

32-510-168-1

N° d'ordre : 21 / 2004 – M / MT

REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE

Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

Université des Sciences et de la Technologie Houari Boumedienne

FACULTE DES MATHÉMATIQUES



# Mémoire présenté pour l'obtention du diplôme de Magister

## En Mathématiques

Spécialité : Recherche Opérationnelle (Méthodes Stochastiques)

Par

M<sup>elle</sup> SERIER ABDALLAH KHEDIDJA

THEME

**SUR L'ESTIMATION DES MODELES PERIODIQUES UNIVARIÉS ET MODELES MULTIVARIÉS CLASSIQUES**

SOUTENUE PUBLIQUEMENT LE 23-09-2004

DEVANT LE JURY

MOULAI M, Professeur, U.S.T.H.B.  
 BENTARZI M, Professeur, U.S.T.H.B.  
 MAAMRA, M, S, chargé de la recherche, U.S.T.H.B.  
 FELLAG. H, Professeur, TIZI-OUZOU.  
 IBAZIZEN. M, Maître de conférence, TIZI-OUZOU.

Président  
 Directeur de thèse  
 Examineur  
 Examineur  
 Examineur



# *Dédicace*

*A la mémoire de mon père et ma mère.*

## **Remerciements**

- Je tiens à remercier mon bon Dieu de m`avoir guider vers les portes du savoir.
- Je tiens avant tout à témoigner ma gratitude et mes remerciements à monsieur Mohamed Benterzi professeur à L`U.S.T.H.B ex. directeur d`institut de mathématiques qui par son engagement sans relâche à su créer un climat serein propice aux études et à la recherche et pour m`avoir encadrer d`une part, et d`autre part, m`avoir proposer un sujet aussi riche et plus intéressant, je le suis également reconnaissante pour son appui moral et pour sa patience pendant toute la durée de la réalisation de ce travail et pour ses différents conseils qui ont amélioré plus nettement ce travail, je tiens ici à lui rendre humblement hommage et lui dire combien je suis reconnaissante pour tous les conseils qu`il m`a prodigué et avec quelle patience !!!
- Je tiens également à remercier monsieur Mustapha Moulai professeur à L`U.S.T.H.B d`avoir accepté de présider le jury.
- Mes remerciements tout aussi, aux membres de jury qui ont accepté de le composer prenant du temps tous précieux sur leurs obligations multiples, qu`ils reçoivent tous ici toute ma considération et ma profonde estime.
- Ma profonde gratitude et mes remerciements les plus sincères tous aussi à madame H. Guerbyenne et monsieur A Aknouche pour tout le temps qu`ils m`ont consacré pour me guider dans la préparation de ce travail.
- Mes remerciements vont également à toute personne qui m`a aidé.

# Table des Matières

INTRODUCTION GENERALE . . . . .	4
0.0.1 Introduction . . . . .	4
0.0.2 Apports et présentation de la thèse : . . . . .	7
<b>1 Modèles Périodiques Univariés et Modèles Multivariés Classiques</b>	<b>10</b>
1.1 Introduction . . . . .	10
1.2 Processus périodiquement corrélés . . . . .	11
1.2.1 Processus autorégressifs moyennes mobiles périodiques . . . . .	12
1.2.2 Inversibilité et causalité des processus ARMA $d$ -périodiques . . . . .	13
1.3 Processus $d$ -variés . . . . .	14
1.3.1 Processus VARMA stationnaires . . . . .	14
1.3.2 Hypothèse de base et propriétés des processus VAR . . . . .	16
1.3.3 Représentation moyenne mobile d'un processus VAR . . . . .	18
1.3.4 Autocovariances et autocorrélations d'un processus VAR stable . . . . .	19
1.3.5 Autocovariance d'un processus VAR(1) . . . . .	20
1.3.6 Autocovariance d'un processus stable VAR( $p^*$ ) . . . . .	20
1.3.7 L'autocovariance de l'échantillon et la densité spectrale . . . . .	21
1.4 Approche de "period-span-lumping" . . . . .	22
1.4.1 Modèle VARMA associé à un modèle PARMA univarié . . . . .	22
1.4.2 Modèle autorégressif multivarié associé à un modèle autorégressif univarié périodique . . . . .	24
1.5 Approche de "order-span lumping" . . . . .	27
1.6 Fonction d'autocovariance et la fonction d'autocorrélation dans le cas périodiques	30
1.6.1 Relations entre les autocovariances d'un processus multivarié stationnaire et les autocovariances d'un processus périodiquement corrélé . . . . .	31

<b>2</b>	<b>Méthodes d'Estimation des Paramètres d'un Modèle <math>ARMA_d(p_t, q_t)</math></b>	<b>33</b>
2.1	Introduction . . . . .	33
2.2	Méthode des moments . . . . .	35
2.2.1	Estimation des paramètres d'un modèle AR $d$ -périodiques . . . . .	35
2.2.2	Estimation des moments par des méthodes récursives . . . . .	37
2.3	Méthode du maximum de vraisemblance . . . . .	41
2.3.1	Méthode du maximum de vraisemblance conditionnelle . . . . .	42
2.3.2	Méthode du maximum de vraisemblance non conditionnelle . . . . .	43
2.4	Méthode des moindres carrés . . . . .	47
2.4.1	Méthode des moindres carrés conditionnelle . . . . .	47
2.4.2	Méthode des moindres carrés non conditionnelle . . . . .	48
2.4.3	Estimation <i>en-ligne</i> des modèles <i>PARMA</i> . . . . .	49
2.5	Estimation de la fonction d'autocorrélation d'un processus périodiquement corrélé	51
2.5.1	Estimation de la moyenne . . . . .	51
2.5.2	Estimation de la fonction d'autocorrélation . . . . .	52
2.6	Applications numériques . . . . .	53
2.6.1	Introduction . . . . .	53
2.6.2	Résultats numériques . . . . .	53
2.6.3	Interprétation des résultats . . . . .	71
<b>3</b>	<b>Méthodes d'Estimation des Paramètres d'un Modèle <i>VARMA</i></b>	<b>72</b>
3.1	Introduction . . . . .	72
3.2	Méthode du maximum de vraisemblance . . . . .	73
3.2.1	La fonction de vraisemblance d'un modèle <i>VAR</i> ( $p^*$ ) . . . . .	73
3.2.2	Estimateurs du maximum de vraisemblance . . . . .	74
3.3	Cas général <i>VARMA</i> ( $p^*, q^*$ ) . . . . .	75
3.3.1	Calcul des estimateurs du maximum de vraisemblance . . . . .	76
3.3.2	La fonction de vraisemblance d'un processus <i>MA</i> (1) . . . . .	77
3.3.3	Le cas <i>MA</i> ( $q^*$ ) . . . . .	78
3.3.4	Le cas <i>VARMA</i> (1.1) . . . . .	79
3.4	Méthode des moindres carrés multivariés . . . . .	80
3.4.1	L'estimation . . . . .	80
3.4.2	Propriétés asymptotiques des estimateurs des moindres carrés . . . . .	81
3.4.3	L'estimation des moindres carrés et l'estimation de Yule-Walker . . . . .	83

