

520

جامعة
الجزائر

MINISTÈRE DE L'ENSEIGNEMENT SUPÉRIEUR ET DE LA RECHERCHE
SCIENTIFIQUE

UNIVERSITÉ DE BLIDA
INSTITUT D'ELECTRONIQUE

MEMOIRE

Présenté par :
Farid YKHLEF

EN VUE DE L'OBTENTION DU DIPLOME
DE MAGISTER EN ELECTRONIQUE
OPTION : COMMUNICATION

THEME

**ETUDE DE LA STABILITE DES ALGORITHMES
MOINDRES CARRES TRANSVERSAUX RAPIDES AVEC
DES SIGNAUX PARFAITEMENT PREDICTIBLES
APPLICATION A LA PAROLE**

Devant le jury :

M. M. BENSEBTI
M^{me} M. GUERTI
M^{elle} A. CHENTIR
M. M. AREZKI
M. A. GUESSOUM

Maître de conférence (Université de Blida)
Maître de conférence (ENP Alger)
Chargé de cours (Université de Blida)
Chargé de cours (Université de Blida)
Professeur (Université de Blida)

Président
Examineur
Examineur
Rapporteur
Co-rapporteur

Blida, Algérie, Janvier 2002

Dédicaces

Je dédie ce travail à :

Ma mère et mon père pour leurs sacrifices et leurs encouragements ;

Mes sœurs et mes frères ;

Toute ma famille ;

Tous mes amis.

Remerciements

Je souhaite remercier Monsieur M.BENSEBTI de me faire l'honneur et le plaisir de présider ce jury. Qu'il trouve ici l'expression de ma profonde gratitude pour l'intérêt manifesté à l'égard de ce travail.

Je suis très reconnaissant à Monsieur M.AREZKI d'avoir accepté d'être rapporteur de ce mémoire. Je tiens à le remercier de m'avoir accueilli au sein de l'équipe, et de m'avoir apporté un environnement de travail de grande qualité.

Mes remerciements s'adressent également à Monsieur A.GUASSOUM d'avoir accepté d'être co-rapporteur. Je souhaite lui apporter mes plus vifs remerciements pour l'attention portée à ce travail.

Je suis sensible à l'attention dont M^{elle} A.CHENTIR a fait preuve à la lecture et pour l'aide qu'elle m'a apportée en corrigeant certaines parties de ce travail. Je la remercie d'avoir acceptée de siéger à ce jury.

Je remercie M^{me} M.GUERTI de l'ENP d'Alger qui m'a fait l'honneur d'être membre de jury.

Je remercie aussi Monsieur A.BENALLAL pour ses conseils. J'ai été très impressionné par la précision de ses analyses et par ses capacités à expliquer les problèmes de traitement du signal.

Je désire remercier également les collègues du laboratoire de traitement de la parole de l'institut d'Electronique pour l'aide précieuse qu'ils m'ont apportée pendant toute la durée de ce mémoire.

RESUME

Dans les dernières années, motivées par les impératifs du traitement en temps réel, se sont développées des algorithmes d'identification nécessitant un coût opératoire réduit; c'est ce qu'on appelle les algorithmes des moindres carrés transversaux rapides. Cette réduction en complexité a introduit des instabilités numériques dans les nouveaux algorithmes. Plusieurs techniques de stabilisation ont été proposées pour le cas de signaux stationnaires. Des problèmes d'instabilité persistent avec des signaux parfaitement prédictibles et de signaux de parole. L'objectif de ce mémoire est la maîtrise de ces phénomènes d'instabilités et la recherche de techniques permettant la stabilisation des algorithmes des moindres carrés transversaux rapides pour de tels signaux. Des solutions à ces problèmes sont proposées dans ce mémoire.

ABSTRACT

In recent years, caused by timely treatment's imperatives, it has improved some identification's algorithms which required a reduce operating cost. That's what it's called least fast transversals squares. However this complexity's reduction has introduced numeric instabilities in these new algorithms.

Several stabilisation's techniques has been proposed for stationary signals cases, some instability problems persist with perfectly predictable signals and also speech ones.

The aim of this work is to master the instabilities phenomenon and to search techniques allowing the stabilisation of least fast transversals squares. Solutions of these problems are proposed in this work.

Sommaire

Introduction générale.....	1
----------------------------	---

Chapitre 1 : Généralités sur les algorithmes des moindres carrés transversaux rapides (MCR)

1.1 Introduction.....	3
1.2 Position du problème.....	4
1.3 Présentation des algorithmes de base.....	9
1.3.1 Algorithmes du gradient stochastique LMS et NLMS.....	9
1.3.2 Algorithmes des moindres carrés exacts.....	10
1.4 Algorithme FTF 7N.....	21
1.4.1 Présentation de l'algorithme.....	21
1.4.2 Initialisation de l'algorithme FTF 7N.....	22
1.5 Conclusion.....	23

Chapitre 2 : Analyse de la propagation des erreurs numériques dans les algorithmes MCR

2.1 Introduction.....	24
2.2 Méthode de stabilisation des algorithmes MCR.....	24
2.3 Approche, hypothèse et notation.....	38
2.4 Stabilité numérique de la partie filtrage (MA) et système d'état d'analyse de la partie (AR).....	31
2.4.1 Stabilité numérique de la partie filtrage (MA).....	31
2.4.2 Système d'état d'analyse de la partie (AR).....	33
2.5 Etude de la stabilité de l'algorithme.....	44
2.5.1 Stabilité l'algorithme.....	44
2.5.2 Etude de la stabilité numérique en régime asymptotique.....	45
2.6 Résultats de simulation.....	50
2.7 Conclusion.....	57

Chapitre 3 : Etude de la stabilité des algorithmes MCR avec des signaux parfaitement prédictibles

3.1 Introduction.....	58
3.2 Modélisation des signaux.....	58
3.3 Etude de l'instabilité de l'algorithme avec des signaux parfaitement prédictibles.....	59
3.4 Résultats de simulation.....	60
3.5 Conclusion.....	85

Chapitre 4 : Stabilisation des algorithmes MCR en de la parole

4.1 Introduction.....	86
4.2 Classification des sons de la parole.....	87
4.3 Description des signaux et des critères de performance.....	88
4.4 Phénomènes de divergence des algorithmes MCR appliqués à la parole.....	89
4.5 Stabilisation des algorithmes MCR quand le signal d'excitation est la parole.....	92
4.5.1 Méthode de réinitialisation.....	93
4.5.2 Blocage d'adaptation durant les silences.....	94
4.5.3 Adaptation avec segmentation de la parole.....	94
4.6 Résultats de simulation.....	97
4.6.1 La méthode de segmentation récursive.....	97
4.6.2 Performances de la technique d'Adaptation avec segmentation de la parole.....	100
4.7 Conclusion.....	112
Conclusion générale.....	113
Bibliographie.....	115

INTRODUCTION GENERALE

Introduction générale

La communication dans ses diverses formes, est devenue un moyen et un outil de développement indispensable, comme le téléphone et les réseaux informatiques. En effet la conversation téléphonique permet déjà un haut niveau de communication par le choix des mots et le ton de la voix ; la visiophonie ajoute de nouvelles dimensions à cette communication : expression du visage, gestes, langage du corps, environnement visible. Des documents avec des textes, des images ou autres données peuvent être utilisés pour venir appuyer le face à face, dans le but d'une meilleure compréhension [1].

La parole constitue une grande part des messages transmis en télécommunication. Dans le système téléphonique classique, le message parlé est capté par le combiné puis transmis au locuteur lointain. Le combiné téléphonique et le canal de transmission sont les seuls responsables de la qualité de la communication. Le phénomène d'écho qui peut apparaître dans ce système est la conséquence de la réflexion d'une partie du signal émis en un point où l'adaptation n'est pas parfaite. Ce phénomène d'écho électrique devient très gênant pour les liaisons téléphoniques à grande distance.

Certains nouveaux services des télécommunications amènent à considérer le milieu acoustique (salle, cabine téléphonique, véhicule, ...) comme faisant part entière de la chaîne de communication. Ces nouveaux services correspondent à l'apparition des postes à haut parleur, des postes mains libres et des systèmes de téléconférence (audio et visioconférence). Des nouveaux problèmes sont apparus, grâce à la prise de son rapprochée dans le système téléphonique classique. Citons à titre d'exemples [2]:

- la réverbération où en plus du son direct, le ou les microphones de prise de son captent une multitude de réflexions qui brouillent le message transmis ;
- le bruit acoustique présent dans la salle qui se trouve considérablement amplifié ;
- le phénomène d'écho acoustique.

Les problèmes rencontrés nécessitent des traitements spécifiques à la prise de son: déréverbération, débruitage de la parole et annulation d'écho acoustique. Ils peuvent être ramenés à l'identification du canal. L'objectif est de minimiser pour l'utilisateur la puissance des signaux perturbateurs sans dégrader le signal utile (parole). Dans notre étude on s'intéresse uniquement à l'annulation d'écho acoustique.

Formellement, l'annulation d'écho acoustique est un problème d'identification d'un système linéaire (canal acoustique de couplage) excité par un signal de référence connu (parole alimentant le haut parleur de sonorisation) [1][3]. Le problème est compliqué par le fait que le signal d'excitation est fortement non-stationnaire et le canal acoustique de couplage varie au cours du temps (mouvement des personnes, déplacements d'objets,...).

Introduction générale

Pour tenir compte de ces problèmes, on utilise des annuleurs d'écho adaptatifs où l'identification de la réponse impulsionnelle finie représentant le canal acoustique de couplage est réalisée le plus souvent par un algorithme de type gradient stochastique (LMS). Cet algorithme, dont la vitesse de convergence est fonction de la dynamique du signal d'entrée, se trouve fortement pénalisée, des temps de convergence de plusieurs secondes en moyenne sont nécessaires. L'utilisation des algorithmes des moindres carrés transversaux rapides (MCR), dont leur vitesse de convergence est indépendante de la nature du signal d'excitation et de ses propriétés statistiques améliore les performances des annuleurs d'écho. L'inconvénient majeur des algorithmes (MCR) est qu'ils divergent, à cause des erreurs numériques, au bout d'un nombre plus ou moins grand d'itérations. Des efforts importants ont été faits pour remédier au problème de divergence [4].

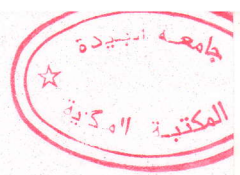
On considère le problème d'instabilité des algorithmes des moindres carrés transversaux rapides pour l'identification des réponses impulsionnelles acoustiques. Ce problème apparaît dans des applications d'annulation d'écho acoustique dans les installations audio et visioconférence et les postes téléphoniques "mains libres". Cependant les algorithmes étudiés dans cette thèse dépassent largement le cadre de ces applications. Ils peuvent être utilisés dans toutes les applications où apparaît la modélisation linéaire d'un signal à partir de ses propres échantillons (problème de la prédiction linéaire) ou à partir des échantillons d'un autre signal (problème de filtrage linéaire).

Au chapitre 1, on décrit brièvement les algorithmes d'adaptation les plus connus: les algorithmes de type gradient stochastique et les algorithmes de type moindres carrés exacts.

Dans le chapitre 2, après une revue des méthodes de stabilisation des algorithmes des moindres carrés transversaux rapides existantes dans la littérature, une étude théorique de la propagation des erreurs numériques dans les algorithmes MCR est introduite [5]. La complexité des équations de propagation des erreurs obtenues ne permet pas une étude simple qui soit complètement générale de la stabilité ou l'instabilité de ces algorithmes. Des hypothèses simplificatrices vont nous permettre de localiser les variables responsables de l'instabilité numérique dans les algorithmes MCR.

Nous analyserons le problème d'instabilité numérique au troisième chapitre où les algorithmes MCR vont être soumis à des tests avec des signaux auto-régressifs AR synthétisés. Le cas particulier des signaux parfaitement prédictibles fait aussi l'objet de ce chapitre. Des simulations sont consacrées pour déterminer l'origine de cette instabilité numérique.

Finalement, le chapitre 4 concerne l'étude du comportement des algorithmes des moindres carrés transversaux rapides MCR stabilisés numériquement avec la parole. L'utilisation des signaux de parole fait apparaître des problèmes de divergence dans les algorithmes MCR proposés dans le chapitre 2, qui sont numériquement stables avec des signaux stationnaires. Ces divergences peuvent être attribuées au caractère fortement non stationnaire de la parole. On étudiera par la suite, une méthode de segmentation automatique de la parole. En se basant sur cette étude de segmentation, nous proposons une technique qui permet un fonctionnement continu de l'algorithme avec la parole.



Chapitre 1

GENERALITES SUR LES ALGORITHMES DES MOINDRES CARRES TRANSVERSAUX RAPIDES (MCR)

1.1 Introduction

L'audioconférence est une technique permettant d'établir la communication entre deux salles de réunion. Lors de la mise en place d'une communication bidirectionnelle entre ces deux salles, une boucle de transmission fermée est établie (figure 1.1). Le signal émis par la salle distante est réémis vers cette même salle à cause du couplage existant entre le haut parleur et le ou les microphones de prise de son d'une même salle. La prise de son dans chacune des salles considère l'orateur comme la source utile. Alors, si la transmission introduit un retard important (de l'ordre de plusieurs centaines de millisecondes), les personnes présentes dans une salle ré-entendent leur propres voix; c'est le phénomène d'écho acoustique dû au canal acoustique de couplage. Tous les équipements mains libres classiques ont malheureusement, un problème de réaction acoustique qui dépend de la disposition du haut-parleur et du microphone, de leur environnement immédiat, et de l'endroit où ils sont utilisés [5].

Le microphone mains libres n'est pas seulement exposé aux sons diffusés directement par l'interlocuteur proche. Une partie du son issue du haut-parleur, revient directement au microphone à travers l'air, en raison de la réflexion des ondes sonores par les objets environnants et puis est renvoyée à l'interlocuteur distant c'est ce qu'on a appelé écho acoustique.

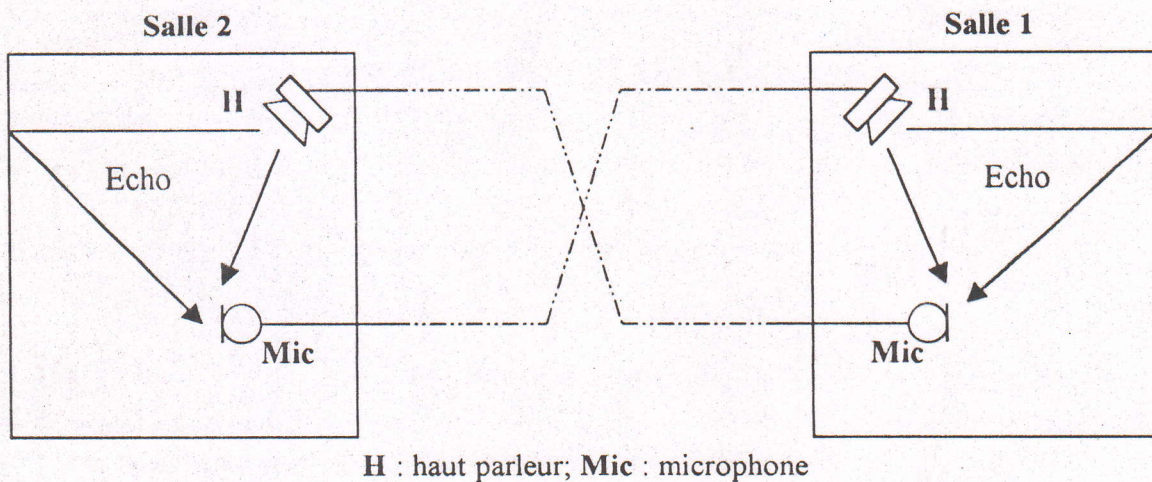


Figure 1.1 : Communication bidirectionnelle entre deux salles.

Par définition [3], un canal acoustique de couplage représente la transformation du signal diffusé par le haut-parleur de sonorisation et capté par les microphones de prise de son. Par ailleurs, l'approximation de l'acoustique linéaire permet d'affirmer qu'un canal acoustique réalise un filtrage linéaire qui peut être étudié indépendamment des signaux. Il dépend essentiellement de la salle, des positions et des caractéristiques des sources et des récepteurs.

L'annulation d'écho acoustique est un problème qui se pose dans un grand nombre d'applications (téléphonie main libre, téléconférence,...). Les difficultés essentielles rencontrées sont d'une part liées à la durée des réponses impulsionnelles des canaux acoustiques à identifier et d'autre part à la nature des signaux à traiter. Dans ce qui suit, nous allons définir le problème et présenter les algorithmes d'identification adaptative de base ainsi que la notion de « complexité des calculs ».

1.2 Position du problème

Le problème qui nous intéresse dans cette étude est l'estimation continue d'un signal s_t , éventuellement perturbé par un autre signal p_t , à partir d'un autre signal x_t , appelé signal de référence. La composante p_t est non mesurable, elle est incluse dans l'observation captée sur une voie dite principale : $y_t = s_t + p_t$. La composante p_t peut représenter le signal utile pour certaines applications. Par exemple dans le cas du débruitage de la parole avec voie de référence : p_t est la parole, s_t est le bruit perturbateur et x_t le bruit seul. Dans l'annulation d'écho acoustique, en absence ou en présence de la double parole, x_t est le signal reçu du locuteur lointain, y_t est le signal d'écho du locuteur lointain vers lui-même et p_t le bruit ambiant du milieu acoustique ou le signal de la double parole du locuteur proche. Dans les deux cas, la restauration du signal utile est réalisée en soustrayant à l'observation y_t une estimée du signal s_t obtenue par un filtrage approprié du signal de référence x_t [5]. Le schéma de principe de ce filtrage est représenté sur la figure 1.2, où les signaux sont connus aux instants d'échantillonnage t . La période d'échantillonnage est T_e , et l'on a : $x_t = x(t) = x(tT_e)$.

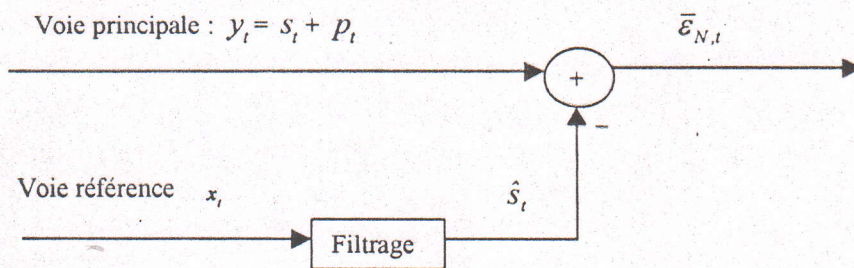


Figure 1.2 : Schéma de principe d'un système d'annulation d'écho acoustique ou de débruitage de la parole.

Il faut noter que l'optimum en annulation d'écho acoustique est d'avoir la sortie $\bar{\epsilon}_{N,t} = 0$ en absence de double parole ou du bruit perturbateur ($p_t = 0$), alors que cet optimum se transforme en $\bar{\epsilon}_{N,t} = s_t$ dans le cas du débruitage de la parole.

Les hypothèses de base concernant le système de la figure 1.2 sont d'une part l'indépendance entre la composante p_t et les signaux s_t et x_t , et d'autre part la corrélation des signaux s_t et x_t .

D'après le schéma de la figure 1.2, l'estimation du signal s_t à partir du signal x_t revient à trouver ou à estimer le filtre H_N . Par conséquent, des applications telles que l'annulation d'écho acoustique ou le débruitage de la parole avec voie de référence bruit seul consistent essentiellement à identifier le filtre H_N . Ce dernier doit en principe modéliser le trajet physique (canal acoustique de couplage en annulation d'écho) suivi par l'onde acoustique en se propageant de la voie dite de référence vers la voie dite principale. Le filtre modélisateur H_N est soit un filtre à réponse impulsionnelle finie (FIR), soit un filtre à réponse impulsionnelle infinie (IIR). On se place d'emblée dans le cas de l'identification d'une réponse impulsionnelle acoustique où l'identification du filtre H_N par une réponse impulsionnelle finie a déjà fait ses preuves [1]. Par conséquent, on suppose que le signal s_t se déduit de x_t par un filtrage linéaire causal. Dans ces conditions, la sortie du système de la figure 1.2 s'écrit :

$$\bar{\epsilon}_{N,t} = y_t - H_N^T X_{N,t} \quad (1.1)$$

avec

$$H_N = \begin{bmatrix} H_N^1 \\ H_N^2 \\ \vdots \\ H_N^N \end{bmatrix} \quad (1.1i)$$

$$X_{N,t} = \begin{bmatrix} x_t \\ x_{t-1} \\ \vdots \\ x_{t-N+1} \end{bmatrix} \quad (1.1ii)$$

où T désigne le transposé d'un vecteur ou d'une matrice, H_N désigne un vecteur d'ordre N contenant les coefficients de la réponse impulsionnelle finie et $X_{N,t}$ désigne un vecteur qui résume le passé du signal x_t sur une durée de N échantillons.

Chapitre 1 : Généralités sur les algorithmes des moindres carrés transversaux rapides (MCR)

La solution optimale du problème de l'estimation de s_t à partir d'une combinaison linéaire x_t est fournie par la solution de l'équation de Wiener-Hopf, qui exprime la nullité du gradient de l'erreur quadratique moyenne en sortie :

$$\nabla_H E\{\bar{\varepsilon}_{N,t}^2\}_{H=H_{opt}} = 0 \quad (1.2)$$

La solution est donnée par la relation suivante :

$$H_{N,opt} = R_{N,xx}^{-1} P_{N,xy} \quad (1.3)$$

où $E\{\}$ désigne la moyenne statistique et ∇_H l'opérateur gradient. Le vecteur $P_{N,xy}$ désigne l'intercorrélation entre l'observation y_t et le vecteur signal $X_{N,t}$ dans la mémoire du filtre,

$$P_{N,xy} = E\{X_{N,t} y_t\} \quad (1.4)$$

La matrice carrée $R_{N,xx}$, d'ordre N donnée par :

$$R_{N,xx} = E\{X_{N,t} X_{N,t}^T\} \quad (1.5)$$

désigne la matrice d'autocorrélation du signal de référence dans le filtre, elle est symétrique et définie positive. Cette dernière propriété assure l'existence et l'unicité de la solution optimale. Cependant, dans la plupart des applications pratiques, les statistiques des signaux sont inconnues a-priori où les signaux sont souvent non-stationnaires. Par conséquent, les statistiques doivent être évaluées à partir des données recueillies aux entrées.

Ce type de problème amène à développer des méthodes de filtrage adaptatif où le filtre H_N change en fonction des informations reçues où l'erreur en sortie est utilisée pour la mise à jour des coefficients du filtre. Les coefficients du filtre sont ajustés à chaque instant t par un algorithme d'adaptation itératif. Une procédure itérative bien connue qui annule le gradient de l'erreur quadratique moyenne est donnée dans [6].

D'après [6], l'algorithme du gradient déterministe s'écrit :

$$H_{N,t} = H_{N,t-1} - \mu[\nabla_H E\{\bar{\varepsilon}_{N,t}^2\}]_{H=H_{N,t-1}}$$

avec

$$\nabla_H E\{\bar{\epsilon}_{N,t}^2\}_{H=H_{N,t-1}} = 2R_{N,xx}H_{N,t-1} - 2P_{N,xy}$$

où $P_{N,xy}$ et $R_{N,xx}$ sont respectivement données par les relations (1.4) et (1.5).

En utilisant l'égalité suivante :

$$R_{N,xx}H_{N,t-1} - P_{N,xy} = E\{X_{N,t}X_{N,t}^T H_{N,t-1} - X_{N,t}y_t\} = -E\{X_{N,t}\bar{\epsilon}_{N,t}\}$$

L'algorithme du gradient déterministe s'écrit :

$$H_{N,t} = H_{N,t-1} + 2\mu E\{\bar{\epsilon}_{N,t}X_{N,t}\} \quad (1.6)$$

où μ est un pas d'adaptation, éventuellement variable, qui contrôle la stabilité et la vitesse de convergence de l'algorithme et $H_{N,t}$ est un vecteur dépendant du temps t donné par :

$$H_{N,t} = \begin{bmatrix} H_{N,t}^1 \\ H_{N,t}^2 \\ \vdots \\ H_{N,t}^N \end{bmatrix} \quad (1.6i)$$

et

$$\bar{\epsilon}_{N,t} = y_t - H_{N,t-1}^T X_{N,t} \quad (1.6ii)$$

où $\bar{\epsilon}_{N,t}$ désigne l'erreur de filtrage à priori (calculée avant la mise à jour du filtre).

Le principale rôle d'un algorithme adaptatif est d'ajuster un vecteur de paramètre $H_{N,t}$ pour un objectif bien défini (minimisation de l'erreur quadratique moyenne). Le schéma de principe d'un filtre adaptatif bouclé par un algorithme d'adaptation est représenté sur la figure 1.3.

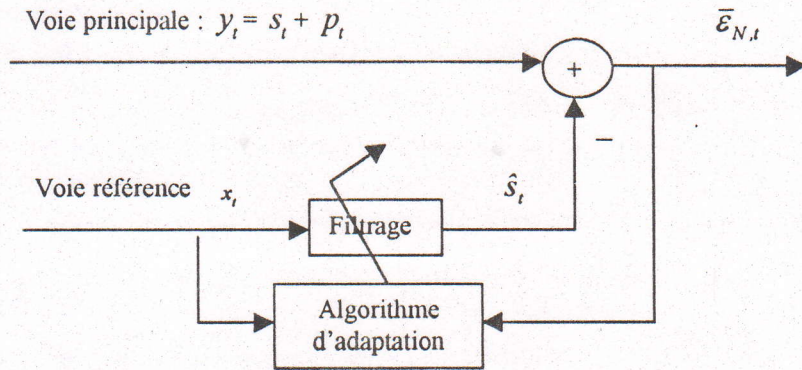


Figure 1.3 : Schéma de principe d'un système d'annulation d'écho acoustique.

Pour traiter un tel schéma, diverses approches peuvent être utilisées. Elles correspondent d'une part à la structure du filtre adaptatif et d'autre part à la technique utilisée pour adapter les coefficients du filtre adaptatif. Les algorithmes adaptatifs ont été largement étudiés dans la littérature, il existe plusieurs ouvrages traitant toutes sortes d'algorithmes adaptatifs [4], [5],[8],[9],[10].

Par conséquent, la structure sera bien évidemment transversale. Le modèle de filtre transverse est donné par le schéma de la figure 1.4.

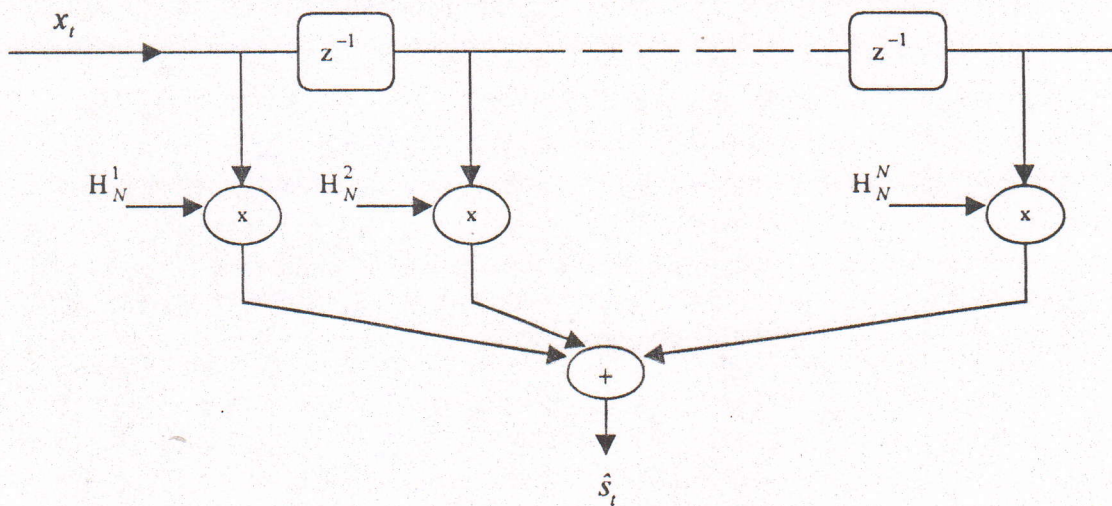


Figure 1.4 : Schéma du modèle de filtre transverse.

avec

$$\hat{s}_t = \sum_{i=1}^N H_N^i x_{t-i+1}$$

Le but de cette thèse est l'étude de certains problèmes (propagation des erreurs numériques, stabilisation numérique) des algorithmes des moindres carrés rapides pour des applications d'annulation d'écho acoustique. Ainsi que la maîtrise et le test des performances de ces algorithmes dans des conditions d'utilisation réels (parole comme signal d'excitation).

1.3 Présentation des algorithmes de base

Nous allons présenter dans cette partie deux familles d'algorithmes : algorithmes du type gradient stochastique et les algorithmes du type moindres carrés exacts.

1.3.1 Algorithmes du gradient stochastique LMS et NLMS

L'idée des algorithmes de type gradient stochastique est de remplacer la moyenne statistique dans l'algorithme du gradient déterministe de l'équation (1.6) par sa valeur instantanée. On obtient la relation suivante :

$$H_{N,t} = H_{N,t-1} + 2\mu\bar{\epsilon}_{N,t}X_{N,t} \quad (1.7)$$

où $\bar{\epsilon}_{N,t}$ est donnée par la relation (1.6ii).

D'après [11], la condition nécessaire et suffisante de convergence de l'algorithme (LMS) est :

$$0 < \mu < 1/\lambda_{max} \quad (1.7i)$$

où λ_{max} est la plus grande valeur propre de la matrice d'autocorrélation $R_{N,xx}$ donnée par (1.5).

En pratique, on utilise souvent, pour le choix de la constante μ , une condition plus restrictive:

$$0 < \mu \leq \frac{1}{\text{Trace}(R_{N,xx})} = \frac{1}{N\sigma_x^2} \quad (1.7ii)$$

où $\text{Trace}(\cdot)$ représente la somme des éléments de la diagonale d'une matrice et σ_x^2 est l'énergie du signal x_t .

Chapitre 1 : Généralités sur les algorithmes des moindres carrés transversaux rapides (MCR)

L'algorithme du gradient stochastique normalisé NLMS est une variante du LMS dont le gain d'adaptation est normalisé par l'énergie du signal d'entrée x_i ; il est donné par les équations suivantes:

- Filtrage de y_t

$$\bar{\varepsilon}_{N,t} = y_t - H_{N,t-1}^T X_{N,t}$$

- Adaptation du filtre

$$H_{N,t} = H_{N,t-1} + \frac{\delta}{X_{N,t}^T X_{N,t}} \bar{\varepsilon}_{N,t} X_{N,t}$$

où δ représente le pas d'adaptation de l'algorithme NLMS. La condition suffisante de convergence est :

$$0 < \delta < 2$$

Les avantages de l'algorithme NLMS sont : la faible complexité des calculs et la stabilité numérique. Son principal inconvénient est que le transitoire dépend de la dispersion spectrale du signal d'entrée. La convergence peut devenir très lente dans le cas de la parole.

1.3.2 Algorithmes des moindres carrés exacts

Nous introduisons dans ce paragraphe deux types d'algorithmes de la famille des moindres carrés exacts : L'algorithme récursif (RLS) et les algorithmes transversaux rapides (MCR).

1.3.2.1 Algorithme des moindres carrés récursifs (RLS)

Dans la méthode des moindres carrés exacts, on vise à minimiser par rapport au vecteur des paramètres $H_{N,t}$, à chaque instant t , un critère défini sur les erreurs commises depuis l'instant initial. Ce critère est donné par [9] :

$$J_{N,t} = \sum_{i=1}^t \lambda^{t-i} (y_i - H_{N,t}^T X_{N,i})^2 \quad (1.8)$$

où λ ($0 < \lambda \leq 1$) est un facteur d'oubli exponentiel qui permet à l'algorithme d'oublier le passé trop lointain et de poursuivre les non-stationnarités intervenant dans les signaux.



On suppose que les signaux x_t et y_t sont nuls avant l'instant initial $t=0$; c'est à dire on se place dans le cas de la fenêtre antérieure.

La solution qui exprime la nullité du gradient de la fonctionnelle $J_{N,t}$

$$\nabla_H J_{N,t} = 0 \Leftrightarrow -2 \left[\sum_{i=1}^t \lambda^{t-i} X_{N,i} y_i - \sum_{i=1}^t \lambda^{t-i} X_{N,i} X_{N,i}^T H_{N,t} \right] = 0$$

est donnée par

$$R_{N,t} H_{N,t} = P_{N,t} \quad (1.9)$$

$$H_{N,t} = R_{N,t}^{-1} P_{N,t} \quad (1.10)$$

où la matrice $R_{N,t}$ représente une matrice d'autocorrélation à court terme qui est donnée par la relation suivante :

$$R_{N,t} = \sum_{i=1}^t \lambda^{t-i} X_{N,i} X_{N,i}^T \quad (1.11)$$

$$= \lambda R_{N,t-1} + X_{N,t} X_{N,t}^T \quad (1.11i)$$

Le vecteur $P_{N,t}$ désigne un vecteur d'intercorrélation à court terme donnée par la relation :

$$P_{N,t} = \sum_{i=1}^t \lambda^{t-i} X_{N,i} y_i \quad (1.12)$$

$$= \lambda P_{N,t-1} + X_{N,t} y_t \quad (1.12i)$$

En substituant les quantités (dédites de (1.11i) et (1.12i))

$$\lambda R_{N,t-1} = R_{N,t} - X_{N,t} X_{N,t}^T$$

$$\lambda P_{N,t-1} = P_{N,t} - X_{N,t} y_t$$

dans l'équation (1.9), il vient :

$$\lambda R_{N,t-1} H_{N,t-1} = \lambda P_{N,t-1}$$

On obtient la solution équivalente à (1.10) mais sous une forme récursive :

$$H_{N,t} = H_{N,t-1} - C_{N,t} \bar{\epsilon}_{N,t} \quad (1.13)$$

avec

$$C_{N,t} = \begin{bmatrix} C_{N,t}^1 \\ C_{N,t}^2 \\ \vdots \\ C_{N,t}^N \end{bmatrix} = -R_{N,t}^{-1} X_{N,t} \quad (1.14)$$

$$\bar{\epsilon}_{N,t} = y_t - H_{N,t-1}^T X_{N,t}$$

où le vecteur $C_{N,t}$ est appelé gain de Kalman.

L'algorithme (1.13) nécessite l'inversion d'une matrice carrée d'ordre N dont le coût de calcul est de l'ordre N^3 opérations arithmétiques par itération.

L'algorithme des moindres carrés récursifs (RLS : Recursive Least Squares) résoud ce problème, avec un nombre d'opérations arithmétiques proportionnel à N^2 .

En appliquant à la matrice $R_{N,t}$ le lemme d'inversion matricielle suivant [12]:

$$(A + UV^T)^{-1} = A^{-1} - \frac{A^{-1}UV^T A^{-1}}{1 + V^T A^{-1}U}$$

avec

$$A = \lambda R_{N,t-1}; U = V = X_{N,t}$$

Il vient

$$R_{N,t}^{-1} = \lambda^{-1} \left[R_{N,t-1}^{-1} - \frac{R_{N,t-1}^{-1} X_{N,t} X_{N,t}^T R_{N,t-1}^{-1}}{\lambda + X_{N,t}^T R_{N,t-1}^{-1} X_{N,t}} \right] \quad (1.15)$$

Cet algorithme, appelé «algorithme des moindres carrés récurrents (RLS)», permet, en propageant une matrice carrée $N \times N$, de trouver itérativement la solution qui minimise le critère (1.8). Cette solution nécessite un coût en opération arithmétique proportionnel à N^2 .

Pendant cette dernière décennie, on s'est aperçu que la solution des moindres carrés pouvait être obtenue avec un coût opératoire proportionnel à N . Ce sont les algorithmes des moindres carrés rapides.

On se limite aux algorithmes des moindres carrés transversaux rapides non normalisés à oubli exponentiel obtenus dans le cas d'un pré-fenêtrage des signaux d'entrée (les signaux sont supposés nuls avant l'instant initial). On utilisera souvent la dénomination algorithme des moindres carrés rapides (MCR) pour désigner ce type d'algorithme. Dans cette catégorie, on génère la solution des moindres carrés, à chaque instant t , pour un ordre donné N en propageant trois vecteurs d'ordre N (deux prédicteurs aller/retour et le gain de Kalman) au lieu d'une matrice. Les algorithmes des moindres carrés rapides les plus rapides connus appartiennent à cette catégorie.

1.3.2.2 Algorithmes des moindres carrés transversaux rapides (MCR)

Dans ce paragraphe nous décrivons brièvement l'essentiel des équations qui permettent d'obtenir les algorithmes des moindres carrés transversaux rapides à oubli exponentiel pour le cas de la fenêtre antérieure, faisant intervenir des erreurs à posteriori [13].

Le but de cette méthode des moindres carrés est de trouver le vecteur $H_{N,t}$ qui minimise le critère (1.8). Une solution récursive à ce problème est donnée par l'algorithme (1.13). Cet algorithme utilise une erreur de filtrage à priori et un vecteur gain d'adaptation d'ordre N , qu'on a appelé gain de Kalman (1.14). Si on substitue (1.11i) et (1.12i) dans (1.9), on obtient une autre forme récursive du vecteur $H_{N,t}$, strictement équivalente à (1.13), faisant intervenir une erreur de filtrage à posteriori et un gain d'adaptation appelé gain de Kalman dual :

$$H_{N,t} = H_{N,t-1} - \tilde{C}_{N,t} \varepsilon_{N,t} \quad (1.16)$$

avec

$$\varepsilon_{N,t} = y_t - H_{N,t}^T X_{N,t} \quad (1.17)$$

$$\tilde{C}_{N,t} = -\lambda^{-1} R_{N,t-1}^{-1} X_{N,t} \quad (1.18)$$

où $\varepsilon_{N,t}$ donnée par l'expression (1.17) désigne l'erreur de filtrage à posteriori (calculée après la mise à jour du filtre) et $\tilde{C}_{N,t}$ donnée par l'expression (1.18) désigne le gain de Kalman dual.

L'algorithme (1.16) ne peut être appliqué tel quel car l'adaptation et le filtrage ne peuvent être réalisés en même temps. Comme nous allons le voir par la suite, l'un des avantages des algorithmes MCR est que les erreurs à posteriori se calculent à partir des erreurs à priori avant l'opération d'adaptation.

Pour cela, on exploite certaines propriétés d'invariance par décalage du vecteur signal d'entrée étendu à l'ordre $N+1$:

$$X_{N+1,t} = \begin{bmatrix} x_t \\ X_{N,t-1} \end{bmatrix} \quad (1.19i)$$

$$X_{N+1,t} = \begin{bmatrix} X_{N,t} \\ x_{t-N} \end{bmatrix} \quad (1.19ii)$$

Ces deux formes du vecteur signal permettent de définir deux matrices d'autocorrélation d'ordre $(N+1)$ partitionnées.

La première qui correspond au vecteur (1.19i) s'écrit :

$$\begin{aligned} R_{N+1,t} &= \sum_{i=1}^t \lambda^{t-i} X_{N+1,i} X_{N+1,i}^T = \sum_{i=1}^t \lambda^{t-i} \begin{bmatrix} x_i \\ X_{N,i-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_i & X_{N,i-1}^T \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} P_{0,t}^a & P_{N,t}^{aT} \\ P_{N,t}^a & R_{N,t-1} \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (1.20i)$$

Chapitre 1 : Généralités sur les algorithmes des moindres carrés transversaux rapides (MCR)

avec

$$P_{0,t}^a = \sum_{i=1}^t \lambda^{t-i} x_i^2$$

$$P_{N,t}^a = \sum_{i=1}^t \lambda^{t-i} x_i X_{N,i} = \lambda P_{N,t-1}^a + x_t X_{N,t-1}$$

La deuxième, qui correspond au vecteur (1.19ii) s'écrit :

$$\begin{aligned} R_{N+1,t} &= \sum_{i=1}^t \lambda^{t-i} \begin{bmatrix} X_{N,i} \\ x_{i-N} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_{N,i}^T & x_{i-N} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} R_{N,t} & P_{N,t}^r \\ P_{N,t}^{rT} & P_{0,t}^r \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (1.20ii)$$

avec

$$P_{0,t}^r = \sum_{i=1}^t \lambda^{t-i} x_{i-N}^2$$

$$P_{N,t}^r = \sum_{i=1}^t \lambda^{t-i} x_{i-N} X_{N,i} = \lambda P_{N,t-1}^r + x_{t-N} X_{N,t}$$

Le but des algorithmes MCR est de propager un vecteur gain. Le calcul du gain de Kalman (1.14) ou du gain de Kalman dual (1.18) fait intervenir l'inverse de la matrice d'autocorrélation à court terme.

Pour réaliser cette inversion, on utilise le lemme d'inversion d'une matrice partitionnée [13]. Si M désigne une matrice partitionnée :

$$M = \begin{bmatrix} M_1 & M_2 \\ M_3 & M_4 \end{bmatrix}$$

Chapitre 1 : Généralités sur les algorithmes des moindres carrés transversaux rapides (MCR)

L'inverse de cette matrice M s'écrit de manière générale (on suppose la compatibilité des dimensions et l'existence des inverses de certaines matrices de M).

$$M^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & M_4^{-1} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} I \\ -M_4^{-1}M_3 \end{bmatrix} (M_1 - M_2M_4^{-1}M_3)^{-1} \begin{bmatrix} I & -M_2M_4^{-1} \end{bmatrix} \quad (1.21i)$$

ou

$$M^{-1} = \begin{bmatrix} M_1^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -M_1^{-1}M_2 \\ I \end{bmatrix} (M_4 - M_3M_1^{-1}M_2)^{-1} \begin{bmatrix} -M_3M_1^{-1} & I \end{bmatrix} \quad (1.21ii)$$

En utilisant la forme (1.21i) pour inverser la matrice (1.20i) et la forme (1.21ii) pour inverser la matrice (1.20ii), on aura les expressions suivantes :

$$R_{N+1,t}^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & R_{N,t-1}^{-1} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ -R_{N,t-1}^{-1}P_{N,t}^a \end{bmatrix} (P_{0,t}^a - P_{N,t}^{aT}R_{N,t-1}^{-1}P_{N,t}^a)^{-1} \begin{bmatrix} 1 & -P_{N,t}^{aT}R_{N,t-1}^{-1} \end{bmatrix} \quad (1.22i)$$

$$R_{N+1,t}^{-1} = \begin{bmatrix} R_{N,t}^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -R_{N,t}^{-1}P_{N,t}^r \\ 1 \end{bmatrix} (P_{0,t}^r - P_{N,t}^{rT}R_{N,t}^{-1}P_{N,t}^r)^{-1} \begin{bmatrix} -P_{N,t}^{rT}R_{N,t}^{-1} & 1 \end{bmatrix} \quad (1.22ii)$$

La forme (1.22i) fait apparaître un prédicteur aller optimal au sens des moindres carrés (le terme aller désigne, la modélisation de l'échantillon x_t par une combinaison linéaire de son passé) :

$$a_{N,t} = R_{N,t-1}^{-1}P_{N,t}^a \quad (1.23)$$

Ce vecteur peut être obtenu en minimisant le critère des moindres carrés suivants :

$$J_{N,t}^a = \sum_{i=1}^t \lambda^{t-i} (x_i - a_{N,t}^T X_{N,i-1})^2 \quad (1.24)$$

Chapitre 1 : Généralités sur les algorithmes des moindres carrés transversaux rapides (MCR)

Les versions récursives du prédicteur aller (1.23) faisant intervenir soit le gain de Kalman (1.14), soit le gain de Kalman dual (1.18), s'obtiennent de la même façon que les versions récursives (1.13) et (1.16) du filtre transverse $H_{N,t}$:

$$a_{N,t} = a_{N,t-1} - C_{N,t-1} \bar{e}_{N,t} \quad (1.25i)$$

$$a_{N,t} = a_{N,t-1} - \tilde{C}_{N,t-1} e_{N,t} \quad (1.25ii)$$

où $\bar{e}_{N,t}$ et $e_{N,t}$ désignent respectivement l'erreur de prédiction aller à priori et l'erreur de prédiction aller à posteriori, qui sont données par :

$$\bar{e}_{N,t} = x_t - a_{N,t-1}^T X_{N,t-1} \quad (1.26i)$$

$$e_{N,t} = x_t - a_{N,t}^T X_{N,t-1} \quad (1.26ii)$$

De la même façon, la forme (1.22ii) fait apparaître un prédicteur retour optimal au sens des moindres carrés (le terme retour désigne la modélisation de l'échantillon x_{t-N} par une combinaison linéaire des échantillons futurs) :

$$b_{N,t} = R_{N,t}^{-1} P_{N,t}^r \quad (1.27)$$

Ce vecteur peut être obtenu en minimisant le critère des moindres carrés suivant :

$$J_{N,t}^r = \sum_{i=1}^t \lambda^{t-i} \left(x_{t-N} - b_{N,t}^T X_{N,i} \right)^2 \quad (1.28)$$

Les versions récursives de $b_{N,t}$ s'obtiennent en substituant dans la solution (1.27) des versions récursives de $R_{N,t}$ et de $P_{N,t}^r$.

