



**REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE**

**MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR ET DE LA RECHERCHE  
SCIENTIFIQUE**

**UNIVERSITE DE BLIDA  
FACULTE DES SCIENCES DE L'INGENIEUR**

**INSTITUT DE MECANIQUE**

**MEMOIRE DE MAGISTER**

Présenté par: **Madjid EZZRAIMI**

Pour l'obtention du diplôme de  
**MAGISTER  
EN GENIE MECANIQUE**

Option : **CONSTRUCTION MECANIQUE**

**Thème**

**EXPLOITATION DES FONCTIONS DE REponses  
FREQUENTIELLES DANS LE RECALAGE DES  
MODELES DYNAMIQUES**

Membres du jury:

Président	: Dr. M. OUALI	Maître de conférences	UST Blida
Examineurs :	Dr. B. NECIB	Professeur	U. Constantine
	Dr. Z. YOUBI	Maître de conférences	UST Blida
	Dr. H. FERDJANI	Maître assistant	UST Blida
Rapporteur	: Dr. A. AIAD	Maître de conférences	UST Blida

ALGERIE 2001

---

## REMERCIEMENTS

*Ce travail a été réalisé au sein de l'Institut de Mécanique de l'Université de Blida sous la direction et la responsabilité scientifique du Docteur A. AIAD, Maître de Conférences à l'Université de Blida.*

*C'est avec un grand plaisir pour moi de pouvoir exprimer mes chaleureux remerciements et toute ma reconnaissance à toutes les personnes qui m'ont aidé de près ou de loin à la réalisation de ce travail.*

*Qu'il me soit permis de remercier très sincèrement le Docteur A. AIAD pour avoir accepté de me diriger tout au long de ma recherche et de saluer ses compétences scientifiques.*

*Je remercie le Docteur M. OUALI, Maître de Conférences à l'U.S.T. Blida, qui me fait l'honneur en acceptant de présider le Jury de cette thèse.*

*Je remercie également Monsieur B. NECIB Professeur à l'Université Mentouri de Constantine, le Docteur Z. YOUBI Maître de Conférences et Recteur de l'U.S.T. Blida ainsi que le Docteur H. FERDJANI, pour l'honneur qu'ils me font en acceptant de participer au jury.*

*J'exprime ma profonde reconnaissance à ma chère famille et en particulier mes parents pour leur aide et le soutien moral, surtout pour la patience, la compréhension et la confiance dont ils ont fait preuve.*

*En fin je n'oublie pas mes amis qui ont fait preuve de serviabilité et qui m'ont apporté leur aide et leur soutien moral et matériel. Je tiens à remercier aussi la direction et tout le personnel de l'institut mécanique de l'université de Blida pour leur aide et leur amabilité.*

---

## ملخص

تعتبر اليوم المحاكاة العددية مرحلة هامة وقد لا يمكن الاستغناء عنها (تجاوزها) للتصميم، التنبؤ و التحكم في الجملات الميكانيكية. بالإضافة إلى كونها سهلة الاستعمال، فالمحاكاة العددية تحتاج عادة أقل إمكانيات و استثمارات بالنسبة للاختبارات التجريبية التي تطبق على البنات أو على نماذجها الأصلية. لكن، بالرغم من دقتها، إلا أن النموذج العددي يحتوي دائما على بعض الأخطاء. و لكي يأخذ مكان التجارب في الدراسات و التحاليل الملحقة (الإضافية)، يجب تصحيح هذا النموذج العددي من خلال مجابته «حساب - تجربة». التصحيح (الضبط) هو واحد من أهداف هذه المجابهة و يرمي إلى تحسين تمثيل النموذج العددي، و هذا على قاعدة معطيات النموذج التجريبي (النموذج المرجعي). في هذا الإطار، طريقة تصحيح تعرف بـ «طريقة الأجوبة التواترية» تصنع هدف هذه المذكرة.

## RESUME

*La simulation numérique constitue aujourd'hui une étape prépondérante sinon inévitable dans la conception, la prédiction et la tenue des systèmes mécaniques. Outre la facilité relative de sa mise en œuvre, une simulation numérique nécessite généralement moins d'investissement que des essais effectués sur les structures ou sur leurs prototypes. Cependant, malgré sa finesse, il subsiste toujours des imprécisions au niveau de modèle numérique. Pour se substituer à l'expérimentation dans des études et analyses annexes, il y a lieu de valider ce modèle numérique à travers une confrontation «calcul-essais». Le recalage (correction, ajustement) est l'un des objectifs de cette confrontation et a pour but d'améliorer la représentativité du modèle numérique sur la base des données du modèle expérimental (modèle de référence). Dans ce cadre, une méthode de recalage dite «méthode des réponses en fréquences» fera l'objet du présent mémoire.*

## ABSTRACT

*The numerical simulation constitutes today a dominating if not inevitable stage in the design, the prediction and the behavior of the mechanical systems. In addition to the relative facility of its implementation, a numerical simulation requires generally less costs than tests carried out on the structures or their prototypes. However, in spite of its smoothness, the numerical model always contains some inaccuracies. So, in order to use it for other analysis, we have to validate it via a confrontation operation including tests and calculus. The purpose of updating (correction, adjustment) is one of the objectives of this confrontation and is to improve the representativeness of the numerical model on the basis of the experimental data (reference model). In this framework, a method of updating known as «frequency responses method» will be the subject of the present report.*

---

## SOMMAIRE

	Page
<b>Chapitre 1 : Introduction générale</b> .....	1
1.1. Introduction.....	1
1.2. Analyse vibratoire théorique et expérimentale.....	1
1.3. Orientation du sujet.....	5
1.4. Présentation de la recherche.....	6
<b>Chapitre 2 : Vibrations des structures</b> .....	8
2.1. Introduction.....	8
2.2. Analyse vibratoire théorique.....	9
2.2.1. Présentation.....	9
2.2.2. Principe de la méthode des éléments finis.....	9
2.2.3. Problème aux valeurs propres.....	10
2.2.4. Propriétés d'orthogonalité et normalisation.....	12
2.2.5. Analyse de la réponse forcée et détermination des fonctions de réponses fréquentielles.....	13
2.3. Analyse vibratoire expérimentale.....	15
2.3.1. Présentation.....	15
2.3.2. Techniques d'excitation.....	16
2.4. Confrontation des deux analyses.....	18
<b>Chapitre 3 : Confrontation et ajustement des modèles dynamiques</b> .....	20
3.1. Introduction.....	20
3.2. Confrontation des mesures expérimentales et les résultats numériques.....	20
3.2.1. Comparaison des fréquences.....	21
3.2.2. Comparaison des modes propres.....	21
3.2.3. Comparaison des fonctions de réponses en fréquences.....	24
3.3. Notion des modèles incomplets.....	27
3.3.1. Condensation statique de Guyan.....	29
3.3.2. Condensation dynamique.....	30

---

---

3.3.3. Méthode SERP.....	32
3.3.4. Méthode IRS.....	34
3.4. Les avantages et inconvénients de la condensation et l'extension.....	35
3.5. Recalage des modèles.....	35
3.5.1. Les méthodes du recalage globale.....	36
3.5.2. Les méthodes du recalage local.....	38
3.6. Avantages et inconvénients des catégories du recalage.....	40
<b>Chapitre 4 : Le recalage par la méthode des réponses en fréquences (MRF).....</b>	<b>41</b>
4.1. Introduction.....	41
4.2. Description de la méthode MRF.....	42
4.2.1. Principe de la méthode.....	42
4.2.2. Formulation de base.....	42
4.3. Paramétrisation et approximation.....	44
4.3.1. Approximation par rapport aux degrés de libertés.....	46
4.3.2. Approximation par rapport aux matrices élémentaires.....	47
4.4. Extension du modèle expérimental.....	49
4.4.1. Extension directe.....	49
4.4.2. Extension dynamique.....	50
4.5. Les fréquences et les modes retenues pour le recalage.....	51
4.6. Résolution et détermination des coefficients d'erreurs.....	52
4.7. Considérations numériques.....	53
4.8. Les critères de convergence.....	54
4.9. Recalage du modèle numérique initial.....	55
<b>Chapitre 5 : Applications.....</b>	<b>58</b>
5.1. Introduction.....	58
5.2. Présentation des applications.....	58
5.2.1. Modèle numérique.....	58
5.2.2. Modèle expérimental.....	59
5.2.3. L'extension du modèle expérimental.....	60
5.2.4. Détermination des coefficients des erreurs.....	60
5.2.5. Modèle recalcé (corrige).....	61

---

---

5.2.6. Comparaison et validation.....	61
5.3.Application 1 (système en masses-ressorts).....	62
5.4.Application 2 (système en poutre).....	73
5.5.Application 3 (système en plaque).....	78
5.6.Application 4 (système en poutre a 19 éléments).....	82
<b>Conclusion générale.....</b>	<b>86</b>
<b>Annexe : Résolution des systèmes d'équations algébriques linéaires.....</b>	<b>89</b>
<b>Références bibliographiques.....</b>	<b>95</b>

---



## NOMENCLATURE

### NOTATIONS

- $N$  : nombre de degrés de liberté total.
- $N_1$  : nombre de degrés de liberté mesurés.
- $N_2$  : nombre de degrés de liberté non mesurés.
- $N_m$  : nombre de matrices élémentaires de masse.
- $N_{mc}$  : nombre de modes dans la bande de fréquences retenue pour le recalage.
- $N_k$  : nombre de matrices élémentaires de rigidité.
- $N_f$  : nombre de fréquences retenues pour le recalage.
- $p$  : les degrés de liberté primaires.
- $s$  : les degrés de liberté secondaires.
- $[M]$  : matrice de masse.
- $[M_e]$  : matrice élémentaire de masse.
- $[\Delta M]$  : matrice des erreurs de masse.
- $\Delta m_i$  : coefficient d'erreur sur la  $i^{\text{ème}}$  matrice élémentaire de masse.
- $[K]$  : matrice de rigidité.
- $[K_e]$  : matrice élémentaire de rigidité.
- $[\Delta K]$  : matrice des erreurs de rigidité.
- $\Delta k_i$  : coefficient d'erreur sur la  $i^{\text{ème}}$  matrice élémentaire de rigidité.
- $\{\Delta\}$  : vecteur des erreurs contenant les  $\Delta m_i$  et les  $\Delta k_i$ .
- $[C_{eq}]$  : matrice d'amortissement visqueux équivalent.
- $\omega$  : fréquence retenue pour le recalage.
- $\omega_c$  : fréquence propre calculée (numérique).
- $\omega_x$  : fréquence propre expérimentale (mesurée).
- $\omega_r$  : fréquence propre recalée.
- $[\phi]$  : matrice des vecteurs propres.

- 
- $[H]$  : matrice des fonctions de réponses en fréquences (fonction de transfert).
- $[Z]$  : matrice de rigidité dynamique (matrice inverse de  $[H]$ ).
- $[I]$  : matrice identité.
- $\{F\}$  : vecteur des sollicitations extérieurs.
- $\{X\}$  : vecteur des déplacements.
- $\{\dot{X}\}$  : vecteur des vitesses.
- $\{\ddot{X}\}$  : vecteur des accélérations.
- $[T]$  : matrice de transformation (pour la condensation ou extension).
- $P_m(i)$  : coefficient de perturbation du  $i^{\text{ème}}$  matrice élémentaire de masse.
- $P_m$  : coefficient de perturbation commun pour tous les matrices élémentaires de masse.
- $P_k(i)$  : coefficient de perturbation du  $i^{\text{ème}}$  matrice élémentaire de rigidité.
- $P_k$  : coefficient de perturbation commun pour tous les matrices élémentaires de rigidité.

### ABREVIATIONS

- ddl : les Degrés De Liberté.
- ERM : l'erreur maximale sur les matrices élémentaires de masse.
- ERK : l'erreur maximale sur les matrices élémentaires de rigidité.
- ER $\omega$  : l'erreur maximale entre les fréquences propres recalées et expérimentales.
- FRF : Fonctions de Réponses en Fréquences.
- MRF : Méthode de la Réponse en Fréquence.

### DESIGNATIONS

- c : désigne calculé (numérique).
- x : désigne expérimental (mesuré).
- r : désigne recalé (ajusté)
-

---

## LISTE DES FIGURES

	Page
Fig.1.1. Modèle numérique du comportement dynamique de la structure.....	2
Fig.1.2. Modèle expérimentale du comportement dynamique de la structure.....	3
Fig.1.3. Validation et RECALAGE (ajustement) du modèle numérique.....	4
Fig.2.1. Chemin de l'analyse vibratoire théorique.....	15
Fig.2.2. Schéma général d'une station d'analyse modale expérimentale.....	17
Fig.3.1. Comparaison graphique des fréquences.....	22
Fig.3.2. Différences entre les bases modales expérimentales (X) et numériques(C).....	28
Fig.4.1. Organigramme de la méthode MRF.....	56
Fig.5.1. Organigramme des différentes étapes suivies pour les applications.....	
Fig.5.2. Système en masses-ressorts à 10 ddl.....	62
Fig.5.3. Les coefficients de perturbations et les coefficients des erreurs (Application1-Test1).....	63
Fig.5.4. Les graphes de l'FRF numérique (calculée), expérimentale et recalée (Application1-Test1).....	64
Fig.5.5. Les coefficients de perturbations et les coefficients des erreurs (Application1-Test2).....	66
Fig.5.6. Les graphes de l'FRF numérique (calculée), expérimentale et recalée (Application1-Test2).....	67
Fig.5.7. Les coefficients de perturbations et les coefficients des erreurs (Application1-Test3).....	69
Fig.5.8. Les graphes de l'FRF numérique (calculée), expérimentale et recalée (Application1-Test3).....	69
Fig.5.9. Les coefficients de perturbations et les coefficients des erreurs (Application1-Test4).....	71
Fig.5.10. Les graphes de l'FRF numérique (calculée), expérimentale et recalée (Application1-Test4).....	72
Fig.5.11. Système continu en 10 éléments poutres.....	73
Fig.5.12. Les coefficients de perturbations et les coefficients des erreurs (Application2-Test4).....	76

---

---

Fig.5.13. Les graphes de l'FRF numérique (calculée), expérimentale et recalée (Application2-Test4).....	76
Fig.5.14. Système continu en 12 éléments plaques.....	78
Fig.5.15. Les coefficients de perturbations et les coefficients des erreurs (Application3- Test2).....	80
Fig.5.16. Les graphes de l'FRF numérique (calculée), expérimentale et recalée (Application3-Test2).....	81
Fig.5.17. Système continu en 19 éléments poutre.....	82
Fig.5.18. Les coefficients de perturbations et les coefficients des erreurs (Application4).....	83
Fig.5.19. Les graphes de l'FRF numérique (calculée), expérimentale et recalée (Appl4).....	84

---

---

## LISTES DES TABLEAUX

	Page
Tab.5.1. Les dix fréquences propres de modèle numérique, expérimental et recalé.(Application1-Test1).....	64
Tab.5.2. Résultats et paramètres d'estimation (mesures complètes) (Application1-Test1).....	65
Tab.5.3. Les dix fréquences propres de modèle numérique, expérimental et recalé.(Application1-Test2).....	67
Tab.5.4. Résultats et paramètres d'estimation (mesures complètes) (Application1-Test2).....	67
Tab.5.5. Les dix fréquences propres de modèle numérique, expérimental et recalé.(Application1-Test3).....	68
Tab.5.6. Résultats et paramètres d'estimation (mesures complètes) (Application1-Test3).....	69
Tab.5.7. Les dix fréquences propres de modèle numérique, expérimental et recalé.(Application1-Test4).....	71
Tab.5.8 : Résultats et paramètres d'estimation (mesures complètes) (Application1-Test4).....	71
Tab.5.9. Résultats et paramètres d'estimation (mesures complètes) (Application2-Test1).....	74
Tab.5.10. Résultats et paramètres d'estimation (mesures complètes) (Application2-Test2).....	74
Tab.5.11. Résultats et paramètres d'estimation (mesures incomplètes) (Application2-Test3).....	75
Tab.5.12. Les dix fréquences propres de modèle numérique, expérimental et recalé.(Application2-Test4).....	77
Tab.5.13. Résultats et paramètres d'estimation (mesures incomplètes) (Application2-Test4).....	77
Tab.5.14. Résultats et paramètres d'estimation (mesures incomplètes) (Application3-Test1).....	79

---

---

Tab.5.15. Les dix fréquences propres de modèle numérique, expérimental et recalé.(Application3-Test2).....	80
Tab.5.16. Résultats et paramètres d'estimation (mesures incomplètes) (Application3-Test2).....	80
Tab.5.17. Les dix fréquences propres de modèle numérique, expérimental et recalé (Application4).....	83
Tab.5.18. Résultats et paramètres d'estimation (mesures incomplètes) (Application4).....	84

---

---

***CHAPITRE 1***  
***INTRODUCTION GENERALE***

---

## CHAPITRE 1

### INTRODUCTION GENERALE

#### 1.1. INTRODUCTION

La conception à moindre coût d'une structure en toute conformité, peut être la parfaite adéquation que tout constructeur se doit de réussir. En effet, ce but exprime bien le problème de la conception d'un produit industriel dans un contexte d'enjeux économiques importants où règne une forte concurrence. Parallèlement, les spécifications liées au cahier des charges ne cessent de s'accroître. Il est donc de plus en plus difficile de répondre au cahier des charges dans le minimum de temps sans entraîner des surcoûts souvent non négligeables et difficiles à évaluer.

La réussite d'un produit industriel se joue en grand partie dès sa conception, cette phase de mise en conformité doit être effective dès l'instant où la structure n'existe qu'à l'état de projet. Pour se faire le concepteur peut être amené à élaborer un modèle mathématique qui peut représenter la future structure. L'atout d'un tel modèle est sa capacité pour prédire (par simulation) des comportements et à fournir de multiples informations pour de multiples configurations, et cela avant même que la structure n'existe physiquement, comme il peut contribuer à la préparation des essais sur prototype.

#### 1.2. ANALYSE VIBRATOIRE THEORIQUE ET EXPERIMENTALE

Dans les études de conception, le calcul des structures est une opération déterminante pour le choix que font les ingénieurs. En effet, le dimensionnement d'une construction se fait en tenant compte de son éventuel comportement sous des contraintes appliquées. Dans cette perspective des méthodes numériques se sont développées et diversifiées en fonction du domaine considéré (différences finis, éléments finis, volumes finis,...).

La méthode la plus utilisée dans le domaine de calcul des structures est la méthode des éléments finis. Son aspect numérique, la nature de sa formulation, la rapidité de son exécution et la précision des résultats obtenus, font qu'elle fasse à ce jour l'objet de grandes recherches dans les laboratoires de structures, d'où le prix élevée de ses applications lors de leurs commercialisations.

La construction du modèle numérique supportée par la Méthode des Eléments Finis (MEF) permet la prédiction des comportements dynamiques de ces structures, où les caractéristiques dynamiques du modèle numérique peuvent être trouvées par la résolution du problème aux valeurs propres construit à partir des matrices du système (matrice de masse, matrice de rigidité et matrice d'amortissement dans le cas dissipatif) produites par la MEF (Fig.1.1).

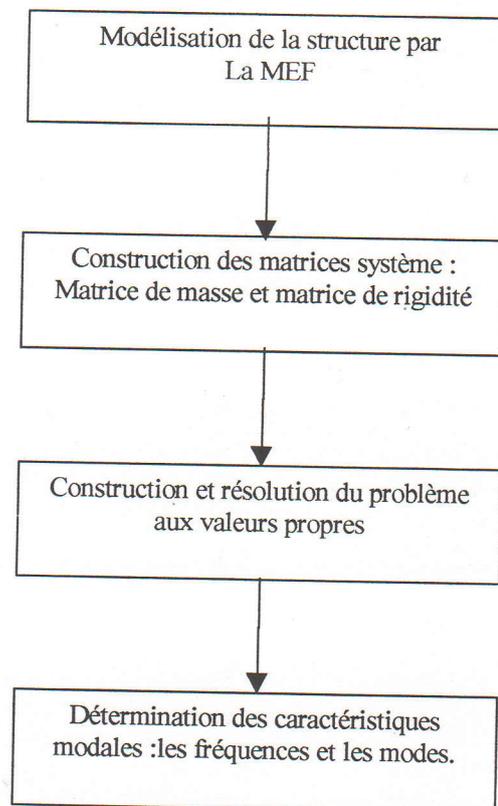


Fig.1.1.Modèle numérique du comportement dynamique de la structure.

Une deuxième approche toujours d'actualité, est dite approche expérimentale qui se fait au moyen des tests et des mesures exercés sur la structure réelle ou sur son prototype. Les caractéristiques dynamiques sont déterminées selon le schéma de la figure ci-dessous (Fig.1.2).

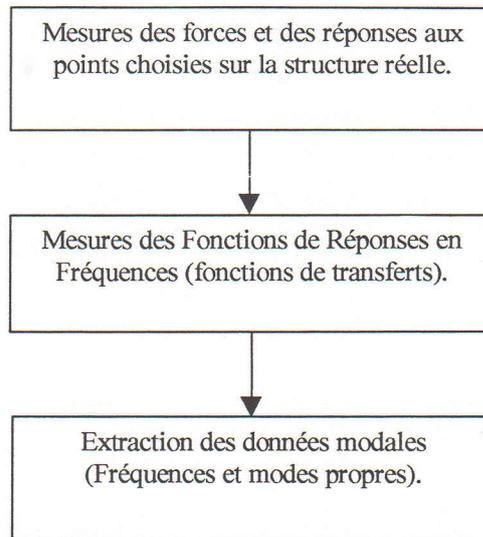


Fig.1.2.Modèle expérimental du comportement dynamique de la structure.

Le développement des performances de l'outil informatique et des méthodes numériques a rendu possible le traitement de grandes matrices issues des analyses par éléments finis, permettant un gain considérable en temps de calcul donc en coût.

Sur l'autre plan, les progrès considérables de la qualité et performances du matériels d'expérimentation, ont permis l'obtention des mesures avec plus de précision, permettant ainsi la construction d'un modèle expérimental reflétant plus fidèlement le comportement vibratoire de la structure ou de son prototype.

Généralement, il est à constater que les deux approches numérique et expérimentale, ne reflètent pas rigoureusement le même comportement dynamique pour une même structure; cette différence est due essentiellement aux erreurs relatives à chacune des deux approches. Pour l'approche numérique, l'idéalisation de géométrie en plusieurs parties de la structure durant l'étape de modélisation entraîne des erreurs sur les caractéristiques dynamiques relatives à ce modèle. D'autre part, les erreurs d'expérimentation sont inévitables et peuvent avoir des origines diverses. Parmi ces erreurs on cite, les erreurs de calibrage du matériels, le positionnement des capteurs; ces erreurs attribuent au modèle un pourcentage d'erreur, qui diffère d'un matériels à un autre [Heyl87, Aia91, Vis92a, Mot93].

Néanmoins, toutes ces erreurs ne sont pas généralement aussi importantes pour que les deux modèles soient rejetés, mais bien au contraire plusieurs alternatives sont possibles. L'idée de faire une comparaison entre les deux modèles est la plus évidente. Mais l'alternative d'une combinaison des deux approches en essayant d'atteindre une description meilleure et unifiée de la structure et de son comportement, est la plus intéressante. La réalisation de cette dernière peut se faire en corrigeant les erreurs de l'un des deux modèles (le plus contaminé par les erreurs) en se basant sur les données de l'autre (le moins contaminé par les erreurs) (Fig.1.3). Les techniques qui permettent la combinaison et la correction sont appelées "techniques de RECALAGE" qui font partie d'un axe de recherche assez récent dans le domaine de la dynamique des structures.

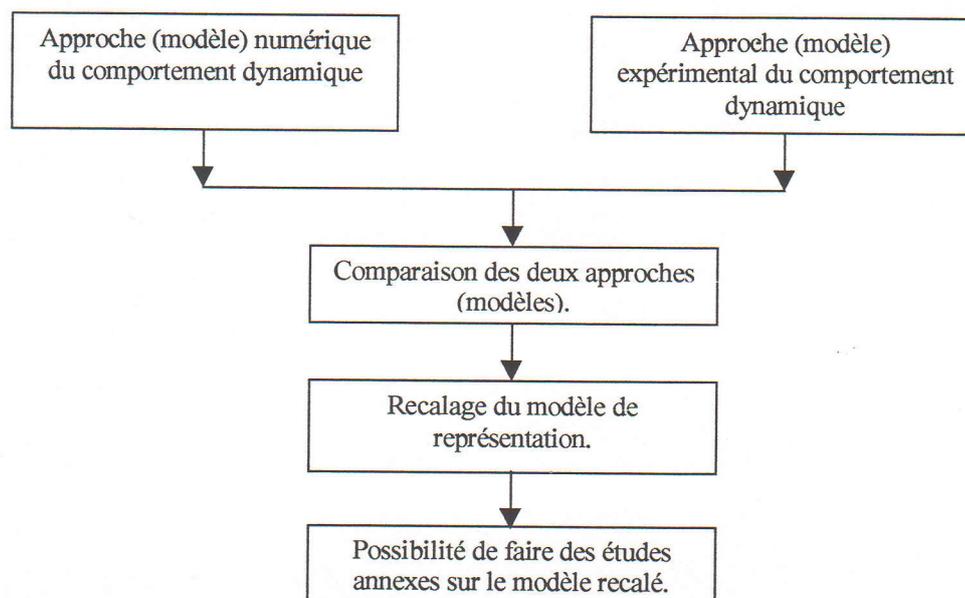


Fig.1.3. Validation et RECALAGE (ajustement) du modèle numérique.

Depuis plusieurs années, les techniques de recalage ne cessent de se développer en nombre et en qualité pour satisfaire principalement les objectifs suivants [Hey87, Aia91] :

- construction d'une représentation mathématique plus précise du comportement vibratoire de la structure,
- en se basant sur le modèle numérique **RECALE**, beaucoup d'études annexes pouvant être faites en toute confiance sans avoir à chaque fois recours aux tests sur la structure réelle ou sur son prototype (tache coûteuse),
- diminution du nombre de prototypes pendant la phase de conception, ce qui rend le coût de la réalisation de la structure finale plus abordable.



### 1.3. ORIENTATION DU SUJET

Pour atteindre une représentation numérique du comportement vibratoire des structures avec les avantages énumérés précédemment, un ajustement au préalable de ce modèle est indispensable, et l'utilisation des techniques dites de RECALAGE pour cet effet est une solution inévitable. Ces techniques de recalage, développées depuis plusieurs années sont devenues d'un nombre important. Dans ce cadre, plusieurs essais de classification de ces techniques sont apparues, mais un classement le plus général consiste à les subdivisées en deux catégories principales. L'une faisant référence aux groupes de méthodes dites « méthodes (techniques) locales » et l'autre à celles dites « méthodes (techniques) globales » [Hey87, Roy90a, Aia91, Vis92a, Mor93].

Les méthodes globales modifient directement les termes des matrices de masse et de rigidité globales du modèle éléments finis. Leur formulation s'appuie sur les équations d'orthogonalité. Elles font introduire les fréquences propres expérimentales et nécessitent l'extension des modes propres expérimentaux. Pour la part de ces méthodes, l'avantage majeur est celui d'une mise en œuvre aisée et surtout, elles conduisent à des schémas de résolution non itératifs. En revanche, elles ne permettent pas de donner une signification physique des modifications lors du recalage (voir chapitre3).

En ce qui concerne les méthodes locales, ça consiste en la modification locale du modèle par des coefficients correcteurs associés aux éléments ou groupes d'éléments de la structure. Leur principal souci est d'assurer le lien entre les modifications et les paramètres physiques du modèle (voir chapitre 3).

Partant du fait que le domaine du recalage fait partie d'un axe de recherche relativement récent, et en plus de l'absence d'une synthèse détaillée concernant les techniques de recalage dans la littérature; le choix et l'orientation de notre sujet de recherche vers une méthode de recalage particulière est difficile.

Néanmoins, pour éclaircir au moins une partie de cet axe de recherche, on a choisi de traiter en détail une technique appartenant à la catégorie des méthodes locales, elle est reconnue par « Méthode de la Réponse en Fréquences (MRF) », ce choix peut être justifier principalement par :

- ✓ La disponibilité de quelques articles sur cette technique en particulier, a donné l'idée de franchir cet axe de recherche à partir de celle-ci.
- ✓ Cette technique est assez récente par rapport à beaucoup d'autres, elle a été proposée en son premier développement en 1990 [Lin90].
- ✓ Les avantages relatifs à la catégorie des méthodes locales dont la méthode MRF appartient, surtout leur prise en compte de la signification physique des corrections lors du recalage, est d'un intérêt considérable.
- ✓ Elle utilise les fonctions de réponses en fréquences directement durant la phase du recalage, permettant d'éviter des erreurs supplémentaires.

Il est à noter que le nom de la méthode est lié à l'utilisation des Fonctions de Réponses en Fréquences (FRF) directement dans sa formulation, et qui fait la différence par rapport à plusieurs méthodes de recalage qui l'ont précédé, où les données modales sont utilisées. L'idée est d'éviter de passer par l'étape de la détermination des données modales à partir des FRF, car durant cette opération beaucoup d'erreurs sont introduites. Ces erreurs peuvent être importantes surtout dans le cas des structures complexe, ou comprenant des modes propres couplés ou difficilement identifiables.