3.4.4	Estimation de la moyenne du processus . . . . .	83
3.4.5	Estimation lorsque la moyenne du processus est connue . . . . .	84
3.4.6	Estimateur de Yule-Walker . . . . .	84
3.5	Estimation préliminaire dans le cadre d'un modèle $VARMA(p^*, q^*)$ . . . . .	85
3.5.1	Calcul des estimateurs par la méthode des moindres carrés multivariées . . . . .	85
3.5.2	Résultats numériques . . . . .	86
3.5.3	Interprétation des résultats . . . . .	109
<b>4</b>	<b>Méthodes d'Estimation des Séries Temporelles Multiples</b> . . . . .	<b>110</b>
4.1	Introduction . . . . .	110
4.2	Méthodes non paramétriques . . . . .	112
4.2.1	Méthode du périodogramme . . . . .	112
4.2.2	Méthode du périodogramme de lissage . . . . .	113
4.3	Méthodes paramétriques : la méthode autorégressive . . . . .	113
4.4	Méthode autorégressive périodique . . . . .	116
4.5	Estimation des paramètres . . . . .	122
4.5.1	Résultats numériques . . . . .	126
4.5.2	Représentation des résultats . . . . .	128
4.5.3	Interprétation des résultats . . . . .	133
4.5.4	Comparaison des résultats de la méthode autorégressive périodique et la méthode autorégressive classique . . . . .	133
	CONCLUSION . . . . .	135
	BIBLIOGRAPHIE . . . . .	136
	ANNEXE . . . . .	141
	ANNEXE . . . . .	145

# INTRODUCTION GENERALE

## 0.0.1 Introduction

L'étude des séries chronologiques a connu un accroissement important tant du point de vue théorique que pratique. Dans presque tous les domaines, les données peuvent être amenées, ou présentées sous forme de séries temporelles. Bien que l'analyse des séries chronologiques soit basée sur l'hypothèse de stationnarité faible, au point de vue pratique, cette propriété n'est pas toujours vérifiée; on procède alors à une transformation adéquate appliquée au processus non stationnaire pour assurer la condition de stationnarité (différence ordinaire, différence mixte, ou par le biais d'une transformation de la famille exponentielle de Box-Cox (1964) ou celle de Manly (1976)).

L'analyse des séries chronologiques, utilise traditionnellement les modèles *ARIMA* ou *SARIMA* (Box et Jenkins (1970)), leur application a connu pour un moment un grand essor dans plusieurs domaines. Ainsi, l'introduction de la classe des modèles linéaires autorégressifs moyennes mobiles à coefficients et ordres périodiques a été une alternative attrayante à la modélisation saisonnière habituelle; de tels modèles sont notés  $PARMA_d(\tilde{p}_t, q_t)$  et sont une généralisation des modèles  $SARIMA((p, d, q); (P, D, Q))$  classiques. La justification théorique de l'utilisation des modèles linéaires périodiques revient à la décomposition linéaire de Cramér (1961), établie pour les processus non stationnaires et qui est une généralisation de la décomposition linéaire de Wold (1938) spécifique du cas faiblement stationnaire.

Les modèles linéaires périodiques ont prouvés leur utilité dans plusieurs domaines, tels que l'économétrie ( Akmel et Istem (2001), Cadren (1998), Franses (1996), Ghysels et Hall (1992), Hansen et Sargent (1990), Osbon et Smith (1989) et Osbon (1988)), l'hydrologie, la météorologie et les études d'environnements ( Mcleod (1991), Cleveland et Tiao (1979)), etc ...

L'outil fondamental pour étudier les propriétés théoriques d'un modèle autorégressif moyenne mobile à coefficients et ordres périodiques du temps de période  $d$  noté  $PARMA_d(p_t, q_t)$  (ou bien  $PARMA$ ) est basé sur le théorème de Gladyshev (1961). Gladyshev a introduit le concept de processus périodiquement corrélés; de plus, il a mis en relief la dualité existant entre les processus univariés périodiques, et les processus multivariés faiblement stationnaires correspondants.

L'analyse de ce type de modèles était l'objectif de plusieurs chercheurs qui se sont in-

téressés aux différents problèmes ( l'identification, l'estimation et la prévision ); le problème de l'identification a été traité par Cleveland et Tiao (1979). Bentarzi (2001) a généralisé le critère *PDC* (predictive density criterion) aux cas des modèles *PAR*.

Une condition suffisante pour l'inversibilité des modèles univariés périodiques a été traitée par Ghysels et Hall (1992) et Cipro (1984); de plus Bentarzi et Hallin (1994) ont donné une condition nécessaire et suffisante pour l'inversibilité des modèles  $MA(q^*)$  multivariés  $d$ - périodiques et la condition de causalité pour des processus autorégressifs périodiques a été donnée par Smadi et Ula (1997), Vecchia (1985) et Troutman (1979).

Le problème de la factorisation spectrale d'un modèle périodique, c'est à dire la construction de tous les modèles correspondant à une fonction d'autocovariance donnée a été traité par Bentarzi ((1995), (1998)) et Bentarzi et Hallin ((1994), (1998)). La propriété de normalité asymptotique locale (*LAN*) vérifiée par la majorité des modèles a été montrée pour les modèles *PAR*, par Bentarzi (1995), Bentarzi et Hallin (1996) dans le but d'établir un test localement asymptotiquement optimal (*Most stringent*) pour tester la périodicité d'un modèle *AR*; Guerbyenne et Bentarzi (2000) ont exploité cette propriété au cas des modèles *PAR*, pour construire des estimateurs LAM-adaptatifs.

Le problème de l'estimation des paramètres d'un modèle  $PARMA_d(p_t, q_t)$  a été étudié par Lund et Basawa (2000), Adams et Goodwin (1995), Boshnakov (1995), Andel ((1983), (1989)), Li et Hui (1988), Cipro (1985), Salas et al (1982), Tiao et Grupe (1980), Parzen et Pagano (1979), Troutman (1979), Pagano (1978) et Jones et Brelsford (1967)). De plus, ce type de modèles permet d'étudier plusieurs phénomènes, par exemple les phénomènes saisonniers qui peuvent être exploités dans l'analyse des séries chronologiques multidimensionnelles; ces processus, c'est-à-dire les processus autorégressifs moyennes mobiles multivariés notés *VARMA* ont trouvé une application dans plusieurs domaines tels que la géophysique et surtout en économie. Certains travaux récents ont montré que la relation entre les variables dans un système dynamique peut être décrite par un système multivarié; par exemple, le modèle autorégressif multivarié noté *VAR* est couramment utilisé pour effectuer des prévisions des systèmes de séries chronologiques inter-reliés, et pour analyser l'impact dynamique des perturbations aléatoires sur le système des variables. Sims (1980) a proposé d'utiliser le modèle *VAR* comme une alternative aux modèles à équations simultanées. Cadren (1998) a utilisé ces processus pour analyser la demande de produits pétroliers en France, Akmal et Stem (2001) les ont utilisé pour analyser la structure de la demande d'énergie résidentielle en Australie.

L'estimation des paramètres d'un modèle *VARMA* a été étudié par plusieurs chercheurs, Lund et Basawa (2000) ont évalué la vraisemblance d'un modèle *VARMA* a partir d'un modèle



$PARMA_d(p_t, q_t)$  correspondant. Ansley et Khon (1983) ont montré que le filtre de Kalman peut être utilisé pour calculer la fonction de vraisemblance exacte d'un modèle  $VARMA$ . Ainsi, les différentes étapes pour calculer le logarithme de la fonction de vraisemblance par l'algorithme de Chandrasekhar est présenté par Sheat (1988). Hilmer et Tiao (1979) ont développé les procédures d'estimation exacte par la méthode du maximum de vraisemblance d'un modèle  $VMA$  pur. Ils ont obtenu une approximation pour estimer les paramètres d'un modèle  $VARMA$  mixte. Ainsi, l'estimation des paramètres d'un modèle  $VARMA$  a été l'objectif de plusieurs chercheurs, Arnold et Tapio (2001), Lund et Basawa (2001), Schneider et Neumaier (2000), Melard (1984), Sheat (1984), Khon et Ausley (1983), Newton (1982), Tiao et Box (1981), Hilmer et Tiao (1979), Pagano (1978) et d'autres...