Elles s'écrivent :

$$b_{N,t} = b_{N,t-1} - C_{N,t} \bar{r}_{N,t} \quad (1.29i)$$

$$b_{N,t} = b_{N,t-1} - \tilde{C}_{N,t} r_{N,t} \quad (1.29ii)$$

où $\bar{r}_{N,t}$ et $r_{N,t}$ désignent respectivement l'erreur de prédiction retour à priori et l'erreur de prédiction retour à posteriori, qui sont données par :

$$\bar{r}_{N,t} = x_{t-N} - b_{N,t-1}^T X_{N,t} \quad (1.30i)$$

$$r_{N,t} = x_{t-N} - b_{N,t}^T X_{N,t} \quad (1.30ii)$$

Les termes entre parenthèses dans les expressions (1.22i) et (1.22ii) représentent respectivement les variances des erreurs de prédiction aller et retour (minima des critères (1.24) et (1.28)).

Leurs versions récursives s'écrivent [13] :

$$\alpha_{N,t} = \lambda \alpha_{N,t-1} + \bar{e}_{N,t} e_{N,t} \quad (1.31)$$

$$\beta_{N,t} = \lambda \beta_{N,t-1} + \bar{r}_{N,t} r_{N,t} \quad (1.32)$$

où $\alpha_{N,t}$ désigne la variance des erreurs de prédiction aller et $\beta_{N,t}$ désigne la variance des erreurs de prédiction retour.

Les équations qui vont permettre de propager les gains de Kalman d'ordre (N+1) s'obtiennent en multipliant à droite les expressions (1.22i) et (1.22ii) par le vecteur $[-X_{N+1,t}]$ convenablement partitionné :

$$C_{N+1,t} = \begin{bmatrix} 0 \\ C_{N,t-1} \end{bmatrix} - \frac{e_{N,t}}{\alpha_{N,t}} \begin{bmatrix} 1 \\ -a_{N,t} \end{bmatrix} \quad (1.33i)$$

$$C_{N+1,t} = \begin{bmatrix} C_{N,t} \\ 0 \end{bmatrix} - \frac{r_{N,t}}{\beta_{N,t}} \begin{bmatrix} -b_{N,t} \\ 1 \end{bmatrix} \quad (1.33ii)$$

De la même façon en multipliant à droite les expressions (1.22i) et (1.22ii) prises aux instants $t-1$ par $[-\lambda^{-1} X_{N+1,t}]$ convenablement partitionné, on obtient les deux expressions du gain de Kalman dual d'ordre N+1 :

$$\tilde{C}_{N+1,t} = \begin{bmatrix} 0 \\ \tilde{C}_{N,t-1} \end{bmatrix} - \frac{\bar{e}_{N,t}}{\lambda \alpha_{N,t-1}} \begin{bmatrix} 1 \\ -a_{N,t-1} \end{bmatrix} \quad (1.34i)$$

$$\tilde{C}_{N+1,t} = \begin{bmatrix} \tilde{C}_{N,t} \\ 0 \end{bmatrix} - \frac{\bar{r}_{N,t}}{\lambda \beta_{N,t-1}} \begin{bmatrix} -b_{N,t-1} \\ 1 \end{bmatrix} \quad (1.34ii)$$

Il faut noter que les expressions (1.33) et (1.34) font apparaître des erreurs de prédiction qui peuvent être calculées, sans les relations de convolutions (1.26) et (1.30), si on dispose de la première ou de la (N+1)^{ième} composante du gain de Kalman ou du gain de Kalman dual :

$$e_{N,t} = -\alpha_{N,t} C_{N+1,t}^1 \quad (1.35i)$$

$$\bar{e}_{N,t} = -\lambda \alpha_{N,t-1} \tilde{C}_{N+1,t}^1 \quad (1.35ii)$$

$$r_{N,t} = -\beta_{N,t} C_{N+1,t}^{N+1} \quad (1.36i)$$

$$\bar{r}_{N,t} = -\lambda \beta_{N,t-1} \tilde{C}_{N+1,t}^{N+1} \quad (1.36ii)$$

Par ailleurs, parmi les relations qui permettent de réduire la complexité dans les algorithmes, on trouve les relations qui lient les erreurs à priori aux erreurs à posteriori. Pour voir cela, il suffit de prendre par exemple l'erreur de filtrage à posteriori (1.17) et remplacer le filtre $H_{N,t}$ par son équation d'adaptation (1.13). Il vient :

$$\varepsilon_{N,t} = \bar{\varepsilon}_{N,t} (1 + C_{N,t}^T X_{N,t}) \quad (1.37)$$

Le terme entre parenthèse dans cette expression définit ce que l'on appelle la variable de vraisemblance :

$$\gamma_{N,t} = 1 + C_{N,t}^T X_{N,t} = 1 - X_{N,t}^T R_{N,t}^{-1} X_{N,t} \quad (1.38)$$

En théorie, la matrice $R_{N,t}$ et son inverse sont définis positifs. La variable $\gamma_{N,t}$ sera donc comprise entre 0 et 1 pour un fonctionnement normal de l'algorithme.

Chapitre 1 : Généralités sur les algorithmes des moindres carrés transversaux rapides (MCR)

De la même façon, on obtient les relations entre les erreurs de prédiction à priori et à posteriori :

$$e_{N,t} = \gamma_{N,t-1} \bar{e}_{N,t} \quad (1.39)$$

$$\bar{r}_{N,t} = \gamma_{N,t} \bar{r}_{N,t} \quad (1.40)$$

D'autre part, les équations de mise à jour des vecteurs $H_{N,t}$, $\alpha_{N,t}$ et $b_{N,t}$ utilisant soit les erreurs à priori, soit les erreurs à posteriori, sont strictement équivalentes. Ceci conduit, en égalant deux d'entre elles, à la relation qui lie le gain de Kalman et le gain de Kalman dual :

$$C_{N,t} = \gamma_{N,t} \tilde{C}_{N,t} \quad (1.41)$$

En substituant cette relation dans (1.38) on obtient la relation suivante :

$$\gamma_{N,t} = \frac{1}{1 - \tilde{C}_{N,t}^T X_{N,t}} \quad (1.42)$$

Enfin, au lieu d'utiliser les définitions (1.38) ou (1.42) de la variable de vraisemblance, on utilise des versions plus rapides pour réduire la complexité. Ceci s'obtient en appliquant à la définition (1.38) les formes (1.33). En multipliant (1.33i) à gauche par le vecteur $[x_t, X_{N,t-1}^T]$, on trouve l'expression de la variable de vraisemblance d'ordre N+1 :

$$\gamma_{N+1,t} = \frac{\lambda \alpha_{N,t-1}}{\alpha_{N,t}} \gamma_{N,t-1} \quad (1.43)$$

De la même manière, en multipliant (1.33ii) à gauche par le vecteur $[X_{N,t}^T, x_{t-N}]$ il vient :

$$\gamma_{N+1,t} = \frac{\lambda \beta_{N,t-1}}{\beta_{N,t}} \gamma_{N,t} \quad (1.44)$$

et si on pose

$$\theta_{N,t} = \frac{\lambda \beta_{N,t-1}}{\beta_{N,t}} \quad (1.45)$$

<p>- Variables disponibles à l'instant t :</p> $a_{N,t-1}; b_{N,t-1}; \tilde{C}_{N,t-1}; \gamma_{N,t-1}; \alpha_{N,t-1}; \beta_{N,t-1}; H_{N,t-1}$
<p>- Nouvelles informations : x_t et x_{t-N}</p>
<p>- Modélisation de x_t et x_{t-N}</p> $\bar{e}_{N,t} = x_t - a_{N,t-1}^T X_{N,t-1}$ $\alpha_{N,t} = \lambda \alpha_{N,t-1} + \gamma_{N,t-1} \bar{e}_{N,t}^2$ $\gamma_{N+1,t} = \frac{\lambda \alpha_{N,t-1}}{\alpha_{N,t}} \gamma_{N,t-1}$ $\tilde{C}_{N+1,t} = \begin{bmatrix} 0 \\ \tilde{C}_{N,t-1} \end{bmatrix} - \frac{\bar{e}_{N,t}}{\lambda \alpha_{N,t-1}} \begin{bmatrix} 1 \\ -a_{N,t-1} \end{bmatrix}$ $a_{N,t} = a_{N,t-1} - \bar{e}_{N,t} \gamma_{N,t-1} \tilde{C}_{N,t-1}$ $\bar{r}_{N,t} = -\lambda \beta_{N,t-1} \tilde{C}_{N+1,t}^{N+1}$ $\gamma_{N,t} = \frac{\gamma_{N+1,t}}{1 + \gamma_{N+1,t} \bar{r}_{N,t} \tilde{C}_{N+1,t}^{N+1}}$ $\begin{bmatrix} \tilde{C}_{N,t} \\ 0 \end{bmatrix} = \tilde{C}_{N+1,t} - \tilde{C}_{N+1,t} \begin{bmatrix} -b_{N,t-1} \\ 1 \end{bmatrix}$ $b_{N,t} = b_{N,t-1} - \bar{r}_{N,t} \gamma_{N,t} \tilde{C}_{N,t}$ $\beta_{N,t} = \lambda \beta_{N,t-1} + \gamma_{N,t} \bar{r}_{N,t}^2$
<p>- filtrage de y_t</p> $\bar{e}_{N,t} = y_t - H_{N,t-1}^T X_{N,t}$ $H_{N,t} = H_{N,t-1} - \bar{e}_{N,t} \gamma_{N,t} \tilde{C}_{N,t}$

Table 1.1 : Algorithme FTF 7N.

1.4.2 Initialisation de l'algorithme FTF 7N

Dans le cas de la fenêtre antérieure, les algorithmes MCR supposent que les signaux x_t et y_t sont nuls avant l'instant initial $t = 0$. Par conséquent, les erreurs de prédiction retour et le prédicteur retour doivent être nuls avant l'instant $t = N$.

Chapitre 1 : Généralités sur les algorithmes des moindres carrés transversaux rapides (MCR)

Citons ici la procédure d'initialisation la plus simple et la plus sûre du point de vue numérique

pour $t = 0$:

$$\begin{aligned}
 a_{N,t} &= 0_N^\downarrow ; \tilde{C}_{N,t} = 0_N^\downarrow ; \\
 \bar{e}_{N,t} &= 0 ; \alpha_{N,t} = E_0 \lambda^N ; \beta_{N,t} = E_0 ; \gamma_{N,t} = 1 \\
 H_{N,t} &= H_{N,0}
 \end{aligned}$$

$H_{N,0}$: vecteur arbitraire

pour $t < N$:

$$\begin{aligned}
 b_{N,t} &= 0_N^\downarrow \\
 \bar{r}_{N,t} &= 0
 \end{aligned}$$

(où 0_N^\downarrow désigne un vecteur colonne nul de dimension N).

La constante E_0 (strictement positive) est la seule qui doit être convenablement choisie. Pendant les premières itérations, les valeurs prises par les variables internes de l'algorithme sont étroitement liées au choix de la constante E_0 .

En pratique, il faut assurer le démarrage de l'algorithme. On pourra choisir par exemple la constante E_0 qui vérifie l'inégalité suivante [14] :

$$E_0 \geq \frac{N}{100} \sigma_x^2$$

où σ_x^2 est l'énergie du signal x_t .

Il faut noter la quantité est assez pessimiste pour les longueurs N faibles et assez optimiste pour N grand [5].

1.5 Conclusion

Dans ce chapitre nous avons présenté le modèle de l'annulation de l'écho acoustique comme étant un problème d'identification adaptative d'un filtre à réponse impulsionnelle finie (RIF) modélisant le chemin d'écho (canal acoustique de couplage entre le haut-parleur et le microphone) suivi par l'onde acoustique, ainsi que deux algorithmes d'identification adaptative : L'algorithme du gradient stochastique normalisé (NLMS) de complexité $3N$ et l'algorithme des moindres carrés transversaux rapides (FTF) de complexité $7N$.

Chapitre 2

**ANALYSE DE LA PROPAGATION DES ERREURS
NUMERIQUES DANS LES ALGORITHMES MCR**

2.1 Introduction

Au cours du temps, la propagation des erreurs numériques dans les équations récursives cause un problème essentiel qui est posé à la mise en œuvre sur ordinateur ou sur processeur spécialisé. Les erreurs numériques se propagent d'une manière non bornée, pour un facteur d'oubli exponentiel λ inférieur à 1, ce qui conduit à une solution instable à plus au moins long terme.

Le but de ce chapitre est de déterminer les équations de propagation des erreurs numériques dans les algorithmes MCR pour n'importe quel ordre N et pour un signal d'entrée quelconque. Pour cela nous allons considérer quelques hypothèses de départ qui simplifieront les calculs [5].

Il faut remarquer qu'il existe deux types de divergence dans les algorithmes MCR. Le premier se traduit par une explosion de la majorité des variables scalaires et vectorielles de l'algorithme. Le deuxième type de divergence se traduit par l'extinction de la majorité des variables importantes (prédicteur et filtrage). Ces deux types de divergence concernent uniquement la partie prédiction aller/retour. La partie filtrage est robuste par rapport à l'implantation numérique, elle nécessite seulement un facteur d'oubli compris entre 0 et 1 (0 exclu) et le bon fonctionnement du gain d'adaptation (gain de Kalman) fourni par la partie prédiction aller/retour. Elle est stable si cette dernière l'est. Le premier type de divergence est détecté quand la variable de vraisemblance $\gamma_{N,i}$ devient supérieur à 1, ce qui engendre après quelques itérations des valeurs négatives de cette même variable et la divergence des principales variables récursives. Alors que le deuxième type de divergence est détecté lorsque la variable de vraisemblance $\gamma_{N,i}$ converge vers 0, impliquant ainsi le blocage de la majorité des variables récursives. C'est ce mode de divergence qu'on appelle instabilité numérique, il est plus lié à la structure de l'algorithme qu'à la nature du signal d'entrée. Les erreurs numériques augmentent, au cours du temps, de manière régulière et non bornée.

Nous ne voulons pas ici nous attarder sur le phénomène d'instabilité numérique, il existe une littérature abondante à ce sujet [5]. L'objectif de ce chapitre est de présenter une méthode de stabilisation simple, puis de déterminer théoriquement les équations de la propagation des erreurs dans l'algorithme MCR et de localiser les variables qui causent cette instabilité.

2.2 Méthode de stabilisation des algorithmes MCR

Le principe de base de la méthode de stabilisation [15], est de calculer les équations de propagation des erreurs dans les algorithmes MCR puis de modifier par une contre réaction convenable les propriétés numériques de chaque algorithme ou plus précisément certaines de ces variables récursives dont l'instabilité numérique est connue ou établie. Cette opération est rendu possible grâce à l'existence de variables redondantes.

D'après [5], l'origine du phénomène de l'instabilité de l'algorithme FTF 7N est due aux erreurs numériques dans le calcul des variables de la prédiction retour. Ceci est dû essentiellement au calcul de l'erreur de prédiction retour par une formule sans redondance, que nous appelons ici (f_0 correspond à la version 0):

$$\bar{r}_{N,t}^{f_0} = -\lambda \beta_{N,t} \tilde{C}_{N+1,t}^{N+1} \quad (2.1i)$$

Cette relation contrairement à la relation de convolution, introduit des effets numériques négatifs dans le calcul des variables récursives retour (variance et prédicteur).

D'ailleurs, il est connu que le remplacement de la relation (2.1i) par la relation de convolution améliore nettement les performances des algorithmes FTF 7N [14].

La relation de convolution s'écrit comme suit :

$$\bar{r}_{N,t}^c = x_{t-N} - b_{N,t-1}^T X_{N,t} \quad (2.1ii)$$

Ces deux formes d'erreur de prédiction retour permettent de définir une variable indicateur de divergence théoriquement nulle :

$$\xi_{N,t}^{f_0} = \bar{r}_{N,t}^c - \bar{r}_{N,t}^{f_0} \quad (2.2)$$

En pratique, cette variable n'est jamais nulle à cause de la précision finie des machines utilisées.

Pour stabiliser l'algorithme FTF 7N, on définit trois erreurs de prédiction retour a priori, théoriquement équivalentes, qui vont être utilisées pour calculer le vecteur de prédiction retour $b_{N,t}$, la variance des erreurs de prédiction retour $\beta_{N,t}$ et la variable de vraisemblance $\gamma_{N,t}$ [5].

$$\bar{r}_{N,t}^b = \bar{r}_{N,t}^c + \mu^b \xi_{N,t}^{f_0} \quad (2.3i)$$

$$\bar{r}_{N,t}^\beta = \bar{r}_{N,t}^c + \mu^\beta \xi_{N,t}^{f_0} \quad (2.3ii)$$

$$\bar{r}_{N,t}^\gamma = \bar{r}_{N,t}^c + \mu^\gamma \xi_{N,t}^{f_0} \quad (2.3iii)$$

où les paramètres scalaires ($\mu^b, \mu^\beta, \mu^\gamma$) permettent de modifier et de contrôler la propagation des erreurs numériques dans l'algorithme FTF 7N. Cette version sera notée [MS0].

Chapitre 2 : Analyse de la propagation des erreurs numériques dans les algorithmes MCR

Il y a une autre façon de calculer l'erreur de prédiction retour à priori, qui permet de définir une variable indicateur de divergence notée $\xi_{N,t}^{f_1}$. Cette erreur de prédiction retour sera calculée à l'aide de la variance des erreurs de prédiction aller. Cela nous permet ainsi d'éviter de propager la variance des erreurs de prédiction retour. Pour stabiliser numériquement l'algorithme, nous utilisons le même principe de stabilisation que précédemment, cette version sera notée [MS1] [17].

Dans cette version, on utilise l'erreur de prédiction retour à priori donnée par la formule suivante (f_1 correspond à la version 1):

$$\bar{r}_{N,t}^{f_1} = -\lambda^{-N+1} \gamma_{N,t-1} \alpha_{N,t-1} \tilde{C}_{N+1,t}^{N+1} \quad (2.4)$$

Ainsi, on définit une variable indicateur de divergence $\xi_{N,t}^{f_1}$ théoriquement nulle, de la manière suivante :

$$\xi_{N,t}^{f_1} = \bar{r}_{N,t}^c - \bar{r}_{N,t}^{f_1} = \bar{r}_{N,t}^c + \lambda^{-N+1} \gamma_{N,t-1} \alpha_{N,t-1} \tilde{C}_{N+1,t}^{N+1} \quad (2.5)$$

La variable $\xi_{N,t}^{f_1}$ évite ainsi de propager la variance retour $\beta_{N,t}$.

Les erreurs de prédiction retour utilisées pour calculer $b_{N,t}$ et $\gamma_{N,t}$ s'écrivent :

$$\bar{r}_{N,t}^\beta = \bar{r}_{N,t}^c + \mu^\beta \xi_{N,t}^{f_1} \quad (2.6i)$$

$$\bar{r}_{N,t}^\gamma = \bar{r}_{N,t}^c + \mu^\gamma \xi_{N,t}^{f_1} \quad (2.6ii)$$

où les paramètres (μ^β, μ^γ) permettent de contrôler la stabilité numérique de cette version.

Notons que les deux versions utilisées ([MS0] et [MS1]) pour stabiliser l'algorithme FTF 7N peuvent être reprises d'une façon combinée. Pour cela, on peut appliquer les mêmes relations de ces versions pour calculer la variable indicateur de divergence $\xi_{N,t}$, cette dernière est choisie et donnée par la relation suivante:

$$\xi_{N,t} = \bar{r}_{N,t}^c - [(1 - \mu_s) \bar{r}_{N,t}^{f_0} + \mu_s \bar{r}_{N,t}^{f_1}] \quad (2.7)$$

avec:

$$0 \leq \mu_s \leq 1.$$

Chapitre 2 : Analyse de la propagation des erreurs numériques dans les algorithmes MCR

Notons aussi que $\mu_s = 0$ correspond à la version [MS0] et $\mu_s = 1$ correspond à la version [MS1]. Pour cette étude, les résultats de simulation qui suivent correspondent à cette version combinée qui sera notée [MSC] [17] (voir table 2.1).

D'après des simulations faites [17], les meilleurs résultats sont données pour $\mu_s = 0.75$, avec $\mu^b = \mu^\beta = \mu^\gamma = 1$.

- Variables disponibles à l'instant t :	
$a_{N,t-1}; b_{N,t-1}; \tilde{C}_{N,t-1}; \gamma_{N,t-1}; \alpha_{N,t-1}; \beta_{N,t-1}; H_{N,t-1}$	
- Nouvelles informations : x_t et x_{t-N}	
- Modélisation de x_t et x_{t-N}	
$\bar{e}_{N,t} = x_t - a_{N,t-1}^T X_{N,t-1}$ $\alpha_{N,t} = \lambda \alpha_{N,t-1} + \gamma_{N,t-1} \bar{e}_{N,t}^2$ $\gamma_{N+1,t} = \frac{\lambda \alpha_{N,t-1}}{\alpha_{N,t}} \gamma_{N,t-1}$ $\tilde{C}_{N+1,t} = \begin{bmatrix} 0 \\ \tilde{C}_{N,t-1} \end{bmatrix} - \frac{\bar{e}_{N,t}}{\lambda \alpha_{N,t-1}} \begin{bmatrix} 1 \\ -a_{N,t-1} \end{bmatrix}$ $a_{N,t} = a_{N,t-1} - \bar{e}_{N,t} \gamma_{N,t-1} \tilde{C}_{N,t-1}$ $\bar{r}_{N,t}^c = x_{t-N} - b_{N,t-1}^T X_{N,t}$ $\bar{r}_{N,t}^{f_0} = -\lambda \beta_{N,t-1} \tilde{C}_{N+1,t}^{N+1}$ $\bar{r}_{N,t}^{f_1} = -\lambda^{-N+1} \gamma_{N,t-1} \alpha_{N,t-1} \tilde{C}_{N+1,t}^{N+1}$ $\xi_{N,t} = \bar{r}_{N,t}^c - [(1 - \mu_s) \bar{r}_{N,t}^{f_0} + \mu_s \bar{r}_{N,t}^{f_1}]$ $\bar{r}_{N,t}^s = \bar{r}_{N,t}^c + \xi_{N,t}$ $\gamma_{N,t} = \frac{\gamma_{N+1,t}}{1 + \gamma_{N+1,t} \bar{r}_{N,t}^s \tilde{C}_{N+1,t}^{N+1}}$ $\begin{bmatrix} \tilde{C}_{N,t} \\ 0 \end{bmatrix} = \tilde{C}_{N+1,t} - \tilde{C}_{N+1,t}^{N+1} \begin{bmatrix} -b_{N,t-1} \\ 1 \end{bmatrix}$ $b_{N,t} = b_{N,t-1} - \bar{r}_{N,t}^s \gamma_{N,t} \tilde{C}_{N,t}$ $\beta_{N,t} = \lambda \beta_{N,t-1} + \gamma_{N,t} (\bar{r}_{N,t}^s)^2$	
- filtrage de y_t	
$\bar{e}_{N,t} = y_t - H_{N,t-1}^T X_{N,t}$ $H_{N,t} = H_{N,t-1} - \bar{e}_{N,t} \gamma_{N,t} \tilde{C}_{N,t}$	

Table 2.1 : Algorithme FTF numériquement stable (MSC).

2.3 Approche, hypothèse et notation

Tout algorithme adaptatif peut être vu comme un système dynamique non-linéaire à temps discret, qui s'écrit théoriquement sous la forme d'état suivante:

$$Z_t = f(Z_{t-1}, X_{N,t}, y_t) \quad (2.8)$$

Z_t : Vecteur regroupant l'ensemble des variables récursives scalaires et vectorielles de l'algorithme.

$f(.)$: Fonction dépendant de la structure de l'algorithme.

$X_{N,t}$: Vecteur signal d'entrée.

y_t : signal à modéliser.

En précision finie

$$\hat{Z}_t = f(\hat{Z}_{t-1}, X_{N,t}, y_t) + E(t) \quad (2.9)$$

\hat{Z}_t : Variable vectorielle calculée par l'algorithme en présence des erreurs numériques représentée par le vecteur $E(t)$.

L'erreur absolue ainsi introduite sera notée ΔZ_t :

$$\Delta Z_t = \hat{Z}_t - Z_t \quad (2.10)$$

Pour effectuer le calcul des erreurs, on linéarise l'équation (2.10) autour de la solution nominale (solution théorique):

$$\Delta Z_t = F(t) \Delta Z_{t-1} + E(t) \quad (2.11)$$

où la matrice de transition est exprimée par:

$$F(t) = \left. \frac{\delta f(Z, X_{N,t}, y_t)}{\delta Z} \right|_{Z=Z_{t-1}} \quad (2.12)$$

Chapitre 2 : Analyse de la propagation des erreurs numériques dans les algorithmes MCR

Supposons que l'on désire calculer ou évaluer un vecteur W connaissant un autre vecteur V ,

$$W = \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ \vdots \\ w_N \end{bmatrix} ; V = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_M \end{bmatrix} .$$

C'est à dire déterminer la valeur de $W = f(V)$ où $f(\cdot)$ est une fonction de R^M dans R^N dont on suppose qu'elle est différentiable au point V .

Supposons maintenant que le vecteur V est connu avec une erreur ΔV ;

$$\Delta V = \hat{V} - V$$

où

$$\Delta v_i = \hat{v}_i - v_i ; i = 1, 2, \dots, M.$$

Dans ces conditions, le résultat sera connu avec une erreur

$$\Delta W = \hat{W} - W = f(\hat{V}) - f(V)$$

ou encore

$$\Delta w_i = \hat{w}_i - w_i = f_i(\hat{V}) - f_i(V) ; i = 1, 2, \dots, N.$$

Un développement en série de Taylor, au voisinage du vecteur V sans erreur, donne:

$$\Delta W = f(V + \Delta V) - f(V) = \sum_{s=1}^{\infty} \frac{\delta^s f(V)}{\delta V^s} \frac{(\Delta V)^s}{s!}$$

Hypothèse H1:

En négligeant les termes d'ordre supérieur à 1, l'expression précédente s'écrit:

$$\Delta W = \frac{\delta f(V)}{\delta V} \Delta V + o(\Delta V) \tag{2.13}$$

avec

$$\frac{\delta f(V)}{\delta V} = \begin{bmatrix} \frac{\delta f_1(V)}{\delta v_1} & \frac{\delta f_1(V)}{\delta v_2} & \dots & \frac{\delta f_1(V)}{\delta v_M} \\ \frac{\delta f_2(V)}{\delta v_1} & \frac{\delta f_2(V)}{\delta v_2} & \dots & \frac{\delta f_2(V)}{\delta v_M} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\delta f_N(V)}{\delta v_1} & \frac{\delta f_N(V)}{\delta v_2} & \dots & \frac{\delta f_N(V)}{\delta v_M} \end{bmatrix} \quad (2.14)$$

Le terme $o(\Delta V)$ est un vecteur dont la norme décroît vers 0 plus vite que celle de ΔV .
L'expression (2.13) s'écrit, de manière équivalente, pour les éléments du vecteur W :

$$\Delta w_i = \frac{\delta f_i(V)}{\delta v_1} \Delta v_1 + \frac{\delta f_i(V)}{\delta v_2} \Delta v_2 + \dots + \frac{\delta f_i(V)}{\delta v_M} \Delta v_M \quad (2.15)$$

où la quantité $\frac{\delta f_i(V)}{\delta v_j}$ peut être interprétée comme étant la sensibilité de la variable w_i aux petites variances Δv_j , de la variable v_j .

Dans les mesures physiques, au lieu de cette expression, on utilise souvent une approximation par excès de l'expression (2.15).
On choisit l'erreur absolue du "pire des cas":

$$\Delta w_i = \left| \frac{\delta f_i(V)}{\delta v_1} \right| \Delta v_1 + \left| \frac{\delta f_i(V)}{\delta v_2} \right| \Delta v_2 + \dots + \left| \frac{\delta f_i(V)}{\delta v_M} \right| \Delta v_M ; i = 1, 2, \dots, N.$$

Dans notre cas, on ne cherche pas à effectuer une plage d'erreur absolue ou relative à une grandeur ou une mesure physique, mais on désire analyser la propagation des erreurs au voisinage de la solution théorique.

Dans ce cas, pour le calcul des erreurs, on utilise la relation (2.15) qui tient compte des variations instantanées des erreurs et de leurs signes.

La relation (2.13) est équivalente à (2.11) si on ne tient pas compte des erreurs d'arrondi instantanées $E(i)$.

Pour l'étude de la propagation des erreurs numériques, ce terme supplémentaire n'est pas nécessaire; il est important surtout pour évaluer les effets de la précision finie.

Hypothèse H2:

On suppose que les équations de l'algorithme se propagent avec une précision infinie et on étudie l'effet dans le temps, d'une erreur déterministe ΔZ_{t_0} apparue à l'instant t_0 .

C'est la façon dont cette erreur est propagée dans le futur qui détermine la stabilité ou l'instabilité de l'algorithme.

Le système d'état (2.11) débarrassé (ou libre) de la perturbation s'écrit alors:

$$\Delta Z_t = F(t)\Delta Z_{t-1} \quad (2.16)$$

où la matrice $F(t)$ est donnée par la matrice de sensibilité (2.14), avec $M = N$, $W = Z_t$ et $V = Z_{t-1}$.

L'étude de la stabilité du système (2.16) revient à calculer et à étudier les propriétés de la matrice $F(t)$. Cette matrice sera dite stable si toutes ses valeurs propres sont de module inférieur à 1.

On dira aussi, de manière équivalente, qu'un algorithme est stable numériquement si l'effet de n'importe quelle erreur dans (2.16) décroît au cours du temps. Dans le cas contraire, l'algorithme sera dit numériquement instable.

Hypothèse H3:

On suppose que le signal d'entrée x_t est stationnaire et qu'il est tel que l'inverse de la matrice d'auto corrélation à court terme existe. En d'autres termes, la solution des moindres carrés exactes existe quel que soit l'instant t et $\lambda < 1$.

2.4 Stabilité numérique de la partie filtrage (MA) et système d'état d'analyse de la partie (AR)

2.4.1 Stabilité numérique de la partie filtrage (MA)

D'après l'algorithme listé sur la table (2.1), la partie filtrage est caractérisée par le calcul de l'erreur de filtrage et l'adaptation du filtre calculé par les équations suivantes :

$$H_{N,t} = H_{N,t-1} - \bar{\epsilon}_{N,t} \gamma_{N,t} \tilde{C}_{N,t} \quad (2.17)$$

$$\bar{\epsilon}_{N,t} = y_t - H_{N,t-1}^T X_{N,t} \quad (2.18)$$

Chapitre 2 : Analyse de la propagation des erreurs numériques dans les algorithmes MCR

La relation réursive (2.17) n'ayant aucune influence sur le calcul du gain de Kalman dual et la variable de vraisemblance, pour un développement du premier ordre des équations de la partie filtrage,

$$\Delta H_{N,t} = \Delta H_{N,t-1} - \gamma_{N,t} \tilde{C}_{N,t} \Delta \bar{\varepsilon}_{N,t} - \bar{\varepsilon}_{N,t} \Delta(\gamma_{N,t} \bar{C}_{N,t}) \quad (2.19i)$$

avec

$$\Delta \bar{\varepsilon}_{N,t} = -X_{N,t}^T \Delta H_{N,t-1} \quad (2.19ii)$$

l'équation de propagation des erreurs s'écrit :

$$\Delta H_{N,t} = [I_N + \gamma_{N,t} \tilde{C}_{N,t} X_{N,t}^T] \Delta H_{N,t-1} + T[(\gamma_{N,t} \tilde{C}_{N,t})] \quad (2.20)$$

où $T[.]$ est une fonction non explicitée, ne dépendant pas de $\Delta H_{N,t-1}$.

En utilisant les équations suivantes :

$$C_{N,t} = \gamma_{N,t} \tilde{C}_{N,t} = -R_{N,t}^{-1} X_{N,t} \quad (2.21i)$$

$$R_{N,t} = \lambda R_{N,t-1} + X_{N,t} X_{N,t}^T \quad (2.21ii)$$

L'équation de propagation des erreurs (2.20) s'écrit :

$$\Delta H_{N,t} = \lambda R_{N,t}^{-1} R_{N,t-1} \Delta H_{N,t-1} \quad (2.22)$$

En première approximation, pour λ proche de 1, on peut confondre $R_{N,t}^{-1} R_{N,t-1}$ avec la matrice identité et voir que le système (2.22) est stable pour λ inférieur à 1.

De manière plus générale, en itérant dans le temps le système (2.22) à partir d'un état initial déterministe, on a [18] :

$$\Delta H_{N,t} = \lambda^{t-t_0} R_{N,t}^{-1} R_{N,t_0} \Delta H_{N,t_0} \quad (2.23)$$

Ainsi, l'effet de n'importe quelle erreur déterministe décroît exponentiellement vers 0 si le facteur d'oubli λ est inférieur à 1 et si la matrice $R_{N,t}^{-1}$ reste bornée. Cette dernière condition exige un signal d'entrée x_t tel que la matrice d'auto corrélation à court terme soit inversible à chaque instant. C'est la condition d'un signal à excitation persistante.

Ce problème de mauvais conditionnement de la matrice d'auto corrélation est commun à tous les algorithmes des moindres carrés exacts. Le remède est en général l'ajout d'une petite composante de bruit au signal d'entrée.

2.4.2 Système d'état d'analyse de la partie (AR)

Connaissant les bonnes propriétés numériques de la partie filtrage et la non influence de ce dernier sur la partie prédiction aller/retour, le système d'état à analyser (2.8) se réduit au système suivant (sans changement de notation) :

$$Z_t = f(Z_{t-1}, X_{N,t}) \quad (2.24)$$

où Z_t contient maintenant l'ensemble des variables récursives d'un algorithme MCR donné correspondant à l'analyse par prédiction linéaire aller et retour d'ordre N , d'un signal x_t .

L'analyse de la propagation des erreurs numériques dans le système (2.24) est basée sur les hypothèses présentées dans les deux paragraphes précédents.

2.4.2.1 Calcul des équations de propagation des erreurs

Le vecteur d'état des équations de propagation des erreurs dans les variables récursives de la table (2.1) s'écrit :

$$\Delta Z_t = \begin{bmatrix} \Delta A_t \\ \Delta C_t \\ \Delta B_t \end{bmatrix} \quad (2.25i)$$

où

$$\Delta A_t = \begin{bmatrix} \Delta a_{N,t} \\ \Delta \alpha_{N,t} \end{bmatrix}; \quad \Delta B_t = \begin{bmatrix} \Delta b_{N,t} \\ \Delta \beta_{N,t} \end{bmatrix}; \quad \Delta C_t = \begin{bmatrix} \Delta \tilde{C}_{N,t} \\ \Delta \gamma_{N,t} \end{bmatrix} \quad (2.25ii)$$

désignant respectivement les erreurs cumulées jusqu'à l'instant t dans les variables récursives aller, retour et de Kalman dont nous allons calculé les expressions.

Chapitre 2 : Analyse de la propagation des erreurs numériques dans les algorithmes MCR

La matrice $F(t)$ sera notée comme suit :

$$F(t) = \begin{bmatrix} F_{11}(t) & F_{12}(t) & F_{13}(t) \\ F_{21}(t) & F_{22}(t) & F_{23}(t) \\ F_{31}(t) & F_{32}(t) & F_{33}(t) \end{bmatrix} \quad (2.26)$$

elle est de dimension $(3N+3) \times (3N+3)$.

Dans les paragraphes qui suivent, nous allons calculer chacune des sous matrices de $F(t)$.

a. Equations de propagation des erreurs dans les variables de prédiction aller

Les variables récursives de la prédiction aller à analyser sont la variance des erreurs de prédiction aller $\alpha_{N,t}$ et le prédicteur aller $a_{N,t}$ d'ordre N, qui s'écrivent respectivement :

$$\begin{aligned} \alpha_{N,t} &= \lambda \alpha_{N,t-1} + \gamma_{N,t} \bar{e}_{N,t}^2 \\ a_{N,t} &= a_{N,t-1} - \bar{e}_{N,t} \gamma_{N,t-1} \tilde{C}_{N,t-1} \end{aligned}$$

où

$$\bar{e}_{N,t} = x_t - a_{N,t-1}^T X_{N,t-1}$$

Selon les hypothèses H1 et H2 :

$$\Delta \alpha_{N,t} = \lambda \Delta \alpha_{N,t-1} + 2\gamma_{N,t-1} \bar{e}_{N,t} \Delta \bar{e}_{N,t} + \bar{e}_{N,t}^2 \Delta \gamma_{N,t} \quad (2.27i)$$

avec

$$\Delta \bar{e}_{N,t} = -X_{N,t-1}^T \Delta a_{N,t-1}$$

d'où

$$\Delta \alpha_{N,t} = [-2\bar{e}_{N,t} \gamma_{N,t-1} X_{N,t-1}^T \quad \lambda] \Delta a_{N,t-1} + [\bar{0}_N \quad \bar{e}_{N,t}^2] \Delta C_{N,t-1} \quad (2.27ii)$$

où $\bar{0}_N$ désigne un vecteur ligne nul de dimension N.

A partir de la relation théorique du prédicteur aller, il est facile de retrouver l'expression suivante :

$$\Delta a_{N,t} = [I_N + \gamma_{N,t-1} \tilde{C}_{N,t-1} X_{N,t-1}^T \quad 0_N^\downarrow] \Delta A_{t-1} - \bar{e}_{N,t} [\gamma_{N,t-1} I_N \quad \tilde{C}_{N,t-1}] \Delta C_{t-1} \quad (2.28)$$

où 0_N^\downarrow désigne un vecteur colonne nul de dimension N, et I_N désigne une matrice identité d'ordre N.

En regroupant (2.27i) et (2.28), il vient :

$$\Delta A_t = F_{11}(t) \Delta A_{t-1} + F_{12}(t) \Delta C_{t-1} + F_{13}(t) \Delta B_{t-1} \quad (2.29)$$

où

$$F_{11}(t) = \begin{bmatrix} \lambda R_{N,t-1}^{-1} R_{N,t-2} & 0_N^\downarrow \\ -2\bar{e}_{N,t} \gamma_{N,t-1} X_{N,t-1}^T & \lambda \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_N + \gamma_{N,t-1} \tilde{C}_{N,t-1} X_{N,t-1}^T & 0_N^\downarrow \\ -2\bar{e}_{N,t} \gamma_{N,t-1} X_{N,t-1}^T & \lambda \end{bmatrix} \quad (2.29i)$$

$$F_{12}(t) = \begin{bmatrix} -\bar{e}_{N,t} \gamma_{N,t-1} I_N & -\bar{e}_{N,t} \tilde{C}_{N,t} \\ \bar{0}_N & -\bar{e}_{N,t}^2 \end{bmatrix} \quad (2.29ii)$$

$$F_{13}(t) = 0_N \quad (2.29iii)$$

où 0_N désigne une matrice nulle de dimension $N \times N$.

b. Equation de propagation des erreurs dans les variables de Kalman

Le gain de Kalman d'ordre N est donné par :

$$\begin{bmatrix} \tilde{C}_{N,t} \\ 0 \end{bmatrix} = \tilde{C}_{N+1,t} - \tilde{C}_{N+1,t} \begin{bmatrix} -b_{N,t-1} \\ 1 \end{bmatrix} \quad (2.30)$$

L'erreur au premier ordre de ce vecteur s'écrit :

$$\begin{bmatrix} \Delta \tilde{C}_{N,t} \\ 0 \end{bmatrix} = \left\{ I_{N+1} - \begin{bmatrix} -b_{N,t-1} \\ I \end{bmatrix} q_{N+1}^T \right\} \Delta \tilde{C}_{N+1,t} + \tilde{C}_{N+1,t}^{N+1} \begin{bmatrix} \Delta b_{N,t-1} \\ 0 \end{bmatrix} \quad (2.30i)$$

où le vecteur q_{N+1}^T permet d'extraire la $(N+1)^{i\text{ème}}$ composante d'un vecteur d'ordre $N+1$:

$$q_{N+1}^T = [0 \ 0 \ \dots \ 0 \ 1].$$

La relation (2.30i) s'écrit sous forme plus condensée :

$$\Delta \tilde{C}_{N,t} = [I_N \ b_{N,t-1}] \Delta \tilde{C}_{N+1,t} + \tilde{C}_{N+1,t}^{N+1} \Delta b_{N,t-1} \quad (2.30ii)$$

La récurrence sur le temps dans le calcul du gain de Kalman d'ordre N se fait par l'interaction de ce dernier avec le gain de Kalman d'ordre $N+1$, dont l'expression théorique s'écrit :

$$\tilde{C}_{N+1,t} = \begin{bmatrix} 0 \\ \tilde{C}_{N,t-1} \end{bmatrix} - \frac{\bar{e}_{N,t}}{\lambda \alpha_{N,t-1}} \begin{bmatrix} I \\ -a_{N,t-1} \end{bmatrix} \quad (2.31)$$

D'où le vecteur d'erreur donne :

$$\Delta \tilde{C}_{N+1,t} = \begin{bmatrix} 0 \\ \Delta \tilde{C}_{N,t-1} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} I \\ -a_{N,t-1} \end{bmatrix} \frac{\bar{e}_{N,t}}{\lambda \alpha_{N,t-1}^2} \Delta \alpha_{N,t-1} + \left\{ \begin{bmatrix} I \\ -a_{N,t-1} \end{bmatrix} X_{N,t-1}^T + \bar{e}_{N,t} \begin{bmatrix} \bar{0}_N \\ I_N \end{bmatrix} \right\} \frac{\Delta \alpha_{N,t-1}}{\lambda \alpha_{N,t-1}} \quad (2.31i)$$

qui s'écrit sous forme plus condensée :

$$\Delta \tilde{C}_{N+1,t} = \begin{bmatrix} \bar{0}_N \\ I_N \end{bmatrix} \Delta \tilde{C}_{N,t-1} + L(t) \Delta A_{t-1} \quad (2.31ii)$$

où $L(t)$ est une matrice $(N+1 \times N+1)$:

$$L(t) = \frac{1}{\lambda \alpha_{N,t-1}} \begin{bmatrix} X_{N,t-1}^T & \frac{\bar{e}_{N,t}}{\alpha_{N,t-1}} \\ -a_{N,t-1} X_{N,t-1}^T + I_N \bar{e}_{N,t} & -a_{N,t-1} \frac{\bar{e}_{N,t}}{\alpha_{N,t-1}} \end{bmatrix} \quad (2.32)$$

Chapitre 2 : Analyse de la propagation des erreurs numériques dans les algorithmes MCR

A l'aide des relations (2.30ii) et (2.31ii), on trouve pour l'équation du gain de Kalman dual :

$$\Delta \tilde{C}_{N,t} = M^c(t) \Delta \tilde{C}_{N,t-1} + [I_N \quad b_{N,t-1}] L(t) \Delta A_{t-1} + \tilde{C}_{N+1,t}^{N+1} \Delta b_{N,t-1} \quad (2.33)$$

La matrice $M^c(t)$ est une matrice compagne avec des valeurs propres égales aux pôles instantanés du prédicteur retour :

$$M^c(t) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & b_{N,t-1}^1 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & b_{N,t-1}^2 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & b_{N,t-1}^3 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & b_{N,t-1}^N \end{bmatrix} \quad (2.34)$$

Calculons maintenant les erreurs intervenant dans le calcul de la variable de vraisemblance. Les équations théoriques mises en jeu sont :

$$\gamma_{N,t} = \frac{\gamma_{N+1,t}}{\theta_{N,t}}$$

avec :

$$\gamma_{N+1,t} = \rho_\alpha(t) \gamma_{N,t-1} ; \quad \rho_\alpha(t) = \frac{\lambda \alpha_{N,t-1}}{\alpha_{N,t}} ; \quad \theta_{N,t} = 1 + \bar{r}_{N,t} \gamma_{N+1,t} \tilde{C}_{N+1,t}^{N+1}$$

L'erreur relative dans la variable $\gamma_{N,t}$ s'écrit :

$$\frac{\Delta \gamma_{N,t}}{\gamma_{N,t}} = \frac{\Delta \gamma_{N+1,t}}{\gamma_{N+1,t}} - \frac{\Delta \theta_{N,t}}{\theta_{N,t}} \quad (2.35)$$

d'où le premier terme de (2.35) s'écrit :

$$\frac{\Delta \gamma_{N+1,t}}{\gamma_{N+1,t}} = \frac{\Delta \rho_\alpha(t)}{\rho_\alpha(t)} + \frac{\Delta \gamma_{N,t-1}}{\gamma_{N,t-1}} \quad (2.36)$$

avec

$$\frac{\Delta\rho_\alpha(t)}{\rho_\alpha(t)} = \frac{\Delta\alpha_{N,t-1}}{\alpha_{N,t-1}} - \frac{\Delta\alpha_{N,t}}{\alpha_{N,t}} = (1 - \rho_\alpha(t)) \left\{ \frac{\Delta\alpha_{N,t-1}}{\alpha_{N,t-1}} - \frac{\Delta\gamma_{N,t-1}}{\gamma_{N,t-1}} - 2 \frac{\Delta\bar{e}_{N,t}}{\bar{e}_{N,t}} \right\}$$

Cette dernière expression est obtenue en divisant l'expression (2.27i) par $\alpha_{N,t}$.

