}(P_n) = \frac{n+3}{2}$ si $n \equiv 1 \pmod 4$.
- $\gamma_{pr}(P_n) = \frac{n+2}{2}$ si $n \equiv 2 \pmod 4$.
- $\gamma_{pr}(P_n) = \frac{n+1}{2}$ si $n \equiv 3 \pmod 4$.

Proposition 2.47. *[28] Une chaîne P_n est γ_{pr}-excellente si et seulement si $n = 3$ ou $n \equiv 1$ ou $2 \pmod 4$*

2.5.2 Une caractérisation des arbres γ_{pr}-excellents

1− Les sommets appartenant à tout ou à aucun γ_{pr}-ensemble d'un arbre

Nous commençons tout d'abord par donner les définitions et résultats suivants:

Définition 2.48. *[28] et [29] On définit les ensembles $\mathcal{A}_{pr}(G)$ et $\mathcal{N}_{pr}(G)$ d'un graphe G par:*

$$\mathcal{A}_{pr}(G) = \left\{v \in V \mid v \text{ est dans tout } \gamma_{pr}(G)\text{-ensemble}\right\}.$$
$$\mathcal{N}_{pr}(G) = \left\{v \in V \mid v \text{ n'est dans aucun } \gamma_{pr}(G)\text{-ensemble}\right\}.$$

Définition 2.49. *[28] et [29] Soit T un arbre enraciné. Pour tout sommet v de T, on définit l'ensemble: $L^j(v) = \{u \in L(v)/\ d(u,v) \equiv j \pmod 4\}$ et ce pour $j = 0, 1, 2$ ou 3.*

Lemme 2.50. *[28] Soient T' un arbre et $v \in V(T')$. Soit u' un sommet de T' tel que $N(u') - \{v\} \neq \emptyset$. Soit T l'arbre obtenu de T' en attachant une chaîne P_4 au sommet u'. Alors:*

- *$v \in \mathcal{A}_{pr}(T')$ si et seulement si $v \in \mathcal{A}_{pr}(T)$.*
- *$v \in \mathcal{N}_{pr}(T')$ si et seulement si $v \in \mathcal{N}_{pr}(T)$.*

2– L'élagage d'un arbre par rapport à la domination couplée [28] et [29]

Supposons que l'arbre T est enraciné en un sommet v $(T = T_v)$ (v n'est pas un sommet support). Si $\deg_T(u) \leq 2$ pout tout sommet $u \in V(T) - \{v\}$, alors $\bar{T}_v = T_v$. Sinon, soit w un sommet de $B(T)$ à distance maximum de v. Notons que $|C(w)| \geq 2$ et $\deg_T(x) \leq 2$; $\forall x \in D(w)$.

Appliquer le procéssus d'élagage suivant:

- Si $|L^2(w)| \geq 1$, effacer $D(w)$ et attacher une chaîne P_2 à w.
- Si $|L^1(w)| \geq 1$, et $L^2(w) = \emptyset$, effacer $D(w)$ et attacher une chaîne P_1 à w.
- Si $|L^3(w)| \geq 1$, et $L^1(w) \cup L^2(w) = \emptyset$, effacer $D(w)$ et attacher une chaîne P_3 à w.
- Si $L^1(w) \cup L^2(w) \cup L^3(w) = \emptyset$, effacer $D(w)$ et attacher une chaîne P_4 à w.

Cette étape du procéssus d'élagage où tous les descendants de w sont effacés et où une chaîne P_1, P_2, P_3 ou P_4 est attachée au sommet w pour donner un arbre dans lequel $deg(w) = 2$ est appelée un l'élagage de T en w. On répète ce processus jusqu'à ce qu'un arbre $\bar{T}_v$ avec $\deg(x) \leq 2$ $\forall x \in \bar{T}_v - \{v\}$ soit obtenu.

Aprés avoir explicité le procéssus d'élagage propre à la domination couplée, nous donnons le théorème et le corollaire suivants qui constituent une caractérisation des arbres γ_{pr}-excellents.

Théorème 2.51. *[28] et [29] Soit v un sommet d'un arbre T, alors:*

- *$v \in \mathcal{A}_{pr}(T)$ si et seulement si $v \in \mathcal{A}_{pr}(\bar{T}_v)$.*
- *$v \in \mathcal{N}_{pr}(T)$ si et seulement si $v \in \mathcal{N}_{pr}(\bar{T}_v)$.*

Corollaire 2.52. *[28] T est un arbre $\gamma_{pr}(T)$-excellent si et seulement si il n'existe aucun sommet v de T vérifiant $|L^3(v)| = 0$ ou $L^1(v) \cup L^2(v) \neq \emptyset$ dans l'arbre $\bar{T}_v$obtenu par l'élagage de l'arbre T enraciné en v.*

2.6 Quelques problèmes ouverts

Nous concluons ce chapitre par la présentation de quelques problèmes ouverts concernant les graphes μ-excellents d'une manière générale.

- Caractériser par une approche déscriptive ou constructive les arbres excellents par rapport à d'autres paramètres de domination.

- Etudier la famille des graphes μ-recommandables, μ-indésirables ou μ-justes pour un paramètre de domination donné μ.

CHAPITRE 3

Les graphes γ_L-excellents

Au vu des résultats relatifs aux arbres μ-excellents, qui ont été exposés dans le **chapitre 2**, nous nous sommes intéréssés à l'étude des arbres γ_L-excellents. Nous exposons dans ce chapitre les résultats que nous avons obtenus.

Nous commençons par le rappel de la notion d'ensemble dominant localisateur, qui sera suivie d'un résumé succint des résultats connus dans ce domaine. La deuxième section est consacrée à la caractérisation des chaînes et chenilles γ_L-excellentes. Nous clorons ce chapitre par une caractérisation des arbres γ_L-excellents.

3.1 Dominant localisateur et résultats connus

Dans ce paragraphe, nous rappelons la notion d'ensemble dominant localisateur qui a été introduite par P.J. Slater dans [33], et nous résumons les résultats existant sur la domination localisateur.

On rappelle qu'un ensemble $S \subseteq V$ est un ensemble dominant localisateur d'un graphe $G = (V, E)$ qu'on note en abrégé E.D.L, si S est un dominant de G et si de plus pour toute paire de sommets v et w de $V - S$, $N(v) \cap S \neq N(w) \cap S$. Le nombre de domination localisateur noté $\gamma_L(G)$ est la taille minimale d'un E.D.L de G. Un E.D.L de G de taille minimale est dit un $\gamma_L(G)$-ensemble.

Dans la figure 3.1, $S = \{b, e\}$ est un dominant localisateur minimum du graphe G. En effet $N(a) \cap S = \{b, e\}$, $N(c) \cap S = \{b\}$, et $N(d) \cap S = \{e\}$.

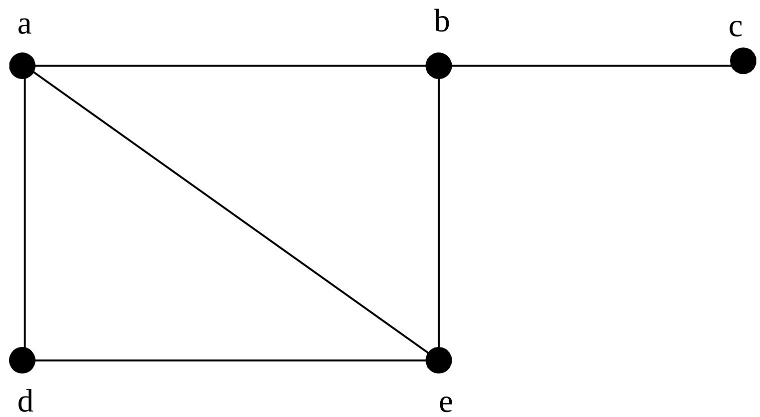


Fig 3.1 Un graphe G avec un dominant localisateur minimum $\{b, e\}$

Théorème 3.1. *[33] Pour tout graphe G, on a $\gamma_L(G) \geq \gamma(G)$.*

Lemme 3.2. *[33] Soient S un E.D.L de G et u, v deux sommets de $V(G)$ tels que:*

1. *Si $uv \notin E(G)$ alors $N(v) = N(u)$*

2. *Si $uv \in E(G)$ alors $N[v] = N[u]$,*

alors S contient au moins un des deux sommets u et v.

A partir du lemme 3.2, on peut voir que $\gamma_L(K_{1,p}) = p$, alors que $\gamma(K_{1,p}) = 1$.

Théorème 3.3. *[33] Si G_1, $G_2, ..., G_k$ sont les composantes connexes d'un graphe G, alors on a $\gamma_L(G) = \gamma_L(G_1) + \gamma_L(G_2) + ... + \gamma_L(G_k)$.*

Pour tout graphe G d'ordre n, $\gamma_L(G) = n$ si et seulement si $G = \overline{K_n}$.

Pour tout graphe G d'ordre n, $\gamma_L(G) = n - 1$ si et seulement si G est un graphe complet, ou une étoile.

Le théorème suivant donne la valeur exacte de γ_L pour un graphe biparti complet $K_{p,q}$ et pour un graphe multiparti complet $K_{s_1,s_2...,s_k}$.

Théorème 3.4. *[33] Si* $2 < p < q$, *alors on a* $\gamma_L(K_{p,q}) = p + q - 2$, *par conséquent si* $s = s_1 + s_2 + ... + s_k$ *où* $2 \leq s_1 \leq s_2 \leq ... \leq s_k$, *alors on a* $\gamma_L(K_{s_1,s_2,...,s_k}) = s - k$.

Théorème 3.5. *[33] Si pour un graphe* G *d'ordre* n, $\gamma_L(G) = h$, *alors on a* $n \leq h + 2^h - 1$.

Ce thèorème peut être utilisé pour trouver les graphes G avec $\gamma_L(G) = 1$, donc $G = K_1$ ou K_2, ou avec $\gamma_L(G) = 2$, donc $G = P_3$, P_4, P_5 ou C_5.

Le résultat suivant donne une amélioration de la borne du théorème 3.5 dans certains cas.

Théorème 3.6. *[33] Si pour un graphe* G *d'ordre* n *et de degré* Δ, $\gamma_L(G) = h$, *alors* $n \leq h + \sum\limits_{i=1}^{\Delta} \binom{h}{i}$.

En effet soit v un sommet de $V(G)$ de degré maximum Δ, et soit S un $\gamma_L(G)$-ensemble avec $|S| = h$. Si $v, u \in V(G) - S$, comme $S \cap N(v) \neq S \cap N(u)$, alors $|V(G) - S| \leq \binom{h}{1} + \binom{h}{2} + ... + \binom{h}{\Delta}$.

Une relation du type **Nordhaus-Gaddum** pour le nombre de domination localisateur est donnée par le théorème suivant:

Théorème 3.7. *[33] Si* G *est un graphe d'ordre* $n \geq 2$, *alors on a* $\gamma_L(G) + \gamma_L(\overline{G}) \leq 2n - 1$ *et* $\gamma_L(G) \times \gamma_L(\overline{G}) \leq n(n-1)$.

Les théorèmes 3.8, et 3.9, établissent une relation d'ordre entre $\gamma_L(G)$ et la somme des degrés rangés par ordre croissant, des sommets du graphe G.

Théorème 3.8. *[32] Si* G *est un graphe d'ordre* n *tel* $d_i \geq d_{i+1}$, $(d_k = \deg(v_k))$, *pour tout* $i \in \{1, 2, ..., n-1\}$, *alors on a* $\gamma_L(G) \geq \min\{k : k + (d_1 + d_2 + ... + d_k) \geq n\}$.

Théorème 3.9. *[32] Si* G *est un graphe d'ordre* n *tel* $d_i \geq d_{i+1}$, $(d_k = \deg(v_k))$, *pour tout* $i \in \{1, 2, ..., n-1\}$, *alors on a* $\gamma_L(G) \geq \min\{k : 3k + (d_1 + d_2 + ... + d_k)/2 \geq n\}$.

Le théorème suivant donne la valeur exacte de γ_L pour les chaînes et les cyles.

Théorème 3.10. *[33] Soit P_n une chaîne (resp. C_n un cycle) d'ordre n avec $n = 5k + r$ alors on a:*

- $\gamma_L(P_n) = 2k = \gamma_L(C_n)$ *si* $r = 0$.
- $\gamma_L(P_n) = \gamma_L(C_n) = 2k + 1$ *si* $r = 1$ *ou* 2.
- $\gamma_L(P_n) = \gamma_L(C_n) = 2k + 2$ *si* $r = 3$ *ou* 4.

Dans [33], Slater a montré que tout γ_L-ensemble d'un arbre T d'ordre n contient plus de $\dfrac{n}{3}$ sommets de T.

Théorème 3.11. *[33] Pour un arbre T d'ordre n, on a $\gamma_L(T) > \frac{n}{3}$.*

3.2 Caractérisation des chaînes γ_L-excellentes.

3.2.1 Caractérisation des chaînes γ_L-excellentes

Notre première remarque concerne les chaînes P_n d'ordre $n = 5k$.

Remarque 3.12. *La chaîne P_n avec $n \equiv 0 \pmod 5$ possède un γ_L-ensemble unique, et il ne contient aucun de ses deux sommets pendants.*

Preuve. Supposons que la chaîne $P_n = v_1, v_2, ..., v_n$ avec $n = 5k$, possède un γ_L-ensemble S contenant le sommet pendant v_1. On peut supposer que $v_2 \notin S$, sinon remplacer v_2 par v_3, alors $S - \{v_1\}$ est un $E.D.L$ de la chaîne $C' = v_3, ..., v_n$ d'ordre $n' = n - 2 = 5(k-1) + 3$. Comme $|S - \{v_1\}| = 2k - 1$ et $\gamma_L(C') = 2(k-1) + 2 = 2k$ d'après le théorème 3.10, alors $|S - \{v_1\}| < \gamma_L(C')$ d'où la contradiction. Donc la chaîne P_{5k} n'est pas γ_L-excellente. Il est clair que P_5 admet un unique γ_L-ensemble. Supposons que P_{5k} admet un γ_L-ensemble unique S, et montrons la propriété est vraie pour $P_{5(k+1)}$. Comme S est unique et, $\gamma_L(P_{5(k+1)}) = 2 \times (k+1) = \gamma_L(P_{5k}) + 2 = |S| + 2$, il est clair que $P_{5(k+1)}$ admet un γ_L-ensemble unique. □

Définition 3.13. *On dit qu'on attache une chaîne P_5 à un sommet u d'un graphe, si on relie u à un des sommets pendants de la chaîne P_5.*

Suite à cette définition nous faisons la remarque suivante:

Remarque 3.14. *Soit C la chaîne obtenue en attachant une chaîne P_5 à l'un des sommets pendants d'une chaîne C', alors on a $\gamma_L(C) = \gamma_L(C') + 2$.*

Preuve. Soient $C' = v_1, ..., v_k$ la chaîne constituée de k sommets et

$$C = v_1, ..., v_k, v_{k+1}, ..., v_{k+5}$$

la chaîne obtenue en attachant la chaîne $P_5 = (v_{k+1}, v_{k+2}, v_{k+3}, v_{k+4}, v_{k+5})$ au sommet v_k de C'. Soit S' un $\gamma_L(C')$-ensemble, alors $S = S' \cup \{v_{k+2}, v_{k+4}\}$ est un $E.D.L$ de C, donc $\gamma_L(C) \leq \gamma_L(C') + 2$. D'autre part soit S un $\gamma_L(C)$-ensemble, si $v_k \in S$, alors $S' = S \cap C'$ est un $E.D.L$ de C'. D'où $\gamma_L(C') \leq \gamma_L(C) - 2$. Si $v_k \notin S$ et $v_{k+1} \notin S$, alors $\{v_{k+2}, v_{k+4}\} \subset S$ donc $S' = S \cap C'$ est un $E.D.L$ de C'. Si $v_k \notin S$ et $v_{k+1} \in S$, alors $S' = (S - \{v_{k+1}, v_{k+3}, v_{k+5}\}) \cup \{v_k\}$ est un $E.D.L$ de C'. Dans tous les cas $|S'| = |S| - 2$ donc $\gamma_L(C') \leq \gamma_L(C) - 2$. Par conséquent, $\gamma_L(C) = \gamma_L(C') + 2$. □

La propositon suivante donne une caractérisation des chaînes γ_L-excellentes.

Proposition 3.15. *La chaîne P_n est γ_L-excellente si et seulement si $n = 4$, ou $n \equiv 1$ ou $3 \pmod 5$.*

Preuve. Pour montrer qu'une chaîne P_n avec $n = 5k + 1$ est γ_L-excellente nous procédons par induction sur le nombre de sommets de la chaîne P_n. Il est clair que les chaînes P_2, P_3, P_4, P_6 sont γ_L-excellentes. Supposons que la chaîne $C' = v_1, v_2, ..., v_n$ avec $n = 5k+1$ est γ_L-excellente et, montrons que la chaîne $C = v_1, v_2, ..., v_n, v_{n+1}, v_{n+2}, v_{n+3}, v_{n+4}, v_{n+5}$ d'ordre $5(k+1) + 1$ l'est aussi.