Dans notre travail, nous nous intéressons, principalement, au problème de l'estimation des paramètres d'un modèle autorégressif  $d$ -varié stationnaire et à celle des paramètres d'un modèle autorégressif  $d$ -périodique d'ordre  $p$  car l'estimation joue un rôle crucial dans la procédure de modélisation; elle permet de déterminer les valeurs des paramètres inconnus du modèle compatible avec les données, et par conséquent, d'utiliser la formule théorique de la prévision. En effet, les techniques d'estimation des paramètres d'un modèle  $ARMA$  peuvent être subdivisées en deux catégories. La première contient les méthodes d'estimation qui utilisent directement les données. Parmi les méthodes les plus utilisées dans cette catégorie, nous pouvons citer la méthode du maximum de vraisemblance et la méthode des moindres carrés. Dans la deuxième, nous utilisons les méthodes d'approche commune qui se basent sur la transformation des données, en un ensemble fini de résumés statistiques [moyenne empirique, variance et covariance empirique etc...], puis nous estimons les paramètres du modèle.

Dans notre travail nous intéressons, d'une part, au problème de l'estimation des paramètres d'un modèle autorégressif  $d$ -périodique d'ordre  $p$ , et d'autre part, à celui des paramètres d'un modèle autorégressif  $d$ -varié stationnaire. Ainsi, le grand nombre de paramètres qui figure dans les modèles autorégressifs multivariés, rend l'estimation des paramètres un peu difficile. Notre but consiste donc, à réduire ce nombre des paramètres.

On dispose d'observations (mesures expérimentales) et nous voulons estimer les paramètres intervenant dans les modèles  $VARMA$ . Mais, avant de résoudre de manière numérique l'identification de ces paramètres, se pose le problème de l'unicité des paramètres correspondant aux observations : c'est ce que nous appelons l'identifiabilité du système. Donc avant d'estimer les paramètres intervenant dans les systèmes dynamiques, il faut vérifier si le modèle est identifiable.

## 0.0.2 Apports et présentation de la thèse :

Newton (1982) a utilisé les équations de Yule-Walker pour réduire le nombre de paramètres d'un modèle autorégressif  $d$ -varié stationnaire dans le but de proposer une méthode d'estimation de la densité spectrale d'une série temporelle multiple, Lund et Basawa (2000) ont évalué la vraisemblance du modèle *VARMA* à partir du modèle *PARMA* qui lui est correspondant et ils ont explicité les calculs pour un modèle *PARMA*(1,1).

Ce travail est consacré d'une part, au problème de l'estimation des paramètres d'un modèle autorégressif dont les coefficients et la variance sont périodiques et d'autre part, à celui de l'estimation des paramètres d'un modèle autorégressif  $d$ -varié stationnaire.

L'estimation des paramètres d'un modèle autorégressif  $d$ -varié stationnaire est difficile à cause de nombre des paramètres qui figure dans ces modèles; il est possible de faire diminuer ce nombre de paramètre. Nous considérons son modèle autorégressif périodique qui lui est correspondant. Notre but consiste donc à réduire le nombre des paramètres d'un modèle *VAR* stationnaire.

L'analyse des séries temporelles multiples est fondée classiquement sur l'application des méthodes non paramétriques et des méthodes paramétriques existant. Les résultats de l'utilisation des méthodes traditionnelles d'estimation montrent que les méthodes paramétriques fournissent généralement de meilleurs résultats. Nous supposons que l'on dispose d'une série chronologique multivariée  $x_1, \dots, x_T$  avec  $X_t = (x_{1t}, \dots, x_{dt})'$  généré par un processus *VAR* stationnaire, donc, la méthode est connue par la méthode autorégressive classique. Bien que la méthode autorégressive (Akaike (1974), Parzen (1977), Newton et Pagano (1981)) possède l'avantage qu'il existe un rationnel pour le choix objectif d'un ordre  $\widehat{P}^*$  qui possède plusieurs propriétés d'optimalité, les analystes montrent qu'il existe plus d'un ordre qui peut être considéré pour retrouver les estimateurs; donc une méthode d'estimation des séries temporelles multiples est proposée par Newton (1982). Cette méthode est basée sur l'analyse des processus autorégressifs périodiques; elle permet d'éliminer plusieurs difficultés qui figurent dans les méthodes traditionnelles d'estimation, en particulier, dans la méthode autorégressive classique. Ainsi, les informations sur la structure d'une série temporelle multiple, peuvent être obtenues par l'utilisation d'un processus autorégressif univarié périodique Newton (1982), Pagano (1978), Jones et Brelsford (1967) et Gladyshev (1961).

Pour évaluer le gain en efficacité de la méthode autorégressive périodique, une étude de simulation intensive est réalisée en, utilisant la méthode des moindres carrés et sous la condition de normalité des innovations.

Cette thèse, dont le thème porte :

<< SUR L'ESTIMATION DES MODELES PERIODIQUES UNIVARIES ET  
MODELES MULTIVARIES CLASSIQUES >>

est composée de quatre chapitres. Nous présenterons brièvement le problème étudié dans chaque chapitre. Enfin, nous donnerons une conclusion générale, les références et quelques outils de base sous formes d'annexes.

**Chapitre 1 :**

Ce chapitre est consacré à l'étude des modèles univariés autorégressifs moyennes mobiles périodiques et à celle des modèles multivariés classiques; il est composé de sept sections. La première présente quelques définitions de base concernant les modèles  $PARMA_d(p_t, q_t)$ ; la deuxième est une introduction aux processus  $VARMA$ , au cours de laquelle nous montrerons qu'une classe particulière de ces modèles est celle où les processus multivariés sont stationnaires. Ainsi, le modèle  $VARMA$  est une extension du modèle  $VAR$ , alors la définition des processus  $VAR$  et ces différentes propriétés seront présentés et deux outils de base pour déterminer la relation dynamique entre les canaux seront aussi donnés. Enfin, nous donnerons les propriétés théoriques du modèle multivarié, puis nous établirons le lien existant entre les deux types de classes au sens de Gladyshev (1961); nous étudierons quelques propriétés essentielles du modèle  $PARMA_d(p_t, q_t)$ .

**Chapitre 2 :**

Le présent chapitre est consacré à l'étude des méthodes d'estimation des paramètres d'un modèle  $PARMA_d(p_t, q_t)$ ; nous y étudierons en détail trois techniques parmi les plus utilisées pour estimer les paramètres de ces modèles. Ces méthodes sont les suivantes : la méthode des moments ( les équations de Yule-Walker périodiques ), l'approche du maximum de vraisemblance, la méthode des moindres carrés. Il est composé de quatre sections. Dans la première, la deuxième et la troisième, nous présenterons l'estimation des paramètres par la méthode des moments puis, par celle du maximum de vraisemblance et enfin, par la méthode des moindres carrés. Nous simulerons dans la dernière section plusieurs modèles  $PAR_d(p_t)$ ; nous présenterons et interpréterons les résultats obtenus à l'aide de la méthode des moindres carrés et sous l'hypothèse de normalité des erreurs.

### Chapitre 3 :

Ce chapitre est consacré à l'étude des méthodes d'estimation des paramètres d'un modèle *VARMA*. Il est composé de cinq sections. La première est une introduction aux modèles *VAR*; dans la deuxième, la troisième et la quatrième, nous évaluerons l'estimation des paramètres par la méthode du maximum de vraisemblance, par la méthode des moindres carrés multivariés et, enfin, par la méthode des moments puis, nous présenterons et interpréterons les résultats de simulation des modèles *VAR* en utilisant la méthode des moindres carrés multivariés, et sous l'hypothèse de normalité des erreurs.