Le deuxième terme de (2.35) s'obtient en calculant l'erreur relative de $(\theta_{N,t} - 1)$ et en multipliant par $(1 - \theta_{N,t}^{-1})$:

$$\frac{\Delta\theta_{N,t}}{\theta_{N,t}} = (1 - \theta_{N,t}^{-1}) \left\{ \frac{\Delta\gamma_{N,t}}{\gamma_{N,t}} + \frac{\Delta\bar{r}_{N,t}^s}{\bar{r}_{N,t}^s} + \frac{\Delta\tilde{C}_{N,t}^{N+1}}{\tilde{C}_{N,t}^{N+1}} \right\} \quad (2.37)$$

En regroupant les relations (2.36) et (2.37) dans (2.35), il vient :

$$\frac{\Delta\gamma_{N,t}}{\gamma_{N,t}} = \frac{\rho_\alpha(t)}{\theta_{N,t}} \frac{\Delta\gamma_{N,t-1}}{\gamma_{N,t-1}} + \frac{(1 - \rho_\alpha(t))}{\theta_{N,t}} \left\{ \frac{\Delta\alpha_{N,t-1}}{\alpha_{N,t-1}} - 2 \frac{\Delta\bar{e}_{N,t}}{\bar{e}_{N,t}} \right\} - (1 - \theta_{N,t}^{-1}) \left\{ \frac{\Delta\bar{r}_{N,t}^s}{\bar{r}_{N,t}^s} + \frac{\Delta\tilde{C}_{N,t}^{N+1}}{\tilde{C}_{N,t}^{N+1}} \right\}$$

En utilisant les quatre équations suivante :

$$(1 - \theta_{N,t}^{-1}) = \gamma_{N,t} \bar{r}_{N,t}^s \tilde{C}_{N,t}^{N+1} ; 1 - \rho_\alpha(t) = \frac{\gamma_{N,t-1} \bar{e}_{N,t}^2}{\alpha_{N,t}} ; \frac{\gamma_{N,t}}{\gamma_{N,t-1}} = \frac{\rho_\alpha(t)}{\theta_{N,t}} ; \frac{\gamma_{N,t-1} \gamma_{N,t}}{\theta_{N,t} \alpha_{N,t}} = \frac{\gamma_{N,t}^2}{\lambda \alpha_{N,t-1}}$$

L'erreur dans le calcul de l'erreur de prédiction retour $\bar{r}_{N,t}^s$ est calculée par la relation :

$$\bar{r}_{N,t}^s = \bar{r}_{N,t}^c + \xi_{N,t} = 2\bar{r}_{N,t}^c - (1 - \mu_s) \bar{r}_{N,t}^{f_0} - \mu_s \bar{r}_{N,t}^{f_1}$$

est

$$\begin{aligned} \Delta\bar{r}_{N,t}^s = & -2X_{N,t}^T \Delta b_{N,t-1} + (1 - \mu_s) \lambda \tilde{C}_{N,t}^{N+1} \Delta\beta_{N,t-1} + \mu_s \lambda^{-N+1} \gamma_{N,t-1} \tilde{C}_{N,t}^{N+1} \Delta\alpha_{N,t-1} \\ & + \mu_s \lambda^{-N+1} \alpha_{N,t-1} \tilde{C}_{N,t}^{N+1} \Delta\gamma_{N,t-1} + [(1 - \mu_s) \lambda \beta_{N,t-1} + \mu_s \lambda^{-N+1} \alpha_{N,t-1} \gamma_{N,t-1}] \Delta\tilde{C}_{N,t}^{N+1} \end{aligned} \quad (2.38)$$

On trouve l'erreur absolue dans le calcul de la variable de vraisemblance d'ordre N :

$$\begin{aligned}
 \Delta\gamma_{N,t} = & \left[2 \frac{\gamma_{N,t}^2 \bar{e}_{N,t}}{\lambda \alpha_{N,t-1}} X_{N,t-1}^T \left\{ \frac{\gamma_{N,t-1} (1 - \rho_\alpha(t))}{\alpha_{N,t-1} \theta_{N,t}} - \mu_s \lambda^{-N+1} \gamma_{N,t-1} (\gamma_{N,t} \tilde{C}_{N+1,t}^{N+1})^2 \right\} \right] \Delta A_{t-1} \\
 & + \left[2 \gamma_{N,t}^2 \tilde{C}_{N+1,t}^{N+1} X_{N,t}^T \left\{ (1 - \mu_s) \lambda (\gamma_{N,t} \tilde{C}_{N+1,t}^{N+1})^2 \right\} \right] \Delta B_{t-1} \\
 & + \left[\bar{0}_N \left\{ \left(\frac{\rho_\alpha(t)}{\theta_{N,t}} \right)^2 - \mu_s \lambda^{-N+1} (\gamma_{N,t} \tilde{C}_{N+1,t}^{N+1})^2 \right\} \right] \Delta C_{t-1}
 \end{aligned} \tag{2.39}$$

En regroupant cette expression avec la relation (2.33) donnant les erreurs dans le calcul du gain de Kalman dual d'ordre N, il vient pour l'expression des erreurs numérique dans les variables de Kalman récursives :

$$\Delta C_t = F_{21}(t) \Delta A_{t-1} + F_{22}(t) \Delta C_{t-1} + F_{23}(t) \Delta B_{t-1} \tag{2.40}$$

Les sous matrices $F_{21}(t)$, $F_{22}(t)$ et $F_{23}(t)$ de la matrice principale $F(t)$ se déduisent :

$$F_{21}(t) = \begin{bmatrix} K(t) \\ U^T \quad u \end{bmatrix} \tag{2.40i}$$

$$F_{22}(t) = \begin{bmatrix} M^c(t) & 0_N^\downarrow \\ \bar{0}_N & \left(\frac{\rho_\alpha(t)}{\theta_{N,t}} \right)^2 - \mu_s \lambda^{-N+1} (\gamma_{N,t} \tilde{C}_{N+1,t}^{N+1})^2 \end{bmatrix} \tag{2.40ii}$$

$$F_{23}(t) = \begin{bmatrix} I_N \tilde{C}_{N+1,t}^{N+1} & 0_N^\downarrow \\ 2 \gamma_{N,t}^2 \tilde{C}_{N+1,t}^{N+1} X_{N,t}^T & -(1 - \mu_s) \lambda (\gamma_{N,t} \tilde{C}_{N+1,t}^{N+1})^2 \end{bmatrix} \tag{2.40iii}$$

avec :

$$\bullet K(t) = [I_N \quad b_{N,t-1}]L(t) \quad (2.41)$$

• U : vecteur ligne de dimension N

$$U = 2 \frac{\gamma_{N,t}^2 \bar{e}_{N,t}}{\lambda \alpha_{N,t-1}} X_{N,t-1} \quad (2.42)$$

• u : est un scalaire

$$u = \frac{\gamma_{N,t-1}}{\alpha_{N,t-1}} \frac{(1 - \rho_\alpha(t))}{\theta_{N,t}} - \mu_s \lambda^{-N+1} \gamma_{N,t-1} (\gamma_{N,t} \tilde{C}_{N+1,t}^{N+1})^2 \quad (2.43)$$

• $L(t)$ est donnée par la relation (2.32)

• $M^c(t)$ est donnée par la relation (2.34)

c. Equation de propagation des erreurs dans les variables de prédicteur retour

Les variables récursives de la prédiction retour à analyser sont la variance des erreurs de prédiction retour $\beta_{N,t}$ et le prédicteur retour $b_{N,t}$ d'ordre N , qui s'écrivent respectivement :

$$\begin{aligned} \beta_{N,t} &= \lambda \beta_{N,t-1} + \gamma_{N,t} (\bar{r}_{N,t}^s)^2 \\ b_{N,t} &= b_{N,t-1} - \bar{r}_{N,t}^s \gamma_{N,t} \tilde{C}_{N,t} \end{aligned}$$

En tenant compte de la relation (2.38), l'erreur absolue dans le calcul du prédicteur retour s'écrit :

$$\begin{aligned} \Delta b_{N,t} &= \left[I_N + 2\gamma_{N,t} \tilde{C}_{N,t} X_{N,t}^T \quad -(1 - \mu_s) \lambda \gamma_{N,t} \tilde{C}_{N+1,t}^{N+1} \tilde{C}_{N,t} \right] \Delta B_{t-1} - \bar{r}_{N,t} \left[\gamma_{N,t} I_N \quad \tilde{C}_{N,t} \right] \Delta C_t \\ &+ \left[0_N \quad -\mu_s \gamma_{N,t} \lambda^{-N+1} \gamma_{N,t-1} \tilde{C}_{N+1,t}^{N+1} \tilde{C}_{N,t} \right] \Delta A_{t-1} + \left[0_N \quad -\mu_s \gamma_{N,t} \lambda^{-N+1} \alpha_{N,t-1} \tilde{C}_{N+1,t}^{N+1} \tilde{C}_{N,t} \right] \Delta C_{t-1} \\ &- \gamma_{N,t} \left[(1 - \mu_s) \lambda \beta_{N,t-1} + \mu_s \lambda^{-N+1} \alpha_{N,t-1} \gamma_{N,t-1} \right] \tilde{C}_{N,t} q_{N+1}^T \Delta \tilde{C}_{N+1,t} \end{aligned} \quad (2.44)$$

(0_N désigne une matrice nulle de dimension $N \times N$).

De la même façon, on obtient l'expression de l'erreur dans le calcul de la variance des erreurs de prédiction retour :

$$\begin{aligned} \Delta\beta_{N,t} = & \left[-4\bar{r}_{N,t}\gamma_{N,t}X_{N,t}^T \quad \lambda + 2\lambda(1-\mu_s)\bar{r}_{N,t}\gamma_{N,t}\tilde{C}_{N+1,t}^{N+1} \right] \Delta B_{t-1} - \bar{r}_{N,t} \begin{bmatrix} \bar{0}_N & \bar{r}_{N,t}^2 \end{bmatrix} \Delta C_t \\ & + \begin{bmatrix} \bar{0}_N & 2\mu_s\lambda^{-N+1}\alpha_{N,t-1}\bar{r}_{N,t}\gamma_{N,t}\tilde{C}_{N+1,t}^{N+1} \end{bmatrix} \Delta C_{t-1} + \begin{bmatrix} \bar{0}_N & 2\mu_s\lambda^{-N+1}\gamma_{N,t-1}\bar{r}_{N,t}\gamma_{N,t}\tilde{C}_{N+1,t}^{N+1} \end{bmatrix} \Delta A_{t-1} \\ & + 2\bar{r}_{N,t}\gamma_{N,t}[(1-\mu_s)\lambda\beta_{N,t-1} + \mu_s\lambda^{-N+1}\alpha_{N,t-1}\gamma_{N,t-1}]q_{N+1}^T\Delta\tilde{C}_{N+1,t} \end{aligned} \quad (2.45)$$

En regroupant les expressions (2.48) et (2.49) en un seul vecteur de dimension N+1, on obtient:

$$\begin{aligned} \Delta B_t = & \begin{bmatrix} I_N + 2\gamma_{N,t}\tilde{C}_{N,t}X_{N,t}^T & -(1-\mu_s)\lambda\gamma_{N,t}\tilde{C}_{N+1,t}\tilde{C}_{N,t} \\ -4\bar{r}_{N,t}\gamma_{N,t}X_{N,t}^T & \lambda + 2\lambda(1-\mu_s)\bar{r}_{N,t}\gamma_{N,t}\tilde{C}_{N+1,t} \end{bmatrix} \Delta B_{t-1} + M^r(t)\Delta C_t \\ & + M^a(t)\Delta C_{t-1} + M^s(t)\Delta A_{t-1} + W(t)q_{N+1}^T\Delta\tilde{C}_{N+1,t} \end{aligned} \quad (2.46)$$

où :

$$M^r(t) = \begin{bmatrix} -\bar{r}_{N,t}\gamma_{N,t}I_N & -\bar{r}_{N,t}\tilde{C}_{N,t} \\ \bar{0}_N & \bar{r}_{N,t}^2 \end{bmatrix} \quad (2.46i)$$

$$M^a(t) = \begin{bmatrix} 0_N & -\mu_s\gamma_{N,t}\lambda^{-N+1}\alpha_{N,t-1}\tilde{C}_{N+1,t}\tilde{C}_{N,t} \\ \bar{0}_N & 2\mu_s\lambda^{-N+1}\alpha_{N,t-1}\bar{r}_{N,t}\gamma_{N,t}\tilde{C}_{N+1,t} \end{bmatrix} \quad (2.46ii)$$

$$M^s(t) = \begin{bmatrix} 0_N & -\mu_s\gamma_{N,t}\lambda^{-N+1}\gamma_{N,t-1}\tilde{C}_{N+1,t}\tilde{C}_{N,t} \\ \bar{0}_N & 2\mu_s\lambda^{-N+1}\gamma_{N,t-1}\bar{r}_{N,t}\gamma_{N,t}\tilde{C}_{N+1,t} \end{bmatrix} \quad (2.46iii)$$

$$W(t) = \gamma_{N,t} \left[(1-\mu_s)\lambda\beta_{N,t-1} + \mu_s\lambda^{-N+1}\alpha_{N,t-1}\gamma_{N,t-1} \right] \begin{bmatrix} -\tilde{C}_{N,t} \\ 2r_{N,t} \end{bmatrix} \quad (2.46iv)$$

Chapitre 2 : Analyse de la propagation des erreurs numériques dans les algorithmes MCR

En substituant les relations (2.31ii) et (2.40) dans (2.46), on obtient l'équation finale de propagation des erreurs numériques dans les variables récursives de la prédiction retour :

$$\begin{aligned} \Delta B_t = & \begin{bmatrix} \theta_{N,t}^{-1} [I_N + 2\gamma_{N,t} \tilde{C}_{N,t} X_{N,t}^T] & -(1-\mu_s) \lambda \gamma_{N,t} \tilde{C}_{N+1,t}^{-1} \theta_{N,t}^{-1} \tilde{C}_{N,t} \\ -2\bar{r}_{N,t} \gamma_{N,t} (1+\theta_{N,t}^{-1}) X_{N,t}^T & \lambda [I + 2(1-\mu_s)(1-\theta_{N,t}^{-1}) - (1-\mu_s)(1-\theta_{N,t}^{-1})^2] \end{bmatrix} \Delta B_{t-1} \\ & + \{M^r(t) F_{22}(t) + M^a(t) + W(t) [q_N^T \quad 0]\} \Delta C_{t-1} \\ & + \{M^r(t) F_{21}(t) + M^s(t) + W(t) q_{N+1}^T L(t)\} \Delta A_{t-1} \end{aligned} \quad (2.47)$$

En résumé, la matrice de la propagation des erreurs numériques dans l'algorithme MCR (version combinée) s'écrit :

$$F(t) = \begin{bmatrix} F_{11}(t) & F_{12}(t) & F_{13}(t) \\ F_{21}(t) & F_{22}(t) & F_{23}(t) \\ F_{31}(t) & F_{32}(t) & F_{33}(t) \end{bmatrix}$$

avec :

$$F_{11}(t) = \begin{bmatrix} \lambda R_{N,t-1}^{-1} R_{N,t-2} & 0_N^\downarrow \\ -2\bar{e}_{N,t} \gamma_{N,t-1} X_{N,t-1}^T & \lambda \end{bmatrix};$$

$$F_{12}(t) = \begin{bmatrix} -\bar{e}_{N,t} \gamma_{N,t-1} I_N & -\bar{e}_{N,t} \tilde{C}_{N,t} \\ \bar{0}_N & -\bar{e}_{N,t}^2 \end{bmatrix};$$

$$F_{13}(t) = 0_N;$$

$$F_{21}(t) = \begin{bmatrix} K(t) \\ U^T \quad u \end{bmatrix};$$

$$F_{22}(t) = \begin{bmatrix} M^c(t) & 0_N^\downarrow \\ \bar{0}_N & (\frac{\rho_a(t)}{\theta_{N,t}})^2 - \mu_s \lambda^{-N+1} (\gamma_{N,t} \tilde{C}_{N+1,t}^{-1})^2 \end{bmatrix};$$

$$F_{23}(t) = \begin{bmatrix} I_N \tilde{C}_{N+1,t}^{N+1} & 0_N^\downarrow \\ 2\gamma_{N,t}^2 \tilde{C}_{N+1,t}^{N+1} X_{N,t}^T & -(1-\mu_s)\lambda(\gamma_{N,t} \tilde{C}_{N+1,t}^{N+1})^2 \end{bmatrix};$$

$$F_{31}(t) = M^r(t)F_{21}(t) + M^s(t) + W(t)q_{N+1}^T L(t);$$

$$F_{32}(t) = M^r(t)F_{22}(t) + M^a(t) + W(t)[q_N^T \ 0] ;$$

$$F_{33}(t) = \begin{bmatrix} \theta_{N,t}^{-1} [I_N + 2\gamma_{N,t} \tilde{C}_{N,t} X_{N,t}^T] & -(1-\mu_s)\lambda\gamma_{N,t} \tilde{C}_{N+1,t}^{N+1} \theta_{N,t}^{-1} \tilde{C}_{N,t} \\ -2\tilde{r}_{N,t} \gamma_{N,t} (1+\theta_{N,t}^{-1}) X_{N,t}^T & \lambda [I + 2(1-\mu_s)(1-\theta_{N,t}^{-1}) - (1-\mu_s)(1-\theta_{N,t}^{-1})^2] \end{bmatrix}$$

où :

- $L(t)$ matrice donnée par la relation (2.32)
- $M^c(t)$ matrice donnée par la relation (2.34)
- $K(t)$ matrice donnée par la relation (2.40i)
- $[U^T \ u]$ expression donnée par la relation (2.34)
- $M^r(t)$ matrice donnée par la relation (2.46i)
- $M^a(t)$ matrice donnée par la relation (2.46ii)
- $M^s(t)$ matrice donnée par la relation (2.46iii)
- $W(t)$ vecteur donnée par la relation (2.46iv)

2.5 Etude de la stabilité de l'algorithme

2.5.1 Stabilité de l'algorithme

D'après les relations établies et résumées au paragraphe précédent, il est clair que l'étude de la stabilité ou l'instabilité globale de l'algorithme reste un problème très difficile à résoudre à cause de la complexité des équations obtenues et de la dépendance de ces dernières par rapport aux caractéristiques statistiques du signal d'entrée. Néanmoins, une constatation importante peut déjà être faite : l'effet le plus important introduit par la méthode de stabilisation est la modification de la sous matrice $F_{33}(t)$. Cette matrice avait toutes ses valeurs propres supérieures à 1.

Nous allons, pour mieux comprendre le phénomène de l'instabilité numérique dans l'algorithme MCR, faire une hypothèse qui permet de simplifier la matrice $F(t)$. On suppose que le facteur d'oubli λ est très proche de 1, mais pas égal à 1. Pour montrer l'instabilité numérique de l'algorithme, il suffit de remarquer que la sous matrice $F_{23}(t)$:

$$F_{23}(t) = \tilde{C}_{N+1,t}^{N+1} \begin{bmatrix} I_N & 0_N^\downarrow \\ 2\gamma_{N,t}^2 X_{N,t}^T & (\mu_s - 1)\lambda\gamma_{N,t}^2 \tilde{C}_{N+1,t}^{N+1} \end{bmatrix}$$

où

$$\tilde{C}_{N+1,t}^{N+1} = -\lambda^{-1} q_{N+1}^T R_{N+1,t}^{-1} X_{N+1,t} \approx (1 - \lambda^{-1}) q_{N+1}^T R_{N+1,XX}^{-1} X_{N+1,t} \quad (2.48)$$

avec :

$$R_{N+1,XX} = E(X_{N+1,t} X_{N+1,t}^T)$$

(où $E(.)$ représente la moyenne statistique).

peut être rendue aussi faible que l'on veut par le choix d'un facteur d'oubli λ proche de 1. Dans ce cas la sous matrice $F_{23}(t)$ a un poids très faible et on peut approcher le sous système des variables récursives retour par un modèle du 1^{er} ordre dépendant du temps :

$$\Delta B_t = F_{31}(t) \Delta A_{t-1} + F_{32}(t) \Delta C_{t-1} + F_{33}(t) \Delta B_{t-1} \quad (2.49)$$

La matrice $F_{33}(t)$ est très proche d'une matrice triangulaire par blocs. En effet, le vecteur d'ordre N de la $(N+1)^{i\text{ème}}$ colonne de cette matrice,

$$V_t = \lambda(\mu_s - 1)\gamma_{N,t}\tilde{C}_{N+1,t}^{N+1}\theta_{N,t}^{-1}\tilde{C}_{N,t} \quad (2.49i)$$

se trouve pondéré, en régime asymptotique

$$V_t \approx \frac{(1-\lambda^{-1})^2}{\lambda}(\mu_s - 1)R_{N,XX}^{-1}X_{N,t}q_{N+1}^T R_{N+1,XX}^{-1}X_{N+1,t} \quad (2.49ii)$$

où

$$R_{N,XX} = E(X_{N,t}X_{N,t}^T).$$

Un facteur d'oubli λ proche de 1 permet d'affaiblir l'influence du vecteur colonne V_t et d'approcher les erreurs numériques dans le calcul du prédicteur et de la variance retour par des modèles du premier ordre.

$$\Delta\beta_{N,t} = \lambda\{1 + 2(1-\mu_s)(1-\theta_{N,t}^{-1}) - (1-\mu_s)(1-\theta_{N,t}^{-1})^2\}\Delta\beta_{N,t-1} + P_\beta(t) \quad (2.50)$$

$$\Delta b_{N,t} = \theta_{N,t}^{-1}\{I_N + 2\gamma_{N,t}\tilde{C}_{N,t}X_{N,t}^T\}\Delta b_{N,t-1} + P_b(t) \quad (2.51)$$

où les termes de perturbation $P_\beta(t)$ et $P_b(t)$ peuvent être facilement retrouvés à partir du système (2.49).

2.5.2 Etude de la stabilité numérique en régime asymptotique

A ce niveau, le choix du paramètre de contrôle μ_s revient à étudier le gain scalaire de la relation (2.50), en supposant que le terme de perturbation $P_\beta(t)$ reste borné, c'est à dire que l'on cherche des conditions nécessaires de stabilité du système (2.50). Par la suite, nous proposons un choix fixe pour le paramètre μ_s . Ce choix a été largement testé par simulation, pour différents signaux d'entrée.

Pour ce choix ($\mu_s = 0.75$), les expressions récurrentes (2.50) et (2.51) s'écrivent :

$$\Delta\beta_{N,t} = \frac{\lambda}{4} \{5 - (\theta_{N,t}^{-1})^2\} \beta_{N,t-1} + P_\beta(t) = G_\beta(t) \Delta\beta_{N,t-1} + P_\beta(t) \quad (2.52)$$

$$\Delta b_{N,t} = \theta_{N,t}^{-1} \left\{ I_N - 2R_{N,t}^{-1} X_{N,t} X_{N,t}^T \right\} \Delta b_{N,t-1} + P_b(t) = G_b(t) \Delta b_{N,t-1} + P_b(t) \quad (2.53)$$

Notons que la variable $\theta_{N,t}$, égale aussi à $\frac{\lambda\beta_{N,t-1}}{\beta_{N,t}}$ est une quantité lentement variable dont la valeur asymptotique est égale en moyenne à λ (voir expression (1.44) et (1.46) du chapitre 1). Le gain du modèle du premier terme dans l'équation (2.52), que nous noterons $G_\beta(t)$ est une quantité lentement variable et asymptotiquement stationnaire car la variable $\theta_{N,t}^{-1}$ l'est. Cette dernière admet pour valeur asymptotique λ (pour un λ proche de 1).

D'où, le gain $G_\beta(\infty)$ en régime asymptotique :

$$G_\beta(\infty) \approx \frac{1}{4} \left(5\lambda - \frac{1}{\lambda} \right) \quad (2.54)$$

Le gain matriciel, noté $G_b(t)$ du système (2.53) dépend du signal d'entrée et de ses propriétés statistiques. La matrice $R_{N,t}$ et la variable $\theta_{N,t}$ sont des quantités lentement variables par rapport au signal d'entrée x_t .

D'après les relations vus au premier chapitre :

$$R_{N,t}^{-1} X_{N,t} X_{N,t}^T = R_{N,t}^{-1} (R_{N,t} - \lambda R_{N,t-1}) = I_N - \lambda R_{N,t}^{-1} R_{N,t-1}$$

Le gain $G_b(t)$ moyen en régime asymptotique s'écrit :

$$E\{G_b(t)\} \approx \left(2 - \frac{1}{\lambda} \right) I_N \quad (2.55)$$

Notons que l'analyse du comportement moyen du système (2.49) ne nécessite pas l'approximation (2.49ii).

L'analyse utilisant le comportement moyen du système (2.49) ne permet pas de trouver la véritable condition de stabilité, car les erreurs numériques peuvent être de moyenne nulle mais de variance non bornée. Pour cette raison, nous calculons en plus la variance des systèmes des erreurs numériques dans le prédicteur retour (2.53).

Calculons la variance de $\Delta b_{N,t}$. Pour cela, on utilise l'approche statistique. Nous supposons alors que les éléments du vecteurs perturbateur $P_b(t)$ sont des séquences de bruit blanc centré et de variance connue. En plus, on suppose que les composantes du vecteur $\Delta b_{N,t}$ sont indépendantes entre elles et indépendantes des différentes variables théoriques de l'algorithme.

En effectuant le produit de $\Delta b_{N,t}$ par son transposé et en prenant la moyenne statistique, il vient :

$$\begin{aligned}
 E(\Delta b_{N,t} \Delta b_{N,t}^T) &= E\left(\frac{1}{\theta_{N,t}^2}\right) E(\Delta b_{N,t-1} \Delta b_{N,t-1}^T) - 4E\left(\frac{R_{N,t}^{-1} X_{N,t} X_{N,t}^T}{\theta_{N,t}^2}\right) E(\Delta b_{N,t-1} \Delta b_{N,t-1}^T) \\
 &\quad + 4E\left(\frac{1}{\theta_{N,t}^2} R_{N,t}^{-1} X_{N,t} X_{N,t}^T \Delta b_{N,t-1} \Delta b_{N,t-1}^T X_{N,t} X_{N,t}^T R_{N,t}^{-1}\right) + E(P_b(t) P_b^T(t))
 \end{aligned} \tag{2.56}$$

Le premier terme de cette somme est proportionnel à $\frac{1}{\lambda^2}$.

Pour le second, on substitue à $R_{N,t}$ et $\theta_{N,t}$ (quantités lentement variables par rapport au signal d'entrée x_t leurs valeurs asymptotiques).

Il vient :

$$E\left(\frac{R_{N,t}^{-1} X_{N,t} X_{N,t}^T}{\theta_{N,t}^2}\right) \approx \frac{1-\lambda}{\lambda^2} I_N \tag{2.57}$$

En remplaçant les quantités lentement variables par leur moyenne,

$$E(R_{N,t}^{-1}) \approx (1-\lambda) R_{N,XX}^{-1}$$

avec :

$$R_{N,XX} = E(X_{N,t} X_{N,t}^T).$$

Le troisième terme de l'expression (2.54) devient :

$$\frac{(1-\lambda)^2}{\lambda^2} R_{N,XX}^{-1} E(X_{N,t} X_{N,t}^T \Delta b_{N,t-1} \Delta b_{N,t-1}^T X_{N,t} X_{N,t}^T) R_{N,XX}^{-1} \quad (2.58)$$

L'expression $E(X_{N,t} X_{N,t}^T \Delta b_{N,t-1} \Delta b_{N,t-1}^T X_{N,t} X_{N,t}^T)$ est une matrice carrée N dont les éléments s'écrivent :

$$a_{i,j} = \sum_{k=1}^N \sum_{l=1}^N E(\Delta b_{N,t-1}^k \Delta b_{N,t-1}^l x_{t-k+1} x_{t-l+1} x_{t-i+1} x_{t-j+1})$$

En utilisant l'hypothèse d'indépendance entre les composantes de $\Delta b_{N,t}$ et en supposant en plus que le signal d'entrée est une séquence de variables aléatoires gaussiennes décorréées, l'expression ci-dessus devient :

$$a_{i,j} = \sigma_{\Delta b}^2 (t-1) \sum_{k=1}^N \left\{ E(x_{t-k+1}^2) E(x_{t-i+1} x_{t-j+1}) + 2E(x_{t-k+1} x_{t-i+1}) E(x_{t-k+1} x_{t-j+1}) \right\}$$

où

$$I_N \sigma_{\Delta b}^2 (t) = E(\Delta b_{N,t-1} \Delta b_{N,t-1}^T)$$

d'où finalement :

$$a_{i,j} = \begin{cases} 0 & \text{si } i \neq j \\ (N+2) \sigma_x^4 \sigma_{\Delta b}^2 (t-1) & \text{si } i = j \end{cases} \quad (2.59)$$

A l'aide de (2.57), (2.58) et (2.59), on obtient l'équation de propagation de la variance du bruit dans le calcul du prédicteur retour :

$$\sigma_{\Delta b}^2 (t) = \frac{1}{\lambda^2} \left[1 - 4(1-\lambda) + 4(N+2)(1-\lambda)^2 \right] \sigma_{\Delta b}^2 (t-1) + \sigma_p^2 \quad (2.60)$$

où

$$I_N \sigma_p^2 = E(P_b(t) P_b^T(t)).$$

Chapitre 2 : Analyse de la propagation des erreurs numériques dans les algorithmes MCR

L'étude de la stabilité de (2.60) (pôle à l'intérieur du cercle unité) revient à trouver les racines et étudier le signe de deux polynômes de degré 2 en λ (on suppose que la variance σ_p^2 reste bornée).

On trouve que la condition nécessaire de bornitude de (2.60);

$$|G| < 1.$$

avec

$$G = \frac{1}{\lambda^2} \left[1 - 4(1 - \lambda) + 4(N + 2)(1 - \lambda)^2 \right]$$

La condition de stabilité du système (2.51) est d'après [17]:

$$1 > \lambda > \frac{4N + 5}{4N + 7} = 1 - \frac{1}{2N + 3.5} \quad (2.61)$$

Rappelons que cette condition correspond au cas d'un signal d'entrée gaussien décorréolé.

Le facteur d'oubli exponentiel λ se calcul en général par la relation suivante :

$$\lambda > 1 - \frac{1}{pN} \quad (2.62)$$

où le paramètre p est un réel strictement supérieur à 2 pour assurer la stabilité numérique de l'algorithme.

La matrice $F_{33}(t)$, en régime asymptotique ($\lambda < 1$), devient alors :

$$F_{33}(t) = \begin{bmatrix} (2 - \frac{1}{\lambda})I_N & V_i \\ -2\bar{r}_{N,i}\gamma_{N,i}(1 + \frac{1}{\lambda})X_{N,i}^T & \frac{1}{4}(5\lambda - \frac{1}{\lambda}) \end{bmatrix}$$

avec

V_i : Vecteur donné par (2.49ii).

Où on remarque que les valeurs propres de la sous matrice $F_{33}(t)$ sont inférieurs à 1.

2.6 Résultats de simulation

Nous ne nous intéressons ici qu'au bon fonctionnement de la partie prédiction aller/retour de l'algorithme. On évalue en particulier le bon comportement de la variable indicateur de divergence $\xi_{N,t}$ et la variable de vraisemblance $\gamma_{N,t}$.

Les signaux utilisés sont, soit un bruit blanc gaussien, soit un bruit stationnaire à spectre moyen de la parole (bruit USASI). Le premier sert surtout à vérifier les conditions de la stabilité numérique obtenues. Le bruit USASI est plus intéressant à cause de son spectre, il est souvent utilisé comme signal de test dans les applications d'annulation d'écho acoustique pour évaluer la vitesse de convergence des algorithmes adaptatifs et leur capacité de poursuite des non-stationnarités intervenant dans le chemin d'écho à identifier. Pour réaliser l'opération de filtrage, les signaux cités plus haut sont convolués avec une réponse impulsionnelle de $N=10$ points, $N=32$ points et $N=256$ points.

Les signaux sont échantillonnés à la fréquence de **16 kHz**. Le facteur d'oubli λ est choisi très proche de la borne d'instabilité donnée par la condition (2.62). Nous avons aussi vérifié par simulation que le non respect de la condition (2.62) fait diverger les algorithmes MCR (voir figure 2.1).

Notons que les simulations que nous avons effectuées avec comme signal d'entrée un bruit USASI (signal corrélé) indiquent que le facteur d'oubli doit être choisi supérieur à la condition (2.62) pour assurer la stabilité numérique des algorithmes MCR.

On prendra les deux méthodes de stabilisations [MS0] et [MS1] vues aux paragraphes précédents (avec $\mu^b = \mu^\beta = \mu^\gamma = 1$), ainsi que la nouvelle version combinée [MSC] qui est une combinaison entre [MS0] et [MS1] pour faire une étude comparative.

Pour cette étude comparative, on calculera les rapports signal à bruit des variables $\gamma_{N,t}$ et $\xi_{N,t}$ donnés par $RSB(\gamma)$ et $RSB(\xi)$ exprimés en dB, donnés par les expressions suivantes :

$$RSB(\gamma) = 10 \log_{10} \left(\frac{\sigma_\gamma^2}{\sigma_{\Delta\gamma}^2} \right)$$

$$RSB(\xi) = 10 \log_{10} \left(\frac{\sigma_\gamma^2}{\sigma_\xi^2} \right)$$

Chapitre 2 : Analyse de la propagation des erreurs numériques dans les algorithmes MCR

avec

$$\sigma_\gamma^2 = \frac{1}{L} \sum_{i=1}^L \gamma_{N,i}^2 ; \quad \sigma_{\Delta\gamma}^2 = \frac{1}{L} \sum_{i=1}^L \Delta\gamma_{N,i}^2 ;$$

$$\sigma_r^2 = \frac{1}{L} \sum_{i=1}^L \bar{r}_{N,i}^2 ; \quad \sigma_\xi^2 = \frac{1}{L} \sum_{i=1}^L \xi_{N,i}^2 ;$$

où $\log_{10}(\cdot)$ représente le logarithme à base 10 et L désigne un certain nombre d'échantillons (256 par exemple).

Les résultats de cette étude sont dressés sur les tableaux de (2.1) à (2.3). Les paramètres de l'algorithme sont utilisés comme suit :

- $\sigma_x^2 = 0.15$ pour un bruit blanc,
- $\sigma_x^2 = 0.35$ pour un bruit USASI.

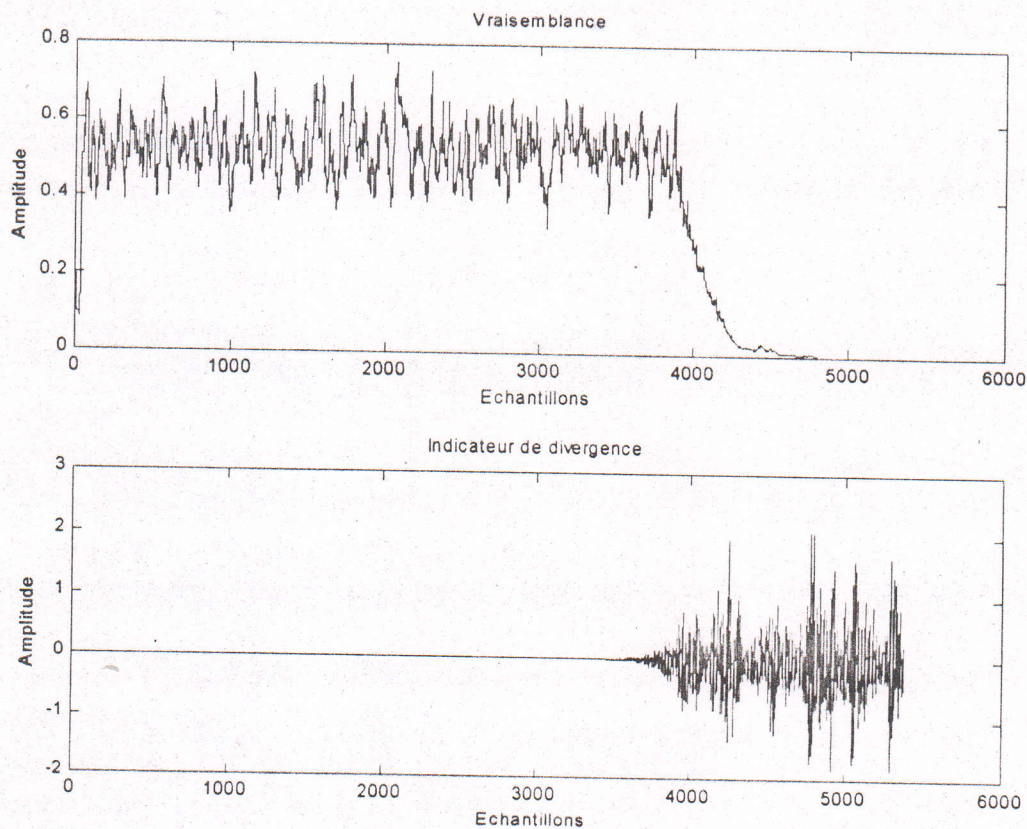


Figure 2.1 : Evolution temporelle de la variable de vraisemblance $\gamma_{N,t}$ et indicateur de divergence $\xi_{N,t}$.

Pour : $N=32$, $E_0=1$, $\lambda = 0.98$; ($\lambda < \lambda_{stable}=0.9852$) condition de stabilité non respectée;

x_t : bruit blanc, $\sigma_x^2 = 0.15$, $F_e = 16$ kHz.

x_i	$RSB(\gamma)$ dB		$RSB(\xi)$ dB	
	Bruit blanc	Bruit USASI	Bruit blanc	Bruit USASI
MS0	179.02	180.54	221.84	209.21
MS1	225.75	223.47	220.52	209.20
MSC	225.54	219.22	221.01	203.32

Tableau 2.1 : Tableau comparatif donnant les $RSB(\gamma)$ et $RSB(\xi)$ pour :
 $N=10, \lambda = 0.97, E_0 = 1.$

x_i	$RSB(\gamma)$ dB		$RSB(\xi)$ dB	
	Bruit blanc	Bruit USASI	Bruit blanc	Bruit USASI
MS0	192.43	194.16	210.58	207.91
MS1	212.55	213.10	209.57	206.67
MSC	212.92	213.35	210.32	208.05

Tableau 2.2 : Tableau comparatif donnant les $RSB(\gamma)$ et $RSB(\xi)$ pour :
 $N=32, \lambda = 0.99, E_0 = 1.$

x_i	$RSB(\gamma)$ dB		$RSB(\xi)$ dB	
	Bruit blanc	Bruit USASI	Bruit blanc	Bruit USASI
MS0	184.45	194.03	169.72	200.26
MS1	190.30	191.79	167.47	198.87
MSC	190.18	192.03	168.24	199.35

Tableau 2.3 : Tableau comparatif donnant les $RSB(\gamma)$ et $RSB(\xi)$ pour :
 $N=256, \lambda = 0.999, E_0 = 1.5.$

Chapitre 2 : Analyse de la propagation des erreurs numériques dans les algorithmes MCR

D'après les résultats de simulation dressés sur les tableaux de (2.1) à (2.3), on peut remarquer que les valeurs du $RSB(\gamma)$ relatives à la méthode [MS0], pour le cas de $N=10$ sont nettement inférieures aux valeurs du $RSB(\gamma)$ des autres méthodes ([MS1] et [MSC]) qui restent relativement égales avec comme signal d'entrée un bruit blanc, excepté pour un bruit USASI qui présente pour la valeur du $RSB(\gamma)$ de la méthode [MSC] une dégradation par rapport à la méthode [MS1]. On peut remarquer aussi pour le même cas $N=10$, que les valeurs du $RSB(\xi)$ relatives aux trois méthodes sont approximativement les mêmes, sauf pour la méthode [MSC], avec un bruit USASI comme signal d'entrée, qui donne un $RSB(\xi)$ nettement inférieur.

Pour le cas de $N=32$, les valeurs du $RSB(\gamma)$ et du $RSB(\xi)$ de la méthode [MSC] sont en moyenne les plus élevées par rapport aux autres méthodes.

Dans le cas où $N=256$, c'est la méthode [MS0] qui possède des valeurs du $RSB(\gamma)$ et du $RSB(\xi)$ plus élevées en moyenne.

Finalement, on peut constater que dans les conditions de stabilité, la méthode [MSC] est la mieux adaptée pour les valeurs des $RSB(\gamma)$ et du $RSB(\xi)$ qui restent relativement satisfaisantes.

Nous présentons maintenant ces résultats sous forme de courbes pour montrer le bon fonctionnement de l'algorithme stabilisé par la méthode [MSC].

Les figures suivantes représentent respectivement les évolutions temporelles de la variable de vraisemblance $\gamma_{N,t}$ et de la variable indicateur de divergence $\xi_{N,t}$.

Les figures de (2.2) à (2.7) montrent que la convergence des algorithmes dépend de l'ordre N . On remarque alors que, pour un ordre faible, la convergence est rapide par rapport à un ordre plus élevé.

Notons aussi que la dégradation de la variable indicateur de divergence, pour un ordre élevé est nettement supérieure à celle d'un ordre moins élevé ou faible.

Dans la mise en œuvre d'un algorithme MCR, une attention particulière doit être accordée à l'initialisation, en prenant en compte les conditions des moindres carrés sur la constante d'initialisation et sur le choix du facteur d'oubli de l'algorithme.

