

REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE

MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR ET DE LA

RECHERCHE SCIENTIFIQUE

UNIVERSITE DE BLIDA 1

Faculté des sciences

Département de Mathématiques



MEMOIRE DE MASTER

Spécialité : Recherche Opérationnelle

**SUR LE NOMBRE DE SUBDIVISION DE LA
DOMINATION ROMAINE DOUBLE**

Présenté par :

- ZENATI HADDA
- OUHAIBIA HADJER

Devant le jury composé de :

- | | | | |
|-------------------|-------------|------------------------|--------------|
| - M ^r | M. CHELLALI | Professeur, U. BLIDA 1 | Président |
| - M ^{me} | N. MEDDAH | M.C.B, U. BLIDA 1 | Promotrice |
| - M ^{me} | A. RAMOUL | M.C.B, U. BLIDA 1 | Examinatrice |

Année universitaire 2021/2022

ملخص

ليكن $G = (V, E)$ بيانا بسيطا. ولتكن الدالة f المعرفة من المجموعة V إلى المجموعة $\{0,1,2,3\}$. نقول عن الدالة f أنها دالة مسيطرة رومانية ثنائية (FDRD) إذا تحقق الشرطان :

(1) كل رأس v حيث $f(v) = 0$ مجاور على الأقل لرأسين v_1 و v_2 حيث

$f(v_1) = f(v_2) = 2$ أو مجاور على الأقل لرأس v_3 حيث $f(v_3) = 3$.

(2) كل رأس v حيث $f(v) = 1$ مجاور على الأقل لرأس w حيث $f(w) \geq 2$.

وزن الدالة المسيطرة الرومانية الثنائية هو المقدار $f(V) = \sum_{v \in V} f(v)$. عدد السيطرة

الرومانية الثنائي الذي نرمز له ب $\gamma_{dR}(G)$ هو الوزن الأصغر ل (FDRD) للبيان G

في هذه المذكرة قمنا بدراسة تأثير تقسيم حواف من البيان G على عدد السيطرة الرومانية

الثنائي $\gamma_{dR}(G)$ حيث نحدد العدد الأدنى من الحواف الواجب تقسيمها من اجل زيادة

$\gamma_{dR}(G)$, هذا العدد نرمز له ب $sd_{\gamma_{dR}}(G)$ و هو دائما اكبر أو يساوي 1.

RÉSUMÉ

Soit $G = (V, E)$ un graphe simple. Une Fonction de domination Romaine double (FDRD) de G est une fonction $f : V(G) \rightarrow \{0, 1, 2, 3\}$ telle que :

- i)** Chaque sommet $v \in V$ avec $f(v) = 0$ est adjacent à : au moins deux sommets $v_1, v_2 \in V$ tel que $f(v_1) = f(v_2) = 2$, ou à au moins un sommet $v_3 \in V$ tel que $f(v_3) = 3$.
- ii)** Chaque sommet v avec $f(v) = 1$ est adjacent à au moins un sommet w avec $f(w) \geq 2$.

Le poids d'une FDRD est la valeur $f(v) = \sum_{u \in v} f(u)$. Le nombre de domination Romaine double de G , noté par $\gamma_{dR}(G)$, est le poids minimum d'une FDRD sur G .

Dans ce mémoire, on s'intéresse à l'étude de l'effet de la subdivision des arêtes dans un graphe G sur le nombre de domination Romaine double $\gamma_{dR}(G)$, où on détermine le nombre minimum d'arêtes que l'on doit subdiviser pour augmenter $\gamma_{dR}(G)$. Ce nombre est noté par $sd_{\gamma_{dR}}(G)$, et il est toujours supérieur ou égal à 1.

ABSTRACT

Let $G = (V, E)$ a simple graph . A double Romaine domination Fonction (DRDF) of a graph $G = (V, E)$ is a function $f : V(G) \rightarrow \{0, 1, 2, 3\}$ such that :

- i)** Every vertex v with $f(v) = 0$ is adjacent to at least two vertices $v_1, v_2 \in V$ with $f(v_1) = f(v_2) = 2$, or to at least one vertex $v_3 \in V$ with $f(v_3) = 3$.
- ii)** Every vertex v with $f(v) = 1$ is adjacent to at least one vertex w with $f(w) \geq 2$.

The weight of a DRDF is the value $f(v) = \sum_{u \in v} f(u)$. The double Roman domination number of G , denoted by $\gamma_{dR}(G)$, is the minimum weight of a DRDF on G .

In this thesis, we are interested in studying the effect of subdividing edges in a graph G on the double Roman domination number $\gamma_{dR}(G)$, where we determine the minimum number of edges that one must be subdivided to increase $\gamma_{dR}(G)$. This number is denoted by $sd_{\gamma_{dR}(G)}$, and it is always greater than or equal to 1.

REMERCIEMENTS

Nous tenons en premier lieu à exprimer notre profonde gratitude et nos vifs remerciements à notre promotrice **M^{me} MEDDAH** Nacéra, qui nous a accueillies, accompagnées et conseillées tout au long de ce parcours. Son aide et sa confiance nous ont grandement aidé à mener à bien ce travail. Nous remercions sincèrement les membres de jury qui nous ont fait l'honneur de juger ce travail. Un grand Merci à tous nos enseignants de département de mathématiques.

Nous tenons également à remercier sincèrement **M^r CHELLALI Mustapha**, Professeur à l'université SAAD DAHLEB de Blida1, pour nous avoir fait l'honneur de présider le jury de ce mémoire et examiner le travail .

Nous adressons non sincères et vifs remerciements à **M^{me} RAMOUL Amina**, MCB à l'université SAAD DAHLEB de Blida1, d'avoir accepté d'être membre de jury.

Nos remerciements les plus chaleureux vont vers toute nos deux familles. Et bien sûr à tous les amis, qui nous ont soutenues et encouragées tout au long de la réalisation de ce mémoire.

Merci à tous ceux qui ont participé de près ou de loin à cet aboutissement...Merci à tous.

TABLE DES MATIÈRES

RÉSUMÉ EN ARABE	1
RÉSUMÉ	2
ABSTRACT	3
REMERCIEMENTS	4
TABLE DES MATIÈRES	5
LISTE DES ILLUSTRATIONS GRAPHIQUES	7
INTRODUCTION	8
CHAPITRE 1. Concepts fondamentaux	12
1.1. Notions de base	12
1.1.1. Définitions et notations	12
1.1.2. Quelques graphes particuliers :	14
1.2. Aperçu sur la domination	20
1.2.1. Définitions et propriétés	20
1.3. Quelques types de domination avec applications	22
1.3.1. Fonction de domination Romaine	24
CHAPITRE 2. La Domination Romaine Double dans les graphes modifiés 27	
2.1. Terminologies et définitions	27
2.2. Suppression des sommets	28
2.3. Suppression des arêtes	31
2.4. Addition d'arête	32

CHAPITRE 3. Le nombre de subdivision de la Domination Romaine	
Double	34
3.1. Résultats préliminaires	34
3.2. Valeurs de $sd_{\gamma_{dR}}$ pour certaines classes de graphes	37
CONCLUSION ET PERSPECTIVES	43

LISTE DES ILLUSTRATIONS GRAPHIQUES

FIGURE 1.1.	Une chaîne P_5 et un cycle C_4	14
FIGURE 1.2.	Le sous graphe induit de G par S , $G[S]$	15
FIGURE 1.3.	Un graphe G et son compler \overline{G}	15
FIGURE 1.4.	Le graphe complet K_5	15
FIGURE 1.5.	Un graphe unicycle	16
FIGURE 1.6.	Une forêt à 3 composantes connexes (arbres)	16
FIGURE 1.7.	Un graphe 3-régulier	16
FIGURE 1.8.	Un graphe biparti complet $K_{2,3}$	17
FIGURE 1.9.	Une étoile $K_{1,5}$	17
FIGURE 1.10.	Une étoile subdivisée SS_5	18
FIGURE 1.11.	Une étoile double $S_{3,3}$	18
FIGURE 1.12.	Une étoile double subdivisée $S_{3,3}^*$	18
FIGURE 1.13.	Un cycle C_4	19
FIGURE 1.14.	La couronne de C_4	19
FIGURE 1.15.	Une chaîne P_5	21
FIGURE 1.16.	Un graphe G avec $\beta(G) = 3$ et $i(G) = 2$	22
FIGURE 1.17.	Un graphe G avec $\gamma_t(G) = 5$	22
FIGURE 1.18.	Un graphe G avec $\gamma_{pr}(G) = 8$	23
FIGURE 1.19.	Un graphe G avec $\gamma_{\times 2}(G) = 4$	24
FIGURE 1.20.	Un graphe G avec $\gamma_R(G) = 4$	25
FIGURE 3.1.	Un graphe G avec $\gamma_{dR}(G') = \gamma_{dR}(G) = 6$	36
FIGURE 3.2.	Un graphe G avec $\gamma_{dR}(G') = \gamma_{dR}(G) + 1 = 4$	36
FIGURE 3.3.	Un graphe G avec $\gamma_{dR}(G') = \gamma_{dR}(G) + 2 = 5$	37

INTRODUCTION

La vie moderne mène l'homme actuel à confronter des situations problématiques d'un système de relations sociales et économiques très complexes. De plus en plus d'éléments doivent être pris en compte lors des prises des décisions concernant une action donnée qui deviennent l'objet de véritables recherches qui ne peuvent être menées sans l'aide d'outils mathématiques appropriés. C'est ainsi que s'est développé un domaine de mathématiques centré sur l'activité de décision : la Recherche Opérationnelle. Cette discipline est définie comme étant l'approche scientifique des problèmes complexes rencontrés dans la direction et la gestion de grands systèmes. La théorie des graphes, la programmation linéaire, l'optimisation combinatoire, l'optimisation dans les réseaux, les processus aléatoires, la théorie de jeux, les files d'attente, sont les principales techniques mathématiques auxquelles recourt la recherche opérationnelle.

La recherche opérationnelle (RO) est une discipline des mathématiques appliquées qui traite des questions d'utilisation optimale des ressources dans l'industrie et dans le secteur public. Depuis une dizaine d'années, le champ d'application de la RO s'est élargi à des domaines comme l'économie, la finance, le marketing et la planification d'entreprise. Plus récemment, la RO a été utilisée pour la gestion des systèmes de santé et d'éducation, pour la résolution de problèmes environnementaux et dans d'autres domaines d'intérêt public. La recherche opérationnelle est née pendant la *Seconde Guerre mondiale* des efforts conjugués d'éminents mathématiciens (*Neumann, Dantzig, Blackett*) qu'il avait été demandé de fournir des techniques d'optimisation des ressources militaires. Le premier succès de cette approche a été obtenu en 1940 par le *Prix Nobel de physique Patrick Blackett* qui résolut un problème d'implantation optimale de radars de surveillance. La dénomination est restée par la suite, même si le domaine militaire n'est plus le principal champ d'application de cette discipline, le mot opérationnelle prenant alors plutôt le sens d'effectif. Ce sont donc ces mathématiciens qui ont créé une nouvelle méthodologie caractérisée par les mots-clés modélisation et optimisation.