### Chapitre 4 :

Ce chapitre est consacré à l'étude des méthodes d'estimation des séries temporelles multiples. Il est composé de quatre sections. Dans la première, nous passerons en revue les méthodes traditionnelles d'estimation d'une série temporelle multivariée stationnaire, puis nous passerons à l'étude d'une méthode proposée par Newton (1982) et fondée sur le concept des processus autorégressifs périodiques; elle peut éliminer plusieurs difficultés qui existent dans les méthodes traditionnelles, en particulier, dans la méthode d'estimation autorégressive classique. Les informations sur la structure d'une série temporelle multiple, peuvent être obtenues par l'utilisation d'un processus autorégressif univarié périodique Newton (1982), Pagano (1978), Jones et Brelsford (1967) et Gladyshev (1961). Le principe de la méthode et des exemples illustratifs seront donnés pour mieux comprendre sa méthodologie. Enfin, nous présenterons et interpréterons les résultats de simulation de la méthode autorégressive périodique par rapport à la méthode autorégressive classique.

### ANNEXE :

Dans l'annexe nous présenterons le principe de la factorisation des matrices symétriques et sa représentation mathématique. Un cas particulier qui est à la base des analyses multidimensionnelles sera traité, enfin, nous donnerons l'algorithme de la méthode de Cholesky modifiée.

# Chapitre 1

## Modèles Périodiques Univariés et Modèles Multivariés Classiques

### 1.1 Introduction

Une classe particulière de modèles *ARMA* évolutifs est celle où les paramètres  $\phi_{tj}$ ,  $\theta_{tr}$ ,  $j = 1, 2, \dots, p_t$ ,  $r = 1, 2, \dots, q_t$ , l'ordre  $(p_t, q_t)$ , et la variance du bruit blanc  $\sigma_t^2$  sont des fonctions périodiques du temps  $t$  et de période  $d$  ( $d \geq 2$ ). Cette classe dont la fonction d'autocovariance est périodique, est noté par  $PARMA_d(p_t, q_t)$ . Ce type de processus permet de représenter plusieurs phénomènes, par exemple les phénomènes saisonniers, qui peuvent être exploités dans l'analyse des séries chronologiques multidimensionnelles autorégressives moyennes mobiles stationnaires.

Ce chapitre est composé de sept sections. La première présente quelques définitions de base concernant les modèles  $PARMA_d(p_t, q_t)$ ; la deuxième est une introduction aux processus  $d$ -variés, où nous montrerons qu'une classe particulière de ces modèles est celle où les processus multivariés sont stationnaires; ainsi, comme le modèle *VARMA* est une extension du modèle *VAR*, alors la définition des processus *VAR* et ses propriétés et deux outils pour déterminer la relation dynamique entre les canaux seront donnés; nous donnerons ensuite, les propriétés théoriques du modèle multivarié et nous présenterons le théorème de Gladyshev (1961) qui précise le lien existant entre les processus univariés périodiques et les processus multivariés classiques. Dans la dernière section nous établirons le lien existant entre les deux types de classes; nous étudierons, enfin, quelques propriétés des modèles  $PARMA_d(p_t, q_t)$ .

## 1.2 Processus périodiquement corrélés

Soit  $\{y_t, t \in \mathbb{Z}\}$  un processus du second ordre de moyenne et de fonction d'autocovariance données respectivement par :

$$m_t = E(y_t), \quad \forall t \in \mathbb{Z}$$
$$\gamma(t, s) = \text{cov}(y_t, y_s) = E\{(y_t - m_t)(y_s - m_s)\}, \quad \forall t, s \in \mathbb{Z}$$

### Remarques

- Si nous ne nous intéressons pas à la non stationnarité de la moyenne on peut supposer  $m_t = 0$ ; dans ce cas  $y_t$  est dit centré.
- Une classe particulière de processus non stationnaires est celle où les fonctions d'autocovariance sont des fonctions périodiques du temps.
- Une autre classe particulière de ces processus est celle où la moyenne, la fonction d'autocovariance sont homogènes (invariants avec le temps).

### Définition 1.2.1

Un processus du second ordre  $y_t$  est périodiquement corrélé ou bien faiblement périodique s'il existe un entier positif  $d$  tel que pour  $t, s$  et  $\tau \in \mathbb{Z}$  on a :

$$m_{t+\tau d} = m_t \tag{1.2.1}$$

$$\gamma(t + \tau d, s + \tau d) = \gamma(t, s) \tag{1.2.2}$$

l'entier positif  $d$  qui satisfait les conditions (1.2.1) et (1.2.2) est appelé la période du processus périodiquement corrélé.

### Définition 1.2.2

Un processus  $\{\varepsilon_t, t \in \mathbb{Z}\}$  est un processus bruit blanc périodique s'il vérifie les propriétés suivantes :

- Le processus  $\{\varepsilon_t, t \in \mathbb{Z}\}$  est centré, c'est-à-dire que  $E(\varepsilon_t) = 0$  pour tout  $t \in \mathbb{Z}$ .
- Sa variance est  $d$ -périodique, c'est-à-dire que  $\sigma_{i+d\tau}^2 = \sigma_i^2$  pour tout  $i = 1, \dots, d, t \in \mathbb{Z}$ .
- Le processus  $\{\varepsilon_t, t \in \mathbb{Z}\}$  est non corrélé, c'est-à-dire  $E(\varepsilon_t \varepsilon_s) = 0$ , pour tout  $t$  et  $s$  tel que  $t \neq s$ .

Nous remarquons que les processus bruits blancs  $d$ -périodiques sont tout simplement des processus bruits blancs de variance  $d$ -périodique dans le temps.

### 1.2.1 Processus autorégressifs moyennes mobiles périodiques

#### Définition 1.2.3

Un processus périodiquement corrélé, de période  $d$  admet une représentation autorégressive moyenne mobile d'ordre  $(p_t, q_t)$ , périodique de période  $d$  noté  $PARMA_d(p_t, q_t)$  s'il est solution de l'équation aux différences stochastique suivante :

$$y_t - \sum_{i=1}^{p_t} \phi_{ti} y_{t-i} = \varepsilon_t - \sum_{j=1}^{q_t} \theta_{tj} \varepsilon_{t-j}, \quad \forall t \in \mathbb{Z} \quad (1.2.3)$$

ou encore

$$\Phi_t(L)y_t = \Theta_t(L)\varepsilon_t$$

où  $\{\varepsilon_t, t \in \mathbb{Z}\}$  est un bruit blanc périodique de variance  $\sigma_t^2$ , les paramètres  $\phi_{t,j}$ ,  $j = 1, \dots, p_t$ ,  $\theta_{t,j}$ ,  $j = 1, \dots, q_t$ ,  $p_t$  et  $q_t$  sont des fonctions  $d$ -périodiques, en  $t$  et les polynômes  $\Phi_t(B) = 1 - \sum_{i=1}^{p_t} \phi_{t,i} L^i$  et  $\Theta_t(B) = 1 - \sum_{i=1}^{q_t} \theta_{t,i} L^i$  ne possèdent pas de zéros communs.