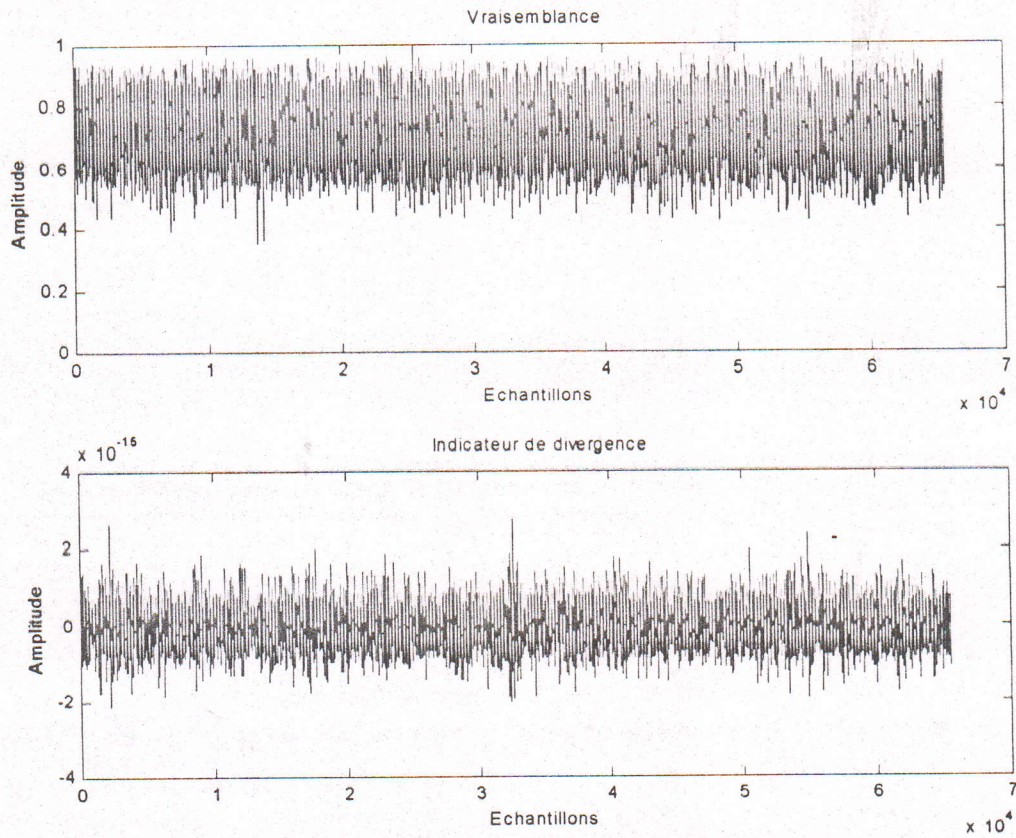


Figure 2.2: $N=10$, $\lambda = 0.97$, $E_0=1$; x_t :bruit blanc.

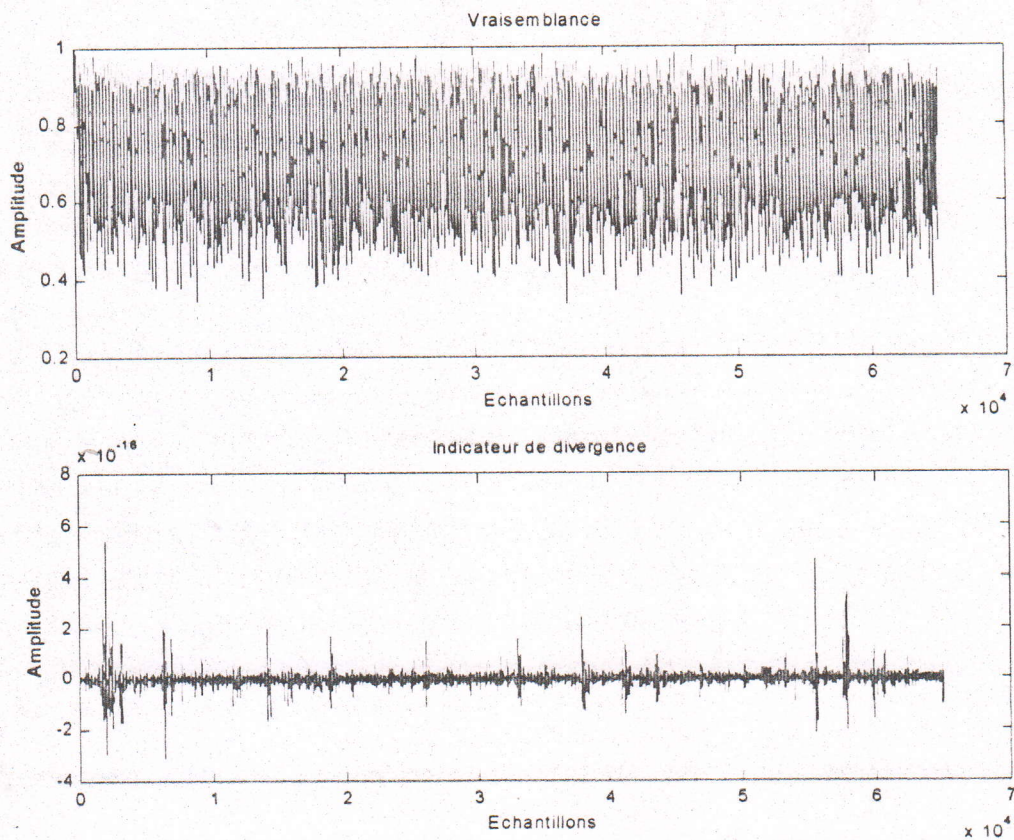


Figure 2.3: $N=10$, $\lambda = 0.97$, $E_0=1$; x_t :bruit USASI.

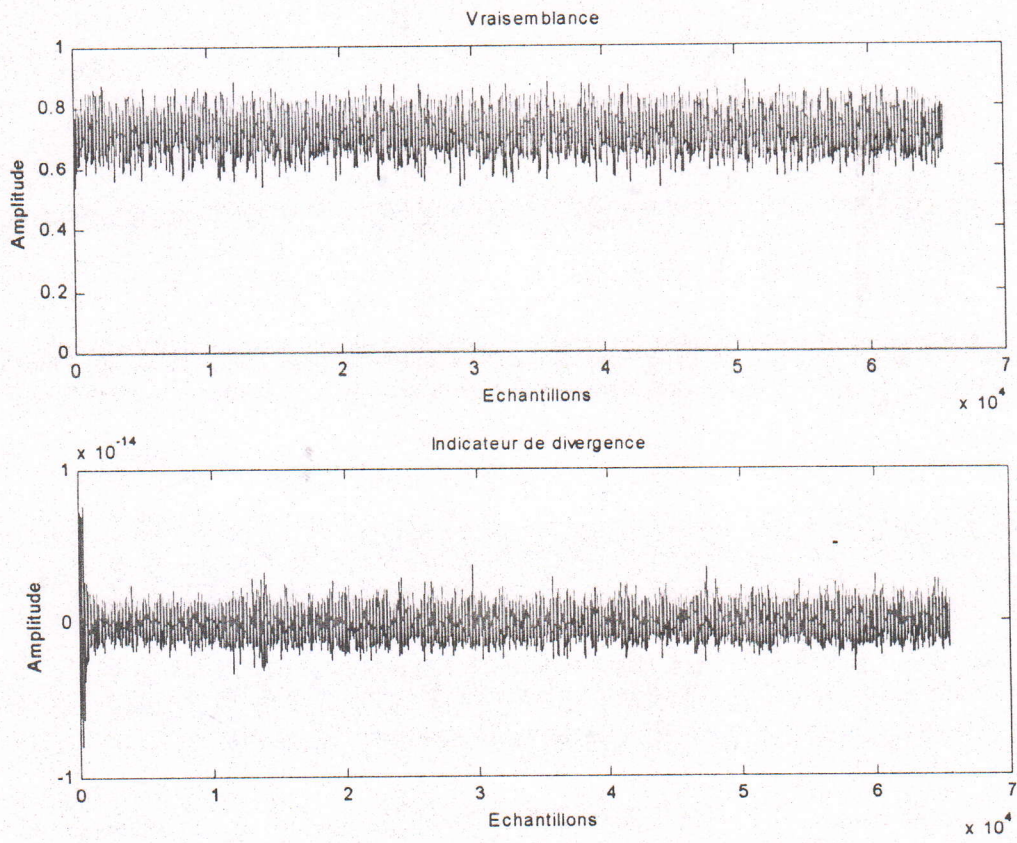


Figure 2.4: $N=32$, $\lambda = 0.99$, $E_0 = 1$; x_t :bruit blanc.

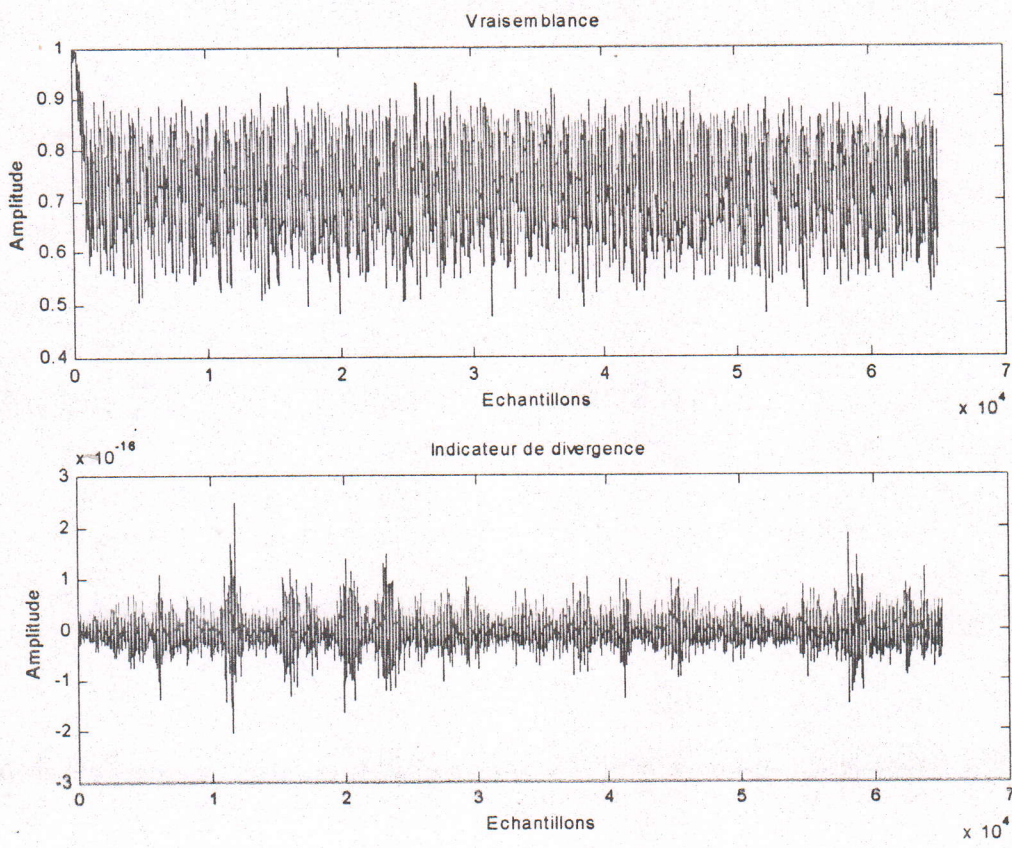


Figure 2.5: $N=32$, $\lambda = 0.99$, $E_0 = 1$; x_t :bruit USASI.

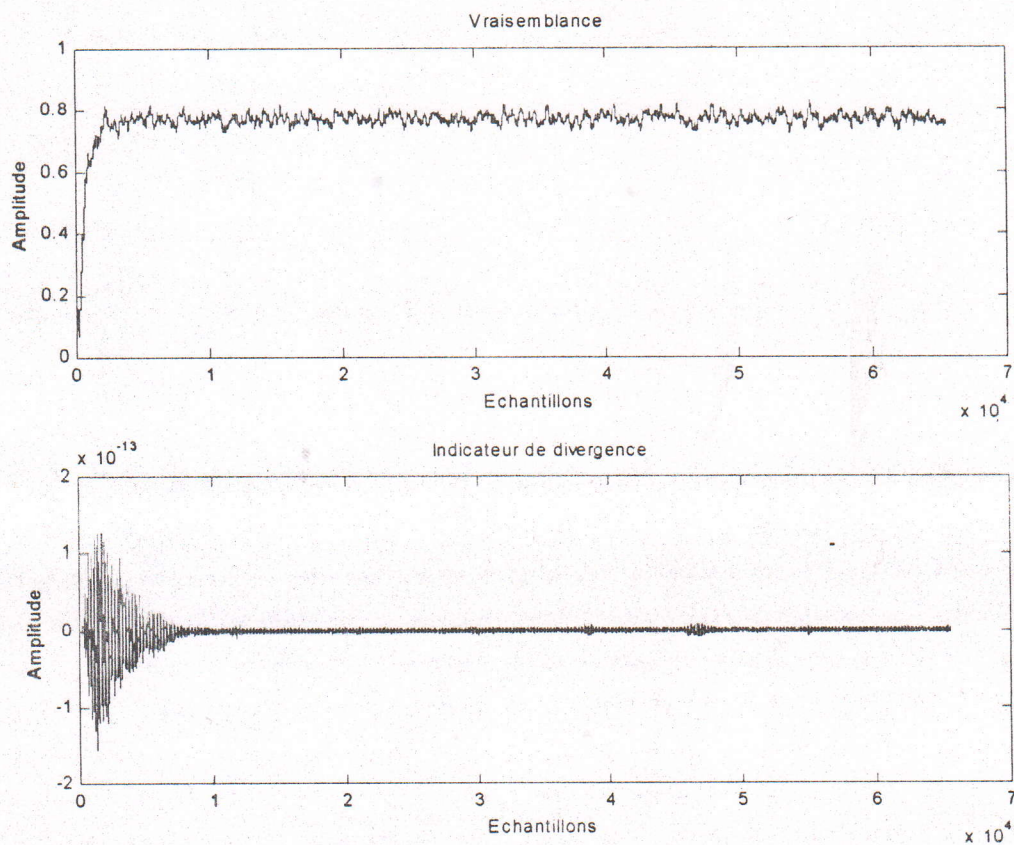


Figure 2.6: $N=256$, $\lambda = 0.999$, $E_0=1.5$; x_i :bruit blanc.

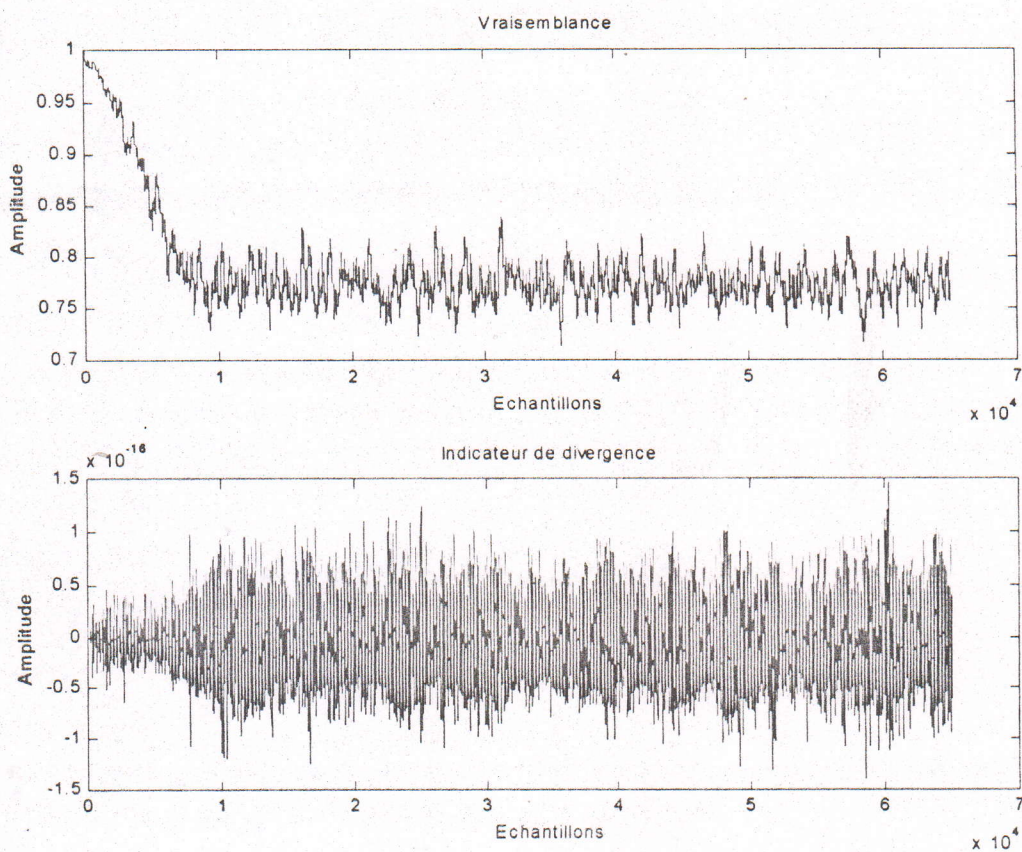


Figure 2.7: $N=256$, $\lambda = 0.999$, $E_0=1.5$; x_i :bruit USASI.

2.7 Conclusion

Il est bien connu que la réduction en complexité de calcul des algorithmes des moindres carrés transversaux rapides est payée par une dégradation importante de leur propriétés numériques. Les erreurs numériques se propagent d'une manière non bornée au cours du temps, pour un facteur d'oubli exponentiel λ inférieur à 1, ce qui conduit à une solution instable à plus ou moins long terme.

Ce chapitre soulève le problème de la propagation des erreurs dans les algorithmes des moindres carrés transversaux rapides MCR. Une méthode de stabilisation des algorithmes MCR existante dans la littérature est présentée avec une analyse de la propagation des erreurs numériques de cette dernière. D'après cette analyse, il est clair que l'étude de la stabilité ou de l'instabilité de la matrice de propagation des erreurs numériques dans toute sa généralité est une tâche difficile, pour ne pas dire impossible, à cause de sa complexité. Cependant, la méthode de stabilisation décrite antérieurement a pour effet de modifier la sous matrice $F_{33}(t)$. Dans le chapitre 3, l'étude sera basée sur la sous matrice $F_{22}(t)$ afin d'essayer de déterminer l'origine de l'instabilité numérique.

Chapitre 3

**ETUDE DE LA STABILITE DES ALGORITHMES MCR
AVEC DES SIGNAUX PARFAITEMENT
PREDICTIBLES**

3.1 Introduction

Le défaut le plus important des algorithmes des moindres carrés transversaux rapides MCR est la non compensation des erreurs numériques. Ces erreurs s'accumulent et se propagent jusqu'à divergence de l'algorithme. Le cas particulier des signaux parfaitement prédictibles pose aussi ce problème d'accumulation. Dans ce chapitre, l'instabilité des algorithmes MCR avec de tels signaux est étudiée pour permettre de localiser les variables responsables du mauvais fonctionnement de ces algorithmes sous quelques hypothèses. Cette étude est fixée entièrement autour de la sous matrice $F_{22}(t)$ (vue au deuxième chapitre) qui contient une matrice compagne $M^c(t)$ dont les valeurs propres sont les pôles du prédicteur retour. Dans un premier temps, des tests sur des modèles auto-régressifs AR vont être effectués pour essayer de déterminer l'origine de l'instabilité souvent rencontrée. Pour cela quelques définitions sur la modélisation des signaux seront présentées dans ce chapitre. Les sinusoides prennent aussi part à ces tests expérimentaux.

3.2 Modélisation des signaux

Le concept de la modélisation a été particulièrement développé et appliqué avec des filtres numériques ayant une transmittance en z de la forme [20]:

$$T(z) = \frac{\sum_{i=1}^M b_i z^{-i}}{1 + \sum_{i=1}^N a_i z^{-i}} = \frac{B(z)}{A(z)} = \frac{X(z)}{U(z)} \quad (3.1)$$

Le modèle ARMA (Auto-Régressif à Moyenne Ajustée) d'ordre (N, M) peut être interprété comme un filtre de fonction de transfert $T(z)$ excité par une entrée $U(z)$ et délivrant à sa sortie un signal $X(z)$.

Les polynômes $B(z)$ et $A(z)$ sont caractérisés par la position de leurs zéros dans le plan des z . Si les b_i sont nuls, sauf b_0 , le modèle de production $T(z)$ est appelé AR (Auto-Régressif) ou modèle tout pôle.

Si les a_i sont nuls, le modèle de production $T(z)$ est appelé MA (Moyenne Ajustée) ou modèle tout zéro.

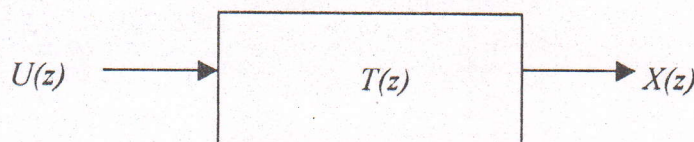


Figure 3.1: Modèle de production

3.3 Etude de l'instabilité de l'algorithme avec des signaux parfaitement prédictibles

Par définition un signal parfaitement prédictible donne une erreur de prédiction nulle. Donc, on suppose par la suite que le signal d'entrée x_t est parfaitement modélisable par un modèle AR (Auto-Régressif) d'ordre N (par exemple, un son pur (signal sinusoïdal) est parfaitement modélisable par un modèle AR d'ordre 2). Dans ce cas particulier, il est possible de simplifier considérablement la matrice $F(t)$ (voir chapitre 2). Il suffit de négliger les termes pondérés par les erreurs de prédiction aller et retour.

Mais, supposons pour l'instant que les variances sont faibles mais pas nulles. A partir des relations résumées au paragraphe 2.4.2.1b du deuxième chapitre, la matrice de propagation des erreurs peut se mettre sous la forme de la matrice triangulaire inférieure par blocs suivante :

$$F'(t) = \begin{bmatrix} F_{11}(t) & 0 & 0 \\ F_{31}(t) & F_{33}(t) & 0 \\ F_{21}(t) & F_{23}(t) & F_{22}(t) \end{bmatrix} \quad (3.2)$$

pour le réarrangement du vecteur d'état suivant :

$$Z'_t = \begin{bmatrix} \Delta A_t \\ \Delta B_t \\ \Delta C_t \end{bmatrix}$$

Les sous matrices de $F'(t)$ restent inchangées (voir paragraphe 2.4.2.1 du chapitre 2).

Les sous matrices contenant une division par une variance des erreurs de prédiction n'ont pas été simplifiées. La matrice $F_{22}(t)$ contient une sous matrice compagne $M^c(t)$ dont les valeurs propres sont les pôles du prédicteur retour et un terme, lentement variable, égal en moyenne à 1 en régime asymptotique $((\frac{\rho_\alpha(t)}{\theta_{N,t}})^2 \approx 1$ pour λ proche de 1). Dans le cas de sinusoïdes non-bruitées, les pôles du prédicteur sont sur le cercle unité [19] et la matrice $F_{22}(t)$ aura toutes ses valeurs propres égales à 1. Par conséquent, le modèle de propagation des variables de Kalman est du type marche aléatoire. Mais, remarquons aussi la division par la variance $\alpha_{N,t}$ dans la matrice $F_{21}(t)$. La convergence vers 0 de cette variable peut faire exploser le modèle de propagation des erreurs dans les variables de Kalman.

Il est clair que le bon fonctionnement de l'algorithme, dans ce cas particulier, engendre des problèmes numériques à cause des pôles sur le cercle unité et de la faible variance. Notons que ce problème de mauvais conditionnement des algorithmes MCR avec des signaux parfaitement prédictibles ne doit pas être généralisé, car dans les signaux réels, il existe toujours une composante non prédictible. Les variances des erreurs de prédiction sont, dans ce cas, bornées inférieurement par l'énergie de la composante non prédictible.

3.4 Résultats de simulation

Les signaux utilisés pour cette simulation sont des signaux AR (auto-régressifs) et des sinusoides pures ou pseudo-périodiques.

Alors, pour un ordre N et un facteur d'oubli λ choisi bien sûr dans la condition de stabilité numérique, donnée par la relation (2.62), nous allons observer l'évolution temporelle des variables suivantes :

- Variable de vraisemblance $\gamma_{N,t}$;
- Variable indicateur de divergence $\xi_{N,t}$;
- Les variances des erreurs de prédiction aller/retour $\alpha_{N,t} / \beta_{N,t}$;
- Les pôles des prédicteurs aller/retour $a_{N,t} / b_{N,t}$;

Et on observera aussi la convergence de ces variables, pour un ordre du prédicteur donné :

- Egal à l'ordre du modèle ;
- Supérieur à l'ordre du modèle (ordre surestimé) ;
- Inférieur à l'ordre du modèle (ordre sous-estimé).

Le but de cette simulation est d'analyser la position des zéros des prédicteurs dans le plan des z (cercle unité). Ainsi on étudiera les valeurs propres de la matrice $F_{22}(t)$ (qui doivent être inférieures à 1) pour vérifier la stabilité numérique.

• Cas d'un signal AR (Auto-régressif)

On appelle signal AR d'ordre N , un signal x_t engendré par la récurrence [20] :

$$x_t = u_t - \sum_{i=1}^N a_i x_{t-i}$$

dans laquelle u_t représente l'excitation (dans ce cas l'excitation est un bruit blanc stationnaire) ; c'est donc la réponse d'un système AR à un bruit blanc stationnaire.

Chapitre 3 : Etude de la stabilité des algorithmes MCR avec des signaux parfaitement prédictibles

Pour ce cas, on va choisir différentes valeurs des pôles du modèle synthétisé :

- Pôle proche du cercle unité;
- Pôle loin du cercle unité.

Les modèles AR testés sont d'ordres 5, 8, 12 et 20 dont les pôles sont proches ou loin du cercle unité du plan z , ils sont décrits respectivement comme suit :

$$\text{AR5 loin du cercle unité} : 0.75 e^{\pm j0.05\pi}, 0.61 e^{\pm j0.44\pi}, -0.45$$

$$\text{AR5 proche du cercle unité} : 0.98 e^{\pm j0.02\pi}, 0.61 e^{\pm j0.44\pi}, -0.45$$

$$\text{AR8 loin du cercle unité} : 0.5 e^{\pm j0.02\pi}, 0.25 e^{\pm j0.21\pi}, 0.6 e^{\pm j0.44\pi}, 0.75 e^{\pm j0.45\pi}$$

$$\text{AR8 proche du cercle unité} : 0.98 e^{\pm j0.02\pi}, 0.96 e^{\pm j0.21\pi}, 0.7 e^{\pm j0.44\pi}, 0.6 e^{\pm j0.45\pi}$$

$$\text{AR12} : 0.96 e^{\pm j0.02\pi}, 0.78 e^{\pm j0.45\pi}, 0.51 e^{\pm j0.4\pi}, 0.65 e^{\pm j0.2\pi}, 0.25 e^{\pm j0.5\pi}, -0.35, 0.35$$

$$\text{AR20} : 0.9 e^{\pm j0.02\pi}, 0.8 e^{\pm j0.44\pi}, 0.75 e^{\pm j0.25\pi}, 0.6 e^{\pm j0.21\pi}, 0.6 e^{\pm j0.45\pi}, 0.5 e^{\pm j0.25\pi}, 0.4 e^{\pm j0.05\pi}, \\ 0.3 e^{\pm j0.35\pi}, 0.25 e^{\pm j0.40\pi}, 0.45 e^{\pm j0.25\pi},$$

Les résultats obtenus sont sous forme de tableaux, pour différents ordre du prédicteur de chaque modèle proposé. Pour cette étude on calculera les moyennes de chacune des variables $\gamma_{N,t}$, $\xi_{N,t}$, $\alpha_{N,t}$ et $\beta_{N,t}$ données respectivement par γ_{moy} , ξ_{moy} , α_{moy} et β_{moy} .

Le facteur d'oubli λ est choisi très proche de la borne d'instabilité de l'algorithme pour ces résultats de simulations. (ESN : représente l'énergie du signal normalisée).

D'après les résultats de simulation dressés sur les tableaux (de 3.1 à 3.6), on peut constater pour chaque paramètre ou variable de l'algorithme ce qui suit :

Les résultats révèlent que pour un modèle synthétisé d'ordre N donné, qui possède des pôles loin du cercle unité, le choix d'un facteur d'oubli qui stabilise l'algorithme satisfait la condition (2.62) à une limite trop près, tandis que pour un autre modèle possédant le même ordre mais des pôles proches du cercle unité, la stabilité n'est assurée que lorsque on choisira un facteur d'oubli λ extrêmement supérieur à la condition.

Notons surtout que les variances des erreurs de prédiction aller/retour peuvent devenir très faibles, pour une augmentation de l'énergie du signal d'entrée x_t . En ce qui concerne la variable de vraisemblance $\gamma_{N,t}$; elle admet comme valeur asymptotique λ^N . Elle peut donc être très faible pour N grand et λ faible.

Chapitre 3 : Etude de la stabilité des algorithmes MCR avec des signaux parfaitement prédictibles

Signal	ESN	Ordre du prédicteur	N	λ	γ_{moy}	ξ_{moy} ($\times 10^{-13}$)	α_{moy} ($\times 10^{-01}$)	β_{moy} ($\times 10^{-01}$)
AR5 (loin du cercle unité)	0.38376	Réel	5	0.93	0.70859	7.27824	7.51869	7.53903
		Ordre surestimé	7	0.95	0.70769	-3.3065	10.4900	10.5082
		Ordre sous-estimé	4	0.925	0.74476	9.24562	7.19541	7.21333

Tableaux 3.1 : Moyenne des variables pour différents ordre du prédicteur ayant comme signal d'entrée AR5 loin du cercle unité.

Signal	ESN	Ordre du prédicteur	N	λ	γ_{moy}	ξ_{moy} ($\times 10^{-13}$)	α_{moy} ($\times 10^{-02}$)	β_{moy} ($\times 10^{-02}$)
AR5 (proche du cercle unité)	0.497455	Réel	5	0.982	0.91453	-3.9045	2.60959	2.61043
		Ordre surestimé	7	0.985	0.90103	-7.0764	3.09663	3.09943
		Ordre sous-estimé	4	0.98	0.93097	-1.6525	2.67572	2.67539

Tableaux 3.2 : Moyenne des variables pour différents ordre du prédicteur ayant comme signal d'entrée AR5 proche du cercle unité.

Signal	ESN	Ordre du prédicteur	N	λ	γ_{moy}	ξ_{moy} ($\times 10^{-14}$)	α_{moy}	β_{moy}
AR8 (loin du cercle unité)	0.3478079	Réel	8	0.96	0.72835	2.40011	1.16963	1.17069
		Ordre surestimé	10	0.965	0.70669	7.31828	1.31455	1.31571
		Ordre sous-estimé	6	0.95	0.74335	6.90759	0.94975	0.95084

Tableaux 3.3 : Moyenne des variables pour différents ordre du prédicteur ayant comme signal d'entrée AR8 loin du cercle unité.

Signal	ESN	Ordre du prédicteur	N	λ	γ_{moy}	ξ_{moy} ($\times 10^{-12}$)	α_{moy} ($\times 10^{-03}$)	β_{moy} ($\times 10^{-03}$)
AR8 (proche du cercle unité)	0.476577	Réel	8	0.985	0.88775	4.21354	5.74226	5.77299
		Ordre surestimé	10	0.985	0.86179	1.84166	5.44935	5.49424
		Ordre sous-estimé	6	0.98	0.89830	8.15699	4.99340	5.00283

Tableaux 3.4 : Moyenne des variables pour différents ordre du prédicteur ayant comme signal d'entrée AR8 proche du cercle unité.

Signal	ESN	Ordre du prédicteur	N	λ	γ_{moy}	ξ_{moy} ($\times 10^{-12}$)	α_{moy} ($\times 10^{-03}$)	β_{moy} ($\times 10^{-03}$)
AR12	0.619703	Réel	12	0.985	0.83658	9.89304	8.31465	8.40048
		Ordre surestimé	14	0.985	0.81207	2.58156	8.17033	8.28196
		Ordre sous-estimé	11	0.985	0.84910	-2.0668	8.39263	8.46523

Tableaux 3.5 : Moyenne des variables pour différents ordre du prédicteur ayant comme signal d'entrée AR12.

Signal	ESN	Ordre du prédicteur	N	λ	γ_{moy}	ξ_{moy} ($\times 10^{-11}$)	α_{moy} ($\times 10^{-03}$)	β_{moy} ($\times 10^{-03}$)
AR20	0.454049	Réel	20	0.985	0.74308	0.315781	2.70336	2.87179
		Ordre surestimé	22	0.986	0.73729	1.451616	2.91831	3.11001
		Ordre sous-estimé	18	0.985	0.76546	-1.69448	2.77328	2.77328

Tableaux 3.6 : Moyenne des variables pour différents ordre du prédicteur ayant comme signal d'entrée AR20.

Ces exemples montrent surtout le compromis entre stabilité et vitesse de convergence, qui doit être respecté dans le choix d'un facteur d'oubli λ en fonction de l'énergie du signal d'entrée.

Analysons maintenant de près le comportement de l'algorithme MCR pour le cas des modèles AR qui possèdent des pôles proches du cercle unité, et essayons de déterminer l'origine de l'instabilité lorsque la condition (2.62) est bien respectée.

Prenons l'exemple le plus simple parmi les modèles testés, celui où l'ordre $N=5$, et exploitons aussi les deux cas surestimé $N=7$ et sous-estimé $N=4$. Tous d'abord, nous allons analyser la position moyenne des pôles estimés d'un modèle AR du même ordre, mais dont les valeurs des pôles sont loin du cercle unité. Des courbes illustrant ce cas sont représentées sur les figures 3.2. D'après ces représentations les pôles estimés restent en moyenne à l'intérieur du cercle unité, pour les différents cas (réel, surestimé et sous-estimé) et pour les deux prédicteurs (prédicteur aller et prédicteur retour).

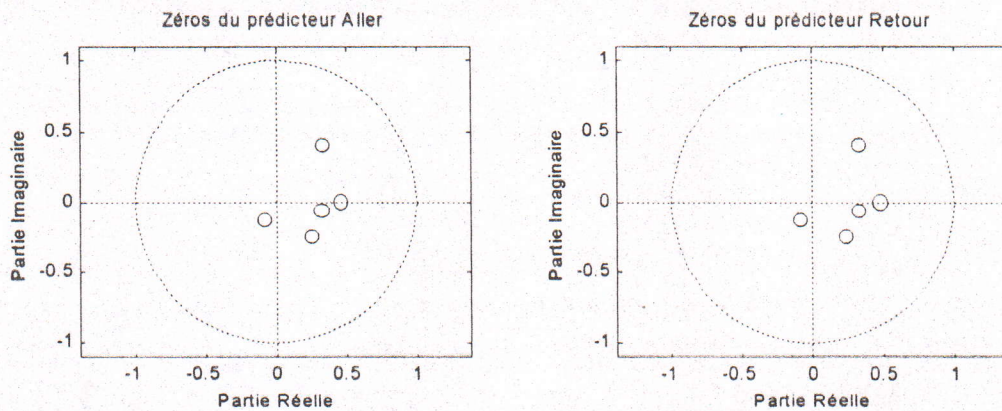


Figure 3.2a : Position moyenne des pôles estimés (cas réel)
pour : $N=5$, $\lambda = 0.93$.

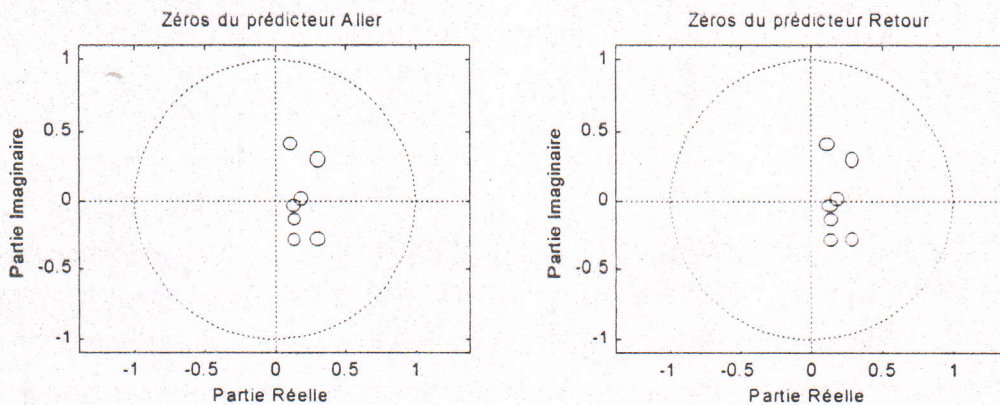


Figure 3.2b : Position moyenne des pôles estimés (cas surestimé)
pour : $N=7$, $\lambda = 0.95$.

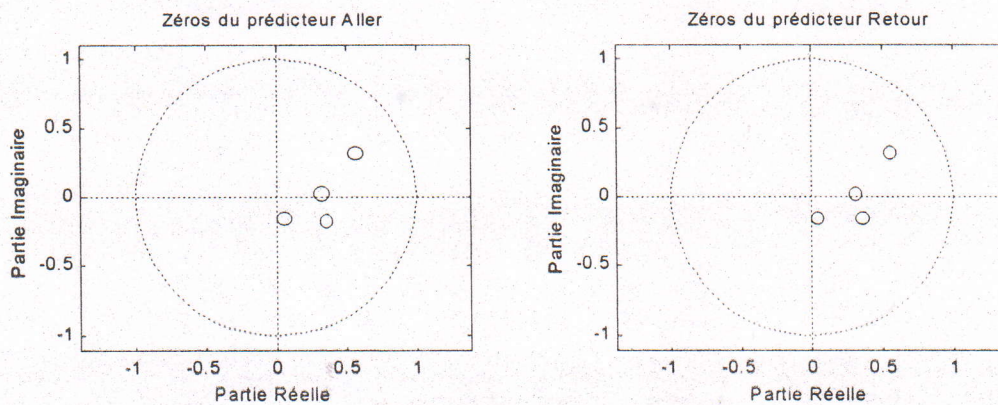


Figure 3.2c : *Position moyenne des pôles estimés (cas sous-estimé)*
pour : $N=4$, $\lambda=0.925$.

En ce qui concerne le cas des pôles proches du cercle unité, l'évolution temporelle du module de chaque pôle estimé est représentée séparément avec l'évolution temporelle de la variable de vraisemblance $\gamma_{N,t}$, et cela pour bien cerner le problème. Dans ce cas, on va surveiller le comportement de chaque pôle estimé avant la divergence de l'algorithme pour voir quelle variable est à l'origine de cette instabilité.

Pour la clarté des dessins, les figures 3.3 montrent les évolutions temporelles sur une période de 40 échantillons où il y a eu divergence. Sachant que d'après la relation 1.38 du premier chapitre, la variable de vraisemblance $\gamma_{N,t}$ doit être théoriquement comprise entre 0 et 1, pour un fonctionnement normal de l'algorithme. Dans ces conditions, la variable $\gamma_{N,t}$ sera le repère qui permet de détecter la divergence de l'algorithme.

Dans le cas réel ($N=5$), la variable $\gamma_{N,t}$ sort de l'intervalle théorique $[0, 1]$ pour atteindre la valeur approximative de 1.261 à l'échantillon 2521, ce qui se traduit par une divergence de l'algorithme dans notre cas. Avant cet instant de divergence tout les zéros du prédicteur aller restent pratiquement au dessous de la valeur unitaire, c'est à dire à l'intérieur du cercle unité.

Cependant, les zéros du prédicteur retour, à part le premier zéro, restent aussi au-dessous de la valeur unitaire. Alors que le premier zéro du prédicteur retour dépasse l'unité à l'échantillon 2519 pour une valeur approximative du module de ce zéro de 1.3578 ; et à l'échantillon 2520 pour une valeur du module de 1.4216.

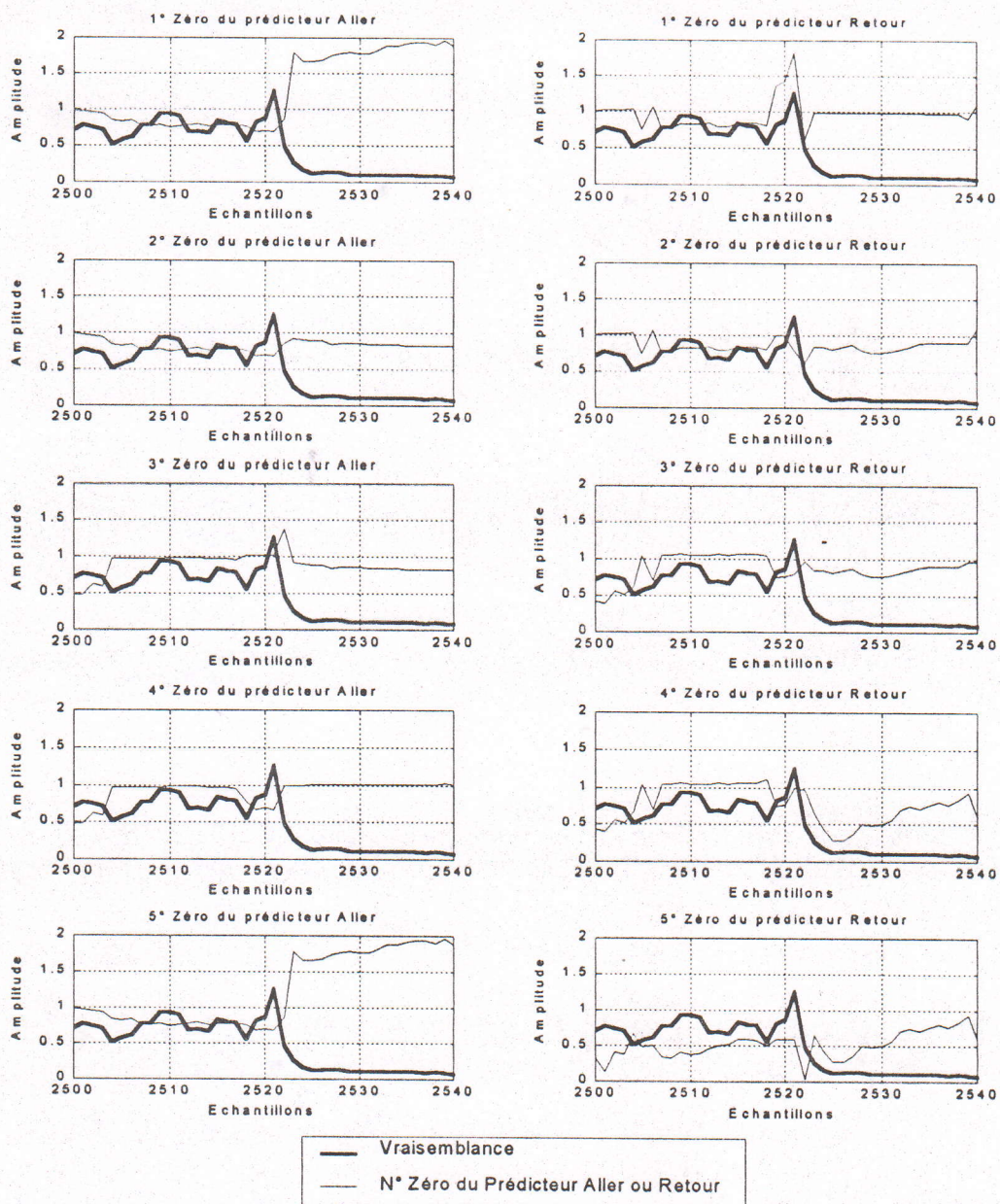


Figure 3.3a : Evolutions temporelles de la variable de vraisemblance $\gamma_{N,t}$ et du module du pôle estimé sur une période de 40 échantillons (cas réel); pour : $N=5$, $\lambda = 0.93$.