Dans le but de découvrir les limites et les mérites de cette technique de recalage, le développement d'un algorithme de celle-ci constitue une phase indispensable dans le cadre de ce projet. Cet algorithme pourra être un outil utile parmi d'autre au sein du laboratoire des vibrations, car le recalage peut faire la liaison (le rapprochement) entre les deux modèles (expérimental et numérique) des représentations du comportement des systèmes sous étude.

#### **1.4. PRESENTATION DE LA RECHERCHE**

Dans la directive du recalage, le présent sujet prend le thème « Exploitation des fonctions de réponses fréquentielles dans le recalage des modèles dynamiques », faisant référence à une méthode de recalage qui utilise les fonctions de réponses fréquentielles directement dans son algorithme.

La présentation du problème posé dans le cadre de cette recherche comprend cinq (5) chapitres.

Un aperçu général sur le rôle du recalage dans un contexte d'une analyse globale des structures, faisant l'objet du chapitre 1.

Au chapitre 2, nous exposons en détails les deux modèles décrivant le comportement vibratoire des structures, ainsi que les erreurs qui les entaches.

Au chapitre 3, nous présentons les différences critères de comparaison entre les modèles numérique et expérimental. Aussi, nous exposons les différentes techniques à travers deux catégories principales de recalage existantes pour la correction du premier modèle sur la base des données du deuxième. Ainsi qu'une analyse des avantages et des inconvénients liés à ces deux catégories.

Dans le chapitre 4, nous donnant une description de la méthode du recalage MRF sujet de ce mémoire, à travers son principe, sa formulation, ainsi que son algorithme.

Le chapitre 5 est consacré à la présentation des applications et discussions des résultats, afin de valider en premier lieu l'algorithme du recalage qu'on a élaboré, et de montrer les limites et les mérites de la technique adoptée.

Et enfin, nous terminons par une conclusion générale dans laquelle nous évoquons les objectifs assignés, les difficultés rencontrées, et une mise au point sur les possibilités d'extension de cette recherche avec les recommandations.

---

***CHAPITRE 2***  
***VIBRATIONS DES STRUCTURES***

---

## CHAPITRE 2

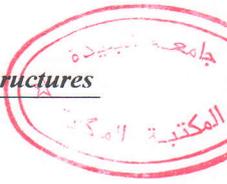
# VIBRATIONS DES STRUCTURES

### 2.1. INTRODUCTION

En raison de l'augmentation de la complexité des structures mécaniques et des exigences pour répondre aux normes de performances, de confort et de sécurité, il est important d'avoir une idée précise sur les caractéristiques de ces structures. Le comportement vibratoire joue un rôle considérable dans la tenue des systèmes et son étude et sa caractérisation sont menées par la dynamique des structures.

Une première voie consiste à construire un modèle de représentation à partir des seules données fournies par les essais dynamiques. Ce type de modèle ne permet pas d'établir directement et aisément les relations entre les variables de conception et le comportement dynamique de la structure. Par contre la deuxième, dite voie d'analyse est basée sur la construction d'un modèle de connaissance établi à partir du dossier d'études. Mais la difficulté majeure réside dans le fait qu'il existe toujours des éléments difficiles à modéliser [Zha87, Aia91].

Le but de la modélisation et simulation sur modèles est de prédire assez correctement le comportement des structures et facilitent aussi la conception de celles-ci. Alors, il est possible de modifier aisément les variables de conception en vue de leur optimisation.



## 2.2. ANALYSE VIBRATOIRE THEORIQUE

### 2.2.1. PRESENTATION

Les sciences de l'ingénieur permettent de décrire le comportement des systèmes mécaniques grâce à des équations aux dérivées partielles. La méthode des éléments finis est l'une des méthodes les plus utilisées aujourd'hui pour résoudre effectivement ces équations. Elle est très puissante, efficace et relativement facile à implanter sur ordinateur. Cela consiste à utiliser une approximation simple des variables inconnues pour transformer les équations aux dérivées partielles en équations algébriques. Elle fait appel aux trois domaines suivants [Dat84, Bto90, Imb92] :

- Sciences de l'ingénieur pour construire les équations aux dérivées partielles.
- Méthodes numériques pour construire et résoudre les équations algébriques.
- L'informatique appliquée pour exécuter efficacement les calculs sur ordinateur.

### 2.2.2. PRINCIPE DE LA METHODE DES ELEMENTS FINIS

La méthode des éléments finis (MEF) consiste à discrétiser la structure en élément de forme simple et de dimensions finies (barre, poutre, membrane, plaque, etc...), et permet le passage de l'étude sur le domaine global (structure) représenté par des équations aux dérivées partielles, à l'approximation de la solution sur les sous-domaines (éléments). Cette approximation conduit à la construction des matrices élémentaires de masse et de rigidité. Le modèle global est ensuite analysé après l'opération d'assemblage de toutes les matrices élémentaires. Cela conduit à une matrice de masse  $[M]$  et de rigidité  $[K]$  globales. L'assemblage doit tenir compte des conditions de connectivités entre les éléments.

Le comportement dynamique du modèle spatial ainsi obtenu est régi dans le cas conservatif par le système matriciel [Bat90, Imb92] :

$$[M]\{\ddot{X}\} + [K]\{X\} = \{F\} \quad (2.1)$$

Avec :

$[M]$  : matrice de masse.

$[K]$  : matrice de rigidité.

$\{F\}$  : vecteur des sollicitations extérieurs.

$\{X\}$ ,  $\{\ddot{X}\}$  : vecteur des déplacements et vecteur des accélérations respectivement.

Les structures sont en réalité dissipatives (amorties), et la prise en compte de l'amortissement nécessite la construction d'une matrice  $[C]$ . L'amortissement ayant plusieurs origines et étant de différentes formes (visqueux, interne ou structural, etc...), l'expression de  $[C]$  n'est donc pas unique. De plus, l'amortissement en lui même étant difficile à modéliser, on est amené à émettre des hypothèses pour sa formulation. L'amortissement visqueux est le plus généralement utilisé et le passage d'un autre type à celui-ci se fait sur des considérations d'équivalence d'énergie de dissipation.

La relation (2.1) devient alors :

$$[M]\{\ddot{X}\} + [C_{eq}]\{\dot{X}\} + [K]\{X\} = \{F\} \quad (2.2)$$

Avec :

$[C_{eq}]$  : matrice d'amortissement visqueux équivalent.

$\{\dot{X}\}$  : vecteur des vitesses.

Une analyse modale consiste à résoudre la relation (2.1) sans second membre (structure libre non amortie) et conduit à la résolution du problème aux valeurs propres. Pour une analyse dynamique (réponse forcée), le vecteur des sollicitations est pris en compte pour la détermination des fonctions de transferts (ou fonctions de réponses fréquentielles).

### 2.2.3. PROBLEME AUX VALEURS PROPRES

Pour des vibrations libres non amorties  $\{F\} = 0$  et  $[C_{eq}] = 0$ , nous avons l'équation suivante [Ewi84] :

$$[M]\{\ddot{X}\} + [K]\{X\} = 0 \quad (2.3)$$

Généralement, la solution de l'équation (2.3) est obtenue en supposant que le système exécute un mouvement oscillatoire [Ewin84] :

$$\{X(t)\} = \{A\}e^{i\omega t} \quad (2.4)$$

Avec :

$\{A\}$  : représente le vecteur des amplitudes

$\omega$  : la fréquence de vibration

La substitution de l'équation (2.4) dans (2.3) conduit au système suivant :

$$([K] - \omega^2[M])\{\psi\} = \{0\} \quad (2.5)$$

Ce système n'admet des solutions non nulles que si :

$$D(\omega) = \det([K] - \omega^2[M]) = 0 \quad (2.6)$$

représentant l'équation caractéristique ou équation aux valeurs propres.

Pour un système à  $N$  degrés de liberté (ddl), il y'a  $N$  fréquences propres (valeurs propres), associées chacune à un mode propre (vecteur propre).

#### Remarques :

- Les modes propres sont déterminés à une constante près, par contre les valeurs propres sont uniques.
- Le modèle modal possède des propriétés très importantes, dites propriétés d'orthogonalité.

## 2.2.4. PROPRIETES D'ORTHOGONALITE, ET NORMALISATION

Dans le modèle modal, les propriétés d'orthogonalités sont données par [Ewi84] :

$$\begin{aligned} [\psi]^T [M] [\psi] &= [m] \\ [\psi]^T [K] [\psi] &= [k] \\ [m]^{-1} [k] &= [\omega^2] \end{aligned} \quad (2.7)$$

Avec :

$[\omega^2]$  : matrice des fréquences propres (diagonale).

$[m]$  : matrice des masse généralisées (diagonale).

$[k]$  : matrice des rigidités généralisées (diagonale).

Plusieurs méthodes de normalisation peuvent être utilisées, comme la normalisation par rapport à la plus grande composantes des modes propres. Cependant, la plus utilisée est la normalisation par rapport à la matrice de masses généralisées telle que:

$$[\phi] = [\psi] [m]^{-1/2} \quad (2.8)$$

Avec :

$[\phi]$  : matrice des vecteurs propres normalisés par rapport à la masse.

On a donc :

$$\begin{aligned} [\phi]^T [M] [\phi] &= [I] \\ [\phi]^T [K] [\phi] &= [\omega^2] \end{aligned} \quad (2.9)$$

Avec :

$[I]$  : matrice identité.

### 2.2.5. ANALYSE DE LA REPOSE FORCEE ET DETERMINATION DES FONCTIONS DE REPOSES FREQUENTIELLES

Pour des sollicitations harmoniques, à une fréquence  $\omega$ , les réponses sont également harmoniques pour la même fréquence [Ewi84] :

$$\begin{aligned}\{F(t)\} &= \{F\}e^{i\omega t} \\ \{X(t)\} &= \{X\}e^{i\omega t}\end{aligned}\tag{2.10}$$

Avec :

$\{F\}$ ,  $\{X\}$  : vecteurs des amplitudes de l'excitation et de la réponse respectivement

En substituant (2.10) dans (2.1), il vient :

$$\begin{aligned}([K] - \omega^2[M])\{X\}e^{i\omega t} &= \{F\}e^{i\omega t} \\ \text{d'où} & \\ ([K] - \omega^2[M])\{X\} &= \{F\}\end{aligned}\tag{2.11}$$

La fonction de transfert ou fonction de réponses fréquentielles est définie comme étant le rapport de la sortie sur l'entrée [Ewi84, Hey87]:

$$[H(\omega)] = \frac{\{X\}}{\{F\}} = ([K] - \omega^2[M])^{-1}\tag{2.12}$$

ou bien l'inverse :

$$[Z(\omega)] = \frac{\{F\}}{\{X\}} = ([K] - \omega^2[M])\tag{2.13}$$

Selon la nature de la réponse (déplacement, vitesse, ou accélération) la fonction de transfert prend différentes appellations.

- Receptance (admittance ou compliance) dans le cas où les réponses sont des déplacements.
- dans le cas des vitesses.
- Inertance (accélération) dans le cas des accélérations.

**Remarques :**

1. Pour déterminer  $[H(\omega)]$ , à partir de la relation (2.12) on doit calculer l'inverse des matrices, qui est une opération très coûteuse pour des systèmes de grandes tailles.
2. Cette opération n'est pas efficace lorsqu'on utilise un nombre limité d'éléments de la matrice  $[H(\omega)]$ .
3. L'approche directe (2.12) ne donne pas d'informations explicites sur les propriétés des fonctions de réponses en fréquences (FRF).

Pour remédier à cela, on introduit les propriétés modales [Ewi84]. En multipliant l'équation (2.12) à gauche par  $[\phi]^T$ , et à droite par  $[\phi]$ , on obtient :

$$[\phi]^T ([K] - \omega^2 [M]) [\phi] = [\phi]^T [H(\omega)]^{-1} [\phi] \quad (2.14)$$

En tenant compte des relations (2.9), il vient :

$$\begin{aligned} \left[ (\omega_c^2 - \omega^2) \right] &= [\phi]^T [H(\omega)]^{-1} [\phi] \\ d'ou & \\ [H(\omega)] &= [\phi] \left[ (\omega_c^2 - \omega^2) \right]^{-1} [\phi]^T \end{aligned} \quad (2.15)$$

Avec :

$\omega_c$  : Fréquence propre calculée (numérique).

L'expression de la relation (2.15) en termes de composantes s'écrit :

$$H_{jk}(\omega) = \sum_{i=1}^N \frac{(\phi_{ji})(\phi_{ik})}{\omega_{c_i}^2 - \omega^2} = \sum_{i=1}^N \frac{(\psi_{ji})(\psi_{ik})}{m_i (\omega_{c_i}^2 - \omega^2)} \quad (2.16)$$

Cette relation est symétrique et représente la relation de réciprocité suivante [Ewi84]:

$$H_{jk}(\omega) = \left( \frac{X_j}{F_k} \right) = \left( \frac{X_k}{F_j} \right) = H_{kj}(\omega) \quad (2.17)$$

### Remarques:

1. Une fois les données modales calculées, on peut déterminer les  $H_{jk}(\omega)$  sans passer par l'inversion des matrices.
2. Dans ce cas on calcule juste les éléments  $H_{jk}(\omega)$  dont on a besoin, ce qui n'est le cas pour la méthode directe où toutes les composantes de la matrice  $[H(\omega)]$  sont calculées en même temps.

Une analyse vibratoire théorique peut être schématisée par les trois phases ci-dessous.

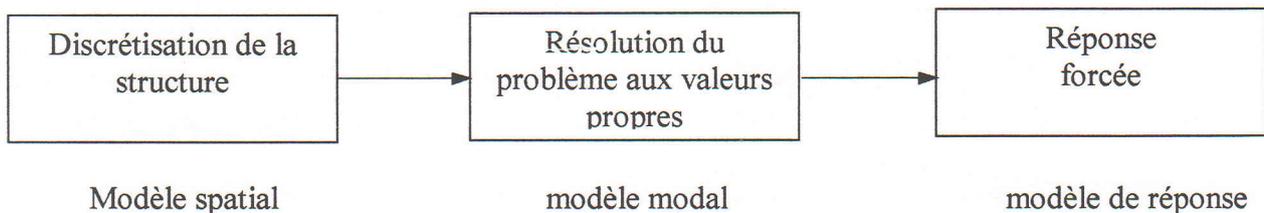


Fig.2.1. Chemin de l'analyse vibratoire théorique

## 2.3. ANALYSE VIBRATOIRE EXPERIMENTALE (A.M.E.)

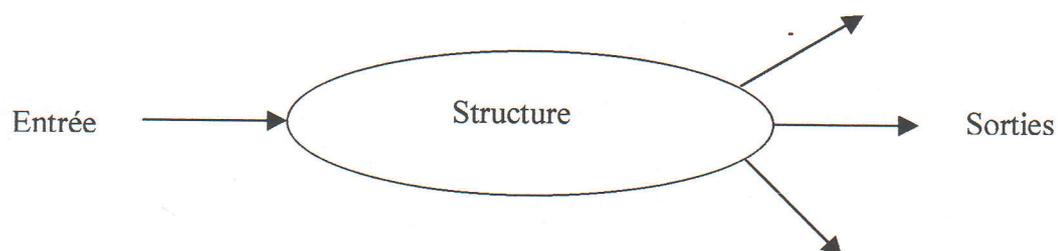
L'analyse expérimentale des vibrations structurales contribue à la compréhension et au contrôle des phénomènes rencontrés en pratique. En outre, elle permet la validation des modèles théoriques qui sont appelés à la remplacer dans d'autres analyses.

### 2.3.1. PRESENTATION

Les essais de vibrations peuvent être menés sur la structure :

- durant son fonctionnement en vue d'une surveillance sur site,
- ou en l'excitant par des forces connues et qui peuvent être en dehors de son environnement normal de service.

Le deuxième type de test est généralement mené dans des conditions contrôlées et produit beaucoup d'informations. Il permet l'amélioration des connaissances du modèle dynamique de la structure réelle. Généralement, cela consiste à exciter la structure en un seul point (entrée) et mesurer les réponses en plusieurs autres points (sorties). Les grandeurs mesurées peuvent être les fonctions de transferts ou fonctions de réponses fréquentielles, dont on a parlé plus haut.



L'équipement nécessaire à une analyse modale expérimentale est schématisé sur la figure(2.1) ci-après [Aia91, Tis93].

### 2.3.2. TECHNIQUES D'EXCITATION

Les fonctions de réponses en fréquence sont des propriétés des systèmes dynamiques et ne dépendent pas du type de fonction d'excitation comme il est montré dans la relation (2.12). L'excitation peut être une fonction du temps, harmonique, aléatoire ou transitoire, et les résultats d'essai obtenus avec un type d'excitation donné peuvent donc être utilisés pour prévoir la réponse du système à tout autre type d'excitation [Hey87, ISO90, Tis93].

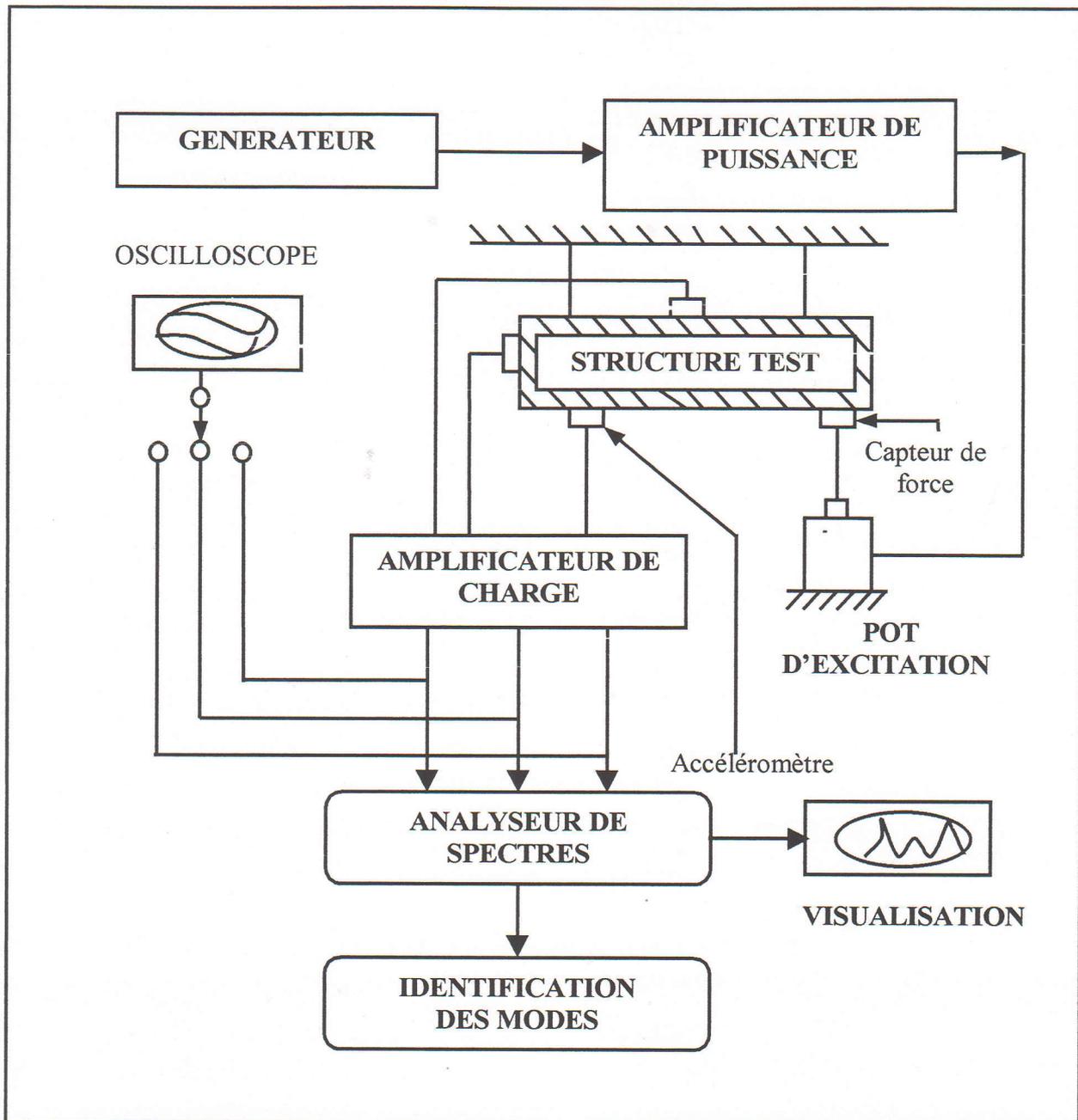


Fig. 2.2. Schéma général d'une station d'analyse modale expérimentale.

### a) Excitation par impact (transitoire)

Cette technique est très utilisée en analyse modale expérimentale, son signal à une durée limitée en temps, avec une amplitude maximale à la fréquence zéro, qui décroît avec l'augmentation de la fréquence. La durée et la forme du spectre sont déterminées par la masse et la raideur de la structure et l'objet qui produit l'impact.

On peut dire que l'essai à l'impact d'un matériau est très rapide et on n'a pas besoin d'une fixation spéciale, mais cette technique peut causer des endommagements lors de l'impact des grandes structures par des marteaux relativement importants [Ewi84, Zav85].

### **b) Excitation harmonique (sinusoïdale)**

Ce signal est réalisé par le changement de la fréquence en l'incrémentant avec un pas défini, une à la fois, provoquant une seule ligne sur le spectre de réponse. La sommation de toutes ces réponses donne le tracé de la réponse approchée de celui de l'excitation par impact.

Cette technique est plus maîtrisable par rapport à la première, néanmoins elle est moins rapide. Cependant, pour remédier à ce problème, l'automatisant de l'opération de l'incrémentation par l'assistance d'un ordinateur connecté à l'analyseur de spectre qui est utilisée [Ewi84, Zav85]

Une seconde étape après avoir déterminé les FRF, permet d'obtenir à travers une méthode d'identification les paramètres modaux de la structure testée. Encore une fois, les méthodes d'identification des paramètres modaux sont multiples. Elles sont cependant toutes basées sur l'adéquation entre la réponse forcée mesurée et l'expression de la réponse forcée d'un modèle mathématique [Tis93].

## **2.4. CONFRONTATION DES DEUX ANALYSES**

Malgré la finesse des modèles éléments finis, des écarts subsistent toujours entre les résultats numériques et les observations expérimentales. Pour une même structure les deux approches, théorique et expérimentale, peuvent mener à des représentations qui ne sont pas rigoureusement identiques. Les différences entre les deux ensembles de résultats sont liées à différentes causes relatives à l'une ou l'autre approche.

Pour l'analyse théorique les erreurs peuvent être dues entre autres [Zav85, Hey87, Zha87, Aia91] :

- à la précision du calculateur (les erreurs d'arrondi).
- au coût qui augmente avec le temps de calcul, ce qui pousse à réduire le nombre d'itération, et diminue ainsi la précision.
- à la mauvaise estimation des propriétés du matériau.
- à l'idéalisation géométrique de certaines parties, en particulier dans les structures complexes.
- au mauvais choix des nœuds, et des types d'éléments dans la discrétisation.
- à une insuffisance de connaissances sur des conditions aux limites.

D'autre part, le modèle expérimental n'est pas à l'abri des erreurs. Parmi celles-ci, il y'a lieu de citer [Aia91, Hey87, Zav85]:

- L'étalonnage des équipements et les conditions de mesures.
- L'influence de la masse et la rigidité de l'équipement utilisé pour l'excitation de la structure.
- Le choix des positions des capteurs, et les position d'excitation.
- Les jugements et interprétation du manipulateur durant les phases des essais.

Généralement le modèle expérimental est considéré comme modèle de référence. Aussi, il y'a lieu de faire rapprocher le modèle théorique du modèle de référence. La comparaison s'opère essentiellement sur les fréquences et les modes propres ainsi que les fonctions de réponses en fréquences pour estimer les différences entre les deux modèles. La correction du modèle numérique rentre dans le cadre des techniques de RECALAGE de modèles comme nous le verrons dans le chapitre 3.

**CHAPITRE 3**

**CONFRONTATION ET**  
**AJUSTEMENT DES MODELES**

## CHAPITRE 3

# CONFRONTATION ET AJUSTEMENT DES MODELES DYNAMIQUES

### 3.1. INTRODUCTION

Les analyses théorique et expérimentale du comportement dynamique d'une structure ne mènent donc pas toujours aux mêmes résultats. Les différences essentielles résident dans les outils, paramètres et hypothèses relatifs à chaque approche. Cependant, les modèles numériques, de part leur construction sont considérés contenir certaines erreurs qu'il faut minimiser afin de les rapprocher le plus possible de la réalité. Pour ce faire, une confrontation des résultats numériques et expérimentaux s'impose en vue d'une correction et une validation des modèles numériques. C'est l'objet de l'ajustement ou recalage dont il est question dans ce mémoire en général et dans les chapitres qui suivent en particulier.

### 3.2. CONFRONTATION DES MESURES EXPERIMENTALES ET DES RESULTATS NUMERIQUES

La comparaison des deux ensembles de données est importante pour qualifier et quantifier les différences qui peuvent exister entre eux.

En partant de l'hypothèse que les deux représentations traitent la même structure et dans les même conditions (propriétés physiques, les conditions aux limites, etc...), on peut entamer différents types de comparaison. La comparaison peut être aussi bien numérique que graphique et peut être appliquée aux propriétés modales (fréquences et modes propres) ou aux fonctions de réponses fréquentielles.

### 3.2.1. COMPARAISON DES FREQUENCES

La première comparaison concerne les fréquences. Elle teste le degré de cohérence entre les fréquences propres issues du modèle numérique  $\omega_c$  et les fréquences de résonance  $\omega_x$  correspondant au modèle expérimental.

#### a) Comparaison numérique des fréquences propres

Cette comparaison consiste en une évaluation directe des différences, absolues ou relatives, entre les fréquences propres calculées  $\omega_c$  et leurs homologues mesurées  $\omega_x$  du même mode. La différence absolue est donnée par [Imr94, Imr95c] :

$$|\omega_x - \omega_c| \quad (3.1)$$

alors que la différence relative est donnée par le rapport :

$$\frac{|\omega_x - \omega_c|}{\omega_c} \quad (3.2)$$

#### b) Comparaison graphique des fréquences propres

D'autre part la comparaison peut être graphique, et consiste à tracer les fréquences de résonance en fonction des fréquences calculées. La disposition des points d'intersection reflète le degré de cohérence entre les deux ensembles de résultats [Aiad91, Ewin84] comme il est illustré par la figure (3.1).

L'analyse de cette comparaison permet d'envisager les trois cas suivant :

- ❖ Les points d'intersection se trouvent sur ou au voisinage immédiat d'une droite de pente égale à 1. Ceci signifie qu'il y a une bonne corrélation entre les modes comparés.
- ❖ La même situation se présente mais la pente de la droite est différente de 1. Cela indique qu'il existe une incohérence entre les mesures et le calcul.

- ❖ Les points d'intersection sont largement dispersés autour de la droite de corrélation. Dans ce cas il y a des défauts dans la modélisation.

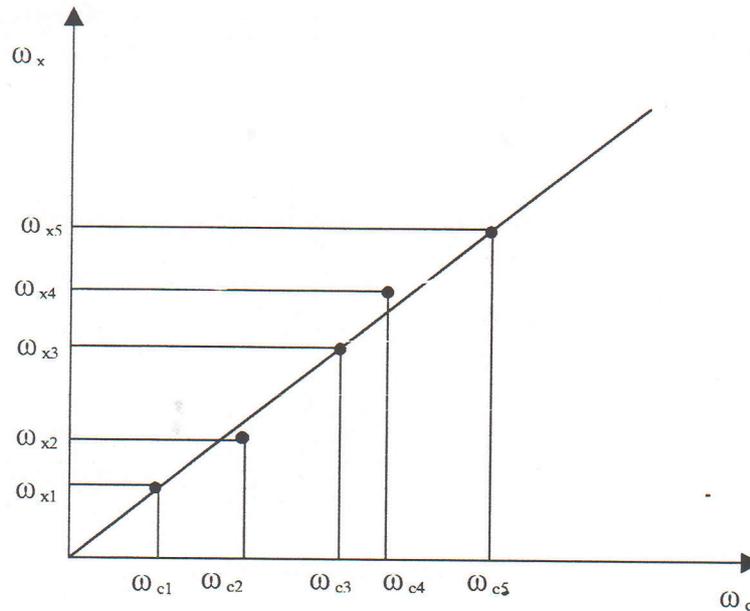


Fig.3.1. Comparaison graphique des fréquences

En pratique, il est difficile d'appliquer ces critères, car il est supposé que pour chaque point tracé, les fréquences mesurées et calculées correspondent au même mode de vibration. Cette hypothèse est difficile à réaliser surtout pour les structures complexes où les modes ne sont pas tous bien séparés. Cependant, dans notre étude le modèle expérimental est simulé à partir d'un modèle numérique. Cette hypothèse est donc vérifiée et l'applicabilité de ces critères de comparaison reste valable.