A partir des années 50, la recherche opérationnelle fait son entrée dans les entreprises. En France, des entreprises comme EDF, Air France, la SNCF créent à cette époque des services de recherche opérationnelle (qui existent toujours). La discipline commence à être enseignée dans les universités et les grandes écoles. Puis, au milieu des années 70, sans doute à cause d'un excès d'enthousiasme au départ et à l'inadéquation des moyens informatiques à l'application des méthodes de la RO, la discipline s'essouie. A partir du milieu des années 90, on assiste à un retour en force de la RO, les outils informatiques étant maintenant à la hauteur des méthodes proposées par la recherche opérationnelle. On assiste depuis à une explosion du nombre de logiciels commerciaux et l'apparition de nombreuses boîtes de conseil. Pour la France, notons Ilog (65 millions d'euros de CA), Eurodécision (2,8 millions d'euros de CA), Artelys (1,6 millions d'euros de CA) à l'étranger Dash-Optimization (racheté début 2008 pour 32 millions de dollars par Fair Isaac), IBM Optimization et beaucoup d'autres (le site de INFORMS Institute of Operations Research and Management Science en liste près de 240). Si l'on cherche à trouver des précurseurs à la Recherche Opérationnelle, on peut penser à Alcuin ou à Euler qui se sont tous deux intéressés à des problèmes du type RO, bien qu'aucune application n'ait motivé leur travail.

Sans que l'on en soit toujours conscient, la théorie des graphes est aujourd'hui très présente dans notre société moderne. Cette branche des mathématiques, dont on fait remonter l'origine à Euler. L'histoire de la théorie des graphes débute peut-être avec les travaux d'Euler au 18^{ème} siècle et trouve son origine dans l'étude de certains problèmes, tels que celui des ponts de Königsberg (les habitants de Königsberg se demandaient s'il était possible, en partant d'un quartier quelconque de la ville, de traverser tous les ponts sans passer deux fois par le même et de revenir à leur point de départ), la marche du cavalier sur l'échiquier ou le problème de coloriage de cartes. Parmi les problèmes les plus importants et très étudié en théorie des graphes sont les problèmes de domination, les problèmes de coloration et les problèmes de noyau dans les graphes, ces problèmes trouvent également un intérêt pratique dans la modélisation des problèmes réels issus de l'industrie.

De manière générale, un graphe permet de représenter la structure, les connexions d'un

ensemble complexe en exprimant les relations entre ses éléments : réseau de communication, réseaux routiers, interaction de diverses espèces animales, circuits électriques, . . . Les graphes constituent donc une méthode de pensée qui permet de modéliser une grande variété de problèmes en se ramenant à l'étude de sommets et d'arcs. La technique de domination est devenue donc un outil très puissant dans la résolution des problèmes de la théorie des graphes.

Le côté appliqué de la domination a été souvent la cause de la naissance d'autres paramètres de domination. Beaucoup de paramètres de domination ont vu le jour lorsqu'on impose à la domination une condition supplémentaire. Cette condition peut être intérieure à l'ensemble dominant, extérieure à l'ensemble dominant ou bien intérieure et extérieure en même temps. L'idée générale de la domination est de trouver dans un graphe G un sous ensemble S de V (appelé dominant) tel que tout sommet extérieur au sous ensemble S a au moins un voisin dans S . En 2004, Cockayne et al. [5], ont introduit une nouvelle variante de la domination dans les graphes non orientés, appelée fonction de domination Romaine. En 2016, Beeler et al [16], ont introduit aussi une autre nouvelle variante, c'est la fonction de domination Romaine double.

Ce type représente l'objectif principal de ce mémoire composé de trois chapitres dont en voici une description.

Dans le premier chapitre, nous rappelons en premier les définitions de base de la théorie des graphes nécessaires à la compréhension de ce mémoire. Ainsi, nous évoquons la notion de la domination dans les graphes, en donnant en premier un petit historique sur la domination. Nous présentons par la suite quelques paramètres de domination, chacun avec une application, et à la fin nous présentons les définitions de la fonction de domination Romaine et de la fonction de domination Romaine double.

Dans le chapitre deux, nous nous intéressons à donner quelques résultats principaux sur la domination Romaine double dans les graphes modifiés (un graphe modifié est un graphe qui subit à des opérations élémentaires telles que la suppression des sommets, l'addition des arêtes...), par rapport au nombre de la domination Romaine double γ_{dR} . Ce chapitre

est composé de trois sections. Nous nous intéressons dans la première section à étudier l'effet de la suppression des sommets sur le nombre de la domination Romaine double. Tandis que dans la deuxième section on s'intéresse à étudier l'effet de la suppression des arêtes, et finalement, l'effet de l'addition d'arête sur le même paramètre.

Nous nous intéressons dans le chapitre trois et qui représente notre contribution, à donner quelques résultats principaux sur la subdivision de la domination Romaine double dans un graphe G d'une manière générale. Et nous avons donné une valeur exacte dans les graphes bipartis et les graphes bipartis complets.

Ce mémoire s'achève par une conclusion générale sur l'ensemble des travaux réalisés le long de ce manuscrit et quelques futures perspectives dans ce domaine.

CHAPITRE 1

Concepts fondamentaux

Dans ce chapitre, nous rappelons quelques définitions et notions de base sur la théorie des graphes et des terminologies utilisées dans notre mémoire. En suite, nous donnons un aperçu sur la domination dans les graphes, il contient en particulier une partie sur la fonction de domination Romaine double. Pour plus de détails, le lecteur peut se référer aux livres de Berge [1], et de Chartrand et Lesniak [7].

1.1 Notions de base

1.1.1 Définitions et notations

Un *graphe* $G = (V(G), E(G))$, est défini par deux ensembles $V(G)$ et $E(G)$, où $V(G)$ est l'ensemble de *sommets*, et $E(G)$ est l'ensemble de paires de sommets appelées *arêtes*. Lorsqu'il n'y a pas d'ambiguïté, nous notons simplement V et E . Dans un graphe G , le nombre de sommets est appelé *ordre* de G , est noté par $n = |V(G)|$, et le nombre d'arêtes est appelé la *taille* de G , et est noté par $m = |E(G)|$.

Pour une arête $e = uv$, on dit que les sommets u et v sont adjacents et que l'arête e est incidente aux sommets u et v . Une *boucle* est une arête dont les deux extrémités sont confondues. Un graphe est dit *simple* s'il est sans boucles et sans arêtes multiples (plusieurs arêtes relient deux sommets). Tous les graphes considérés dans ce mémoire sont simples et finis. Un graphe est dit *fini* ou *infini* suivant son ordre.

a) Voisinage et degrés

Pour un sommet v d'un graphe G , le voisinage ouvert de V est défini par l'ensemble $N_G(v) = \{u \in V(G) : uv \in E(G)\}$ et le voisinage fermé de V est défini par $N_G[v] = N_G(v) \cup \{v\}$. Pour un ensemble $S \subseteq V(G)$, le voisinage ouvert de S est défini par

$N(S) = \cup_{v \in S} N(v)$, et le voisinage fermé de S est $N[S] = \cup_{v \in S} N[v]$. Le voisinage privé dans S , noté par $pn(v, S)$ est l'ensemble de voisins de v qui ne sont voisins d'aucun autre sommet de S : $pn(v, S) = N(v) \setminus (S - \{v\})$.

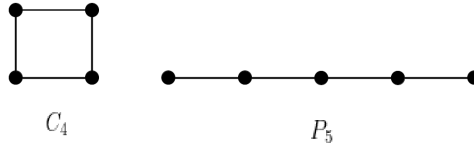
Le degré d'un sommet v de G , noté par $d_G(v)$, ou bien $d(v)$, est le nombre de sommets adjacents à v . Un sommet de degré nul est dit isolé et un sommet de degré 1 est dit pendent (feuille). On note par $L(G)$ l'ensemble des sommets pendants de G . Un sommet adjacent à un sommet pendent est appelé support. L'ensemble des sommets supports de G est noté par $S(G)$. Un support est dit faible, s'il est adjacent à exactement une feuille, sinon il est dit fort. On désigne par $\delta(G)$ et $\Delta(G)$ le degré minimum et le degré maximum dans G , respectivement.

b) Chaînes, cycles et connexité

Une *chaîne* de longueur $k - 1$ dans un graphe G est une séquence alternée de sommets et d'arêtes $v_1, e_1, v_2, e_2, \dots, v_{i-1}, e_{i-1}, v_i, \dots, v_{k-1}, e_{k-1}, v_k$ tel que $e_{i-1} = v_{i-1}v_i$ pour $i = 1, 2, \dots, k$. Le nombre d'arêtes dans la chaîne définit sa *longueur* et le nombre de sommets définit son *ordre*. L'entier $k \geq 1$ représente le nombre de sommets de la chaîne. Une chaîne dans laquelle aucune arête ne se répète est dite *simple* et une chaîne dans laquelle aucun sommet ne se répète est dite *élémentaire*. Une *corde* est une arête reliant deux sommets non consécutifs dans une chaîne. Une chaîne minimale induite par k sommets, notée P_k , est une chaîne élémentaire sans cordes.

Un *cycle* noté C_k de longueur k est une chaîne de longueur $k \geq 1$ dans lequel les deux extrémités initiale et terminale sont confondues, dans ce cas le nombre de sommets de C_k est égal à sa longueur.

Un graphe G est dit *connexe*, si pour tout $u, v \in V(G)$ il existe une *chaîne qui les relie*. Une *composante connexe* d'un graphe est un sous-graphe maximal connexe. Voir la Figure 1.1.

FIGURE 1.1. Une chaîne P_5 et un cycle C_4

c) Distance, diamètre, excentricité

On appelle *distance* de x à y notée $d(x; y)$; la longueur d'une plus courte chaîne de x à y . Le *diamètre* dans un graphe G noté $\text{diam}(G)$ est la distance entre deux sommets de G ; c-à-d $\text{diam}(G) = \max_{x,y \in V} (d(x; y))$. L'*excentricité* de v est $\text{exc}(v) = \max\{d(v; w) : w \in V\}$. Une chaîne diamétrale d'un graphe G , est une chaîne dont la longueur est égale au diamètre de G .

d) Stables, cliques

On appelle *stable* (*indépendant*) d'un graphe $G = (V, E)$ un sous ensemble de sommets de V deux à deux non adjacents. Un stable maximum de G est un stable de cardinalité maximale. La cardinalité d'un stable maximum est appelée nombre de stabilité, et est notée par $\beta(G)$.

Une *clique* K de G est un sous ensemble de sommet de V deux à deux adjacents.

1.1.2 Quelques graphes particuliers :

Soit $G = (V, E)$ un graphe simple.