Les divergences de l'algorithme pour les deux autres cas (surestimé et sous-estimé) sont détectées à l'échantillon 3785 pour $N=7$, et pour une valeur approximative de $\gamma_{N,t}$ égale à 1.2873 ; et à l'échantillon 2069 pour $N=4$, pour une valeur de $\gamma_{N,t}$ égale à 1.1843.

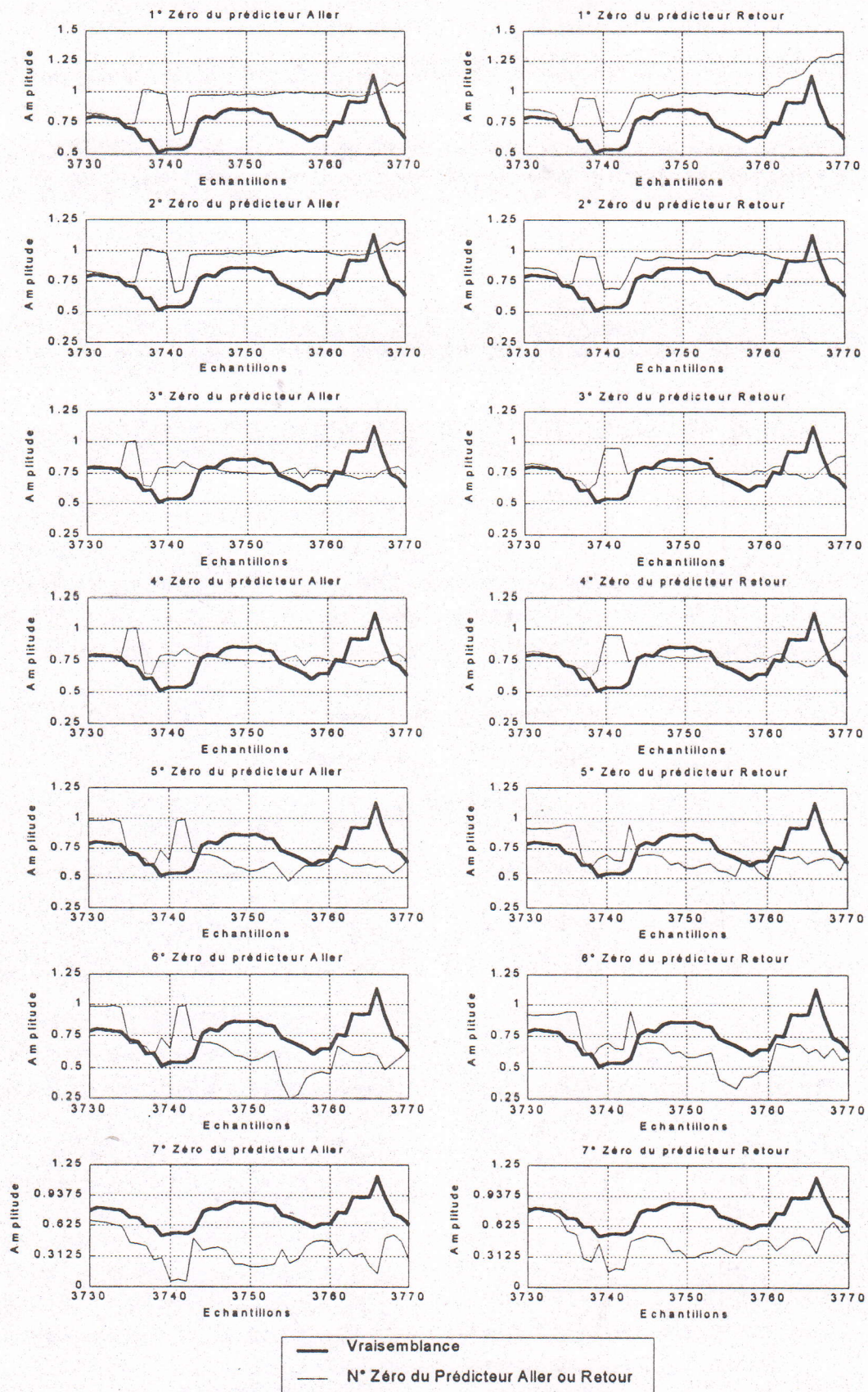


Figure 3.3b : Evolutions temporelles de la variable de vraisemblance $\gamma_{N,t}$ et du module du pôle estimé sur une période de 40 échantillons (cas surestimé); pour : $N=7$, $\lambda = 0.95$.

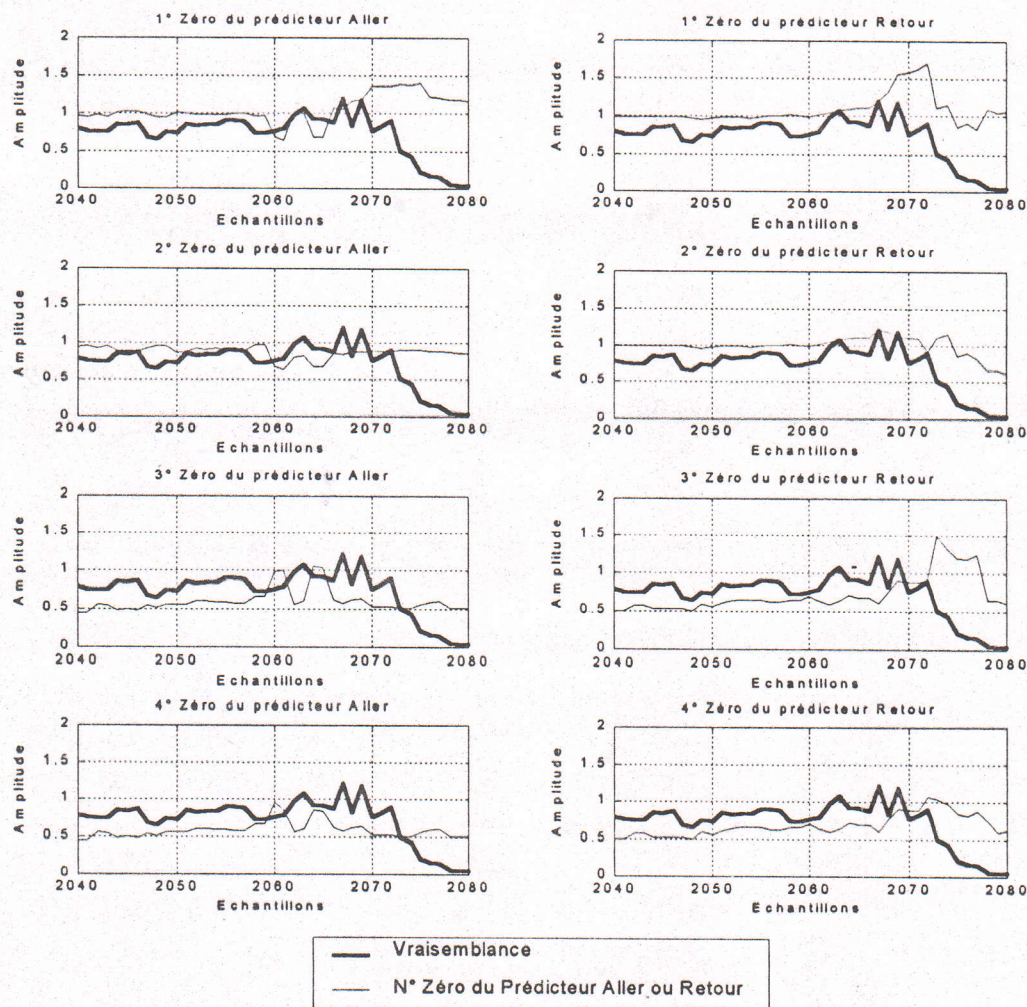


Figure 3.3c : Evolutions temporelles de la variable de vraisemblance $\gamma_{N,t}$ et du module du pôle estimé sur une période de 40 échantillons (cas sous-estimé) ; pour : $N=4$, $\lambda=0.925$.

Ainsi les mêmes remarques que le cas $N=5$ concernant les zéros des prédicteurs aller et retour sont constatées. Les valeurs numériques des modules des deux premiers zéros des prédicteurs retour dans ces deux cas sont les suivantes : 1.3334 à l'échantillon 3783 et 1.8151 à l'échantillon 3784 pour $N=7$, et 1.3236 à l'échantillon 2068 pour $N=4$.

En se reportant à ce résultat, on voit que chaque fois où un zéro du prédicteur retour dépasse largement un, une divergence de l'algorithme est constatée.

- **Cas d'un signal sinusoïdal pur**

Un signal sinusoïdal est parfaitement modélisable par un modèle AR d'ordre 2 [19]. Il est représenté par :

$$x_t = A \sin(2\pi f_0 t)$$

d'où : $f_0 = \frac{F_0}{F_e}$, sous la condition $\frac{F_0}{F_e} < \frac{1}{2}$

où F_e représente la fréquence d'échantillonnage, F_0 la fréquence de la sinusoïde et t est un entier.

Dans cette étude, nous avons testé l'effet de la fréquence du signal avec la fréquence d'échantillonnage. On choisira, pour la fréquence de la sinusoïde F_0 , des valeurs multiples et non multiples de la fréquence d'échantillonnage F_e . On étudie aussi le cas de la somme de deux et de trois sinusoïdes.

D'après les résultats de simulation présentés sur le tableau 3.7, on constate que l'algorithme est stable pour un ordre AR égal à l'ordre du modèle, et il est instable pour un ordre AR inférieur à l'ordre du modèle (ordre AR sous-estimé). Pour l'ordre AR supérieur à l'ordre du modèle (ordre AR surestimé), on remarque que l'algorithme est stable, si au moins l'une des fréquences de la sinusoïde n'est pas un multiple entier de la fréquence d'échantillonnage. Sinon l'algorithme diverge.

Dans ce qui suit, les cas de convergence et de divergence de l'algorithme avec un signal parfaitement prédictible sont traités en détail. Pour cela, nous présentons quelques résultats de simulation sous forme de courbes.

Les figures qui suivent montrent respectivement les évolutions temporelles de la variable de vraisemblance $\gamma_{N,t}$ et de la variable indicateur de divergence $\xi_{N,t}$. Ainsi que les évolutions des zéros et des coefficients des prédicteurs aller et retour.

Pour permettre une évaluation objective du comportement des zéros des prédicteurs, nous allons représenter aussi quelques évolutions temporelles de chaque zéro séparément pour chaque modèle. Dans ce cas de figure, l'évolution concerne le module des zéros.

x_t		ORDRE DU PREDICTEUR						
		2	3	4	5	6	7	8
1 sinusöide	$F_e = k F_0$	✓	×	×	×	×	×	×
	$F_e \neq k F_0$	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓
2 sinusöides	$F_e = k_1 F_{01}$ $F_e = k_2 F_{02}$	×	×	✓	×	×	×	×
	$F_e = k_1 F_{01}$ $F_e \neq k_2 F_{02}$	×	×	✓	✓	✓	✓	✓
	$F_e \neq k_1 F_{01}$ $F_e \neq k_2 F_{02}$	×	×	✓	✓	✓	✓	✓
3 sinusöides	$F_e = k_1 F_{01}$ $F_e = k_2 F_{02}$ $F_e = k_3 F_{03}$	×	×	×	×	✓	×	×
	$F_e = k_1 F_{01}$ $F_e = k_2 F_{02}$ $F_e \neq k_3 F_{03}$	×	×	×	×	✓	✓	✓
	$F_e = k_1 F_{01}$ $F_e \neq k_2 F_{02}$ $F_e \neq k_3 F_{03}$	×	×	×	×	✓	✓	✓
	$F_e \neq k_1 F_{01}$ $F_e \neq k_2 F_{02}$ $F_e \neq k_3 F_{03}$	×	×	×	×	✓	✓	✓

Tableau 3.7 : Convergence ou divergence des algorithmes pour un ordre N donné et pour un signal d'entrée parfaitement prédictible

F_e : fréquence d'échantillonnage, F_{0i} : fréquence de la sinusöide

k : entier

✓ : convergence de l'algorithme

×

Les figures 3.4 correspondent au cas où l'ordre AR est égal à l'ordre du modèle. Le signal d'entrée x_t représente une sinusoïde pure de fréquence $F_0=2kHz$, la fréquence d'échantillonnage est $F_e=16kHz$; cet exemple montre le cas de fréquence multiple.

Il est remarquable d'observer que la convergence est atteinte au bout de quelques itérations. L'estimation des pôles est très précise, ayant fourni les valeurs exactes du modèle, que se soit pour le prédicteur aller ou le prédicteur retour.

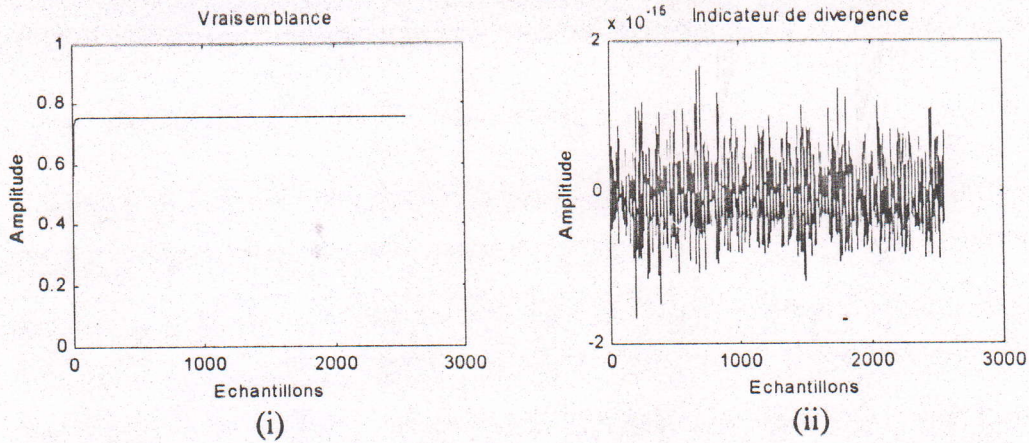


Figure 3.4a : i- Evolution temporelle de la variable de vraisemblance $\gamma_{N,t}$.
ii- Evolution temporelle de la variable indicateur de divergence $\xi_{N,t}$.

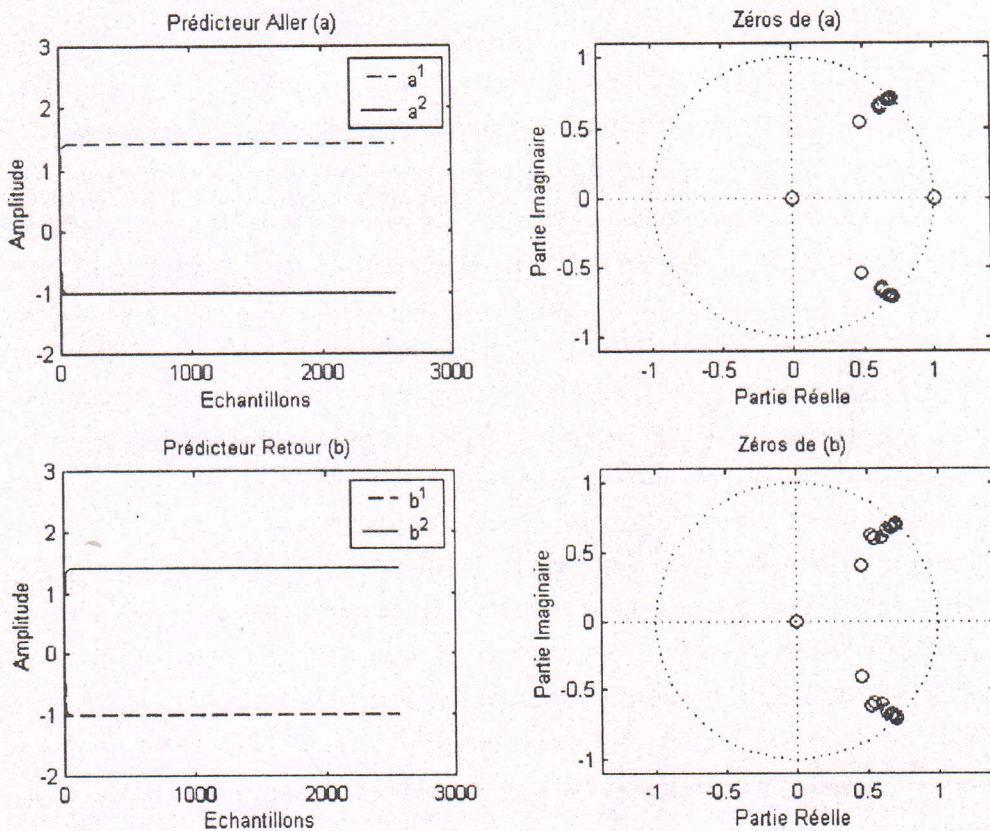


Figure 3.4b : Evolutions des zéros et des coefficients des prédicteurs aller/retour.

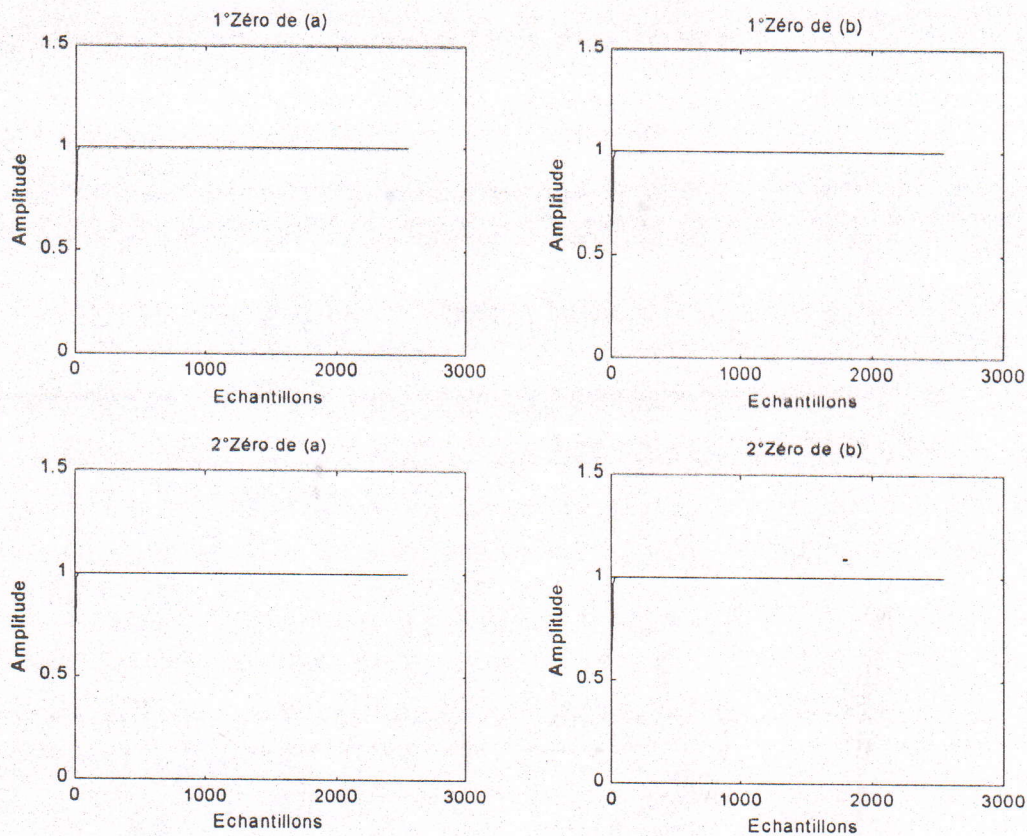


Figure 3.4c : Evolutions des zéros des prédicteurs aller/retour.

Selon les figures 3.5, les mêmes constatations sont faites pour le même cas, c'est à dire, ordre AR égal à l'ordre du modèle; sauf que la fréquence de la sinusoïde n'est pas un multiple entier de la fréquence d'échantillonnage. Le signal d'entrée x_t dans cet exemple représente une sinusoïde pure de fréquence $F_0 = 1.9kHz$, la fréquence d'échantillonnage est toujours $F_e = 16kHz$. L'algorithme a été testé avec succès par des simulations à très long terme.

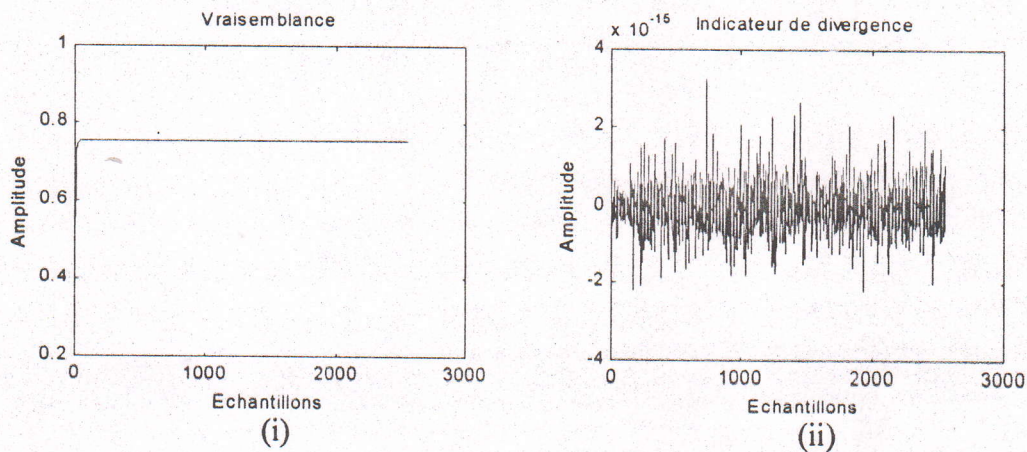


Figure 3.5a : i- Evolution temporelle de la variable de vraisemblance $\gamma_{N,t}$.
ii- Evolution temporelle de la variable indicateur de divergence $\xi_{N,t}$.

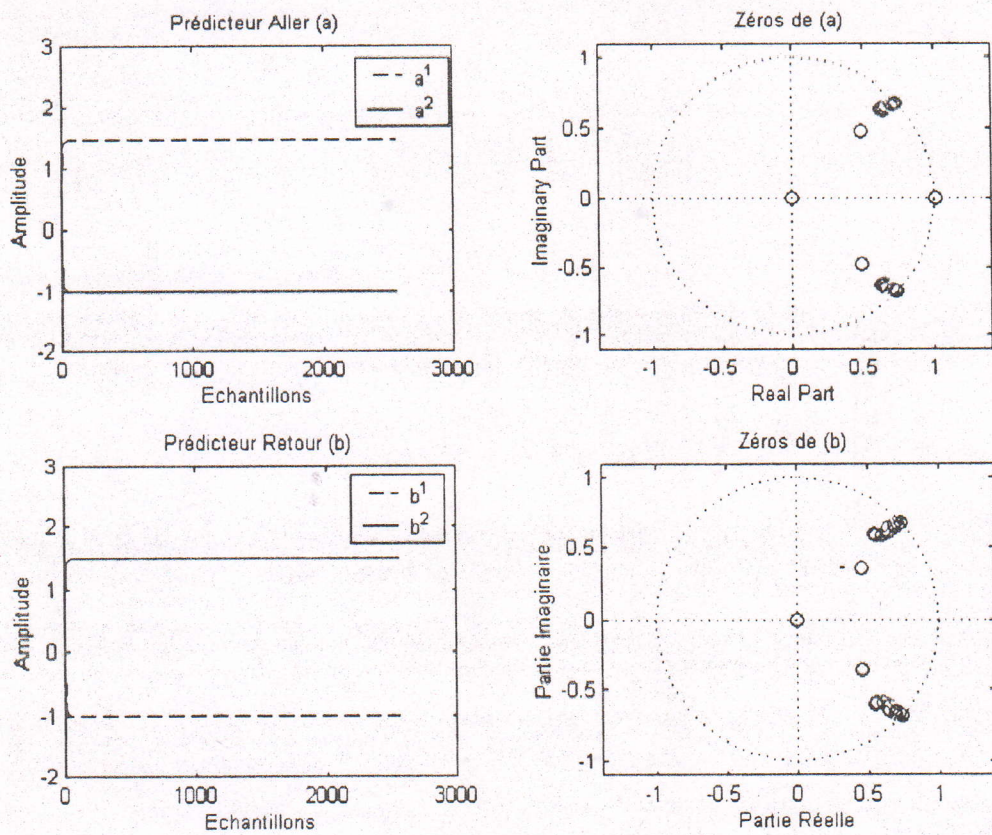


Figure 3.5b : Evolutions des zéros et des coefficients des prédicteurs aller/retour.

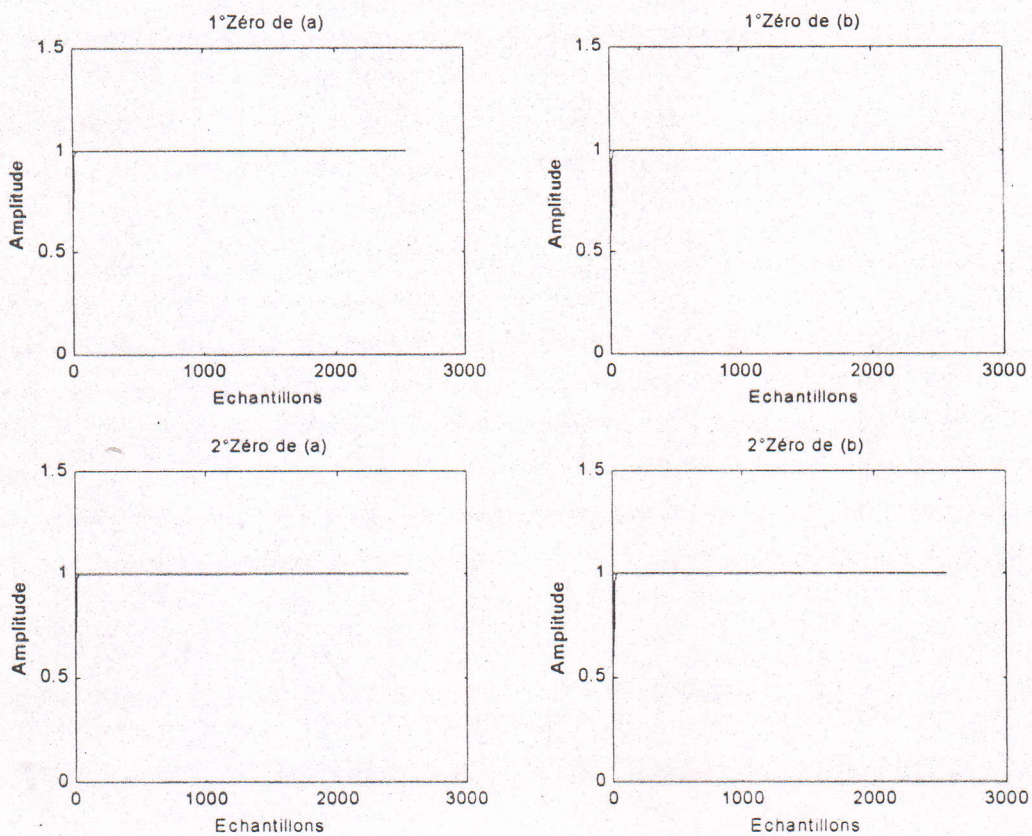


Figure 3.5c : Evolutions des zéros des prédicteurs aller/retour.

Chapitre 3 : Etude de la stabilité des algorithmes MCR avec des signaux parfaitement prédictibles

D'autre part, il y a des exemples où l'ordre AR est surestimé par rapport au nombre de sinusôides. Dans ce cas, les zéros en excès doivent rester à l'intérieur du cercle unité. Les figures 3.6 montrent le cas d'un modèle AR surestimé d'ordre 3 où l'on applique toujours une sinusôide pure de fréquence $F_0=1.9kHz$, la fréquence d'échantillonnage est $F_e=16kHz$. C'est à dire une fréquence non multiple par rapport à la fréquence d'échantillonnage.

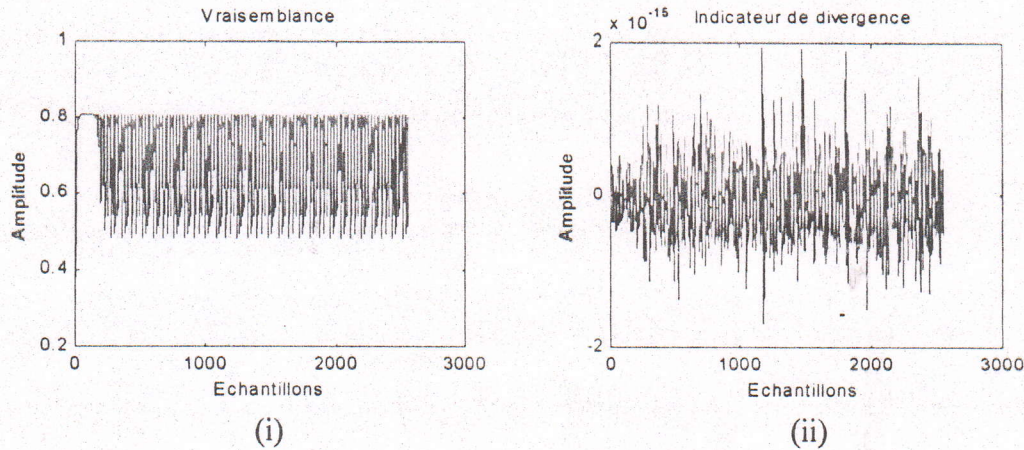


Figure 3.6a : i- Evolution temporelle de la variable de vraisemblance $\gamma_{N,t}$.
ii- Evolution temporelle de la variable indicateur de divergence $\xi_{N,t}$.

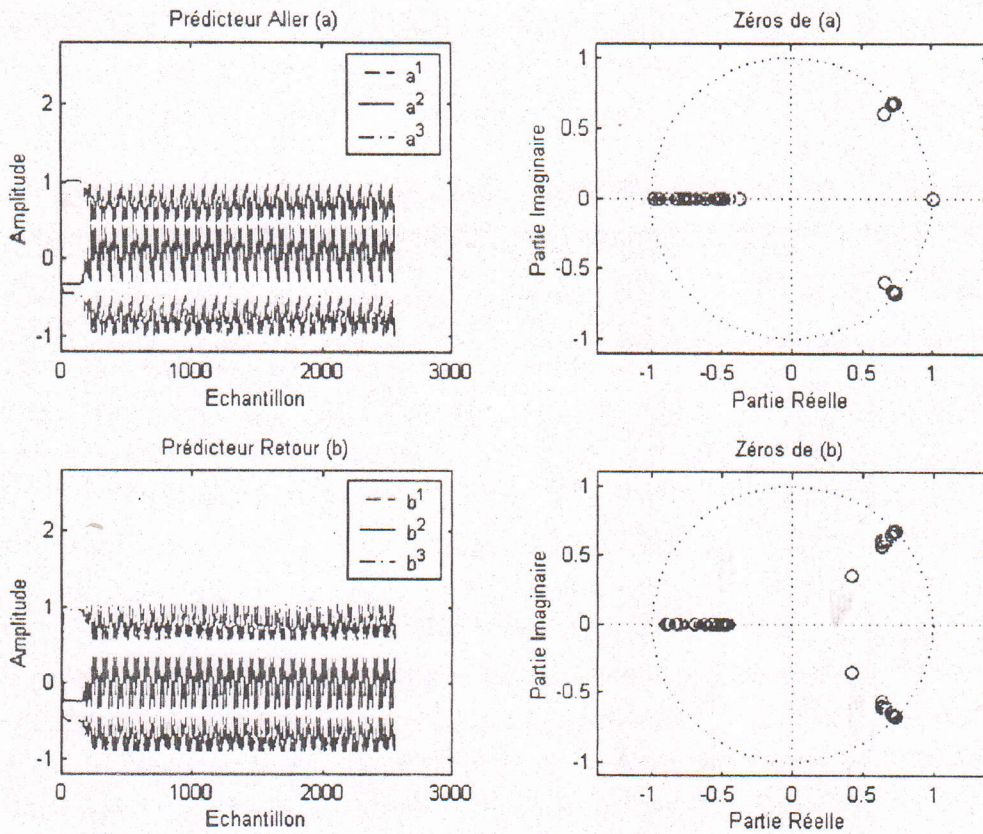


Figure 3.6b : Evolutions des zéros et des coefficients des prédicteurs aller retour.

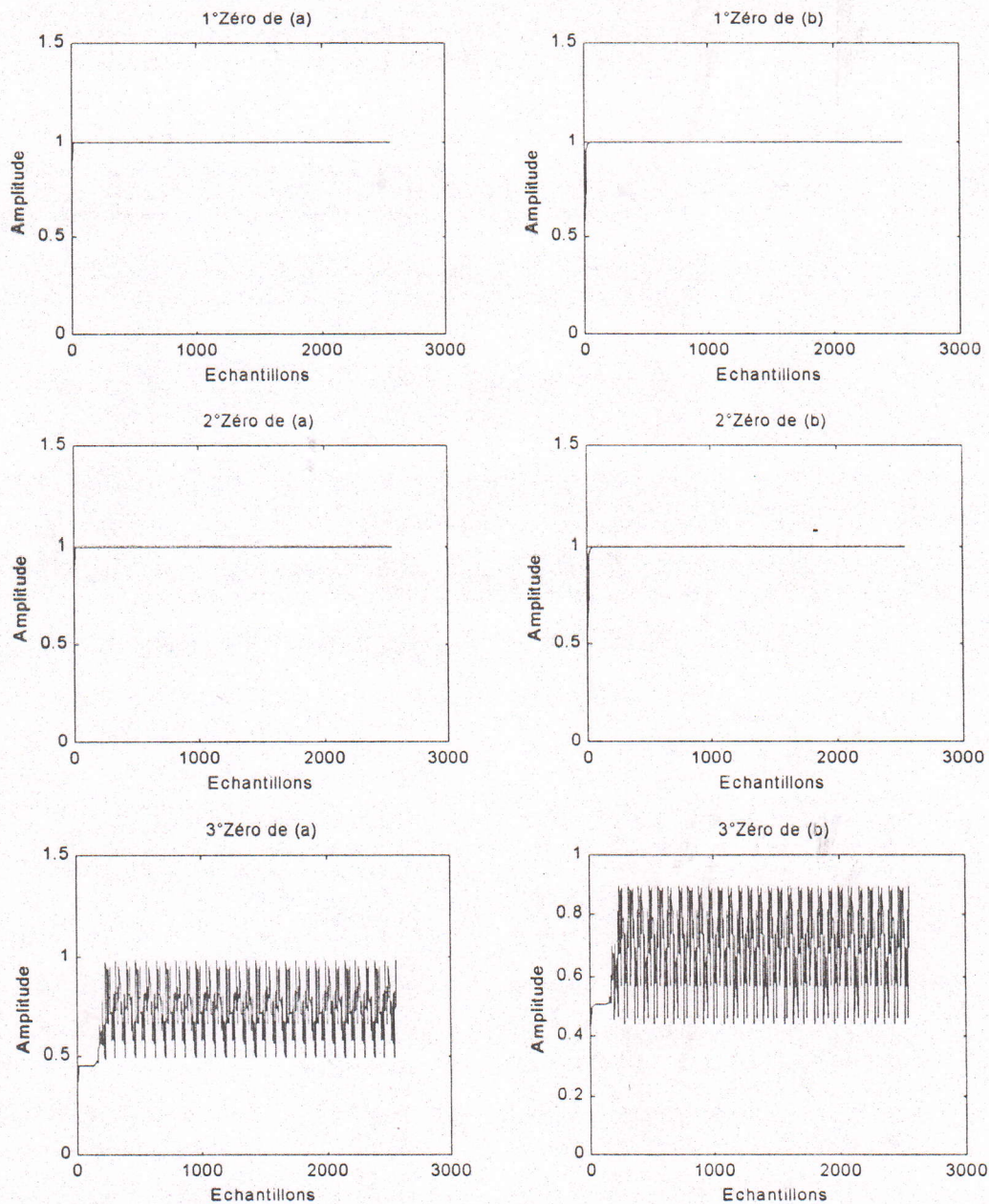


Figure 3.6c : Evolutions des zéros des prédicteurs aller/retour.

Le zéro libre se déplace dans le cercle unité, ce qui se traduit par l'oscillation des coefficients, ainsi que l'oscillation même du zéro libre le long de la séquence, de sorte que des instabilités n'ont pas été vérifiées.

Le cas critique est celui où l'ordre est surestimé et la fréquence de la sinusoïde est un multiple entier de la fréquence d'échantillonnage. Les figures 3.7 correspondent à ce cas critique, avec un modèle AR surestimé d'ordre 3 et le signal d'entrée x_t représente une sinusoïde pure de fréquence $F_0=2kHz$, la fréquence d'échantillonnage est $F_e=16kHz$.

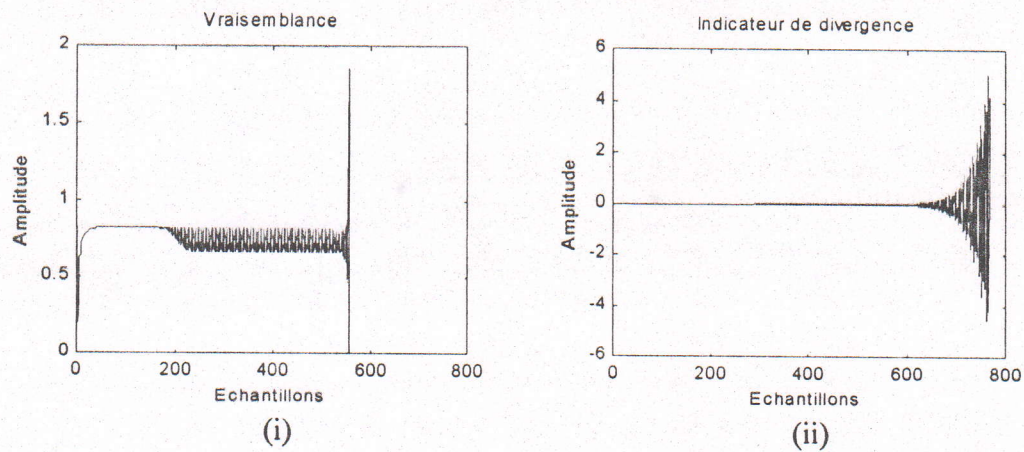


Figure 3.7a : i- Evolution temporelle de la variable de vraisemblance $\gamma_{N,t}$.
 ii- Evolution temporelle de la variable indicateur de divergence $\xi_{N,t}$.

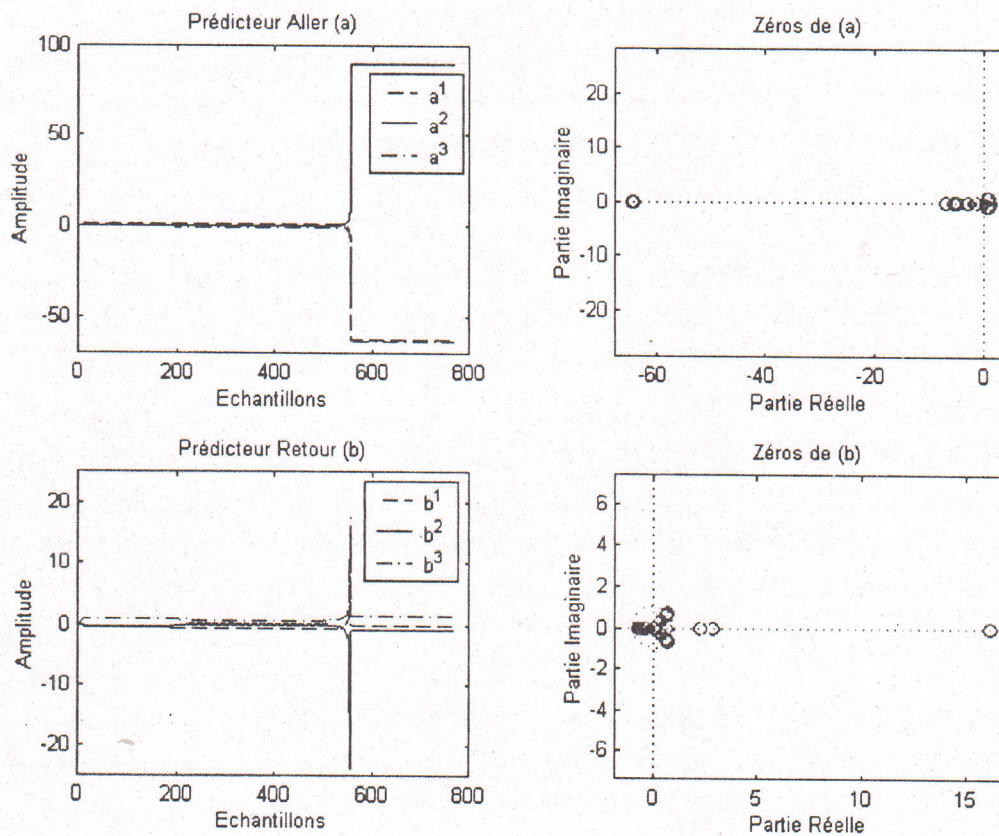


Figure 3.7b : Evolutions des zéros et des coefficients des prédicteurs aller/retour.

Pendant les 160 premières itérations la variable de vraisemblance $\gamma_{N,t}$ est presque constante (valeur égale approximativement à 0.8), puis elle commence à osciller après cet intervalle, pour terminer à une divergence à l'échantillon 552.

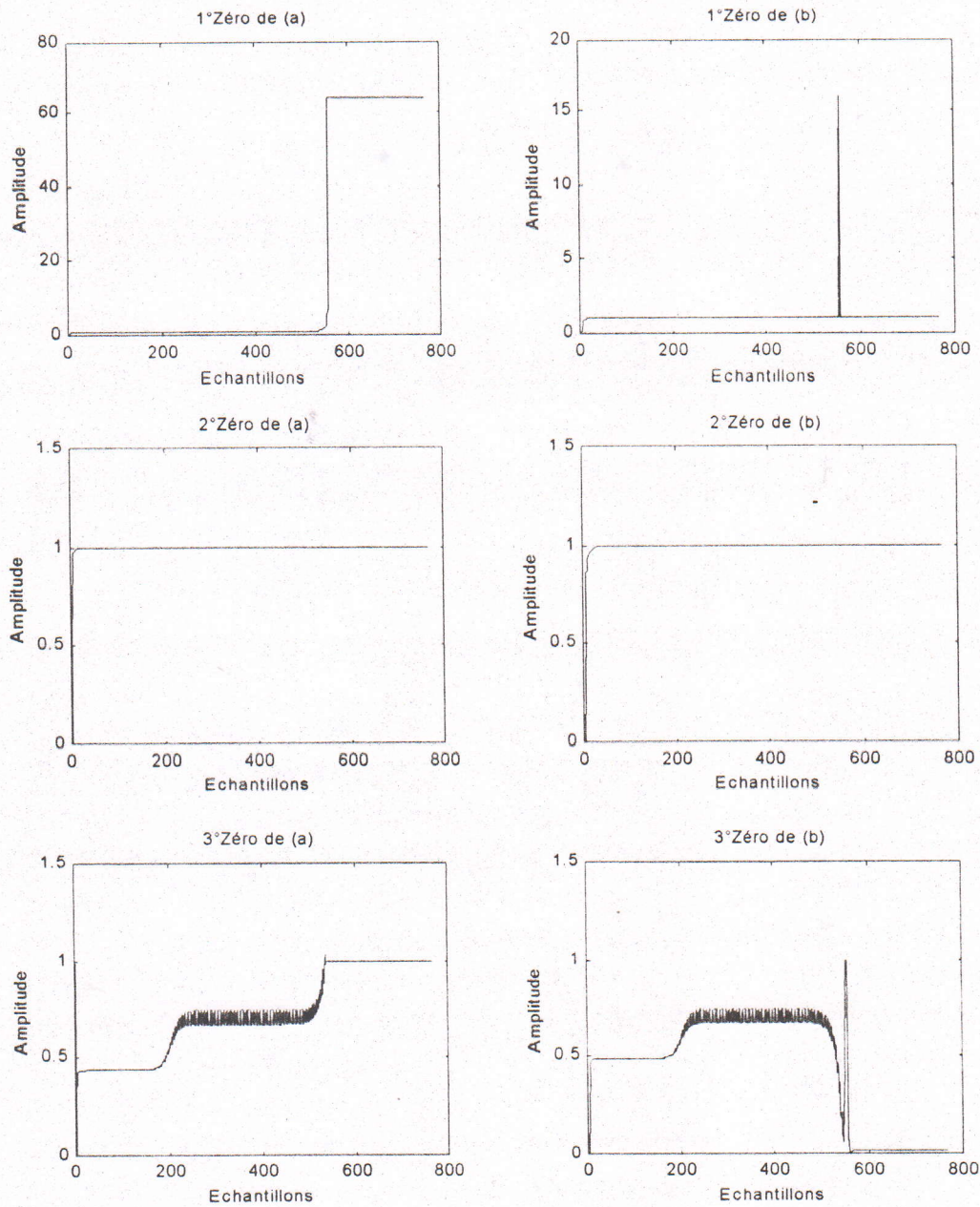


Figure 3.7c : Evolutions des zéros des prédicteurs aller/retour.