Posons :  $p = \max_{1 \leq t \leq d} p_t$  et  $q = \max_{1 \leq t \leq d} q_t$  alors, (1.2.3) peut s'écrire comme suit :

$$y_t - \sum_{j=1}^p \phi_{t,j} y_{t-j} = \varepsilon_t - \sum_{j=1}^q \theta_{t,j} \varepsilon_{t-j}$$

#### Définition 1.2.4

Le modèle particulier du modèle  $d$ -périodique général (1.2.3) correspondant au cas où  $\theta_{tj} = 0$  pour tout  $j = 1, 2, \dots, q_t$  ( $t \in \mathbb{Z}$ ) est dit modèle autorégressif  $d$ -périodique d'ordre  $p_t$  noté  $AR_d(p_t)$  et est donné par l'équation aux différences stochastique suivante :

$$y_t - \sum_{i=1}^{p_t} \phi_{ti} y_{t-i} = \varepsilon_t, \quad \forall t \in \mathbb{Z} \quad (1.2.4)$$

ou encore

$$\Phi_t(L)y_t = \varepsilon_t$$

où  $\{\varepsilon_t, t \in \mathbb{Z}\}$  est un bruit blanc périodique de variance  $\sigma_t^2$ , les paramètres  $\phi_{t,j}$ ,  $j = 1, \dots, p_t$ , et  $p_t$  sont des fonctions  $d$ -périodiques, en  $t$  et les polynômes  $\Phi_t(B) = 1 - \sum_{i=1}^{p_t} \phi_{t,i} L^i$ .

### Définition 1.2.5

Un modèle particulier du modèle  $d$ -périodique général (1.2.3) correspondant au cas où  $\phi_{ti} = 0$  pour tout  $i = 1, 2, \dots, p_t$  ( $\forall t \in \mathbb{Z}$ ) est dit modèle moyenne mobile  $d$ -périodique d'ordre  $q_t$  noté  $PMA_d(q_t)$  et est donné par l'équation aux différences stochastique suivante :

$$y_t = \varepsilon_t - \sum_{j=1}^{q_t} \theta_{tj} \varepsilon_{t-j}, \quad \forall t \in \mathbb{Z} \quad (1.2.5)$$

ou encore

$$y_t = \Theta_t(L) \varepsilon_t$$

où  $\{\varepsilon_t, t \in \mathbb{Z}\}$  est un bruit blanc périodique de variance  $\sigma_t^2$ , les paramètres  $\theta_{i,j}$ ,  $j = 1, \dots, q_t$  et  $q_t$  sont des fonctions  $d$ -périodiques, en  $t$  et le polynôme  $\Theta_t(L)$  est égal à  $1 - \sum_{i=1}^{q_t} \theta_{t,i} L^i$ .

## 1.2.2 Inversibilité et causalité des processus ARMA $d$ -périodiques

### Définition (1.2.6)

Le modèle (1.2.3) est dit causal s'il admet une solution de la forme

$$y_t = \sum_{j=0}^{\infty} \psi_{t,j} \varepsilon_{t-j} \quad (1.2.6)$$

où la série infinie est convergente en moyenne quadratique.

### Définition (1.2.7)

Le modèle (1.2.3) est dit inversible s'il existe des fonctions  $\pi_{t,j}$  telles que

$$\varepsilon_t = \sum_{j=0}^{\infty} \pi_{t,j} y_{t-j} \quad (1.2.7)$$

où la série infinie est convergente, en moyenne quadratique.

Pour étudier ces deux propriétés dans le cas des modèles  $PARMA_d(p_t, q_t)$ , nous pouvons utiliser deux approches. La première est basée sur le théorème de Gladyshev (1961). Elle consiste à ramener un modèle périodique univarié à un modèle multivarié stationnaire et à étudier les propriétés de ce dernier. La deuxième, celle de Bentarzi et Hallin (1994), ramène le modèle moyenne mobile périodique (autorégressif périodique) à un modèle moyenne mobile périodique (autorégressif périodique) d'ordre 1.



### 1.3 Processus $d$ -variés

Soit  $\{X_t, t \in \mathbb{Z}\}$  un processus multivarié ( $d$ -varié) défini par  $X_t = (X_{t_1}, X_{t_2}, \dots, X_{t_d})$  de vecteur moyen  $\mu_t$  et de matrice de covariances  $R_t(\cdot, \cdot)$  donnés respectivement par :

$$\mu_t = EX_t = (\mu_{t_1}, \mu_{t_2}, \dots, \mu_{t_d}), \quad \forall t \in \mathbb{Z}. \quad (1.3.1)$$

$$R_t(t+h, t) = E[(X_{t+h} - \mu_{t+h})(X_t - \mu_t)'] , \quad \forall t, h \in \mathbb{Z} \quad (1.3.2)$$

si les composantes de la série  $\{X_t, t \in \mathbb{Z}\}$  à des valeurs complexes,  $R_t(\cdot, \cdot)$  est définie par :

$$R_t(t+h, t) = E[(X_{t+h} - \mu_{t+h})(X_t - \mu_t)^*]$$

#### Notations

$b'$  est la transposée de  $b$ .

$b^*$  est la conjuguée complexe transposée de  $b$ .

- Une classe particulière du modèle  $d$ -varié est celle où le vecteur moyen et la matrice de covariance donnés par (1.3.1) et (1.3.2) respectivement sont homogènes.

#### Définition 1.3.1

Le processus  $\{X_t, t \in \mathbb{Z}\}$  de moyenne et de covariances données par (1.3.1) et (1.3.2) respectivement est dit faiblement stationnaire si  $\mu_t(\cdot)$  et  $R(t+h, t)$  pour tout  $t$  et  $h = 0 \mp 1, \dots$  sont indépendants de  $t$ .

#### 1.3.1 Processus VARMA stationnaires

Le modèle VARMA est une extension du modèle VAR. Il est défini par :

$$X_t - v - \sum_{i=1}^{p^*} A_i X_{t-i} = \epsilon_t \text{ en permettant aux termes de l'erreur, ici d'être autocorrélées.}$$

La structure d'autocorrélation est supposée être d'un type relativement simple et  $\epsilon_t$  possède une représentation moyenne mobile (MA),  $\epsilon_t = u_t + B_1 u_{t-1} + \dots + B_{q^*} u_{t-q^*}$  où, comme d'habitude,  $u_t$  est un bruit blanc de moyenne nulle et de matrice de covariance  $\Sigma_u$  non singulière et  $v$  un vecteur de  $(d \times 1)$  de termes constants. Le processus ainsi, défini prend le nom de processus VARMA( $p^*, q^*$ ) (vector autoregressive moving average). Nous introduisons dans la section suivante la définition d'un processus VARMA( $p^*, q^*$ ), d'un processus VAR( $p^*$ ) et celle d'un VMA( $q^*$ ). Enfin, quelques propriétés importantes du modèle VAR seront discutées.

### Définition 1.3.2

Un processus  $\{X_t, t \in \mathbb{Z}\}$  est un processus  $d$ -varié autorégressif moyenne mobile d'ordre  $(p^*, q^*)$  s'il est solution de l'équation aux différences stochastique suivante :

$$X_t - v - \sum_{i=1}^{p^*} A_i X_{t-i} = u_t + \sum_{j=1}^{q^*} B_j u_{t-j} \quad (1.3.3)$$

les paramètres  $A_i, i = 1, 2, \dots, p^*$  et  $B_j, j = 1, 2, \dots, q^*$  sont des matrices d'ordre  $d$  et  $u_t$  est le processus bruit blanc vectoriel centré de matrice de covariances  $\Sigma_u$  et  $v$  un vecteur de  $(d \times 1)$  de termes constants.