- Le graphe H est appelé un *sous-graphe* partiel de G si $V(H) \subseteq V(G)$ et $E(H) \subseteq E(G)$ et il est appelé un *graphe partiel* du graphe G si $V(H) = V(G)$ et $E(H) \subseteq E(G)$. Pour un sous ensemble de sommets non vide $S \subseteq V(G)$ du graphe G , le sous graphe $H = (S, E)$ induit par S dans G , noté par $G[S]$, est le sous-graphe du graphe G avec l'ensemble de sommets $V(G[S]) = S$ et l'ensemble d'arêtes $E(G[S]) = \{uv \in E(G) : u, v \in S\}$. Ce concept est illustré par le graphe G et le sous-graphe induit par l'ensemble de sommets $S = \{a, b, c\}$ de la Figure 1.2.

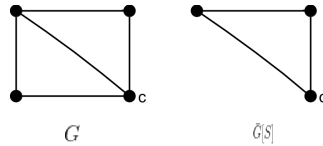


FIGURE 1.2. Le sous graphe induit de G par S , $G[S]$

- Un graphe est dit *trivial* s'il a un seul (graphe singleton) ou aucun sommet (graphe nul).
- Le *graphe complémentaire* d'un G , noté \bar{G} , est un graphe ayant le même ensemble de sommets que G et une arête existe dans \bar{G} si elle n'existe pas dans G . A titre d'exemple on considère le graphe G et son complémentaire \bar{G} de la Figure 1.3.

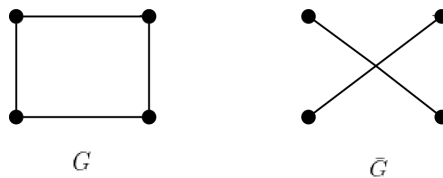


FIGURE 1.3. Un graphe G et son compler \bar{G}

- Un graphe *complet* d'ordre n noté par K_n , est un graphe dont tous les sommets distincts sont adjacents. Comme illustration du concept, le graphe complet K_5 de la Figure.1.4.

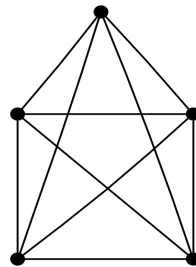


FIGURE 1.4. Le graphe complet K_5

- Un *unicycle* est un graphe ayant un seul cycle. (voir le graphe de la Figure 1.5)

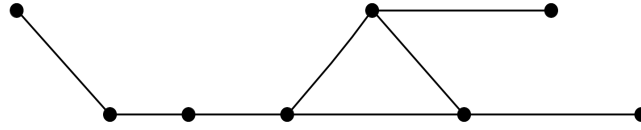


FIGURE 1.5. Un graphe unicycle

- Les graphes connexes sans cycles (*acycliques*) jouent un rôle prépondérant dans diverses applications. Un *arbre* $T = (V, E)$ d'ordre n , est un graphe connexe, sans cycles et comporte $n - 1$ arêtes. Une *forêt* d'ordre n est un graphe où chaque composante connexe est un arbre. Le nombre d'arêtes dans une forêt à k composantes connexes est $n - k$. A titre d'exemple, le graphe de la Figure 1.6.

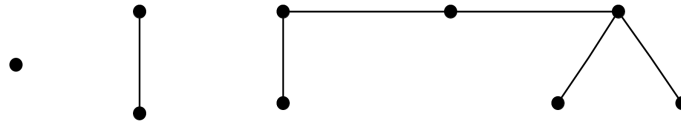


FIGURE 1.6. Une forêt à 3 composantes connexes (arbres)

- Un graphe dont tous les sommets ont le même degré k est appelé un graphe k -régulier. (voir le graphe de la Figure 1.7).

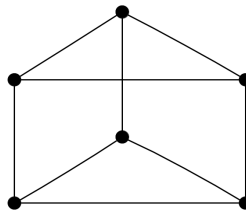


FIGURE 1.7. Un graphe 3-régulier

- Un graphe G est dit *multiparti*, si l'ensemble des sommets peut être partitionné en p sous-ensembles avec $p \geq 2$, sachant qu'aucune arête du graphe G ne joint deux sommets appartenant au même sous ensemble. Pour $p = 2$, le graphe G est appelé *biparti*. Un graphe est biparti si et seulement s'il ne contient pas de cycles impaires. Si un sommet appartenant à un sous-ensemble V_i de la partition d'un graphe multiparti est adjacent à tout sommet des autres sous-ensembles $\{V_j : j \neq i\}$ pour tout $i = \overline{1, p}$, alors le graphe G est appelé *multiparti complet*, et est noté par K_{k_1, k_2, \dots, k_p} , avec $k_i = |V_i|$. A titre d'exemple le graphe $K_{2,3}$ de la Figure 1.8 .

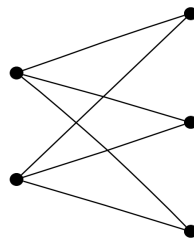


FIGURE 1.8. Un graphe biparti complet $K_{2,3}$

- Une *étoile* est un graphe biparti complet dans lequel $|V_1| = 1$ et $|V_2| = p$, et est notée par $K_{1,p}$. Le sommet de V_1 est appelé centre de l'étoile. A titre d'exemple, l'étoile $K_{1,5}$ de la Figure 1.9.

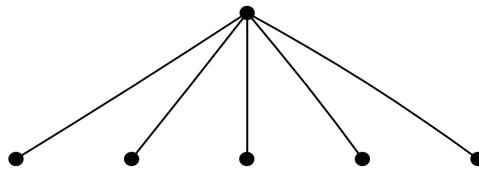
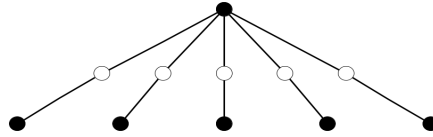


FIGURE 1.9. Une étoile $K_{1,5}$

- Une *étoile subdivisée* SS_p est un arbre obtenu à partir d'une étoile $K_{1,p}$ en subdivisant chaque arête par exactement un sommet. Comme exemple illustratif le graphe de la Figure 1.10, dont les sommets en blanc représentent les sommets résultants de la subdivision.

FIGURE 1.10. Une étoile subdivisée SS_5

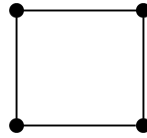
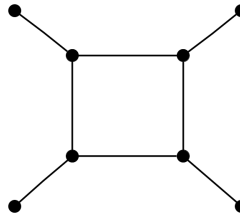
- Une *étoile double*, notée $S_{p,q}$ est un arbre obtenu à partir de deux étoiles $K_{1,p}$ et $K_{1,q}$ tel que $p, q \geq 1$, en attachant les deux sommets centres des deux étoiles par une arête. A titre d'exemple l'*étoile double* $S_{3,3}$ de la Figure 1.11.

FIGURE 1.11. Une étoile double $S_{3,3}$

- Une *étoile double subdivisée*, notée $S_{p,q}^*$, est un graphe obtenu à partir d'une étoile double $S_{p,q}$, en subdivisant toutes ses arêtes sauf l'arête reliant les deux centres. Comme exemple illustratif le graphe de la Figure 1.12, dont les sommets en blanc représentent les sommets résultants de la subdivision.

FIGURE 1.12. Une étoile double subdivisée $S_{3,3}^*$

- La k -couronne de $G = (V, E)$ est le graphe d'ordre $(k + 1)|V|$ obtenu d'une copie de G en attachant à chaque sommet de G une chaîne de longueur $k - 1$ de manière que les chaînes soient disjointes. Pour $k = 1$, la 1-couronne de G est appelée la couronne de G . En effet l'exemple de cycle C_4 et sa couronne des deux Figures 1.13, 1.14 suivantes.

FIGURE 1.13. Un cycle C_4 FIGURE 1.14. La couronne de C_4

- Un sommet v d'un graphe G est un sommet *d'articulation* si sa suppression augmente le nombre de composantes connexes, i.e, si G est connexe alors $G - v$ n'est pas connexe.
- Une arête e d'un graphe G est appelée *isthme* (arête d'articulation du graphe G) si sa suppression augmente le nombre de composantes connexes, i.e, si G est connexe alors $G - e$ n'est pas connexe.
- Un *bloc* dans un graphe G est un sous graphe connexe maximal qui ne contient pas de sommet d'articulation.
- Une *chenille* est un graphe simple ayant au moins un sommet pendant dont la suppression de tous ses sommets pendants donne une chaîne simple.

1.2 Aperçu sur la domination

Le concept de domination trouve son origine dans le jeu d'échec. Le principe est de couvrir (dominer) l'ensemble des cases par certaines pièces du jeu. L'idée semble remonter au 16^{ème} siècle en Inde (Voir [19]). En 1862, De Jaenisch [3] posa le problème suivant: Déterminer le nombre minimum de reines à placer sur l'échiquier de telle manière que chaque case soit occupée par une reine ou bien peut être occupée en un seul mouvement par l'une des reines. Pour un Echiquier 5×5 le nombre minimum est 3 et pour un échiquier 8×8 le nombre minimum est 5. Le nombre minimum pour un échiquier $n \times n$ reste indéterminé jusqu'à présent. Pour plus de détails voir [8].

En 1958, Claude Berge [2] donna une formulation de la domination dans les graphes orientés. Le nombre de domination s'appelait alors coefficient de stabilité externe.

L'appelation actuelle du nombre de domination est due à Ore [14] en 1962. La domination n'a connue sa véritable expansion qu'après la parution de l'article de Cockayne et Hedetniemi [4] en 1977. Depuis, l'étude de la domination dans les graphes avec des propriétés additionnelles a donné naissance à plusieurs paramètres de domination dont la résolution est NP-Complexe (Voir [10] [17]). Une étude approfondie de quelques types de domination fera l'objet des prochains chapitres.

1.2.1 Définitions et propriétés

Définition 1.1. Soit $G = (V, E)$ un graphe simple. Un ensemble **dominant** est un sous ensemble de sommets $D \subseteq V$ tel que tout sommet de $V \setminus D$ est adjacent à au moins un sommet de D . Un ensemble dominant D est dit **minimal** si aucun sous ensemble propre de D n'est un ensemble dominant.

Un dominant de cardinalité minimum est un dominant minimal l'inverse est faux.

Il existe d'autres définitions équivalentes aux ensembles dominants dans les graphes. En voici des exemples:

- $D \subseteq V$ est un ensemble dominant $\iff \forall v \in V \setminus D, |N(v) \cap D| \geq 1$.

- $D \subseteq V$ est un ensemble dominant $\iff \forall v \in V \setminus D, N(v) \cap D \neq \emptyset$.
- $D \subseteq V$ est un ensemble dominant $\iff N[D] = N(D) \cup D = V$.

Le nombre de domination inférieur (ou nombre de domination) d'un graphe G , noté $\gamma(G)$, représente la cardinalité minimum d'un ensemble dominant de G . Un ensemble dominant minimum avec une telle cardinalité est appelé $\gamma(G)$ -ensemble. On note qu'un graphe G peut avoir plusieurs $\gamma(G)$ -ensembles. La cardinalité maximum d'un ensemble dominant minimal est appelée nombre de domination supérieur, et est noté par $\Gamma(G)$. A titre d'exemple, la chaîne P_5 de la Figure 1.15, pour laquelle on a $\gamma(G) = |\{v_2, v_4\}| = 2$ et $\Gamma(G) = |\{v_1, v_3, v_5\}| = 3$.