Pour les zéros des prédicteurs aller/retour, le premier zéro du prédicteur aller sort du cercle unité à l'échantillon 538, pour continuer à une divergence totale. Tandis que le second, ne présente aucune surestimation. Et toujours pour le prédicteur aller, le zéro libre (c'est à dire le troisième zéro), ne sort pas du cercle unité, et présente quand même quelques oscillations avant l'instant de divergence.

Examinons maintenant les zéros du prédicteur retour, le premier zéro sort du cercle unité à l'échantillon 549, puis il revient à l'intérieur du cercle à l'échantillon 554. Entre ces deux itérations le zéro présente un pic de forte amplitude au moment de la détection de la divergence. Les mêmes observations faites pour le deuxième et le troisième zéro du prédicteur aller sont attribuées à ceux du prédicteur retour.

En ce qui concerne le deuxième cas critique, celui où l'ordre du modèle AR est inférieur à l'ordre du modèle, les figures 3.8 correspondent à cet exemple. Le signal d'entrée x_t représente une somme de deux sinusoïdes pures de fréquences respectives $F_{01} = 2kHz$ et $F_{02} = 1kHz$, la fréquence d'échantillonnage est $F_s = 16kHz$, l'ordre sous-estimé est égal à 3.

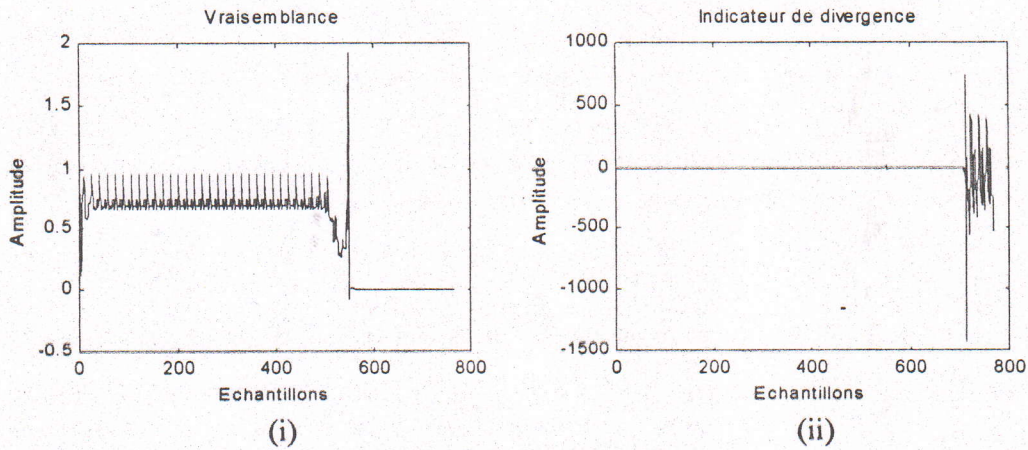


Figure 3.8a : i- Evolution temporelle de la variable de vraisemblance $\gamma_{N,i}$.
ii- Evolution temporelle de la variable indicateur de divergence $\xi_{N,i}$.

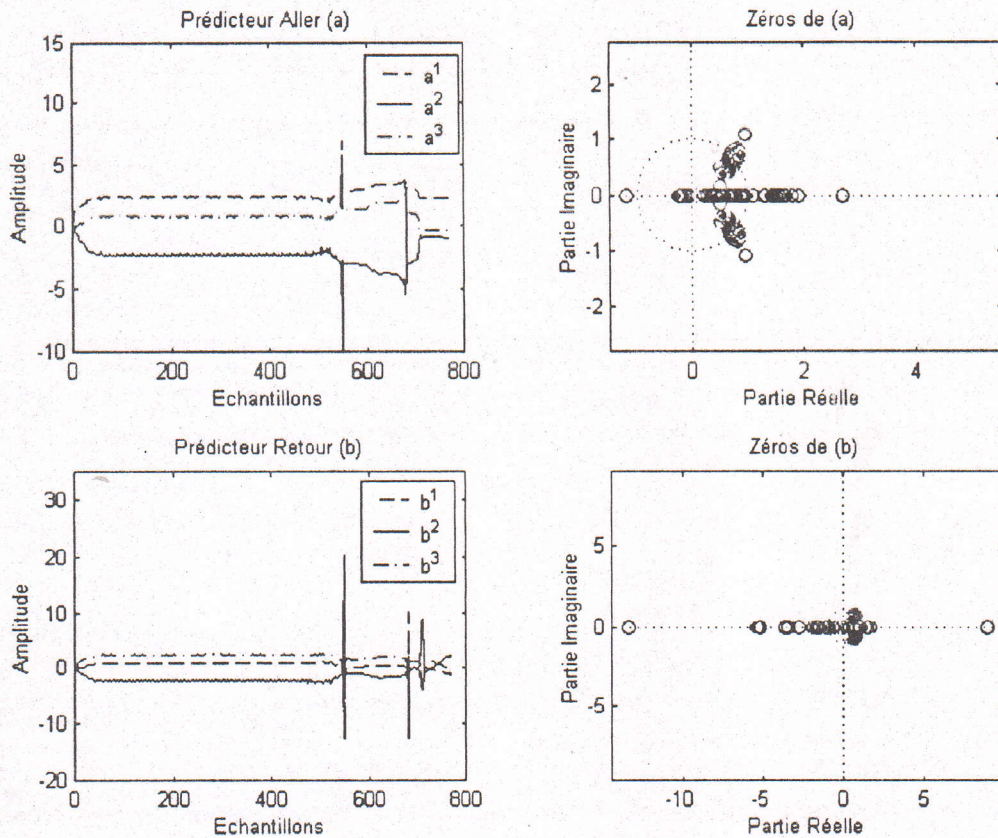


Figure 3.8b : Evolutions des zéros et des coefficients des prédicteurs aller retour.

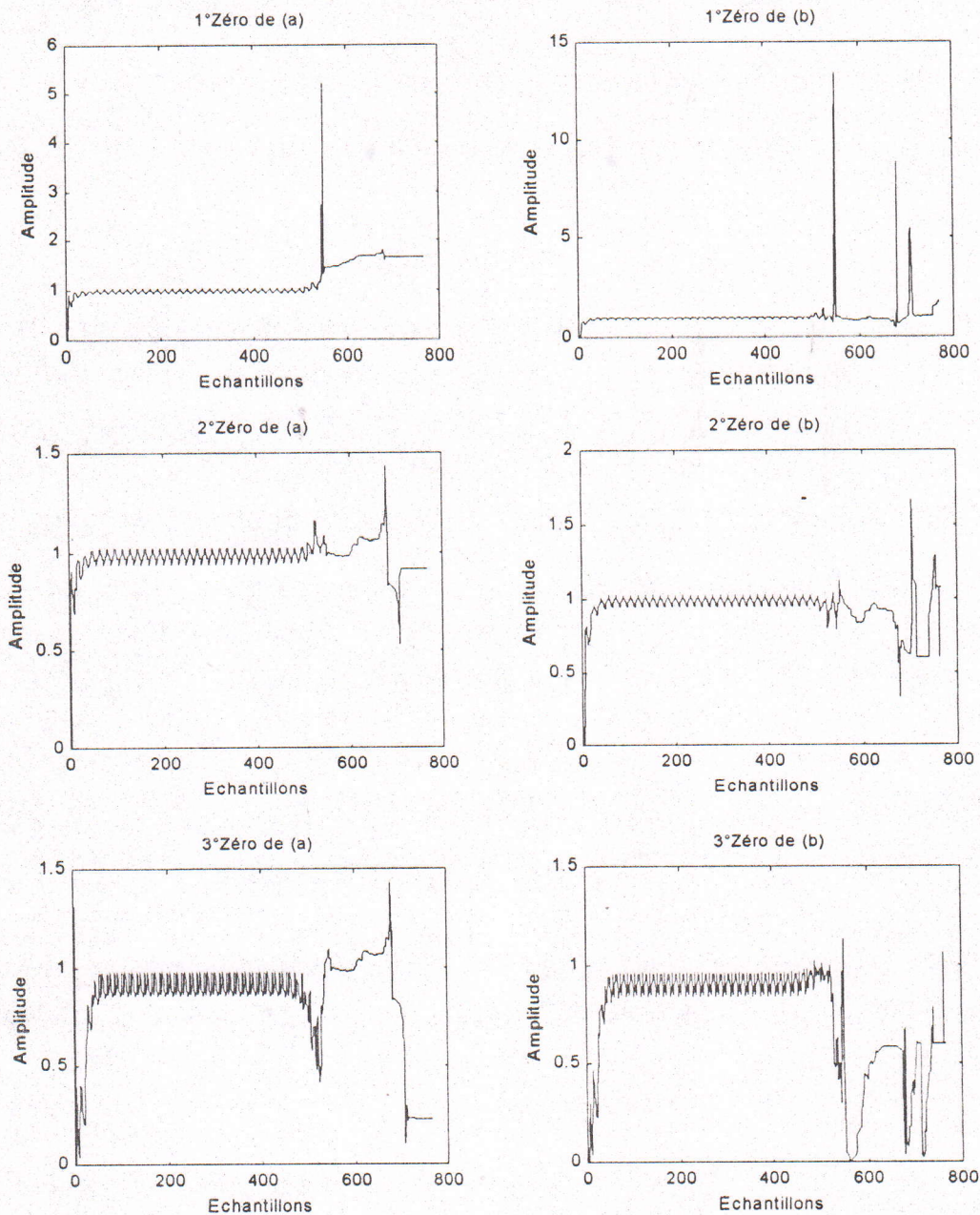


Figure 3.8c : Evolutions des zéros des prédicteurs aller/retour.

La divergence de l'algorithme est détectée par la variable de vraisemblance $\gamma_{N,i}$ à l'échantillon 548, pour une valeur de $\gamma_{N,i}$ égale approximativement à 1.919. Avant cette divergence, la courbe représentant l'évolution de $\gamma_{N,i}$ présente une allure assez régulière.

Les deux premiers zéros du prédicteur aller et du prédicteur retour varient dans un intervalle de $[0.940 \ 1.022]$ avant l'échantillon 538, après cet échantillon, ils sortent de l'intervalle. Mais pour le troisième zéro du prédicteur aller, il présente une valeur supérieure à l'unité dans le second échantillon (valeur égale approximativement à 1.311). Tandis que le troisième zéro du prédicteur retour reste à l'intérieur du cercle.

Chapitre 3 : Etude de la stabilité des algorithmes MCR avec des signaux parfaitement prédictibles

Reprenons le cas critique où le signal d'entrée x_t représente une sinusoïde de fréquence multiple par rapport à la fréquence d'échantillonnage et où l'ordre du modèle AR est surestimé. Ajoutons un niveau de bruit à ce signal d'entrée. Ce dernier s'écrit :

$$x_t^b = x_t + b_t$$

où b_t est le niveau de bruit ajouté de type bruit blanc gaussien stationnaire.

Le rapport signal à bruit est calculé par la formule :

$$RSB(dB) = 10 \log\left(\frac{\sigma_x^2}{\sigma_b^2}\right)$$

où σ_x^2 représente l'énergie totale de x_t et σ_b^2 représente l'énergie totale du niveau du bruit additif b_t .

Les figures 3.9 et 3.10 illustrent le cas d'une sinusoïde bruitée de fréquence $F_0 = 2kHz$, la fréquence d'échantillonnage est $F_e = 16kHz$, pour les deux niveaux de bruit ajoutés $RSB(dB) = 40dB$ et $60dB$. L'ordre du modèle est égal à 3. Alors, pour un tel signal, on va essayer d'observer la stabilité ou l'instabilité des variables.

Remarquons que la variable indicateur de divergence $\xi_{N,t}$ présente une dégradation par rapport aux cas stables. Les pôles du prédicteur aller sortent parfois du cercle unité, malgré cela aucune divergence n'a été détectée. Cependant, les pôles du prédicteur retour restent à l'intérieur du cercle unité de sorte qu'aucune divergence n'a été observée.

D'après les simulations, on remarque qu'il n'y a pas de changement pour les ordres AR égal au modèle ou inférieur au modèle (sous-estimé); l'algorithme MCR reste respectivement stable et instable. Mais pour les ordres surestimés, l'algorithme est stable, quelle que soit la fréquence de la sinusoïde (multiple ou non multiple de la fréquence d'échantillonnage).

D'autre part, si le bruit est nul, le signal d'entrée x_t est un signal prédictible et les coefficients de prédiction sont tels que les zéros soient sur le cercle unité. Au fur et à mesure que le niveau du bruit augmentait, les coefficients variaient de sorte que les zéros soient ramenés vers l'intérieur du cercle.

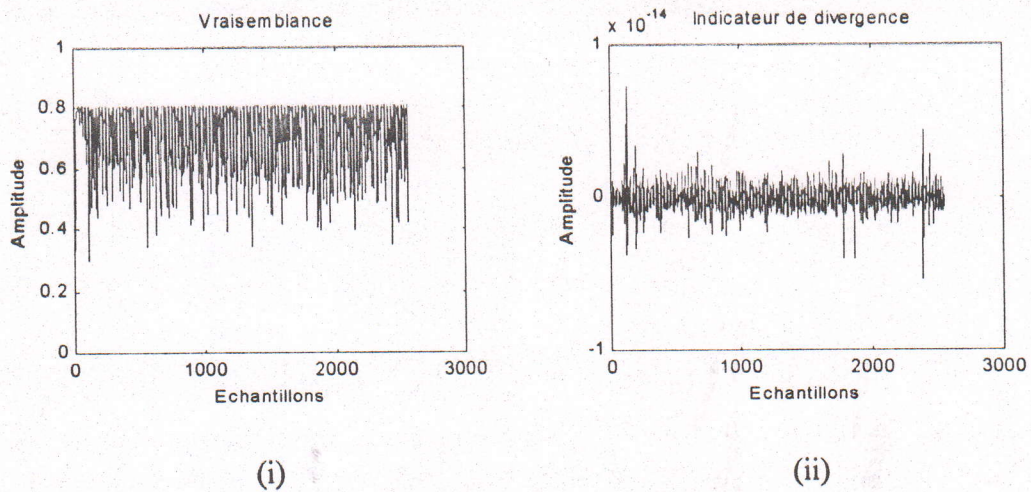


Figure 3.9a : i- Evolution temporelle de la variable de vraisemblance $\gamma_{N,t}$.
 ii- Evolution temporelle de la variable indicateur de divergence $\xi_{N,t}$.

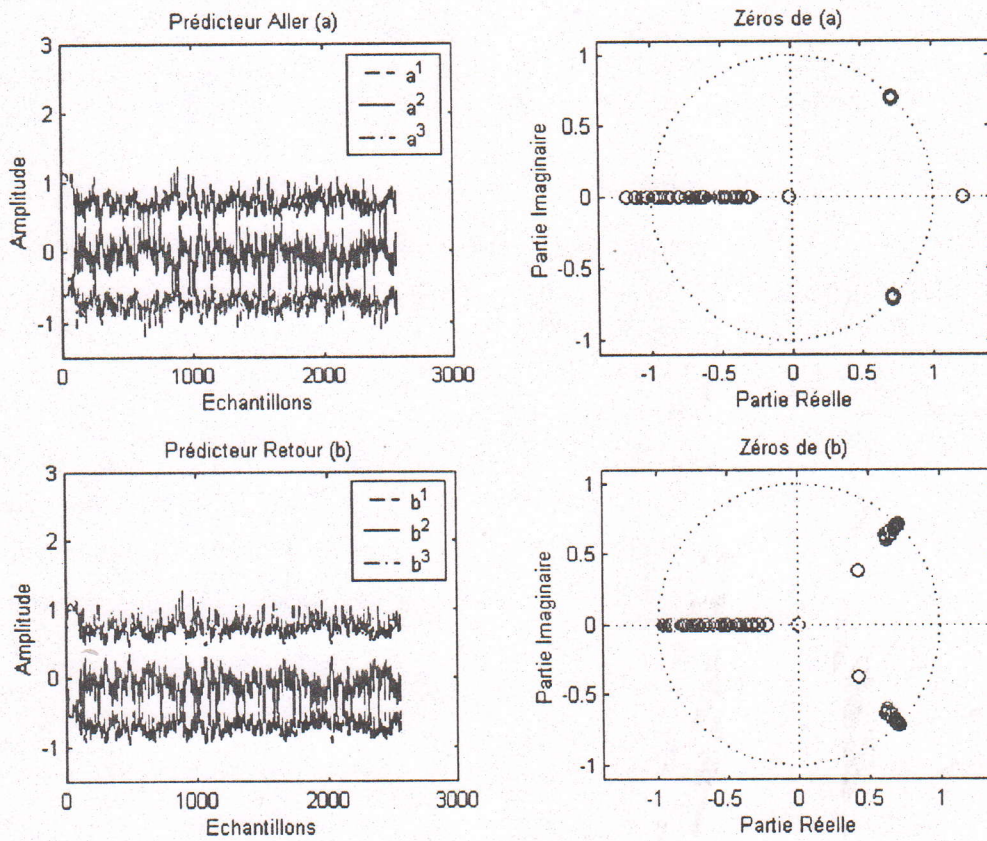


Figure 3.9b : Evolutions des zéros et des coefficients des prédicteurs aller/retour.

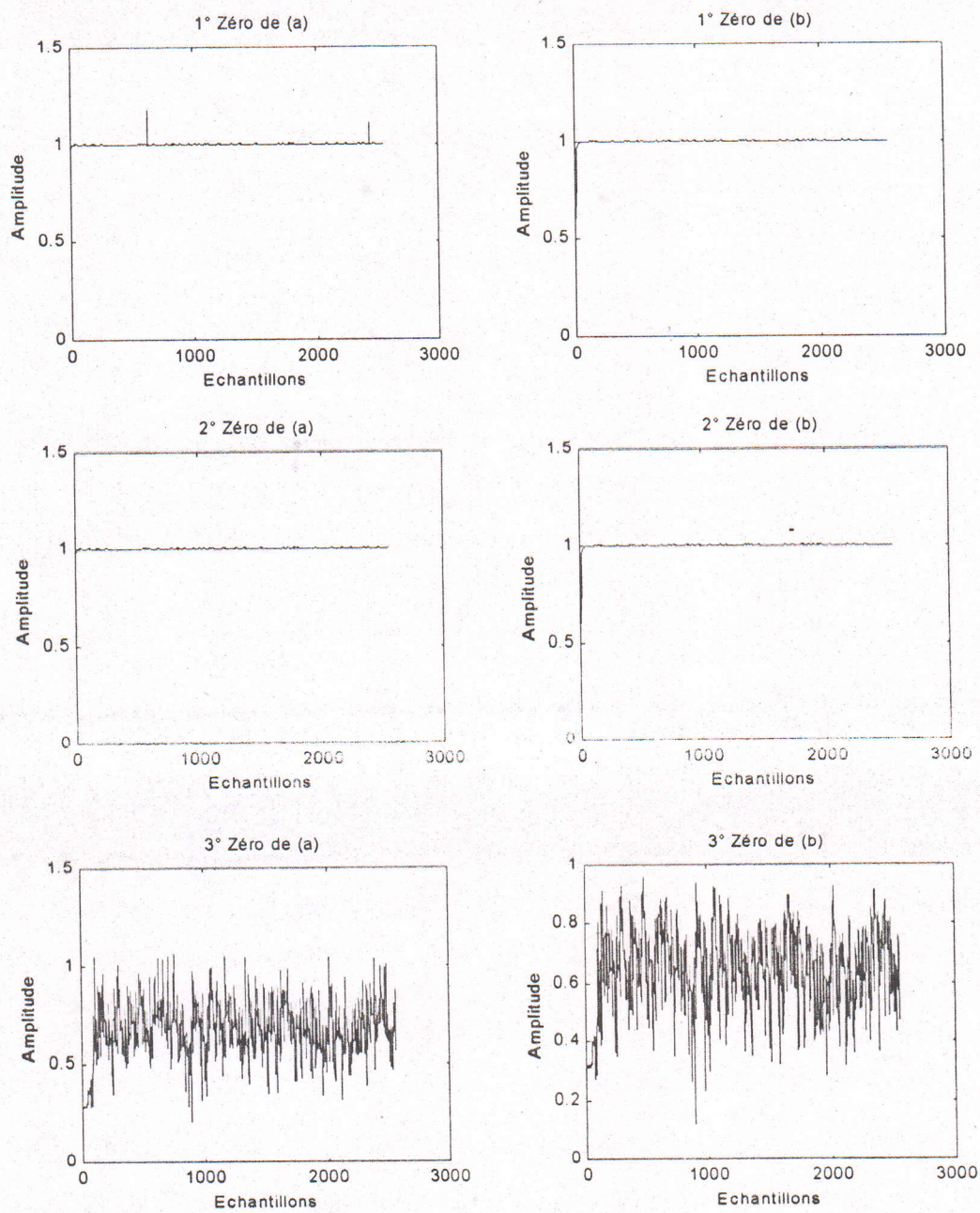


Figure 3.9c : Evolutions des zéros des prédicteurs aller/retour.

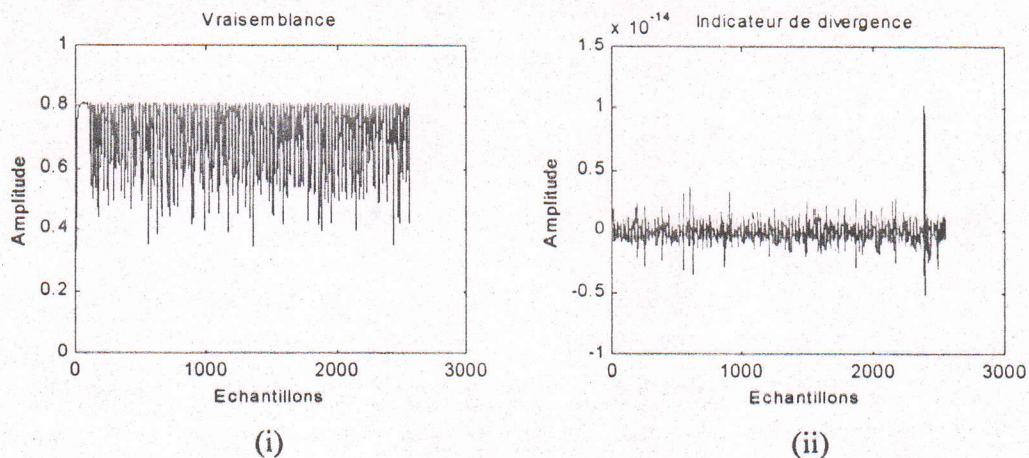


Figure 3.10a : i- Evolution temporelle de la variable de vraisemblance $\gamma_{N,i}$.
 ii- Evolution temporelle de la variable indicateur de divergence $\xi_{N,i}$.

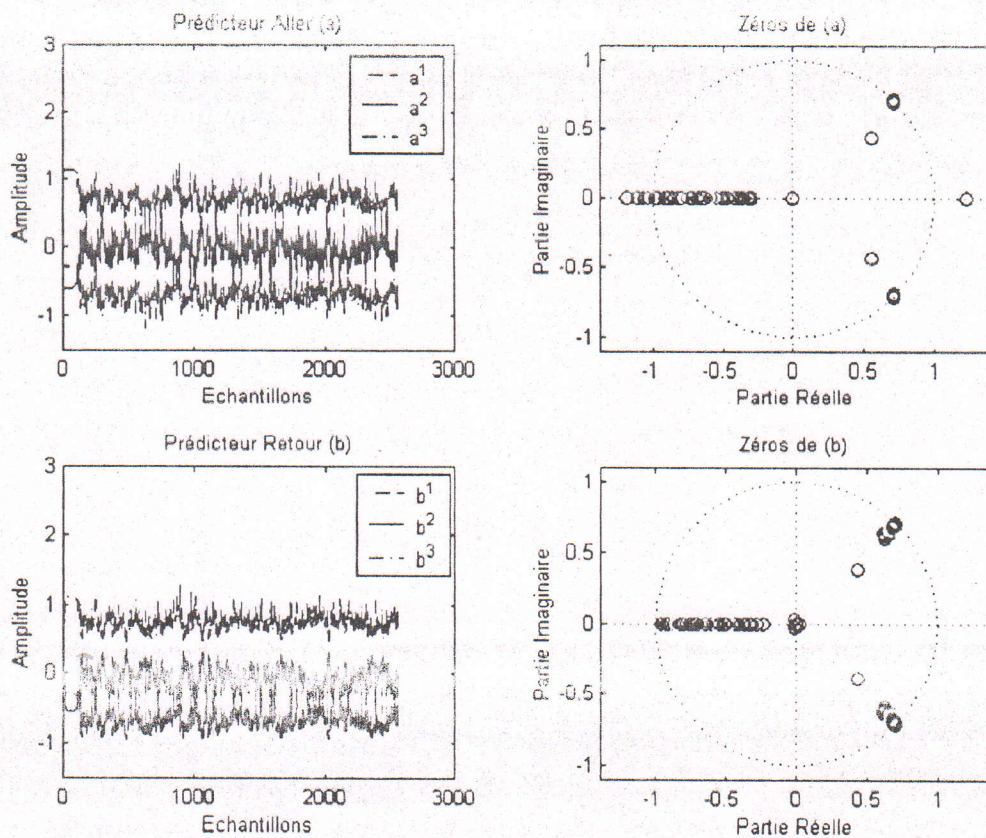


Figure 3.10b : Evolutions des zéros et des coefficients des prédicteurs aller/retour.

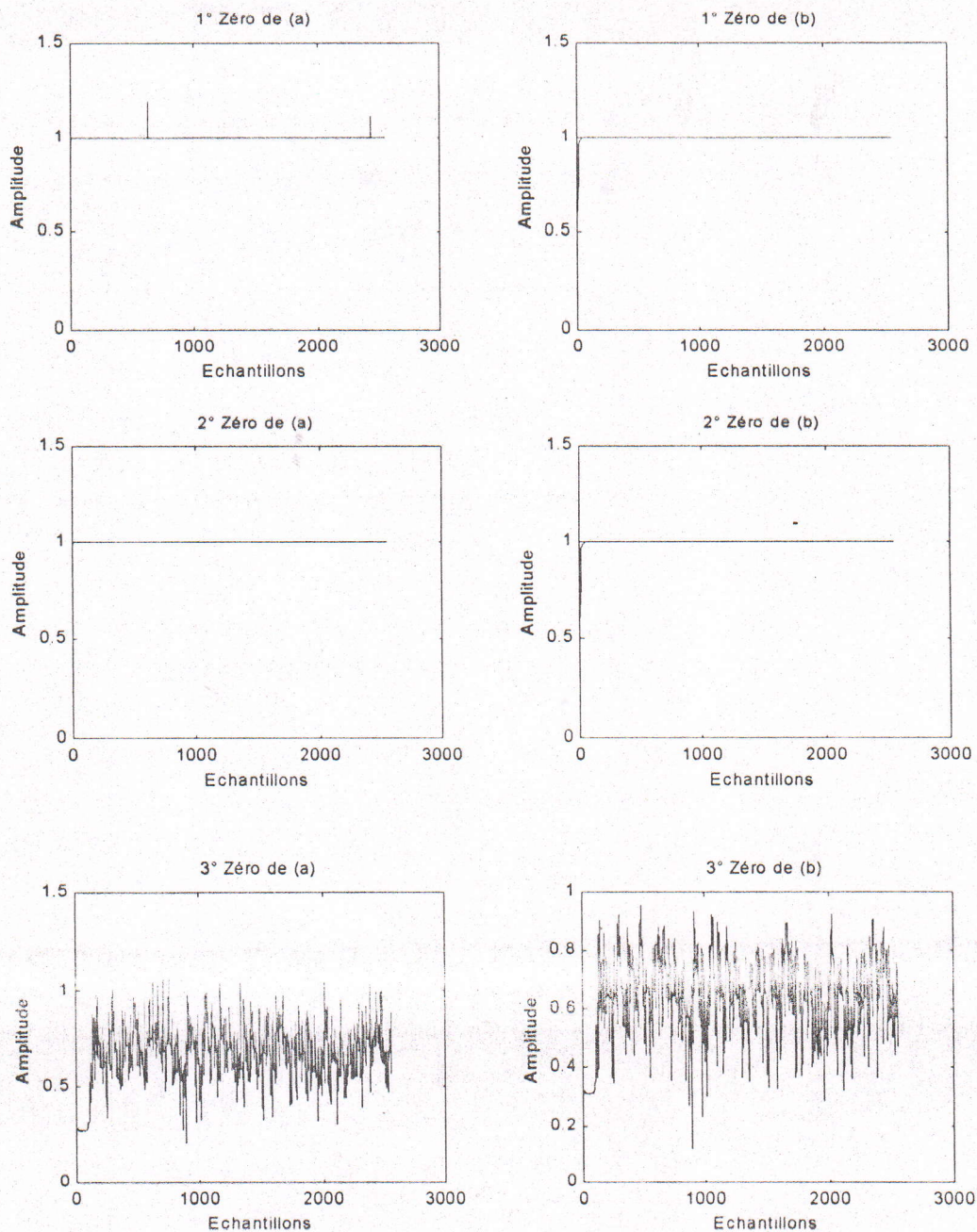


Figure 3.10c : Evolutions des zéros des prédicteurs aller/retour.

Nous constatons alors que la convergence de l'algorithme pour des sinusôides est d'autant plus difficile que:

- les fréquences des sinusôides sont des multiples entiers de la fréquence d'échantillonnage;
- l'ordre du prédicteur est sous-estimé ou petit;
- le rapport signal à bruit à l'entrée est faible.

Chapitre 3 : Etude de la stabilité des algorithmes MCR avec des signaux parfaitement prédictibles

La question qui nous vient directement à l'esprit est : existait-il un facteur d'oubli λ qui stabilise l'algorithme pour les cas critiques étudiés ? Bien entendu, un facteur d'oubli très proche de l'unité stabilise l'algorithme pour ce type de signaux, mais ces valeurs stabilisatrices avec comme signal d'entrée des sinusoides pures sont visiblement grandes devant la taille des prédicteurs. Dans cette situation, l'algorithme MCR va perdre toutes ses performances en vitesse de convergence, et on va se retrouver en présence d'un algorithme sans oubli exponentiel. Pour cette raison et en vertu de la dynamique des signaux utilisés, une technique simple de régularisation avec une composante de bruit très faible s'avère très efficace, afin de maintenir les pôles des modèles à l'intérieur du cercle unité. Les simulations présentées sur les figures 2.15 et 2.16 confirment la validité de cette suggestion. Un niveau de bruit ajouté de 40dB influe clairement sur les estimés, des fluctuations sont constatées sur les évolutions temporelles des zéros. Quant au cas d'un bruit de 60dB, ces fluctuations disparaissent.

Rappelons enfin que ce problème de mauvais conditionnement des algorithmes MCR avec des signaux parfaitement prédictibles ne doit pas être généralisé, car dans les signaux réels, il existe toujours une composante non prédictible.

3.5 Conclusion

La complexité des équations de propagation nous a amené à considérer le cas particulier de signaux parfaitement prédictibles. Dans un premier temps, nous avons testé la stabilité des algorithmes MCR stabilisés numériquement avec des signaux auto-régressifs (AR) synthétiques. Les algorithmes sont stables pour un choix d'un facteur d'oubli convenable, sa limite minimale dépend en fait de la nature du signal d'entrée. Dans un deuxième temps, les signaux purs tels que les sinusoides sont étudiés, pour tester l'effet de la fréquence du signal d'entrée avec la fréquence d'échantillonnage.

On a vu qu'en plus de l'instabilité numérique des variables récursives de la prédiction retour de l'algorithme MCR, l'utilisation des signaux parfaitement prédictibles, tels que les sinusoides pures, pose d'autres problèmes aux algorithmes MCR. En plus des variances des erreurs de prédiction qui deviennent trop faibles pour être représentables sur les processeurs de signaux travaillant en précision limitée, les très faibles erreurs de prédiction rendent la matrice de propagation des erreurs triangulaire par blocs et engendre une marche aléatoire dans les variables de Kalman. La marche aléatoire des erreurs dans le calcul du gain de Kalman dual est due, dans le cas des sinusoides pures, à la position théorique des pôles du prédicteur du filtre de prédiction retour sur le cercle unité.

Si les signaux sont suffisamment bruités, ce qui est le cas en pratique, il n'y aura pas de problème d'instabilité numérique, car les variances sont alors limitées par la variance du bruit perturbateur et les pôles des prédicteurs se trouvent à l'intérieur du cercle unité.

Chapitre 4

**STABILISATION DES ALGORITHMES MCR EN
PRESENCE DE LA PAROLE**

4.1 Introduction

L'objet de ce chapitre est l'étude des algorithmes MCR stabilisés numériquement décrit au chapitre 2 quand le signal d'entrée est la parole. Le but n'est pas l'étude de la qualité de la prédiction linéaire du signal de parole réalisé par les algorithmes MCR mais l'impact de cette dernière sur la qualité de l'identification des modèles MA. Car rappelons que le but est d'aboutir à des algorithmes MCR numériquement stables pour des applications d'annulation d'écho acoustique, donc de filtrage adaptatif. Dans ce cas, le rôle des algorithmes est de fournir à la partie filtrage (ou partie MA) un vecteur gain d'adaptation (ou gain de Kalman) pour adapter le filtre transverse :

$$H_{N,i} = H_{N,i-1} - \bar{\varepsilon}_{N,i} (\gamma_{N,i} \tilde{C}_{N,i}) \quad (4.1)$$

$$\bar{\varepsilon}_{N,i} = y_i - H_{N,i}^T X_{N,i} \quad (4.2)$$

où y_i est le signal d'écho, $\bar{\varepsilon}_{N,i}$ est l'erreur de filtrage (ou le signal d'écho atténué) et $\gamma_{N,i} \tilde{C}_{N,i}$ désigne le gain d'adaptation calculé, indépendamment de la partie MA, par un algorithme MCR en faisant l'analyse par prédiction linéaire aller/retour sur le signal de parole x_i , en provenance de l'autre bout de la chaîne de communication. C'est là une première difficulté pour les algorithmes MCR appliqués à l'identification de modèles MA : le gain d'adaptation calculé sur le signal d'entrée x_i est plus sensible aux non-stationnarités de ce signal que celles du système à identifier.

On espère, grâce à un facteur d'oubli inférieur à 1, c'est à dire un gain d'adaptation non nul en régime asymptotique, poursuivre les variations du système à identifier. Une deuxième difficulté bien connue, en identification, l'existence de longues périodes de silence (signal de très faible énergie) dans la parole, ce qui peut rendre la matrice d'autocorrélation du signal d'entrée, matrice inversée implicitement dans les algorithmes MCR non inversible.

Des simulations sur des signaux de parole ont fait apparaître d'autres problèmes liés au signal d'entrée. Des non-stationnarités importantes intervenant dans le signal de parole provoquent des discontinuités importantes dans certaines variables de l'algorithme et un blocage de ce dernier, dans la majorité des cas, sur les paramètres déjà identifiés. Le choix d'un facteur d'oubli compatible avec le signal de parole (proche de 1), c'est à dire qui tient compte de l'existence de longues périodes de silence et de la grande dynamique de la parole, permet de faire fonctionner l'algorithme mais ralentit beaucoup sa vitesse de convergence et sa capacité de poursuite des non-stationnarités intervenant dans le système à identifier.

Dans la suite, nous proposons une nouvelle technique qui permet un fonctionnement continu des algorithmes MCR avec des signaux de parole dans le contexte du filtrage.

4.2 Classification des sons de la parole

La parole se distingue par sa complexité, due à des modes de production variables, engendrant des signaux fortement non-stationnaires. Cependant, du fait de l'inertie des muscles de l'appareil phonatoire, le signal vocal ne peut être considéré comme quasi stationnaire que sur des intervalles de temps de durée limitée.

Les sons de la parole peuvent être classés, de manière un peu sommaire, en trois catégories :

a) les sons voisés (ou sons sonores) :

Les sons voisés sont des signaux quasi périodiques très riches en harmoniques d'une fréquence fondamentale, appelée pitch. Ce qui leur donne un caractère assez facilement prévisible. Ils sont de forte énergie. La fréquence fondamentale, encore appelée fréquence de mélodie, varie en moyenne de 70 à 150 Hz pour les hommes et de 100 à 400 Hz chez les femmes et les enfants.

b) les sons non voisés (ou sons sourds) :

Les sons non voisés sont des signaux qui ne présentent pas de structure périodique. Ils ont les caractéristiques spectrales d'un bruit légèrement corrélé. Ils sont d'énergie moyenne et peu prévisibles en raison de leur spectre presque plat.

c) les silences :

Les silences sont tout simplement des intervalles où le signal utile est absent. En pratique il s'agit de bruits, d'origines diverses, d'énergie négligeable devant celle du signal utile.

A ces trois catégories s'ajoutent des segments voisés très pauvres en harmoniques (voisés nasales), et des sons plosifs caractérisés par un apport instantané d'énergie, faisant passer de manière très brève du silence à un son qui peut être voisé ou non voisé.

C'est par la succession temporelle de tous ces sons qu'est constitué le signal de parole.

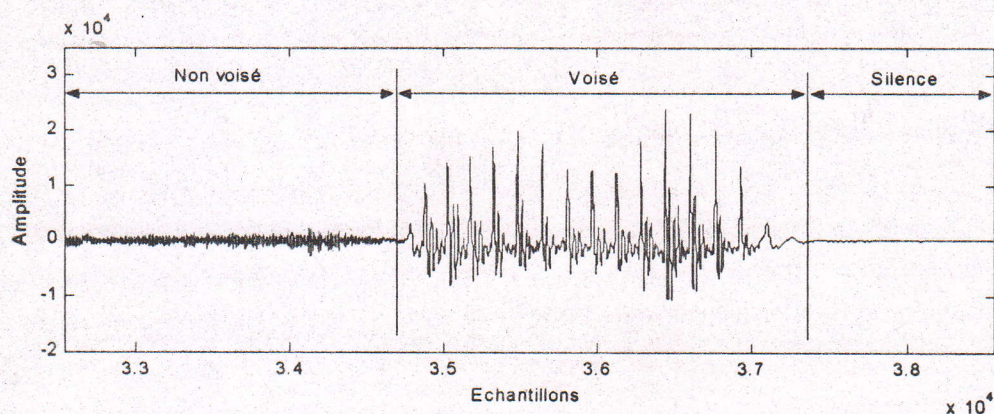


Figure 4.1 : Représentation des trois zones d'un signal vocal (Non voisée, Voisée, Silence).

4.3 Description des signaux et des critères de performance

Le signal d'entrée est obtenu de deux phrases phonétiquement équilibrées, échantillonnées à 16 kHz. La première phrase est prononcée par un locuteur masculin, alors que la deuxième phrase provient d'un locuteur féminin :

Phrase 1 : « Un loup s'est jeté immédiatement sur la petite chèvre ».

Phrase 2 : « Il se garantira du froid avec ce bon capuchon ».

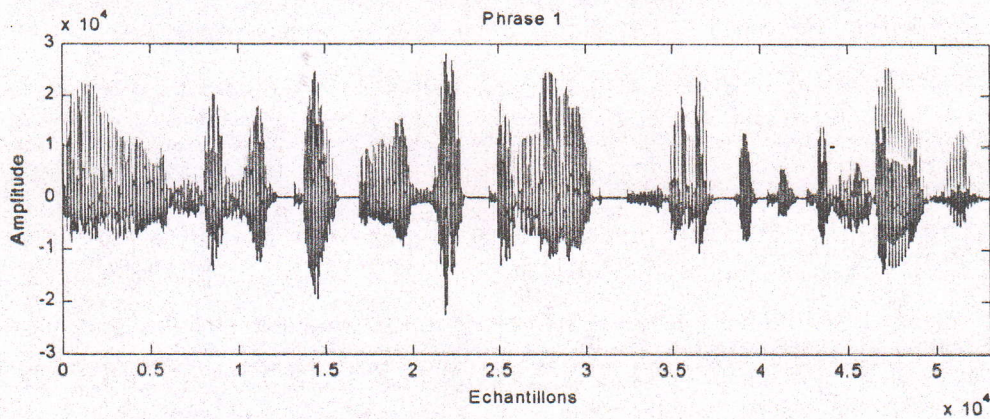


Figure 4.2a : Signal de parole (locuteur masculin).

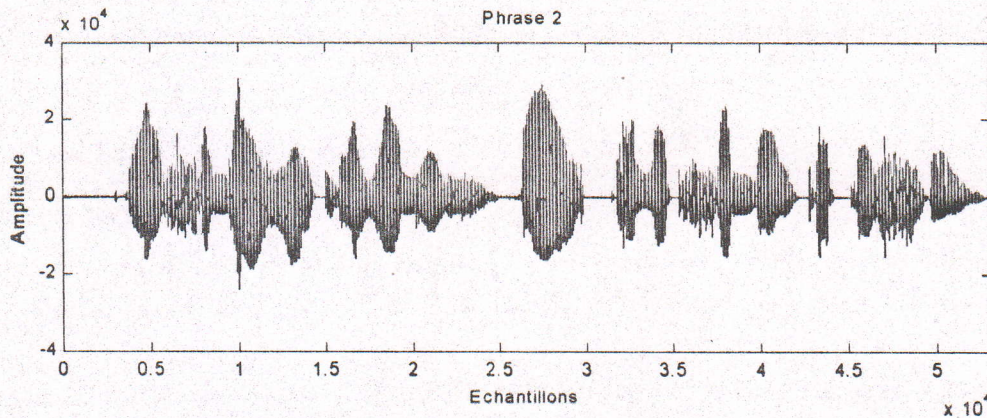


Figure 4.2b : Signal de parole (locuteur féminin).

Le critère de performance objectif couramment utilisé en annulation d'écho est l'évolution temporelle de l'énergie de l'erreur de filtrage normalisée par l'énergie du signal d'écho y_1 , exprimé en décibels (c'est l'atténuation de l'énergie de l'écho) :

$$J(t) = 10 \log_{10} \left(\frac{\sigma_{\bar{e}_{Nt}}^2}{\sigma_{\bar{y}_{Nt}}^2} \right) \quad (4.3)$$

où σ^2 désigne une moyenne temporelle effectuée sur un certain nombre d'échantillons consécutifs.

Avec la parole, ce critère de performance privilégie les zones du signal de forte énergie. Il n'est pas très significatif dans les zones de très faible énergie (silence) où l'erreur de filtrage et le signal ont des niveaux comparables.