Suite à la remarque 3.14, tout $\gamma_L(C')$-ensemble peut être étendu à un $\gamma_L(C)$-ensemble en lui ajoutant les sommets v_{n+2}, v_{n+4}. Comme la chaîne C'est γ_L-excellente donc tous les sommets de C' sont dans au moins un $\gamma_L(C)$-ensemble. Il reste à montrer que les sommets $v_{n+1}, v_{n+3}, v_{n+5}$ sont dans au moins un $\gamma_L(C)$-ensemble. Soit la chaîne $C_1 = v_1, v_2, ..., v_{n-2}, v_{n-1}$ formée de $5k$ sommets, d'aprés la remarque 3.12, C_1 possède un $\gamma_L(C_1)$-ensemble unique S_1 tel que le sommet $v_{n-2} \in S_1$. Soit $S = S_1 \cup \{v_{n+1}, v_{n+3}, v_{n+5}\}$, alors S est un $E.D.L$ de C avec $|S| = |S_1| + 3 = 2k + 3 = \gamma_L(C)$.

Donc les sommets $v_{n+1}, v_{n+3}, v_{n+5}$ sont contenus dans un $\gamma_L(C)$-ensemble d'où la chaîne C est γ_L-excellente et donc la chaîne P_n avec $n \equiv 1 \pmod 5$ est γ_L-excellente. On montre en utilisant les mêmes arguments que la chaîne P_n avec $n \equiv 3 \pmod 5$ est γ_L-excellente. A l'inverse, montrons que la chaîne P_n avec $n \equiv 0$, 2 ou $4 \pmod 5$ n'est pas γ_L-excellente. D'aprés la remarque 3.12, si $n \equiv 0 \pmod 5$ la chaîne P_n possède un γ_L-ensemble unique, donc elle n'est pas γ_L-excellente.

Pour montrer que la chaîne C avec $n \equiv 2 \pmod 5$ n'est pas γ_L-excellente, nous montrons que le troisième sommet de C n'appartient à aucun $\gamma_L(C)$-ensemble. On voit que la chaîne P_7 n'est pas γ_L-excellente car le troisième sommet d'un P_7 n'appartient à aucun $\gamma_L(P_7)$-ensemble. Supposons que le sommet v_3 de la chaîne $C = v_1, v_2, v_3, ..., v_n$ avec $n = 5k + 2$ est contenu dans un $\gamma_L(C)$-ensemble S. Soit $C_1 = v_5, v_6, ..., v_n$, la chaîne formée de $n = 5(k-1) + 3$ sommets alors $S_1 = S \cap C_1$ est un $E.D.L$ de C_1, avec $|S_1| = \gamma_L(C) - 2 = 2k - 1 < \gamma_L(C_1) = 2(k-1) + 2$ d'où la contradiction. Donc la chaîne P_n avec $n \equiv 2 \pmod 5$ n'est pas γ_L-excellente.

Pour montrer que la chaîne C avec $n \equiv 4 \pmod 5$ n'est pas γ_L-excellente, nous montrons que le cinquième sommet de C n'appartient à aucun $\gamma_L(C)$-ensemble. On voit que la chaîne P_9 n'est pas γ_L-excellente car le cinquième sommet de P_9 n'est dans aucun $\gamma_L(P_9)$-ensemble. Supposons que le cinquième sommet v_5 de la chaîne $C = v_1, v_2, v_3, ..., v_n$ avec $n = 5k + 4$ est contenu dans un $\gamma_L(C)$-ensemble S. Soit $C_1 = v_7, v_8, ..., v_n$ la chaîne formée de $n = 5(k-1) + 3$ sommets, alors $S_1 = S \cap C_1$ est un $E.D.L$ de C_1, avec $|S_1| = \gamma_L(C) - 2 = 2k - 1 < \gamma_L(C_1) = 2(k-1) + 2$, d'où la contradiction. Donc la chaîne P_n avec $n \equiv 4 \pmod 5$ n'est pas γ_L-excellente. $\square$

3.3 Caractérisation des arbres γ_L-excellents

Nous présentons dans cette section une caractérisation des arbres γ_L-excellents. Cette caractérisation est basée sur la détermination de l'ensemble des sommets n'appartenant à aucun $\gamma_L(T)$-ensemble.

1· Les sommets contenus dans tout ou dans aucun γ_L-ensemble d'un arbre

Nous commençons par introduire les définitions suivantes :

Définition 3.16. *Pour un graphe T on définit les ensembles $\mathcal{A}_L(T)$ et $\mathcal{N}_L(T)$ par:*

$\mathcal{A}_L(T) = \{v \in V \mid v \text{ est dans tout } \gamma_L(T)\text{-ensemble}\}$.

$\mathcal{N}_L(T) = \{v \in V \mid v \text{ n'est dans aucun } \gamma_L(T)\text{-ensemble}\}$.

Définition 3.17. *Pour un sommet v d'un arbre enraciné T, nous définissons l'ensemble $L^j(v) = \{u \in L(v) \mid d(u,v) \equiv j \pmod 5\}$ et ce pour $j = 0, 1, 2, 3, 4$.*

Avant d'énoncer un lemme qui nous sera utile par la suite, nous faisons les remarques suivantes.

Remarque 3.18. *Si T est un arbre de diamètre au moins 2 et y un sommet de $L(T)$, alors il existe un $\gamma_L(T)$-ensemble qui ne contient pas le sommet y.*

Remarque 3.19. *Pour toue chaîne non trivale P_n, $L(P_n) \subseteq \mathcal{N}_L(P_n)$ si et seuleument si* $n \equiv 0 (\mathrm{mod}\, 5)$.

Lemme 3.20. *[34] Soient T' un arbre et v un sommet de $V(T')$. Soit u un sommet de T' tel que $u \neq v$, et soit T l'arbre obtenu à partir de T' en ajoutant une chaîne*

$$P_5 = \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5\}$$

et l'arête ux_1 Alors:

(1) $\gamma_L(T) = \gamma_L(T') + 2$.

(2) $v \in \mathcal{A}_L(T')$ *si et seulement si* $v \in \mathcal{A}_L(T)$.

(3) $v \in \mathcal{N}_L(T')$ *si et seulement si* $v \in \mathcal{N}_L(T)$.

Preuve. Soit T l'arbre obtenu à partir de T' en lui ajoutant la chaîne $P_5 = (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)$ et l'arête ux_1.

(1) Tout $\gamma_L(T')$ peut être étendu à un $E.D.L$ de T en lui ajoutant les sommets x_2 et x_4, ainsi $\gamma_L(T) \leq \gamma_L(T') + 2$. D'autre part, soit S un $\gamma_L(T)$-ensemble. Si $u \in S$, il est clair que $|S \cap P_5| = 2$ et que $S' = S \backslash S \cap P_5$ est un $E.D.L$ de T' avec $|S'| = \gamma_L(T) - 2 \geq \gamma_L(T')$. Si $u \notin S$ et si $x_1 \notin S$, alors il est clair que $|S \cap P_5| = 2$ et de même, $S' = S - (S \cap P_5)$ est un $E.D.L$ de T' avec $|S'| = \gamma_L(T) - 2 \geq \gamma_L(T')$. Si $x_1 \in S$, alors $|S \cap P_5| = 3$. Soit $S' = (S - (S \cap P_5)) \cup \{u\}$ alors S' est un $E.D.L$ de T' avec $|S'| = \gamma_L(T) - 3 + 1 = \gamma_L(T) - 2$. Ainsi dans tous les cas, on a $\gamma_L(T) \geq \gamma_L(T') + 2$ et par conséquent $\gamma_L(T) = \gamma_L(T') + 2$.

(2) Supposons que $v \notin \mathcal{A}_L(T')$, soit S' un $\gamma_L(T')$-ensemble ne contenant pas v, alors $S = S' \cup \{x_1, x_2\}$ est un $\gamma_L(T)$-ensemble d'après (1) et comme $v \notin S$, alors $v \notin \mathcal{A}_L(T)$. Réciproquement, supposons que $v \in \mathcal{A}_L(T')$, soit alors S un $\gamma_L(T)$-ensemble quelconque.

1°/ Si $u \in S$, alors $S' = S \cap V(T')$ est un $E.D.L$ de T' avec $|S'| = \gamma_L(T) - 2$ donc S' est un $\gamma_L(T')$-ensemble et vu que $v \in \mathcal{A}_L(T')$ alors $v \in S'$ et donc $v \in S$ et donc $v \in \mathcal{A}_L(T)$.

2°/ Si $u \notin S$, alors en considérant les ensembles S' et S définis dans (1), on peut conclure que $v \in \mathcal{A}_L(T)$.

(3) Supposons que $v \notin \mathcal{N}_L(T')$, soit S' un $\gamma_L(T')$-ensemble contenant v, alors $S = S' \cup \{x_2, x_4\}$ est un $\gamma_L(T)$-ensemble contenant v donc $v \notin \mathcal{N}_{L.}(T)$.

Réciproquement supposons que $v \in \mathcal{N}_L(T')$, en suivant la même démarche que dans (1), nous aurons que $S \cap V(T')$ ou $(S \cap V(T')) \cup \{u\}$ sont des $\gamma_L(T')$-ensemble ne contenant pas v et comme $v \neq u$, donc $v \notin S$ où S est un $\gamma_L(T)$-ensemble quelconque, par conséquent $v \in \mathcal{N}_{L.}(T)$. $\square$

2· Elagage d'un arbre par rapport à la domination localisatrice.

Dans le but de caractériser les ensembles $\mathcal{A}_L(T)$ et $\mathcal{N}_{L.}(T)$ pour un arbre non trivial T, nous appliquons la technique de l'élagage. Soit v un sommet d'un arbre non trivial T qui n'est pas un sommet support. En utilisant le procéssus d'élagage que nous decrivons ci-dessous, l'arbre T_v enraciné en v est transformé en un arbre $\overline{T_v}$ dans lequel tout sommet autre que v est au plus de degré deux. Les propriétés d'appartenance du sommet v aux ensembles $\mathcal{A}_L(T)$ ou $\mathcal{N}_L(T)$ seront préservéés dans $\overline{T_v}$.

Soit $T = T_v$ un arbre non trivial enraciné en un sommet v, si tout sommet u, $u \neq v$, est au plus de degré 2, alors $\overline{T}_v = T_v$. Sinon, soit w un sommet branche de T_v à distance maximum de v, notons que $|C(w)| \geq 2$ et $\deg_{Tv}(x) \leq 2$, $\forall x \in D(w)$, appliquer alors le procéssus suivant:

(a) Si $|L^1(w)| \geq 1$, effacer $D(w)$ et attacher une chaîne P_1 à w.

(b) Si $|L^1(w)| = 0$ et $|L^3(w)| \geq 1$, effacer $D(w)$ et attacher une chaîne P_3 à w.

(c) Si $|L^1(w) \cup L^3(w)| = 0$ et $|L^4(w)| \geq 1$, effacer $D(w)$ et attacher une chaîne P_4 à w.

(d) Si $|L^1(w) \cup L^3(w) \cup L^4(w)| = 0$ et $|L^2(w)| \geq 2$, effacer $D(w)$ et attacher une chaîne P_4 à w.

(e) Si $|L^1(w) \cup L^3(w) \cup L^4(w)| = 0$ et $|L^2(w)| = 1$, effacer $D(w)$ et attacher une chaîne P_2 à w.

(f) Si $|L^1(w) \cup L^2(w) \cup L^3(w) \cup L^4(w)| = 0$ et $|L^0(w)| \geq 2$, effacer $D(w)$ et attacher une chaîne P_5 à w.

Pour la compréhension de cette technique, nous donnons l'exemple illustratif suivant.

Soit T l'abre de la figure 3.4.(a), les sommets x, y, z, t, u, et w sont les sommets branche de T, tels que z est à distance maximum de v. Vu que $|L^1(z)| = 2$, on éfface $D(z)$ et on attache une chaîne P_1 à z, (voir fig 3.4.(b)). A cette étape y est le sommet branche à distance maximum de v. Vu que $|L^1(y)| = 0$, et $|L^3(y)| = 1$, on éfface $D(y)$ et on attache une chaîne P_3 à y, (voir fig 3.4.(c)). Maintenant tous les sommets branche x, t, u, w sont à égale distance de v. Vu que $|L^1(x) \cup L^3(x)| = |L^1(t) \cup L^3(t)| = 0$ et $|L^2(x) \cup L^4(x)| = |L^2(t) \cup L^4(t)| = 2$, $|L^1(u)| = 0$ et $|L^3(u)| = 1$, et $|L^1(w)| = 1$. On éfface $D(x)$ et on attache une chaîne P_4 à x, on éfface $D(t)$ et on attache une chaîne P_4 à t, on éfface $D(u)$ et on attache une chaîne P_3 à u, et on éfface $D(w)$ et on attache une chaîne P_1 à w, (voir fig 3.4.(d)). A présent v est l'unique sommet branche, et par l'application du lemme 3.20, on peut supprimer les deux chaînes P_5 attachées à v. Finalement on obtient un arbre élagué $\overline{T_v}$ dans lequel $\deg_{\overline{T_v}}(u) \leq 2$ pour tout sommet $u \in V(\overline{T_v}) - \{v\}$, (voir fig 3.4.(e)). Comme $|L^1(v) \cup L^3(v)| = 0$ et $|L^2(v) \cup L^4(v)| = 3$, alors d'aprés le lemme 3.22, $v \in \mathcal{N}_{L.}(\overline{T_v})$, et d'aprés le théorème 3.23, $v \in \mathcal{N}_{L.}(T)$ donc T est un arbre non γ_L-excellent.

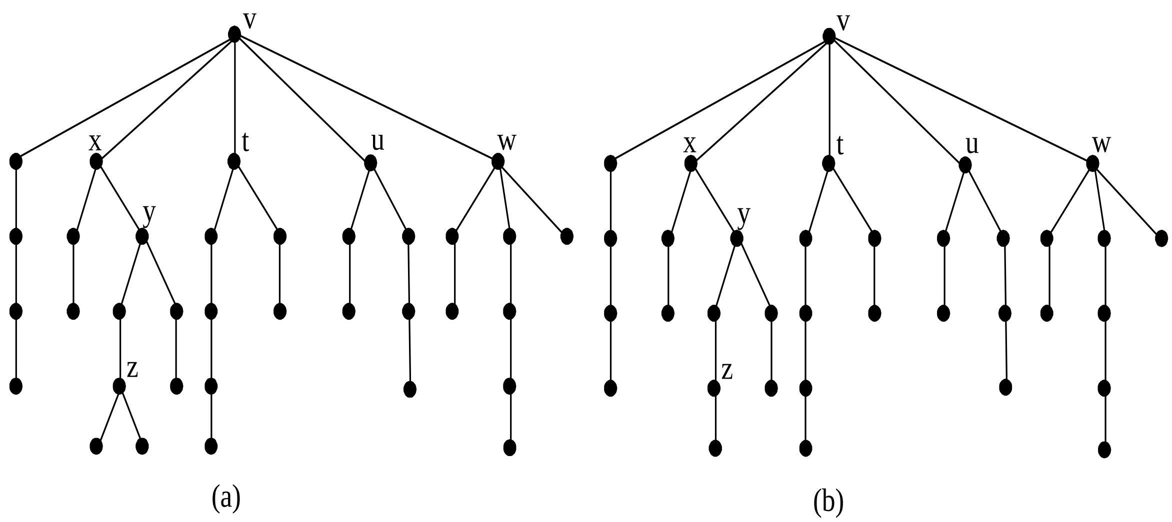


fig 3.4 (a), (b).