### 3.2.2. COMPARAISON DES MODES PROPRES

La comparaison des modes propres est plus significative sur le degré de cohérence entre les deux modèles de représentation. Il est possible de procéder à cette comparaison par plusieurs approches. Les conditions d'orthogonalité, vues au chapitre précédent, offrent un moyen de vérification de la corrélation, par un simple examen de la matrice de masse numérique (calculée) par la relation [Hey87] :

$$[\phi_x]^T [M_c] [\phi_x] = [m] \quad (3.3)$$

La matrice  $[m]$  devant être unitaire, la valeurs des éléments extra-diagonaux révèle alors le degré de cohérence. En pratique, on estime que si ces valeurs sont inférieure à 0.1, la cohérence entre les deux modèles est bonne [Hey87]

Cependant, il est beaucoup question, aujourd'hui, de simples critères numériques comme le critère d'assurance modale MAC « Modal Assurance Criterion » introduit par Allemang en 1982 [All82], le COMAC, et autres.

#### a) Critère d'assurance modale

Par définition, ce critère est donné par [All82, Ewi84, Hey87, Aia91, Mot93] :

$$MAC(k, l) = \frac{\left( \{\phi_x\}_k^T \{\phi_c\}_l \right)^2}{\left( \{\phi_x\}_k^T \{\phi_x\}_k \right) \left( \{\phi_c\}_l^T \{\phi_c\}_l \right)} \quad (3.4)$$

Cette relation permet de déterminer la corrélation entre, respectivement le  $k^{\text{eme}}$  mode propre expérimental et le  $l^{\text{ieme}}$  mode de la base modale calculée (numérique).

On obtient une matrice dont les éléments de la diagonale seraient tous égaux à 1, s'il y avait une corrélation parfaite entre leur deux bases modales. En pratique, il n'en est pas ainsi et on se fixe alors des limites objectives pour le degré de cohérence. Par exemple, Ewins dans [Ewi84] estime une bonne corrélation pour des valeurs comprises entre 0.9 et 1.

#### b) Critère d'assurance modale en coordonnée (COMAC)

Le COMAC est l'abréviation de « Coordinate Modal Assurance Criterion ». Il a été développé par Lieven [Lie88] sur la base du critère MAC.

Ce critère exige deux phases de calcul. Premièrement il s'agit de déterminer quels sont les modes appartenant au premier ensemble et qui correspondent aux modes de même rang du deuxième ensemble. Cette phase est accomplie par le critère MAC, et permet de sélectionner un nombre défini de modes qui se correspondent deux à deux, c'est la phase d'appariement des modes.

La deuxième phase traite le calcul des degrés de corrélation relatifs à chaque coordonnée en ne tenant compte que des modes retenus dans la première phase.

La formule du COMAC est analogue à celle du MAC, et est définie par [Lie88, Vis92a] :

$$COMAC(j) = \frac{\left( \{\phi_x\}_j^T \{\phi_c\}_j \right)^2}{\left( \{\phi_x\}_j^T \{\phi_x\}_j \right) \left( \{\phi_c\}_j^T \{\phi_c\}_j \right)} \quad (3.5)$$

Avec :

$j=1, L_{\max}$

$L_{\max}$  : le nombre de modes qui se correspondent deux à deux.

Cette relation représente un vecteur de taille  $N$  (nombre de ddl), dont les composantes sont comprises entre 0 et 1, indices d'une mauvaise ou bonne corrélation respectivement. Ce critère permet de localiser la position des erreurs au niveau de la structure.

### 3.2.3. COMPARAISON DES FONCTIONS DES REPONSES EN FREQUENCES

La technique de recalage envisagée dans ce mémoire et qui sera traitée dans le prochain chapitre n'utilise pas les modes propres de manière explicite. Ceux-ci sont utilisés dans la comparaison seulement et n'interviennent pas dans l'opération de recalage. A la place on utilise les fonctions de réponses fréquentielles et dans ce cadre la comparaison s'effectue également par voie numérique et graphique.

#### a) Comparaison graphique

Généralement cette comparaison est utilisée dans les techniques qui utilisent les FRFs directement dans leurs algorithmes de recalage. Elle visualise la différence entre les FRF des deux modèles de représentation à travers un système d'axes dont l'abscisse représente les fréquences d'excitation, et l'ordonnée représente le module des deux FRFs superposées dans le même système d'axes <sup>(diagramme de Bode)</sup> [Lin90, Vis91a, Vis91b, Imr92, Vis92a]. Le but de la comparaison graphique n'est pas l'estimation de la différence entre les deux modèles quantitativement, mais sa visualisation qualitative. Une première fois avant le recalage du modèle numérique, par le tracé

des deux modèles initiaux, et une deuxième fois après recalage par le tracé des FRF du modèle expérimental et du modèle numérique recalé.

### b) Comparaison numérique directe

Elle se fait à travers l'évaluation directe des différences, absolues ou relatives, entre les FRF calculées et leurs homologues mesurées. Selon Visser [Vis91a, Vis91b, Vis92a], l'erreur relative inférieur à 1% est acceptable pour confirmer une bonne corrélation.

### c) Critère d'assurance en domaine fréquentielle (FDAC)

Le FDAC est l'abréviation de « Frequency Domain Assurance Criterion ». Il a été proposé par Pascual, et est défini par [Fot00a, Fot00b] :

$$FDAC(\omega_x, \omega_c) = \frac{\left( \{H_x(\omega_x)\}^T \{H_c(\omega_c)\} \right)^2}{\left( \{H_x(\omega_x)\}^T \{H_x(\omega_x)\} \right) \left( \{H_c(\omega_c)\}^T \{H_c(\omega_c)\} \right)} \quad (3.6)$$

Avec :

$\{H_x(\omega_x)\}$  : la FRF expérimentale à une fréquence de résonance  $\omega_x$ .

$\{H_c(\omega_c)\}$  : la FRF numériques (calculées) à une fréquence propre  $\omega_c$ .

Ce critère est analogue au critère MAC, et présente donc une matrice dont les valeurs sont comprises entre 0 et 1. Une valeur de 1 indique une parfaite corrélation entre les FRF<sub>s</sub>, par contre la deuxième valeur (0) indique la non corrélation.

### d) Le critère d'assurance de réponse fréquentielle (FRAC)

Le FRAC est l'abréviation de « Frequency Response Assurance Criterion ». Heylen le définit par [Fot00a, Fot00b] :

$$FRAC(j, k) = \frac{\left( \{H_{x_{jk}}(\omega)\}^T \{H_{c_{jk}}(\omega)\} \right)^2}{\left( \{H_{x_{jk}}(\omega)\}^T \{H_{x_{jk}}(\omega)\} \right) \left( \{H_{c_{jk}}(\omega)\}^T \{H_{c_{jk}}(\omega)\} \right)} \quad (3.7)$$

Avec :

$\{H_{x_{jk}}(\omega)\}$ : la FRF expérimentale de la réponse au ddl j due à une excitation au ddl k, pour les fréquences d'excitation  $\omega$ .

$\{H_{c_{jk}}(\omega)\}$ : la FRF numérique (calculée) de la réponse au ddl j due à une excitation au ddl k, pour les fréquences d'excitation  $\omega$ .

Le FRAC est analogue au critère COMAC. Pour des FRF identique, la valeur du FRAC est unité, et elle est zéro s'il n'y a pas de corrélation.

### e) Le critère d'assurance modal et des FRF (MFAC)

Le MFAC est l'abréviation de « Modal FRF Assurance Criterion ». Il permet de tester la corrélation entre les modes propres calculés et les FRF<sub>s</sub> expérimentales. Il est défini par [Fot00a, Fot00b] :

$$MFAC(k,l) = \frac{\left(\{\phi_c\}_k^T \{H_x(\omega_x)\}_l\right)^2}{\left(\{\phi_c\}_k^T \{\phi_c\}_k\right) \left(\{H_x(\omega_x)\}_l^T \{H_x(\omega_x)\}_l\right)} \quad (3.8)$$

Avec :

$\{H_x(\omega_x)\}_l$  : la l<sup>ième</sup> colonne de la matrice des FRF expérimentales à la fréquence de résonance  $\omega_x$ .

$\{\phi_c\}_k$  : le k<sup>ième</sup> mode propre numérique (calculé).

Ce critère est analogue aux critères MAC et FDAC ci-dessus simultanément. Il se présente sous la forme d'une matrice dont les éléments sont compris entre 0 et 1. Le MFAC = 1 indique une parfaite corrélation, par contre la valeur 0 indique le contraire.

Il est à noter qu'un autre aspect de différence réside dans le fait que les modèles issues des deux types d'analyses, numérique et expérimentale sont de tailles différentes. Pour y remédier, soit des techniques d'extension qui sont utilisées pour augmenter la taille du modèle incomplet (mesuré), et l'amenant à la taille du modèle complet (calculé). Dans le cas contraire, c'est les techniques de condensation qui sont utilisées.

### 3.3. NOTION DES MODÈLES INCOMPLETS

En vue du développement technologique dans tous les secteurs, dont celui de l'industrie en particulier, le matériel d'expérimentation à atteint un niveau élevé en capacité et en précision, permettant ainsi de confirmer de plus en plus la puissance du modèle expérimental sur le plan de la représentativité des structures réelles. Néanmoins, beaucoup de limitations et de problèmes restent à surmonter. Par exemple l'exigence d'un nombre élevé de degré de liberté en phase de modélisation pour augmenter la précision, engendre un coût supplémentaire pour la réalisation du modèle d'une part, et d'autre part engendre des problèmes de positionnement des capteurs en tous ces points, aussi les ddl de rotations sont généralement difficiles à mesurer et même certaines coordonnées sont physiquement inaccessibles. Pour ces limitations pratiques et économiques, le modèle expérimental est souvent incomplet du point de vue taille. Par contre, le modèle numérique est de taille nettement plus grande, car le calcul permet d'atteindre un nombre élevé d'équations pour un nombre de degré de liberté important, qui peut atteindre des milliers dans le cas des structures complexes. Mais, malgré les ressources informatiques actuelles, aussi puissantes soient elles, le calcul devient très coûteux pour la résolution de tels systèmes. De plus la détermination d'un nombre élevé de modes de vibration présente rarement un véritable intérêt.

Suite à la confrontation entre les deux modèles, des solutions sont envisagées pour répondre à l'exigence de la compatibilité de taille des deux modèles. Deux possibilités sont envisagées:

(i) La première, opte pour la condensation de la taille du modèle numérique en l'amenant à celle du modèle expérimental; ce qui permet la réduction de la taille des matrices, d'où la diminution du temps et du coût de calcul. Cependant, on est confronté à la contrainte où le modèle numérique résultant ne conserve pas l'aspect physique du modèle complet.

(ii) La deuxième, opte pour l'extension de la taille du modèle expérimental en l'amenant à celle du modèle numérique. On donne plus d'importance à la signification physique, mais cela nécessite du calcul en plus qui est du à l'augmentation des tailles des matrices du système.

Au préalable, le nombre de degrés de liberté total est subdivisé en deux sous ensembles :

- Un sous ensemble de degrés de liberté principaux appelés degrés de liberté primaires (mesurés) : notés P.
- Un sous ensemble de degrés de liberté secondaire (non mesurés) : notés S

La figure suivante peut illustrer cette différence de taille entre les deux ensembles [Aia91, Tis93].

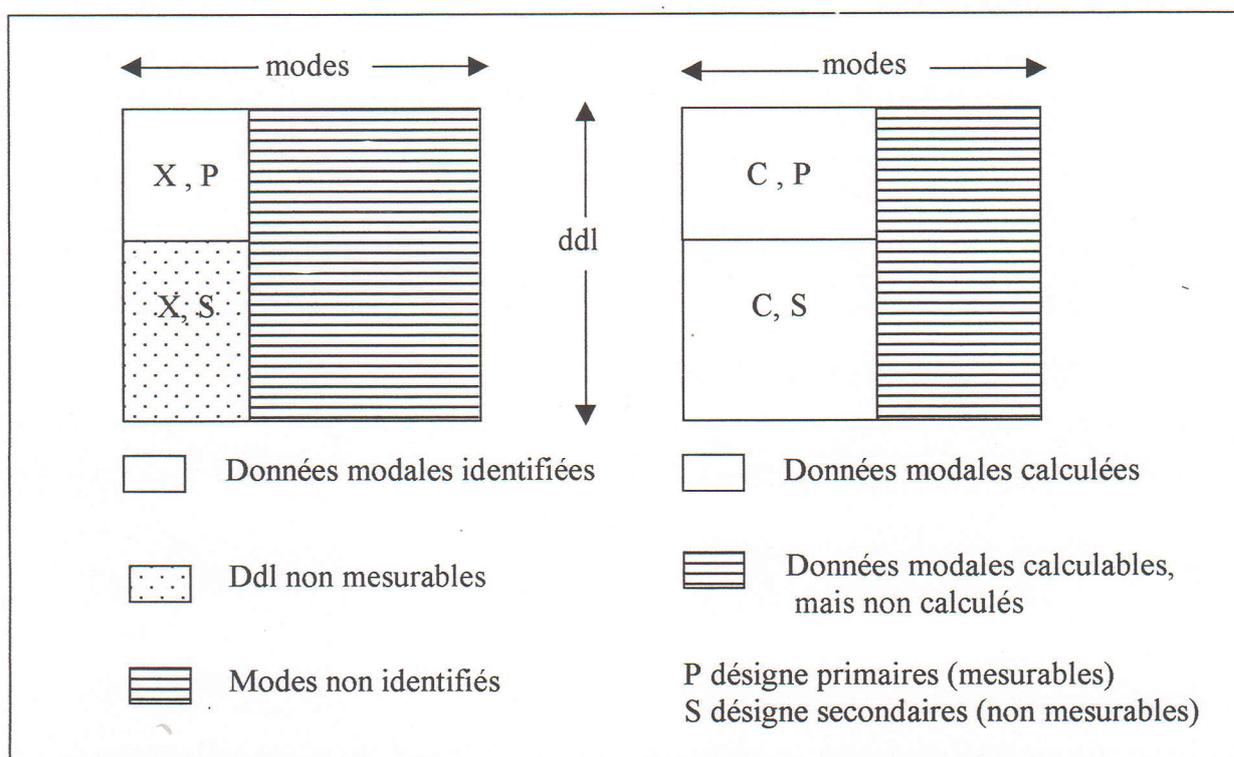


Fig.3.2. Différences entre les bases modales expérimentales (X) et numériques(C)

Très souvent, les problèmes de condensation et d'extension sont proches. Les procédures d'extension sont généralement formulées à partir de l'hypothèse que les degrés de liberté non mesurables (ddl secondaires), peuvent être exprimés à partir des ddl mesurables (ddl primaires) comme :

$$\{\phi_s\} = [L] \{\phi_p\} \quad (3.9)$$

Avec :

$[L]$  : matrice (SxP) dont l'expression dépend de la méthode de condensation retenue.

En utilisant la relation (3.9), on tire :

$$\{\phi\} = \begin{Bmatrix} \phi_p \\ \phi_s \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} I \\ L \end{bmatrix} \{\phi_p\} = [T] \{\phi_p\} \quad (3.10)$$

Avec :

$[I]$  : matrice identité.

$[T]$  : matrice de transformation (de condensation ou d'extension).

Alors les matrices de masse et de rigidité du système sont condensées par :

$$[K]_{cond} = [T]^T [K] [T] \quad (3.11)$$

$$[M]_{cond} = [T]^T [M] [T]$$

Dans le cas de la condensation, la relation de transformation est utilisée pour réduire la taille du système, et seules les ddl primaires sont retenues.

Par contre pour l'extension, la relation de transformation est explorée pour reconstituer les ddl non mesurés à partir des informations numériques (calculées) et expérimentales. Il est cependant évident que la qualité du processus dépende du nombre d'informations disponibles.

### 3.3.1. CONDENSATION STATIQUE DE GUYAN

L'idée de condensation a été proposée pour la première fois par Guyan en 1965 [Guy65]. Il s'agit en effet d'une approche statique dont les principales hypothèses sont :

- Pas de forces extérieures appliquées aux degrés de liberté secondaires,
- Une inertie pouvant être négligée dans le calcul des efforts extérieurs.

Donc la condensation de Guyan est appliquée pour les problèmes statiques, exprimés par :

$$[K] \{\phi\} = \{F\} \quad (3.12)$$

En premier lieu il s'agit d'identifier les degrés de liberté à condenser (secondaires) et de les exprimer en fonction des degrés de liberté primaires.

Après partitionnement de l'équation (3.12), on obtient :

$$\begin{bmatrix} K_{pp} & K_{ps} \\ K_{sp} & K_{ss} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \phi_p \\ \phi_s \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_p \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (3.13)$$

D'où l'on tire la relation entre les degrés de liberté secondaires et primaires par :

$$\{\phi_s\} = [L] \{\phi_p\} = \left( -[K_{ss}]^{-1} [K_{sp}] \right) \{\phi_p\} \quad (3.14)$$

Et la matrice de transformation peut être écrite comme :

$$[T]_{Guyan} = \begin{bmatrix} I \\ L \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I \\ -K_{ss}^{-1} K_{sp} \end{bmatrix} \quad (3.15)$$

### 3.3.2. CONDENSATION DYNAMIQUE

La méthode de réduction dynamique proposée par Kidder [Kid73] est basée sur l'équation aux valeurs propres du système en vibration libre, comme suit :

$$\left( \begin{bmatrix} K_{pp} & K_{ps} \\ K_{sp} & K_{ss} \end{bmatrix} - \omega^2 \begin{bmatrix} M_{pp} & M_{ps} \\ M_{sp} & M_{ss} \end{bmatrix} \right) \begin{Bmatrix} \phi_p \\ \phi_s \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (3.16)$$

Ou encore sous forme développée :

$$\left( [K_{pp}] - \omega^2 [M_{pp}] \right) \{\phi_p\} + \left( [K_{ps}] - \omega^2 [M_{ps}] \right) \{\phi_s\} = \{0\} \quad (3.17)$$

$$\left( [K_{sp}] - \omega^2 [M_{sp}] \right) \{\phi_p\} + \left( [K_{ss}] - \omega^2 [M_{ss}] \right) \{\phi_s\} = \{0\} \quad (3.18)$$

A partir de ces équations, trois méthodes sont déduites.

#### a) Première variante

Dans la première variante, ce sont principalement les composantes du groupe des ddl primaires (mesurés) qui interviennent dans la matrice de transformation. Elle est obtenue à partir de l'équation (3.17) :

$$[T]_{Dyn} = \begin{bmatrix} I \\ - \left( [K_{ps}] - \omega^2 [M_{ps}] \right)^+ \times \left( [K_{pp}] - \omega^2 [M_{pp}] \right) \end{bmatrix} \quad (3.19)$$

Où :

+ : symbolise la pseudo-inverse au sens de Moor-Penrose.

#### b) Deuxième variante

Cette fois ce sont les composantes du groupe des ddl secondaires (non mesurables) qui interviennent majoritairement. A partir de la relation (3.18) on a :

$$[T]_{Dyn} = \begin{bmatrix} I \\ - \left( [K_{ss}] - \omega^2 [M_{ss}] \right)^{-1} \times \left( [K_{sp}] - \omega^2 [M_{sp}] \right) \end{bmatrix} \quad (3.20)$$

#### c) Troisième variante

Dans ce cas, les équations (3.17) et (3.18) sont utilisées de façon à former :

$$[A_p] = \begin{bmatrix} [K_{pp}] - \omega^2 [M_{pp}] \\ [K_{sp}] - \omega^2 [M_{sp}] \end{bmatrix} \quad (3.21)$$

$$[A_s] = \begin{bmatrix} [K_{ps}] - \omega^2 [M_{ps}] \\ [K_{ss}] - \omega^2 [M_{ss}] \end{bmatrix}$$

D'où la matrice de transformation est donnée par :

$$[T]_{Dyn} = \begin{bmatrix} I \\ -[A_s]^+ \times [A_p] \end{bmatrix} \quad (3.22)$$

### 3.3.3. METHODE SEREP

Le SEREP est l'abréviation de « System Equivalent Reduct Expansion Process ». C'est une technique proposée par O'callahan [O'Ca88, O'Ca89a, O'Ca89b], et qui consiste à exploiter les données modales (modes propres) analytiques et expérimentales pour l'extension de la base modale expérimentale.

En écrivant le vecteur modal total en fonction du vecteur du premier groupe de coordonnées (coordonnées mesurées ou primaires) par :

$$[\phi] = \begin{bmatrix} \phi_p \\ \phi_s \end{bmatrix} = [T][\phi_p] \quad (3.23)$$

d'où;

$$[T] = [\phi] [\phi_p]^+ \quad (3.24)$$

$$[\phi_p]^+ = ([\phi_p]^T [\phi_p])^{-1} [\phi_p]^T$$

Avec :

$[T]$  : matrice de transformation (d'extension) pour la méthode SEREP.

$[\phi_p]^+$  : pseudo inverse de la matrice  $[\phi_p]$ .



Le calcul de la matrice de transformation peut se faire de plusieurs manières selon les bases modales utilisées [O'Ca89a].

**a) Approche purement analytique :**

Dans ce cas  $[\phi]$  et  $[\phi_p]$  sont entièrement issues du modèle analytique, et la matrice de transformation est calculée par :

$$[T] = [\phi_c][\phi_{cp}]^+ = \begin{bmatrix} \phi_{cp} \\ \phi_{cs} \end{bmatrix} [\phi_{cp}]^+ \quad (3.25)$$

**b) Approche à base expérimentale :**

Cette fois ci la matrice  $[\phi_p]$  est issue du modèle expérimental

$$[T] = [\phi_c][\phi_{xp}]^+ = \begin{bmatrix} \phi_{cp} \\ \phi_{cs} \end{bmatrix} [\phi_{xp}]^+ \quad (3.26)$$

**c) Approche mixte à dominante analytique:**

Les composantes du premier groupe dans la matrice totale  $[\phi]$ , sont remplacées par les composantes expérimentales. Alors la matrice de transformation devient :

$$[T] = \begin{bmatrix} \phi_{xp} \\ \phi_{cs} \end{bmatrix} [\phi_{cp}]^+ \quad (3.27)$$

**d) Approche mixte à dominante expérimentale :**

Dans ce cas la matrice pseudo-inverse est issue de la base expérimentale :

$$[T] = \begin{bmatrix} \phi_{xp} \\ \phi_{cs} \end{bmatrix} [\phi_{xp}]^+ \quad (3.28)$$

Après le calcul de la matrice de transformation par l'une ou l'autre des approches citées ci-dessus, la base modale expérimentale totale est calculée par :

$$[\phi_x] = [T][\phi_{xp}] \quad (3.29)$$

## 3.3.4. METHODE IRS

Abréviation de «Improved Reduced System», Cette technique proposée par O'callahan [Lie90, O'Ca88, O'Ca89a] est basée sur la méthode de Guyan (voir section 2.5.1.a).

Elle augmente les performances de la méthode de Guyan, en tenant compte des effets dynamiques dans l'équation d'équilibre du système. On considère que les forces d'inertie correspondant aux ddl secondaires (non mesurés) sont des efforts extérieurs, notés  $F_s$ .

L'équation d'équilibre s'écrit [Lie90, O'Ca88, O'Ca89a] :

$$\begin{bmatrix} k_{pp} & K_{ps} \\ K_{sp} & K_{ss} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} X_p \\ X_s \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_p \\ F_s \end{Bmatrix} \quad (3.30)$$

D'où ;

$$\{X_s\} = -[K_{ss}]^{-1} [K_{sp}] \{X_p\} + [K_{ss}]^{-1} \{F_s\} \quad (3.31)$$

Une approximation des forces d'inertie est donnée par [O'Ca88, O'Ca89a] :

$$\{F_s\} = ([M_{sp}] - [M_{ss}][K_{ss}]^{-1}[K_{sp}])[M]^{-1}_{Guy} [K]_{Guy} \{\phi_p\} \quad (3.32)$$

Avec les matrices condensées à partir de la méthode de Guyan :

$$[M]_{Guyan} = [T]^T_{Guyan} [M] [T]_{Guyan} \quad (3.33)$$

$$[K]_{Guyan} = [T]^T_{Guyan} [K] [T]_{Guyan}$$

En substituant (2.41) dans (2.40), on peut écrire les coordonnées totales en fonction des coordonnées primaires par :

$$[X] = \begin{Bmatrix} X_p \\ X_s \end{Bmatrix} = [T] \{X_p\} \quad (3.34)$$

$$[T]_{IRS} = \begin{bmatrix} I \\ -K_{ss} \left( K_{sp} - \left( M_{sp} - M_{ss} K_{ss}^{-1} K_{sp} \right) M_{Guyan} K_{Guyan} \right) \end{bmatrix}$$

### 3.4. LES AVANTAGES ET INCONVENIENTS DE LA CONDENSATION ET L'EXTENSION

L'avantage de la condensation par rapport à l'extension est la réduction de la taille des matrices du système. Cette réduction se traduit par une diminution du temps, et par conséquent, du coût des calculs. Cependant, elle engendre la divergence entre les propriétés physiques du modèle condensé et celles du modèle complet, et en conséquence, la condensation ne préserve pas les caractéristiques propres du modèle.

De leur côté, les techniques d'extension, quoique nécessitent plus de calculs, sont tout de même souvent préférées aux procédés de condensation. En effet, l'extension donne une plus grande importance à la signification physique des modes complets

Il est à noter que dans notre étude, on adopte l'approche d'extension pour faire coïncider les tailles des deux modèles expérimental et numériques. Dans ce cadre on utilise l'extension dynamique (deuxième variance).

### 3.5. RECALAGE DES MODELES

Le recalage ou l'ajustement intervient une fois que la procédure d'une comparaison objective entre le modèle numérique et expérimental eut été faite. Ce dernier, est souvent considéré comme référence en dépit des erreurs qu'il peut contenir et dont nous avons parlé auparavant. Aussi le recalage concerne les modèles numériques et dans ce cadre plusieurs approches sont envisagées. Quelle que soit la technique utilisée, l'objectif est d'aboutir à un modèle plus représentatif de la structure réelle et susceptible de se substituer à celle-ci dans des analyses et traitements annexes.

Le recalage de modèle constitue depuis une trentaine d'années un domaine de recherche en développement continue, particulièrement durant les deux dernières décennies. Mottershead dans [Mot93] présente une revue plus ou moins détaillée des méthodes de recalage.

Ces procédures de recalage peuvent être classées en deux catégories principales [Hey87, Roy90a, Aia91, Mot93] :

- ❖ Une catégorie de méthodes de correction directe et globale du modèle à travers des modifications des matrices de masse et de raideur du système issue du modèle EF. Elles sont généralement basées sur les équations de mouvement et les propriétés d'orthogonalité.
- ❖ Une catégorie de méthodes locales, dites paramétriques où la correction intervient dans des zones particulières de la structure, sur des éléments ou groupe d'éléments.

### 3.5.1. LES METHODES DU RECALAGE GLOBAL

Pour s'introduire à cette catégorie de méthodes, on expose quelques méthodes qui sont les plus connues dans la littérature.

#### 3.5.1.1. METHODE BERMAN

L'approche proposée par Berman concerne l'amélioration des matrices de masse et de raideur globales par une procédure de minimisation de norme matricielle [Aia91, Berm80a, Berm83].

Sachant la différence de taille entre les modèles de représentation, Berman propose d'étendre le modèle expérimental par une méthode d'interpolation basée sur les caractéristiques physiques de la structure, avant de procéder à l'ajustement des matrices issues du modèle numérique. Ainsi, la technique repose sur les deux étapes suivantes:

- Extension du modèle expérimental,
- Correction des matrices de masse et de raideur du modèle numérique.

Les principaux avantages de cette méthode résident dans le fait qu'elle est bien adaptée aux grandes structures dans la mesure où l'effort de calcul n'est pas considérable, et d'autre part son procédé d'extension tient compte de la signification physique.

Cependant, les problèmes ne sont pas absents, principalement l'amortissement est occulté dans la mesure où les modes expérimentaux complexes sont approximés par les modes réels, puis l'estimation des modes non mesurés impose une bonne représentativité des matrices initiales au départ.

### 3.5.1.2. METHODE D'IBRAHIM

La méthode que présente Ibrahim s'apparente à celle de Berman, et consiste également en la correction globale des matrices du système sur la base des modes expérimentaux étendus. Les deux méthodes diffèrent, cependant, sur la manière d'étendre la base modale et sur le procédé d'amélioration des matrices [Aia91, Ibr82, Ibr83a, Ibr83b].

Elle repose sur les deux étapes suivantes:

- Extension de la base modale expérimentale,
- Calcul des matrices de masse et de raideur corrigées.

Les avantages de la méthode peuvent être caractérisés par la prise en compte de l'amortissement, et par la mise en oeuvre relativement aisée avec peu d'effort de calcul pour l'extension et le passage des modes complexes aux modes réels.