Pour cette raison, on utilise, dans la suite, le critère objectif qui donne l'évolution temporelle de l'énergie de l'erreur de filtrage à priori, exprimée en *dB* :

$$EQM(t) = 10 \log_{10} \left(\sigma_{\hat{e}_{N,t}}^2 \right) \quad (4.4)$$

4.4 Phénomènes de divergence des algorithmes MCR appliqués à la parole

Depuis le début de notre exposé, les algorithmes MCR stabilisés numériquement n'ont été testés qu'avec des signaux stationnaires. L'utilisation des signaux non stationnaires, comme la parole, font apparaître d'autres problèmes de divergence. Les algorithmes MCR numériquement stables présentés au chapitre 2 ne permettent pas un fonctionnement stable (c'est à dire un fonctionnement sans interruption sur une très longue durée du signal) quelque soit le signal de parole.

Les résultats de simulation sont présentés sous forme de courbes, pour un ordre *N* de l'algorithme égal à 32, le facteur d'oubli $\lambda = 0.992$ ($p=4$) et la constante d'initialisation E_0 égale à 1.

La divergence de l'algorithme commence par une nette diminution de la variable de vraisemblance $\gamma_{N,t}$ intervenant juste après une non stationnarité du signal de parole (par exemple : passage d'une zone voisée très pauvre en harmoniques à une zone voisée très riche en harmoniques). Cette variable continue à converger vers 0, impliquant ainsi un blocage de la majorité des variables récursives mises en jeu par l'algorithme. Pour certaines variables de la prédiction aller/retour, la divergence ne se produit qu'après que la variable $\gamma_{N,t}$ ait atteint des valeurs infiniment petites.

Le caractère fortement non stationnaire du signal de parole est la principale cause de ces divergences. La présence de longues périodes de silence rendent les variances des erreurs de prédiction aller/retour très faibles devant l'énergie moyenne du signal de parole, et à l'arrivée du signal utile l'algorithme se trouve mal initialisé.

On peut aussi observer ce phénomène de divergence sur des sons voisés très pauvres en harmoniques dont le caractère prévisible rend les variances des erreurs de prédiction très faibles.

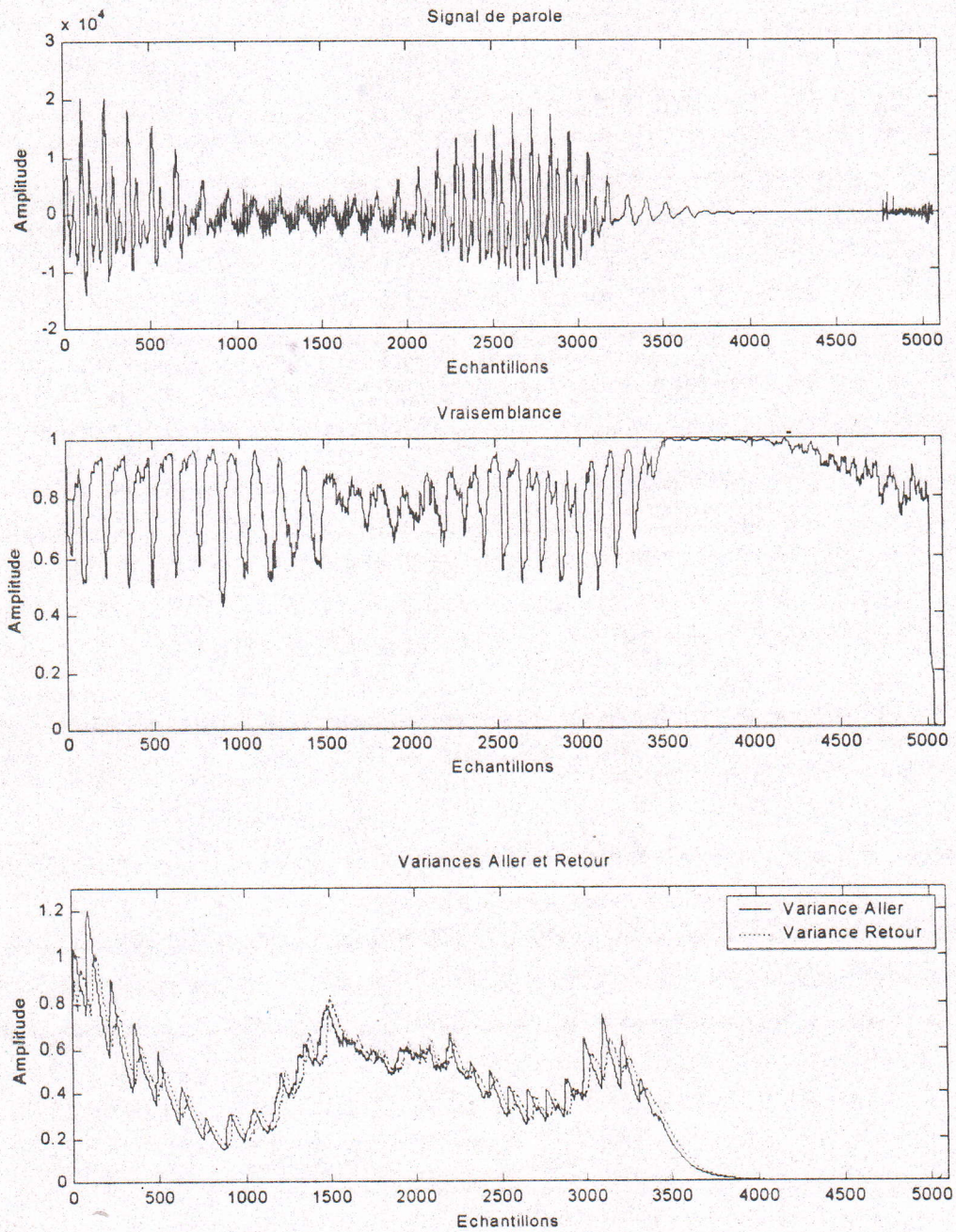


Figure 4.3 : Evolutions temporelles de la variable de vraisemblance $\gamma_{N,t}$ et des variances des erreurs de prédiction aller/retour pour un passage d'une zone de silence à une zone non voisée.

Pour $N=32$, $\lambda = 0.992$.

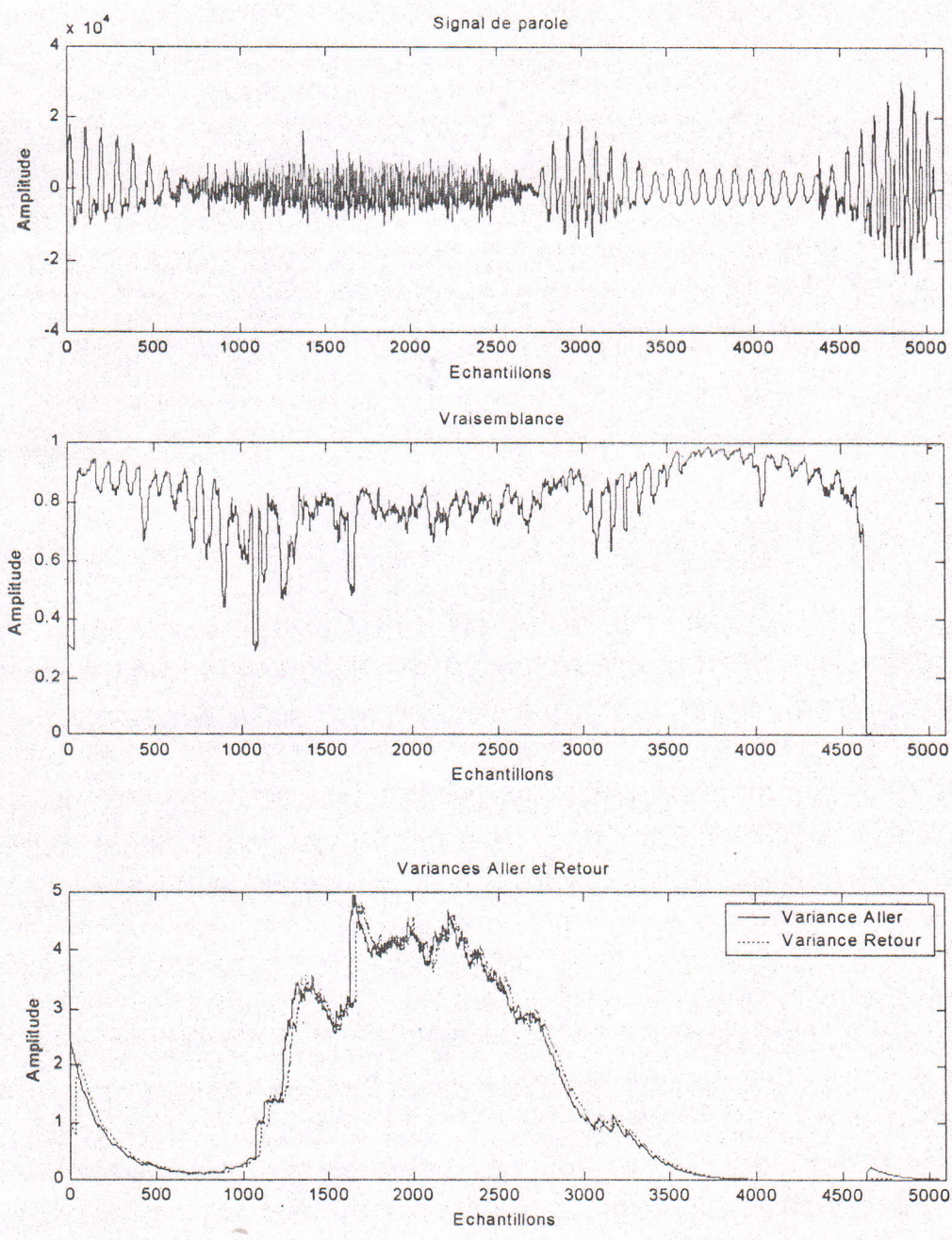


Figure 4.4 : Evolutions temporelles de la variable de vraisemblance $\gamma_{N,t}$ et des variances des erreurs de prédiction aller/retour pour un passage d'une zone voisée pauvre en harmonique à une zone voisée riche en harmonique. Pour $N=32$, $\lambda = 0.992$.

Chapitre 4 : Stabilisation des algorithmes MCR en présence de la parole

La non stationnarité du signal de parole, fait apparaître un type de divergence qui se traduit par une convergence vers 0 des variances des erreurs de prédiction aller/retour, de la variable de vraisemblance $\gamma_{N,t}$ et ainsi que du gain d'adaptation ou gain de Kalman $C_{N,t} = \gamma_{N,t} \tilde{C}_{N,t}$. Les vecteurs de prédiction aller/retour $a_{N,t}$ et $b_{N,t}$ ne sont plus valables pour la nouvelle tranche du signal, ainsi que le filtre transverse principal $H_{N,t}$ n'a rien de particulier c'est ce n'est qu'il est plus adaptatif.

Dans les simulations faites, les divergences (ou blocage) observées sont provoquées par des événements dans le signal de parole très divers. Dans la majorité des cas une divergence vers 0 de la variable $\gamma_{N,t}$ est détectée après le passage par une zone où les variances des erreurs de prédiction aller/retour deviennent très faibles. Les événements les plus fréquents sont:

- passage d'une zone de très faible énergie à une zone de forte énergie (par exemple : silence à signal utile voisé ou non voisé) (voir figure 4.3) ;
- passage d'une zone très prédictible à une autre zone prédictible ou non mais de forte énergie (par exemple : zone voisée pauvre en harmoniques à zone voisée riche en harmoniques ou non voisée) (voir figure 4.4).

Nous allons dans la suite étudier le phénomène de divergence de l'algorithme avec la parole pour un ordre $N=256$ et un facteur d'oubli $\lambda = 0.999$ ($p=4$).

La plus parts des divergences observées dans le cas $N=32$, ont disparu. La transition des variables de l'algorithme dans le cas $N=256$, pour un passage d'une zone de signal pauvre en harmoniques ou de silence à une zone de forte énergie se fait moins brutalement que dans le cas $N=32$. De cela, on constate une amélioration due au fait que le facteur d'oubli λ est plus proche de 1. Ce choix de λ permet d'éviter des convergences trop rapides vers 0 des variances des erreurs de prédiction aller/retour.

Par contre, les performances en vitesse de convergence et en capacité de poursuite, se dégradent très vite pour un facteur d'oubli λ très proche de 1.

Au paragraphe (4.5.3), nous proposons une nouvelle technique pour améliorer la vitesse de convergence et la capacité de poursuite.

4.5 Stabilisation des algorithmes MCR quand le signal d'excitation est la parole

Dans ce paragraphe, nous allons décrire des techniques de stabilisation déjà utilisées : méthode de réinitialisation [5] et la technique de blocage durant les silences [17], et par la suite on va proposer une nouvelle technique d'adaptation avec segmentation de la parole pour permettre une identification sans interruption avec la parole.

4.5.1 Méthode de réinitialisation

La méthode la plus simple qui permet de continuer le filtrage est de réinitialiser l'algorithme sur les paramètres $H_{N,t}$ déjà identifiés. D'après [5], la technique consiste à définir un seuil minimal γ_{min} de la variable de vraisemblance $\gamma_{N,t}$ au dessous duquel on réapprend le gain de Kalman et qu'on applique la procédure de réinitialisation sur l'échantillon courant.

La procédure est la suivante :

si $\gamma_{N,t-1} \leq \gamma_{min}$ alors :

$$a_{N,t-1} = b_{N,t-1} = \tilde{C}_{N,t-1} = 0_N^\downarrow ; H_{N,t-1} = H_{N,t-1} ; \\ \alpha_{N,t-1} = E_0 ; \beta_{N,t-1} = E_0 \lambda^{-N} ; \gamma_{N,t-1} = 1 .$$

Les seuls paramètres à fixer sont le seuil minimal γ_{min} et la constante d'initialisation E_0 des variances des erreurs de prédiction aller/retour.

Le choix du seuil γ_{min} n'est pas très critique, n'importe quel seuil très faible réinitialise l'algorithme mais risque de le laisser dans une période de faible adaptivité plus longtemps. La valeur asymptotique λ^N de la variable de vraisemblance peut être utilisée pour le choix de γ_{min} . Un facteur d'oubli λ faible conduit à des fluctuations importantes de $\gamma_{N,t}$; on pourra alors choisir par exemple $\gamma_{min} = \frac{\lambda^N}{10}$. Par contre un facteur d'oubli λ proche 1 donne une variable $\gamma_{N,t}$ moins erratique et on pourra choisir un seuil de réinitialisation relativement élevé; $\gamma_{min} = \frac{\lambda^N}{5}$ par exemple. La constante E_0 doit être bien choisie pour assurer le redémarrage de l'algorithme [5]. Pour cela, on estime en permanence une énergie $E(t)$ du signal d'entrée :

$$E(t) = w E(t-1) + x_t^2$$

$$E_0 = E(t_i)$$

où t_i est l'instant où $\gamma_{N,t-1}$ devient inférieure à γ_{min} .

Une constante $w < \lambda$ permet de réduire les valeurs prises par la constante E_0 et de mieux poursuivre les variations du signal d'entrée.

4.5.2 Blocage d'adaptation durant les silences

Les silences sont tout simplement des intervalles où le signal de parole est absent. Ces intervalles de silences sont nécessaires pour l'intelligibilité du signal vocal; ils occupent une part importante du temps de locution. En pratique, il s'agit de bruits, d'origines diverses, d'énergie négligeable devant celle du signal utile. Pendant les séquences de silence, les variances des erreurs de prédiction aller/retour tendent vers zéro, et à l'arrivée du signal utile l'algorithme se trouve mal initialisé ce qui provoque des discontinuités importantes dans certaines variables de l'algorithme et un blocage de ce dernier. Une technique proposée par [17] qui consiste à profiter de l'intervalle de silence pour bloquer l'adaptation, puisque le signal est absent donc l'information n'est pas perdue et de reprendre l'adaptation dès qu'il y a signal utile.

Pour détecter la présence d'un intervalle de silence, on estime en permanence l'énergie du signal de parole x_t :

$$E_x(t) = \lambda_c E_x(t-1) + (1-\lambda_c) x_t^2.$$

Le seul niveau d'énergie à fixer est l'énergie seuil E_{seuil} au delà de laquelle il y a adaptation, c'est à dire :

$$E_x(t) \leq E_{seuil} \Rightarrow \text{pas d'adaptation.}$$

La constante λ_c est choisie inférieure à 1.

4.5.3 Adaptation avec segmentation de la parole

D'après les résultats des simulations effectuées avec l'algorithme MCR, on a constaté qu'un signal de parole très corrélé dans les zones voisées nécessite un facteur d'oubli plus proche de 1 pour assurer la stabilité numérique. De plus, l'existence de longues séquences de silence (signal quasi nul) peut entraîner le blocage de l'algorithme. Mais durant les segments de parole faiblement corrélés, dans les zones non voisées, l'algorithme se comporte mieux avec un facteur d'oubli λ vérifiant la condition de stabilité (2.62) à une limite près.

Rappelons que le choix d'un facteur d'oubli λ très proche de 1 impose une limitation des performances en vitesse d'adaptation et en capacité de poursuite.

Notons aussi que les algorithmes MCR ne permettent pas une adaptation sélective, ils sont exacts pour un ordre N et un facteur d'oubli λ donnés.

Or avec la parole, après les instants qui suivent une forte non stationnarité (changement de modèle), la solution (dans la partie prédiction aller/retour) de l'algorithme est momentanément très éloignée de la solution optimale, ainsi à l'arrivée du signal utile l'algorithme se trouve mal initialisé (variances par rapport à l'énergie du signal d'entrée).

C'est la raison pour laquelle il nous a semblé plus intéressant d'utiliser une technique qui consiste à réinitialiser l'algorithme (réinitialisation de la partie prédiction aller/retour) sur les paramètres $H_{N,t}$ déjà identifiés, après un passage entre zones, puisque les anciennes variables internes de l'algorithme ne sont plus valables pour la nouvelle tranche du signal. Ainsi on peut utiliser un facteur d'oubli λ variable de manière discontinue dans le temps, qui selon les informations recueillies sur le signal d'entrée, on décide de changer la valeur de ce dernier. Pour la constante E_0 , elle doit être bien choisie pour assurer à coups sûr le redémarrage de l'algorithme. Pour cela, on estime en permanence une énergie $E(t)$ du signal d'entrée :

$$E(t) = w E(t-1) + x_t^2$$

avec la constante $w < 1$.

En faisant une adaptation adéquate du facteur d'oubli λ de l'algorithme en fonction de la nature des segments du signal de parole en cours d'utilisation, il suffit de retenir les points suivants :

- Un faible facteur d'oubli λ_m de l'algorithme durant les segments non voisés pour accélérer l'adaptation et par conséquent l'annulation d'écho acoustique;
- Un facteur d'oubli λ_v maximum durant les segments voisés, pour éviter des convergences trop rapides vers 0 des variances des erreurs de prédiction aller/retour;
- Le blocage total de l'adaptation durant les silences pour ne pas se trouver en situation de non adaptation (blocage de l'algorithme).

La procédure de réinitialisation est la suivante :

$$\begin{aligned} a_{N,t-1} &= b_{N,t-1} = \tilde{C}_{N,t-1} = 0_N^{\dagger} ; H_{N,t-1} = H_{N,t-1} ; \\ \alpha_{N,t-1} &= E_0 ; \beta_{N,t-1} = E_0 \lambda^{-N} ; \gamma_{N,t-1} = 1 . \end{aligned}$$

d'où : $E_0 = E(t_i)$ et $\lambda = \lambda_m$ ou λ_v .

avec : λ_m pour les segments non voisés, λ_v pour les segments voisés et t_i est l'instant où il y a eu un changement de zones.

Une telle technique n'est réalisable que si on peut détecter les trois principales zones. Une méthode de segmentation est utilisée pour répondre à ce problème. Cette méthode est dite récursive, puisque elle dépend des résultats précédents. Pour ce faire, on estime en permanence l'énergie récursive du signal de parole donnée par :

$$E_x(t) = w_1 E_x(t-1) + (1-w_1) x_t^2$$

avec $w_1 < 1$, afin de partager les segments de fortes énergie des segments de faible énergie.

Ainsi que le taux de passage par zéro donné par :

$$Etpz(t) = w_2 Etpz(t-1) + (1-w_2) Tpz$$

avec : $w_2 < 1$;

$$Tpz = \begin{cases} 1 & \text{si } x_{t-1} = 0 \text{ et } x_t = 0 \text{ ou } (x_{t-1} \times x_t) < 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

pour partager les segments voisés des segments non voisés.

Il est clair que les valeurs du $Etpz(t)$ sont normalement plus élevées pour les sons non voisés que pour les sons voisés [20]: ceci est illustré à la figure 4.5.

Pour cela, il reste à définir des seuils pour $E_x(t)$ et $Etpz(t)$, afin de les appliquer dans la segmentation (voisée - non voisée - silence).

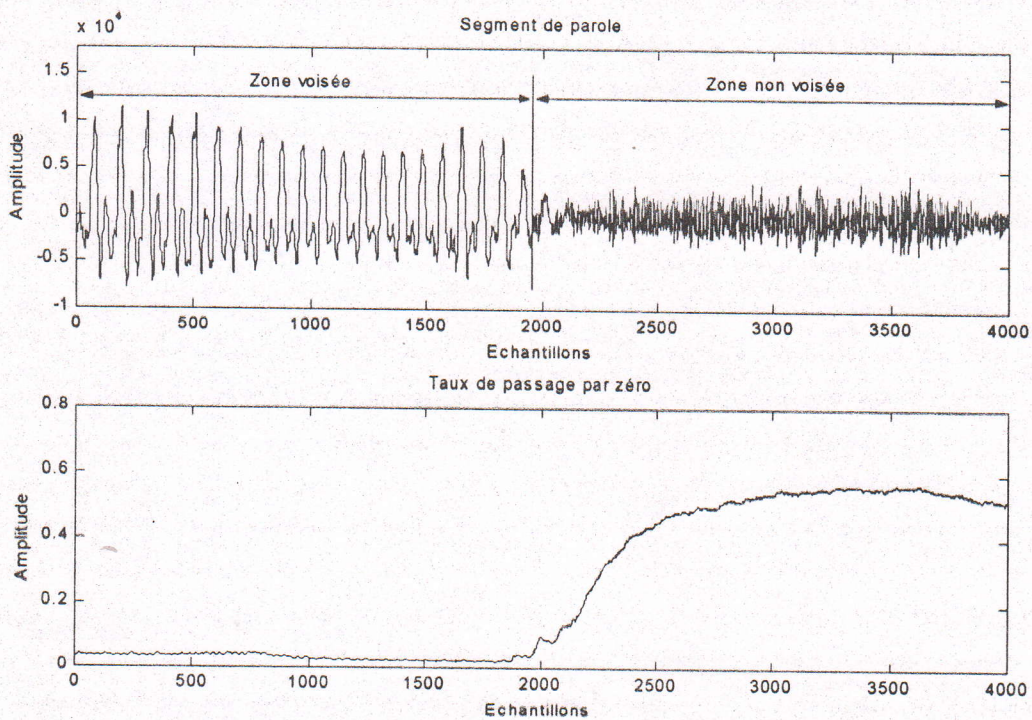


Figure 4.5 : Taux de passage par zéro pour les zones voisée et non voisée.

4.6 Résultats de simulation

4.6.1 La méthode de segmentation récursive

Nous présentons ici quelques unes des très nombreuses simulations systématiques que nous avons effectuées sur la méthode de segmentation récursive sous forme de courbes. La difficulté de cette méthode réside dans la fixation des seuils de l'énergie et du taux de passage par zéro pour les zones voisées, non voisées et silences.

On sait bien que les caractéristiques anciennes du signal aient une influence aussi importante que les variations récentes des observations, il soit donc impérativement nécessaire d'introduire une pondération* exponentielle dans le calcul de l'énergie récursive afin d'amoinrir l'influence d'un passé trop lointain. La mise en œuvre de la segmentation récursive consiste à varier les pondérations w_1 et w_2 pour avoir les meilleurs seuils possibles de l'énergie et du taux de passage par zéro pour les trois zones.

Dans une première étape, on utilise l'énergie moyenne récursive afin de déterminer les unités silences. La deuxième étape est pour la détermination des unités voisées et non voisées, en se basant sur les résultats du taux de passage par zéro calculer récursivement avec un choix très sensible de w_2 . Pour avoir des résultats satisfaisants, on va prendre plusieurs valeurs de w_1 et w_2 de telle sorte que la courbe de variation, que ça soit de l'énergie récursive ou du taux de passage par zéro, soit la plus abrupte possible mais avec moins d'oscillations.

Les figures 4.6 et 4.7 donnent respectivement l'évolution temporelle de l'énergie récursive $E_x(t)$ et celle du taux de passage par zéro $Etpz(t)$ pour différentes valeurs des pondérations w_1 et w_2 . A noter que la sortie des résultats de la segmentation récursive prend :

- « 1 » pour les zones voisées ;
- « -1 » pour les zones non voisées ;
- « 0 » pour les zones de silences.

On remarque que les blocs silences sont bien détectés si la courbe des variations de l'énergie récursive est la plus abrupte possible même s'il y a des oscillations. Pour la détection des blocs voisés et non voisés, il faut que la courbe de variation du taux de passage par zéro calculés récursivement soit la plus raide possible avec moins d'oscillations.

D'après les figures, le meilleur choix des pondérations est : $w_1 = 0.98$ et $w_2 = 0.995$. Et on a abouti aux seuils normalisés de l'énergie récursive $E_{seuil} = 95$ et du taux de passage par zéro $Etpz_{seuil} = 0.135$. L'application de ces seuils dans la segmentation récursive est illustrée sur la figure 4.8.

(* Ce terme est utilisé au lieu de facteur d'oubli, pour éviter toute confusion avec le facteur d'oubli de l'algorithme).

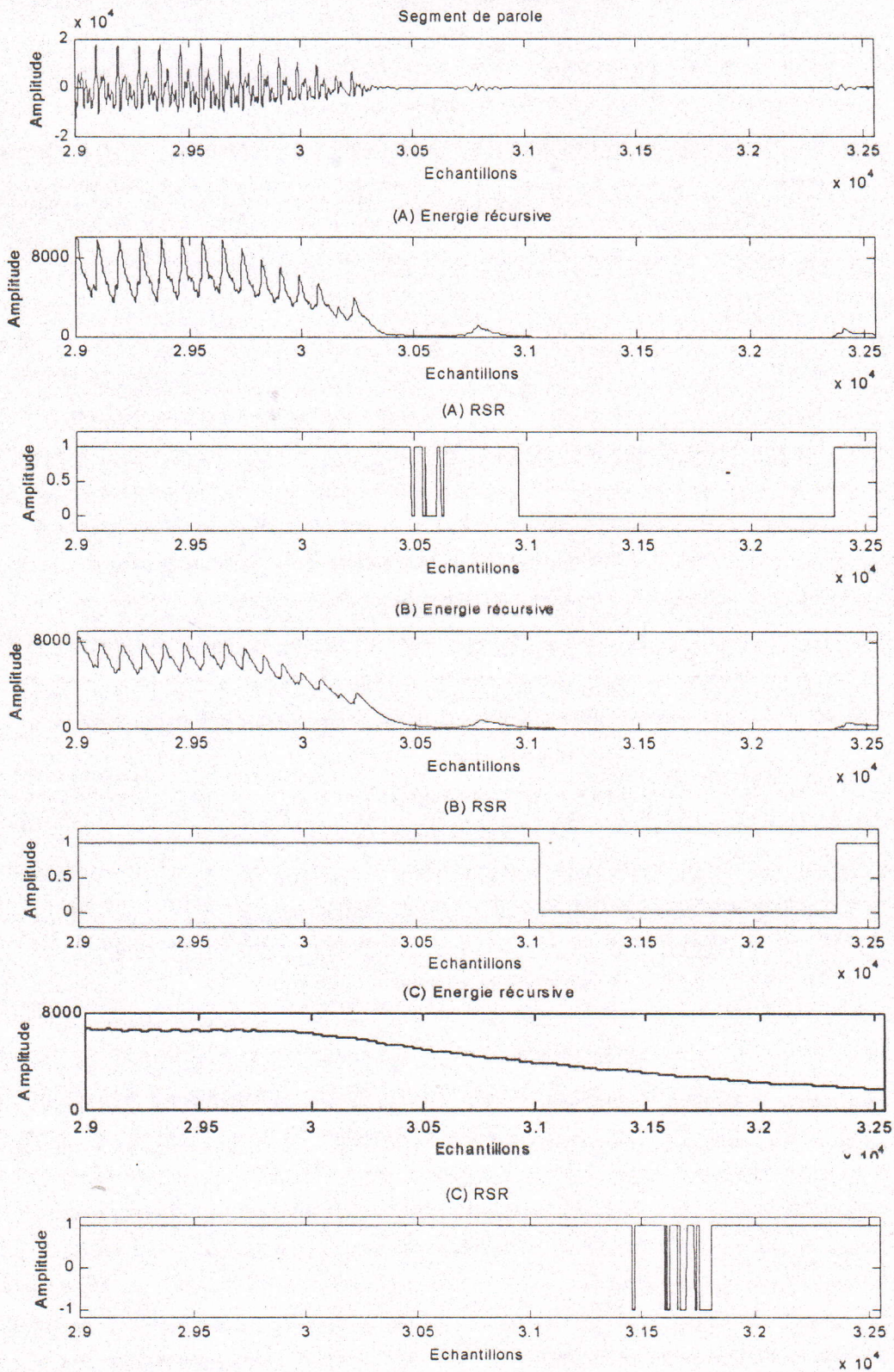


Figure 4.6: Résultats de la segmentation récursive pour différentes valeurs de w_1 .
 Avec : RSR : Résultats de la Segmentation Récursive
 et A($w_1 = 0.95$), B($w_1 = 0.98$), C($w_1 = 0.999$).

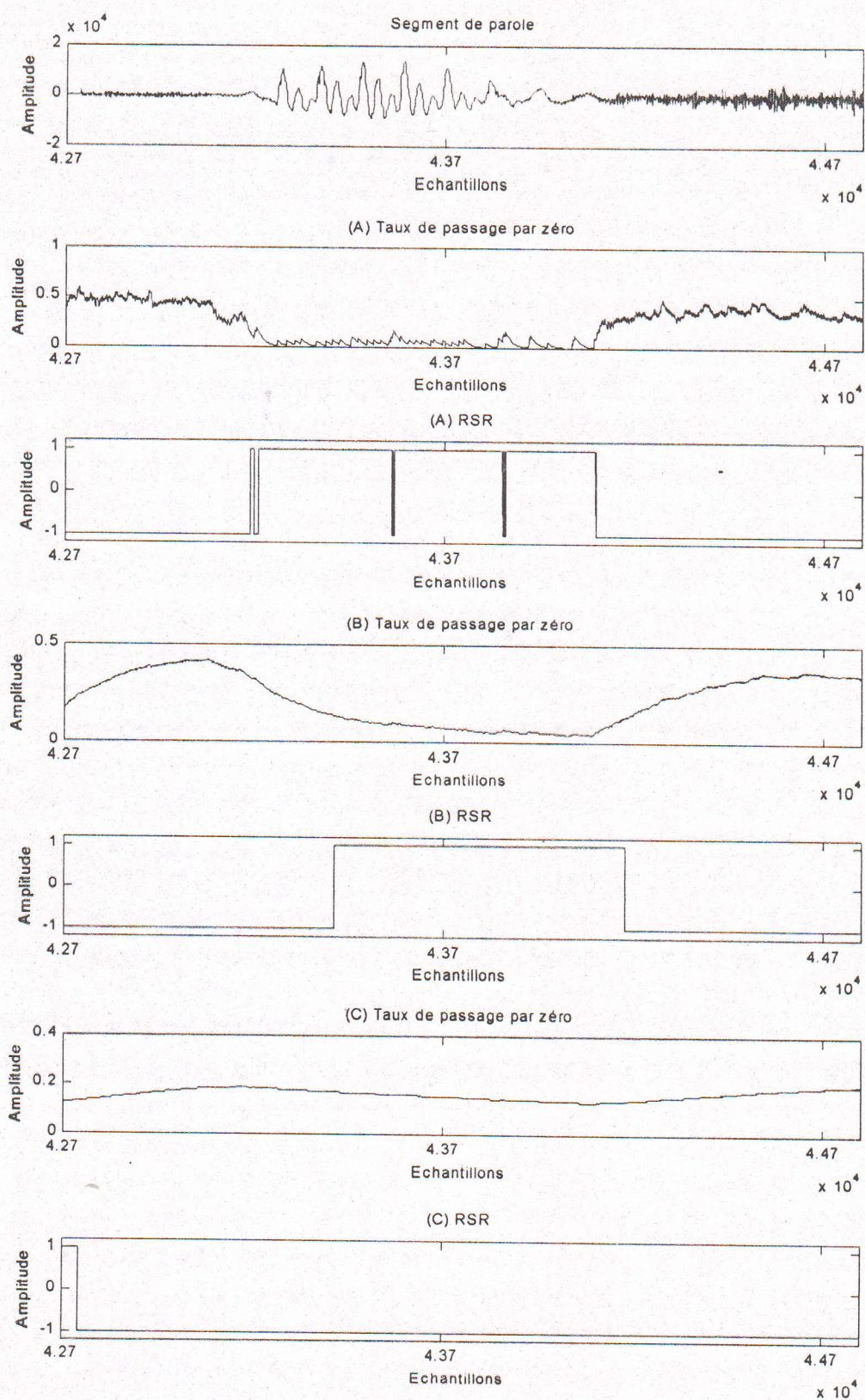


Figure 4.7: Résultats de la segmentation récursive pour différentes valeurs de w_2 . Avec : RSR : Résultats de la Segmentation Récursive et $A(w_2 = 0.95)$, $B(w_2 = 0.995)$, $C(w_2 = 0.9995)$.

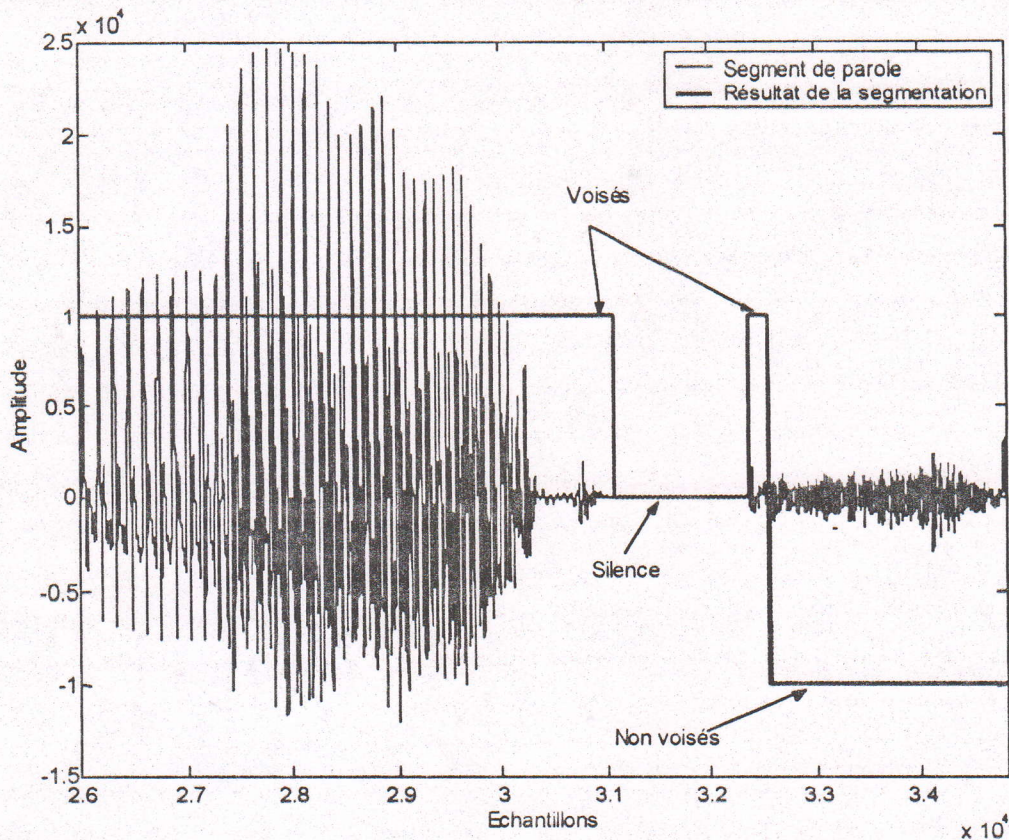


Figure 4.8: Résultat de la segmentation récursive pour un segment de parole représentant les trois principales zones (Voisée, Silence, Non voisée).

4.6.2 Performances de la technique d'Adaptation avec segmentation de la parole

Nous revenons ici sur les détails de la nouvelle technique proposée, où quelques résultats de simulation sont donnés, pour nous assurer de la stabilité à très long terme des algorithmes MCR. Ces derniers sont implantés dans une configuration d'annulation d'écho acoustique, donc de filtrage adaptatif.

Pour mettre en évidence l'efficacité de la technique d'adaptation avec segmentation de la parole, plusieurs approches expérimentales sont utilisées pour comparer les performances de cette technique à celles de la méthode de réinitialisation et de blocage durant les silences.

Chapitre 4 : Stabilisation des algorithmes MCR en présence de la parole

L'approche que nous suivons, consiste à déterminer le nombre de fois où il y a eu une tendance vers une divergence. Pour cela, la méthode de réinitialisation est incluse dans les deux autres techniques pour assurer le fonctionnement continu de l'algorithme si jamais il y a divergence. Les résultats dans ce cas sont portés sur les tableaux 4.1 et 4.2, pour les deux ordres : $N=10$ et $N=32$, et pour les deux signaux de parole (Phrase 1 et Phrase 2). La valeur du facteur d'oubli λ est calculé à partir du paramètre « p » de la relation (2.62). Il faut bien noter que d'un point de vue stabilité, les deux facteurs d'oubli de la technique d'adaptation avec segmentation de la parole, correspondants aux deux zones voisées et non voisées, sont choisis égaux ($\lambda = \lambda_{nv} = \lambda_v$).

p	Méthode de Réinitialisation		Méthode de Blocage Durant les silences		Méthode d'Adaptation avec segmentation de la parole	
	N=10	N=32	N=10	N=32	N=10	N=32
3	19	10	15	04	09	03
5	07	04	04	0	03	0
10	02	01	0	0	0	0
20	0	0	0	0	0	0

Tableau 4.1 : Nombres de réinitialisation pour les trois méthodes avec le signal de parole « Phrase 1 ».

p	Méthode de Réinitialisation		Méthode de Blocage Durant les silences		Méthode d'Adaptation avec segmentation de la parole	
	N=10	N=32	N=10	N=32	N=10	N=32
3	15	07	11	03	09	3
5	09	05	06	03	03	1
10	05	03	01	0	0	0
20	02	01	0	0	0	0
40	01	0	0	0	0	0
50	0	0	0	0	0	0

Tableau 4.2 : Nombres de réinitialisation pour les trois méthodes avec le signal de parole « Phrase 2 ».

Les tableaux montrent que la technique d'adaptation avec segmentation de la parole réduit considérablement le nombre de réinitialisations, donc de tendance vers des divergences. Les réinitialisations qu'on observe sont dues généralement au choix d'un facteur d'oubli faible pour les zones voisées. A savoir que cette technique ne dégrade absolument pas les performances de filtrage.

Il est important de signaler qu'en plus de la stabilité de l'algorithme MCR, l'intérêt majeur de la technique d'adaptation avec segmentation de la parole est l'amélioration de la vitesse de convergence et la capacité de poursuite des non stationnarités.

Pour réaliser l'opération de filtrage, nous utilisons des signaux de paroles convolués avec des réponses impulsionnelles connues de longueurs : $N=10$, $N=16$, $N=32$, $N=64$, $N=128$ et $N=256$ points. Les résultats de ces simulations sont représentés sous forme de tableaux comparatifs (tableaux 4.3 et 4.4) entre la méthode de réinitialisation, la technique de blocage durant les silences et la technique d'adaptation avec segmentation de la parole. Ces tableaux donnent les résultats de l'énergie de l'erreur de filtrage finale (EQM) pour les deux signaux de parole «Phrase 1» et «Phrase 2». Les deux cas où les facteurs d'oubli de la technique d'adaptation avec segmentation de la parole égaux ou non ($\lambda_v = \lambda_{nv}$ ou $\lambda_v > \lambda_{nv}$) sont aussi illustrés sur ces deux tableaux.

Par ailleurs, il faut noter que le facteur d'oubli de la méthode de réinitialisation et de la technique de blocage durant les silences est égal au facteur d'oubli de la technique d'adaptation avec segmentation de la parole correspondant aux zones voisées ($\lambda = \lambda_v$).

Afin d'illustrer les performances de la technique d'adaptation avec segmentation de la parole, on va présenter l'évolution temporelle de l'énergie de l'erreur de filtrage (EQM) donnée par la relation 4.4, correspondant à l'identification d'une réponse impulsionnelle connue a priori de $N=32$. Cette présentation rentre dans un cadre comparatif des trois méthodes de stabilisation.

Les paramètres utilisés sont : $p_{nv} = 4$ ($\lambda_{nv} = 0.992187$), $p_v = 7$ ($\lambda_v = 0.995535$) et $E_0 = 1$, pour le signal de parole «Phrase 1» et $p_{nv} = 4$ ($\lambda_{nv} = 0.992187$), $p_v = 10$ ($\lambda_v = 0.996875$) et $E_0 = 1$, pour le signal de parole «Phrase 2». Les figures 4.8 et 4.9 sont les représentations graphiques de ces résultats. Les EQM de simulations sont calculées, sur une moyenne de 128 points consécutifs. De plus, les cas de ($\lambda_v = \lambda_{nv}$) ou ($\lambda_v > \lambda_{nv}$) de la technique d'adaptation avec segmentation de la parole, sont présentés pour voir l'amélioration apportée par cette dernière.

On constate que cette technique améliore nettement la vitesse de convergence initiale de l'algorithme MCR par rapport aux autres techniques de stabilisation, ainsi le choix réduit du facteur d'oubli de la nouvelle technique dans les zones non voisées, améliore de plus la vitesse de convergence en régime permanent.

Chapitre 4 : Stabilisation des algorithmes MCR en présence de la parole

Les abréviations qui vont être utilisées par la suite sont les suivantes :

- REINI** : Méthode de Réinitialisation (avec : $p = p_v \Rightarrow \lambda = \lambda_v$);
BDS : Technique de blocage durant les silences (avec : $p = p_v \Rightarrow \lambda = \lambda_v$);
ASP : Technique d'adaptation avec segmentation de la parole (avec : $p = p_v = p_{mv} \Rightarrow \lambda = \lambda_v = \lambda_{mv}$, ou $p_v > p_{mv} \Rightarrow \lambda_v > \lambda_{mv}$).

Signal de parole : Phrase 1

N	p_{mv}	λ_{mv}	p_v	λ_v	EQM _{finale} (dB)/Méthode			
					ASP		BDS	REINI
					$\lambda_v > \lambda_{mv}$	$\lambda_v = \lambda_{mv}$	$\lambda = \lambda_v$	$\lambda = \lambda_v$
10	10	0.990000	15	0.993333	-92.040	-92.040	-92.040	-92.040
16	7	0.991071	10	0.993750	-91.552	-91.628	-91.552	-91.552
32	4	0.992187	7	0.995535	-92.170	-92.170	-92.170	-92.170
64	3	0.994791	5	0.996875	-90.944	-90.946	-90.920	-90.920
128	2	0.996093	3	0.997395	-90.554	-90.551	-90.525	-90.525
256	1	0.996093	3	0.998697	-91.413	-91.427	-91.431	-91.433

Tableau 4.3 : Résultats de l'énergie de l'erreur de filtrage finale EQM avec le signal de parole « Phrase 1 ».