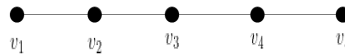


FIGURE 1.15. Une chaîne P_5

La notion d'*indépendance* (*stabilité*) dans les graphes a été liée au début aux ensembles dominants. Cette notion est reliée à celle de domination par le fait qu'un ensemble indépendant maximal (au sens de l'inclusion des ensembles) est un dominant minimal. Dans un graphe G , un sous ensemble S de V est un indépendant si $\Delta(G[S]) = 0$, i-e il n'existe pas deux sommets dans S adjacents. Un ensemble indépendant S de G est *maximal* si pour tout sommet x dans $V \setminus S$, $S \cup \{x\}$ n'est pas un indépendant.

Le cardinal maximum (resp. minimum) d'un ensemble indépendant maximal est appelée *nombre d'indépendance* (resp. *nombre d'indépendance inférieur*) de G , noté par $\beta(G)$ (resp. $i(G)$). Un ensemble indépendant maximal avec une telle cardinalité est appelé $\beta(G)$ -ensemble. On note qu'un graphe G peut avoir plusieurs $\beta(G)$ -ensembles. Pour le graphe de la Figure 1.16, on a : $i(G) = |\{v_2, v_5\}| = 2$ et $\beta(G) = |\{v_2, v_4, v_6\}| = 3$.

Il est facile de voir que tout ensemble stable est maximal si et seulement si c'est un dominant. Par conséquent la stabilité maximale peut être vue comme un cas particulier des ensembles dominants. Dans ce cas, on a pour tout graphe G la chaîne d'inégalités suivante: $\gamma(G) \leq i(G) \leq \beta(G) \leq \Gamma(G)$.

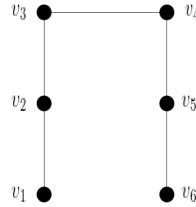


FIGURE 1.16. Un graphe G avec $\beta(G) = 3$ et $i(G) = 2$

1.3 Quelques types de domination avec applications

En raison de la large variété des problèmes liés à la domination, nous allons nous restreindre dans cette partie uniquement à quelques types de domination.

Domination totale: En 1980, Cockayne, Dawes et Hedetniemi introduisent les ensembles dominants **totaux** [11] qui sont définis comme étant des ensembles dominants sans sommets isolés, c'est à dire que chaque sommet de l'ensemble possède au moins un autre voisin dans le même ensemble. Le cardinal minimum d'un ensemble dominant total $\gamma_t(G)$ est appelé le nombre de domination totale. Dans ce cas pour tout graphe G sans sommets isolés on a $\gamma_t(G) \geq \gamma(G)$. Comme exemple pratique, on cite l'exemple suivant.

Considérons un groupe d'individus. On veut sélectionner parmi ce groupe un comité restreint tel que toute personne du groupe ait des affinités avec au moins un membre de ce comité. Si nous modélisons ce problème par un graphe G dont l'ensemble des sommets représente le groupe d'individus et deux sommets sont adjacents s'il y a affinités entre les personnes représentées. Alors le comité restreint sélectionné est un dominant total du graphe. Comme exemple illustratif le graphe de la Figure 1.17, dont les sommets en blanc représente l'ensemble dominant total.

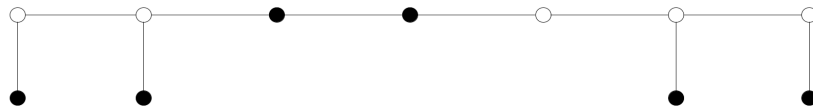


FIGURE 1.17. Un graphe G avec $\gamma_t(G) = 5$

Domination couplée: La domination couplée a été introduite par Haynes et Slater en 1998 [20]. Un sous ensemble S de V est dit ensemble dominant couplé de G si S est un dominant de G et si le sous graphe induit par S admet un couplage parfait. Le nombre de domination couplée, noté $\gamma_{pr}(G)$, désigne la cardinalité minimum d'un ensemble dominant couplé. Comme exemple pratique, considérons un village au sein duquel on veut placer un groupe de vigiles qui assure la protection de ses voisins tout en s'assurant lui même une protection mutuelle avec un collègue. Le plus petit groupe de vigiles représente un ensemble dominant couplé minimum du graphe représentatif des habitants du village. Comme exemple illustratif le graphe de la Figure 1.18, dont les sommets en blanc représente l'ensemble dominant couplée.

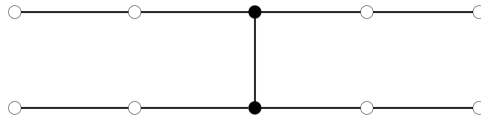


FIGURE 1.18. Un graphe G avec $\gamma_{pr}(G) = 8$

Domination double: La domination double introduite par Harary et Haynes en 2000 [6]. Un sous-ensemble S de V est dit ensemble dominant double de G si tout sommet de V est dominé par au moins deux sommets de S , autrement dit si v est un sommet qui n'est pas dans S alors v admet au moins deux voisins dans S et si v est un sommet de S alors v admet au moins un voisin dans S . Le nombre de domination double, noté $\gamma_{x2}(G)$, désigne le cardinal minimum d'un ensemble dominant double de G .

Si nous reprenons l'exemple précédent, en spécifiant que tout villageois soit protégé par au moins deux vigiles et que chaque vigile soit lui même protégé par un de ses collègues, alors le plus petit groupe constitué est un ensemble dominant double minimum du graphe représentatif des habitants du village. Comme exemple illustratif le graphe de la Figure 1.19, dont les sommets en blanc représentent l'ensemble dominant double.

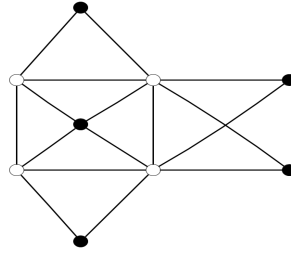


FIGURE 1.19. Un graphe G avec $\gamma_{\times 2}(G) = 4$

1.3.1 Fonction de domination Romaine

Les types de domination présentés dans cette section sont des modèles d'une stratégie de défense militaire instituée par l'empereur Constantin, entre 306 et 337 après J.-C., dans laquelle les régions de l'Empire Romain étaient défendues par des armées stationnées à des endroits stratégiques. Une région était sécurisée par les armées qui y étaient stationnées, et une région sans armée était protégée par l'envoi d'armées mobiles depuis les régions voisines. Mais Constantin a décidé qu'une armée mobile de campagne ne pourrait être envoyée pour défendre une région, si cela laissait sa région d'origine non sécurisée. Cette stratégie de défense a donné naissance à ce qu'on appelle la fonction de domination Romaine, présentée ci-dessous.

Définition 1.2. Une fonction de domination Romaine (FDR) sur un graphe G est une fonction $f : V \rightarrow \{0, 1, 2\}$ telle que si $f(v) = 0$, alors le sommet v doit avoir au moins un voisin u avec $f(u) = 2$. Soit (V_0, V_1, V_2) une partition ordonnée de V induite par f , où $V_i = \{v \in V : f(v) = i\}$, pour $i = 0, 1, 2$. Notons qu'il existe une correspondance entre la fonction $f : V \rightarrow \{0, 1, 2\}$ et la partition ordonnée (V_0, V_1, V_2) de V . On écrira donc $f = (V_0, V_1, V_2)$.

Le poids d'une FDR est la valeur $f(V) = \sum_{u \in V} f(u)$. Le nombre de domination Romaine de G , noté par $\gamma_R(G)$, est le poids minimum d'une fonction de domination Romaine sur G . A titre d'exemple le graphe de la Figure 1.20, dont le nombre de la domination Romaine est égal à 4.

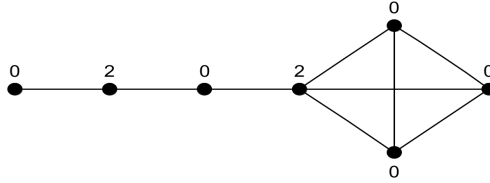


FIGURE 1.20. Un graphe G avec $\gamma_R(G) = 4$

Le concept de domination Romaine dans les graphes est largement étudié dans la littérature. Au moins 200 articles ont été publiés sur divers aspects de domination Romaine dans les graphes notamment: la domination romaine, la domination Romaine indépendante et la domination Romaine faible.

A partir de la définition initiale de la domination Romaine, on peut clairement définir de nombreuses variétés de domination. Nous en citons ici l'exemple de la *domination Romaine double*. Avec le temps, l'empire Romaine aura besoin d'une protection à la fois plus forte et moins coûteuse. Ce qui a proposé, est une version plus forte de la domination Romaine qui double la protection en assurant que chaque attaque puisse être repoussée par au moins deux légions. L'aviolité à déployer trois légions à un endroit donné assurerait un niveau de défense plus fort, plus flexible et à moindre coût. Cette stratégie de défense nous donne la fonction Romaine double. En 2016, Beeler et al .[16] ont initié l'étude de la fonction de domination Romaine double dans les graphes, et ils ont défini ce nouveau concept comme suit :

Définition 1.3. *Pour un graphe $G = (V, E)$, soient $f : V \longrightarrow \{0, 1, 2, 3\}$ une fonction et (V_0, V_1, V_2, V_3) la partition ordonnée de V définie par f , où $V_i = \{v \in V : f(v) = i\}$ pour $i = 0, 1, 2, 3$. Il existe une correspondance entre les fonctions $f : V \longrightarrow \{0, 1, 2, 3\}$ et les partitions ordonnées (V_0, V_1, V_2, V_3) de V , on écrira donc $f = (V_0, V_1, V_2, V_3)$. Une fonction de domination Romaine double (FDRD) d'un graphe G est une fonction $f : V \longrightarrow \{0, 1, 2, 3\}$ telle que:*

1. Si $f(v) = 0$, alors le sommet v doit avoir au moins deux voisins dans V_2 ou un voisin dans V_3 .

2. Si $f(v) = 1$, alors v doit avoir au moins un voisin dans $V_2 \cup V_3$.

Le poids d'une FDRD est la valeur $f(V) = \sum_{u \in V} f(u)$. Le nombre de domination Romaine double de G , noté par $\gamma_{dR}(G)$, est le poids minimum d'une fonction de domination Romaine double sur G .

CHAPITRE 2

La Domination Romaine Double dans les graphes modifiés

Pour de nombreux paramètres de graphes, la criticité est une question fondamentale. Le concept de criticité par rapport à diverses opérations sur les graphes a été étudié pour plusieurs paramètres de domination. On a beaucoup de résultats sur les graphes où un paramètre augmente ou diminue chaque fois qu'une arête ou un sommet est supprimé ou ajouté. Ce concept a été considéré pour plusieurs paramètres de domination tels que le nombre de domination, le nombre de domination totale, le nombre de domination Romaine,... par plusieurs auteurs. Ce concept est maintenant bien étudié en théorie de la domination. Pour des références sur le concept de criticité sur divers paramètres de domination voir, par exemple [12, 13]. Dans ce chapitre, nous considérons ce concept pour la domination Romaine double.