### Définition 1.3.3

Un modèle particulier du modèle multivarié stationnaire général (1.3.3) correspondant au cas où  $B_j = 0_{d \times d}$  pour  $j = 1, 2, \dots, q^*$  est dit modèle autorégressif  $d$ -varié d'ordre  $p^*$  noté  $VAR(p^*)$  et est donné par l'équation aux différences stochastique suivante :

$$X_t - v - \sum_{i=1}^{p^*} A_i X_{t-i} = u_t \quad (1.3.4)$$

les paramètres  $A_i, i = 1, 2, \dots, p^*$  sont des matrices d'ordre  $d$  et  $u_t$  est le processus bruit blanc multivarié centré de matrice de covariance  $\Sigma_u$  que l'on suppose non singulière et  $v$  un vecteur de  $(d \times 1)$  de termes constants.

### Définition 1.3.4

Un modèle particulier du modèle multivarié stationnaire général (1.3.3) correspond au cas où  $A_i = 0_{d \times d}$  où  $i = 1, 2, \dots, p^*$  est dit modèle moyenne mobile  $d$ -varié d'ordre  $q^*$  noté  $VMA(q^*)$  et est donné par l'équation aux différences stochastique suivante :

$$X_t - v = u_t - \sum_{j=1}^{q^*} B_j u_{t-j}$$

les paramètres  $B_j, j = 1, 2, \dots, q^*$  sont des matrices d'ordre  $d$ ,  $u_t = (u_{1t}, u_{2t}, \dots, u_{dt})$  d'ordre  $(d \times 1)$  est le processus bruit blanc multivarié centré de matrice de covariance  $\Sigma_u$  (qu'on suppose non singulière) et  $v$  un vecteur de  $(d \times 1)$  de termes constants.

## 1.3.2 Hypothèse de base et propriétés des processus VAR

### Processus VAR( $p^*$ ) stables

Soit un modèle VAR( $p^*$ ) donné par (1.3.4) et considérons le modèle VAR(1)

$$X_t = v + A_1 X_{t-1} + u_t \quad (1.3.5)$$

Si le mécanisme de génération commence à par exemple,  $t = 1$ , nous obtenons

$$\begin{aligned} X_1 &= v + A_1 X_0 + u_1 \\ X_2 &= v + A_1 X_1 + u_2 = v + A_1 (v + A_1 X_0 + u_1) + u_2 \\ &= (I_d + A_1) v + A_1^2 X_0 + A_1 u_1 + u_2 \\ &\vdots \\ X_t &= (I_d + A_1 + \dots + A_1^{t-1}) v + A_1^t X_0 + \sum_{i=0}^{t-1} A_1^i u_{t-i} \end{aligned} \quad (1.3.6)$$

les vecteurs  $X_1, \dots, X_t$  sont uniquement déterminés par  $X_0, u_1, \dots, u_t$  et, par conséquent, la distribution conjointe de  $X_1, \dots, X_t$  est déterminée à partir de la distribution conjointe de  $X_0, u_1, \dots, u_t$  de (1.3.6), nous obtenons

$$X_t = v + A_1 X_{t-1} + u_t = (I_d + A_1 + \dots + A_1^j) v + A_1^{j+1} X_{t-j-1} + \sum_{i=0}^j A_1^i u_{t-i}$$

Si toutes les valeurs propres de  $A_1$  sont de module inférieure à 1 la suite  $A_1^i, i = 0, 1, \dots$  est absolument sommable et donc la série  $\sum_{i=1}^{\infty} A_1^i u_{t-i}$  converge en moyenne quadratique. De plus,  $(I_d + A_1 + \dots + A_1^j) v \xrightarrow{j \rightarrow \infty} (I_d + A_1)^{-1} v$ . Et  $A_1^{j+1}$  converge vers zéro quand  $j \rightarrow \infty$  et donc, nous pouvons négliger le terme  $A_1^{j+1} x_{t-j-1}$ . De là, si toutes les valeurs propres de  $A_1$  sont de module inférieure à 1, le processus  $X_t$  s'écrit

$$X_t = \mu + \sum_{i=0}^{\infty} A_1^i u_{t-i} \text{ avec } \mu = (I_d + A_1)^{-1} v, \quad t = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad (1.3.7)$$

La loi de  $X_t$  est déterminée de façon unique par celle du processus  $u_t$ . En particulier, les premier et second moments de  $X_t$  sont

$$E(X_t) = \mu, \forall t$$

et

$$\Gamma_x(h) = E(X_t - \mu)(X_{t-h} - \mu)' = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^n A_1^i E(u_{t-i} u'_{t-h-j}) (A_1^j)' = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=0}^n A_1^{h+i} \Sigma_u A_1^i'$$

donc  $\Gamma_x(h) = \sum_{i=0}^{\infty} A_1^{h+i} \Sigma_u A_1^i'$  car  $E(u_t u'_s) = 0$  pour  $s \neq t$  et  $E(u_t u'_t) = \Sigma_u$  pour tout  $t$ .

Puisque la condition sur les valeurs propres de la matrice  $A_1$  est importante, nous disons

qu'un processus  $VAR(1)$  est un processus stable si toutes les valeurs propres de  $A_1$  sont de module inférieure à 1. Cette condition est équivalente à

$$\det(I_d - A_1 z) \neq 0 \text{ pour } |z| \leq 1$$

La discussion précédente peut être aisément étendu à un processus  $VAR(p^*)$  avec  $p^* > 1$   
 Plus précisément si  $X_t$  est un  $VAR(p^*)$  comme dans (1.3.4) le processus  $VAR(1)$   
 $d \times p^*$  dimensionnel correspond est un processus  $VAR(1)$

$$X_t = v + AX_{t-1} + U_t \quad (1.3.8)$$

où

$$X_t = \underbrace{\begin{pmatrix} X_t \\ X_{t-1} \\ \vdots \\ X_{t-p^*+1} \end{pmatrix}}_{(dp^* \times 1)}, \quad v = \underbrace{\begin{pmatrix} v \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}}_{(dp^* \times 1)}, \quad A = \underbrace{\begin{pmatrix} A_1 & A_2 & \dots & A_{p^*-1} & A_{p^*} \\ I_d & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & I_d & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & I_d & 0 \end{pmatrix}}_{(dp^* \times dp^*)}, \quad U = \underbrace{\begin{pmatrix} u_t \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}}_{(dp^* \times 1)}$$

Le processus  $X_t$  est stable si

$$\det(I_{dp^*} - A_1 z) \neq 0 \text{ pour } |z| \leq 1 \quad (1.3.9)$$

son vecteur moyen est  $\mu = E(X_t) = (I_{dp^*} - A_1)^{-1} v$ , et les autocovariances sont

$$\Gamma_X(h) = \sum_{i=0}^{\infty} A^{h+i} \Sigma_U (A^i)', \quad h \in \mathbb{Z} \quad (1.3.10)$$

En utilisant la matrice  $J = [I_d \ 0 \ \dots \ 0]$  d'ordre  $(d \times dp^*)$ , le processus  $X_t$  s'obtient par

$X_t = JX_t$ . Puisque  $X_t$  est un processus stochastique bien défini, il en est de même pour  $X_t$  dont la moyenne  $E(X_t) = J\mu$  est constante pour tout  $t$  et dont la fonction d'autocovariance  $\Gamma_X(h) = J\Gamma_X(h)J'$  est invariante par rapport au temps. Il est facile de voir que  $\det(I_{dp^*} - Az) = \det(I_d - A_1 z - \dots - A_{p^*} z^{p^*})$ . nous appelons ce polynôme le polynôme caractéristique inverse du processus  $VAR(p^*)$ . D'où, le processus (1.3.4) est stable si son polynôme caractéristique inverse n'a pas de racines dans et sur le cercle unité. Formellement  $X_t$  est stable si

$$\det(I_d - A_1 z - \dots - A_{p^*} z^{p^*}) \neq 0 \text{ pour } |z| \leq 1 \quad (1.3.11)$$

Cette condition est appelée la condition de stabilité. Pour résumer, nous disons que  $X_t$  est un processus  $VAR(p^*)$  stable si (1.3.11) est vérifiée et

$$X_t = JX_t = J\mu + \sum_{i=0}^{\infty} A^i U_{t-i} \quad (1.3.12)$$

Un exemple important est lorsque nous supposons que  $u_t$  est un bruit blanc gaussien, c'est-à-dire,  $u_t \sim N(0, \Sigma_u)$  pour tout  $t$ ,  $u_t$  et  $u_s$  sont alors indépendants lorsque  $t \neq s$ . Dans ce cas nous pouvons montrer que  $X_t$  est un processus gaussien, c'est-à-dire que toute sous-suite  $X_t, \dots, X_{t+h}$  suit une loi de gauss multivariée pour tout  $t$  et  $h$ .