Signal de parole : Phrase 2

N	p_{mv}	λ_{mv}	p_v	λ_v	EQM _{finale} (dB)/Méthode			
					ASP		BDS	REINI
					$\lambda_v > \lambda_{mv}$	$\lambda_v = \lambda_{mv}$	$\lambda = \lambda_v$	$\lambda = \lambda_v$
10	17	0.994117	30	0.996666	-92.520	-92.524	-92.524	-92.524
16	10	0.993750	15	0.995833	-92.306	-92.334	-92.312	-92.312
32	4	0.992187	10	0.996875	-92.097	-92.146	-92.144	-92.147
64	3	0.994791	10	0.998437	-92.244	-92.258	-92.251	-92.251
128	2	0.996093	5	0.998437	-92.439	-92.451	-92.458	-92.458
256	1	0.996093	3	0.998697	-92.478	-92.437	-92.382	-92.382

Tableau 4.4 : Résultats de l'énergie de l'erreur de filtrage finale EQM avec le signal de parole « Phrase 2 ».

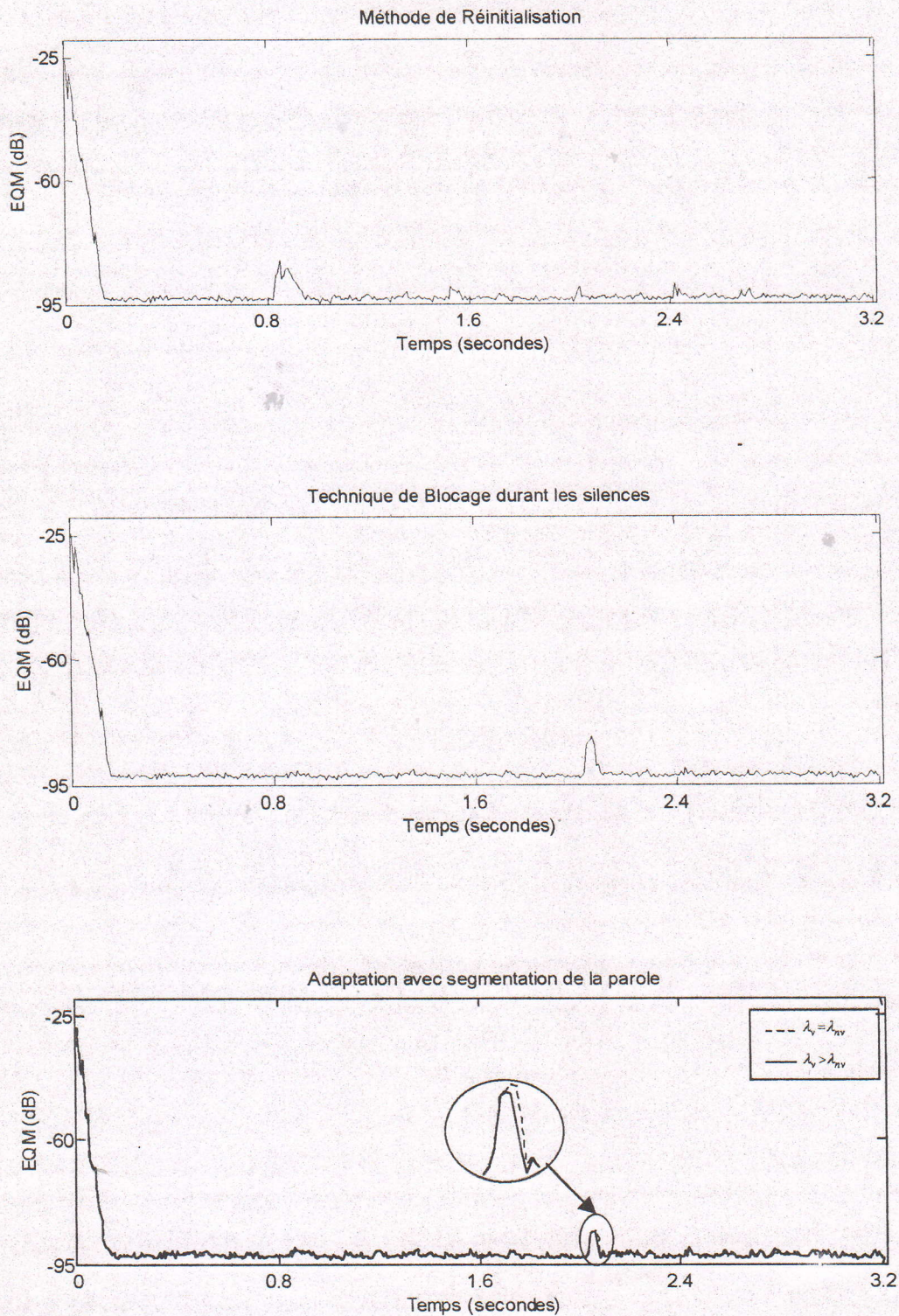


Figure 4.8 : Evolution temporelle de l'énergie de l'erreur de filtrage $EQM(t)$ exprimée en dB avec $N=32$ $E_0=1$, x_i : phrase 1.

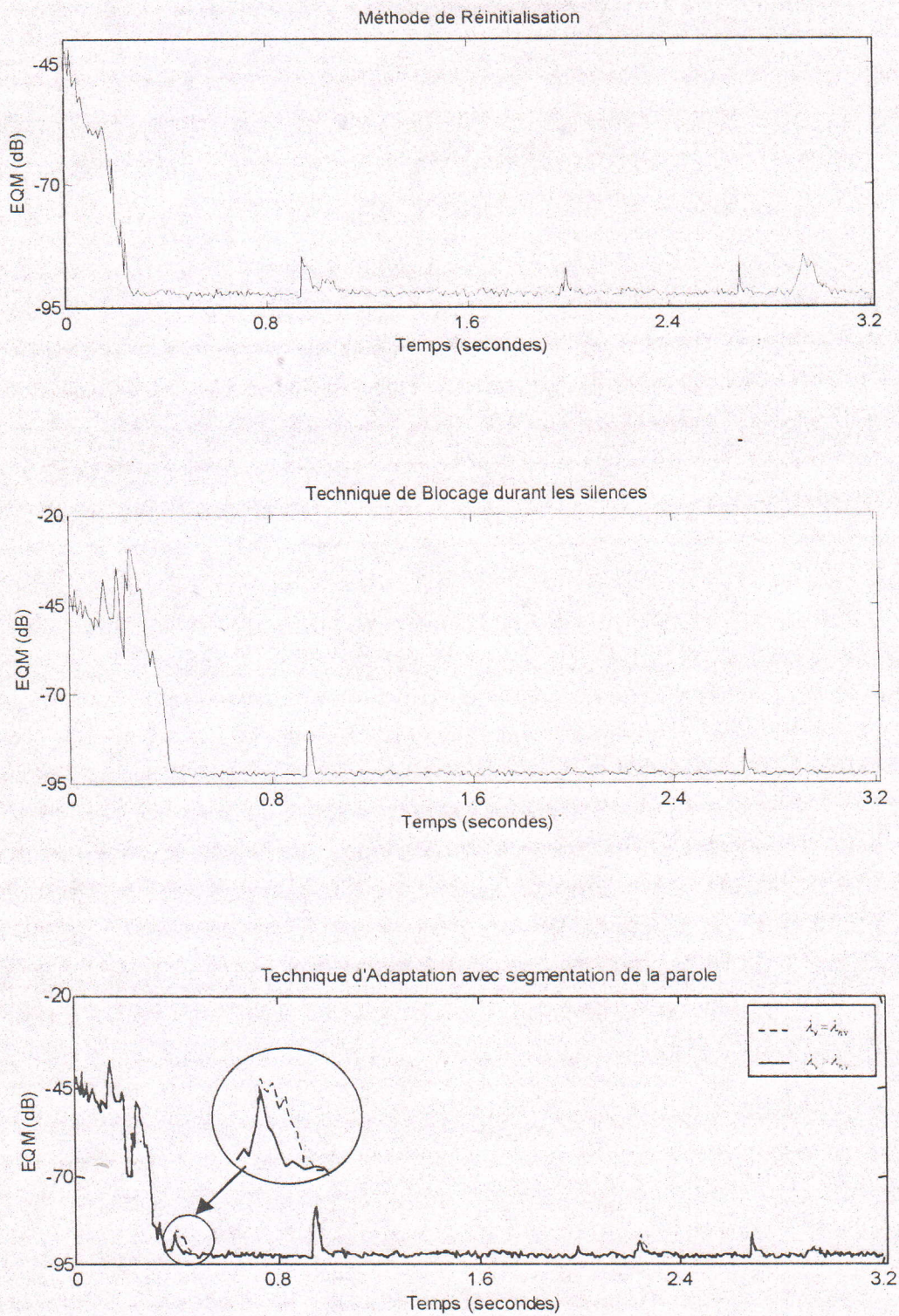


Figure 4.9 : Evolution temporelle de l'énergie de l'erreur de filtrage $EQM(t)$ exprimée en dB avec $N=32$ $E_0=1$, x_i : phrase 2

On remarque que les trois méthodes de stabilisation ont données pratiquement les mêmes résultats de l'énergie de l'erreur de filtrage finale en utilisant deux signaux de parole « Phrase 1 » et « Phrase 2 ». A signaler encore que cette technique proposée permet de choisir un facteur d'oubli au dessous de la condition de stabilité (2.62), dans les zones non voisées, chose qui n'est pas possible pour les autres techniques.

D'autre part, les changements acoustiques ou les non stationnarités du canal acoustique se traduisent essentiellement par des sauts dans la réponse impulsionnelle [5]. A ce fait et pour mieux voir l'influence d'un facteur d'oubli λ variable sur la technique d'adaptation avec segmentation de la parole, un exemple de simulation est présenté sur les figures de 4.10 à 4.14. Dans cet exemple nous avons simulés deux sauts dans la réponse impulsionnelle à identifier. Un premier saut se situe dans une zone voisée du signal de parole et le second saut est dans une zone non voisée, où le facteur d'oubli est sensé être faible devant le facteur d'oubli des zones voisées. Ces figures illustrent différents cas pour différents ordres de l'algorithme.

On observe que dans le cas d'un facteur d'oubli variable, l'algorithme converge plus rapidement dans les zones non voisées que dans le cas d'un facteur d'oubli fixe. Ceci confirme l'amélioration apportée par la technique proposée.

A titre de comparaison entre les trois techniques, les figures 4.15 à 4.19 montrent les résultats des EQM, avec différents ordres et pour le signal de parole « Phrase 1 ». Pour tester la vitesse de convergence de l'algorithme en régime initial et en régime permanent, l'exemple concernant le saut dans la réponse impulsionnelle est présenté aussi sur ces figures dans les zones non voisées, pour voir la différence en vitesse de convergence entre les trois techniques.

Cependant, il apparaît clairement que le facteur d'oubli peut accélérer la convergence de la réponse impulsionnelle vers sa limite.

La vitesse de convergence initiale des algorithmes MCR dépend de la valeur du facteur d'oubli exponentiel λ et de la valeur E_0 qui permet d'initialiser les variances mises en jeu dans l'algorithme. Dans ces conditions, la plus petite valeur de E_0 qui permet de faire fonctionner l'algorithme avec succès est de l'ordre de l'énergie du signal d'entrée. Par conséquent, c'est ce qui correspond à la vitesse initiale maximale que l'on peut espérer atteindre avec un fonctionnement normal de l'algorithme.

En régime permanent, la vitesse de convergence des algorithmes MCR dépend uniquement du choix du facteur d'oubli exponentiel. Dans ce cas, la vitesse de convergence de la nouvelle technique est toujours supérieure dans les zones non voisées à celle des autres techniques.

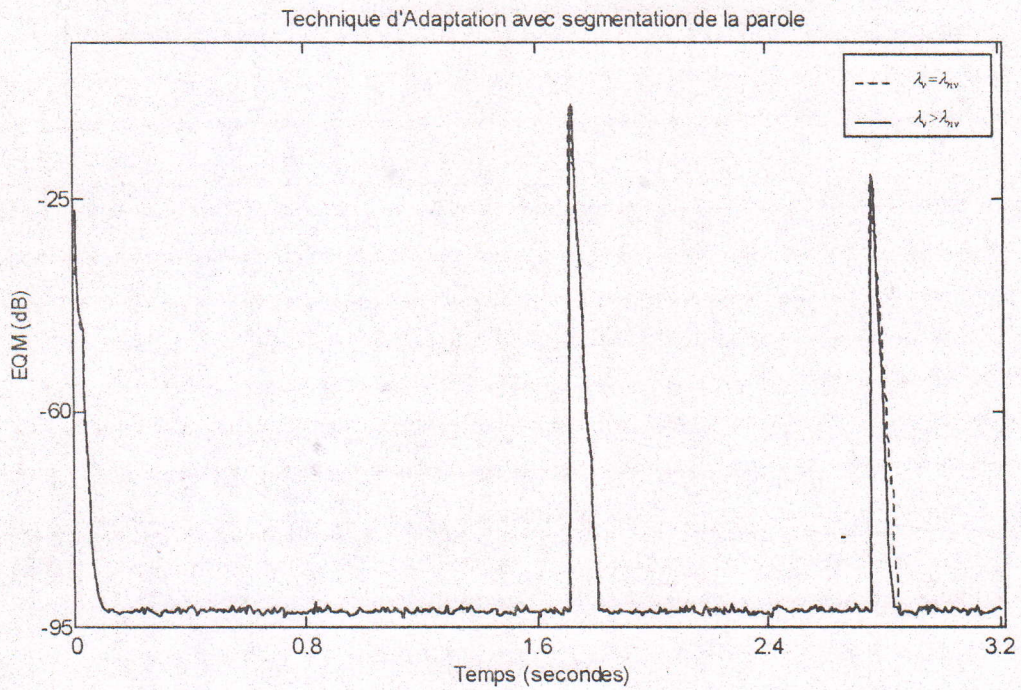


Figure 4.10 : Effet du facteur d'oubli λ sur la vitesse de convergence des algorithmes MCR en régime permanent pour la technique d'adaptation avec segmentation de la parole, avec $N=10$, $E_0=1$, x_1 : phrase 1.

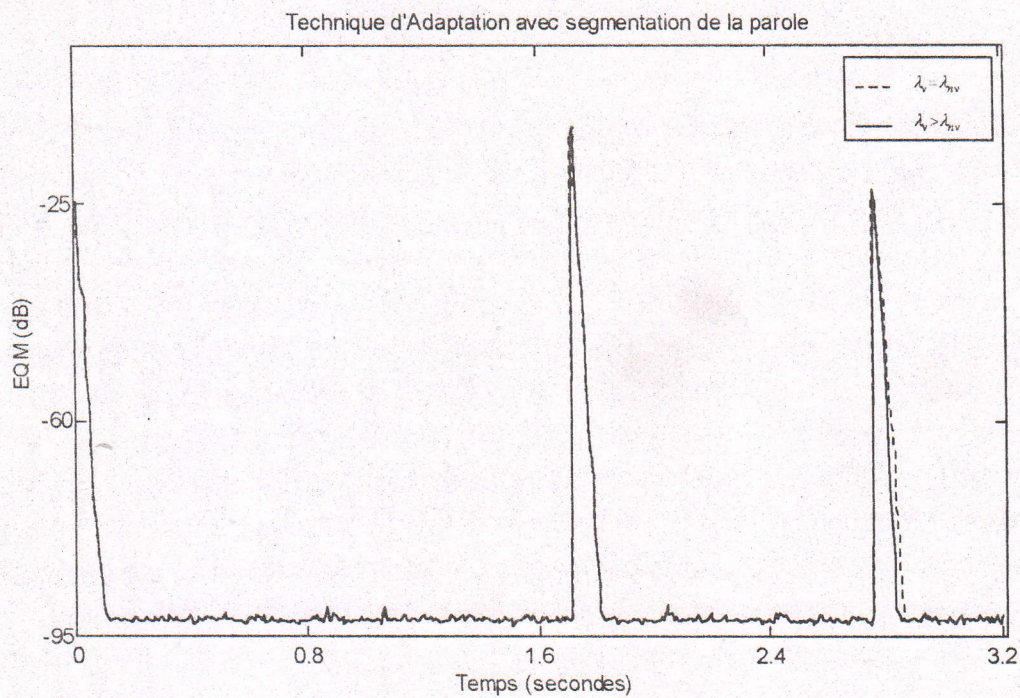


Figure 4.11 : Effet du facteur d'oubli λ sur la vitesse de convergence des algorithmes MCR en régime permanent pour la technique d'adaptation avec segmentation de la parole, avec $N=16$, $E_0=1$, x_1 : phrase 1.

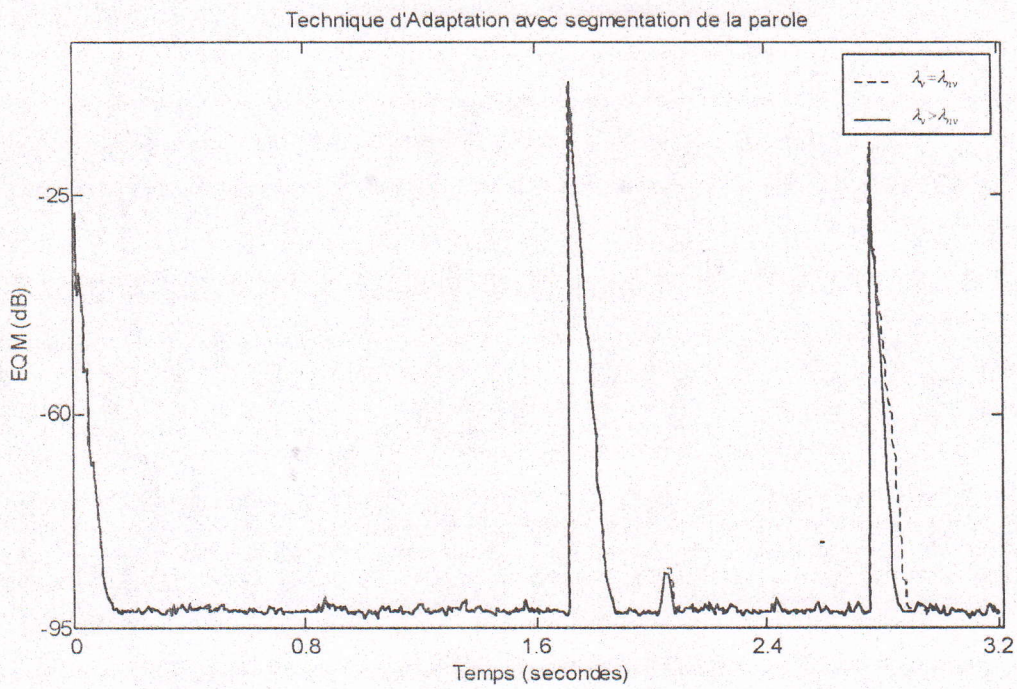


Figure 4.12 : Effet du facteur d'oubli λ sur la vitesse de convergence des algorithmes MCR en régime permanent pour la technique d'adaptation avec segmentation de la parole, avec $N=32$, $E_0=1$, x_i : phrase 1.

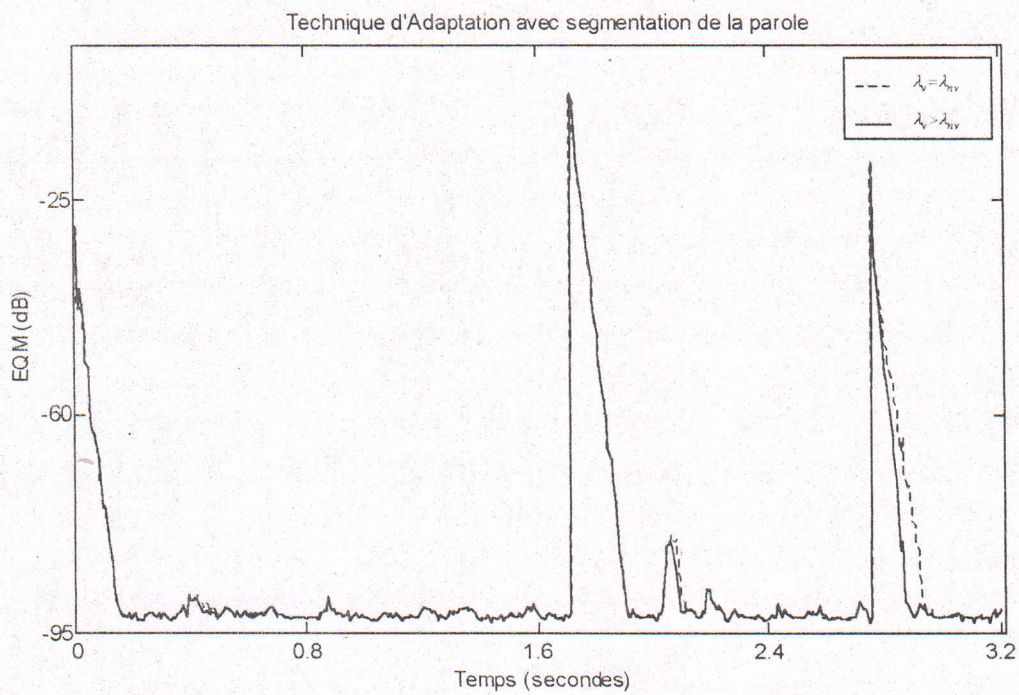


Figure 4.13 : Effet du facteur d'oubli λ sur la vitesse de convergence des algorithmes MCR en régime permanent pour la technique d'adaptation avec segmentation de la parole, avec $N=64$, $E_0=1$, x_i : phrase 1.

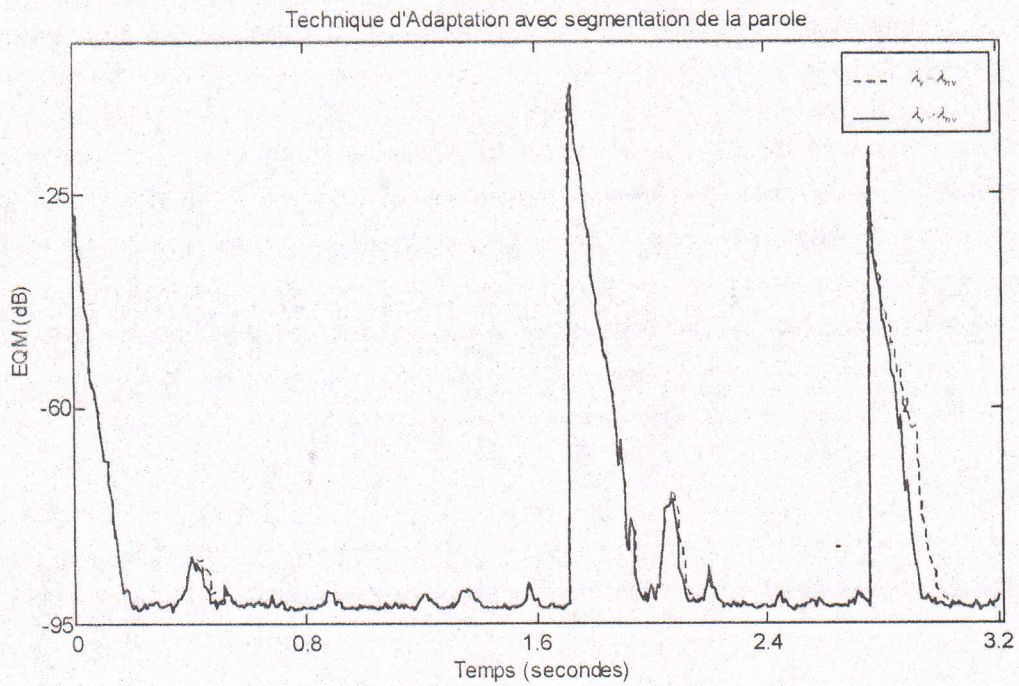


Figure 4.14 : Effet du facteur d'oubli λ sur la vitesse de convergence des algorithmes MCR en régime permanent pour la technique d'adaptation avec segmentation de la parole, avec $N=128, E_0=1, x_i$: phrase 1.

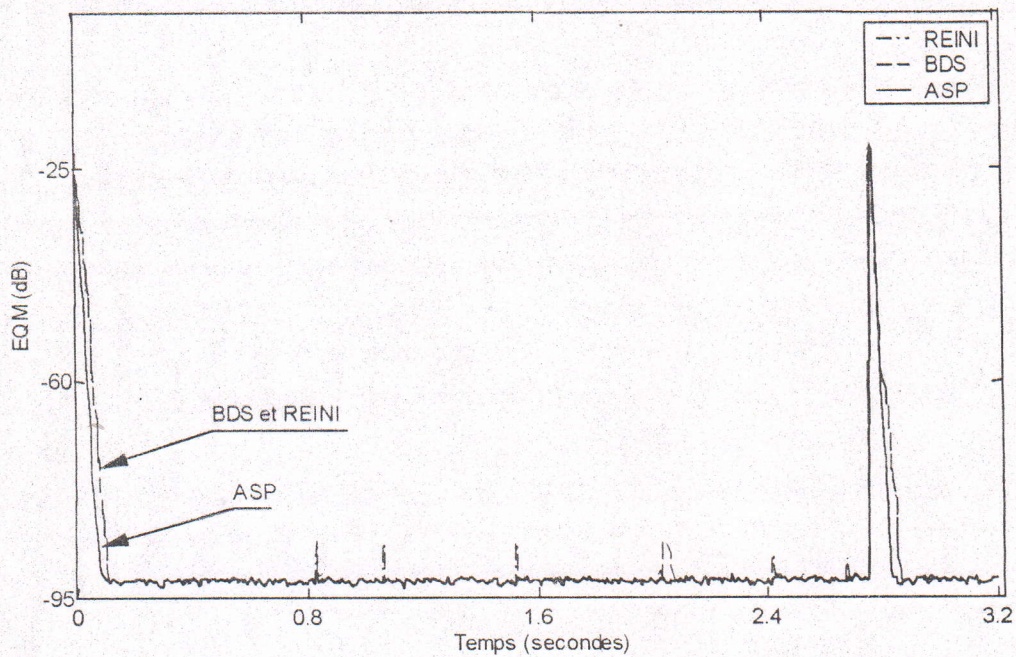


Figure 4.15 : Comparaison de la vitesse de convergence pour les trois méthodes de stabilisation, avec $N=10, E_0=1, x_i$: phrase 1.

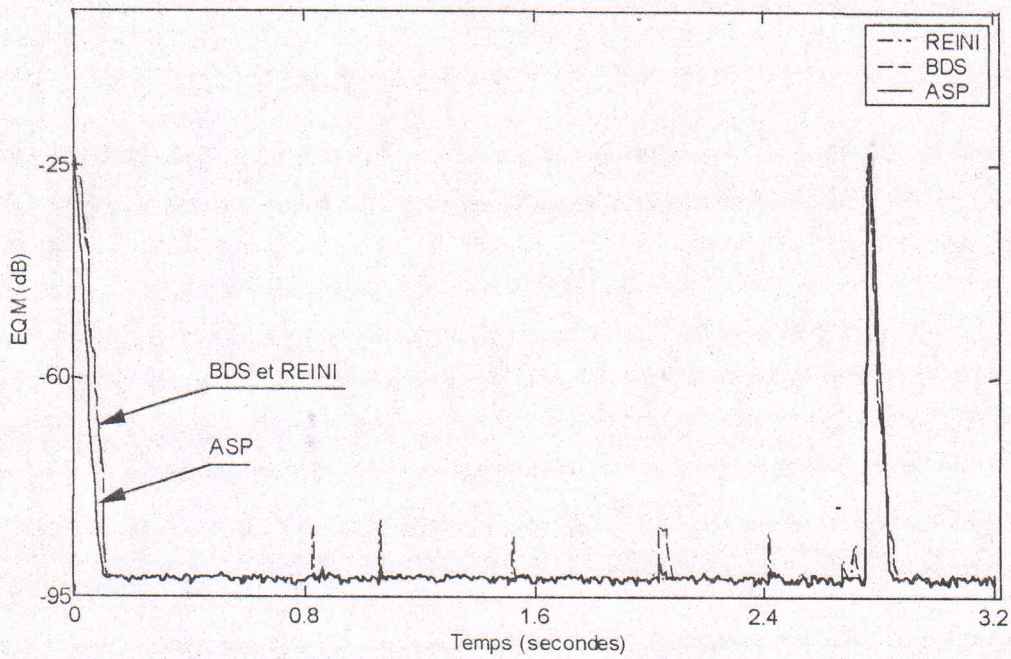


Figure 4.16 : Comparaison de la vitesse de convergence pour les trois méthodes de stabilisation, avec $N=16$, $E_0=1$, x_1 : phrase 1.

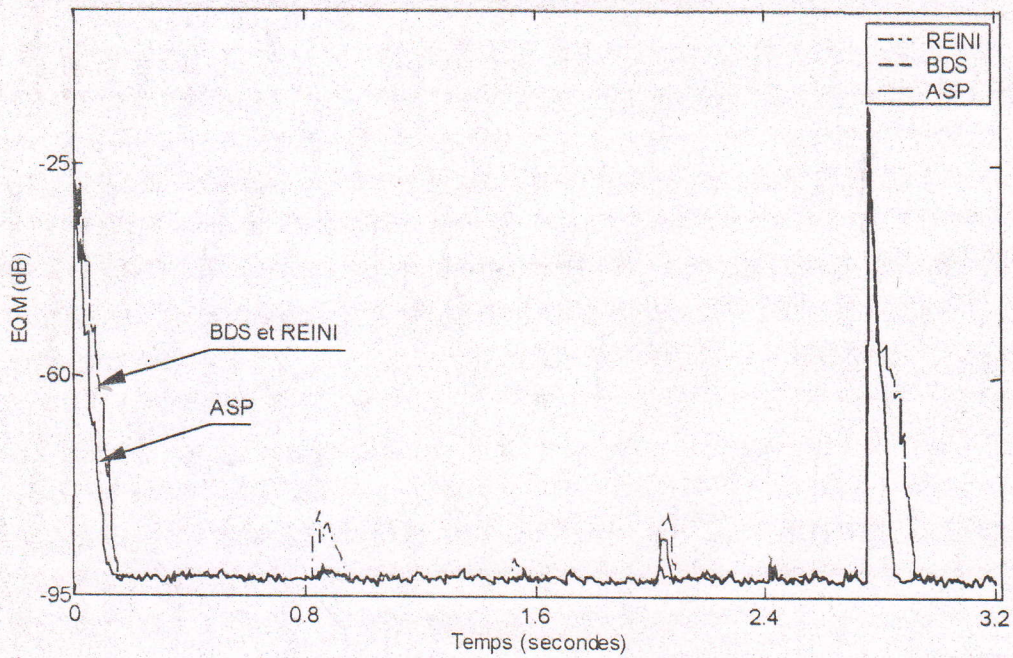


Figure 4.17 : Comparaison de la vitesse de convergence pour les trois méthodes de stabilisation, avec $N=32$, $E_0=1$, x_1 : phrase 1.

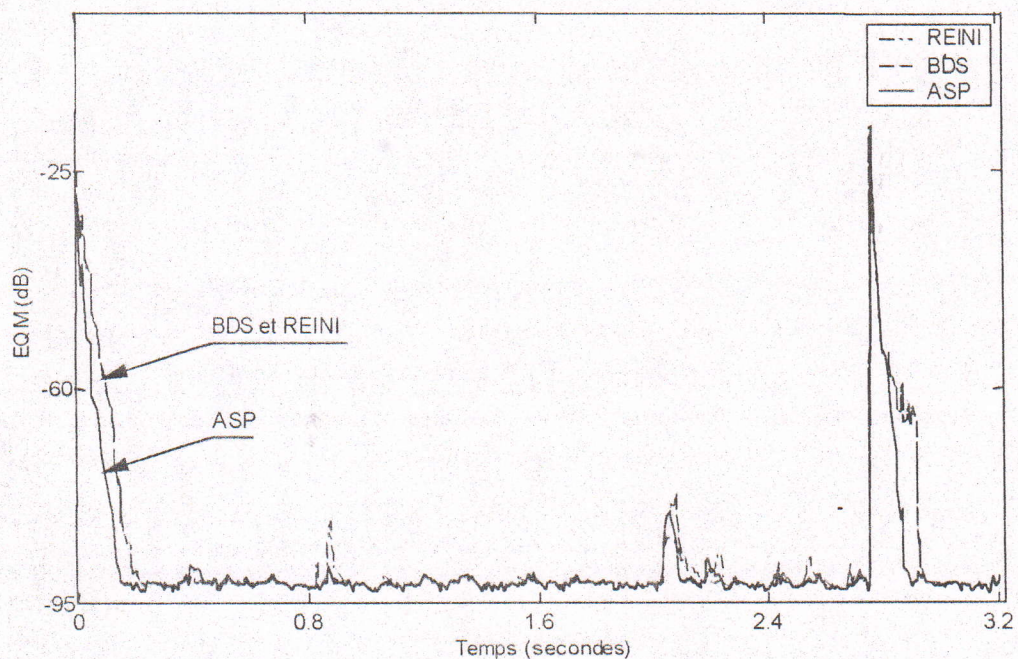


Figure 4.18 : Comparaison de la vitesse de convergence pour les trois méthodes de stabilisation, avec $N=64, E_0=1, x_i$: phrase 1.

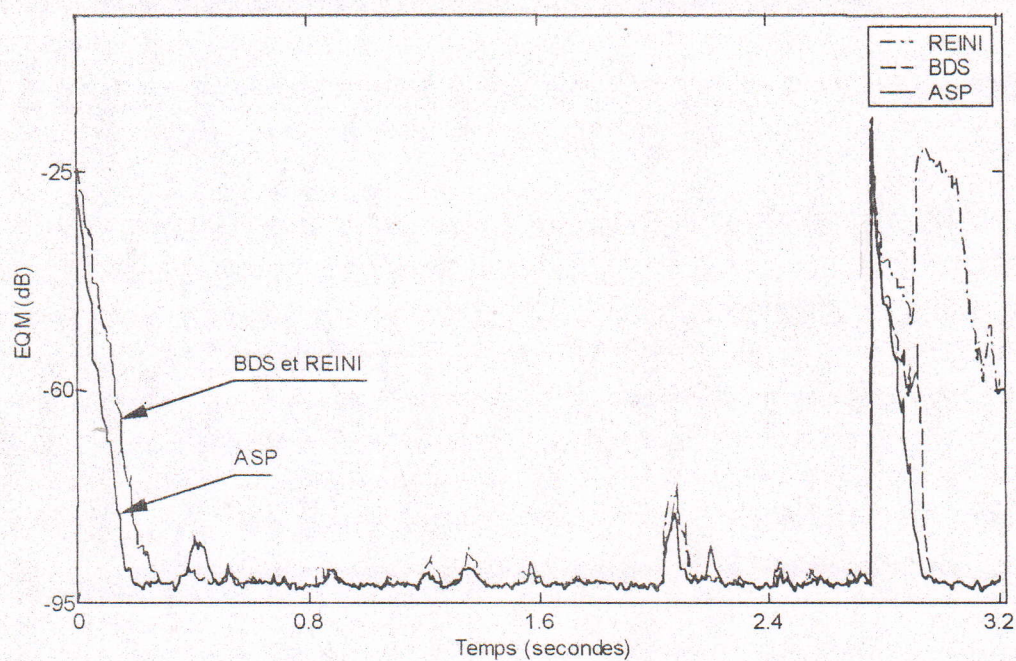


Figure 4.19 : Comparaison de la vitesse de convergence pour les trois méthodes de stabilisation, avec $N=128, E_0=1, x_i$: phrase 1.

On remarque aussi d'après ces figures que la dégradation de la vitesse de convergence augmente avec l'augmentation de la taille du filtre à identifier pour les trois méthodes de stabilisation. Parallèlement, la technique d'adaptation avec segmentation de la parole reste toujours avantageuse du point de vue vitesse de convergence et capacité de poursuite.

4.7 Conclusion

Dans ce chapitre nous avons étudié les algorithmes des moindres carrés transversaux rapides MCR numériquement stables quand le signal d'entrée est la parole. Nous avons observé que ces algorithmes divergent, cela est dû essentiellement au caractère fortement non stationnaire de la parole. Pour utiliser les algorithmes MCR avec le signal de parole, nous avons proposé dans ce chapitre une nouvelle technique de stabilisation qui permet un fonctionnement stable et continu des algorithmes MCR avec la parole et pour un facteur d'oubli faible, ce qui donne aux algorithmes une meilleure vitesse de convergence, et variable, ce qui permet d'accélérer la vitesse de convergence dans les zones non voisées du signal de parole. Cette technique consiste à segmenter le signal de parole à des suites d'unités élémentaires et de l'adapter selon la nature du signal. Elle est rendue possible grâce à une méthode de segmentation récursive, permettant d'analyser successivement le signal de parole, en faisant référence aux notions des différences et de similitudes.

Au passage, on peut signaler que cette nouvelle technique améliore nettement les performances de la partie prédiction AR de l'algorithme MCR, ce qui conduit à un algorithme plus efficace et mieux équilibré.

Globalement, la technique d'adaptation avec segmentation de la parole peut apporter des améliorations considérables en point de vue stabilité et vitesse de convergence par rapport aux deux autres techniques, appréciables pour les ordres N faibles.

Conclusion générale

Conclusion générale

L'étude que nous avons présentée a pour point de départ des algorithmes des moindres carrés transversaux rapides MCR, appliqués à l'identification de filtres à réponses impulsionnelles finies RIF représentant des réponses impulsionnelles acoustiques. Ces filtres apparaissent dans des applications d'annulation d'écho acoustique et de débruitage de la parole pour certains nouveaux terminaux audio développés pour les télécommunications (téléconférences, postes mains libres,...).

Il est bien connu que la réduction en complexité de calcul des algorithmes MCR est payée par une dégradation importante de leur propriétés numériques. Les erreurs numériques se propagent d'une manière non bornée au cours du temps, ce qui conduit à une solution instable plus ou moins à long terme. Du point de vue théorique, une analyse de la propagation des erreurs numériques dans les algorithmes MCR a été suivie pour déterminer les équations de propagation des erreurs numériques pour n'importe quel ordre N et pour un signal d'entrée quelconque. La seule hypothèse, inévitable, utilisée est que l'on se situe au voisinage de la solution nominale de l'algorithme théorique, ce qui autorise une analyse au premier ordre avec linéarisation du système d'équations de propagation.

A cause de la complexité des équations, il est très difficile de conclure sur telle ou telle variable prise globalement dans l'algorithme à l'instabilité de celui-ci. Des hypothèses simplificatrices nous permettent de localiser les variables responsables du mauvais fonctionnement des algorithmes MCR.

Notre première contribution apparaît alors dans la recherche des problèmes d'instabilité des algorithmes MCR. Une étude pratique est proposée afin de déterminer l'origine de l'instabilité numérique de ces algorithmes. L'originalité de notre étude réside principalement dans la localisation de la position des zéros des prédicteurs. Cette analyse reste valable pour les algorithmes MCR excités par des signaux stationnaires. Ainsi nous avons testé certaines hypothèses concernant la propagation des erreurs par des modèles auto-régressifs (AR) synthétiques. Nous avons également abordé le cas particulier des signaux parfaitement prédictibles tels que des sinusoïdes pures. Ces derniers posent d'autres problèmes aux algorithmes MCR. Une technique simple est soulignée et proposée pour combattre ce type de problèmes qui consiste à régulariser avec une composante de bruit faible.

Finalement nous avons étudié le comportement des algorithmes MCR stabilisés numériquement avec la parole. Aucun algorithme MCR stable ou non, existant actuellement, ne permet un fonctionnement sans interruption (c'est à dire sans divergence) avec la parole. Les divergences constatées peuvent être attribuées à la nature fortement non stationnaire du signal de parole. La recherche des solutions à ces problèmes s'est basée sur l'inspiration des tests des simulations faites le long de ce mémoire. Une nouvelle technique de stabilisation est proposée pour résoudre de tels problèmes. Cette technique est appelée technique d'adaptation avec segmentation de la parole.

CONCLUSION GENERALE

Conclusion générale

L'idée de base est de tenir compte de la nature du signal d'entrée (voisé, non voisé et silence) pour réduire la redondance des calculs en ligne et de détecter les non stationnarités du système à identifier pour utiliser au mieux les possibilités d'un algorithme donné. Ce point de vue nous a permis d'étudier avec soin une méthode de segmentation récursive simple et efficace pour notre application. De plus la stabilisation de ces algorithmes, il vient s'ajouter l'amélioration en vitesse de convergence apportée par la nouvelle technique proposée.

Bibliographie

- [1] : J.P Julien « Acoustique des salles, prise et restitution du son, analysées à partir de la notion de canal acoustique », Note technique CNET NT/LAA/TSS/128, Août 1982.
- [2] : A.Gilloire et J.P Julien « L'acoustique des salles dans les télécommunications », l'écho des recherches, N°127, 1^{er} trimestre 1987.
- [3] : J.P.Julien , A.Gilloire et A.Saliou , « Mesure de réponse impulsionnelles en acoustique », Note technique CNET NT/LAA/TSS/181, Juillet 1984.
- [4] : H.Schutze, Z.Ren, « Numerical characteristics of Fast Least Squares Transversal adaptation algorithms – A comparative study », Signal processing N°27, 1992.
- [5] : A.Benallal, « Etude des algorithmes des moindres carrés transversaux rapides et application à l'identification de réponses impulsionnelles acoustiques », thèse de doctorat, université de Rennes I, France, Janvier1989.
- [6] : P.Huyes and Al, « Adaptive filters – a review of techniques », BT Technology Journ. Vol.10 N°1 Jan. 1996.
- [7] : M.Mboup, M.Bonnet, « Nouvelle structure blanchissante pour annulation d'écho acoustique », 13^{ème} colloque GRETSI, Juan-les-pins, Septembre 1991.
- [8] : B.Frahang-Boroujeny, « Fast LMS/Newton Algorithms Based on Autoregressive Modeling and Their Application to Acoustic Echo Cancellation », IEEE Transactions on signal processing, Vol.45, N°8, pp.1987-2000, August 1997.
- [9] : A.Benveniste, M.Metivier et P.Priouret, « Algorithmes adaptatifs et approximations stochastiques :Théorie et Applications », Techniques stochastiques, MASSON 1987.
- [10] : M.Bellanger, « Analyse des signaux et filtrage numérique adaptatif », édition MASSON 1989.
- [11] : B.Widrow, «Adaptive noise canceling: principles and applications », Proc. IEEE Vol.63, pp.1692-1716, 1976.

Bibliographie

- [12]: L.Ljung and T.Soderström, « Theory and practice of recursive identification », M.I.T.Press. 1983.
- [13]: G.Carayannis, D.Manolakis and N.Kalouptsidis, « A Unified View of Parametric Processing Algorithms for Prewindowed Signals », signal processing, Vol.10, N°4, pp.335-368, June 1986.
- [14]: J.M.Cioffi and T.Kailath, « Fast RLS Transversal Filters for Adaptive Filtering », IEEE Trans. On ASSP 32, N°2, pp.304-337, April 1984.
- [15]: A.Benallal and A.Gilloire, « A new method to stabilize fast RLS algorithms based on first order model of propagation of numerical errors », Proc. of IEEE ICASSP 1988, New York.
- [16]: A.Benallal et M.Arezki, « Nouvelles versions d'Algorithmes MCR Numériquement Stable pour le Filtrage Adaptatif », Deuxième conférence internationale d'Electronique S.A.A'2 Blida, Algérie, pp.117-120, Mai 1999.
- [17]: M.Arezki, « Etude des algorithmes des moindres carrés transversaux rapides en présence de la parole », Thèse de Magister, Décembre 1997.
- [18]: S.Ljung and L.Ljung, « Error propagation analysis of RLS adaptation algorithms », Automatica, Vol.21, N°2, pp.157-167, 1985.
- [19]: J.M. Travassos-Romano et M.Bellanger, « Pôles et Zéros des Prédicteurs Numériques », Traitement du signal, Vol.3, N°2, pp.67-77, 2^{ème} trimestre 1986.
- [20]: R.Boite et M.Kunt, « Traitement de la parole », Presse Polytechnique Romandes 1987.
- [21]: A.Benallal et M.Arezki, « Techniques d'Utilisation des Algorithmes Adaptatifs MCR avec la parole », Séminaire national sur l'automatique et les signaux, Annaba, Algérie, pp.136-139, Novembre 1999.