2.1 Terminologies et définitions

Avant d'aller plus loin, nous devons d'abord introduire certaines terminologies qui seront utiles par la suite.

Un graphe G est appelé:

1. Domination Romaine double *sommet-critique*, ou simplement γ_{dR} -*sommet critique*, si $\gamma_{dR}(G - v) < \gamma_{dR}(G)$ pour chaque sommet $v \in V(G)$,
2. Domination Romaine double *arête-critique*, ou simplement γ_{dR} -*arête critique*, si $\gamma_{dR}(G + e) < \gamma_{dR}(G)$ pour chaque arête $e \in E(\overline{G})$, où \overline{G} est le complément de G ,

3. Domination Romaine double *arête-super-critique*, ou simplement γ_{dR} -*arête super critique*, si $\gamma_{dR}(G - e) > \gamma_{dR}(G)$ pour chaque arête $e \in E(G)$.

Nous commençons par les résultats préliminaires suivants.

Proposition 2.1 (H. Abdollahzadeh et al [9]). *Soit C_n un cycle d'ordre $n \geq 3$. Alors*

$$\gamma_{dR}(C_n) = \begin{cases} n & \text{si } n \equiv 0, 2, 3, 4 \pmod{6} \\ n + 1 & \text{si } n \equiv 1, 5 \pmod{6} \end{cases}$$

Proposition 2.2 (H. Abdollahzadeh et al [9].). *Soit P_n une chaîne d'ordre $n \geq 1$. Alors*

$$\gamma_{dR}(P_n) = \begin{cases} n & \text{si } n \equiv 0 \pmod{3} \\ n + 1 & \text{si } n \equiv 1, 2 \pmod{3} \end{cases}$$

Proposition 2.3 (H. Abdollahzadeh et al [9]). *Soit G un graphe connexe d'ordre $n \geq 3$.*

Alors

1. $\gamma_{dR}(G) = 3$ si et seulement si $\Delta(G) = n - 1$.
2. $\gamma_{dR}(G) = 4$ si et seulement si $G = \overline{K_2} + H$, où H est un graphe avec $\Delta(H) \leq |V(H)| - 2$.
3. $\gamma_{dR}(G) = 5$ si et seulement si $\Delta(G) = n - 2$ et $G \neq \overline{K_2} + H$ pour tout graphe H d'ordre $n - 2$.

L'ensemble des résultats énoncés dans les sections suivantes concernant la criticité du paramètre de la domination Romaine double existent dans [18] de S. Nazari et L. Volkmann.

2.2 Suppression des sommets

Nous commençons par le résultat suivant

Lemme 2.4. *Pour tout sommet v dans un graphe G , $\gamma_{dR}(G) - 2 \leq \gamma_{dR}(G - v) \leq \gamma_{dR}(G) + 2\Delta(G) - 3$.*

Preuve. Soit $v \in V(G)$, et soit f une fonction γ_{dR} pour $G - v$. Alors la fonction $f_1 : V(G) \rightarrow \{0, 1, 2, 3\}$ définie par $f_1(v) = 2$ et $f_1(x) = f(x)$ pour $x \in V(G) - \{v\}$, est une FDRF de G , et ainsi la borne inférieure est vérifiée. Pour la borne supérieure, soit $g = (V_0, \emptyset, V_2, V_3)$ une γ_{dR} -fonction pour G . Si $g(v) = 0$, alors $g|_{G - v}$ est une FDRD de $G - v$. Si $g(v) \geq 2$, alors soit $A = \{x \in N(v) | g(x) = 0\}$. Supposons que $g(v) = 2$. Alors la fonction $f_2 : V(G) - \{v\} \rightarrow \{0, 1, 2, 3\}$ définie par $f_2(x) = 1$ pour $x \in A$ et $f_2(x) = g(x)$ pour $x \in V(G) - (A \cup \{v\})$, est un FDRD de $G - v$ de poids inférieur ou égal à $\gamma_{dR}(G) + \Delta(G) - 2$. Si $g(v) = 3$, alors la fonction $f_2 : V(G) - \{v\} \rightarrow \{0, 1, 2, 3\}$ définie par $f_2(x) = 2$ pour $x \in A$ et $f_2(x) = g(x)$ pour $x \in V(G) - (A \cup \{v\})$, est FDRD de $G - v$ de poids inférieur ou égal à $\gamma_{dR}(G) + 2\Delta(G) - 3$, et donc la borne supérieure en découle. \square

L'étoile $K_{1,n}$ est un exemple où la borne supérieure du Lemme 2.4 est atteinte. Si G a un sommet isolé w , alors $\gamma_{dR}(G) - 2 = \gamma_{dR}(G - w)$. En outre, compte tenu des Propositions 2.1 et 2.2, $\gamma_{dR}(C_n) = n + 1$ et $\gamma_{dR}(C_n - v) = \gamma_{dR}(P_{n-1}) = n - 1$ pour tout sommet $v \in V(C_n)$ avec $n \equiv 1 \pmod{6}$. Par conséquent, la borne inférieure du Lemme 2.4 est aussi atteinte.

Théorème 2.5. *Un graphe G d'ordre $n \geq 4$ est $4\text{-}\gamma_{dR}$ -sommet-critique si et seulement si n est pair et G est un graphe $(n - 2)$ -régulier.*

Théorème 2.6. *Si G est un graphe $(n - 3)$ -régulier avec $n \geq 3$, alors G est $6\text{-}\gamma_{dR}$ -sommet-critique.*

En complément des Théorèmes 2.5 et 2.6, on note que chaque graphe 0-régulier et chaque graphe 1-régulier d'ordre $n \geq 2$ est domination Romaine double sommet-critique.

Puisque la suppression de n'importe quel sommet d'un cycle C_n produit une chaîne P_{n-1} , et à partir des Propositions 2.1 et 2.2, nous obtenons la proposition suivante:

Proposition 2.7. *Un cycle C_n est γ_{dR} -sommet-critique si et seulement si $n \equiv 1, 4, 5 \pmod{6}$.*

Lemme 2.8. *Tout sommet support dans un graphe γ_{dR} -sommet critique est adjacent à exactement une feuille.*

Nous caractérisons maintenant les arbres γ_{dR} -sommet critiques.

Théorème 2.9. *Un arbre T d'ordre au moins deux est γ_{dR} -sommet critique si et seulement si $T = K_2$.*

Preuve. Il est évident que K_2 est γ_{dR} -sommet critique. Soit T un arbre γ_{dR} -sommet critique d'ordre n , et soit f une $\gamma_{dR}(T)$ -fonction. Supposons que $n \geq 3$, et soit $x_1x_2\dots x_p$ la chaîne la plus longue dans T . A partir du Lemme 2.8, nous observons que x_1 est une feuille de T et que $\deg_T(x_2) = 2$. Soit $g = (V_0^g, \emptyset, V_2^g, V_3^g)$ une fonction $\gamma_{dR}(T - x_3)$ -fonction telle que $g(x_2)$ est la plus grande valeur possible. Comme T est un graphe γ_{dR} -sommet critique, alors on a $\omega(g) < \omega(f)$. Puisque $\deg_T(x_2) = 2$, nous observons que $g(x_1) + g(x_2) = 3$. Et puisque $|V_1^g| = 0$, nous pouvons supposer que $g(x_2) = 3$ et que $g(x_1) = 0$. Donc la fonction $f' : V(T) \rightarrow \{0, 1, 2, 3\}$ définie par $f'(x_3) = 0$, $f'(u) = g(u)$ pour tout $u \in V(T) - \{x_3\}$ est une FDRD de T de poids inférieur à $\gamma_{dR}(T)$, d'où la contradiction. \square

Pour caractériser les graphes r -parti complets γ_{dR} -sommets critiques, nous utilisons le corollaire suivant qui se découle de la Proposition 2.3.

Corollaire 2.10. *Soit $G = K_{n_1, n_2, \dots, n_r}$ un graphe r -parti complet avec $r \geq 2$ et $n_1 \leq n_2 \leq \dots \leq n_r$. Alors*

1. Si $n_1 = 1$, alors $\gamma_{dR}(G) = 3$.
2. Si $n_1 = 2$, alors $\gamma_{dR}(G) = 4$.
3. Si $n_1 \geq 3$, alors $\gamma_{dR}(G) = 6$.

Théorème 2.11. *Soit $G = K_{n_1, n_2, \dots, n_r}$ un graphe r -parti complet avec $r \geq 2$ et $n_1 \leq n_2 \leq \dots \leq n_r$. Alors G est γ_{dR} -sommet critique si et seulement si $G = K_2$, $n_1 = n_2 = \dots = n_r = 2$ ou $n_1 = n_2 = \dots = n_r = 3$.*

Preuve. Soient X_1, X_2, \dots, X_r une partition de l'ensemble des sommets du graphe G d'ordre n tels que $|X_i| = n_i$ pour $1 \leq i \leq r$. Si $n_1 = 1$, alors G est γ_{dR} -sommets critique si et seulement si $G = K_2$. Soit maintenant $n_1 = 2$. Alors le Corollaire 2.10 implique que $\gamma_{dR}(G) = 4$. Si $|X_r| \geq 3$, alors soit $v \in X_r$. Nous observons que $\gamma_{dR}(G - v) = 4$, et donc G n'est pas γ_{dR} -sommets critique. Donc $|X_r| = 2$, et alors G est $(n - 2)$ -régulier. On en déduit du Théorème 2.5 que G est γ_{dR} -sommets critique.

Soit maintenant $n_1 \geq 3$. Il découle du Corollaire 2.10 que $\gamma_{dR}(G) = 6$. Si $|X_r| \geq 4$, alors soit $v \in X_r$. On observe que $\gamma_{dR}(G - v) = 6$, et donc que G n'est pas γ_{dR} -sommets critique. Ainsi, $|X_r| = 3$, et donc $n_1 = n_2 = \dots = n_r = 3$. Donc G est $(n - 3)$ -régulier, et nous déduisons du Théorème 2.6 que G est γ_{dR} -sommets critique. \square

Proposition 2.12. $\gamma_{dR}(\text{cor}(C_n)) = \gamma_{dR}(\text{cor}(P_n)) = 2n + \lceil \frac{n}{3} \rceil$.

Proposition 2.13. Pour $n \geq 3$, $\text{cor}(C_n)$ est γ_{dR} -sommets critique si et seulement si $n \equiv 1 \pmod{3}$.

Pour caractériser les graphes unicycliques γ_{dR} -sommets critiques, soit \mathcal{F} la classe de graphes telle que $G \in \mathcal{F}$ si et seulement si $G = C_n$ avec $n \equiv 1, 4, 5 \pmod{6}$, ou $G = \text{cor}(C_n)$ avec $n \equiv 1 \pmod{3}$.

Théorème 2.14. Un graphe G unicyclique connexe est γ_{dR} -sommets critique si et seulement si $G \in \mathcal{F}$.