Cependant son inconvénient majeur, au même titre que la méthode de Berman, réside dans l'obligation de calculer la totalité des modes, et elle converge vers des matrices corrigées qui ne préservent pas forcément la symétrie.

### 3.5.1.3. LA METHODE LGM

Cette méthode de recalage a été proposée par Aiad [Aia91], et appartient à la catégorie des méthodes globales dont l'objectif est de corriger directement les matrices de masse et de raideur du système considéré.

La démarche de la méthode consiste en trois phases complémentaires:

- Une phase d'extension de la base modale expérimentale,
- Une phase de calcul des modes réels à partir des modes complexes,
- Une phase d'ajustement des matrices de masse et de raideur du modèle numérique.

Les avantages de cette méthodes peuvent être résumés par :

- La prise en compte de l'amortissement,
- Le calcul direct des modes réels à partir des modes complexes,
- La mise en oeuvre facile et effort de calcul modéré,
- La représentativité des matrices corrigées et exploitation de ces matrices dans un contexte éléments finis (les matrices préservent leur symétrie).

Et comme toute approche numérique, les inconvénients ne peuvent être exclus, dont on cite :

- L'utilisation des modes réels analytiques d'ordre élevé pour compléter les modes expérimentaux,
- L'extension de la base modale expérimentale et réduction simultanée de la base modale analytique.

### **3.5.2. LES METHODES DU RECALAGE LOCAL**

En parallèle de la première catégorie, la catégorie du recalage local comporte de son côté beaucoup de techniques relatives à différentes formulations.

#### **3.5.2.1. L'APPROCHE FORCES RESIDUELLES**

Le principe des technique utilisant cette approche, repose sur le concept des forces des réactions et consiste à minimiser le vecteur de ces réactions [Aia91, Berm84, Berm88].

Le processus général comporte les étapes suivantes :

- La localisation des erreurs dans le modèle numérique par l'exploitation des forces de réaction,
- Le calcul des paramètres correcteurs associés aux matrices élémentaires, réalisé par une procédure de minimisation de norme portant sur le vecteur des forces de réaction.

Parmi les avantages de cette approche, la signification et l'interprétation physiques des corrections et des résultats, mais le calcul est itératif ce qui entraîne des problèmes du temps supplémentaire, et d'instabilité de convergence. D'autre part la correction concerne une matrice à la fois, la matrice masse ou la matrice raideur, mais pas les deux simultanément.

### 3.5.2.2. L'APPROCHE DIRECTE ENERGETIQUE

Dans ce type de méthodes, le recalage intervient sur les éléments des matrices de masses et de raideur préalablement transformées dans la base des modes propres [Aiad91, Roy90b].

Le procédé de recalage repose sur les phases suivantes :

- Extension de la base modale expérimentale,
- Le procédé d'extension engendre un système d'équation linéaires dont la résolution conduit à la détermination d'un ensemble de coefficients de type énergétique,
- Ces coefficients sont ensuite utilisés pour la localisation des erreurs et la correction du modèle.

L'avantage de cette approche, comme celui de la précédente, est le caractère physique des corrections apportées au modèle. Cependant, le problème majeur réside dans l'extension des modes expérimentaux.

### 3.5.2.3. L'APPROCHE SENSIBILITE

Les techniques de sensibilité sont basées sur l'étude des variations des solutions propres vis-à-vis des paramètres de conception du système mécanique (module de Young, masse volumique, moment quadratique, etc...) [Aia91, Wei89, Zha87].

Globalement, ce type d'approches reposent sur les phases suivantes :

- L'exploitation des solutions propres calculées et observées pour effectuer le passage des modes propres complexes aux solutions propres réelles de la structure conservative associée,
- La localisation des zones à défauts dominants de modélisation,
- La correction des zones localisées seules.

Comme toutes les techniques de cette catégorie de méthodes, la signification physique aux corrections apportées aux modèles est aussi présente pour cette approche. Cependant, elle engendre des difficultés surtout au niveau de la localisation des régions présentant des erreurs de modélisation.

### 3.6. AVANTAGE ET INCONVENIENTS DES CATEGORIES DU RECALAGE

Chaque catégories de techniques présente des avantages et des inconvénients qui diffèrent d'une méthode à l'autre.

Les méthodes globales présentent un avantage fondamental qui est celui d'une mise en œuvre non itérative, rapide et donc moins coûteuse, car souvent le calcul se résume à des produits de matrices représentant des efforts de calcul modérés.

Cependant, l'inconvénient de ces méthodes réside dans l'absence de l'interprétation physique des corrections. De plus les termes matriciels correctifs peuvent ne pas avoir un sens physique ce qui engendre souvent des modifications non réalistes.

De leur côté, les méthodes du recalage local ont l'avantage de l'interprétation physique de corrections, et font le lien entre les modifications apportées par le recalage et les paramètres physiques. Néanmoins, les inconvénients ne sont pas absents, le premier réside dans la lourdeur et le coût de leur mise en œuvre, car ça nécessite plus d'efforts de calcul par rapport à la première catégorie, où le calcul est le plus souvent itératif et la convergence n'est pas toujours assurée.

---

***CHAPITRE 4***

***LE RECALAGE PAR LA  
METHODE DES REPONSES  
FREQUENTIELLES (MRF)***

## CHAPITRE 4

# LE RECALAGE PAR LA METHODE DES REPONSES FREQUENTIELLES (MRF)

### 4.1. INTRODUCTION

La simulation numérique des modèles constitue aujourd'hui une étape inévitable pour la prédiction et la conception des systèmes. Cependant, la fiabilité du modèle numérique appelé à se substituer à l'expérimentation doit être assurée au préalable. Pour se faire, on a recours à des techniques de correction dites « techniques de RECALAGE », qui permettent l'ajustement (recalage) du modèle numérique sur la base des données du modèle expérimental.

Il existe plusieurs catégories de techniques, suivant le principe et les hypothèses adoptés par chacune, comme cela a été introduit au chapitre précédent. Dans le présent sujet, nous utilisons les propriétés des fonctions de transfert ou de réponses en fréquences donnant lieu à une méthode particulière appelée méthode des réponses fréquentielles (MRF).

### 4.2. DESCRIPTION DE LA METHODE MRF

Cette technique fait partie de la catégorie des méthodes de recalage local. Elle se distingue par plusieurs avantages essentiels [Lin90, Aia91, Vis91a, Vis91b, Vis92a, Vis92b, Imr92, Imr95a, Imr95b, Imr95c] :

1. la prise en compte de la signification physique lors de la correction des erreurs.
2. la localisation et l'estimation des erreurs de modélisation en une seule étape, ce qui n'est pas le cas dans d'autres méthodes où cela se déroule en deux phases distinctes, nécessitent ainsi beaucoup de calcul.

3. Les FRF sont utilisées directement dans le recalage, alors on évite les calculs et les erreurs supplémentaires durant la phase d'analyse modale pour la détermination des données modales à partir des FRF.
4. La technique peut être appliquée autant que secours pour les structures qui n'ont pas des données modales disponibles au préalable, soit pour la complexité de ces structures ou pour la difficulté de déterminer ses modes (modes couplés).

#### 4.2.1. PRINCIPE DE LA METHODE MRF

Le recalage du modèle numérique se résume en la correction de ses erreurs relatives aux matrices du système (de masse et de rigidité). Elle se fait à travers une formulation utilisant les données expérimentales (mesurées) représentées par les fonctions de réponses fréquentielles. La méthode repose sur la minimisation de l'écart entre les FRF expérimentales et numériques. [Lin90, Vis91a, Vis91b, Vis92a, Imr92].

#### 4.2.2. FORMULATION DE BASE

La relation du recalage de la méthode MRF est essentiellement basée sur les fonctions de réponses en fréquences expérimentales et numériques, définies dans le deuxième chapitre (Section.2.2.6).

Partant de la relation d'identité entre les matrices de réceptance numérique (calculée)  $[H_c(\omega)]$  et expérimentale  $[H_x(\omega)]$  [Lin90, Vis92a, Vis92b, Imr92], on a :

$$[H_c(\omega)] = [H_c(\omega)] - [H_x(\omega)] + [H_x(\omega)] \quad (4.1)$$

En exploitant l'égalité suivante :

$$[I] = [H_x(\omega)][H_x(\omega)]^{-1} = [H_c(\omega)][H_c(\omega)]^{-1} \quad (4.2)$$



il est possible d'écrire :

$$[H_c(\omega)] = [H_c(\omega)] \left( [H_x(\omega)]^{-1} [H_x(\omega)] \right) - [H_x(\omega)] + [H_x(\omega)] \quad (4.3)$$

En factorisant par rapport à  $[H_x(\omega)]$ , il vient :

$$[H_c(\omega)] = \left( [H_c(\omega)] [H_x(\omega)]^{-1} - [I] \right) [H_x(\omega)] + [H_x(\omega)] \quad (3.4)$$

Utilisant la relation (4.2), on aura :

$$[H_c(\omega)] = \left( [H_c(\omega)] [H_x(\omega)]^{-1} - [H_c(\omega)] [H_c(\omega)]^{-1} \right) [H_x(\omega)] + [H_x(\omega)] \quad (4.5)$$

Factorisant cette fois ci par rapport à  $[H_c(\omega)]$ , il vient :

$$[H_c(\omega)] = [H_c(\omega)] \left( [H_x(\omega)]^{-1} - [H_c(\omega)]^{-1} \right) [H_x(\omega)] + [H_x(\omega)] \quad (4.6)$$

d'où :

$$[H_c(\omega)] - [H_x(\omega)] = [H_c(\omega)] \left( [H_x(\omega)]^{-1} - [H_c(\omega)]^{-1} \right) [H_x(\omega)] \quad (4.7)$$

En introduisant la rigidité dynamique  $[Z(\omega)]$  définie dans le chapitre 2 par :

$$[Z(\omega)] = [H(\omega)]^{-1}$$

avec :

$$[H_x(\omega)]^{-1} - [H_c(\omega)]^{-1} = [Z_x(\omega)] - [Z_c(\omega)] = [\Delta Z(\omega)]$$

En définitive la relation (4.7) s'écrit :

$$[H_c(\omega)] - [H_x(\omega)] = [H_c(\omega)] [\Delta Z(\omega)] [H_x(\omega)] \quad (4.8)$$

Il est à noter que la matrice de receptance  $[H_x(\omega)]$  est carrée et symétrique, ses lignes correspondent aux degrés de libertés mesurés, et ses colonnes correspondent aux degrés de libertés excités. En outre, l'expérience a montré qu'il suffit d'un seul vecteur expérimental pour localiser les erreurs [Gys88, Ewi89, Ewi90, Vis92a]. Alors, dans le cas où une seule colonne de la matrice  $[H_x(\omega)]$  est mesurée (relative à un seul point d'excitation), la relation (4.8) devient:

$$\{H_c(\omega)\}_j - \{H_x(\omega)\}_j = [H_c(\omega)][\Delta Z(\omega)]\{H_x(\omega)\}_j \quad (4.9)$$

Avec :

$j$  : désigne la  $j^{\text{ième}}$  colonne de la matrice  $[H_x(\omega)]$  relative au  $j^{\text{ième}}$  point d'excitation.

La relation (4.9) représente la relation de base du recalage pour la méthode MRF.

### 4.3. PARAMETRISATION ET APPROXIMATION

Tous les éléments de la relation (4.11) sont connus sauf la matrice des erreurs sur la rigidité dynamique  $[\Delta Z(\omega)]$ . Celle-ci doit être exprimée explicitement par rapport aux matrices constitutives. La rigidité dynamique ayant été définie précédemment (Section 2.6) par :

$$[Z(\omega)] = ([K] - \omega^2[M])$$

Par conséquent :

$$[\Delta Z(\omega)] = [Z_c(\omega)] - [Z_x(\omega)] = ([\Delta K] - \omega^2[\Delta M]) \quad (4.10)$$

Donc la matrice des erreurs sur la rigidité dynamique est écrite en fonction des matrices des erreurs sur la masse et la rigidité.

et la relation (4.9) devient :

$$\{H_c(\omega)\}_j - \{H_x(\omega)\}_j = [H_c(\omega)]([\Delta K] - \omega^2[\Delta M])\{H_x(\omega)\}_j \quad (4.11)$$

Avec :

$[\Delta K]$  : matrice des erreurs de rigidité.

$[\Delta M]$  : matrice des erreurs de masse.

**Remarques :**

1. Les inconnues de la relation (4.11) sont maintenant les matrices des erreurs  $[\Delta K]$  et  $[\Delta M]$ .
2. Les matrices des erreurs  $[\Delta M]$  et  $[\Delta K]$  sont de dimension  $(N \times N)$ . Le nombre d'inconnues est donc égale à  $2 \times N^2$ , ce qui rend la relation (4.11) hyperstatique.
3. Cette relation est fonction de la fréquence d'excitation  $\omega$ , et à chaque fréquence correspondent  $N$  équations.

La relation (4.11) représente un système d'équations algébriques. Pour pouvoir le résoudre on doit l'écrire sous la forme standard du type  $([A]\{\Delta\}=\{B\})$ , où  $\{\Delta\}$  est un vecteur des inconnues relatives aux matrices des erreurs  $[\Delta M]$  et  $[\Delta K]$ . Aussi, il y'a lieu d'exprimer explicitement les deux matrices des erreurs au préalable.

La méthode du recalage adoptée dans notre sujet, fait partie de la catégorie des méthodes locales, dont les corrections ne sont pas directement affectées aux matrices globales  $[M]$  et  $[K]$ . Par contre, la correction se fait soit sur les degrés de libertés, ou sur les matrices élémentaires de masse et de rigidité, ou même sur des sous structures (sous domaines) dans des cas particuliers.

Il s'agit donc d'exprimer  $[\Delta M]$  et  $[\Delta K]$  en fonction des coefficients d'erreurs, ces coefficients sont pondérés pour chaque degré de liberté comme première approche (première approximation), ou pour chaque matrice élémentaires comme deuxième approche (deuxième approximation).

### 4.3.1. APPROXIMATION PAR RAPPORT AUX DEGRES DE LIBERTES

Dans une première approche, on cherche les erreurs aux niveau de tous les degrés de libertés. Chaque degré de liberté est pondéré par un coefficient d'erreur (noté  $\Delta m$  pour la masse et  $\Delta k$  pour la rigidité), qui vont être quantifiés par la suite par la relation du recalage, ces coefficients représenteront aux erreurs du modèle numérique au niveau de chaque ddl.

Alors les matrices des erreurs de masse  $[\Delta M]$  et de rigidité  $[\Delta K]$  sont écrites en fonction de ces coefficients d'erreurs respectifs [Lin90, Vis91a, Vis91b] par :

$$[\Delta M] = \sum_{i=1}^{N^2} \Delta m_i [m_i] \quad (4.12)$$

$$[\Delta K] = \sum_{i=1}^{N^2} \Delta k_i [k_i]$$

$[m_i]$  et  $[k_i]$  sont des matrices de même taille que celle des matrices  $[M]$  et  $[K]$  respectivement, leurs composantes sont toutes égales à zéro sauf une seule. Celle-ci prend à chaque fois la valeur d'une seule composante de la matrice de masse et de rigidité tout en gardant sa position dans la matrice globale.

Dans ce qui précède on a :

$\Sigma$  : désigne sommation directe.

$N$  : nombre de degré de liberté.

$m_i$  : un élément  $i$  de la matrice  $[M]$ .

$k_i$  : un élément  $i$  de la matrice  $[K]$ .

$[m_i]$  : matrice ne contenant que l'élément  $m_i$  qui diffère de zéro.

$[k_i]$  : matrice ne contenant que l'élément  $k_i$  qui diffère de zéro.

$\Delta m_i$  : coefficient d'erreur sur l'élément  $m_i$ .

$\Delta k_i$  : coefficient d'erreur sur l'élément  $k_i$ .

En substituant la relation (4.12) dans (4.11), et en factorisant par rapport à  $\Delta m$  et  $\Delta k$ , on obtient un système d'équations algébriques standard de la forme [Lin90, Vis91a, Fri92, Zia96] :

$$[A_1(\omega)]\{\Delta_1\} = \{B_1(\omega)\} \quad (4.13)$$

En forme plus détaillée :

$$[H_c] \cdot [K_1]\{H_x\}_j \dots [K_N]\{H_x\}_j - \omega^2 [M_1]\{H_x\}_j \dots - \omega^2 [M_N]\{H_x\}_j \cdot \begin{Bmatrix} \Delta k_1 \\ \cdot \\ \Delta k_N \\ \Delta m_1 \\ \cdot \\ \Delta m_N \end{Bmatrix} = \{H_c\} - \{H_x\}$$

#### Remarques :

1. Les éléments de la matrice  $[A_1(\omega)]$  et du vecteur  $\{B_1(\omega)\}$  sont connus en fonction des éléments de  $\{H_x(\omega)\}$ ,  $\{H_c(\omega)\}$ ,  $[M]$ ,  $[K]$  et de la fréquence d'excitation  $\omega$ .
2. Par contre, les éléments du vecteur  $\{\Delta_1\}$  sont des inconnus correspondant aux coefficients d'erreurs sur les éléments individuels des matrices de masse et de rigidité.
3. En raison de la symétrie de  $[M]$  et de  $[K]$  on aura  $N \times (N + 1)$  inconnues au lieu de  $2 \times N^2$ .
4. Pour éviter l'hyperstaticité du système (4.13), celui-ci est résolu pour un nombre de fréquences d'excitations  $N_f$  devant être supérieur au rapport du nombre d'inconnues sur le nombre d'équations.

#### 4.3.2. APPROXIMATION PAR RAPPORT AUX MATRICES ELEMENTAIRES

Pour réduire le nombre d'inconnues, on exprime les matrices des erreurs par rapport aux matrices élémentaires de masse et de rigidité, et on considère  $[\Delta M]$  et  $[\Delta K]$  comme une combinaison linéaire des matrices élémentaires respectives [Lin90, Vis91a, Vis91b, Imr92]:

$$\begin{aligned}
 [\Delta M] &= \sum_{i=1}^{N_m} \Delta m_i [M_e]_i \\
 [\Delta K] &= \sum_{i=1}^{N_k} \Delta k_i [K_e]_i
 \end{aligned}
 \tag{4.14}$$

Avec :

$\sum$  : Désigne dans ce cas l'assemblage et non pas une sommation directe.

$[M_e]_i$  :  $i^{eme}$  matrice élémentaire de masse.

$[K_e]_i$  :  $i^{eme}$  matrice élémentaire de rigidité.

$\Delta m_i$  : coefficient d'erreur sur la  $i^{eme}$  matrice élémentaire de masse.

$\Delta k_i$  : coefficient d'erreur sur la  $i^{eme}$  matrice élémentaire de rigidité.

$N_m$  : nombre de matrices élémentaires de masse.

$N_k$  : nombre de matrices élémentaires de rigidité.

En substituant la relation (4.14) dans (4.11) et en factorisant par rapport aux coefficients d'erreurs  $\Delta m_i$  et  $\Delta k_i$ , il vient [Ziae96] :

$$[A_2(\omega)] \{\Delta_2\} = \{B_2(\omega)\}
 \tag{4.15}$$

**Remarques :**

- 1- Dans ce cas, les éléments de  $[A_2(\omega)]$  et  $[B_2(\omega)]$  sont aussi fonctions des éléments de  $\{H_x(\omega)\}$ ,  $\{H_c(\omega)\}$ ,  $[M]$ ,  $[K]$  et de la fréquence d'excitation  $\omega$ .
- 2- Par contre les éléments du vecteur  $\{\Delta_2\}$  contenant les coefficients d'erreurs  $\Delta m_i$  et  $\Delta k_i$  cherchés. Ce vecteur est de dimension  $(N_m + N_k) \times 1$ .
- 3- Le nombre d'inconnues devient dans ce cas  $(N_m + N_k)$  et est égal à la somme du nombre de matrices élémentaires de masse et de rigidité. Il est nettement inférieur à celui de l'approximation précédente.

Dans toutes les techniques de recalage, la compatibilité de taille entre le modèle expérimental et le modèle numérique est nécessaire. Cette compatibilité est obtenue, soit par extension du modèle expérimental en l'amenant à la taille du modèle numérique, ou inversement par la condensation du modèle numérique. Les différentes méthodes relatives à ces deux stratégies ont été discutées dans le chapitre 2 (Section 2.5).

#### 4.4. EXTENSION DU MODELE EXPERIMENTAL

Le souci de préserver au mieux le sens physique des modifications apportées par le recalage dans la méthode adoptée dans ce mémoire, nous fait opter vers l'extension. Cette dernière, peut être effectuée de plusieurs manières.

##### 4.4.1. EXTENSION DIRECTE

L'extension se fait d'une manière directe, en remplaçant les points non mesurés du vecteur expérimental par leurs homologues numériques. Cette opération est répétée pour chaque itération car dans ce cas la solution est obtenue par un processus itératif, dans lequel les deux relations suivantes, sont résolues simultanément, avec l'élimination des lignes correspondantes aux ddl non mesurés de la deuxième relation [Lin90, Vis91a, Vis91b, Imr92] :

$$\begin{aligned} \{H_r(\omega)\}_j - \{H_x(\omega)\}_j &= [H_r(\omega)]([\Delta k] - \omega^2[\Delta M])\{H_x(\omega)\}_j \\ [A_3(\omega)]\{\Delta_3\} &= \{B_3(\omega)\} \end{aligned} \tag{4.16}$$

Avec :

r : désigne recalage (correction) pour chaque itération

Il est à noter que cette méthode exige que les deux vecteurs des FRF expérimentales et numériques soient initialement assez proches pour que le processus itératif converge plus rapidement [Lin90, Vis91a, Vis91b, Imr92]. Ceci impose donc une modélisation initiale assez correcte.

## 4.4.2. EXTENSION DYNAMIQUE

Le principe et la formulation de cette méthode a été traité en détail dans le chapitre 3 (Section.3.3.2). Cela consiste à utiliser une matrice de transformation pour l'extension du vecteur expérimental comme suit [Kid73, Berr95] :

$$\begin{matrix} \{H_x(\omega)\} \\ (N_1 + N_2) \times 1 \end{matrix} = \begin{matrix} [T(\omega)] \\ (N_1 + N_2) \times N_1 \end{matrix} \begin{matrix} \{H_x(\omega)\} \\ N_1 \times 1 \end{matrix} \quad (4.17)$$

avec :

$$[T(\omega)] = \begin{bmatrix} I_{N_1 N_1} \\ -Z_{N_2 N_2}^{-1}(\omega) \cdot Z_{N_2 N_1}(\omega) \end{bmatrix}$$

et :

$N_1$  : nombre de degré de liberté mesurés.

$N_2$  : nombre de degré de liberté non mesurés.

$[T(\omega)]$  : matrice de transformation (de l'extension dynamique).

$[Z_{N_2 N_2}]$  et  $[Z_{N_2 N_1}]$  des sous matrices de  $[Z]$ .

En substituant la relation (4.17) dans (4.11) et en factorisant par rapport aux coefficients d'erreurs  $\Delta m_i$  et  $\Delta k_i$ , on obtient un système d'équations algébrique standard. La résolution se fait cette fois aussi sur les deux équations suivantes simultanément :

$$\begin{aligned} \{H_r(\omega)\}_j - \{H_x(\omega)\}_j &= [H_r(\omega)]([\Delta k] - \omega^2[\Delta M])\{H_x(\omega)\}_j \\ [A_4(\omega)]\{\Delta_4\} &= \{B_4(\omega)\} \end{aligned} \quad (4.18)$$

Le vecteur des erreurs  $\{\Delta_4\}$  est déterminé par une méthode itérative adéquate.

On remarque que tous les équations sujet du développement de la méthode MRF, sont fonction d'un paramètre commun qui est relatif à la fréquence d'excitation  $\omega$ . D'où l'importance de ce paramètre, et son choix dépend de plusieurs facteurs.

#### 4.5. LES FREQUENCES ET LES MODES RETENUES POUR LE RECALAGE

La fréquence d'excitation est un paramètre déterminant pour la méthode MRF, son importance réside premièrement en phase d'acquisition des données (obtention des FRF numérique et mesurées), et deuxièmement en phase de la localisation et le calcul des erreurs sur le modèle numérique. Un mauvais choix de ces fréquences peut conduire à des résultats erronés, ou à la divergence des processus du calcul, ce qui rend le recalage impossible dans beaucoup de cas.

Les fréquences retenues pour le recalage sont essentiellement influencées par trois paramètres :

1. **Le nombre de fréquences ( $N_f$ ):** ce nombre dépend du nombre d'équations ( $N$ ) et du nombre d'inconnues dans le système algébrique linéaire à résoudre. Pour la présente technique ce nombre est généralement pris au moins le double du rapport des deux premiers nombres pour avoir de bonnes résultats [Lin90, Vis91a, Vis91b, Imr92].
2. **L'endroit de l'excitation:** Généralement ces fréquences sont prises au voisinage des pics des FRF, c'est à dire au voisinage des fréquences de résonance, ou des fréquences propres. Mais, pas trop près des pics, car ça conduit à des instabilités numériques [Lin90, Vis91a, Vis91b, Imr92].
3. **La bande de fréquence et le nombre de modes inclus ( $N_{mc}$ ):** La bande de fréquences retenue pour le recalage est prise sur la base des jugements de l'opérateur. On note que les structures travaillent généralement en basses fréquences. Par conséquent, la bande de fréquences ne couvre que les premiers modes propres relatifs à ces fréquences. Les basses fréquences peuvent être suffisantes pour décrire le comportement vibratoire de la structure, et même pour accomplir la tâche du recalage du modèle [Lin90, Vis91a, Vis91b, Imr92].

#### 4.6. RESOLUTION ET DETERMINATION DES COEFFICIENTS D'ERREURS

La relation de base du recalage par la méthode MRF, est représentée par un système d'équations algébriques, qui peut être écrit sous la forme standard comme c'est le cas des relations (4.13), (4.15), (4.16) et (4.18) par :

$$[A(\omega)] \{\Delta\} = \{B(\omega)\} \quad (4.19)$$

On note que la matrice  $[A(\omega)]$  n'est pas carrée, c'est à dire qu'il y a plus d'équations que d'inconnues représentant alors un système surdéterminé. Ce type de système est résolu dans le sens des moindres carrés, par la recherche du minimum d'une fonctionnelle représentant un résidu  $R(P)$  définie comme suit [Fri92, Wil92, Bou93] :

$$\text{Min } R(p) = \text{Min} \left( \|[A] \{\Delta\} - \{B\}\|_2 \right)^2 = \text{Min} \left( \|\{V\}\|_2 \right)^2 \quad (4.20)$$

Avec;

$$\|\{V\}\|_2 = \left( \sum_{i=1}^n x_i^2 \right)^{1/2}$$

$\|\{V\}\|_2$  : désigne la norme euclidienne ou norme spectrale d'un vecteur  $\{V\}$ .

La recherche de ce minimum implique que le gradient de  $R(P)$  soit nul, et ceci est équivalent au nouveau système d'équations :

$$\nabla R(P) = 0 \Leftrightarrow [A]^T [A] \{\Delta\} = [A]^T \{B\} \quad (4.21)$$

Donc, la résolution de la relation (4.19) dans le sens des moindres carrés conduit à la résolution du système (4.21). Beaucoup de méthodes sont disponibles pour cet effet [Wil92].

Pour la résolution on a opté pour deux catégories de méthodes (voir Annexe):

- Catégorie des méthodes directes, incluant les méthodes de décomposition :
  - La méthode de décomposition en LU.
  - La méthode de Householder (décomposition en QR).
  - La méthode de décomposition en valeurs singulières (décomposition en SVD).
  
- Catégorie des méthodes itératives (indirectes) :
  - La méthode du gradient conjugué.
  - La méthode de Gauss-Seidel.

#### 4.7. CONSIDERATIONS NUMERIQUES

Ces considérations numériques influent directement sur le bon déroulement de l'algorithme du recalage sur les plans stabilité et convergence. En plus des détails cités dans le paragraphe (4.5) concernant les fréquences et les modes retenus pour le recalage, d'autres facteurs qui ont eux aussi de l'influence sur les résultats, dont:

1. Dans le cas des mesures incomplètes, au minimum une coordonnée par élément doit être associée à une FRF, car ça permet d'avoir de l'information sur tous les éléments dans la formulation de base du recalage de la méthode MRF [Vis91a, Vis91b].
2. Les éléments de la matrice  $[A(\omega)]$  (matrice du système  $[A(\omega)]\{\Delta\} = [B(\omega)]$  construit à chaque itératif) doivent avoir des valeurs comparables (même ordre) pour éviter le malconditionnement numérique du système algébrique à résoudre [Imr92, Imr95a].
3. Pour assurer la stabilité de la solution, le changement maximum des valeurs des coefficients des erreurs  $\Delta m_i$  et  $\Delta k_i$  est fixé à 50% pour chaque itération. C'est particulièrement important pour les premières itérations dont les valeurs des coefficients peuvent changés radicalement [Vis91a, Vis91b].