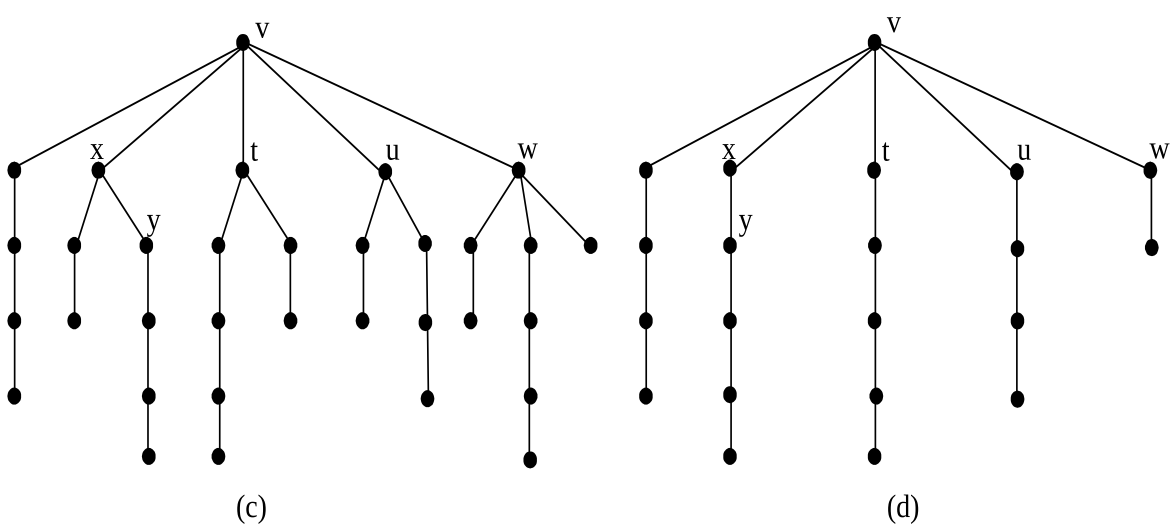
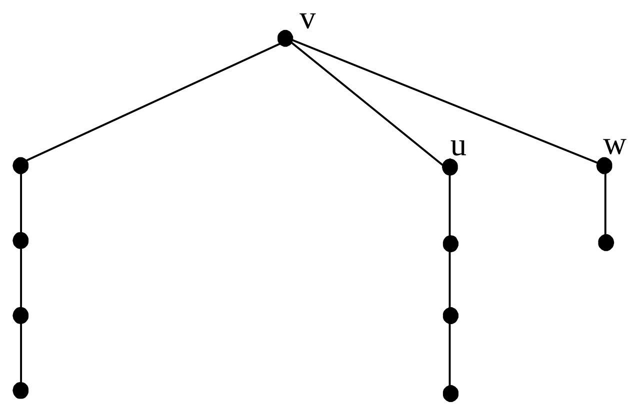


fig 3.4 (c), (d).



(e)

Fig 3.4 (e).

Lemme 3.21. *[34] Soient $T = T_v$ un arbre enraciné en v et w un sommet branche de T à distance maximum de v ($w \neq v$) Soient $k_1 = |L^1(w)|$, $k_2 = |L^2(w)|$, $k_3 = |L^3(w)|$, $k_4 = L^4(w)$, et $k_5 = |L^0(w)|$. Si*

(a) $k_1 \geq 1$, soit T' l'arbre obtenu à partir de T en supprimant $D(w)$ et en attachant un P_1 à w.

(b) $k_1 = 0$ et $k_3 \geq 1$, soit T' l'arbre obtenu à partir de T en supprimant $D(w)$ et en attachant un P_3 à w.

(c) $k_1 + k_3 = 0$ et $k_4 \geq 1$, soit T' l'arbre obtenu à partir de T en supprimant $D(w)$ et en attachant un P_4 à w.

(d) $k_1 + k_3 + k_4 = 0$ et $k_2 \geq 2$, soit T' l'arbre obtenu à partir de T en supprimant $D(w)$ et en attachant un P_4 à w.

(e) $k_1 + k_3 + k_4 = 0$ et $k_2 = 1$, soit T' l'arbre obtenu à partir de T en supprimant $D(w)$ et en attachant un P_2 à w.

(f) *$k_1 + k_2 + k_3 + k_4 = 0$ et $k_5 \geq 2$, soit T' l'arbre obtenu à partir de T en supprimant $D(w)$ et en attachant un P_5 à w.*

Alors pour chaque cas nous avons:

(1) $v \in \mathcal{A}_L(T)$ *si et seulement si* $v \in \mathcal{A}_L(T')$.

(2) $v \in \mathcal{N}_L(T)$ *si et seulement si* $v \in \mathcal{N}_L(T')$.

Preuve. D'après le lemme 3.20, on peut réduire l'arbre T_v en remplaçant toute chaîne $w-x$ de T_v par une chaîne $w-x$ de longueur j où $j = 1, 2, 3, 4$, ou 5 si $x \in L^i(w)$ avec $i = 0, 1, 2, 3, 4$. Ainsi, on peut supposer que tout sommet pendant de T_v est à distance au plus 5 de w. Soient a_i, b_jc_j, $d_ke_kf_k$, $g_lh_lp_lq_l$, $r_ms_mt_mu_mx_m$ les chaînes d'ordre respectivement 1, 2, 3, 4, et 5, attachées à w avec les sommets a_i, c_j, f_k, q_l, $x_m \in L(T) \cap D(w)$ pour $0 \leq i \leq k_1$, $0 \leq j \leq k_2$, $0 \leq k \leq k_3$, $0 \leq l \leq k_4$ et $0 \leq m \leq k_5$.

Cas 1: $k_1 \geq 1$. Soit $T' = T - (D(w) - \{a_1\})$.

Tout $\gamma_L(T')$-ensemble peut être étendu à un $E.D.L.$ de T en lui ajoutant l'ensemble

$$X = \{a_i, i \in \{2, ..., k_1\}\} \cup \{b_j,\ j \in \{1, ..., k_2\}\} \cup \{e_k, k \in \{1, ..., k_3\}\} \cup \{g_l, p_l,\ l \in \{1, ..., k_4\}\} \cup \{s_m, u_m, m \in \{1, ..., k_5\}\}$$

Soit D' un $\gamma_L(T')$-ensemble, on peut sans perte de généralité supposer que $w \in D'$, sinon on peut toujours remplacer a_1 par w, alors $D = D' \cup X$ est un $E.D.L$ de T, ainsi $\gamma_L(T) \leq |D' \cup X| = \gamma_L(T') + (k_1 - 1) + k_2 + k_3 + 2k_4 + 2k_5$. D'autre part, soit D un $\gamma_L(T)$-ensemble alors $D' = D \cap V(T')$, est un $E.D.L.$ de T' avec

$|D \cap D(w)| \geq (k_1 - 1) + k_2 + k_3 + 2k_4 + 2k_5 = |X|$.

Si $a_1 \notin D$, ou $|D \cap D(w)| > (k_1 - 1) + k_2 + k_3 + 2k_4 + 2k_5 = |X|$ si $a_1 \in D$ (c.à.d tous les a_i sont dans D), alors $D' = (D - D \cap D(w))$ si $a_1 \notin D$, et $D' = (D - D \cap D(w)) \cup \{a_1\}$. Dans tous les cas nous avons $\gamma_L(T') \leq |D'| = \gamma_L(T) - (k_1 - 1) - k_2 - k_3 - 2k_4 - 2k_5$ donc, $\gamma_L(T) = \gamma_L(T') + (k_1 - 1) + k_2 + k_3 + 2k_4 + 2k_5$.

(1) Supposons que $v \in \mathcal{A}_L(T')$ et soit D un $\gamma_L(T)$-ensemble quelconque. Ainsi que nous venons de le voir l'un ou l'autre des deux ensembles $D' = (D - D \cap D(w))$; si $w \in D$ et si $a_1 \notin D$ ou $D' = (D - D \cap D(w)) \cup \{a_1\}$; si $w \notin D$ et si $a_1 \in D$, est un $\gamma_L(T')$-ensemble. Comme $v \in D' \subset D$, alors $v \in \mathcal{A}_L(T)$. Réciproquement, si $v \in \mathcal{A}_L(T)$, soit S' un $\gamma_L(T')$-ensemble quelconque, nous avons vu que $S = S' \cup X$ est un $\gamma_L(T)$-ensemble, comme $v \in S$ et $v \notin D(w)$ alors $v \in S'$ et donc $v \in \mathcal{A}_L(T')$.

(2) Supposons que $v \in \mathcal{N}_L(T')$. Soit D un $\gamma_L(T)$-ensemble quelconque. Ainsi que nous l'avons déja vu $D' = D \cap T'$ est un $\gamma_L(T')$-ensemble et comme $v \notin D'$ et $v \notin D(w)$ alors $v \notin D$. Par conséquent $v \in \mathcal{N}_L(T)$. Réciproquement, supposons que $v \in \mathcal{N}_L(T)$. Soit S' un $\gamma_L(T)$-ensemble arbitraire, comme $S = S' \cup X$ est un $\gamma_L(T)$-ensemble, alors $v \notin S$ et donc $v \notin S'$ et donc $v \in \mathcal{N}_L(T')$.

Cas 2: $k_1 = 0$ et $k_3 \geq 1$.

Soit $T' = T - (D(w) - \{d_1, e_1, f_1\})$. Vu que tout $\gamma_L(T')$-ensemble peut être étendu à un $E.D.L$ de T en lui ajoutant l'ensemble

$$X = \{b_j,\ j \in \{1, ..., k_2\}\} \cup \{e_k, k \in \{2, ..., k_3\}\} \cup \{g_l, p_l,\ l \in \{1, ..., k_4\}\} \cup \{s_m, u_m, m \in \{1, ..., k_5\}\}$$

Soit D' un $\gamma_L(T')$-ensemble arbitraire sans perte de généralité, on peut supposer que D' contient e_1 et w, sinon on peut dans un premier cas remplacer f_1 par e_1 et, dans un second cas d_1 (ou f_1) par w. Ainsi $\gamma_L(T) \leq \gamma_L(T') + k_2 + (k_3 - 1) + 2k_4 + 2k_5$. D'autre part, soit D est un $\gamma_L(T)$-ensemble, on peut supposer que $w \in D$, sinon on remplace d_1 ou f_1 par w et on prend e_1 dans D, alors $D' = D \cap T'$ est un $E.D.L$ de T' avec $|D \cap (D(w) - \{d_1, e_1, f_1\}| \geq k_2 + (k_3 - 1) + 2k_4 + 2k_5 = |X|$, alors $\gamma_L(T') \leq |D\prime| = |D \cap (D(w) - \{d_1, e_1, f_1\}| \leq \gamma_L(T) - k_2 - (k_3 - 1) - 2k_4 - 2k_5$ et donc $\gamma_L(T') = \gamma_L(T) - k_2 - (k_3 - 1) - 2k_4 - 2k_5$.

(1) Supposons que $v \in \mathcal{A}_L(T')$, et soit D un $\gamma_L(T)$-ensemble arbitraire. Ainsi que nous l'avons vu $D' = D \cap (D(w) - \{d_1, e_1, f_1\}$ est un $\gamma_L(T')$-ensemble.

Comme $v \in D' \subset D$, alors $v \in D$ et donc $v \in \mathcal{A}_L(T)$. Réciproquement, si $v \in \mathcal{A}_L(T)$. Soit $D\prime$ un $\gamma_L(T')$-ensemble quelconque, ainsi que nous l'avons vu précédemment, $D' \cup X$ est un $\gamma_L(T)$-ensemble, comme $v \in D$ et $v \notin X$, alors $v \in D'$, et ainsi $v \in \mathcal{A}_L(T')$.

(2) Supposons à présent que $v \in \mathcal{N}_L(T')$ et soit D un $\gamma_L(T)$-ensemble arbitraire ainsi que nous l'avons vu précédement $D' = D \cap T'$est un $\gamma_L(T')$-ensemble. Comme $v \notin D'$ et $v \notin D(w)$, alors $v \notin D$ et donc $v \in \mathcal{N}_L(T)$. Réciproquement, supposons que $v \in \mathcal{N}_L(T)$ et soit S'un $\gamma_L(T')$-ensemble. Alors $S' \cup X$ est un $\gamma_L(T)$-ensemble et comme $v \notin S$ et $v \notin D(w)$ alors $v \notin S'$ et donc $v \in \mathcal{N}_L(T')$.

Cas 3: $k_1 + k_3 = 0,\ k_4 \geq 2.$

Soit $T' = T - (D(w) - \{g_1, h_1, p_1, q_1\}$, comme tout $\gamma_L(T')$-ensemble peut être étendu à un $E.D.L.$ de T en lui ajoutant

$$X = \{b_j,\ j \in \{1, ..., k_2\}\} \cup \{g_l, p_l,\ l \in \{2, ..., k_4\}\} \cup \{s_m, u_m, m \in \{1, ..., k_5\}\}$$

alors $\gamma_L(T) \leq \gamma_L(T') + k_2 + 2(k_4 - 1) + 2k_5$. D'autre part, soit D un $\gamma_L(T)$-ensemble, sans perte de généralité on peut supposer que D contient g_1 et p_1, sinon on remplace h_1 par g_1 , et q_1 par p_1, alors $D' = D \cap T'$ est $E.D.L$ de T'. Il est clair que $|D \cap (D(w) - \{g_1, h_1, p_1, q_1\})| \geq k_2 + 2(k_4 - 1) + 2k_5 = |X|$, et donc $\gamma_L(T') \leq |D'| = |D| - |D \cap (D(w) - \{g_1, h_1, p_1, q_1\})| \leq \gamma_L(T) - k_2 + -2(k_4 - 1) - 2k_5$. Par conséquent $\gamma_L(T) = \gamma_L(T') + k_2 + 2(k_4 - 1) + 2k_5$.

(1) Supposons que $v \in \mathcal{A}_L(T')$. Soit D un $\gamma_L(T)$-ensemble quelconque, nous savons que $D' = D - (D \cap (D(w) - \{g_1, h_1, p_1, q_1\}))$ est un $\gamma_L(T')$-ensemble.

Vu que $v \in D'$ alors $v \in D$ $(D' \subset D\ )$ et donc $v \in \mathcal{A}_L(T)$. Réciproquement, si $v \in \mathcal{A}_L(T)$. Soit D' un $\gamma_L(T')$-ensemble arbitraire, alors $D' \cup X$ est un $\gamma_L(T)$-ensemble et vu que $v \in D' \cup X$ et que $v \notin X$ alors $v \in D'$ et finalement $v \in \mathcal{A}_L(T')$.

La preuve de (2) est omise.

Cas 4 : $k_1 + k_3 + k_4 = 0,\ k_2 \geq 2.$

Soit $T' = T - (D(w) - \{b_1, c_1, b_2, c_2\})$, et soit $T'' = T' - \{b_1, c_1, b_2, c_2\} + P_4$ où on remplace $\{b_1, c_1, b_2, c_2\}$ en attachant une chaîne P_4 au sommet w avec $P_4 = b_1c_1b_2c_2$.

Il est clair que tout $\gamma_L(T')$-ensemble est un $\gamma_L(T'')$-ensemble et il peut être étendu à un $E.D.L$ de T en lui ajoutant l'ensemble

$$X = \{b_{j,}j \in \{3, ..., k_2\}\} \cup \{s_m, u_m, m \in \{1, ..., k_5\}\}$$

ainsi $\gamma_L(T) \leq \gamma_L(T') + (k_2 - 2) + 2k_5$. D'autre part, soit D un $\gamma_L(T)$-ensemble, sans perte de généralité nous pouvons supposer que D contient s_1 et u_1 sinon on remplace r_1 par w et on prend s_1 et u_1 dans D. Alors $D' = D \cap T'$est un $E.D.L$ de T' et il est clair que $|D \cap (D(w) - \{b_1, c_1, b_2, c_2\})| \geq (k_2 - 2) + 2k_5 = |X|$ d'où

$\gamma_L(T') \leq |D'| = |D \cap (D(w) - \{b_1, c_1, b_2, c_2\})| \leq \gamma_L(T) - (k_2 - 2) - 2k_5.$

Par conséquent $\gamma_L(T) = \gamma_L(T') + (k_2 - 2) + 2k_5$.

(1) Supposons que $v \in \mathcal{A}_L(T')$ et soit D un $\gamma_L(T)$-ensemble arbitraire. Nous avons vu précédemment que $D' = D \cap (D(w) - \{b_1, c_1, b_2, c_2\})$ est un $\gamma_L(T')$-ensemble. Comme $v \in D' \subset D$, alors $v \in D$ et donc $v \in \mathcal{A}_L(T)$. Réciproquement, si $v \in \mathcal{A}_L(T)$, soit D' un $\gamma_L(T')$-ensemble nous avons déja vu que D' peut être étendu à un $\gamma_L(T)$-ensemble en lui ajoutant l'ensemble X, ainsi $D = D' \cup X$ est un $\gamma_L(T)$-ensemble, et comme $v \notin D[w]$, alors $v \in D'$, donc $v \in \mathcal{A}_L(T')$.

La preuve de (2) est omise.

Cas 5: $k_1 + k_3 + k_4 = 0,\ k_2 = 1$

Soit $T' = (D(w) - \{b_1, c_1\})$. Tout $\gamma_L(T')$-ensemble peut être étendu à un $\gamma_L(T)$-ensemble en lui ajoutant l'ensemble

$$X = \{s_m, u_m, m \in \{1, ..., k_5\}\}$$

ainsi $\gamma_L(T) \leq \gamma_L(T') + |X| = \gamma_L(T') + 2k_5$. D'autre part, soit D un $\gamma_L(T)$-ensemble, sans perte de généralité on peut remplacer r_j par w et prendre s_j, u_j dans D si $w \notin D$ et $r_j \in D$ nécéssairement pour w, alors $D' = D \cap T'$ est un $E.D.L$ de T'. De plus $|D \cap (D(w) - \{b_1, c_1\})| \geq |X| = 2k_5$, donc $\gamma_L(T') \leq |D'| = |D| - |D \cap (D(w) - \{b_1, c_1\})| \leq \gamma_L(T) - |X| = \gamma_L(T) - 2k_5$. Par conséquent $\gamma_L(T) = \gamma_L(T') + 2k_5$.