### 1.3.3 Représentation moyenne mobile d'un processus $VAR$

Soit,  $X_t = v + AX_{t-1} + U_t$ . La représentation  $VAR(1)$  du processus  $VAR(p^*)$  (1.3.4), sous l'hypothèse de stabilité le processus  $X_t$  à une représentation

$$X_t = \mu + \sum_{i=0}^{\infty} A^i U_{t-i} \quad (1.3.13)$$

Cette forme est appelée la représentation moyenne mobile ( $MA$ ).  $X_t$  est exprimé en fonction du passé et du présent du vecteur des erreurs de l'innovation  $U_t$  et de la moyenne  $\mu$ . Cette représentation peut être utilisée pour déterminer la fonction d'autocovariance de  $X_t$ . La moyenne et les autocovariances de  $X_t$  peuvent être obtenues comme dans la section, précédente. De plus, une représentation  $MA$  de  $X_t$  peut être trouvée en multipliant (1.3.13) par la matrice  $J = [I_d \ 0 \ \dots \ 0]$

$$X_t = JX_t = J\mu + \sum_{i=0}^{\infty} JA^i J' JU_{t-i} = \mu + \sum_{i=0}^{\infty} \psi_i u_{t-i} \quad (1.3.14)$$

où  $\mu = J\mu$ ,  $\psi_i = JA^i J'$  et  $JU_t = u_t$ . Puisque les  $A^i$  sont absolument sommables il en est de même pour  $\psi_i$ . La représentation (1.3.14) fournit une possibilité pour déterminer la moyenne et la fonction d'autocovariance de  $X_t$ , donc

$$E(X_t) = \mu$$

et

$$\Gamma_X(h) = E(X_t - \mu)(X_{t-h} - \mu)' = \sum_{i=0}^{\infty} \psi_{h+i} \Sigma_u \psi_i \quad (1.3.15)$$

Si  $L$  désigne l'opérateur de décalage défini par  $LX_t = X_{t-1}$ , alors (1.3.4) s'écrit encore

$$X_t = v + (A_1L + \dots + A_p L^p) X_t + u_t$$

où

$$A(L) X_t = v + u_t \text{ avec } A(L) = I_d - A_1L - \dots - A_p L^p \quad (1.3.16)$$

Soit l'opérateur  $\psi(L) = \sum_{i=0}^{\infty} \psi_i L^i$ . Tel que

$$\psi(L) A(L) = I_d \quad (1.3.17)$$

En prémultipliant (1.3.16) par  $\psi(L)$ , il vient  $X_t = \psi(L)v + \psi(L)u_t = \left(\sum_{i=0}^{\infty} \psi_i\right)v + \sum_{i=0}^{\infty} \psi_i u_{t-i}$ . L'opérateur  $\psi(L)$  est l'inverse de  $A(L)$  et est noté par conséquent  $A^{-1}(L)$ .

Généralement, nous disons que l'opérateur  $A(L)$  est inversible si  $|A(z)| \neq 0$  pour  $|z| \leq 1$ . Si cette condition est satisfaite les coefficients de  $\psi(L) = A^{-1}(L)$  sont absolument sommables et le processus  $\psi(L)u_t = A(L)^{-1}u_t$  est bien défini (c'est-à-dire,  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=-n}^n |\psi_i|$  existe et est finie). Les coefficients  $\psi_i$  peuvent être obtenus à partir de (1.3.17), où  $A_j = 0$  pour  $j > p$ .

D'où les  $\psi_i$  peuvent être calculées de façon récursive à l'aide des équations

$$\begin{cases} \psi_0 = I_d \\ \psi_i = \sum_{j=1}^i \psi_{i-j} A_j, \quad i = 1, 2, \dots \end{cases}$$

la moyenne  $\mu$  de  $X_t$  peut être obtenue comme suit

$$\mu = \psi(L)v = A(L)^{-1}v = (I_d - A_1L - \dots - A_p L^p)^{-1}v$$

### 1.3.4 Autocovariances et autocorrélations d'un processus VAR stable

Bien que les autocovariances d'un processus  $VAR(p^*)$  stationnaire puissent être données en fonction des matrices des coefficients d'un processus MA comme en (1.3.15) cette formule est peut attrayante en pratique parce qu'elle considère une somme infinie. Dans la pratique il est plus facile de calculer les autocovariances à partir des matrices des coefficients d'un VAR. Dans cette section nous développons les formules adéquates.

### 1.3.5 Autocovariance d'un processus VAR(1)

Afin d'illustrer le calcul des autocovariances, supposons  $X_t$  le processus VAR(1) stationnaire, à coefficients connus.  $X_t = v + A_1 X_{t-1} + u_t$ , dont le bruit blanc  $u_t$  a pour matrice de covariance  $E(u_t u_t') = \Sigma_u$ . De façon alternative, le processus prend la forme  $X_t - \mu = A_1 (X_{t-1} - \mu) + u_t$ , où  $\mu = E(X_t)$ . En multipliant à droite par  $(X_{t-h} - \mu)'$  en prenant l'espérance nous obtenons

$$E[(X_t - \mu)(X_{t-h} - \mu)'] = A_1 E[(X_{t-1} - \mu)(X_{t-h} - \mu)'] + E[u_t (X_{t-h} - \mu)'] = \Gamma_X(h)$$

$$\text{pour } h = 0, \Gamma_X(0) = A_1 \Gamma_X(-1) + \Sigma_u = A_1 \Gamma_X(1)' + \Sigma_u \quad (1.3.18)$$

$$\text{pour } h > 0, \Gamma_X(h) = A_1 \Gamma_X(-1) \quad (1.3.19)$$

Ces équations sont connues sous le nom d'équation de Yule-Walker. Si  $A_1$  et la matrice de covariance  $\Gamma_X(0) = \Sigma_X$  de  $X_t$  sont connues, les matrices  $\Gamma_X(h)$  peuvent être calculées de façon récursive en utilisant (1.3.19).