#### 4.8. LES CRITERES DE CONVERGENCE

Beaucoup de critères et tests de convergence sont adoptés durant le calcul, particulièrement dans le cas des mesures incomplètes où le processus de calcul est itératif. Il est important de se fixer ces critères pour pouvoir conditionner la convergence de l'algorithme. Ils concernent plusieurs paramètres :

1. **Pour les matrices de masse et de rigidité :** Le changement relatif de la norme "Frobenius" des matrices de rigidité et de masse entre deux itérations successives doit être inférieur à  $\varepsilon$ .

$$\frac{\|\Delta M\|_F}{\|M_c\|_F} \leq \varepsilon$$

$$\frac{\|\Delta K\|_F}{\|K_c\|_F} \leq \varepsilon$$

Avec :

l'indice F : désigne la norme "Frobenius", pour une matrice  $[A]$ , elle est donnée par [Lin90].

$$\|A\|_F = \sqrt{\sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N a_{ij}^2}$$

et  $\varepsilon$  peut prendre la valeur de 0.3 (30%) pour cette méthode de recalage [Lin90].

2. **Pour les fonctions de réponses fréquentielles (FRF) :** Les différences relatives sur les valeurs des FRF numériques recalées et les FRF expérimentales par:

$$\left| \frac{\{H_x\} - \{H_c\}}{\{H_x\}} \right| \leq \varepsilon$$

où :

$\varepsilon$  peut prendre la valeur de 0.01 (1%) [Vis91a, Vis91b].

3. **Pour les coefficients d'erreurs  $\Delta m$  et  $\Delta k$**  : La différence relative entre les valeurs de  $\Delta m$  et  $\Delta k$  entre deux itérations successive ( $i$ ) et ( $i+1$ ) doit être inférieure à  $\varepsilon$  :

$$\left| \frac{\Delta m^{(i+1)} - \Delta m^{(i)}}{\Delta m^{(i+1)}} \right| \leq \varepsilon$$

et

$$\left| \frac{\Delta k^{(i+1)} - \Delta k^{(i)}}{\Delta k^{(i+1)}} \right| \leq \varepsilon$$

où :

$\varepsilon$  peut prendre la valeur de 0.01 (1%) [Viss91a, Viss91b].

4. **Pour les fréquences propres**: le test d'arrêt peut se faire à travers l'erreur relative ou absolue entre les deux ensemble de fréquences, comme c'est montré dans les relations (3.1) et (3.2) du chapitre 3.

#### 4.9. RECALAGE DU MODELE NUMERIQUE INITIAL

le but des techniques de recalage comme il a été déjà mentionné est de corriger les erreurs sur le modèle numérique, cette correction se faisant sur la base des données du modèle expérimental supposé plus représentatif de la structure. Dans la présente technique, les données représentent les fonctions de réponses en fréquences. La correction se fait principalement sur les matrices du système (masse et rigidité) à travers la recherche des matrices des erreurs  $[\Delta M]$  et  $[\Delta K]$ , puis le calcul des nouvelles matrices recalées de masse  $[M_r]$  et de rigidité  $[K_r]$  relatives au modèle numérique recalé comme suit [Lin90, Vis91a, Vis91b, Imr92] :

$$\begin{aligned} [M_r] &= [M_c] + [\Delta M] \approx [M_x] \\ [K_r] &= [K_c] + [\Delta K] \approx [K_x] \end{aligned} \tag{4.22}$$

De la même manière dont on a construit le modèle numérique initial, et à partir des matrices du système (de masse et de rigidité recalées) on peut recalculer les autres paramètres qui définissent le modèle numérique recalé, notamment les nouvelles données modales (valeurs propres et vecteurs propres) et les nouvelles fonctions de réponses en fréquences.

Une fois le modèle numérique recalé, il devient plus proche du modèle expérimental, donc plus représentatif de la structure, donnant ainsi plus de signification et de pouvoir à la simulation. Alors, on peut faire des études annexes sur la structure par simulation avec plus de confiance sans passer à chaque fois par l'expérimentation souvent lourde et coûteuse.

Les différentes facettes de la méthode du recalage MRF sont illustrées par l'organigramme de la figure ci-après.

Pour tester la puissance, les limites et les mérites de cette technique de recalage, et même pour valider le algorithme de calcul qu'on a élaboré, des applications sur différents types de structures feront l'objet du chapitre prochain.

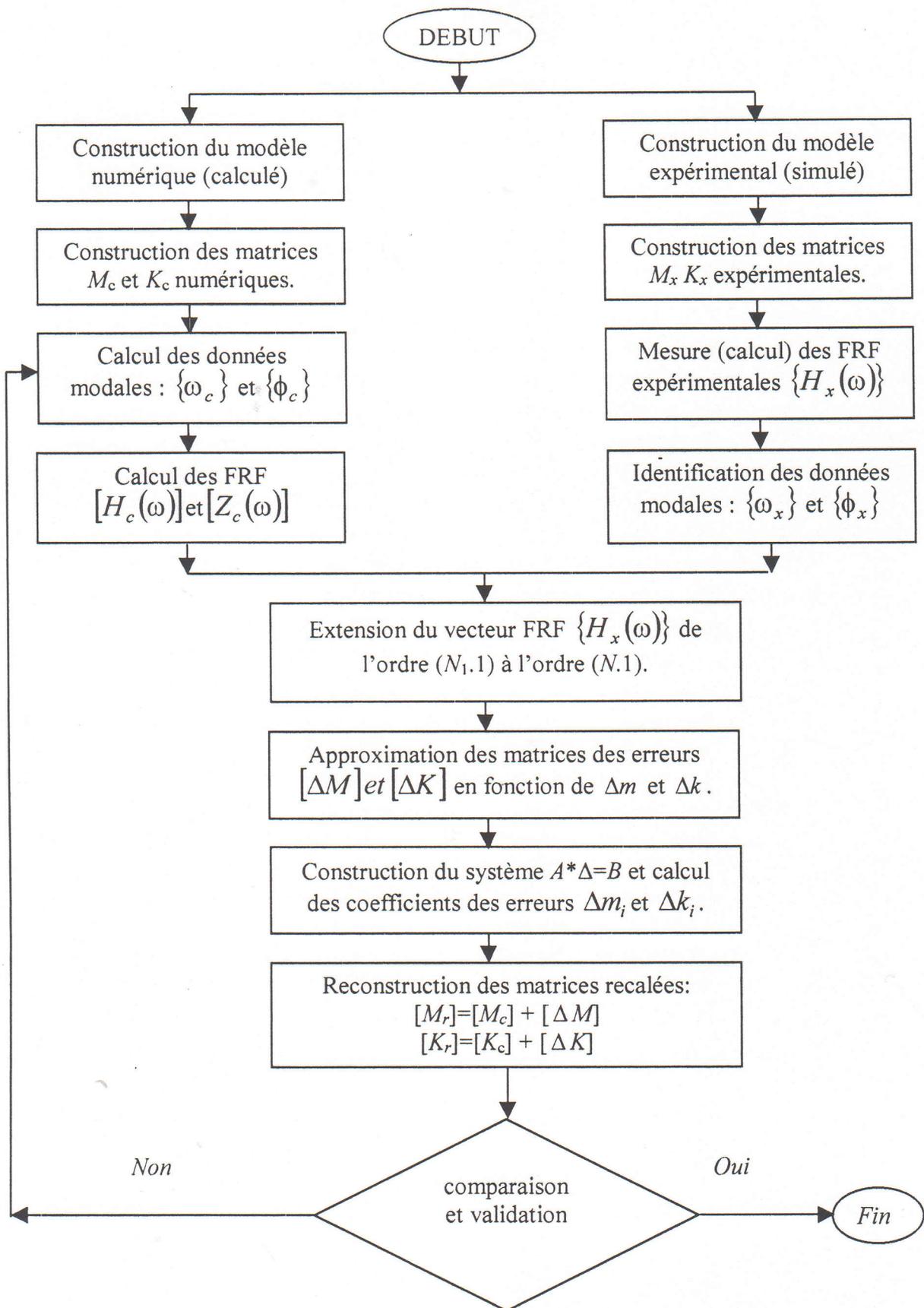


Fig.4.1. Organigramme de la méthode MRF.

***CHAPITRE 5***  
***APPLICATIONS***

## CHAPITRE 5

### APPLICATIONS

#### 5.1. INTRODUCTION

Le présent chapitre est consacré aux applications en vue de prospecter la validation de l'algorithme de recalage que nous avons traité dans le chapitre précédent. Les applications consistent en l'utilisation de modèles représentant des structures ou systèmes simples. L'absence de moyens expérimentaux nous a incité à utiliser des modèles purement numériques et des perturbations sont introduites sur les modèles pour caractériser les différences qui peuvent exister entre le modèle numérique et son homologue expérimental. Cette démarche vise beaucoup plus la validation de l'algorithme de recalage qu'une confrontation réelle, car l'expérimentation est incontournable.

#### 5.2. PRESENTATION DES APPLICATIONS

A fin de diversifier les tests, les applications concerneront :

- ❖ des structures discrètes de type masses-ressorts.
- ❖ des structures continues de type poutres.
- ❖ des structures continues de type plaques.

##### 5.2.1. MODELE NUMERIQUE

Ce modèle est obtenu par la méthode des éléments finis, donnant ainsi la possibilité de définir toutes les caractéristiques relatives à ce modèle, à savoir :

- les matrices de masse et de rigidité globales construites à partir des matrices élémentaires respectives.
- les caractéristiques modales, représentées par les fréquences propres, et la matrice des modes propres (la méthode de **Jacobi** est utilisée pour cet effet).
- les fonctions de réponses fréquentielles.

### 5.2.2. MODELE EXPERIMENTAL (SIMULE)

Comme annoncé plus haut, ce modèle est simulé à partir du modèle numérique par des perturbations des paramètres de ce dernier, qui peuvent être introduites sur les matrices de masse et de rigidité élémentaires. On comprendra alors que c'est un modèle pseudo-expérimental.

Pour les applications traitées par la suite, on considère deux cas :

- **Perturbations globales** : Ces perturbations sont faites sur toutes les matrices élémentaires du système. Par un même coefficient de perturbation  $P_m$  pour toutes les matrices élémentaires de masse, et par un même coefficient  $P_k$  pour celles de rigidité. (c'est résumer par :  $P_m$  et  $P_k$ ).
- **Perturbations locales** : Seulement quelques matrices élémentaires de masse et de rigidité sont perturbées à des régions différentes selon l'exemple traité (on note que ce cas est plus proche de la réalité où quelques régions seulement de la structure sont relatives aux erreurs). (c'est résumer par :  $P_m(i)$  ( $i$  le numéro de la matrice élémentaire de masse perturbée) et  $P_k(j)$  ( $j$  numéro de celle de rigidité perturbée)).

Après les perturbations, les autres paramètres du modèle expérimental (simulé) sont construits de la même manière que ceux du modèle numérique, commençant par la construction des matrices du système (masse et rigidité globales), puis le calcul des propriétés modales, et par suite les fonctions de réponses en fréquences.

Après la construction des vecteurs FRF expérimentaux (simulés), deux cas de simulation sont considérés :

### 5.2.5. MODELE RECALE (CORRIGE)

Suite au calcul des coefficients des erreurs sur la masse et la rigidité, on peut construire le modèle numérique **RECALE**, par le calcul de ces nouvelles matrices du système (de masse et de rigidité) (Relation.4.22), puis le calcul de ces données modales, et par la suite la détermination des fonctions de réponses fréquentielles de ce modèle.

### 5.2.6. COMPARAISON ET VALIDATION

Une fois le modèle recalé obtenu, plusieurs comparaisons sont faites entre ce modèle et le modèle expérimental, dans le but de vérifier si le modèle recalé coïncide avec le modèle expérimental.

Pour ce faire, trois comparaisons entre les deux modèles sont effectuées:

1. La comparaison entre les coefficients d'erreurs obtenues avec les coefficients de perturbation utilisés pour l'obtention du modèle expérimental (simulé) à travers leur erreurs relatives,
2. La comparaison entre les fréquences propres du modèle recalé avec celles du modèle expérimental, en calculant tout simplement les erreurs relatives entre les deux ensembles.
3. La comparaison graphique à travers les graphes des FRF des deux modèles expérimental et numérique recalé et initial. Cette comparaison est la plus importante, car les pics des FRF donnent un bon aperçu sur les fréquences des deux modèles d'une part, et d'autre part les FRF représentent la combinaison des modes des modèles respectifs. Aussi, une superposition des graphes des deux ensembles des FRF indique la même combinaison des modes, et peut visualiser clairement les écarts entre les modèles.

#### REMARQUE :

Le programme de la méthode du recalage est élaboré en deux versions. La première est en **FORTTRAN**, et la deuxième est en langage **MATLAB**.

### 5.3. APPLICATION.1

Le premier exemple d'illustration traité dans ce chapitre concerne une structure discrète constituée de masses et de ressorts comprenant dix degrés de liberté (ddl), traité également par Nubari [Nub94]. Le schéma de la structure avec ses données et caractéristiques, est représenté dans la figure ci-dessous (Fig.5.2).

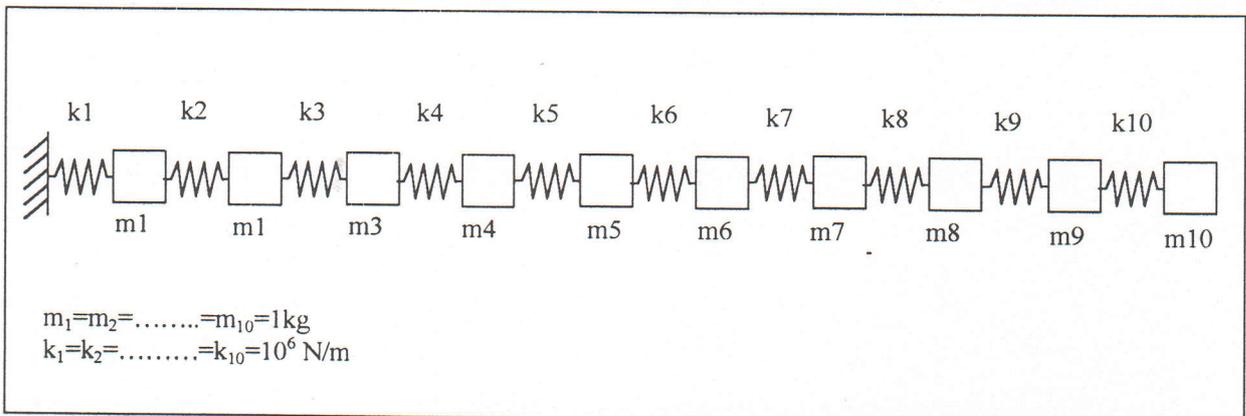


Fig.5.2. Système en masses-ressorts à 10 ddl.

Le modèle numérique est construit selon les étapes déjà citées au préalable (Section.5.2.1). Par contre le modèle expérimentale est simulé à partir du premier. Dans cette application, quatre tests vont être abordés, dont un est relatif aux mêmes données traités dans l'article cité ci-dessus.

#### 5.3.1. LE TEST 1

Ce test est relatif à un modèle expérimental simulé à partir du modèle numérique pour des perturbations globales (toutes les matrices élémentaires du modèles numérique sont perturbées), et en considérant le cas des mesures complètes (touts les points sont mesurables).

#### DONNEES :

- **Mesures complètes :** On considère que le vecteur receptance expérimental  $\{H_x(\omega)\}$  est de même taille ( $N \times 1$ ) que son homologue numérique  $\{H_c(\omega)\}$ .

- **Perturbations globales :** Toutes les matrices élémentaires de masses sont perturbées par un même coefficient  $P_m = 0.8$  (80%). Il en est de même pour les rigidités où le coefficient  $P_k = 0.4$  (40%).
- **Les fréquences et les modes retenus pour le recalage :** Le nombre de fréquences est égal à 2 ( $N_f = 2$ ), et le nombre de modes couverts dans la bande de fréquences est égal à 0 ( $N_{mc} = 0$ ), c-à-d que les fréquences retenues sont inférieurs à la première fréquence propre.

### RESULTATS :

Les premiers résultats sont relatifs aux coefficients des erreurs ( $\Delta m$  et  $\Delta k$ ) calculés par la relation de base du recalage, qui doivent être en principe égaux à ceux utilisés en perturbations ( $P_m$  et  $P_k$ ) pour la construction du modèle expérimental (simulé). Leurs valeurs sont présentées dans la figure suivante (Fig.5.3).

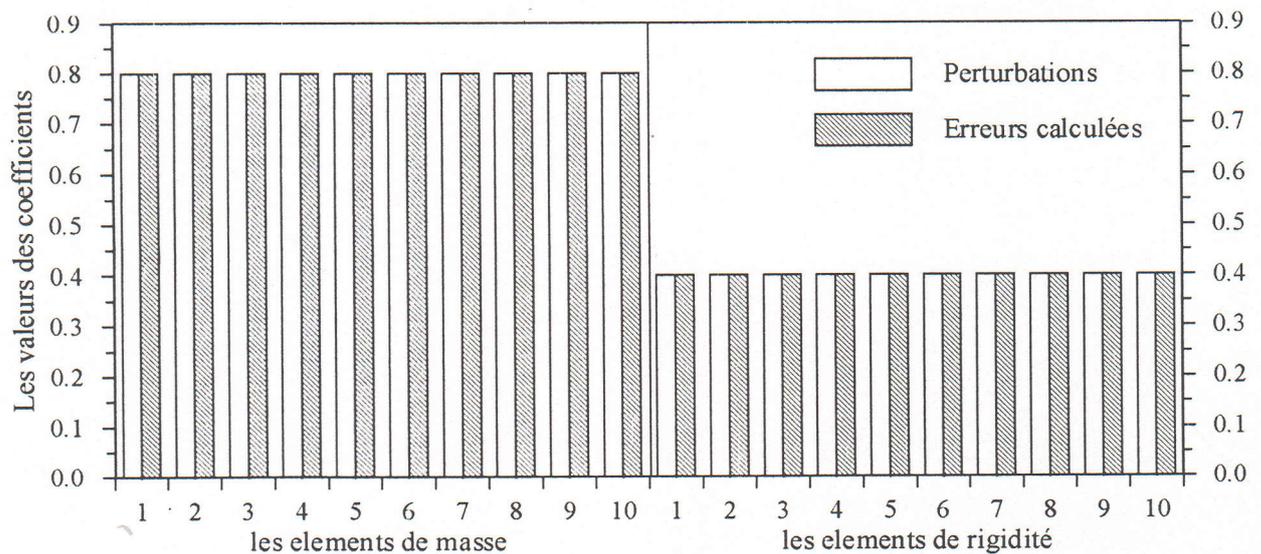


Fig.5.3. Les coefficients de perturbations et les coefficients des erreurs (Application1-Test1).

Les fréquences propres des différents modèles, numérique initial ( $\omega_c$ ), expérimental ( $\omega_x$ ) et recalé ( $\omega_r$ ) sont représentées dans le tableau (5.1) ci-dessous

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$\omega_c$ (rad/s)	149.46	445.04	730.68	1000.0	1246.98	1466.10	1652.15	1801.94	1911.15	1977.66
$\omega_x$	131.81	392.49	644.40	881.92	1099.73	1292.98	1457.35	1589.16	1685.47	1744.13
$\omega_r$	131.81	392.49	644.40	881.92	1099.73	1292.98	1457.35	1589.16	1685.47	1744.13

Tab.5.1. Les dix fréquences propres de modèle numérique, expérimental et recalé. (Appl1- Test1).

Les FRF des trois modèles quant à elles sont illustrées par les graphes de la figure (5.4) (en diagramme de Bode). Ces graphes permettent de visualiser l'écart entre le modèle numérique initial et le modèle expérimental, puis l'écart final entre le modèle expérimental et le modèle numérique recalé.

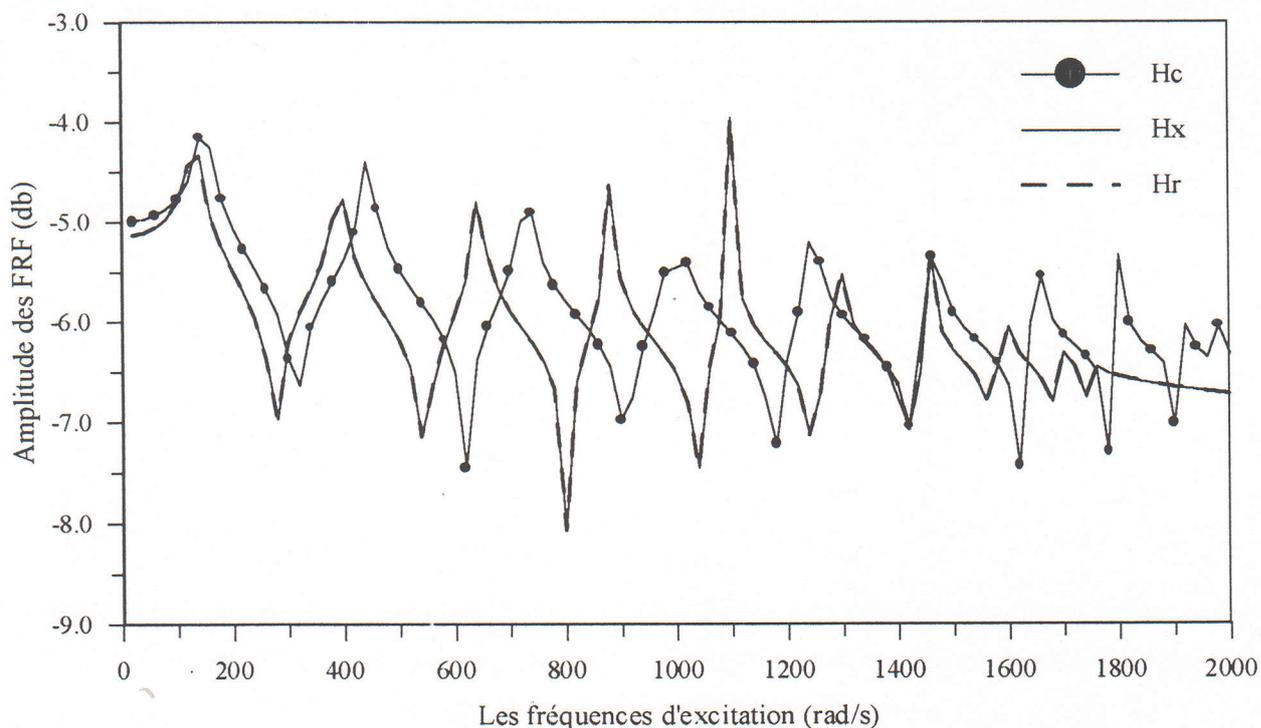


Fig. 5.4. Les graphes de l'FRF numérique (calculée), expérimentale et recalée (Application1-Test1).

Avec :

$$Db=20\text{Log}_{10}(\text{abs}(H))$$

Ce type de graphe est appelé diagramme ou graphe de Bode. Il trace le module du l'FRF en fonction des fréquences d'excitation.

$N_f$	$N_{mc}$	$P_m$	$ERM$	$P_k$	$ERK$	$ER\omega$
2	0	0.8	$5.77 \cdot 10^{-10}$	0.4	$1.03 \cdot 10^{-12}$	$1.85 \cdot 10^{-11}$

Tab.5.2 : Résultats et paramètres d'estimation (mesures complètes) (Application1-Test1).

Avec:

$ERM$  : Erreur relative maximale sur les matrices élémentaires de masse.

$ERK$  : Erreur relative maximale sur les matrices élémentaires de masse.

$ER\omega$  : Erreur relative entre les fréquences propres calculées expérimentales.

### DISCUSSIONS :

1. Une égalité entre les coefficients de perturbation ( $P_m$  et  $P_k$ ) et les coefficients des erreurs ( $\Delta m$  et  $\Delta k$ ) calculés, est remarquée d'après la figure (5.3). D'autre part, du tableau (5.2) l'erreur relative entre  $P_m$  et  $\Delta m$  (notée ERM) est de  $5.67 \cdot 10^{-10}$ , et entre  $P_k$  et  $\Delta k$  (notée ERK) est de  $1.02 \cdot 10^{-12}$ , confirmant l'égalité parfaite entre ces coefficients.
2. D'après le tableau (5.1), on remarque que les fréquences du modèle numérique recalé sont devenues égales à celles du modèle expérimental, ce qui est confirmé par l'erreur relative entre les fréquences des deux modèles (notée  $ER\omega$ ) dans le tableau (5.2) qui est de  $1.85 \cdot 10^{-10}$ .
3. Les FRF du modèle expérimental et du modèle recalé sont confondues (Fig.5.4), donnant plus de confirmation d'une bonne correction du modèle numérique initial.
4. Il est à noter que le recalage est fait avec succès malgré que le nombre de fréquences retenues pour le recalage est petit ( $N_f = 2$ ), et sans aucun mode qui est couvert par la bande de fréquences ( $N_{mc} = 0$ ).



5.3.2. LE TEST 2

Dans ce cas, on maintient la supposition que le vecteur FRF expérimental est complet, mais on considère que les perturbations ne sont faites que sur quelques éléments du modèle numérique (perturbations locales).

**DONNEES :**

- **Mesures complètes :** Les même données du test 1.
- **Perturbations locales :** Quelques éléments sont perturbés seulement.  
 La masse : La première (1) matrice élémentaire de masse seulement est perturbée par le coefficient  $P_m(1)=0.8$  (80%).  
 La rigidité : La neuvième (9) matrice élémentaire de rigidité seulement qui est perturbée par le coefficient  $P_k(9)=0.4$  (40%).
- **Les fréquences et les modes retenues pour le recalage :**  $N_f = 2$ , et  $N_{mc} = 0$ .

**RESULTATS :**

Dans la même succession que pour le test 1, les résultats du test 2 sont présentés par les tableaux et figures suivants.

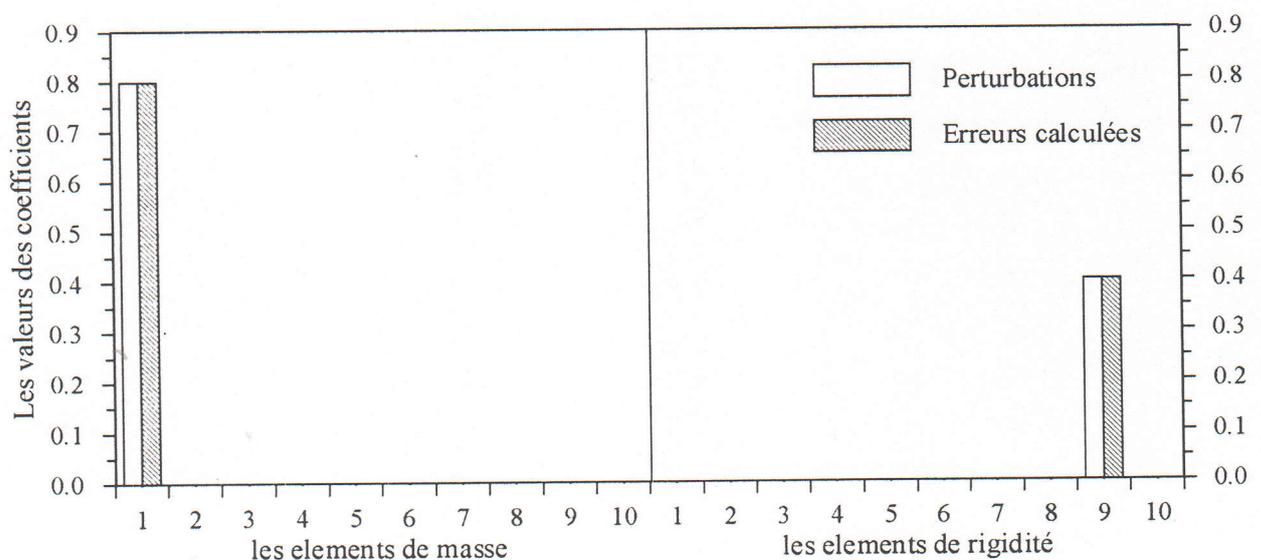


Fig.5.5. Les coefficients de perturbations et les coefficients des erreurs (Application1-Test2).

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$\omega_c$ (rad/s)	149.46	445.04	730.68	1000.0	1246.98	1466.10	1652.15	1801.94	1911.15	1977.66
$\omega_x$	149.68	448.60	734.63	990.35	1212.99	1421.60	1629.50	1813.40	1945.86	2064.47
$\omega_r$	149.68	448.60	734.63	990.35	1212.99	1421.60	1629.50	1813.40	1945.86	2064.47

Tab.5.3. Les dix fréquences propres de modèle numérique, expérimental et recalé. (Appl1-test2).