(1) Supposons que $v \in \mathcal{A}_L(T')$ et soit D un $\gamma_L(T)$-ensemble arbitraire. Nous avons vu précédemment que $D' = D \cap (D(w) - \{b_1, c_1\})$ est un $\gamma_L(T')$-ensemble.

Comme $v \in D' \subset D$, alors $v \in D$ et donc $v \in \mathcal{A}_L(T)$. Réciproquement, si $v \in \mathcal{A}_L(T)$, soit D' un $\gamma_L(T')$-ensemble, nous avons déja vu que D' peut être étendu à un $\gamma_L(T)$-ensemble en lui ajoutant l'ensemble X, ainsi $D = D' \cup X$ est un $\gamma_L(T)$-ensemble, et comme $v \in D$ et $v \notin D[w]$, alors $v \in D'$, donc $v \in \mathcal{A}_L(T')$.

La preuve de (2) est omise.

Cas 6: $k_1 + k_2 + k_3 + k_4 = 0,\ k_5 \geq 2.$

Soit $T' = T - (D(w) - \{r_1, s_1, t_1, u_1, x_1\})$. Tout $\gamma_L(T')$-ensemble peut être étendu à un $\gamma_L(T)$-ensemble en lui ajoutant l'ensemble

$$X = \{s_m, u_m; m \in \{2, ..., k_5\}\}$$

ainsi $\gamma_L(T) \leq \gamma_L(T') + |X| = \gamma_L(T') + 2(k_5 - 1)$. D'autre part, soit D un $\gamma_L(T)$-ensemble arbitraire, sans perte de généralité on peut remplacer r_j par w et prendre s_j, u_j dans D si $w \notin D$ et $r_j \in D$ nécéssairement pour w pour $j \in \{2, ..., k_5\}$, alors $D' = D \cap T'$ est un $E.D.L$ de T', il est clair que $|D \cap (| D(w) - \{r_1, s_1, t_1, u_1, x_1\}) \geq |X| = 2(k_5 - 1)$, alors $\gamma_L(T') \leq |D'| = |D| - |D \cap (| D(w) - \{r_1, s_1, t_1, u_1, x_1\}) \leq \gamma_L(T) - 2(k_5 - 1)$. Par conséquent $\gamma_L(T) = \gamma_L(T') + 2(k_5 - 1)$.

(1) Supposons que $v \in \mathcal{A}_L(T')$ et soit D un $\gamma_L(T)$-ensemble arbitraire Nous avons vu précédemment que $D' = D \cap (D(w) - \{r_1, s_1, t_1, u_1, x_1\})$ est un $\gamma_L(T')$-ensemble Comme $v \in D' \subset D$, alors $v \in D$ et donc $v \in \mathcal{A}_L(T)$. Réciproquement, si $v \in \mathcal{A}_L(T)$, soit D' un $\gamma_L(T')$-ensemble nous avons déja vu que D' peut être étendu à un $\gamma_L(T)$-ensemble en lui ajoutant l'ensemble X, ainsi $D = D' \cup X$ est un $\gamma_L(T)$-ensemble, et comme $v \in D$ et $v \notin D\,[w]$, alors $v \in D'$, donc $v \in \mathcal{A}_L(T')$.

La preuve de (2) est omise. $\square$

3. Caractérisations.

Le lemme suivant donne une condition nécéssaire et suffisante pour qu'un sommet spécial v d'un arbre non trivial T appartienne à l'ensemble $\mathcal{A}_L(T)$ (resp. $\mathcal{N}_L(T)$).

Lemme 3.22. *[34] Soit T un arbre enraciné en un sommet v tel que $\forall x \in V(T) - \{v\}$, $\deg_T(x) \leq 2$, alors:*

1. *$v \in \mathcal{A}_L(T)$ si et seulement si $(|L^3(v)| \geq 2$ ou $|L^3(v)| = 1)$ et $|L^1(v)| \geq 1$.*
2. *$v \in \mathcal{N}_L(T)$ si et seulement si $(|L^3(v) \cup L^1(v)| = 0$ et $|L^2(v) \cup L^4(v)| \geq 2)$ ou*

$$(|L^3(v) \cup L^2(v) \cup L^1(v)| = 0 \text{ et } |L^4(v)| = 1).$$

Preuve. Il est clair que si $L(v) = L^0(v)$, tous les sommets pendants de T sont à distance j, $j \equiv 0 \pmod 5$. Dans ce cas l'arbre T peut être obtenu à partir d'un arbre $T' = P_6$ par applications répétées du lemme 3.20, nous aurons alors de par la proposition 3.15 que $v \notin A_L(T') \cup N_L(T')$, d'où $v \notin \mathcal{A}_L(T) \cup \mathcal{N}_L(T)$.

Supposons à présent que $L(v) \neq L^0(v)$. D'aprés le lemme 3.20, il suffit de faire la preuve du lemme en considérant l'arbre T_v^* dans lequel, chaque sommet distinct de v est au plus de degré deux et chaque sommet pendant de T_v^* est au plus à distance quatre de v. Soit k_i le nombre de sommets pendants dans T_v^* à distance i où $i = 1, 2, 3, 4$. Ainsi nous aurons $v \in \mathcal{A}_L(T)$ (respectivement $\mathcal{N}_L(T)$) si et seulemnt si $v \in \mathcal{A}_L(T_v^*)$ (respectivement $\mathcal{N}_L(T_v^*)$).

Si v est un sommet pendant dans T_v^* alors T_v^* est une chaîne P_n d'ordre $5 \geq n \geq 2$ avec $|L^1(v) \cup L^2(v) \cup L^3(v) \cup L^4(v)| = 1$. Suite aux remarques 3.19 et 3.18 $v \notin \mathcal{A}_L(T_v^*) \cup \mathcal{N}_L(T_v^*)$ si et seulement si $n = 2, 3$, ou 4, et $v \in \mathcal{N}_L(T_v^*)$ si et seulement si $n = 5$. Nous supposerons dans ce qui suit que v n'est pas un sommet pendant. Soit v un sommet de degré au moins deux.

Notons que si T_v^* contient des sommets pendants à distance cinq de v alors, par application du lemme 3.20,

il est juste de considérer l'arbre obtenu aprés la suppréssion de toutes les chaînes P_5 attachées à v. Ainsi nous pouvons supposer qu'il n'y a pas de chaînes P_5 attachées à v dans T_v^*. Soit D un $\gamma_L(T_v^*)$-ensemble. Pour chaque sommet pendant t_i à distance i de v on note par $v, t_1, ..., t_i$, la $v - t_i$ chaîne reliant les sommets v et t_i. Nous pouvons à présent étudier les cas suivants:

Cas 1: $k_3 \geq 2$.

Soient x_3, y_3 deux sommets pendants de T_v^* à distance trois de v. Supposons que $v \notin D$. Alors D contient deux sommets de chaque $\{x_1, ..., x_3\}, \{y_1, ..., y_3\}$. Sans perte de généralité supposons que x_i, $y_i \in D$ pour $i = 1, 2$. Dans ce cas $D' = \{v\} \cup D - \{x_1, y_1\}$ est un $E.D.L$ de T_v^* de cardinalité $\gamma_L(T_v^*) - 1$, d'où la contradiction. Alors $v \in D$ et donc $v \in \mathcal{A}_L(T_v^*)$.

Cas 2: $k_3 = 1$ *et* $k_1 \geq 1$.

Soient x_3, y_1 deux sommets à distance trois et un de v respectivement. Supposons que $v \notin D$, alors D doit contenir y_1 et deux sommets de la chaîne $\{x_1, ..., x_3\}$. Sans perte de généralité supposons que $x_i \in D$ pour $1 \leq i \leq 2$.

Alors $D' = (D - \{x_1, y_1\}) \cup \{v\}$est un $E.D.L$ de T_v^* de cardinalité $\gamma_L(T_v^*) - 1$, d'où la contradiction.

Alors $v \in D$ et donc $v \in \mathcal{A}_L(T_v^*)$.

Cas 3: $k_1 + k_3 = 0 \ et \ k_2 + k_4 \geq 2$.

Sous cas 3.1: $k_1 + k_3 = 0 \ et \ k_2 \geq 2$.

Soient x_2, y_2 deux sommets pendants à distance deux de v, et supposons que $v \in D$. Alors D doit contenir un sommmet de chaque $\{x_1, x_2\}$ et $\{y_1, y_2\}$. Sans perte de généralité supposons que $\{x_2, y_2\} \subset D$. Dans ce cas $D' = (D - \{v, x_2, y_2\}) \cup \{x_1, y_1\}$ est un $E.D.L$ de T_v^* de cardinalité $\gamma_L(T_v^*) - 1$ car $k_1 + k_3 = 0$, d'où la contradiction. Alors $v \notin D$ et donc $v \in \mathcal{N}_L(T_v^*)$.

Sous cas 3.2: $k_1 + k_3 = 0$ et $k_4 \geq 2$.

Soient x_4, y_4 deux sommets pendants à distance quatre de v, et supposons que $v \in D$. Alors D doit contenir deux sommmets de chaque $\{x_1, x_2, x_3, x_4\}$ et $\{y_1, y_2, y_3, y_4\}$. Sans perte de généralité supposons que x_i, $y_i \in D$ pour $i = 2, 3$.

Dans ce cas $D' = (D - \{v, x_2, x_3, y_2, y_3\}) \cup \{x_1, x_3, y_1, y_3\}$ est un $E.D.L$ de T_v^* de cardinalité $\gamma_L(T_v^*) - 1$ car $k_1 + k_3 = 0$, d'où la contradiction. Alors $v \notin D$ et donc $v \in \mathcal{N}_L(T_v^*)$.

Sous cas 3.3: $k_1 + k_3 = 0$, $k_2 = 1$ et $k_4 = 1$.

Soient x_4, y_2 deux sommets à distance quatre et deux de v, alors D doit contenir deux sommmets de $\{x_1, x_2, x_3, x_4\}$ et un sommet de $\{y_1, y_2\}$. Sans perte de généralité supposons que $\{x_2, x_3, y_2\} \subset D$.

Dans ce cas $D' = (D - \{v, x_2, x_3, y_2\}) \cup \{x_1, x_3, y_1\}$ est un $E.D.L$ de T_v^* de cardinalité $\gamma_L(T_v^*) - 1$ car $k_1 + k_3 = 0$, d'où la contradiction. Alors $v \notin D$ et donc $v \in \mathcal{N}_L(T_v^*)$.

Cas 4: $k_1 + k_2 + k_3 = 0$ et $k_4 = 1$.

Soit x_4 un sommet à distance quatre de v, supposons que $v \in D$. Alors D doit contenir deux sommets de $\{x_1, x_2, x_3, x_4\}$. Sans perte de généralité supposons que $\{x_2, x_3\} \subset D$. Dans ce cas $D' = (D - \{v, x_2, x_3\}) \cup \{x_1, x_3\}$ est un $E.D.L$ de T_v^* de cardinalité $\gamma_L(T_v^*) - 1$ car $k_1 + k_2 + k_3 = 0$, d'où la contradiction. Alors $v \notin D$ et donc $v \in \mathcal{N}_L(T_v^*)$.

Cas 5: $k_3 = 0$ et $k_1 \geq 1$.

Dans ce cas tous les sommets pendants sont à distance un, deux, ou quatre de v. Comme $k_1 \geq 1$, soit $x_1$un sommet pendant à distance un de v, de par la remarque 3.18, il existe un $\gamma_L(T_v^*)$-ensemble D qui contient v. Il est clair que $D' = (D - \{v\}) \cup \{x_1\}$ est aussi un $\gamma_L(T_v^*)$-ensemble ne contenant pas le sommet v, d'où $v \notin \mathcal{A}_L(T_v^*) \cap \mathcal{N}_L(T_v^*)$.

Cas 6: $k_3 = 1$ *et* $k_1 = 0$.

Soit x_3 un sommet pendant à distance trois de v. Si $v \in D$, alors D doit contenir x_i pour $i = 2$ ou 3. Dans ce cas, $D' = (D - \{v\}) \cup \{x_1\}$ est aussi un $\gamma_L(T_v^*)$-ensemble ne contenant pas le sommet v. Si $v \notin D$, alors D doit contenir deux sommets de $\{x_1, x_2, x_3\}$. Sans perte de généralité supposons que $\{x_2, x_3\} \subset D$. Dans ce cas $D' = (D - \{x_3\}) \cup \{v\}$ est un $\gamma_L(T_v^*)$-ensemble contenant le sommet v. Par conséquent $v \notin \mathcal{A}_L(T_v^*) \cap \mathcal{N}_L(T_v^*)$.

Cas 7: $k_1 + k_3 = 0$ *et* $k_2 + k_4 = 1$.

Sous cas 7.1: $k_1 + k_3 + k_4 = 0$ *et* $k_2 = 1$.

Dans ce cas T_v^* est un P_3, comme le cas des chaînes a déjà été considéré on peut aisément conclure que $v \notin \mathcal{A}_L(T_v^*) \cap \mathcal{N}_L(T_v^*)$.

Sous cas 7.2: $k_1 + k_3 + k_2 = 0$ *et* $k_4 = 1$.

Dans ce cas T_v^* est un P_5, et suite à la remarque 3.19, $v \in \mathcal{N}_L(T_v^*)$.

Cas 8: $k_1 + k_2 + k_3 + k_4 = 0$.

Finalement ce cas aussi a déjà été considéré, et il a été établi que
$v \notin \mathcal{A}_L(T_v^*) \cap \mathcal{N}_L(T_v^*)$. □

Suite au lemmes 3.21 et 3.22, nous énonçons le théorème suivant:

Théorème 3.23. *[34] Soit v un sommet d'un arbre T, alors*

- $v \in \mathcal{A}_L(T)$ si et seulement si $v \in \mathcal{A}_L(\overline{T_v})$.
- $v \in \mathcal{N}_L(T)$ si et seulement si $v \in \mathcal{N}_L(\overline{T_v})$.

Du théorème 3.23 nous déduisons le corollaire suivant:

Corollaire 3.24. *T est un arbre γ_L-excellent si et seulement si $\mathcal{N}_L(\overline{T_v}) = \varnothing$, pour tout sommet v de T. (c.à.d que dans l'arbre élagué $\overline{T_v}$ nous avons ($|L^1(v) \cup L^3(v)| \neq 0$ ou $|L^2(v) \cup L^4(v)| \leq 1$) et $|L^3(v) \cup L^2(v) \cup L^1(v)| \neq 0$ ou $|L^4(v)| \neq 1$.*

4. Algorithme de reconnaissance d'un arbre γ_L-excellent

Suite au procéssus d'élagage défini précédement et au corollaire 3.24, nous proposons un algorithme de reconnaissance d'un arbre γ_L-excellent.

Algorithme : Reconnaissance d'un arbre γ_L-excellent

Input: Un arbre T tel que $|V(T)| \geq 2$. (Les sommets de T sont numérotés de 1 *à* $|V(T)|$). Une chaîne P_4.

Etape 1: Poser $r = 1$.

Etape 2: Si $r = |V(T)| + 1$, **TERMINER.** T **est** γ_L**-excellent.** Sinon, poser $T = T_r = T_v$.

Etape 3: Determiner la distance $d(v,x)$ pour tout $x \in V(T_v)$ et générer la séquence de sommets branche $(w_1, w_2, ...w_k)$ tels que:

$$d(v, w_1) \leq d(v, w_1) \leq ... \leq d(v, w_k).$$

Poser $B(T) = \{w_1, w_2, ...w_k\}$ et $m = k$.

Etape 4: Si $m = 0$ (c.a.d $B(T) = \varnothing$), aller à l'étape 6. Sinon, aller à l'étape 5.

Etape 5: Poser $w = w_m$. Pour tout fils x de w, soit x' l'unique sommet pendant de T_x.

Pour $i = 0, 1, 2, 3,$ et 4, poser

$$L^i(w) = \{x' \in L^i(w) \mid d(w, x') \equiv i \mod 5\}.$$

- Si $|L^1(w)| \geq 1$, soit $y \in C(w)$ tel que $y' \in T_y$ et $y' \in L^1(w)$.

Alors poser

$$T = T - (D(w) - y).$$

et $B(T) = B(T) - w$, $m = m - 1$, et aller à l'étape 4.

- Si $L^1(w) = \varnothing$ et $|L^3(w)| \geq 1$, soit $y \in C(w)$ tel que $y' \in T_y$ et $y' \in L^3(w)$. Alors poser

$$T = T - \bigcup_{u \in C(w) - y} D[u].$$

et $B(T) = B(T) - w$, $m = m - 1$, et aller à l'étape 4.

- Si $L^1(w) \cup L^3(w) = \varnothing$ et $|L^4(w)| \geq 1$, soit $y \in C(w)$ tel que $y' \in T_y$ et $y' \in L^4(w)$. Alors poser

$$T = T - \bigcup_{u \in C(w) - y} D[u]$$

- Si $L^1(w) \cup L^3(w) \cup L^4(w) = \varnothing$ et $|L^2(w)| \geq 2$, effacer $D(w)$ et attacher la chaîne P_4 à w.