2.3 Suppression des arêtes

Théorème 2.15. Soit G un graphe et u, v sont deux sommets non adjacents dans G . Alors $\gamma_{dR}(G + uv) \leq \gamma_{dR}(G) \leq \gamma_{dR}(G + uv) + 2$.

A partir du Théorème 2.15 de [21], nous avons le lemme suivant:

Lemme 2.16. Pour toute arête e dans un graphe G , $\gamma_{dR}(G) \leq \gamma_{dR}(G - e) \leq \gamma_{dR}(G) + 2$.

La Proposition 2.12 montre que l'inégalité gauche du Lemme 2.16 est atteinte, et pour $n \geq 2$ l'étoile $K_{1,n}$ est un exemple où l'inégalité de droite du Lemme 2.16 est atteinte.

La proposition suivante donne quelques exemples de graphes γ_{dR} -arête-super critiques.

Proposition 2.17. (i) *La chaîne P_n est γ_{dR} -arête-super critique si et seulement si $n \in \{2, 3\}$.*

(ii) *Le cycle C_n est γ_{dR} -arête-super critique si et seulement si $n \equiv 2, 4 \pmod{6}$.*

Dans ce qui suit, nous caractérisons tous les graphes γ_{dR} -arête-super critiques. Soit \mathcal{H} la classe de tous les graphes G d'ordre au moins 3 tels que $G \in \mathcal{H}$ si et seulement si G est une étoile, ou G est un graphe biparti tel que pour toute γ_{dR} -fonction f , ce qui suit est vérifié:

- i) Pour tout $v \in V(G)$, $f(v) \in \{0, 2\}$.
- ii) Si $f(v) = 0$ pour tout sommet v , alors $\deg(v) = 2$.
- iii) Pour tout deux sommets adjacents x, y , $f(x) \neq f(y)$, et $0 \in \{f(x), f(y)\}$.

Théorème 2.18. *Un graphe connexe G d'ordre n est γ_{dR} -arête-super critique si et seulement si $G \in \mathcal{H}$.*

2.4 Addition d'arête

A partir du Théorème 2.15 de [21] et puisque toute γ_{dR} -fonction pour G est également une fonction FDRD pour $G + e$, nous avons le lemme suivant:

Lemme 2.19. *Pour tout arête $e \in E(\overline{G})$, $\gamma_{dR}(G) - 2 \leq \gamma_{dR}(G + e) \leq \gamma_{dR}(G)$.*

Si G est un graphe γ_{dR} -arête critique, alors par le Lemme 2.19 pour toute arête $e \in E(\overline{G})$, $\gamma_{dR}(G + e) = \gamma_{dR}(G) - 1$ ou $\gamma_{dR}(G + e) = \gamma_{dR}(G) - 2$. Il est clair qu'aucun graphe complet n'est γ_{dR} -arête critique mais $K_n \cup \overline{K_m}$ est un exemple de graphe γ_{dR} -arête critique pour tout $n, m \geq 1$.

Observation 2.20. *Un graphe G d'ordre n est γ_{dR} -arête critique si l'une des conditions suivantes est vérifiée:*

1. G est 0-régulier et $n \geq 2$.
2. G est 1-régulier et $n \geq 4$.
3. G est $(n - 2)$ -régulier et $n \geq 4$.
4. G est $(n - 3)$ -régulier et $n \geq 5$.

Proposition 2.21. *Soit G un graphe γ_{dR} -arête critique et a, b deux sommets non adjacents. Alors pour toute $\gamma_{dR}(G + ab)$ -fonction $f = (V_0, \emptyset, V_2, V_3)$ on a $f(a) = 0$ et $f(b) \geq 2$ ou $f(b) = 0$ et $f(a) \geq 2$.*

Proposition 2.22. *Tout sommet support dans un graphe γ_{dR} -arête critique est adjacent à exactement une feuille.*

Proposition 2.23. *Si $T = SS_t$ est une araignée (étoile subdivisée) avec $t \geq 3$, alors T n'est pas γ_{dR} -arête critique.*

Théorème 2.24. *Si T est un arbre d'ordre $n \geq 5$ et $\text{diam}(T) \neq 5$, alors T n'est pas γ_{dR} -arête critique.*

CHAPITRE 3

Le nombre de subdivision de la Domination Romaine Double

Nous nous sommes intéressés dans le chapitre 2, à l'étude du concept de criticité pour la domination Romaine double dans les graphes. Dans ce chapitre qui représente notre contribution, et dans un graphe G , on s'intéresse à l'étude de l'effet de la subdivision des arêtes sur le nombre de domination Romaine double $\gamma_{dR}(G)$.

3.1 Résultats préliminaires

Comme l'objectif principal dans ce chapitre est l'étude de l'effet de la subdivision des arêtes sur le nombre de domination Romaine double $\gamma_{dR}(G)$, on donne la définition suivante.

Définition 3.1. *Pour un graphe G , le nombre de subdivision de domination romaine double, noté $sd_{\gamma_{dR}}(G)$, est le nombre minimum d'arêtes qu'il faut subdiviser (au plus une seule fois), pour faire augmenter le nombre de domination romaine double $\gamma_{dR}(G)$.*

Avant de présenter nos résultats, nous donnons un résultat important établi par Beeler et al [15] et qui sera utile par la suite.

Proposition 3.2 (Beeler et al [15]). *Pour un graphe G , il existe une fonction de domination Romaine double de poids $\gamma_{dR}(G)$ telle que aucun sommet ne reçoive la valeur 1.*

Nous commençons cette section par montrer que la subdivision d'une arête de G ne peut pas diminuer le nombre de domination Romaine double $\gamma_{dR}(G)$, mais peut l'augmenter d'au plus par deux.

Théorème 3.3. *Si G' est le graphe obtenu à partir d'un graphe G en subdivisant une arête de G , alors $\gamma_{dR}(G) \leq \gamma_{dR}(G') \leq \gamma_{dR}(G) + 2$.*

Preuve. Soit G' le graphe obtenu à partir d'un graphe G en subdivisant une arête uv par un sommet x . A partir de Proposition 3.2, soit g une $\gamma_{dR}(G')$ -fonction pour laquelle aucun sommet n'est affecté la valeur 1. On discute les situations suivantes: En premier, si $g(x) = 0$, alors $g|_G$ (la restriction de g sur G) est une FDRD de G , d'où $\gamma_{dR}(G) \leq \gamma_{dR}(G')$. Supposons maintenant que $g(x) = 2$. Si $(g(u) = 0$ et $g(v) = 3)$, (le cas $(g(u) = 3$ et $g(v) = 0)$ est identique), alors $g|_G$ est une FDRD de G , d'où $\gamma_{dR}(G) \leq \gamma_{dR}(G')$. Supposons maintenant que $(g(u) = 0$ et $g(v) = 0)$. Définissons la fonction $f : V(G) \longrightarrow \{0, 1, 2, 3\}$ par $f(u) = f(v) = 1$ et $f(z) = g(z)$ pour tout sommet $z \in V(G) \setminus \{u, v\}$. Il est évident que f est une FDRD de G et $p(f) = p(g)$, et donc $\gamma_{dR}(G) \leq \gamma_{dR}(G')$. On suppose en dernier que $g(x) = 3$. Au moins un des sommets, u ou v prend la valeur 0. Sans perte de généralité, supposons que $g(u) = 0$. Définissons la fonction $f : V(G) \longrightarrow \{0, 1, 2, 3\}$ par $f(u) = 3$ et $f(z) = g(z)$ pour tout sommet $z \in V(G) \setminus \{u\}$. Evidemment, f est une FDRD de G de poids $p(f) = p(g)$. Par conséquent $\gamma_{dR}(G) \leq \gamma_{dR}(G')$.

Pour démontrer la borne supérieure, considérons la $\gamma_{dR}(G)$ -fonction f . On distingue les cas suivants:

- $f(u) = f(v) = 0$: Alors on définit la fonction $g : V(G') \longrightarrow \{0, 1, 2, 3\}$ par $g(x) = 2$ et $g(z) = f(z)$ pour tout sommet $z \in V(G)$. Il est évident que, g est une FDRD de G' de poids $p(g) \leq p(f) + 2$. Par conséquent $\gamma_{dR}(G') \leq \gamma_{dR}(G) + 2$.

- $f(u) = 3$ et $f(v) = 0$ (le cas $f(u) = 0$ et $f(v) = 3$, est identique) : Si $f(u) = 3$ est nécessaire pour v , alors définissons la fonction $g : V(G') \longrightarrow \{0, 1, 2, 3\}$ par $g(x) = 0$, $g(v) = 2$ et $g(z) = f(z)$ pour tout sommet $z \in V(G) \setminus \{v\}$. Alors, g est une FDRD de G' de poids $p(g) : p(g) \leq p(f) + 2$, et alors $\gamma_{dR}(G') \leq \gamma_{dR}(G) + 2$. Sinon (i.e $f(u) = 3$ n'est pas nécessaire pour v), alors définissons la fonction $g : V(G') \longrightarrow \{0, 1, 2, 3\}$ par $g(x) = 0$ et $g(z) = f(z)$ pour tout sommet $z \in V(G)$. Alors, g est une DRDF de G' de poids $p(g) \leq p(f)$. Par conséquent $\gamma_{dR}(G') \leq \gamma_{dR}(G)$.

- $f(u) = 2$ et $f(v) = 0$ (le cas $f(u) = 0$ et $f(v) = 2$ est identique) : Définissons la fonction $g : V(G') \longrightarrow \{0, 1, 2, 3\}$ par $g(x) = 2$ et $g(z) = f(z)$ pour tout sommet $z \in V(G)$.

Donc, g est une FDRD de G' de poids $p(g) \leq p(f) + 2$.

- $f(u) = 2$ et $f(v) = 2$: On définit la fonction $g : V(G') \longrightarrow \{0, 1, 2, 3\}$ par $g(x) = 0$ et $g(z) = f(z)$ pour tout sommet $z \in V(G)$. Il est évident que, g est une FDRD de G' de poids $p(g) \leq p(f)$.

Dans tous les cas, la fonction g est une FDRD de G' de poids $p(g) : p(g) \leq p(f) + 2$.
Donc $\gamma_{dR}(G') \leq \gamma_{dR}(G) + 2$. □

On donne ainsi un exemple illustratif de ce résultat, en considérant que G' est le graphe obtenu à partir de G par la subdivision d'une arête quelconque. (voir les trois Figures 3.1, 3.2, 3.3)

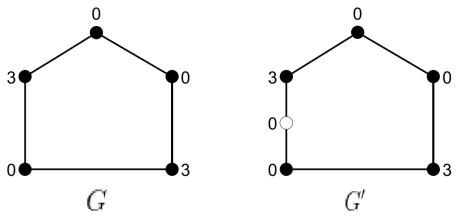


FIGURE 3.1. Un graphe G avec $\gamma_{dR}(G') = \gamma_{dR}(G) = 6$

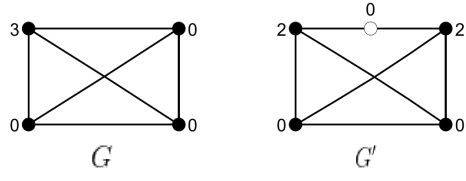


FIGURE 3.2. Un graphe G avec $\gamma_{dR}(G') = \gamma_{dR}(G) + 1 = 4$

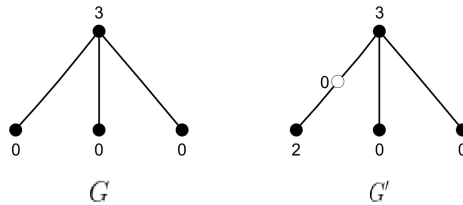


FIGURE 3.3. Un graphe G avec $\gamma_{dR}(G') = \gamma_{dR}(G) + 2 = 5$

3.2 Valeurs de $\text{sd}_{\gamma_{dR}}$ pour certaines classes de graphes

On commence cette section par les deux propositions suivantes, qui sont des conséquences directes des Observations 2.1, 2.2, citées dans le chapitre 2.