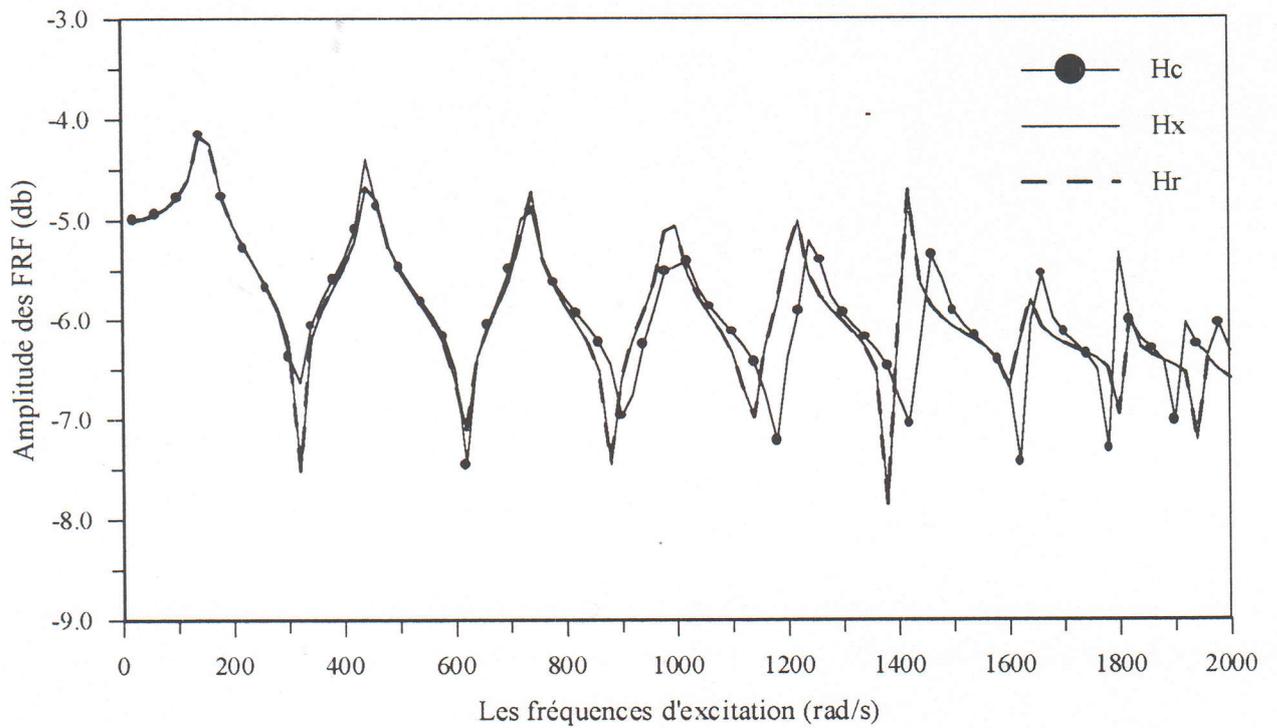


Fig.5.6. Les graphes de l'FRF numérique (calculée), expérimentale et recalée (Application1-Test2).

$N_f$	$N_{mc}$	$P_m(1)$	$ERM$	$P_k$	$ERK$	$ER\omega$
2	0	0.8	$5.40 \cdot 10^{-11}$	0.4	$5.03 \cdot 10^{-14}$	$1.17 \cdot 10^{-12}$

Tab.5.4. Résultats et paramètres d'estimation (mesures complètes) (Application1-test2).

**DISCUSSIONS :**

1. En observant les graphes et les tableaux des résultats, il est remarqué que le modèle numérique recalé est devenu très proche du modèle expérimental, et même presque identique d'après les différents pourcentages des erreurs du tableau (5.4) qui sont infiniment petits.
2. Pour ce cas les perturbations sont concentrées en quelques éléments seulement (perturbations locales), et l'algorithme du recalage a pu détecter les erreurs sur le modèle numérique avec succès.

Il est à noter que dans le cas des mesures complètes (test1 et test2), le processus de calcul n'est pas itératif, et les erreurs sont déterminées avec une très grande précision.

**5.3.3. LE TEST 3**

Dans ce test, on considère que le vecteur FRF expérimental est incomplet (mesures incomplètes) qui sera mené par extension à la taille de son homologue numérique.

**DONNEES :**

- **Mesures incomplètes :** Dans ce cas la taille du vecteur expérimental  $\{H_x(\omega)\}$  est de  $(N_1 \times 1)$ , et  $(N_1=8)$  relatives à huit deux degré de liberté parmi dix, qui sont mesurés.
- **Perturbations globales :**  $P_m = 0.8$  (80%),  $P_k = 0.4$  (40%).
- **Les fréquences et les modes retenus pour le recalage :**  $N_f = 5$  et  $N_{mc} = 2$ .

**RESULTATS :**

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$\omega_c$ (rad/s)	149.46	445.04	730.68	1000.0	1246.98	1466.10	1652.15	1801.94	1911.15	1977.66
$\omega_x$	131.81	392.49	644.40	881.92	1099.73	1292.98	1457.35	1589.16	1685.47	1744.13
$\omega_r$	131.80	392.37	644.05	881.41	1099.26	1292.49	1456.61	1588.22	1684.73	1743.87

Tab.5.5.Les dix fréquences propres de modèle numérique, expérimental et recalé.(Appl1-test3).

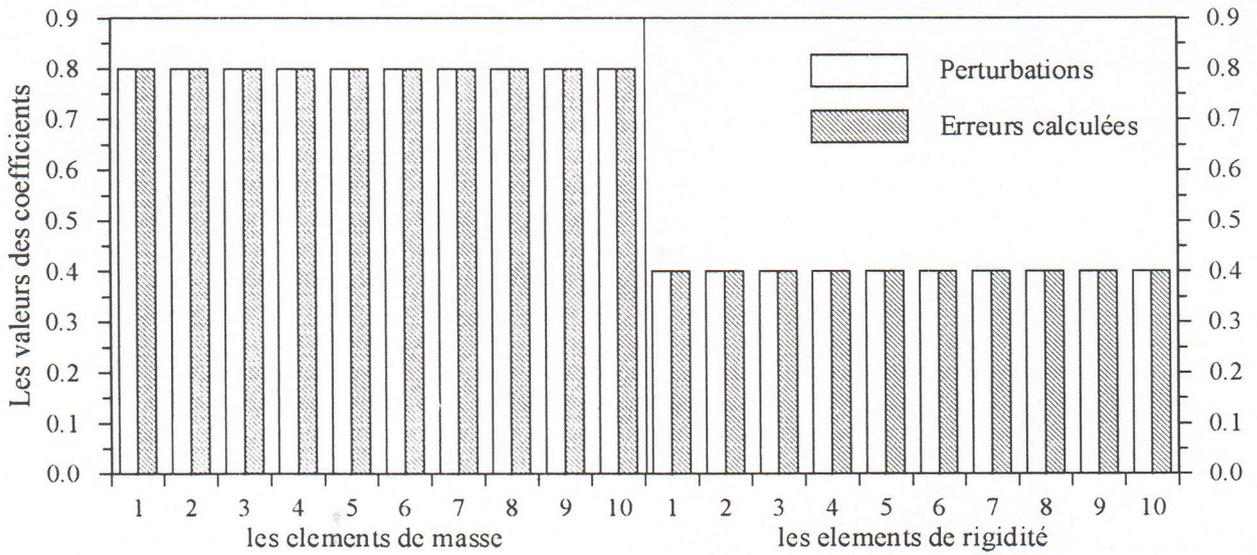


Fig.5.7. Les coefficients de perturbations et les coefficients des erreurs (Application1-Test3).

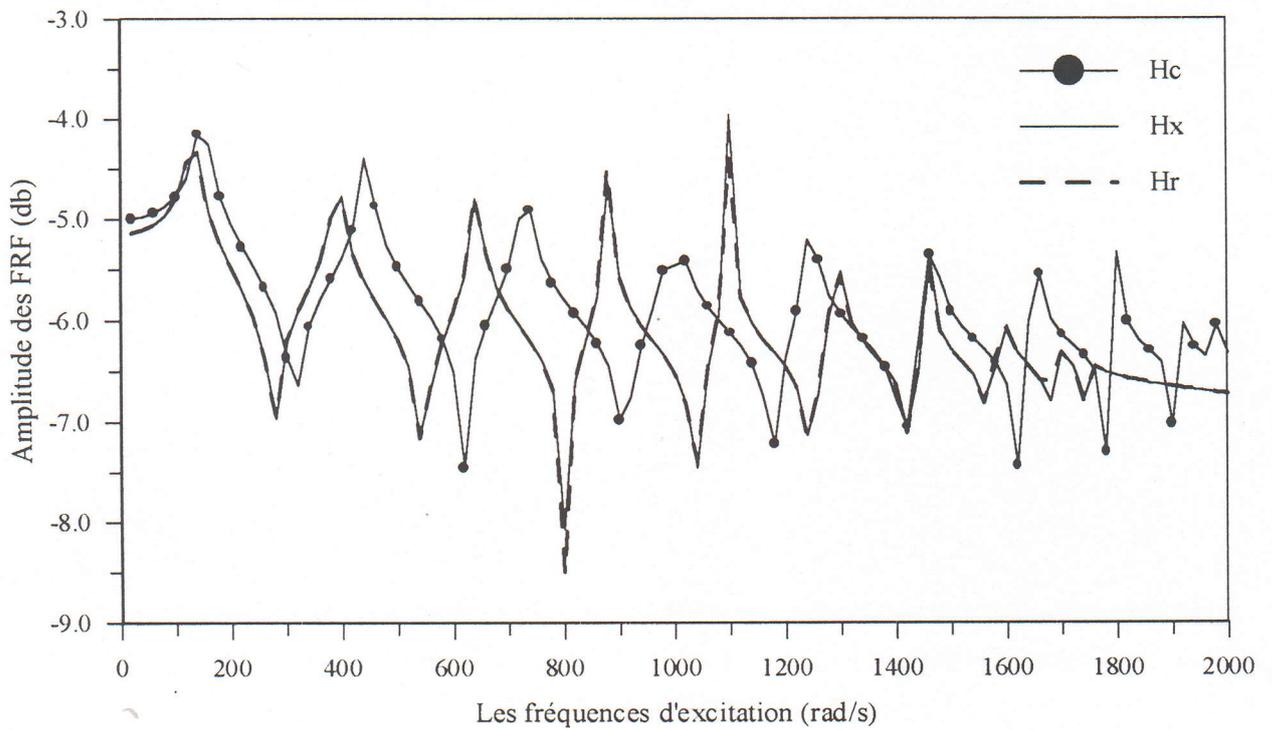


Fig.5.8. Les graphes de l'FRF numérique (calculée), expérimentale et recalée (Application1-Test3).

$N_f$	$N_{mc}$	$P_m$	$ERM$	$P_k$	$ERK$	$ER\omega$
5	2	0.8	$7.91 \cdot 10^{-3}$	0.4	$1.51 \cdot 10^{-3}$	$1.30 \cdot 10^{-3}$

Tab.5.6. Résultats et paramètres d'estimation (mesures incomplètes) (Application1-Test3).

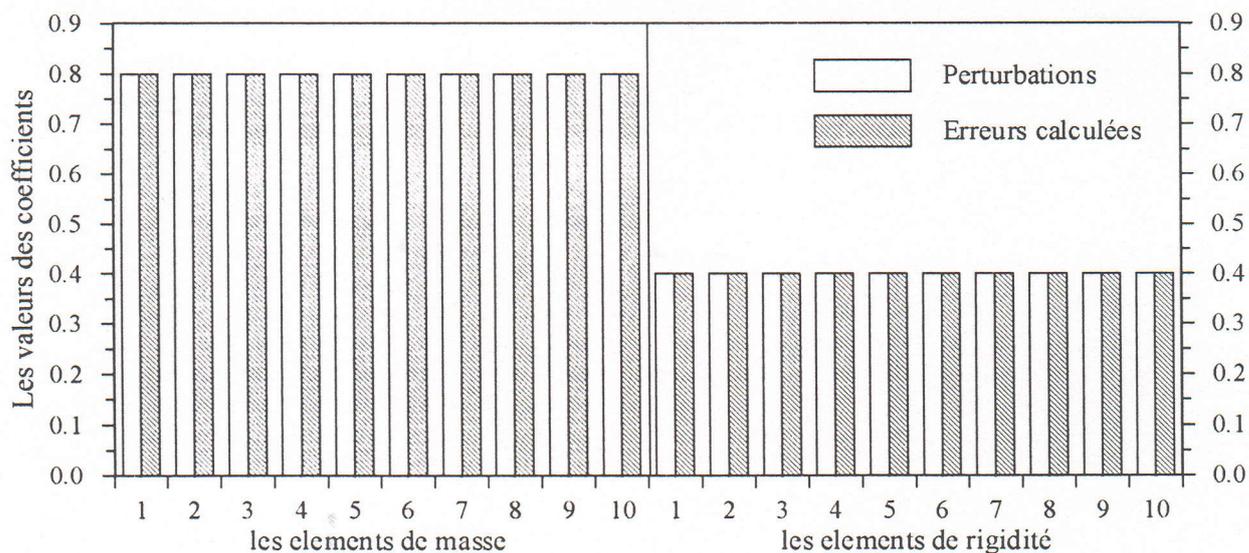


Fig.5.7. Les coefficients de perturbations et les coefficients des erreurs (Application1-Test3).

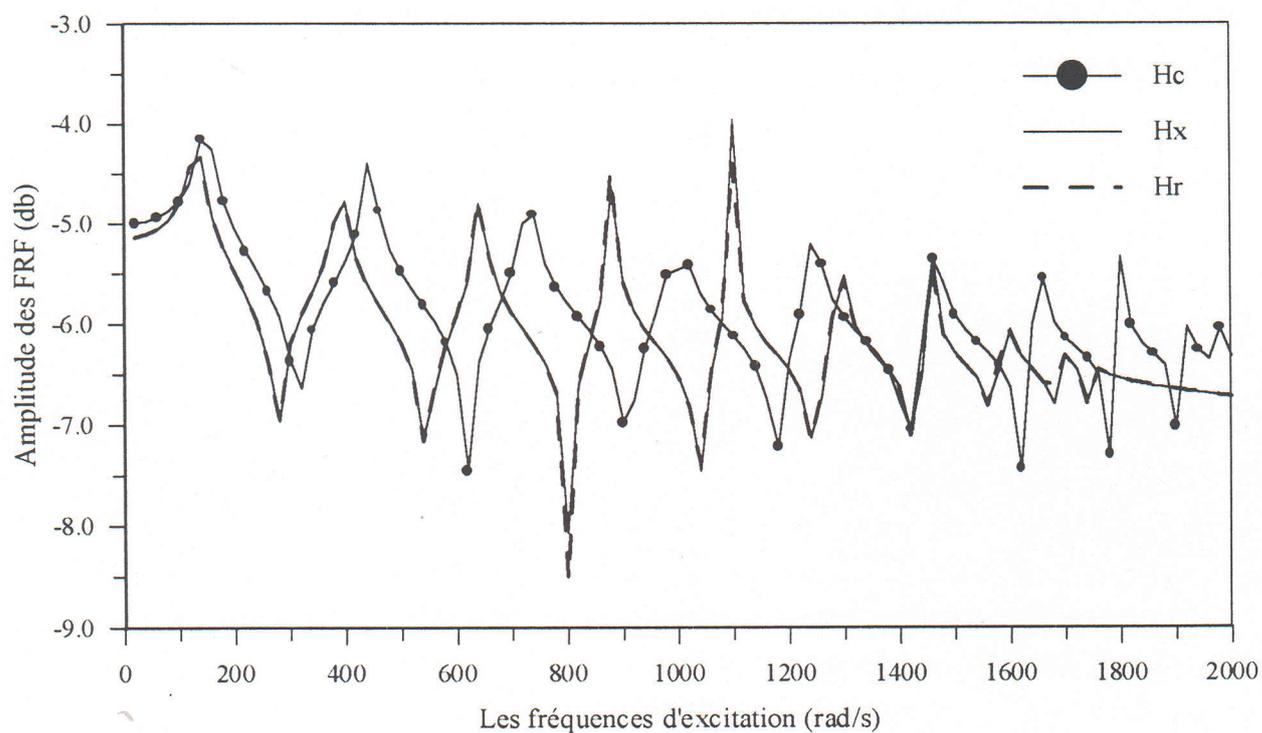


Fig.5.8. Les graphes de l'FRF numérique (calculée), expérimentale et recalée (Application1-Test3).

$N_f$	$N_{mc}$	$P_m$	$ERM$	$P_k$	$ERK$	$ER\omega$
5	2	0.8	$7.91 \cdot 10^{-3}$	0.4	$1.51 \cdot 10^{-3}$	$1.30 \cdot 10^{-3}$

Tab.5.6. Résultats et paramètres d'estimation (mesures incomplètes) (Application1-Test3).

**DISCUSSIONS:**

1. Dans ce cas aussi, et d'après les tableaux et les graphes ci-dessus, l'algorithme a pu corriger le modèle numérique initial avec une bonne précision.
2. On remarque que dans ce test, le nombre de fréquences retenues pour le recalage  $N_f$  a augmenté de 2 pour les deux premiers tests à 5 dans celui-ci. Le nombre de modes couverts dans la bande de fréquences  $N_{mc}$  a augmenté de 0 à 2. Cette augmentation est directement liée aux mesures incomplètes, et c'est indispensable pour pouvoir déterminer les erreurs avec précision.

**5.3.4. LE TEST 4**

Dans ce test le modèle expérimental est simulé à partir des perturbations locales du modèle numérique, et en considérant aussi que les mesures sont incomplètes. Les données sont identiques à celles traitées par Nubari [Nub94].

**LES DONNEES :**

- **Mesures incomplètes :** ( $N_1 = 7$ ) Sept degré de liberté seulement parmi dix mesurés.
- **Perturbations locales :** La première (1) matrice élémentaire de masse par  $P_m(1) = 0.2$  (20%), et la neuvième (9) matrice élémentaire de rigidité par  $P_k(9) = 0.2$  (20%).
- **Les fréquences et les modes retenues pour le recalage :**  $N_f = 7$  et  $N_{mc} = 2$ .

**LES RESULTATS :**

Il est de même que pour les trois tests précédents, les résultats de ce test suivent la même succession.

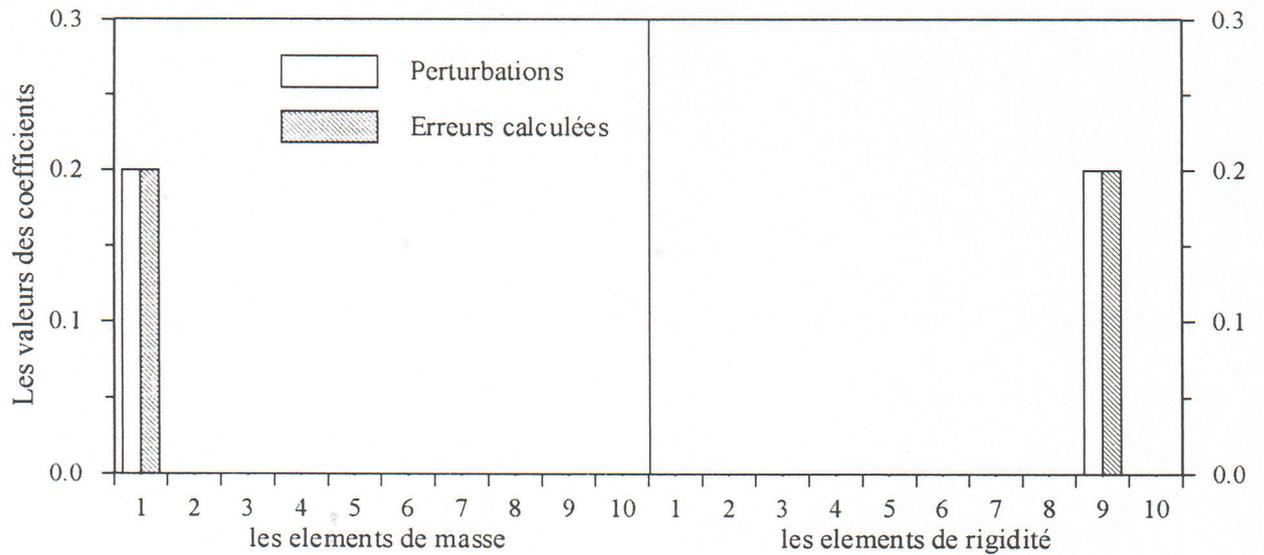


Fig.5.9. Les coefficients de perturbations et les coefficients des erreurs (Application1-Test4).

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$\omega_c$ (rad/s)	149.46	445.04	730.68	1000.0	1246.98	1466.10	1652.15	1801.94	1911.15	1977.66
$\omega_x$	149.63	448.45	738.77	1005.21	1239.94	1453.01	1649.70	1816.67	1937.49	2003.52
$\omega_r$	149.61	448.44	738.79	1005.23	1240.03	1452.95	1649.85	1816.57	1937.65	2003.51

Tab.5.7. Les dix fréquences propres de modèle numérique, expérimental et recalé. (Appl1-Test4).

$N_f$	$N_{mc}$	$P_m(1)$	$ERM$	$P_k(9)$	$ERK$	$ER\omega$
7	2	0.2	$9.14 \cdot 10^{-4}$	0.2	$5.61 \cdot 10^{-4}$	$2.09 \cdot 10^{-3}$

Tab.5.8 : Résultats et paramètres d'estimation (mesures incomplètes) (Application1-Test4).

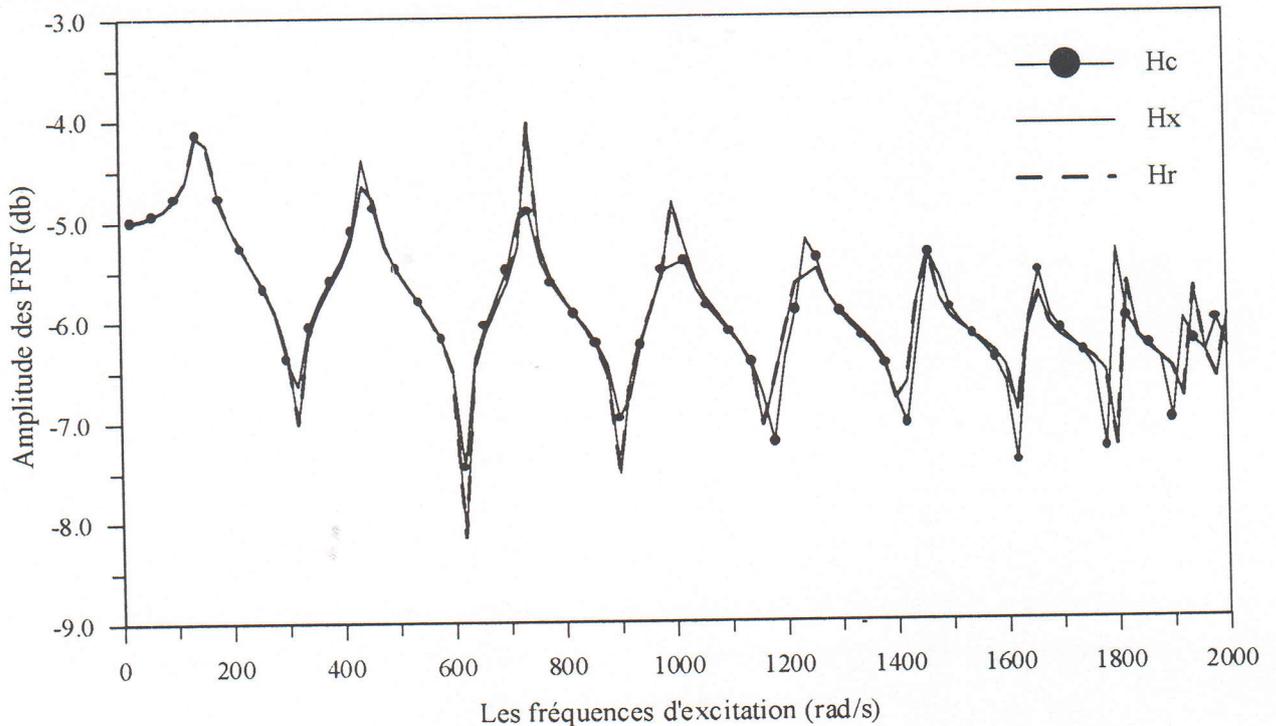


Fig.5.10. Les graphes de l'FRF numérique (calculée), expérimentale et recalée (Application1-Test4).

### DISCUSSIONS :

1. D'après les tableaux et les figures ci-dessus, l'algorithme a corrigé le modèle numérique avec succès.
2. Le nombre de fréquences retenues pour le recalage est égal à 7, avec deux modes couverts dans la bande de fréquences retenues pour le recalage, nettement supérieur à ceux du test 1 et du test 2, augmentant proportionnellement avec le nombre de points non mesurés.

On remarque, que dans le cas des mesures incomplètes (test3 et test4) le processus de calcul est itératif. Aussi pour avoir de bonnes résultats, il faut que le nombre de fréquences retenus pour le recalage et le nombre de modes couverts dans la bande de fréquences soient augmentés par rapport à ceux relatifs aux cas des mesures complètes (test 1 et test 2). L'augmentation du nombre de fréquences retenues pour le recalage permet d'augmenter le nombre d'équations ce qui permet de compenser les erreurs commises lors de l'extension du vecteur FRF expérimental (cas des mesures incomplètes).

## 5.4. APPLICATION 2

Cette fois ci, on s'intéresse à une structure continue modélisée en 10 éléments poutres, traitée aussi par Aiad [Aia91] (Fig.5.11).

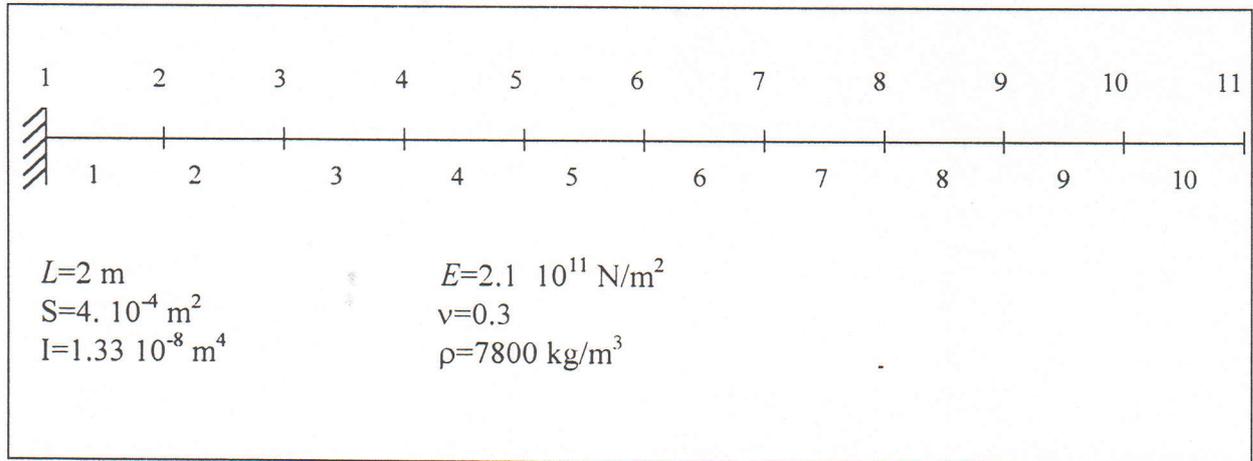


Fig.5.11. Système continu en 10 éléments poutres.

Le modèle comprend dix degrés de liberté (ddl), seul l'effet de flexion est pris en compte en considérant les déplacements suivant une seule direction, ici la direction transversale qui est retenue.

Le modèle numérique est construit selon les étapes montrées en section (5.2.1), par contre le modèle expérimental quand à lui, il est simulé à partir du modèle numérique par les perturbations de ses paramètres. Quatre tests relatifs à quatre modèles simulés seront traités dans cette application.

## 5.4.1. TEST 1

## LES DONNEES :

- **Mesures complètes :** On considère que le vecteur FRF expérimental  $\{H_x(\omega)\}$  est de même taille ( $N \times 1$ ) que son homologue numérique  $\{H_c(\omega)\}$ .
- **Perturbations globales :**  $P_m = 0.3$  (30%) pour toutes les matrices élémentaires de masse, et  $P_k = 0.5$  (50%) pour celles de rigidité.
- **Les fréquences et les modes retenus pour le recalage :**  $N_f = 3$  et  $N_{mc} = 0$ .

Les résultats sont résumés par les paramètres estimatifs du tableau suivant (Tab.5.8).

$N_f$	$N_{mc}$	$P_m$	$ERM$	$P_k$	$ERK$	$ER\omega$
3	0	0.3	$5.59 \cdot 10^{-9}$	0.5	$7.99 \cdot 10^{-12}$	$2.96 \cdot 10^{-10}$

Tab.5.9. Résultats et paramètres d'estimation (mesures complètes) (Application2-Test1).

Les valeurs des erreurs présentées dans le tableau précédent sont très faibles, signifiant que le recalage est fait avec précision. Aussi, on remarque que la précision est meilleur pour la rigidité que pour la masse.