- Si $L^1(w) \cup L^3(w) \cup L^4(w) = \varnothing$ et $|L^2(w)| = 1$, soit $y \in C(w)$ tel que $y' \in T_y$ et $y' \in L^2(w)$.Alors poser

$$T = T - (D(w) - y).$$

- Si $L^1(w) \cup L^2(w) \cup L^3(w) \cup L^4(w) = \varnothing$ et $|L^0(w)| \geq 1$, soit $y \in C(w)$ tel que $y' \in T_y$ et $y' \in L^0(w)$. Alors poser

$$T = T - \bigcup_{u \in C(w) - y} D[u].$$

Etape 6: Si $(L^1(w) \cup L^3(w) = \varnothing$ et $|L^2(w) \cup L^4(w)| \geq 2)$ ou $(L^1(w) \cup L^2(w) \cup L^3(w) = \varnothing$ et $|L^4(w)| = 1)$.**TERMINER**. T **n'est pas** γ_L-**excellent.**

Sinon, poser $r = r + 1$, et aller à l'étape 2.

On notera que la caractérisation des ensembles $\mathcal{A}_L(T)$ et $\mathcal{N}_L(T)$ pour un arbre T peut servir pour la reconnaissance des arbres γ_L-recommandables, γ_L-justes, et γ_L-indésirables vu que $\mu_L^b = |N_L(T)|$ et $\mu_L^g = |V(T)| - |N_L(T)|$. Cette même caractérisation permet aussi d'établir si un arbre T admet un dominant localisateur minimum unique, vu qu'un arbre T admet un dominant localisateur minimum unique si seulement si $A_L(T) \cup N_L(T) = V(T)$. Dans le chapitre suivant nous donnons une autre caractérisation des arbres admettant un ensemble dominant localisateur minimum unique.

CHAPITRE 4

Etude des arbres admettant un ensemble dominant localisateur minimum unique.

4.1 Introduction

Dans ce chapitre nous nous intéréssons à la classe des arbres admettant un ensemble dominant localisateur minimum unique. Un tel arbre sera noté *ADLU*. Notons que des études ont été faites afin de déterminer l'unicité d'un ensemble dominant minimum pour quelques paramètres de domination dans des classes de graphes tels les arbres. Pour plus de détails on pourra consulter les articles [12], [13], [17], [20].

Nous donnons d'abord deux remarques qui nous seront utiles par la suite.

Remarque 4.1. *Si T un arbre non trivial admet un $\gamma_L(T)$-ensemble unique D, alors:*

a) Tout sommet support appartient à D.

b) Chaque sommet support est adjacent à exactement un sommet pendant.

c) D ne contient aucun sommet pendant.

Preuve. a) Supposons qu'il existe un sommet support v, tel que $v \notin D$. Dans ce cas tous les sommets pendants adjacents à v sont contenus dans D. Soit x_1 l'un de ces sommets, alors $D' = (D - \{x_1\}) \cup \{v\}$ est un autre $\gamma_L(T)$-ensemble. Ce qui est contredit l'unicité du $\gamma_L(T)$-ensemble D.

b) Supposons qu'il existe un sommet support v, adjacent à au moins deux sommmets pendants x_1, x_2. Comme d'aprés a) $v \in D$, et $x_i \in D$ (pour $i = 1$ ou 2), alors $D' = (D - \{x_1\}) \cup \{x_2\}$ est un autre $\gamma_L(T)$-ensemble. Ce qui est contredit l'unicité du $\gamma_L(T)$-ensemble D.

c) Soit u l'unique sommet pendant adjacent à v. Supposons que $u \in D$, et soit w un sommet de $V - D$, qui admet pour voisin dans D uniquement v. Comme d'aprés a) $v \in D$, alors $D' = (D - \{u\}) \cup \{w\}$ est un autre $\gamma_L(T)$-ensemble. Ce qui est contredit l'unicité du $\gamma_L(T)$-ensemble D. □

Remarque 4.2. *La chaîne P_5 est le plus petit arbre non trivial admettant un ensemble dominant localisateur minimum unique.*

Preuve. Soit T le plus petit $ADLU$, d'aprés la remarque 4.1, T n'est pas une étoile, et donc T est au moins de diamètre trois. La chaîne P_4 est le seul arbre de diamètre trois sans support fort, or la chaîne P_4 admet deux $\gamma_L(P_4)$-ensemble. Il s'ensuit que T est au moins de diamètre quatre, et il est aisé de voir qu'un tel arbre est la chaîne P_5. Comme P_5 admet un unique ensemble dominant localisateur minimum, alors P_5 est le plus petit $ADLU$. □

4.2 Caractérisations

Lemme 4.3. *[35] Soient T un $ADLU$ non tivial, et D son unique $\gamma_L(T)$-ensemble. Alors pour tout sommet $v \in D$, $\gamma_L(T - v) > \gamma_L(T)$.*

Preuve. Soient T un $ADLU$ et D son unique $\gamma_L(T)$-ensemble. Supposons que pour un certain sommet $v \in D$, $\gamma_L(T - v) \leq \gamma_L(T)$. D'aprés la remarque 4.1, v ne peut être un sommet pendant. Soient $\{u_1, u_2, u_3, ..., u_p\}$ les voisins de v dans T, et T_{u_i} les composantes de $T - v$ contenant le sommet u_i. Il est clair que $p \geq 2$. Soient D' un $\gamma_L(T - v)$-ensemble, $D_i = D \cap T_{u_i}$, et $D'_i = D' \cap T_{u_i}$ pour chaque i. Par supposition $|D'| \leq |D|$. Notons que D' contient au plus un sommet de $\{u_1, u_2, u_3, ..., u_p\}$, sinon D' serait un autre $\gamma_L(T)$-ensemble, ce qui contredirait l'unicité de D. Ainsi pour chaque $i = 1, ...p$, D'_i est un $\gamma_L(T_{u_i})$-ensemble, $D_i \cup \{v\}$ est un $E.D.L$ du sous graphe $T_{u_i} + v$, et il est le plus petit ensemble contenant le sommet v. Comme $D'_i \cup \{v\}$ est aussi est un $E.D.L$ du sous graphe $T_{u_i} + v$, il s'ensuit que $|D_i \cup \{v\}| \leq |D'_i \cup \{v\}|$ et donc $|D_i| \leq |D'_i|$ pour tout $1 \leq i \leq p$. Soit Q le sous ensemble de $\{1, 2, ..., p\}$ tel que $|D_l| < |D'_l|$ pour tout $l \in Q$, d'où $|D'_l| \geq |D_l| + 1$.

De plus puisque $D_l \cup \{u_l\}$ est un est un $E.D.L$ du sous graphe T_{u_l}, alors $|D_l'| \leq |D_l \cup \{u_l\}| = |D_l| + 1$, et donc $|D_l'| = |D_l| + 1$ pour tout $l \in Q$. Comme $|D| \geq |D'| = \sum_{i=1}^{p} |D_i'| = \sum_{i=1}^{p} |D_i| + |Q| = |D| - 1 + |Q|$ ceci implique $|Q| \leq 1$. Supposons à présent $|Q| = 0$, alors $|D'| = |D| - 1$ et $D' \cup \{u_l\}$ pour un certain $u_l \notin D$, est un second $\gamma_L(T)$-ensemble, ce qui contredit l'unicité du $\gamma_L(T)$-ensemble D, donc $|Q| = 1$. Soit $Q = \{j\}$, donc $\left|D_j'\right| = |D_j| + 1$, $u_j \notin D$ mais alors $\left(\bigcup_{i \neq 1, i \neq j}^{p} D_i' \right) \cup D_j \cup \{u_j\}$ est un $\gamma_L(T)$-ensemble différent de D, d'où la contradiction. Ainsi nous avons montré que $\gamma_L(T - v) > \gamma_L(T)$ pour tout sommet $v \in D$. $\square$

Notons que le lemme 4.3 n'est pas valable pour tout graphe. En effet, il suffit de considérer à titre d'exemple, le graphe G, constitué des deux cycles C_5, y_1, y_2, y_3, y_4, y_5 et x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 en identifiant les sommets x_1 et y_1 par un nouveau sommet w. Pour compléter le graphe, ajouter deux nouveaux sommets u, v et les arêtes ux_i, vy_i, pour $i = 2, 3, 4, 5$. Alors $\{x_2, x_5, y_2, y_5\}$ est l'unique $\gamma_L(G)$-ensemble. Mais pour tout $z \in \{x_2, x_5, y_2, y_5\}$, $\gamma_L(G - z) = \gamma_L(G)$.

Lemme 4.4. *[35] Soit G un graphe connexe non trivial et D un $\gamma_L(G)$-ensemble. Si pour tout sommet $v \in D$, $\gamma_L(G - v) > \gamma_L(G)$, alors G admet un $\gamma_L(G)$-ensemble unique.*

Preuve. Supposons que le graphe G admet un autre $\gamma_L(G)$-ensemble D',

et $\gamma_L(G - v) > \gamma_L(G)$. Soit v un sommet de $D - D'$, alors D' est un $E.D.L$ de $G - v$, donc $\gamma_L(G - v) \leq |D'| = |D| = \gamma_L(G)$, d'où la contradiction. $\square$

Comme conséquence immédiate des lemmes 4.3 et 4.4, nous obtenons une première caractérisation pour les $ADLU$.

Théorème 4.5. *[35] Un arbre non trivial T est un $ADLU$ admettant pour unique $\gamma_L(T)$-ensenble D si et seulement si pour tout sommet $v \in D$, $\gamma_L(T - v) > \gamma_L(T)$.*

Soient T_1 et T_2 deux $ADLU$ disjoints chacun d'ordre au moins 5. Soient A_1 l'unique $\gamma_L(T_1)$-ensemble, et A_2 l'unique $\gamma_L(T_2)$-ensemble. On définit ci dessous deux opérations qui permettront de lier les deux $ADLU$ T_1 et T_2 afin d'obtenir un nouvel $ADLU$.

• **Opération** $\mathcal{O}_1$**:** *Relier par une arête un sommet de* A_1 *à un sommet de* A_2.

• **Opération** $\mathcal{O}_2$**:** *Relier par une arête un sommet de* $V(T_1) - A_1$ *à un sommet de* $V(T_2) - A_2$.

Suite à la définition de ces opérations nous montrons le lemme suivant.

Lemme 4.6. *[35] L'arbre* T *obtenu à partir de deux ADLU,* T_1 *et* T_2 *par une des opérations* $\mathcal{O}_1$ *ou* $\mathcal{O}_2$ *est un ADLU.*

Preuve. Soient D un $\gamma_L(T)$-ensemble, $D_1 = D \cap V(T_1)$ et $D_2 = D \cap V(T_2)$. Soit v_1v_2 l'arête reliant un sommet $v_1 \in T_1$ et un sommet $v_2 \in T_2$, il est clair que $A_1 \cup A_2$ est un $E.D.L$ de T d'où $\gamma_L(T) \leq \gamma_L(T_1) + \gamma_L(T_2)$.

Supposons que l'arbre T est obtenu suite à l'application de l'opération $\mathcal{O}_1$. Si les deux sommets v_1, v_2 appartiennent à D, alors D_1 est un $E.D.L$ de T_1 et D_2 est un $E.D.L$ de T_2, d'où $\gamma_L(T_1) + \gamma_L(T_2) \leq |D_1| + |D_2| = \gamma_L(T)$ et ainsi $\gamma_L(T) = \gamma_L(T_1) + \gamma_L(T_2)$. Compte tenu de l'unicité des ensembles A_1 et A_2, il s'ensuit $A_1 = D_1$, et $A_2 = D_2$, d'où $A_1 \cup A_2$ est l'unique $\gamma_L(T)$-ensemble, et ainsi T est un $ADLU$. Si les deux sommets v_1, v_2 n'appartiennent pas à D, alors D_1 est un $E.D.L$ de T_1 et D_2 est un $E.D.L$ de T_2, d'où $\gamma_L(T_1) + \gamma_L(T_2) \leq |D_1| + |D_2| = \gamma_L(T)$ et ainsi $\gamma_L(T) = \gamma_L(T_1) + \gamma_L(T_2)$. Il s'ensuit pour $i \in \{1, 2\}$ que D_i est un $\gamma_L(T_i)$-ensemble différent de A_i puisque $v_i \notin D_i$, ce qui contredit l'unicité de A_i. Sans perte de généralité supposons que $v_1 \in D_1$ et $v_2 \notin D_2$, alors D_1 est un $\gamma_L(T_1)$-ensemble, d'où $D_1 = A_1$. Dans ce cas D_2 est un $\gamma_L(T_2 - v_2)$-ensemble, et compte tenu du lemme 4.3 on aura $|D_2| > |A_2|$, d'où $\gamma_L(T) = |D| = |D_1| + |D_2| > |A_1| + |A_2|$, donc $A_1 \cup A_2$ serait un $E.D.L$ de T de taille inférieure à $|D| = \gamma_L(T)$, ce qui contredit le fait que D est un $\gamma_L(T)$-ensemble.

Supposons que l'arbre T est obtenu suite à l'application de l'opération $\mathcal{O}_2$. Si les deux sommets v_1, v_2 appartiennent à D, alors D_1 est un $E.D.L$ de T_1 et D_2 est un $E.D.L$ de T_2, d'où $\gamma_L(T_1) + \gamma_L(T_2) \leq |D_1| + |D_2| = \gamma_L(T)$ et ainsi $\gamma_L(T) = \gamma_L(T_1) + \gamma_L(T_2)$, et il en est de même si les deux sommets v_1, v_2 n'appartiennent pas à D.

Dans le premier cas puisque pour $i \in \{1, 2\}$ D_i est un $\gamma_L(T_i)$-ensemble différent de A_i on a alors une contradiction avec le fait que pour $i \in \{1, 2\}$ T_i est un $ADLU$.

Dans le second cas comme pour $i \in \{1,2\}$ A_i est un $\gamma_L(T_i)$-ensemble unique, on a $A_i = D_i$, d'où $A_1 \cup A_2$ est l'unique $\gamma_L(T)$-ensemble, et ainsi T est un $ADLU$. Finalement supposons sans perte de généralité supposons que $v_1 \in D_1$ et $v_2 \notin D_2$. Alors D_1 est un $E.D.L$ de T_1 et vu que A_1 est un $\gamma_L(T_1)$-ensemble unique on a $|D_1| \geq |A_1| + 1$. De plus comme $v_1 \notin A_1$, $A_1 \cup D_2 \cup \{v_2\}$ est un $\gamma_L(T)$-ensemble, mais comme $D_2 \cup \{v_2\}$ est un $E.D.L$ de T_2 et du fait que T_2 est un $ADLU$, $|D_2| + 1 \geq |A_2| + 1$, ainsi D serait au moins de taille $|A_1| + |A_2| + 1$, d'où la contradiction avec $|D| = \gamma_L(T) \leq |A_1| + |A_2|$. □

Soient T_1, $T_2, ..., T_k$ k $ADLU$ disjoints, chacun d'ordre au moins cinq , et soient respectivement A_1, $A_2, ..., A_k$ leur unique $\gamma_L(T_i)$-ensemble. Pour chaque i, soit u_i un sommet de A_i. On définit les deux opérations suivantes:

- **Operation $\mathcal{O}_3$:** Si $k \geq 3$. Relier par l'arête vu_i un nouveau sommet v à un sommet u_i de chaque A_i pour tout i, $(1 \leq i \leq k)$.

- **Operation $\mathcal{O}_4$:** Si $k \geq 2$. Relier par l'arête w_iu_i un sommet pendant w_i d'une étoile $S_{1,k}$ centrée en v à un sommet u_i de chaque A_i pour tout i, $(1 \leq i \leq k)$, sous la condition qu'au moins deux sommets de $\{u_1, ..., u_k\}$, soient u_r et u_s admettent chacun un voisin privé par rapport à A_i dans T_i.

Suite à la définition de ces opérations nous montrons le lemme suivant.

Lemme 4.7. *[35] L'arbre T obtenu à partir de k ADLU disjoints, T_1, $T_2, ..., T_k$ $(k \geq 3)$, par l'opération $\mathcal{O}_3$ est un ADLU, et $A_1 \cup ... \cup A_k$ est son unique $\gamma_L(T)$-ensemble.*

Preuve. Soient D un $\gamma_L(T)$-ensemble, $D_i = D \cap V(T_i)$ pour chaque $i = 1, ..., k$.

Supposons que T est obtenu à partir de k $ADLU$ disjoints T_1, $T_2, ..., T_k$, $(k \geq 3)$, par l'application de l'opération $\mathcal{O}_3$. Il est clair que $\bigcup_{i=1}^{k} A_i$ est un EDL de T, d'où $\gamma_L(T) \leq |A_1| + ... + |A_k| = \gamma_L(T_1) + ... + \gamma_L(T_k)$.