Proposition 3.4. *Soit C_n un cycle d'ordre $n \geq 3$. Alors*

$$\text{sd}_{\gamma_{dR}}(C_n) = \begin{cases} 1 & \text{si } n \equiv 0, 2, 3, 4 \pmod{6} \\ 2 & \text{si } n \equiv 1, 5 \pmod{6} \end{cases}$$

Proposition 3.5. *Soit P_n une chaîne d'ordre $n \geq 1$. Alors*

$$\text{sd}_{\gamma_{dR}}(P_n) = \begin{cases} 1 & \text{si } n \equiv 0, 1 \pmod{3} \\ 2 & \text{si } n \equiv 2 \pmod{3} \end{cases}$$

Théorème 3.6. *Si G est un graphe biparti complet $K_{p,q}$ avec $1 \leq p \leq q$, alors $\text{sd}_{\gamma_{dR}}(G) \leq 2$.*

Preuve. Il est clair que si $G = P_3$ ou $G = C_4$, alors par les Propositions 3.5 et 3.4, on a $\text{sd}_{\gamma_{dR}}(G) = 1$. Supposons maintenant que $G \notin \{P_3, C_4\}$. Soient $X = \{u_1, \dots, u_p\}$ et $Y = \{v_1, \dots, v_q\}$ la partition de l'ensemble des sommets V de G . Notons le poids d'une fonction f par $p(f)$. On distingue alors trois cas:

Cas 1. $p = 1$ et $q \geq 3$. Alors G est une étoile de centre u . Considérons le graphe $G' = (V', E')$ obtenu par la subdivision d'une arête quelconque uv et soit x le sommet résultant de la subdivision. Définissons la $\gamma_{dR}(G')$ -fonction f du graphe G' telle que: $f(u) = 3, f(v) = 2$ et $f(w) = 0$ pour tout sommet $w \neq u, v$. Construisons une nouvelle fonction de domination double Romaine de G à partir de f de la manière: $g(v) = f(v) - 2 =$

0 et $g(w) = f(w)$ pour tout sommet $w \neq v$. Il est clair que le poids $p(g) < p(f) = \gamma_{dR}(G')$. Par conséquent $\gamma_{dR}(G) \leq p(g) < \gamma_{dR}(G')$. Donc $\text{sd}_{\gamma_{dR}}(G) = 1$.

Cas 2. $p = 2$. Supposons que $q \geq 3$ (sinon $G = P_3$ ou $G = C_4$ et donc $\text{sd}_{\gamma_{dR}}(G) = 1$). Soit $G' = (V', E')$ le graphe obtenu en subdivisant l'arête u_1v_1 par le sommet x . Définissons la $\gamma_{dR}(G')$ -fonction f du graphe G' telle que : $f(u_1) = f(u_2) = f(x) = 2$ et $f(w) = 0$ pour tout sommet $w \notin \{u_1, u_2, x\}$. Construisons une nouvelle fonction de domination double Romaine g du graphe G à partir de f de façon que $g(w) = f(w)$ pour tout sommet w de V . Par conséquent $\gamma_{dR}(G) \leq p(g) \leq p(f) - 2 < \gamma_{dR}(G')$. Donc $\text{sd}_{\gamma_{dR}}(G) = 1$.

Cas 3. $p = 3$. Considérons le graphe $G' = (V', E')$ obtenu en subdivisant les arêtes u_1v_1 et u_1v_2 , par les deux sommets x et y , respectivement. Définissons la $\gamma_{dR}(G')$ -fonction f du graphe G' avec $f(u_1) = 3$ et $f(v_1) = f(v_2) = 2$, $f(w) = 0$ pour tout sommet $w \neq u_1, v_1, v_2$. Construisons une nouvelle fonction g de domination double Romaine de G , de façon que : $g(u_1) = f(u_1) = 3$ et $g(v_1) = f(v_1) + 1 = 3$, $g(v_2) = f(v_2) - 2 = 0$ et $g(w) = f(w) = 0$ pour tout sommet $w \notin \{u_1, v_1, v_2\}$. Il en résulte par conséquent que $\gamma_{dR}(G) \leq p(g) \leq p(f) - 1 < \gamma_{dR}(G')$. Alors $\text{sd}_{\gamma_{dR}}(G) \leq 2$.

Donc $\text{sd}_{\gamma_{dR}}(K_{p,q}) \leq 2$ pour tous entiers p et q avec $1 \leq p \leq q$. □

Théorème 3.7. *Si $G = (V, E)$ un graphe connexe d'ordre $n \geq 3$ avec $\gamma_{dR}(G) = 3$, alors $\text{sd}_{\gamma_{dR}}(G) = 1$.*

Preuve. Soient $e = uv \in E(G)$ et G' le graphe obtenu à partir de G en subdivisant l'arête e par un sommet x . Soit f une $\gamma_{dR}(G')$ -fonction pour laquelle aucun sommet n'est affecté la valeur 1.

Supposons en premier que $f(x) = 0$. Sans perte de généralité, on peut supposer que $f(u) = 3$. Si $f(v) \geq 2$, alors le poids de f , $p(f) > 3 = \gamma_{dR}(G)$. Si $f(v) = 0$, alors v doit être adjacent à un sommet $z \neq u$ avec $f(z) = 3$ ou à deux sommets $z_1, z_2 \neq u$ avec $f(z_1) = f(z_2) = 2$. Et ceci implique que le poids $p(f) > 3 = \gamma_{dR}(G)$.

Maintenant, on suppose que $f(x) = 3$. Alors, sans perte de généralité, on peut considérer que $f(u) = 0$. Si $f(v) \in \{2, 3\}$, alors $p(f) > 3 = \gamma_{dR}(G)$. Si $f(v) = 0$, alors on peut avoir les situations suivantes:

- v est adjacent a un sommet $z \neq u$ avec $f(z) = 3$, ce qui implique que $p(f) > 3 = \gamma_{dR}(G)$, ou

- v est adjacent a deux sommets $z_1, z_2 \neq u$ avec $f(z_1) = f(z_2) = 2$, d'où $p(f) > 3 = \gamma_{dR}(G)$, ou bien

- v est adjacent a un sommet $z \neq u$ avec $f(z) = 0$ et z est adjacent a au moins un sommet $z' \neq u$ avec $f(z') = 3$, ce qui implique que $p(f) > 3 = \gamma_{dR}(G)$.

Dans tous ces cas, on a $sd_{\gamma_{dR}}(G) = 1$. □

Une conséquence directe de ce théorème est le résultat suivant:

Corollaire 3.8. *Si G est un graphe complet d'ordre $n \geq 3$, alors $sd_{\gamma_{dR}}(G) = 1$.*

Théorème 3.9. *Si G est un graphe connexe ayant un support fort, alors $sd_{\gamma_{dR}}(G) = 1$.*

Preuve. Soit x un supporte fort dans un graphe connexe G . Soit $L(x)$ l'ensemble des sommets pendants adjacent à x et soit $y_1 \in L(x)$. Considérons G' le graphe obtenu en subdivisant l'arête xy_1 par un sommet x' . Définissons la $\gamma_{dR}(G')$ -fonction f . Il est clair que $f(x) + f(x') + f(L_G(x)) \geq 5$. Nous construisons une nouvelle fonction g de G de la manière suivante: $g(x) = 3$, $g(y_i) = 0$ pour tout $y_i \in L(x)$ et $g(z) = f(z)$ pour tout sommet $z \in V(G) \setminus \{\{x\} \cup L(x)\}$. Il est clair que g est une fonction de domination Romaine double de G . Donc $\gamma_{dR}(G) \leq p(g) \leq p(f) - 2 < p(f) = \gamma_{dR}(G')$. D'où $sd_{\gamma_{dR}}(G) = 1$. □

Théorème 3.10. *Soit G est un graphe ayant deux supportes adjacents, alors $sd_{\gamma_{dR}}(G) \leq 2$.*

Preuve. Soient x, y deux supports adjacents dans un graphe G . Soient x_1 et y_1 deux sommets pendants adjacent à x et y respectivement. Considérons le graphe G' obtenu en subdivisant les deux arêtes xx_1 et yy_1 par les sommets x' et y' , respectivement. D'après le Théorème 3.9 précédent, on peut supposer que ni x ni y n'est fort. Soit f une $\gamma_{dR}(G')$ -fonction. Il est clair que $A = f(x_1) + f(x') + f(x) + f(x'') + f(y_1) + f(y') \geq 6$. Nous examinons les deux situations suivantes:

i) $A = 6$: Alors $f(x') = f(y') = 3$ et $f(x) = f(x_1) = f(x'') = f(y_1) = 0$. Dans ce cas définissons la fonction $g : V(G) \longrightarrow \{0, 1, 2, 3\}$ par: $g(x_1) = 2$ et $g(z) = f(z)$

pour tout sommet $z \in V(G) \setminus \{x_1\}$. Il est clair que g définie de cette façon, de poids $p(g) : p(g) \leq p(f) - 1$, est une fonction de domination Romaine double de G . Ceci implique que : $\gamma_{dR}(G) \leq p(g) < p(f) = \gamma_{dR}(G')$. D'où $sd_{\gamma_{dR}}(G) \leq 2$.

- ii) $A > 6$: On construit une nouvelle fonction $g : V(G) \longrightarrow \{0, 1, 2, 3\}$ par : $g(x) = f(x) - 2 = 0$ et $g(z) = f(z)$ pour tout sommet $z \in V(G) \setminus \{x\}$. Il est clair que la fonction g de poids $p(g) : p(g) \leq p(f) - 2$, est une fonction de domination Romaine double de G . Par conséquent $\gamma_{dR}(G) \leq p(g) < p(f) = \gamma_{dR}(G')$. Donc $sd_{\gamma_{dR}}(G) \leq 2$. \square

Comme conséquence directe de ce théorème, le corollaire suivant.