#### 5.4.2. TEST 2

##### DONNEES :

- **Mesures complètes** : Les même données du test 1.
- **Perturbations locales** : Quelques éléments sont perturbés seulement.
  - La masse : La première matrice élémentaire de masse seulement est perturbée par le coefficient  $P_m(1) = 0.3$  (30%).
  - La rigidité : La septième matrice élémentaire de rigidité seulement est perturbée par le coefficient  $P_k(7) = 0.5$  (50%).
- **Les fréquences et les modes retenus pour le recalage** :  $N_f = 3$ , et  $N_{mc} = 0$ .

$N_f$	$N_{mc}$	$P_m(1)$	$ERM$	$P_k(7)$	$ERK$	$ER\omega$
3	0	0.3	$4.95 \cdot 10^{-10}$	0.5	$6.11 \cdot 10^{-13}$	$2.54 \cdot 10^{-11}$

Tab.5.10. Résultats et paramètres d'estimation (mesures complètes) (Application2-Test2).

Cette fois aussi, le recalage est effectué avec succès, confirmé par les pourcentages des erreurs du tableau ci-dessus.

Alors, dans le cas des mesures complètes (test 1 et test 2), le recalage est réussi avec une précision remarquable même pour un nombre petit de fréquences et sans aucun mode couvert dans la bande de fréquences retenue pour le recalage.

## 5.4.3. TEST 3

## DONNEES :

- **Mesures incomplètes :** Dans ce cas la taille du vecteur expérimental  $\{H_x(\omega)\}$  est de  $(N_1, 1)$ , et  $(N_1 = 8)$  relatives à huit degrés de liberté parmi dix, qui sont mesurés.
- **Perturbations globales :**  $P_m = 0.3$  (30%), et  $P_k = 0.5$  (50%).
- **Les fréquences et les modes retenus pour le recalage :**  $N_f = 4$  et  $N_{mc} = 1$ .

$N_f$	$N_{mc}$	$P_m$	ERM	$P_k$	ERK	$ER\omega$
4	1	0.3	$4.03 \cdot 10^{-3}$	0.5	$1.35 \cdot 10^{-3}$	$4.11 \cdot 10^{-4}$

Tab.5.11. Résultats et paramètres d'estimation (mesures incomplètes) (Application2-Test3).

D'après le tableau (5.11) ci-dessus, on remarque que les pourcentage des paramètres estimatifs sont faibles, preuve d'une bonne correction du modèle numérique initial. Le calcul est itératif pour ce cas (mesures incomplètes).

## 5.4.4. TEST 4

Ce dernier test concerne les perturbations locales avec prise en compte des mesures incomplètes. Aussi, on essaye d'augmenter au maximum le nombres de degrés de liberté non mesurés, et voir son influence sur la procédure du recalage.

## LES DONNEES :

- **Mesures incomplètes :**  $(N_1 = 3)$  relative à trois degrés de liberté seulement parmi dix qui sont mesurés, alors 70% de degrés de liberté ne sont pas mesurés.
- **Perturbations locales :** La première matrice élémentaire de masse par  $P_m(1) = 0.3$  (30%), et la septième matrice élémentaire de rigidité par  $P_k(7) = 0.5$  (50%).
- **Les fréquences et les modes retenus pour le recalage :**  $N_f = 8$  et  $N_{mc} = 4$ .

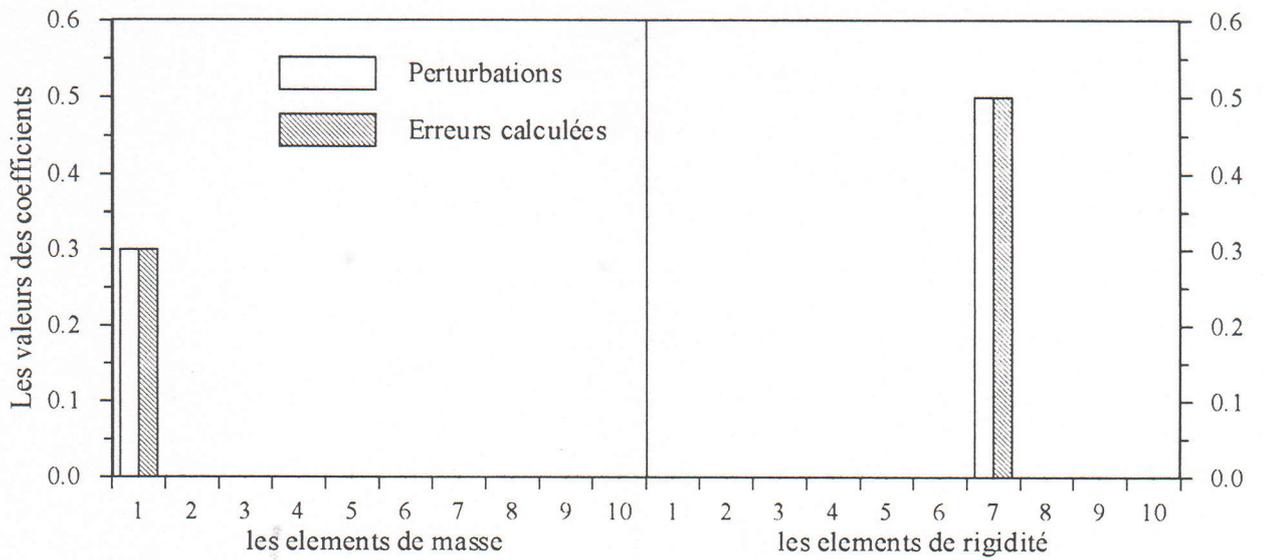


Fig.5.12. Les coefficients de perturbations et les coefficients des erreurs (Application2-Test4).

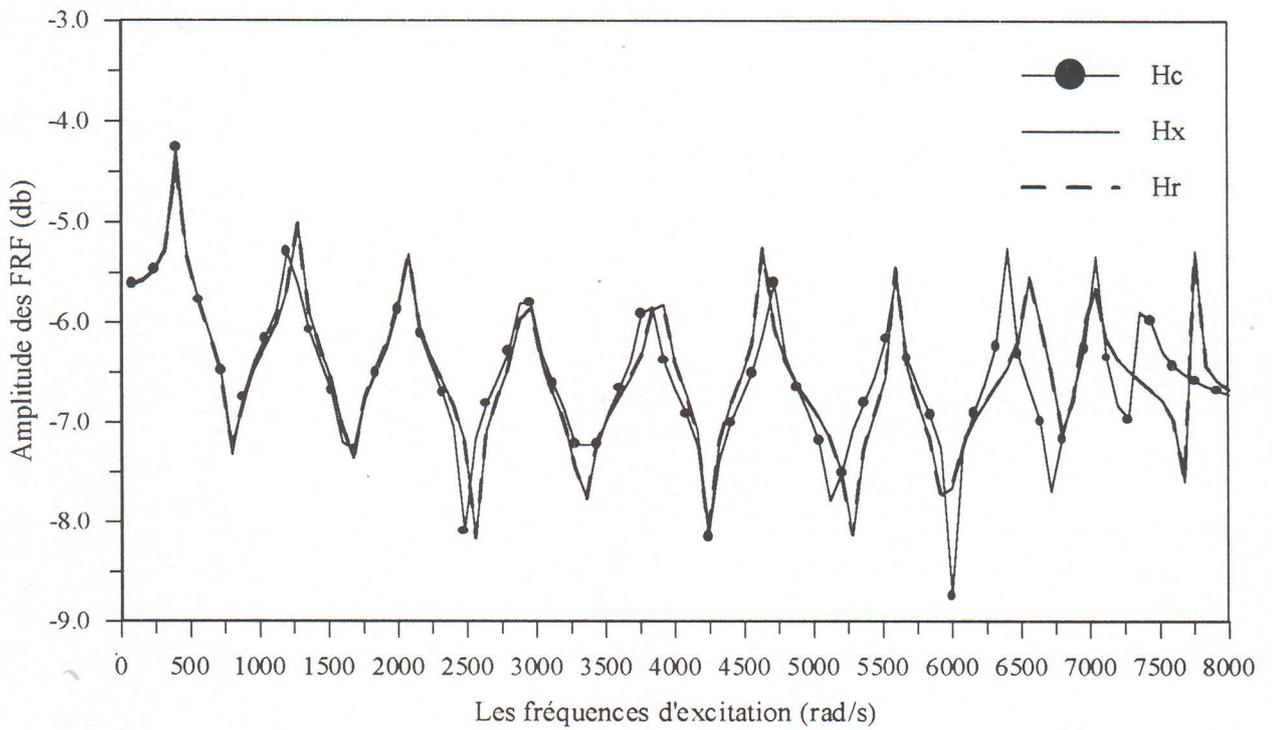


Fig.5.13. Les graphes de l'FRF numérique (calculée), expérimentale et recalée (Application2-Test4).

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$\omega_c$ (rad/s)	401.24	1227.09	2062.35	2920.49	3803.29	4701.11	5584.15	6392.07	7030.37	7388.85
$\omega_x$	410.84	1266.25	2060.83	2925.51	3883.59	4650.73	5607.52	6582.54	7011.70	7756.61
$\omega_r$	410.84	1266.25	2060.83	2925.51	3883.59	4650.73	5607.52	6582.54	7011.70	7756.61

Tab.5.12. Dix fréquences propres du modèle numérique, expérimental et recalé.(Appl2-Test4).

$N_f$	$N_{mc}$	$P_m(1)$	$ERM$	$P_k(7)$	$ERK$	$ER\omega$
8	4	0.3	$1.74 \cdot 10^{-7}$	0.5	$5.29 \cdot 10^{-7}$	$5.07 \cdot 10^{-8}$

Tab.5.13. Résultats et paramètres d'estimation (mesures incomplètes) (Application2-Test4).

**DISCUSIONS :**

1. Il est à noter que dans le cas des mesures incomplètes, l'extension du vecteur FRF expérimental est une phase indispensable, et le calcul des coefficients des erreurs se fait d'une manière itérative.
2. D'après les tableaux et les figures précédents, la correction du modèle numérique est faite avec succès.
3. Malgré le manque important en degrés de liberté non mesurés ce qui engendre des erreurs additionnelles dues à l'extension du vecteur expérimental, les résultats sont assez précis. En contre partie, cela engendre l'augmentation du nombre de fréquences et de modes retenues pour le recalage ( $N_f$  était 3 pour les test1 et test2 et il est 8 pour les test3 et test4, aussi  $N_{mc}$  était 0 et est devenu 4), rendant le calcul plus important.

En conclusion de cette application, l'algorithme de recalage a pu corriger le modèle numérique initial avec précision pour les quatre tests effectués sur cette structure. En particulier le test4 où le nombre de degrés de liberté (ddl) non mesurés est de 70% du nombre total. La possibilité de mesurer tous les ddl est loin d'être réaliste (cas des mesures complètes pour le test1 et test2), donc la considération du cas des mesures incomplètes permet d'approcher plus la pratique, ce qui donne de l'importance supplémentaires aux résultats des deux derniers tests en particuliers (test3 et test4).

## 5.5. APPLICATION 3

La structure considérée est modélisée en 12 éléments triangulaires à trois nœuds chacun, et à deux degrés de liberté pour chaque nœud. On considère le déplacement transversal (parallèle à l'axe Z), et la rotation autour de l'axe du plan de la structure (autour de l'axe X), voir figure (5.14).

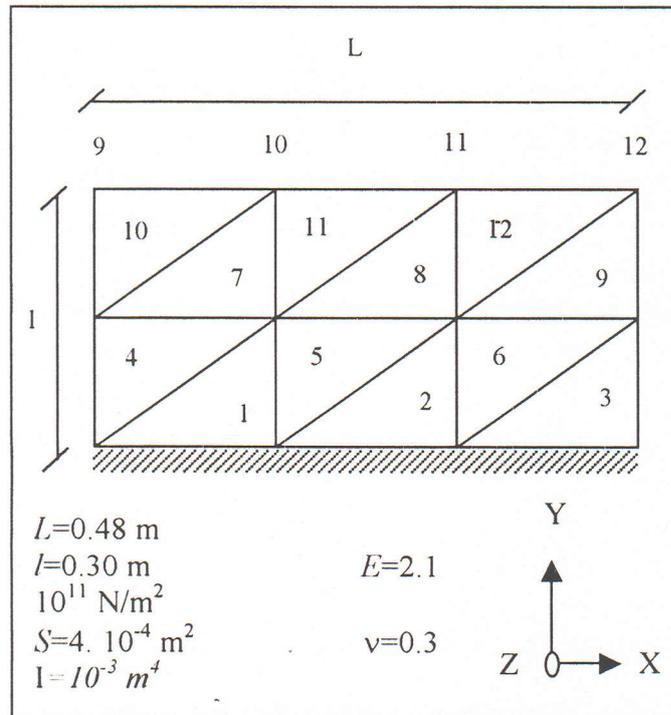


Fig.5.14. Système continu en 12 éléments plaques.

La structure est encastree comme c'est montré dans la figure ci-dessus, et le nombre de degrés de liberté actifs est 16, il est supérieur à ceux des deux applications précédentes. En référence aux limitations pratiques et économiques deux tests vont être traités pour cette application, les deux sont relatifs à des vecteurs FRF expérimentaux (simulés) incomplets, avec deux types de perturbations différentes. Le premier est le produit des perturbations globales des matrices élémentaires du modèle numérique initial, alors que le deuxième découle d'après des perturbations locales relatives à quelques matrices seulement.

## 5.5.1. TEST 1

## DONNEES :

- **Mesures incomplètes** :  $N_1=9$ , représentant 56% de degrés de liberté mesurés.
- **Perturbations globales** :  $P_m = 0.6$  (60% de perturbation pour toutes les matrices élémentaires de masse), et pour celles de rigidité  $P_k = 0.4$  (40%).
- **Les fréquences et les modes retenus pour le recalage** :  $N_f = 8$  et  $N_{mc} = 6$ .

$N_f$	$N_{mc}$	$P_m$	$ERM$	$P_k$	$ERK$	$ER\omega$
8	6	0.6	$7.66 \cdot 10^{-3}$	0.4	$5.98 \cdot 10^{-4}$	$6.48 \cdot 10^{-4}$

Tab.5.14. Résultats et paramètres d'estimation (mesures incomplètes) (Application3-Test1).

Les pourcentages d'erreurs figurant dans le tableau ci-dessus mènent à constater la précision avec laquelle le recalage est effectué.

## 5.5.2. TEST 2

## LES DONNEES :

- **Mesures incomplètes** : Dans ce cas  $N_1=7$ , représentant 43% de ddl mesurés.
- **Perturbations locales** :  $P_m(7)=0.6$  (la septième matrice élémentaire de masse perturbée de 60%),  $P_k(10)=0.4$  (la dixième matrice élémentaire de rigidité perturbée de 40%).
- **Les fréquences et les modes retenus pour le recalage** :  $N_f = 8$  et  $N_{mc}=6$ .

## LES RESULTATS :

Les résultats de ce test sont présentés dans les figures et les tableaux suivant.

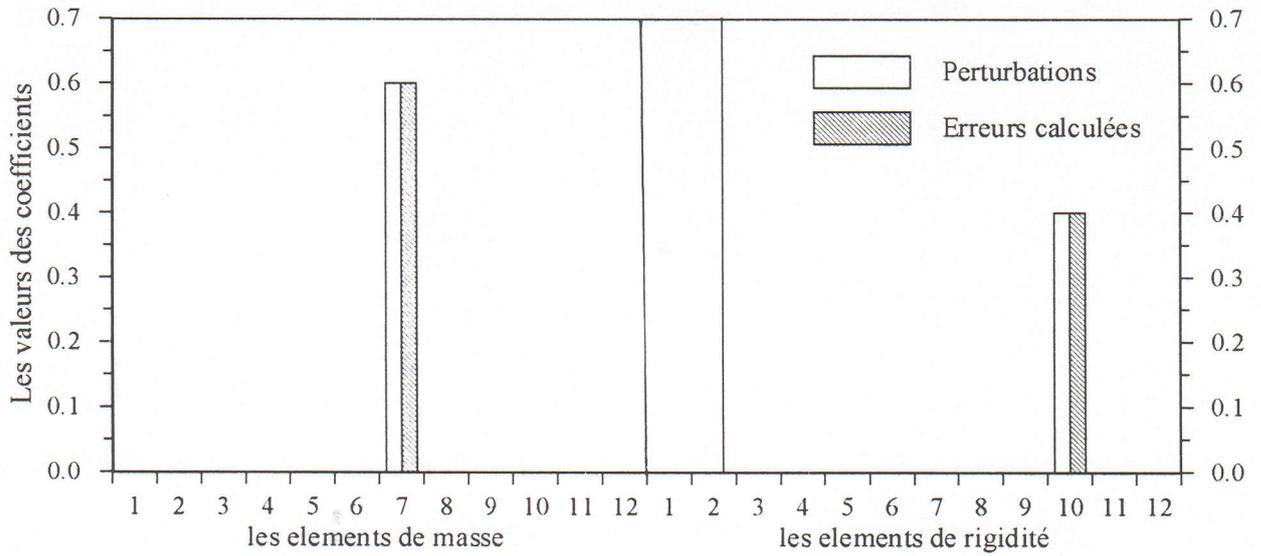


Fig.5.15.Les coefficients de perturbations et les coefficients des erreurs (Application3-Test2).

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$\omega_c$ (rad/s)	56.02	238.95	380.79	462.26	537.64	689.47	746.83	852.36	23523.1	24754.9
$\omega_x$	54.22	234.46	375.68	468.89	530.11	721.40	733.42	855.93	23195.4	23578.6
$\omega_r$	54.34	234.96	375.88	468.89	530.10	721.39	733.48	855.99	23200.4	23579.2

Tab.5.15.Les dix premières fréquences propres de modèle numérique, expérimental et recalé.(Application3-Test2).

$N_f$	$N_{mc}$	$P_m$	ERM	$P_k$	ERK	$ER\omega$
8	6	0.6	$2.94 \cdot 10^{-3}$	0.4	$7.59 \cdot 10^{-4}$	$2.21 \cdot 10^{-4}$

Tab.5.16. Résultats et paramètres d'estimation (mesures incomplètes) (Application3-Test2).

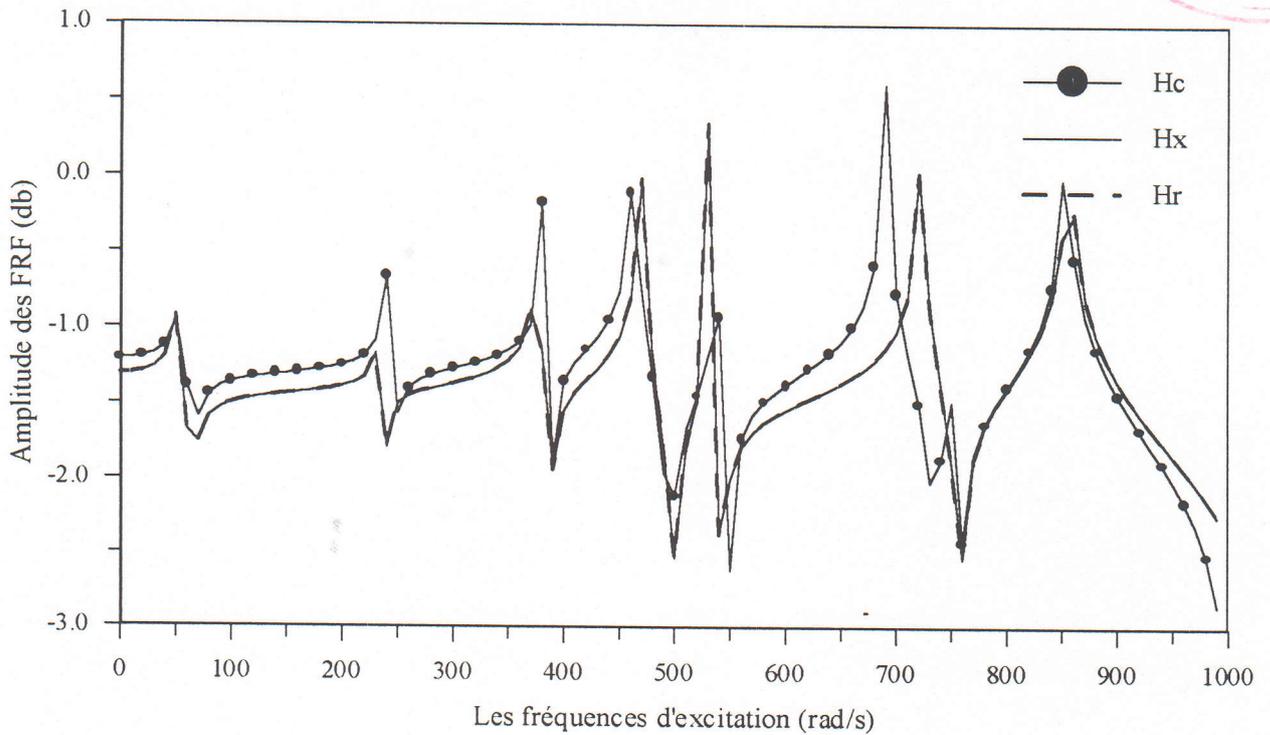


Fig 5.16. Les graphes de l'FRF numérique (calculée), expérimentale et recalée (Application3-Test2).

### DISCUSSIONS :

Dans ce cas aussi, la correction s'est effectuée avec une bonne précision, et l'algorithme du recalage de la méthode MRF a pu recaler avec succès le modèle numérique initial, malgré que le nombre de points non mesurés représente plus de 50% du nombre total. Il est à noter que ce manque engendre des difficultés et des erreurs supplémentaires pendant la phase de l'extension du vecteur FRF expérimental, et qui se répercute directement sur l'effort de calcul. Pour y remédier, c'est l'augmentation du nombre de fréquences retenues pour le recalage qui est généralement adoptée.

## 5.6. APPLICATION 4

La structure sujet de cette application, est plus importante du point de vue dimension par rapport à celles des applications précédentes. Elle est modélisée en 19 éléments poutres à deux nœuds, et à trois degrés de liberté par nœud (57 ddl en total). Elle est appuyée en trois nœuds, en considérant deux appuis simples et un troisième double (voir figure), d'où le nombre de ddl actifs est de 53. La même structure est traitée par Lin [Lin 90].

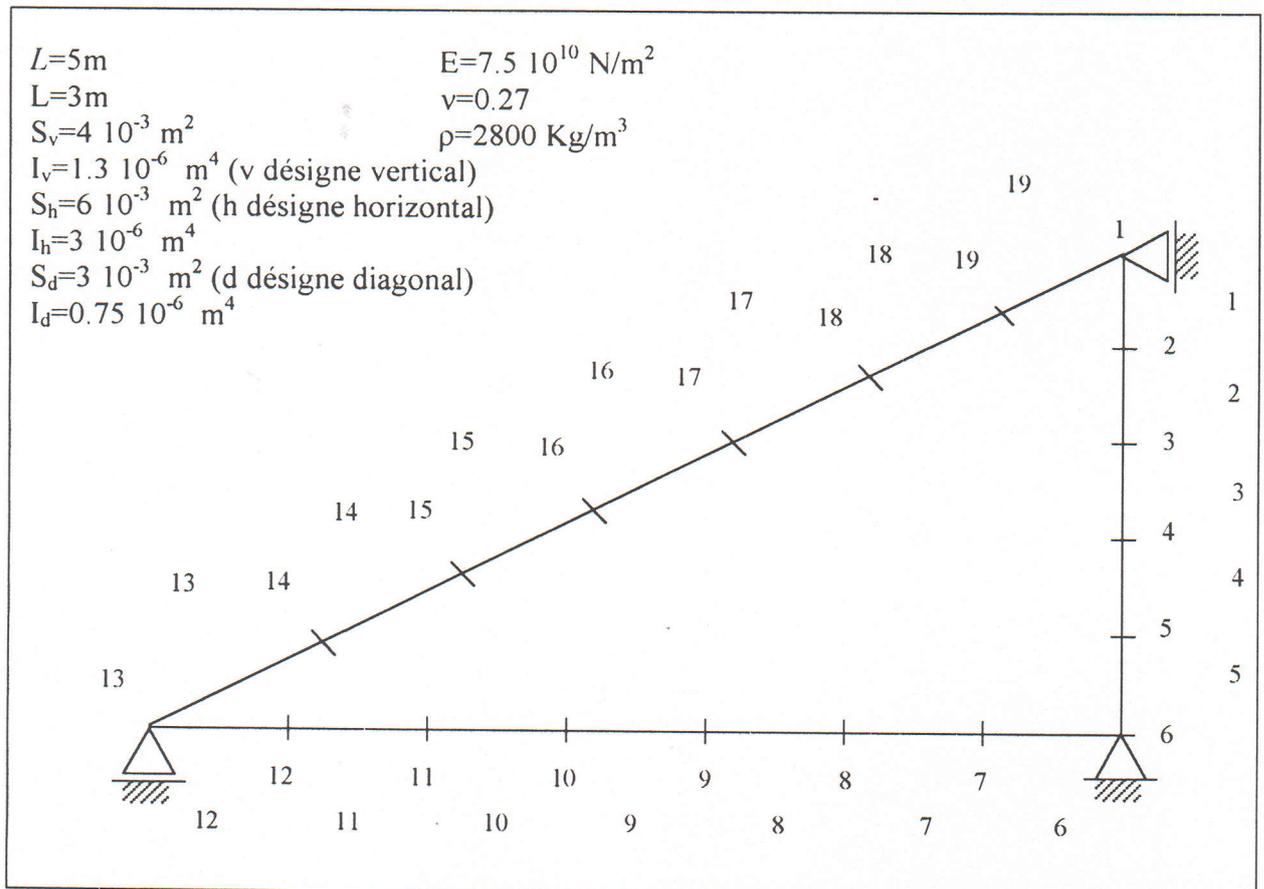


Fig.5.17. Système continu en 19 éléments poutre.

Pour cette application on traite un seul test qui est le plus important (plus proche de la réalité), et qui correspond à un modèle expérimental (simulé) à travers des perturbations de quelques éléments seulement du modèle numérique (perturbations locales), aussi on considère que le vecteur FRF expérimental est incomplet. Ce test est traité par Lin avec les mêmes données dans l'article cité précédemment.

**LES DONNEES :**

- **Mesures incomplètes :**  $N_1=16$  relative à 16 degrés de liberté seulement parmi 53 qui sont mesurés (représentant 30% de mesures).
- **Perturbations locales :** La dix-septième matrice élémentaire de masse est perturbée par  $P_m(17)=1.0$  (100%), puis la dixième et la onzième matrice élémentaire de rigidité respectivement, par  $P_k(10)=1.0$  (100%) et  $P_k(11)=1.0$  (100%).
- **Les fréquences et les modes retenus pour le recalage :**  $N_f=10$  et  $N_{mc}=5$ .

**RESULTATS :**

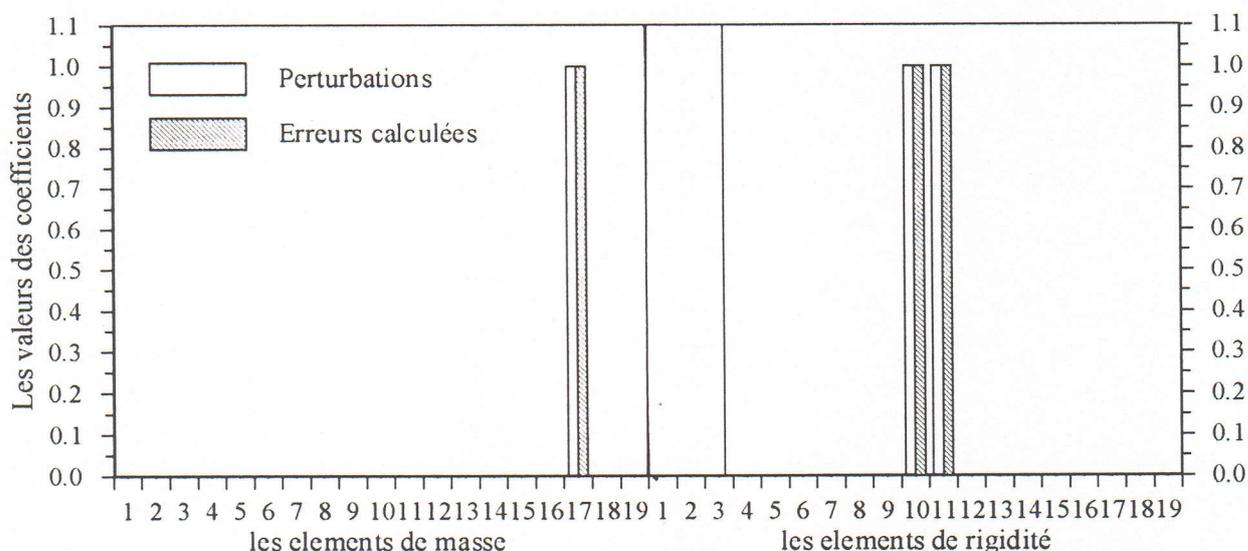


Fig.5.18. Les coefficients de perturbations et les coefficients des erreurs (Application4).