Supposons que $v \in D$.

a) Soit u_i un sommet tel que $u_i \notin D$. Alors $u_i \notin D_i$, d'où D_i est un EDL de $(T_i - u_i)$. Donc comme $u_i \in A_i$ nous aurons d'aprés le lemme 4.3 $\gamma_L(T_i) = |A_i| < \gamma_L(T_i - u_i) \leq |D_i|$, d'où $(D - D_i) \cup A_i$ serait un $E.D.L$ de T de cardinalité inférieure à $|D|$. Ce qui contredit le fait que D est un $\gamma_L(T)$-ensemble.

b) Supposons que tous les sommets u_i appartiennent à D, alors dans ce cas $D-\{v\}$est un EDL de T de cardinalité inférieure à $|D|$. Ce qui contredit le fait que D est un $\gamma_L(T)$-ensemble. Donc $v \notin D$, et chaque D_i est un $E.D.L$ de T_i d'où $\gamma_L(T_1) + ... + \gamma_L(T_k) \leq \sum_{i=1}^{k} |D_i| = \gamma_L(T) \leq \gamma_L(T_1) + ... + \gamma_L(T_k)$. Comme pour tout $1 \leq i \leq k$, A_i est un $\gamma_L(T_i)$-ensemble unique il s'ensuit que $D_i = A_i$ et donc $D = \bigcup_{i=1}^{k} A_i$ est un $\gamma_L(T)$-ensemble unique. □

Lemme 4.8. *[35] L'arbre T obtenu par l'opération $\mathcal{O}_4$ à partir de k ADLU disjoints T_1, $T_2, ..., T_k$ $(k \geq 2)$, est un ADLU, et $A_1 \cup ... \cup A_k \cup \{v\}$ est son unique $\gamma_L(T)$-ensemble.*

Preuve. Soient D un $\gamma_L(T)$-ensemble, $D_i = D \cap V(T_i)$ pour chaque $i = 1, ..., k$.

Supposons que T est obtenu à partir de k $ADLU$ disjoints T_1, $T_2, ..., T_k$ $(k \geq 2)$ par l'application de l'opération $\mathcal{O}_3$. Il est clair que $\bigcup_{i=1}^{k} A_i \cup \{v\}$ est un EDL de T, d'où $\gamma_L(T) \leq |A_1| + ... + |A_k| + 1 = \gamma_L(T_1) + ... + \gamma_L(T_k) + 1$.

Soit $Q \subseteq \{1, ..., k\}$ tel que u_i n'appartient pas à D. Dans ce cas D doit contenir $|Q|$ sommets de $\{v, w_i \mid i \in Q\}$. Comme pour chaque $i \in Q$, A_i est un $\gamma_L(T_i)$-ensemble unique, $u_i \notin D$ et D_i est un $E.D.L$ de $T_i - u_i$, il s'ensuit d'aprés le théorème 4.5 que $|D_i| > A_i$ ainsi $\left(\bigcup_{i \notin Q} D_i\right) \cup \left(\bigcup_{i \in Q} A_i\right) \cup \{v\}$ serait un $E.D.L$ de T de cardinalité inférieure à $|D|$. Ce qui contredit le fait que D est un $\gamma_L(T)$-ensemble. Donc $u_i \in D$ pour tout $i \in \{1, ..., k\}$. Par conséquent chaque D_i est un $E.D.L$ de T_i et D contient au moins un sommet de $N[v]$ pour dominer v. Il s'ensuit $\gamma_L(T_1) + ... + \gamma_L(T_k) \leq \sum_{i=1}^{k} |D_i| = |D| - 1 = \gamma_L(T) - 1 \leq \gamma_L(T_1) + ... + \gamma_L(T_k)$ d'où $\gamma_L(T_1) + ... + \gamma_L(T_k) = \gamma_L(T) - 1$. Notons que le voisin privé de u_r par rapport à A_r dans T_r reste le voisin privé de u_r par rapport à D dans T (sinon D_r serait un autre $\gamma_L(T_r)$-ensemble), et il en est de même pour le sommet u_s. Donc D doit contenir v, autrement si w_r, $w_s \in D$ alors $\{v\} \cup D - \{w_r, w_s\}$ serait un $E.D.L$ de T de de cardinalité inférieure à $|D|$. Ainsi $A_1 \cup ... \cup A_k \cup \{v\}$ est l'unique $\gamma_L(T)$-ensemble. □

Avant de donner une caractérisation des arbres admettant un $\gamma_L(T)$-ensemble unique nous définissons une famille d'arbres $\mathcal{U}$ que nous aurons à utiliser.

Nous rapellons que la *couronne* d'un arbre T est l'arbre obtenu à partir d'une copie de T dans laquelle chaque sommet v de T est attaché à un nouveau sommet pendant v' par l'arête vv'.

Soit $\mathcal{U}$ la famille d'arbres obtenus à partir de couronnes d'ordre au moins quatre en subdivisant une seule fois toute les arêtes entre les sommets support. Nous pouvons alors aisément établir la remarque suivante.

Remarque 4.9. *Si $T \in \mathcal{U}$, alors $S(T)$ l'ensemble des sommets support de T est l'unique $\gamma_L(T)$-ensemble.*

Maintenant nous sommes en mesure d'établir un théorème qui est une caractérisation des arbres admettant un $\gamma_L(T)$-ensemble unique.

Théorème 4.10. *[35] Soit T un arbre d'ordre $n \geq 2$. Alors les assertions suivantes sont équivalentes.*

(a) T est un ADLU.

(b) T admet un $\gamma_L(T)$-ensemble D tel que $\gamma_L(T-v) > \gamma_L(T)$ pour tout sommet $v \in D$.

(c) $T \in \mathcal{U}$ ou T peut être construit à partir d'arbres disjoints de $\mathcal{U}$ par une séquence finie d'opérations $\mathcal{O}_1$, $\mathcal{O}_2$, $\mathcal{O}_3$, ou $\mathcal{O}_4$.

Preuve. D'aprés le théorème 4.5 (a)$\Leftrightarrow$(b). D'aprés la remarque 4.9, les lemmes 4.6, 4.7, et 4.8 (c)$\Rightarrow$(a). Il nous reste donc à montrer que (a)$\Rightarrow$(c). Soient T un *ADLU* et D son unique $\gamma_L(T)$-ensemble. Nous procéderons par induction sur l'ordre n de T. Par la remarque 4.2, T est de diamètre au moins quatre et $n \geq 5$. Si $n = 5$ alors $T = P_5$ et $P_5 \in \mathcal{U}$. Supposons que tout *ADLU* non trivial T' d'ordre $n' < n$ est dans $\mathcal{U}$ ou qu'il peut être construit à partir d'arbres disjoints de $\mathcal{U}$ par une séquence finie d'opérations $\mathcal{O}_1$, $\mathcal{O}_2$, $\mathcal{O}_3$, *ou* $\mathcal{O}_4$. Soit T un *ADLU* d'ordre n et D son unique $\gamma_L(T)$-ensemble. Par la remarque 4.1, tout sommet support de T est adjacent à exactement un sommet pendant, D contient tout sommet support et il ne contient aucun sommet pendant.

Supposons dans un premier temps que T contient deux sommets adjacents u et v appartenant ou n'appartenant pas à D.

Soient T_u et T_v les deux sous arbres de T obtenus aprés la suppression de l'arête uv. Il est clair que $D_u = D \cap T_u$ (resp. $D_v = D \cap T_v$) est un $E.D.L$ de T_u (resp.de T_v), d'où $\gamma_L(T_u) + \gamma_L(T_v) \leq |D_u| + |D_v| = \gamma_L(T)$. L'égalité est obtenue en considérant $D_1 \cup D_2$ un quelconque $E.D.L$ de T, où D_1 (resp.D_2) est un $\gamma_L(T_u)$-ensemble (resp. un $\gamma_L(T_v)$-ensemble). Comme D est unique il s'ensuit que D_u est l'unique $\gamma_L(T_u)$-ensemble et que D_v est l'unique $\gamma_L(T_v)$-ensemble. Par l'hypothèse d'induction T_u (resp.T_v) appartient à $\mathcal{U}$, ou peut être construit à partir d'arbres disjoints de $\mathcal{U}$ par une séquence finie d'opérations $\mathcal{O}_1$, $\mathcal{O}_2$, $\mathcal{O}_3$, *ou* $\mathcal{O}_4$. Ainsi l'arbre T peut être construit à partir de T_u et T_v en usant de l'opération $\mathcal{O}_1$ (si u et v appartiennent à D) ou $\mathcal{O}_2$ (si u et v n'appartiennent pas à D). Nous pouvons donc supposer dans ce qui suit que chacun des deux ensembles D et $V - D$ est un stable.

Supposons d'abord qu'il existe un sommet $z \in V - D$ tel que $\deg_T(z) = t \geq 3$. Soient $y_1, ..., y_t$ les voisins de z dans D. Considérons la forêt résultant aprés la suppréssion du sommet z. Il est clair que $|D| = \sum_{i=1}^{t} |D_i|$, avec $D_i = D \cap T_{y_i}$. Comme D est unique il s'ensuit que D_i est l'unique $\gamma_L(T_{y_i})$-ensemble pour chaque $1 \leq i \leq t$. Par l'hypothèse d'induction $T_{y_i} \in \mathcal{U}$ ou peut être construit à partir d'arbres disjoints de $\mathcal{U}$ par une séquence finie d'opérations $\mathcal{O}_1$, $\mathcal{O}_2$, $\mathcal{O}_3$, *ou* $\mathcal{O}_4$. Par conséquent T peut être obtenu à partir de $T_{y_i}, ..., T_{y_i}$ par l'application de l'opération $\mathcal{O}_3$. Nous pouvons à présent supposer que tout sommet de $V - D$ est au plus de degré deux.

Supposons que D contient un sommet x qui n'est pas un sommet support, alors $\deg_T(x) \geq 2$. Soient w_1, ..., w_p ($p \geq 2$) les voisins de x dans $V - D$. Comme par supposition pour tout i, $\deg_T(w_i) = 2$, soit u_i le second voisin de w_i pour chaque i. Supposons par contradiction qu'au plus un sommet de $\{u_1, ..., u_p\}$, soit u_1, admet un voisin privé par rapport à D dans T. (notons que ce voisin pourrait être un sommet pendant). Alors $\{w_1\} \cup D - \{x\}$ serait un autre $\gamma_L(T)$-ensemble. Ce qui contredit le fait que D est un $\gamma_L(T)$-ensemble unique.

Donc au moins deux sommets de $\{u_1, ..., u_p\}$ admettent chacun un voisin privé par rapport à D dans T. Soit $T' = T - \{x, w_1, ..., w_p\}$. Alors il est aisé de voir que $|D| = \gamma_L(T_{u_1}) + ... + \gamma_L(T_{u_p}) + 1 = \sum\limits_{i=1}^{p} |D_i| + 1$, et pour chaque $1 \leq i \leq p$, D_i est l'unique $\gamma_L(T_{u_i})$-ensemble avec la condition qu'au moins un sommet de chaque couple $(u_i, u_j, 1 \leq i, j \leq p, i \neq j)$ possède un voisin privé par rapport à ce $\gamma_L(T_{u_i})$-ensemble. Par induction chaque arbre $T_{u_i} \in \mathcal{U}$ ou peut être construit à partir d'arbres disjoints de $\mathcal{U}$ par une séquence finie d'opérations $\mathcal{O}_1$, $\mathcal{O}_2$, $\mathcal{O}_3$, *ou* $\mathcal{O}_4$. Par conséquent T peut être obtenu à partir des $T_{u_1}, ...,$ T_{u_p} par l'application de l'opération $\mathcal{O}_4$. Ainsi nous avons établi la preuve du théprème 4.10. $\square$

CHAPITRE 5

Relations entre γ_L, γ_2, et β dans le cas des arbres, et caractérisation des arbres extrémaux

Dans la première section de ce chapitre nous énonçons des résultats connus qui nous serons utiles par la suite. La deuxiéme section sera consacrée à quelques résultats que nous avons obtenus.

5.1 Résultats connus

5.1.1 Borne supérieure pour le nombre de domination localisateur γ_L dans les arbres et caractérisation des arbres atteignant cette borne

Dans ce paragraphe nous présentons des résultats concernant le paramètre de domination localisateur, ces résultats ont été obtenus par Blidia et al dans [3] et [4]

On rappelle que $L(T)$ (resp. $S(T)$) désigne l'ensemble des sommets pendants (resp. des sommets supports) d'un arbre T. On note $l = |L(T)|$, $s = |S(T)|$.

Dans [4], Blidia et al ont donné une borne supérieure pour le nombre de domination localisateur dans les arbres en montrant le théorème suivant:

Théorème 5.1. *[4] Si T est un arbre d'ordre n avec l sommets pendants et s sommets support, alors $\gamma_L(T) \leq (n + l - s)/2$.*

Dans la perspective de caractériser les arbres atteignant la borne du théorème 5.1, Blidia et al ont défini la famille $\mathcal{F}$.

Soit $\mathcal{F}$ la famille d'arbres qui peuvent être obtenus à partir de la séquence d'arbres $T_1, T_2, ..., T_k$ $(k \geq 1)$ tel que T_1 est une chaîne $P_3 = x, y, t$ ou une chaîne P_4.

$T = T_k$, et, si $k \geq 2$, T_{i+1} peut être obtenu à partir de T_i par une des opérations définies ci-dessous. On pose $D(T_1) = \{x, y\}$ si $T_1 = P_3$ et $D(T_1) = S(P_4)$ si $T_1 = P_4$.

- **Opération $\mathcal{F}_1$:** Ajouter à T_i un sommet w en attachant par une arête un sommet support de T_i à w. Poser $D(T_{i+1}) = D(T_i) \cup \{w\}$.

- **Opération $\mathcal{F}_2$:** Ajouter à T_i un $P_2 = u, v$ en attachant par l'arête uz un sommet support z de T_i. Poser $D(T_{i+1}) = D(T_i) \cup \{u\}$.

- **Opération $\mathcal{F}_3$:** Ajouter à T_i une étoile subdivisée H centrée en a, d'ordre au moins cinq, en attachant par l'arête ab' un sommet pendant b' d'un support fort de T. Poser $D(T_{i+1}) = D(T_i) \cup S(H)$.

- **Opération $\mathcal{F}_4$:** Ajouter à T_i un $P_3 = b, c, d$ et $p \geq 0$ chaînes $P_2 = u_i, v_i$ en attachant par les arêtes df et $u_i f$ pour chaque i, un sommet pendant f de $D(T_i)$ où f est un pendant d'un support fort de T_i. Poser $D(T_{i+1}) = D(T_i) \cup \{c, u_1, ..., u_p\}$.

- **Opération $\mathcal{F}_5$:** Ajouter à T_i un $P_4 = a, b, c, d$ et $p \geq 0$ chaînes $P_2 = u_i, v_i$ en attachant par les arêtes dy et $u_i d$ pour chaque i, un sommet y de T_i qui n'est pas un sommet support et pour lequel $\gamma_L(T_i - y) = \gamma_L(T_i)$. Poser $D(T_{i+1}) = D(T_i) \cup \{b, d, u_1, ..., u_p\}$.

Notons que l'opération $\mathcal{F}_5$ ne peut être appliquée à y un sommet pendant d'un support fort, puisque dans ce cas $\gamma_L(T_i - y) < \gamma_L(T_i)$.

Suite à la définition de la famille $\mathcal{F}$, nous énonçonst un théorème qui caractérise les arbres atteignant la borne du théorème 5.1

Théorème 5.2. *[4] Soit T un arbre d'ordre $n \geq 2$, alors $\gamma_L(T) = (n + l - s)/2$ si et seulement si $T \in \mathcal{F}$.*

5.1.2 Borne inférieure pour γ_2, β et comparaison entre $\gamma_2(G)$ et $\beta(G)$ dans les arbres

Soient $G = (V, E)$ un graphe et D un dominant de G, l'idée de dominer tout sommet de $V - D$, k fois dans D a été introduite par Fink et Jacobson dans [15].

Dans ce paragraphe nous définissons les notions d'ensemble 2-dominant, d'ensemble stable, et nous énonçons quelques résultats concernant le nombre de 2-domination γ_2, et un théorème donnant une caractérisation des arbres T vérifiant $\gamma_2(T) = \beta(T)$.