Corollaire 3.11. *Soit G la couronne d'un graphe H . Alors $sd_{\gamma_{dR}}(G) \leq 2$.*

Théorème 3.12. *Si G est un graphe d'ordre $n \geq 3$ et x un sommet de G de degré $d(x) \geq 2$, alors $sd_{\gamma_{dR}}(G) \leq d(x)$.*

Preuve. Soit x un sommet de G de degré $d(x) = d \geq 2$. Supposons $N_G(x) = \{y_1, \dots, y_d\}$. Soit G' le graphe obtenu en subdivisant toutes les arêtes incidentes à x , par les sommets w_1, \dots, w_d dans l'ordre. Soit f une $\gamma_{dR}(G')$ -fonction dont aucun sommet n'est affecté la valeur 1 (une telle fonction existe toujours d'après la Proposition [15]). On distingue trois cas:

Cas 1. $f(x) = 3$. Supposons que $f(w_i) = 0$ pour tout $i = \overline{1, d}$. Construisons une nouvelle fonction $g : V(G) \longrightarrow \{0, 1, 2, 3\}$ de la manière suivante: $g(x) = 2$ et $g(z) = f(z)$ pour chaque sommet $z \in V(G) \setminus \{x\}$. Il est clair que g est une fonction de domination Romaine double de G de poids $p(g)$. Donc $\gamma_{dR}(G) \leq p(g) \leq p(f) - 1 < p(f) = \gamma_{dR}(G')$. D'où $sd_{\gamma_{dR}}(G) \leq d$.

Cas 2. $f(x) = 2$. Supposons en premier qu'il existe un w_j telle que $f(w_j) \geq 2$, alors on peut réaffecter les valeurs de $f(w_j)$ et $f(y_j)$ de sorte que $f(y_j) \geq 2$ et $f(w_i) = 0$ pour tout $i = \overline{1, d}$. On peut donc construire une nouvelle fonction g de la manière suivante: $g(x) = 1$ et $g(z) = f(z)$ pour tout $z \neq x$. Il est clair que g est une fonction de domination Romaine double G . D'où $\gamma_{dR}(G) \leq p(g) \leq p(f) - 1 < p(f) = \gamma_{dR}(G')$. Par conséquent $sd_{\gamma_{dR}}(G) \leq d$.

Cas 3. $f(x) = 0$. On considère les deux sous-cas suivants:

Sous-cas 3.1. Supposons qu'il existe w_i et $w_j : i \neq j$ tel que $f(w_i) \geq 2$ et $f(w_j) \geq 2$. On construit une nouvelle fonction de la manière suivante: $g(x) = 3$ et $g(z) = f(z)$ pour tout $z \neq x$. Il s'ensuit que g est une fonction de domination Romaine double de G de poids $p(g) : p(g) \leq p(f) - 1$. D'où $\gamma_{dR}(G) \leq p(g) < p(f) = \gamma_{dR}(G')$. D'où $sd_{\gamma_{dR}}(G) \leq d$.

Sous-cas 3.2. Supposons qu'il existe un unique w_i tel que $f(w_i) = 3$ et pour tout $j \neq i$, $f(w_j) = 0$. Construisons une nouvelle fonction g de la manière suivante: Si $f(y_i) \geq 2$, alors on considère $g(x) = 0$ et $g(z) = f(z)$ pour tout $z \neq x$. Sinon $g(x) = 0$ et $g(y_i) = 2$ et $g(z) = f(z)$ pour tout $z \neq x$. Il est clair que g est une fonction de domination Romaine double de G . Donc $\gamma_{dR}(G) \leq p(g) < p(f) = \gamma_{dR}(G')$. D'où $sd_{\gamma_{dR}}(G) \leq d$. \square

Corollaire 3.13. *Si G est un graphe connexe G avec $\delta(G) \geq 2$, alors $sd_{\gamma_{dR}}(G) \leq \delta(G)$.*

Corollaire 3.14. *Pour tout graphe k -régulier d'ordre au moins 3, On a $sd_{\gamma_{dR}}(G) \leq k$.*

Théorème 3.15. *Si G est un graphe connexe d'ordre $n \geq 3$ tel que $\delta(G) = 1$, alors $sd_{\gamma_{dR}}(G) \leq 2$.*

Preuve. Soit $v \in V(G)$ un sommet support faibe avec l'unique feuille u et $\deg(v) \geq 2$ et $vw \in E(G)$. Soit G' le graphe obtenu à partir de G en subdivisant l'arête vw par le sommet y . Supposons maintenant que G'' est le graphe obtenu à partir de G en subdivisant les arêtes uv, vw avec les sommets x, y respectivement. Soit f une $\gamma_{dR}(G'')$ -fonction dont aucun sommet n'est affecté la valeur 1.

En premier lieu, supposons $f(x) = 0$. Alors $f(u) = 2$ et $f(v) \in \{2, 3\}$. Définissons la fonction $g : V \rightarrow \{0, 1, 2, 3\}$ par $g(v) = 3, g(u) = 0$ et $g(z) = f(z)$ pour tout $z \in V \setminus \{u, v\}$. Il est clair que, g est une fonction de domination Romaine double de G de poids $p(g) : p(g) < p(f)$.

En second lieu, supposons $f(x) = 3$ (le cas $f(y) = 3$ est similaire). Alors il est clair que $f(u) = f(v) = 0$.

Si $f(y) \in \{2, 3\}$, alors définissons la fonction $g : V \rightarrow \{0, 1, 2, 3\}$ par $g(v) = 3$ et $g(z) = f(z)$ pour tout $z \in V \setminus \{v\}$. Evidemment, g est une fonction de domination Romaine

double de G de poids $p(g) < p(f)$. Supposons maintenant que $f(y) = 0$ (i.e $f(w) = 3$). Définissons la fonction $g : V \rightarrow \{0, 1, 2, 3\}$ par $g(u) = 2$ et $g(z) = f(z)$ pour tout $z \in V \setminus \{u\}$. Il est évident que, g est une fonction de domination romaine double de G de poids $p(g) < p(f)$. Dans tous les cas g est une FDRD de G avec un poids $p(g) < p(f)$. Ce qui prouve le résultat. \square

Corollaire 3.16. *Si T est un arbre, alors $sd_{\gamma_{dR}}(T) \leq 2$.*

CONCLUSION ET PERSPECTIVES

L'objectif principal de ce mémoire est l'étude de la notion de domination Romaine double dans les graphes. Cette notion a été intensivement étudiée au cours de ces dernières années, beaucoup de résultats ont été trouvés concernant cette notion.

Nous avons en lieu prouvé que la subdivision d'une arête quelconque dans un graphe G , ne peut augmenter le nombre de la domination Romaine double que par au plus deux unités. Puis, nous avons donné la valeur exacte de nombre de subdivision de domination Romaine double pour certaines classes de graphes, et même donner une borne supérieure de ce nombre en fonction de degré d'un sommet.

Bien que les travaux réalisés le long de ce mémoire et les travaux réalisés auparavant sont importants, nous sommes loin de répondre aux nombreux problèmes posés dans le domaine de la domination Romaine double.

La contribution réalisée durant ce mémoire ouvre plus de perspectives de recherche. Suite aux résultats obtenus sur le nombre de la subdivision de la domination Romaine double dans les graphes, l'étude de ces problèmes peut être poursuivie dans des classes particulières de graphes ayant des structures simples tels que: Les graphes bipartis ou les graphes triangulés par exemple.

Il serait intéressant de même, de

- Démontrer la conjecture que : $sd_{\gamma_{dR}}(G) \leq 2$ pour tout graphe G .
- Caractériser les graphes ou bien d'autres classes particulières de graphes G , ayant une structure simple, tels que les arbres avec $sd_{\gamma_{dR}} = 2$ ou $sd_{\gamma_{dR}} = 1$.

RÉFÉRENCES

- [1] C. Berge, *Graphes et Hypergraphes*, Dunod, deuxième édition.(1970).
- [2] C. Berge, *Graphs and Hypergraphs*, NorthHolland, Amsterdam, (1973).
- [3] C. F. de Jaenisch, *Applications de l'analyse mathématique au jeu des echecs*, Petrograde (1862).
- [4] E. J. Cockayne and S. T. Hedetniemi, *Towards a theory of domination in graphs*, Networks 7 (1977) 247 – 261.
- [5] E. J. Cockayne, P. A. Dreyer, S. M. Hedetniemi and S.T. Hedetniemi, *Roman domination in graphs* , Discrete Mathematics 278 (2004) 11 – 22.
- [6] F. Haray and T.W. Haynes, *Double domination in graphs*, Ars Combin 55 (2000) 201 – 213.
- [7] G. Chartrand, L. Lesniak, Graphs&Digraphs, *Third Edition,Chapman & Hall*, London (1996).
- [8] G. H. Fricks, S. M. Hedetniemi, A. A. McRae, C. K. Wallis, M. S. Jacobson, H. W. Martin et W. D.Weakley, *Combinatorial problemes on chessboards :A briev survey, dans Graph Theory, Combinatorics and Applications:Proc. Seventh Quad. Internat. Conf. on the Theory and Applications of Graphs, vol.1*,Y. Alavi and A. Schwenks, Eds, Wiley, (1995) 507 – 528.
- [9] H. A. Ahangar, M.Chellali, S. M. Sheikholeslami, *On the double Roman domination in graphs*, Discrete Appl. Math 232 (2017) 1 – 7.
- [10] K. S. Booth et J. H. Johnson, *Dominating sets in chordal graphs*, SIAM J. Comput 11 (1982) 191 – 199.
- [11] M. A. Henning, L. Kang, E. Shan and A.Yeo, *On matching and total domination in graphs*,Discrete Math.308 (2008) 2313 – 2318.

- [12] M. A. Henning and A. Yeo, *Total domination in graphs*, Springer Monographs in Mathematics (2013).
- [13] N. Jafari Rad and L. Volkmann, *Changing and unchanging the Roman domination number of a graph*, Util. Math., 89 (2012) 79 – 95.
- [14] O. Ore, *Theory of graphs*, Amer. Soc. Colloq. Pub 38, Providence, R.I (1962).
- [15] R.A.Beeler, T.W.Haynes and S.T.Hedetniemi, *Double Roman domination*, Discrete App. Math 211 (2016) 23 – 29.
- [16] R.A. Beeler, T.W. Haynes, S.T. Hedetniemi, *Double Roman domination*, Discrete Appl. Math. 211 (2016) 23 – 29.
- [17] R. Laskar, J. Pfaff, S. M. Hedetniemi and S.T. Hedetniemi, *On the algorithmic complexity of total domination* .SIAM J. Alg. Disc. Math.Vol.5, No 3, *September* (1984).
- [18] S. Nazari-Moghaddam and L. Volkmann, *Critical concept for double Roman domination in graphs*, Mathématiques discrètes, algorithmes et applications 12 (02) 2050020 (2020).
- [19] S. T. Hedetniemi and, R. S. Laskar, *Introduction* , Discrete mathematics (1990).
- [20] T.W. Haynes and P. J. Slater, *Paired-domination in graphe*, Networks 32 (1998) 199 – 206.
- [21] V.Anu,S. Aparna Lakshmanan , *Double Roman Domination Number*, Discrete Applied Mathematics, 244 (2018) 198 – 204.