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$\omega_c$ (rad/s)	41.87	60.14	128.27	147.27	210.55	269.50	390.21	448.01	573.01	649.57
$\omega_x$	39.59	61.30	120.94	151.45	226.24	265.96	405.81	436.04	576.20	649.18
$\omega_r$	39.59	61.30	120.94	151.45	226.24	265.96	405.81	436.04	576.20	649.18

Tab.5.17. Les dix premiers fréquences propres de modèle numérique, expérimental et recalé. (Application4).

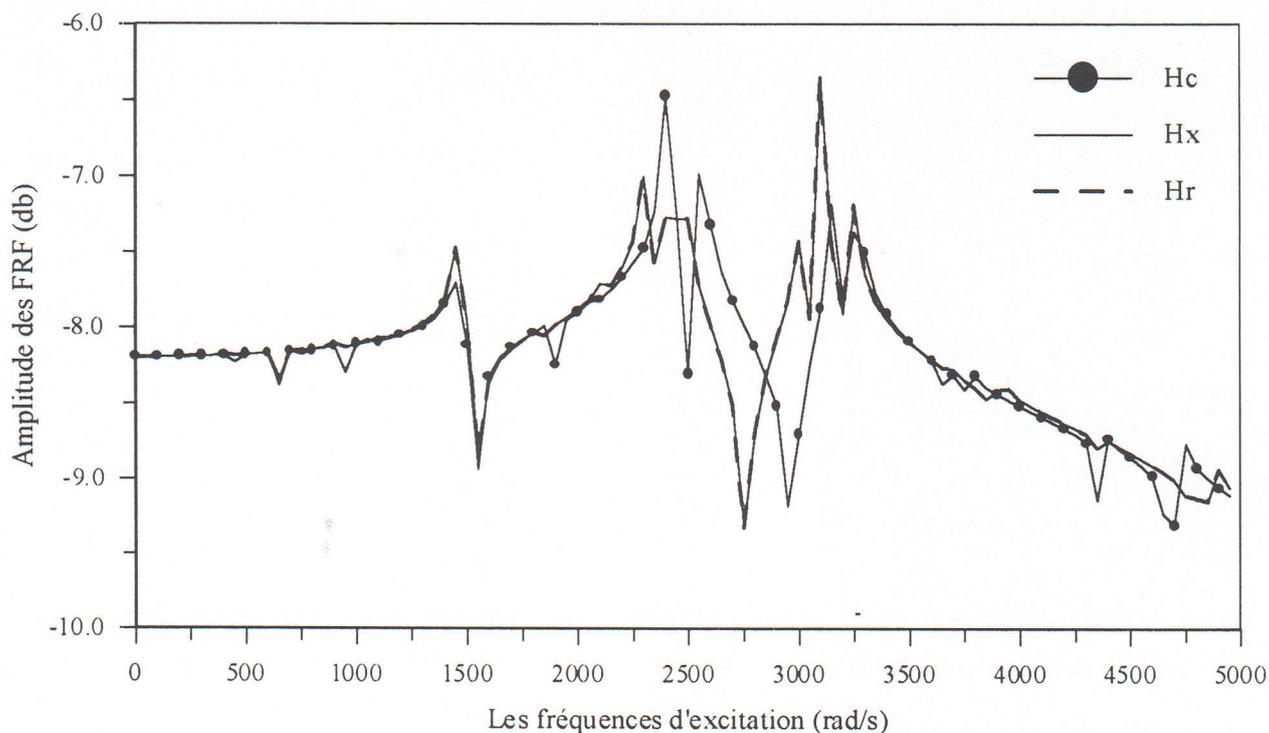


Fig.5.19. Les graphes de l'FRF numérique (calculée), expérimentale et recalée (Application4).

$N_f$	$N_{mc}$	$P_m(17)$	$ERM$	$P_k(10)=$ $P_k(11)=$	$LRK$	$ERF\omega$
10	5	1	$1.23 \cdot 10^{-5}$	1	$9.12 \cdot 10^{-7}$	$8.97 \cdot 10^{-7}$

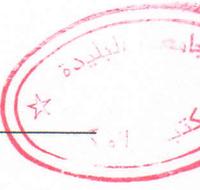
Tab.5.18. Résultats et paramètres d'estimation (mesures incomplètes) (Application4)

**DISCUSIONS :**

1. Il est à remarquer, que malgré le pourcentage élevé de degrés de liberté non mesurés (plus de 75%), le recalage du modèle numérique initial est réalisé avec succès et précision remarquable.
2. La précision des résultats augmente avec l'augmentation de nombre de fréquences et de modes retenus pour le recalage. Car le nombre d'équations est lié directement avec le nombre de fréquences, à travers cette augmentation on peut compensé les erreurs engendrées par l'extension (surtout pour un nombre élevé de degrés de liberté non mesurés).

3. Un autre paramètre qui a de l'influence sur la stabilité de l'algorithme de recalage, et sur la précision des résultats, c'est l'endroit des fréquences retenues pour le recalage par rapport au graphe de la FRF. Ces fréquences sont généralement prises aux alentours des pics des FRF (ces pics représentent les fréquences propres pour le modèle numérique, et les fréquences de résonance pour le modèle expérimental). Mais pas trop proches, car dans ce cas on peut avoir de l'instabilité dans l'algorithme et souvent des divergences. L'importance de ce paramètre augmente avec l'augmentation du nombre de points non mesurés.

Il est à remarquer que pour toutes les applications faites dans ce chapitre, les résultats pour les rigidités sont meilleurs que ceux des masses. Cette différence est due au fait que dans la formulation la masse est associée à la fréquence  $\left( [K] - \omega^2 [M] \right)$ , et pour les basses fréquences le terme de rigidité est dominant par rapport au terme de la masse, alors les erreurs sur les rigidités sont identifiées plus facilement.



---

***CONCLUSION GENERALE***

---

## CONCLUSION GENERALE

La simulation sur modèle numérique et les mesures expérimentales ne reflètent pas rigoureusement toujours le même comportement pour une structure donnée. Cependant, la recherche constante de l'amélioration de la qualité dans tous les domaines a conduit les concepteurs à développer des techniques permettant de diminuer la « distance » entre la structure (les mesures) et son modèle numérique. Ces méthodes, dites de RECALAGE, consistent à corriger les variables de conception du modèle numérique, souvent construit par éléments finis, de manière à faire converger son comportement vers le comportement observé lors des essais.

Les méthodes de recalage sont variées de part leur principe, les hypothèses adoptées et leur efficacité. La méthode adoptée dans ce mémoire repose sur l'exploitation des fonctions des réponses en fréquences et se caractérise par les avantages suivants :

- ✓ la prise en compte de la signification physique lors des corrections,
- ✓ la localisation et l'évaluation des erreurs en une seule étape, ce qui n'est pas le cas pour la plus part des méthodes de recalage où les deux phases se font en deux étapes distinctes,
- ✓ l'utilisation des FRF directement dans la formulation du recalage, donc sans passer par une phase supplémentaire pour extraire les données modales, évitant ainsi des calculs et des erreurs additionnels.

Le programme informatique élaboré dans le cadre de ce travail a été testé sur différents types de structures (chapitre des applications), à savoir :

- ✓ structure du type masses-ressorts à 10 degrés de liberté,
- ✓ structure du type poutre à 10 ddl actifs,
- ✓ structure du type plaque à 16 ddl actifs,
- ✓ structure du type poutre à 53 ddl actifs.

A cause de l'absence des moyens d'expérimentation, le modèle expérimental a été simulé à partir du modèle numérique, par des perturbations des matrices de ce dernier. Cette opération aussi critiquable soit elle n'a pas empêché la validation de l'algorithme du recalage, mais bien au

contraire, elle a permis de faire davantage de tests pour chaque structure traitée dans les applications (2 à 4 tests effectués pour chacune).

Il est à noter que pour la simulation du modèle expérimental, on a considéré deux types de perturbations. Dans le premier type, les perturbations se font globalement sur tous les éléments de la structure. Le deuxième type est plus réaliste, car les perturbations sont effectuées seulement sur quelques éléments de la structure, reflétant le fait que seulement quelques éléments de la structure sont sources d'erreurs en réalité.

En outre, nous avons considéré deux types de mesures pendant la simulation du modèle expérimental. Le premier type concerne le cas des mesures complètes où nous considérons que le vecteur FRF expérimental (simulé) est de même taille que son homologue numérique. Le deuxième type relatif au cas des mesures incomplètes, est une considération réaliste car en pratique le nombre de points de mesure est limité.

Toutes les considérations énumérées précédemment ont été traitées dans les tests pour les quatre types de structures étudiées dans le chapitre des applications. Les résultats de tous les tests sont satisfaisants, et reflètent la puissance de la technique du recalage MRF en la correction des structures traitées pour différentes considérations.

Il est à noter également que pour les tests relatifs aux cas des mesures incomplètes, le processus de calcul est itératif, et il ne l'est pas dans le cas des mesures complètes. Aussi dans le premier cas, l'extension du vecteur FRF expérimental est indispensable, et la méthode d'extension dynamique a été adoptée pour cet effet. On est arrivé jusqu'à 70% de ddl non mesurés en application 4, et les résultats sont satisfaisantes.

Nous avons remarqué, que l'augmentation du nombre de degrés de liberté non mesurés engendre l'augmentation des fréquences et des modes retenus pour le recalage afin de préserver la précision. L'augmentation du nombre de fréquences  $N_f$  étant liée aux endroits de l'excitation. Ces fréquences doivent être prises aux alentours des pics des FRF (proches des fréquences propres), car à ces endroits les écarts entre les FRF numériques et expérimentales sont importants ce qui permet d'estimer les erreurs à travers la formulation de la méthode MRF qui est elle-même basée sur le principe de la minimisation de ces écarts.

L'importance du choix des fréquences retenues pour le recalage devient apparente surtout dans le cas d'un mauvais choix, où il en résulte beaucoup de problèmes qui peuvent conduire à :

- un système algébrique instable ou mal conditionné,
- une divergence du processus de calcul,
- des résultats moins précises.

Nous avons remarqué également que la précision des résultats pour la rigidité est meilleure que celle pour la masse (remarque commune pour toutes les applications effectuées). Cette différence en précision peut être expliquée par le fait que la relation de base de la méthode MRF dépend de l'expression  $([\Delta K] - \omega^2 [\Delta M])$ , où la matrice des erreurs sur la masse est pondérée par la fréquence, et pour les basses fréquences (les basses fréquences sont généralement utilisées) le terme  $([\Delta K])$  est dominant par rapport au terme  $(\omega^2 [\Delta M])$ , ce qui a une incidence directe sur les résultats.

En fin, la méthode du recalage MRF a prouvé son efficacité pour la correction des structures conservatives, et dans le but de valider l'algorithme de cette méthode pour les structures dissipatives, un autre sujet de magister a été lancé dans le même projet et est en cours de finalisation.

Nous rappelons que faute d'absence de moyens expérimentaux, les applications ont concerné des modèles numériques purs (le modèle expérimental est simulé). Aussi pour explorer l'influence de certains facteurs relatifs à l'expérimentation comme le bruit sur les mesures et le choix des points d'excitation et de mesures, il y a lieu de poursuivre dans ce sens une fois que les conditions d'essais et expérimentation seront réunies.

---

***ANNEXE***  
***RESOLUTION DES SYSTEMES***  
***D'EQUATIONS***  
***ALGEBRIQUES LIENAIRES***

---

## ANNEXE

RESOLUTION DES SYSTEMES D'EQUATIONS  
ALGEBRIQUES LINEAIRES

## I. LES METHODES DIRECTES

On appelle méthode directe, toute méthode qui aboutit à la solution du problème au bout d'un nombre fini d'opérations arithmétiques. Les méthodes directes sont généralement basées sur différentes formes de décomposition de la matrice  $A$  du système  $AX=B$ .

## I.1. METHODE DE DECOMPOSITION EN LU

Elle est utilisée pour une matrice  $A$  quelconque, et passe par la décomposition suivante :

$$A=LU \quad (1)$$

Avec :

$L$  : une matrice triangulaire inférieure.

$U$  : une matrice triangulaire supérieure.

Alors le système d'équations à résoudre peut être décomposé comme suit :

$$LY=B \quad (2)$$

et

$$UX=Y \quad (3)$$

Le système (2) à matrice triangulaire inférieure se résout par l'algorithme suivant :

$$y_1 = \frac{b_1}{l_{11}}$$

$$y_i = \frac{1}{l_{ii}} \left[ b_i - \sum_{j=1}^{i-1} l_{ij} y_j \right] \quad i = 2, \dots, n \quad (4)$$

En reportant la solution  $Y$  dans l'équation (3), le nouveau système est résolu par :

$$x_n = \frac{y_n}{u_{nn}}$$

$$x_i = \frac{1}{u_{ii}} \left[ y_i - \sum_{j=i+1}^n u_{ij} x_j \right] \quad i = (n-1), \dots, 1 \quad (5)$$

## L2. METHODE DE DECOMPOSITION EN QR (METHODE DE HOUSEHOLDER)

Cette méthode est applicable pour une matrice  $A$  quelconque. Elle consiste à transformer la matrice  $A$  en un produit d'une matrice orthogonale  $Q$  par une matrice triangulaire supérieure  $R$ , d'où :

$$A = QR \quad (6)$$

Avec :

$Q^T = Q^{-1}$  pour une matrice orthogonale.

Et le système algébrique à résoudre se décompose en :

$$QY = B \quad (7)$$

$$RX = Y \quad (8)$$

Le système (8) est résolu directement par :

$$Y = Q^{-1} B = Q^T B \quad (9)$$

En substituant la solution  $Y$  dans la relation (8), le nouveau système est résolu comme suit :

$$x_n = \frac{y_n}{r_{nn}}$$

$$x_i = \frac{1}{r_{ii}} \left[ y_i - \sum_{j=i+1}^n r_{ij} x_j \right] \quad i = (n-1), \dots, 1 \quad (10)$$

### I.3. METHODE DE DECOMPOSITION EN VALEURS SINGULIERES (DECOMPOSITION EN SVD)

Cette méthode est très performante, elle est utilisée pour dans le cas d'une matrice  $A$  quelconque, carrée ou pas. Elle peut résoudre des systèmes mal conditionnés (presque singuliers). D'autre part, elle est mieux adaptée pour la résolution des problèmes dans le sens des moindres carrés.

Ça consiste à décomposer la matrice  $A$  en un produit de trois sous matrices. Une matrice orthogonale  $U$  de taille  $(m*N)$  ( $m$  : nombre d'équations, et  $N$  : nombre d'inconnues), et une matrice diagonale  $W$  de taille  $(N*N)$  puis d'une orthogonale transposée  $V$  de taille  $(N*N)$ , avec :

$$A = U W V^T \quad (11)$$

Où les valeurs diagonales de la matrice  $W$  sont les valeurs singulières.

Dans le premier cas où la matrice  $A$  est non carrée de taille  $(N*N)$ , donc plus d'équations que d'inconnues, le système à résoudre est :

$$\begin{matrix} A & X & = & B \\ (m \times N) & (N \times 1) & & (m \times 1) \end{matrix} \quad (12)$$

La solution est de la forme :

$$\begin{array}{ccccc} X & = & V & \left[ \text{diag} \left( \frac{1}{w_j} \right) \right] & U^T & B \\ (N \times 1) & & (N \times N) & (N \times N) & N \times m & m \times 1 \end{array} \quad (13)$$

Par contre pour une matrice carrée, la solution est :

$$\begin{array}{ccccc} X & = & V & \left[ \text{diag} \left( \frac{1}{w_j} \right) \right] & U^T & B \\ (N \times 1) & & (N \times N) & (N \times N) & N \times N & N \times 1 \end{array} \quad (14)$$

## II. LES METHODES ITERATIVES

La solution du système par ce type de méthodes est itérative, ça consiste à utiliser un vecteur solution (estimé) initial et de générer une séquence de vecteurs jusqu'à convergence du processus.

### II.1. METHODE DE GAUSS-SEIDEL

Cette méthode est applicable pour une matrice  $A$  quelconque. Elle consiste à décomposer  $A$  en plusieurs sous matrices, comme :

$$A = M - N = (D - L) - U \quad (15)$$

Avec :

$D$  : matrice diagonale, et

$$d_{ii} = a_{ii} \quad (16)$$

$L$  : matrice triangulaire inférieure, et

$$\begin{array}{l} l_{ij} = -a_{ij} \text{ pour } i > j \\ l_{ij} = 0 \text{ pour } i \leq j \end{array} \quad (17)$$

$U$  : matrice triangulaire supérieure, et

$$\begin{aligned} u_{ij} &= -a_{ij} \text{ pour } j > i \\ u_{ij} &= 0 \text{ pour } j \leq i \end{aligned} \quad (18)$$

Dans la méthode itérative de Gauss-Siedel, la solution est donnée par :

$$X^{(k+1)} = (D - L)^{-1} U X^{(k)} + (D - L)B \quad (19)$$

Avec :

$k$  : désigne  $k^{\text{ième}}$  itération.

Souvent l'inverse de  $(D - L)$  est compliqué à calculer, la solution prend la forme développée suivante :

$$x_i^{(k+1)} = \left[ b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} x_j^{(k+1)} - \sum_{j=i+1}^n a_{ij} x_j^{(k)} \right] / a_{ii} \quad (20)$$

## II.2. METHODE DU GRADIENT CONJUGUE

Elle peut résoudre les systèmes mal-conditionnés, et même des systèmes surdéterminés. Elle fait partie de la catégorie des méthodes d'optimisation.

Le principe de la méthode réside en la construction d'une fonctionnelle à partir du système  $AX = B$  dont  $X^*$  est son vecteur solution cherchée.

Premièrement, on définit un résidu  $R$ , et la forme quadratique  $E(X)$ , comme suit :

$$R = B - AX \quad (21)$$

$$E(X) = 0.5 (X - X^*)^T A (X - X^*) \quad (22)$$

Où :

$$E(X) = 0.5 R^T A^{-1} R \quad (23)$$

$E(X)$  est une fonctionnelle qui une forme quadratique défini positive, son minimum unique se trouve au point qui annule le gradient de  $E(X)$ , où

$$\nabla E(X) = \left\{ \frac{\partial E(X)}{\partial X} \right\} = -(B - AX) = -R \quad (24)$$

Autrement dit la solution  $X^*$  du système  $AX = B$  correspond au vecteur minimisant la fonctionnelle  $E(X)$ . On peut donc ramener la solution du système initial à la résolution de la relation (24).

Dans un processus itératif la solution est générée par :

$$X^{(k+1)} = X^{(k)} + \alpha^{(k)} P^{(k)} \quad (25)$$

Où :

$P^{(k)}$  : désigne la direction de descente au point  $X^{(k)}$  (à l'itération  $k$ )

$\alpha^{(k)}$  : un scalaire désigne le pas de descente au point  $X^{(k)}$  (à l'itération  $k$ )

Les paramètres de la méthode du gradient conjugué sont donnés par :

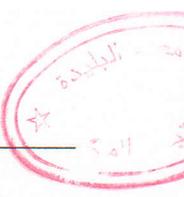
$$\alpha^{(k)} = \frac{(P^{(k)})^T R^{(k)}}{(P^{(k)})^T A(P^{(k)})} \quad (26)$$

et

$$P^{(k)} = R^{(k)} + \beta^{(k)} P^{(k-1)} \quad (27)$$

avec :

$$\beta^{(k)} = \frac{(R^{(k)})^T R^{(k)}}{(R^{(k-1)})^T R^{(k-1)}} \quad (28)$$



---

***REFERENCES***

***BIBLIOGRAPHIQUES***

---

---

## REFETRENNCES BIBLIOGRAPHIQUES

- [Aia91] **Aiad A.** «Recalage de modèles éléments finis à partir des propriétés modales expérimentales.» Thèse de Doctorat de Génie-Mécanique, Université de Valenciennes et de Hainant Cambrésis, (1991), France.
- [All82] **Allemang R.J, Brown D.L.** «A Correlation Coefficient For Modal Vector Analysis. » Proc.of The 1<sup>st</sup> IMAC (Orlando, USA), PP :110-115, 1982.
- [Bat90] **Batoz J.L., Datt G.** «Modélisation des structures par éléments finis.» Edition Hemés, ISBN 2-86601-243-7, 1990.
- [Berg84] **Berger H., Chaquin J.P., Ohayon R.** «Finite element adjustment using experimental vibration data.» Proceeding of the 2<sup>nd</sup> IMAC (Orlando USA), PP :638-642, 1984.
- [Berg88] **Berger H., Barthe, Ohayon R.** «Recalage paramétrique d'un modèle éléments finis à partir des caractéristiques modales expérimentales.» Actes StruCoMe 88, 1988.
- [Berm80] **Berman A., Wei F.S., Rao K.V.** «Improved of analytical dynamic models using modal test data. » AIAA paper 80-0800, PP :809-814, 1980.
- [Berm83] **Berman A., Nagy E.J.** «Improvement of large analytical modal using test data. » AIAA Journal, Vol 21, No 8, PP :1168-1173, 1983.
- [Berr95] **Berriet R.** «Paramétrisation et correction de l'amortissement modal dans des procédures de recalage de modèles éléments finis utilisant des réponses fréquentielles mesurées.» Rapport, Laboratoire de Mécanique Appliquée R.Chaleat, Université de Franche-Comté, pages : 28-34, 1995
- [Bou93] **Boumahrat M., Gourdin A.** «Méthodes numériques appliquées. ». Office des Publications Universitaires, cod.2-08-3372, 1993.
- [Dat84] **Datt G., Touzot G.** «Une présentation de la méthode des éléments finis. » Collection Université de Compiègne, 2<sup>ème</sup> éditions, 1984.
- [Ewi84] **Ewins D.J.** «Modal testing - Theory and Practice. » Research Studies Press Ltd., 1984.
- [Ewi89] **Ewins D.J., He J., Lieven N.** «A review of the error of matrix method (EMM) for structural dynamic model comparison. » Proc. International Conference, Spacecraft Structures and Mechanical Testing, Noordwijk, Netherlands, PP:29-37, 1989.
- [Fot00a] **Fotsch D., Ewins D.J.** «Application of MAC in the frequency domain. » Proceeding of the 18<sup>th</sup> International Modal Analysis Conference, pages : 1225-1231, 2000.
- [Fot00b] **Fotsch D., Ewins D.J.** «Further Applications of the MAC. » Dynamics section, 2000.

- 
- [Fri92] **Fritzen C.P.** «Localization and correlation of errors in finite element models based on experimental data.» 17<sup>th</sup> International Seminar on Modal Analysis, K. U. of Leuven (Belgium), PP:547-561, 1992.
- [Guy65] **Guyan R.J.** «Reduction of stiffness and mass matrices. » A.I.A.A. Journal, vol. 3, feb 1965.
- [Gys88] **Gysin H.P.** «Attempts to localize finite element modeling errors. » 13<sup>th</sup> International Seminar on Modal Analysis, Leuven, Belgium, Part II, C20, 1988.
- [Hey87] **Heylen W.** «Optimization of model matrices of mechanical structures using experimental modal data. » Thèse de Doctorat, Université Katholique de Leuven, (1987), Belgique.
- [Ibr82] **Ibrahim S.R.** «Determination of normal modes from measured complex modes. » The Shock and Vibration Bulletin, Part 5, Washington, D.C, (May1982), PP:13-17.
- [Ibr83a] **Ibrahim S.R.** «Computation of normal modes from identified complex modes. » AIAA Journal, Vol. 21, No 3, PP:446-451, 1983.
- [Ibr83b] **Ibrahim S.R.** «Dynamic modeling of structures from measured complex modes.» AIAA Journal, Vol. 21, No 6, PP:446-451, 1983.
- [Imb91] **Imbert J.F.** «Analyse des structures par éléments finis.» Ecole Nationale Supérieure de l'Aéronautique et de l'Espace, 3<sup>ème</sup> édition , 1991.
- [Imr92] **Imregun M., Sanliturk K.Y., Ewins D.J.** «Correction a medium zise finite element model using measured FRF data. » 17<sup>th</sup> International Seminar on Modal Analysis, K. U. of Leuven (Belgium), PP:547-561, 1992.
- [Imr94] **Imregun M.** «A review of case studies in model updating.» ISMA 19, Tools for Noise and Vibration Analysis, PP:761-776, 1994.
- [Imr95a] **Imregun M., Visser W.J., Ewins D.J.** «Finite element model updating using frequency response function data -I : Theory and initial investigation. Mechanical Systems and Signal Processing.», 19(2),pp. 187-202, 1995.
- [Imr95b] **Imregun M., Visser W.J., Ewins D.J.** «Finite element model updating using frequency response function data -II: Case study on a medium-size finite element model. » Mechanical Systems and Signal Processing.», 19(2), pp. 203-213, 1995.
- [Imr95c] **Imregun M.** «Three cases studies in finite element model updating.» Journal of Shock and Vibration 2., 1995, pp. 119-131.
- [ISO90] **Recueil de Normes ISO 36** «Vibration et chocs mécaniques.» Organisation Internationale de Normalisation, ISBN92-67-20162, 1990.
-

- 
- [Lie88] **Lieven N.A.J., Ewins D.J.** «Spatial correlation of mode shapes. The Coordinate Modal Assurance Criterion. » Proceeding of the 6<sup>th</sup> IMAC (Kissimmee, USA), PP:690-695, 1988.
- [Lie90] **Lieven N.A.J., Ewins D.J.** «Expansion of modal data for correlation. » Proceeding of the 8<sup>th</sup> IMAC, (Kissimmee, USA), PP:605-609, 1990.
- [Lin90] **Lin R.M., Ewins D.J.** « Model updating using FRF data » Proceeding of 15<sup>th</sup> International Modal Analysis, Sep 1990.
- [Mot93] **Mottershead J.E., Friswell M.** « Model updating in structural dynamics: A survey » Journal of Sound and Vibration, (1993), 167(2), PP :347,375.
- [Mor93] **Morau D.** « Amélioration du comportement dynamique général d'une structure mécanique » Thèse de Doctorat de Génie-Mécanique, Université de Valenciennes et de Hainant Cambrésis, (1993), France.
- [Nob 94] **Nobari A.S., Imregun M., Ziaei-Rad S.** «On the uniqueness of updating models. » ISMA 19, Tools for Noise and Vibration Analysis, PP:151-163, 1994.
- [O'Ca 88] **O'Callahan J., Aritabile P., Milani J.** «Model correlation and orthogonality criteria ».University of Lowell, Massachusetts (1988), pages : 1039-1047.
- [O'Ca89a] **O'Callahan J.** «A procedure for an improved reduced system (IRS) model. » Proceeding of the 7<sup>th</sup> International Modal Analysis Conference, Las Vegas- Nevada (1989), Pages :17-21.
- [O'Ca89b] **O'Callahan J., Aritabile P., Riener R.** «System equivalent reduction expansion process (SEREP) » Proceeding of the 7<sup>th</sup> International Modal Analysis Conference, Las Vegas- Nevada (1989), Pages :29-37.
- [Roy90a] **Roy N.A., Girard A., Bugeat L.P., Bricout J.N.** «Revue des méthodes de recalage modal de modèles éléments finis. » ASTELAB 90, (Paris), PP:1-6, 1990.
- [Roy90b] **Roy N.A., Girard A.** «Updating dynamic finite element models : A direct energy approach. » Actes de Conférence StruCoMe 90, PP:214-229, 1990.
- [Tis93] **Tison T.** « Amélioration de la représentativité des modèles éléments finis en dynamique des structures » Thèse de Doctorat de Génie-Mécanique, Université de Valenciennes et de Hainant Cambrésis, (1993), France.
- [Vis91a] **Visser W. J., Imregun M.** « A Technique to Update Finite Element Models Using Frequency Response Data. » Proc. of the IXth IMAC conference, April 1991.
- [Vis91b] **Visser W.J., Imregun M., Ewins D.J.** «Updating finite element models using complex frequency response function data. » Proceeding SteuComE, Paris, Nov 1991.

- 
- [Vis92a] **Visser W.J.** « Updating structural dynamics models using frequency response data »  
Thèse de PhD, Imperial College of Science Technology and Midecine, Université de  
Londre, UK, 1992.
- [Vis92b] **Visser W.J., Imregun M., Ewins D.J.** «Direct use of measured FRF data to update  
finite element models. » 17<sup>th</sup> International Seminar on Modal Analysis, K. U. of Leuven  
(Belgium), PP:33-49, 1992.
- [Zav85] **Zaveri k., Phil M.** « Modal Analysis of Large Structures - Multiple Exciter Systems. »  
Bruel and Kjaer, ISBN87,87355-03-5, 1985.
- [Zia96] **Ziaei-Rad S., Imregun M.** « On the accuracy required of experimental data for finite  
element model updating » Journal of Sound and Vibration (1996), 196(3), PP :323-336.
- [Zha87] **Zhang Q.** « Identification modale et paramétrique de structures mécaniques auto-  
ajointes et non auto-ajointes. » Thèse de Doctorat en sciences physiques, Université de  
Franche-Comté, (1987), France.
- [Wei89] **Wei J.C., Zhang Q., Allemang R.J., Wei M.L.** «Correction of finite element model  
via selected physical parameters. »Proceeding of the 7<sup>th</sup> IMAC (Las Vegas, USA),  
PP:1231-1238, 1989.