Nous commençons par rappeller quelques définitions et propriétés:

Définition 5.3. *Soit un graphe $G = (V, E)$, un sous ensemble $S \subseteq V$ est un 2-dominant de G si tout sommet de $V-S$ est dominé par au moins deux sommets de S. Le nombre de 2-domination noté $\gamma_2(G)$ est égal à la cardinalité minimum d'un ensemble 2-dominant de G.*

Définition 5.4. *Soit un graphe $G = (V, E)$, un sous ensemble $S \subseteq V$ est un stable de G si $\langle S \rangle$ est graphe sans arêtes. Le nombre de stabilité, noté $\beta(G)$ est égal à la cardinalité maximum d'un stable maximal de G.*

Dans [15], Fink et al ont donné une borne inférieure pour $\gamma_2(G)$ dans le cas des arbres

Théorème 5.5. *[15] Si T est un arbre d'ordre n, alors on a $\gamma_2(T) \geq (n+1)/2$.*

Dans [8], Chellali a amélioré cette borne dans le cas des arbres avec $l > s$ en montrant les résultats suivants:

Lemme 5.6. *[8] Si G est un graphe d'ordre n, avec au plus un cycle, l sommets pendants et s sommets support, alors on a $\gamma_2(G) \geq (n+l-s)/2$.*

Dans [5], on note un théorème qui donne une borne inférieure du nombre de stabilité pour un certain graphe G.

Théorème 5.7. *[5] Si G est un graphe biparti connexe d'ordre n, avec l sommets pendants et s sommets support, alors on a $\beta(G) \geq (n+l-s)/2$*

Avant de donner la caractérisation des arbres T tels que $\gamma_2(T) = \beta(T)$, nous avons besoin de noter les remarques suivantes.

Remarque 5.8. *[3]* • *Pour une étoile $S_{1,p}$ avec $p \geq 2$, $\beta(S_{1,p}) = \gamma_2(S_{1,p}) = p$.*

- *Pour une double étoile $S_{p,q}$ avec $p \geq 2$, et $q \geq 2$, $\beta(S_{p,q}) = \gamma_2(S_{p,q}) = p + q$.*
- *Pour une double étoile $S_{1,q}$, $\beta(S_{p,q}) = 1 + q$ et $\gamma_2(S_{p,q}) = 2 + q$.*
- *Pour une étoile subdivisée SS_q, $\beta(SS_q) = \gamma_2(SS_q) = q + 1$.*
- *Pour une chaîne P_{2q+1}, $\beta(P_{2q+1}) = \gamma_2(P_{2q+1}) = q + 1$.*
- *Pour une chaîne P_{2q}, $\beta(P_{2q}) = q$ et $\gamma_2(P_{2q}) = q + 1$.*

Remarque 5.9. *[3] Dans un graphe G, il existe un $\beta(G)$-ensemble contenant tous les sommets pendants de G. Si u est un sommet support fort dans G, alors tout $\beta(G)$-ensemble contient L_u. Un $\gamma_2(G)$-ensemble contient tous les sommets pendants d'un graphe G.*

Dans le but de caractériser les arbres vérifiant $\gamma_2(T) = \beta(T)$, dans [3], Blidia et al ont défini une famile d'arbres $\mathcal{H}$ et ont montré le théorème suivant.

Théorème 5.10. *[3] Pour tout arbre T, on a $\gamma_2(T) \geq \beta(T)$.*

La famille d'arbres $\mathcal{A}$ est définie comme suit:

Soit $\mathcal{A}$ la famille des arbres qui peuvent être obtenus à partir d'une séquence d'arbres $T_1, T_2, ..., T_k$ $(k \geq 1)$, où T_1 est une étoile $S_{1,t}$ $(t \geq 2)$ centrée en un sommet w, $T = T_k$, et si $(k \geq 2)$ T_{i+1} est obtenu récursivement à partir de T_i par une des trois opérations définies ci-dessous. Poser $A(T_1) = L_w$.

Opération $\mathcal{O}_1$: Ajouter à T_i une étoile $S_{1,p}, p \geq 1$ centrée en un sommet x en attachant par l'arête yx un sommet pendant y de T_i. Poser $A(T_{i+1}) = L_x$.

Opération $\mathcal{O}_2$: Ajouter à T_i une étoile $S_{1,p}, p \geq 1$ centrée en un sommet x en attachant par l'arête yx un sommet non pendant y de $A(T_i)$. Poser $A(T_{i+1}) = A(T_i) \cup L_x$.

Opération $\mathcal{O}_3$: Ajouter à T_i une étoile $S_{1,p}, p \geq 2$ centrée en un sommet x en attachant par l'arête yx un sommet y de $V(T_i) - A(T_i)$. Poser $A(T_{i+1}) = A(T_i) \cup L_x$.

Soit $\mathcal{A}_1$ la sous famille de $\mathcal{A}$ constituée des arbres construits à partir de T_1 par l'application récursive de l'opération $\mathcal{O}_1$.

A titre d'exemple, on peut voir que la chaîne impaire P_{2q+1} est dans $\mathcal{A}_1$ puisqu'elle est obtenue suite à $q-1$ applications de l'opération $\mathcal{O}_1$ à l'étoile $S_{1,2}$, avec $p=1$.

La caractérisation des arbres T ayant $\gamma_2(T)=\beta(T)$ est donnée par le théorème 5.11

Théorème 5.11. *[3] Soit T un arbre. Alors les assertions suivantes sont équivalentes:*

a) $\gamma_2(T)=\beta(T)$.

b) $T=K_1$ *ou* $T\in\mathcal{A}$.

c) *T possède un unique $\gamma_2(T)$-ensemble qui est aussi un unique $\beta(T)$-ensemble.*

5.2 Relations entre γ_L, β, et γ_2 dans les arbres, et caractérisation des arbres extrémaux

En général les paramètres γ_L, β, et γ_2 sont incomparables. En effet si G est le graphe biparti complet $K_{p,q}$ avec $4\leq p\leq q$, on peut voir que $\gamma_L(K_{p,q})=p+q-2$, $\beta(K_{p,q})=q$ et $\gamma_2(K_{p,q})=4$.

Avant de donner des relations entre $\gamma_L(G)$, $\beta(G)$, et $\gamma_2(G)$ dans le cas des arbres, nous notons les remarques suivantes:

Remarque 5.12. • *Pour une étoile $S_{1,p}$, $\gamma_L(S_{1,p})=\beta(S_{1,p})=\gamma_2(S_{1,p})=p$.*

• *Pour une étoile double $S_{p,q}$, avec $p\geq 2$ et $q\geq 2$, $\gamma_L(S_{p,q})=\beta(S_{p,q})=\gamma_2(S_{p,q})=p+q$.*

• *Pour une étoile double $S_{1,q}$, $\gamma_L(S_{1,q})=\beta(S_{1,q})=q+1$ et $\gamma_2(S_{1,q})=q+2$*

• *Pour une étoile subdivisée SS_q, $\gamma_L(SS_q)=q$ et $\gamma_2(SS_q)=\beta(SS_q)=q+1$*

Suite aux théorèmes 5.1, 5.7, et 5.10, nous déduisons le corollaire suivant:

Corollaire 5.13. *[36] Pour tout arbre T, $\gamma_L(T)\leq(n+l-s)/2\leq\beta(T)\leq\gamma_2(T)$.*

Aprés avoir établi ce corollaire nous sommes en mesure de montrer la proposition suivante.

Proposition 5.14. *Si pour un arbre T, $\gamma_L(T) = \gamma_2(T)$, alors*

$\gamma_L(T) = \gamma_2(T) = \beta(T) = (n + l - s)/2$, $T \in \mathcal{F}$ et T est γ_L-excellent.

Preuve. Soit T un arbre tel que $\gamma_L(T) = \gamma_2(T)$. D'aprés le corollaire 5.13, il est clair que $(n + l - s)/2 \leq \gamma_2(T) = \gamma_L(T) \leq \beta(T) \leq \gamma_2(T) = \gamma_L(T) \leq (n + l - s)/2$ et donc $\gamma_L(T) = \beta(T) = \gamma_2(T) = (n + l - s)/2$. Comme $\gamma_L(T) = (n + l - s)/2$, donc d'aprés le théorème 5.2, $T \in \mathcal{F}$. Pour montrer que T est γ_L-excellent nous montrons que si $T \in \mathcal{F}$ alors T est γ_L-excellent, et pour cela nous procédons par induction sur le nombre total d'opérations $\mathcal{F}_i$ effectuées pour la construction de T. Il est clair que si $T = P_3$ ou P_4, T est γ_L-excellent. Supposons que tous les arbres de $\mathcal{F}$ construits avec $k-1$ opérations sont γ_L-excellents et, soit T un arbre de $\mathcal{F}$ construit avec k opérations. T est donc obtenu par l'application d'une opération de $\{\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2, \mathcal{F}_3, \mathcal{F}_4, \mathcal{F}_5\}$ à un arbre T' de $\mathcal{F}$ obtenu par $k-1$ opérations.

Cas 1 : La dernière opération effectuée sur T'est $\mathcal{F}_1$.

Soit T l'arbre obtenu à partir de T' en attachant un seul sommet w à un sommet support u de T'. Comme $\gamma_L(T') = (n' + l' - s')/2$ et $\gamma_L(T) = (n + l - s)/2$ avec $n = n' + 1, l = l' + 1$ et $s = s'$ alors $\gamma_L(T) = \gamma_L(T') + 1$. Ainsi tout $\gamma_L(T')$-ensemble peut être étendu à un $\gamma_L(T)$ ensemble en lui ajoutant le sommet w. Vu que T' est γ_L-excellent, tout sommet de T' est dans un $\gamma_L(T')$ ensemble, et que $V(T) = V(T') \cup \{w\}$ donc tout sommet de T est contenu dans un $\gamma_L(T)$-ensemble d'où T est γ_L-excellent.

Cas 2 : La dernière opération effectuée sur T' est $\mathcal{F}_2$.

De façon similaire au cas 1 nous montrons que $\gamma_L(T) = \gamma_L(T') + 1$. D'où tout $\gamma_L(T')$-ensemble peut être étendu à un $\gamma_L(T)$ ensemble en lui ajoutant soit le sommet u, soit le sommet v. Vu que T' est γ_L-excellent, tout sommet de T' est dans un $\gamma_L(T')$-ensemble, et que $V(T) = V(T') \cup \{u, v\}$ donc tout sommet de T est un $\gamma_L(T)$-ensemble d'où T est un γ_L-excellent.

Cas 3 : La dernière opération effectuée sur T'est $\mathcal{F}_3$.

Dans ce cas $n = n' + 2|S(H)| + 1$, $l = l' + |S(H)| - 1$ et $s = s' + |S(H)|$, comme $\gamma_L(T) = (n + l - s)/2$ alors $\gamma_L(T) = \gamma_L(T') + |S(H)|$.

Ainsi tout $\gamma_L(T')$-ensemble peut être étendu à un $\gamma_L(T)$-ensemble en lui ajoutant l'ensemble $S(H)$ donc tout sommet de $S(H)$ appartient à un $\gamma_L(T)$ −ensemble. Soit S' un $\gamma_L(T')$-ensemble contenant b', $S = (S' - \{b'\}) \cup \{a\} \cup L(H)$ est un $\gamma_L(T)$-ensemble contenant le sommet a et tous les sommets pendants de H. Vu que T' est γ_L-excellent, tout sommet de T' est dans un $\gamma_L(T')$-ensemble, et que $V(T) = V(T') \cup V(H)$ donc T est γ_L-excellent.

Cas 4 : La dernière opération effectuée sur T'est $\mathcal{F}_4$.

Dans ce cas $n = n'+2p+3$, $l = l'+2p$ et $s = s'+p+1$, similairement aux cas précédents nous déduisons l'égalité $\gamma_L(T) = \gamma_L(T') + p + 1$. Soit S' un $\gamma_L(T')$-ensemble contenant le sommet f, on peut voir que $S_1 = S' \cup \{c\} \cup \{u_i\}$ et $S_2 = (S' - \{f\}) \cup \{d, b\} \cup \{v_i\}$ pour $i \in \{0, 1, ..., p\}$ sont des $\gamma_L(T)$-ensembles contenant soit les sommets c et u_i, soit les sommets d, b et v_i, et ce pour tout $i \in \{0, 1, ..., p\}$ .Vu que T' est γ_L-excellent, tout sommet de T' est dans un $\gamma_L(T')$-ensemble et, que $V(T) = V(T') \cup \{d, c, b\} \cup \{u_i, v_i\}$ pour tout $i \in \{0, 1, ..., p\}$ donc T est γ_L-excellent.

Cas 5 : La dernière opération effectuée sur T'est $\mathcal{F}_5$.

Dans ce cas si y est un sommet pendant de T', $l = l'+p$, et $s = s'+p$, et si y n'est pas un sommet pendant de T, $l = l'+p+1$ et $s = s'+p+1$. Comme $n = n'+4+2p$, alors $\gamma_L(T) = (n + l - s)/2 = \gamma_L(T') + p + 2$. Soit S' un $\gamma_L(T')$-ensemble, alors $S' \cup \{c, a\} \cup \{u_i\}$ et $S' \cup \{b, d\} \cup \{v_i\}$ pour $i \in \{0, 1, ..., p\}$ sont des $\gamma_L(T)$-ensembles contenant soit les sommets c, a et u_i, soit les sommets d, b et v_i, et ce pour $i \in \{0, 1, ..., p\}$. Vu que T' est γ_L-excellent, tout sommet de T' est dans un $\gamma_L(T')$-ensemble et que, $V(T) = V(T') \cup \{d, c, b, a\} \cup \{u_i, v_i\}$ pour $i \in \{0, 1, ..., p\}$ donc T est γ_L-excellent. □

Notons qu'un arbre γ_L-excellent n'est pas nécessairement un arbre de $\mathcal{F}$, il suffit de considérer la chaîne P_{11} elle est γ_L-excellente et $P_{11} \notin \mathcal{F}$.

Avant de caractériser les arbres T avec $\gamma_L(T) = \gamma_2(T)$ nous définissons la couronne forte.

Définition 5.15. *Un arbre T est une couronne forte s'il est obtenu à partir d'un arbre T' en attachant à chaque sommet de T' au moins deux sommets pendants.*

Théorème 5.16. *[36] Soit T un arbre, alors les propriétés suivantes sont équivalentes:*

(i) $\gamma_L(T) = \gamma_2(T)$.

(ii) *L'arbre T est une couronne forte*

(iii) $\gamma_2(T) = (n + l - s)/2$.

Preuve. Il est clair que si T est une couronne forte alors $\gamma_L(T) = \gamma_2(T) = |L(T)|$.

Réciproquement supposons que T n'est pas une couronne forte et que $\gamma_L(T) = \gamma_2(T)$. Si $\gamma_L(T) = \gamma_2(T)$ alors suite au corollaire 5.13, $\gamma_2(T) = (n + l - s)/2$, et d'après les théorèmes 5.7 et 5.10, nous savons qu'il existe un $\beta(T)$-ensemble unique avec $\beta(T) = (n+l-s)/2$. Soit A, B une bipartition en stables des sommets de $V(T) - (L(T) \cup S(T))$, si $|A| = |B| = (n-l-s)/2$, alors $L(T) \cup A$, $L(T) \cup B$ sont deux stables de T de cardinalité $|L(T)| + |A| = (n+l-s)/2 = \beta(T)$, d'où la contradiction avec l'unicité d'un $\beta(T)$-ensemble. Sans perte de généralité supposons que $|A| > |B|$, donc $\beta(T) \geq |L(T) \cup B| > (n-l-s)/2$, ce qui constitue une contradiction avec $\beta(T) = (n + l - s)/2$. Donc T est nécéssairement tel que $A = B = \varnothing$. Soit v un sommet support de T qui n'est adjacent qu'à un seul sommet pendant, il est clair que $L(T)$ est un $E.D.L$ de T, et que $L(T) \cup \{u\} \subseteq D$ où D est un $\gamma_2(T)$-ensemble, donc $\gamma_L(T) \leq l < l + 1 \leq \gamma_2(T)$, ce qui est contradictoire avec $\gamma_L(T) = \gamma_2(T)$. Donc (i) et (ii) sont équivalentes.

Montrons à présent que (ii) est équivalente à (iii). Ainsi qu'on l'a vu précédement, si T est une couronne forte, alors $\gamma_L(T) = \gamma_2(T) = |L(T)| =.(n + l - s)/2$.

Réciproquement, supposons que T est une étoile $K_{1,p}$, $(p \geq 2)$, alors le résultat est vérifié. Supposons à présent que T n'est ni une étoile ni une couronne forte, et soit $\gamma_2(T) = (n + l - s)/2$, ce qui entraine $\beta(T) = (n + l - s)/2 = \gamma_2(T)$. En considérant les arguments développés précédemment il est aisé de conclure que l'arbre T est nécéssairement tel que $V(T) - (L(T) \cup S(T)) = \varnothing$.

Soit v un sommet support de T qui n'est adjacent qu'à un seul sommet pendant, il est clair que $\beta(T) = |L(T)| = l$, et comme tout $\gamma_2(T)$-ensemble contient $L(T) \cup \{v\}$, alors $\beta(T) = l < l+1 \leq \gamma_2(T)$, soit $\beta(T) < \gamma_2(T)$, ce qui est contradictoire avec $\beta(T) = \gamma_2(T)$. Donc T est une couronne forte.. $\square$

Remarque 5.17. *Il existe des arbres T tels que $\gamma_L(T) = (n+l-s)/2$, et $\gamma_2(T) > (n+l-s)/2$.*

En effet, il suffit de considérer les couronnes de chaînes $P_{3k} \circ K_1$. $\gamma_L(P_{3k} \circ K_1) = 3k = (n+l-s)/2$ et $\gamma_2(T) = 4k$. Notons que la couronne $P_{3k} \circ K_1$ n'est pas une couronne forte.

Le théorème qui suit donne une caractérisation des arbres T tels que $\gamma_L(T) = \beta(T)$.

Théorème 5.18. *[36] Pour tout arbre T, $\gamma_L(T) = \beta(T)$, si et seulement si $T \in \mathcal{F}$.*

Preuve. Si pour un arbre T, $\gamma_L(T) = \beta(T)$, alors d'aprés le théorème 5.7 et le corollaire 5.13, $(n+l-s)/2 \leq \beta(T) \leq \gamma_L(T) \leq (n+l-s)/2 \leq \beta(T)$, on a $\gamma_L(T) = \beta(T) = (n+l-s)/2$ et donc d'aprés le théorème **??**, $T \in \mathcal{F}$.

Réciproquement montrons que si $T \in \mathcal{F}$, alors $\gamma_L(T) = \beta(T)$, il suffit pour cela de montrer que si $T \in \mathcal{F}$, alors $\beta(T) = (n+l-s)/2$. Pour cela nous procédons par induction sur le nombre total d'opérations F_i efféctuées pour la construction de T. Il est clair que si $T = P_3$ ou P_4, $\gamma_L(T) = \beta(T) = 2$. Supposons que tous les arbres de $\mathcal{F}$ construits avec $k-1$ opérations vérifient $\gamma_L(T) = \beta(T) = (n+l-s)/2$, et, soit T un arbre de $\mathcal{F}$ construit avec k opérations. T est donc obtenu par l'application d'une opération de $\{\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2, \mathcal{F}_3, \mathcal{F}_4, \mathcal{F}_5\}$ à un arbre T' de $\mathcal{F}$ obtenu par $k-1$ opérations.

Cas 1: La dernière opération effectuée sur T' est $\mathcal{F}_1$.

Soit T l'arbre obtenu à partir de T' en attachant un seul sommet w à un sommet support u de T'. Comme tout $\beta(T')$-ensemble contient L_u, il peut être étendu à un stable de T en lui ajoutant le sommet w d'où $\beta(T) \geq \beta(T') + 1$, d'autre part soit S un $\beta(T)$-ensemble, alors $L_u \cup \{w\} \subset S$, donc $S - \{w\}$ est un stable de T', d'où $\beta(T') \geq \beta(T) - 1$, donc $\beta(T) = \beta(T') + 1 = (n' + l' - s')/2 + 1$. Comme $n = n' + 1, l = l' + 1$ et $s = s'$ on a $\beta(T) = (n+l-s)/2$.

Cas 2: La dernière opération effectuée sur T' est $\mathcal{F}_2$.

De façon similaire au cas 1, on montre que $\beta(T) = \beta(T') + 1 = (n' + l' - s')/2 + 1$. Comme $n = n' + 2, l = l' + 1$ et $s = s' + 1$ on a $\beta(T) = (n + l - s)/2$.

Cas 3: La dernière opération effectuée sur T' est $\mathcal{F}_3$.

Dans ce cas tout $\beta(T')$-ensemble peut être étendu à un stable de T en lui ajoutant l'ensemble $S(H)$, d'où $\beta(T) \geq \beta(T') + |S(H)|$. D'autre part soit D un $\beta(T)$-ensemble, alors si $a \in D$ (resp. si $a \notin D$) $D - (L(H) \cup \{a\}) \cup \{b'\}$, (resp. $D - S(H)$) est un stable de T', d'où $\beta(T') \geq \beta(T) - |S(H)|$. Donc $\beta(T) = \beta(T') + |S(H)|$. Comme $n = n' + 2|S(H)| + 1, l = l' + |S(H)| - 1$ et $s = s' + |S(H)|$, on a $\beta(T) = (n' + l' - s')/2 + |S(H)| = (n + l - s)/2$.

Cas 4: La dernière opération effectuée sur T' est $\mathcal{F}_4$.

Dans ce cas tout $\beta(T')$-ensemble peut être étendu à un stable de T en lui ajoutant l'ensemble $\{c, v_1, v_2, ...v_p\}$, d'où $\beta(T) \geq \beta(T') + p + 1$. Par ailleurs, si S est un $\beta(T)$-ensemble, alors si $f \in S$ (resp. si $f \notin S$) $S - \{c, v_1, v_2, ...v_p\}$ (resp.$(S - \{d, b, u_1, u_2, ...u_p\}) \cup \{f\}$) est un stable de T', d'où $\beta(T') \geq \beta(T) - p + 1$. Donc $\beta(T) = \beta(T') + p + 1$. Comme $n = n' + 3 + 2p, l = l' + p$, et $s = s' + p + 1$ on a $\beta(T) = (n' + l' - s')/2 + p + 1 = (n + l - s)/2$.

Cas 5: La dernière opération effectuée sur T' est $\mathcal{F}_5$.

Si y est un sommet pendant de T', soit D' un $\beta(T')$-ensemble, alors si $y \in D'$ (resp. si $y \notin D'$) $D' \cup \{c, a, u_1, u_2, ...u_p\}$ (resp. $D' \cup \{d, b, v_1, v_2, ...v_p\}$) est un stable de T, d'où $\beta(T) \geq \beta(T') + p + 2$. d'autre part soit D un $\beta(T)$-ensemble, alors si $y \in D$ (resp. si $y \notin D$), $D - \{c, a, u_1, u_2, ...u_p\}$ (resp. $(D - \{d, b, v_1, v_2, ..., v_p\})$ est un stable de T', d'où $\beta(T') \geq \beta(T') - p - 2$. Comme on a $n = n' + 4 + 2p$, et soit $l = l' + p$, $s = s' + p$, si y n'est pas un sommet pendant de T', soit $l = l' + p$, $s = s' + p$, si y est un sommet pendant de T', alors dans les deux cas $\beta(T) = \beta(T') + p + 2 = (n + l - s)/2$. □

Le théorème suivant est une conséquence des théorèmes 5.18 et 5.2

Théorème 5.19. *[36] Soit T un arbre, alors les propriétés suivantes sont équivalentes:*

(i) $\gamma_L(T) = (n + l - s)/2$.

(ii) $\gamma_L(T) = \beta(T)$.

Suite à ce théorème nous faisons la remarques suivante:

Remarque 5.20. *Il existe des arbres* T*, tels que* $\beta(T) = (n+l-s)/2$*, et* $(n+l-s)/2 > \gamma_L(T)$.

En effet, il suffit de considerer les chaînes d'ordre $n = 10k$. On a $\beta(P_{10k}) = 5k = (n+l-s)/2$ et $\gamma_L(P_{10k}) = 4k$.

Avant de faire la preuve du théorème 5.22 qui est une caractérisation des arbres tels que $\beta\,(T) = (n+l-s)/2$, nous rappelons la définition d'un couplage parfait.

Définition 5.21. *Soient* $G = (V, E)$ *un graphe, et soit* $E_0 \subset E$ *un sous ensemble d'arêtes de* G*.* E_0 *est dit couplage dans* G *si les arêtes de* E_0 *sont disjointes deux à deux. Si de plus tout sommet de* $V(G)$ *est incident à une arête de* E_0*, alors* E_0 *sera dit couplage parfait.*

Théorème 5.22. *[36] Soit* T' *l'arbre obtenu à partir d'un arbre* T *aprés la suppression de ses sommets supports et de ses sommets pendants. Alors* $\beta\,(T) = (n+l-s)/2$ *si et seulement si* T' *admet un couplage parfait ou* $V(T') = \varnothing$*.*

Preuve. Il est clair que si $V(T') = \varnothing$ alors $\beta\,(T) = |L(T)| = (n+l-s)/2$. Supposons que T' admet un couplage parfait. Alors $V(T')$ peut être partitionné en deux stables A et B tels que $|A| = |B| = (n-l-s)/2$. Ainsi l'ensemble $A \cup L(T)$ ou $B \cup L(T)$ est un stable maximum de T d'où $\beta\,(T) = l + (n-l-s)/2 = (n+l-s)/2$. Réciproquement supposons que $\beta\,(T) = (n+l-s)/2$ et que T' n'admet pas de couplage parfait. Dans ce cas $V(T')$ peut être partitionné en deux stables A et B.

Sans perte de généralité supposons $|A| > |B|$, ainsi l'ensemble $A \cup L(T)$ est un stable de T, d'où $\beta\,(T) \geq |A \cup L(T)| > l + (n-l-s)/2 = (n+l-s)/2$, soit $\beta\,(T) > (n+l-s)/2$, ce qui constitue une contradiction. $\square$

Remarque 5.23. *Il est utile de noter qu'on peut déterminer en temps polynomial si un arbre admet ou non un couplage parfait. Ce qui nous permet de vérifier en temps polynomial si pour un arbre donné* T*,* $\beta\,(T) = (n+l-s)/2$.

Soient :

$\mathcal{F}$ la famille des arbres tels que $\gamma_L(T) = (n + l - s)/2$; $\mathcal{L}$ la famille des arbres tels que $\gamma_L(T) = \gamma_2(T)$, $\mathcal{A}$ la famille des arbres tels que $\beta(T) = \gamma_2(T)$, et $\mathcal{G}$ la famille des arbres tels que $\beta(T) = (n + l - s)/2$. Alors nous déduisons les relations suivantes:

- Suite au théorème 5.18 $\mathcal{F} \subset \mathcal{G}$.
- Suite au théorème 5.16 $\mathcal{A} \cap \mathcal{G} \cap \mathcal{F} = \mathcal{A} \cap \mathcal{G} = \mathcal{L}$ et comme $\mathcal{F} \subset \mathcal{G}$ il s'ensuit $\mathcal{A} \cap \mathcal{F} = \mathcal{A} \cap \mathcal{G} = \mathcal{L}$.

CONCLUSION

Dans ce mémoire nous nous sommes intéréssés principalement à l'étude des graphes excellents par rapport au paramètre de la domination localisateur γ_L, et plus précisement aux arbres γ_L-excellents.

En effet, nous avons dans un premier temps caractérisé les chaînes et les chenilles γ_L-excellentes. Nous avons donné par la suite une caractérisation des arbres T γ_L-excellents, laquelle est basée sur la technique de l'élagage et sur la définition de l'ensemble des sommets appartenant à tout ou à aucun $\gamma_L(T)$-ensemble. Cette caractérisation nous permet aussi de déterminer les arbres γ_L-recommandables, γ_L-justes, et γ_L-indésirables.

De plus, nous avons établi par une preuve constructive la famille des arbres admettant un ensemble dominant localisateur minimum unique. Cette approche constructive est établie à partir d'arbres ayant la propriété d'unicité d'ensemble dominant localisateur minimum, auquels nous appliquons une des trois opérations qui ont été définies explicitement dans le chapitre **4.** Il est évident que les arbres admettant un γ_L-ensemble unique sont des arbres non γ_L-excellents.

En dernier lieu, nous avons établi des relations d'ordre entre les paramètres γ_L, γ_2, et β dans le cas des arbres. Ce qui nous a conduit à une caractérisation descriptive des arbres T vérifiant $\gamma_L(T) = \gamma_2(T)$ et $\gamma_L(T) = \beta(T)$. Nous avons aussi donné une caractérisation structurelle des arbres tels que $\beta(T) = (n + l - s)/2$.

Ces résultats contribuent à l'enrichissement de l'étude des différents paramètres de domination, particuliérement la domination localisateur et, ce dans la classe des arbres γ_L-excellents ou ayant un γ_L-ensemble unique.

Il n'en demeure pas moins que le domaine d'étude des graphes μ-excellents, ou admettant un μ-ensemble dominant unique, pour un paramètre de domination μ reste intéressant à explorer. Comme paramètre proche du nombre de domination localisateur, nous pouvons citer le nombre de domination total localisateur ou le nombre code identifiant.

Références

[1] Berge. C, Graphes et Hypergraphes, Dunod deuxième édition (1970).

[2] Berge C, Theory of graphs and its applications, Methuen London (1962).

[3] Blidia M. Chellali M., Favaron O, Independance and 2-domination in trees, Australasian Journal of Combinatorics Vol 33 (2005) 317-327.

[4] Blidia M., Chellali M., Maffray F., Moncel J., Semri A, Locating-domination and identifying codes in trees, Australasian Journal of Combinatorics Vol 39 (2007) 219-232.

[5] Blidia M., Chellali M., Favaron O., Medah N, On k-independence in graphs with emphasis on trees, Discrete Mathematics 307 (2007) 2209-2216.

[6] Chartrand G., et Lesniak L, Graphs &Digraphs, Third Edition, Chapman &Hall, London, (1996).

[7] Chellali M., et Haynes T.W, On paired and double domination in graphs, Utilitas Mathematica 67 (2005) 161-171.

[8] Chellali M., Bounds on the 2-domination number in cactus graphs, Opuscula Matematica Vol 26 No 1 (2006).

[9] Cockayne E.J., Hedetniemi S.T, Towards a theory of domination graphs, Network 7 (1977) 247-261.

[10] Cockayne E.J., Daves R.M, Hedetniemi S.T, Total domination in graphs, Networks Vol 10 (1980) 211-219

[11] Cockayne E.J., Henning M et Mynhardt C. M, Vertices contained in all or in no minimum total dominating set of a tree, Discrete Mathematics 260 (2003) 37-44

[12] Chellali M., et Haynes T.W, Trees with unique minimum paired dominating sets, Ars Comb 73 (2004) 3-12.

[13] Chellali M., et Haynes T.W, A characterisation of trees with unique minimum double dominating sets, Submitted for publication.

[14] Dauterman R. E, Vertices in total dominating sets, A thesis presented to the faculty of Departement of Mathematics East Tennessee State University Mai (2000).

[15] Fink J.F., Jacobson M.S, n-domination in graphs, in Graph Theory with Applications to Algoritms and Computer, Alavi Y., and Schwenk A. J.(eds.), 283-300 (Kalamazoo, MI 1984) Wiley (1985).

[16] Fricke G.H., Haynes T.W.,Hedetnieni S. M.,Hedetnieni S. T et Laskar R. C, Excellents trees, Bull.Inst.Combin Appl 34 (2002) 27-28.

[17] Gunter G, Hartnell H, Markus L.R, and Rall D, Graphs with unique minimum dominating sets, Congr Numer 101 (1994) 55-63.

[18] Haynes T.W., Hedetniemi S.T.et Slater P.J, Fundamentals of domination in Graphs, Marcel Dekker New York, 1998.

[19] Hedetniemi S.T.,T.W Haynes and P.J.Slater, Domination in Graphs: Advenced Topics, Marcel Dekker New York 1998.

[20] Haynes T.W, and Henning M.A, Trees with unique minimum total dominating sets, Discuss. Math Graph Theory 22 (2002) 233-246.

[21] Haray F.et Haynes T.W, Double domination in graphs, Ars Combin 55 (2000) 201-213.

[22] Haynes T.W.,et Slater P.J, Paired domination in graphs, Networks 32 (1998) 199-206.

[23] Hedetniemi S.T., Laskar R. C, Bibliography on domination in graphs and some basic definitions of parameters, Discrete mathematics 86 (1990) 257-477.

[24] Haynes .T. W, Henning M.A, A characterisation of i-excellent trees, Discrete Mathematics 248 (2002) 69-77.

[25] Henning M.A, Total domination excellent trees, Discrete Mathematics 263 (2003) 93-104.

[26] De Jaenish C.F, Applications de l'analyse mathématique au jeu d'echecs, Petrograd 1862.

[27] Blidia M.,Chellali M., Khelifi S, Vertices belongings to all or to no minimum double sets in trees, AKCE J Graphs Combin 2 No 1 (2005) 1-9.

[28] Khelifi S, Les Graphes $\mu-$ excellents, Thèse de Magitère Blida 2004.

[29] Blidia M.,Chellali M., Khelifi S, Vertices belongings to all or to no minimum paired sets in trees, Accepté dans Revue Science et Technologie.

[30] Mynhardt C.M., Vertices contained in every minimum dominnnating set of a tree, J Graph Theory 31(3) (1999) 163-177

[31] Ore O, Theory of gaphs, Amer Soc Coloq Pub 38 Providence R I, (1962).

[32] Slater P.J, Dominatung and reference sets in graph, J Mathematical and Physical Sciences 22 No 4 (1988) 445-455.

[33] Slater P.J, Dominatung and reference sets in graph, J Mathematical and Physical Science 22 (1988) 445-455.

[34] Blidia M., and Lounes R, Vertices belongings to all or to no minimum locating dominating sets of trees and γ_L-excellents trees, Submitted.

[35] Blidia M.,Chellali M., Lounes R., and Maffray F, Trees with unique minumum locating (total) dominating sets, Submitted.

[36] Blidia M., Favaron O., and Lounes R, Relation between the locating-domination, 2-domination, and independence number in trees, En préparation.