### 1.3.6 Autocovariance d'un processus stable VAR( $p^*$ )

Considérons maintenant un processus VAR( $p^*$ )

$$X_t = \mu + A_1 (X_{t-1} - \mu) + \dots + A_{p^*} (X_{t-p^*} - \mu) + u_t \quad (1.3.20)$$

Les équations de Yule-Walker sont obtenues en multipliant à droite par  $(X_{t-h} - \mu)'$  et prenant l'espérance. Pour  $h = 0$ , et en utilisant la relation  $\Gamma_X(-i) = \Gamma_X(i)'$ , nous obtenons :

$$\Gamma_X(0) = A_1 \Gamma_X(-1) + \dots + A_{p^*} \Gamma_X(-p^*) + \Sigma_u = A_1 \Gamma_X(1)' + \dots + A_{p^*} \Gamma_X(p^*)' + \Sigma_u$$

et pour  $h > 0$  on a

$$\Gamma_X(h) = A_1 \Gamma_X(h-1) + \dots + A_{p^*} \Gamma_X(h-p^*)$$

Ces équations peuvent être utilisées pour calculer de façon récursive  $\Gamma_X(h)$  pour  $h \geq p^*$  si  $A_1, \dots, A_{p^*}$  et  $\Gamma_X(p^*-1), \dots, \Gamma_X(0)$  sont connus. Les matrices initiales d'autocovariance  $|h| < p^*$  peuvent être déterminées en utilisant le processus VAR(1) qui correspond à (1.3.20),  $X_t - \mu = A(X_{t-1} - \mu) + U_t$  avec  $\Gamma_X(0) = A \Gamma_X(0) A' + \Sigma_U$  et  $\Sigma_U = E(U_t U_t')$  où  $X_t, A$  et  $U$  sont donnés par (1.3.8) et  $\mu = (\mu', \dots, \mu') = E(X_t)$

#### Autocorrélation d'un processus stable VAR( $p^*$ )

Puisque les autocovariances dépendent de l'unité de mesure utilisée pour les variables du système elles sont quelquefois difficiles à interpréter. C'est pourquoi les autocorrélations

$$\rho_X(h) = D^{-1} \Gamma_X(h) D^{-1}$$

sont habituellement plus commodes à manipuler puisqu'elles sont invariantes. Ici  $D$  est une matrice diagonale dont la diagonale contient les écarts types des composantes de  $X_t$  ou encore les racines carrées des éléments diagonaux de  $\Gamma_X(0)$ . En notant  $\gamma_{ij}(h)$  la covariance entre  $X_{i,t}$  et  $X_{j,t-h}$  les éléments diagonaux  $\gamma_{ii}(0), \dots, \gamma_{dd}(0)$  de  $\Gamma_X(0)$  sont les variances  $X_{1t}, \dots, X_{dt}$ . Ainsi,

$$D^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{\gamma_{11}(0)}} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \frac{1}{\sqrt{\gamma_{dd}(0)}} \end{pmatrix}$$

et la corrélation entre  $X_{i,t}$  et  $X_{j,t-h}$  est

$$\rho_{ij}(h) = \frac{\gamma_{ij}(h)}{\sqrt{\gamma_{ii}(0)}\sqrt{\gamma_{jj}(0)}}, \text{ c'est la } ij\text{-ème éléments de } \rho_X(h)$$

### 1.3.7 L'autocovariance de l'échantillon et la densité spectrale

La relation dynamique entre les canaux  $x_1, x_2, \dots, x_d$  d'une réalisation d'un processus  $X$ ,  $d$ -varié stationnaire, est donné nous utilisons deux outils de base, premièrement la fonction d'autocovariance  $R$  définie par :

$$R(v) = \text{cov}(X(t), X(t+v)), \quad v \in \mathbb{Z}$$

deuxièmement la fonction de la densité spectrale  $f$  définie par :

$$f(w) = \frac{1}{2\pi} \sum_{v=-\infty}^{\infty} R(v) e^{-i v w}, \quad w \in [-\pi, \pi] \quad (1.3.21)$$

quand  $i = \sqrt{-1}$  nous notons que  $R(v)$  est une matrice d'ordre  $d$  où les éléments  $(j, k)$  sont donnés par :

$$R_{jk}(v) = \text{cov}(X_j(t), X_k(t+v)), \quad j, k = 1, 2, \dots, d \text{ et } v \in \mathbb{Z}$$

$\{R_{jj}(v), v \in \mathbb{Z}\}$  est la fonction d'autocovariance de la série temporelle  $X_j$  et  $\{R_{jk}(v), v \in \mathbb{Z}\}$  est la fonction cross-covariance entre la série temporelle  $X_j$  et  $X_k$ , dans ce cas nous disons que la covariance entre  $X(t)$  et  $X(t+v)$  est la même pour tout  $t$ . Alors nous supposons que  $X$  est de covariance stationnaire et que la covariance entre  $X_j(t)$  et  $X_k(t+v)$  devienne dans la plus part des cas, nulle pour toute valeur de  $j$  et quand  $k$  et  $v$  deviennent grand. Alors  $f(w)$



est une matrice d'ordre  $d$  où les éléments  $(j, k)$  sont donnés par :

$$f_{jk}(w) = \frac{1}{2\pi} \sum_{v=-\infty}^{\infty} R_{jk}(v) e^{-i v w}, \quad w \in [-\pi, \pi] \text{ et } j, k = 1, 2, \dots, d$$

### Proposition

La matrice de la densité spectrale est hermitienne positive  $f_X(w) = f_X(w)'$  et

$\bar{\alpha}' f_X(w) \alpha \geq 0, \forall \alpha \in \mathbb{C}^n$ , ceci entraîne en particulier que les termes diagonaux de  $f_X$  représentant les densités spectrales des composantes de  $X$  sont réelles positives.

### Remarques

—  $f_{jj}(\cdot)$  est appelée la densité spectrale de puissance ou bien tout simplement la densité d'autospectrale de  $X_j$ .

— Quand  $f_{jk}(\cdot)$  est le terme diagonal de la densité spectrale du canal  $X_j$  avec le canal  $X_k$  nous notons que  $f_{jj}(\cdot)$  à des valeurs réelles et  $f_{jk}(\cdot)$  à des valeurs complexes et  $f_{jk}(w) = \overline{f_{kj}(w)}$ .

## 1.4 Approche de "period-span-lumping"

### 1.4.1 Modèle VARMA associé à un modèle PARMA univarié

#### Théorème Gladychév (1961)

Soit  $\{y_t, t \in \mathbb{Z}\}$  un processus centré périodiquement corrélé de période  $d$ . Pour tout  $t \in \mathbb{Z}$ , l'entier  $i \in \{1, \dots, d\}$  et l'entier  $\tau$  tel que  $t = i + d\tau$  on définit le processus  $d$ -varié

$$X_\tau = (X_{\tau,1}, X_{\tau,2}, \dots, X_{\tau,d})' \text{ où} \quad X_{\tau,i} = y_{i+d\tau}. \quad (1.4.1)$$

Alors,  $\{y_t, t \in \mathbb{Z}\}$  est périodiquement corrélé si et seulement si le processus multivarié correspondant est stationnaire.

Soit  $\{y_t, t \in \mathbb{Z}\}$  un processus univarié périodiquement corrélé qui admet une représentation autorégressive moyenne mobile  $d$ -périodique d'ordre  $(p_t, q_t)$ , de la forme suivante :

$$y_t - \sum_{j=1}^{p_t} \phi_{t,j} y_{t-j} = \varepsilon_t - \sum_{j=1}^{q_t} \theta_{t,j} \varepsilon_{t-j}$$

Soient  $A(0), B(0), A(k), B(r)$  des matrices carrées d'ordre  $d$  définies par :

$$A_{i,j}(0) = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ 0 & \text{si } i < j \\ \phi_{i-j,i} & \text{si } i > j \end{cases}, B_{i,j}(0) = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ 0 & \text{si } i < j \\ \theta_{i-j,i} & \text{si } i > j \end{cases}$$

et

$$A_{i,j}(k) = \phi_{kd+i-j,i} \text{ et } B_{i,j}(r) = \theta_{rd+i-j,i} \text{ pour } 1 \leq k \leq p^*, 1 \leq r \leq q^* \text{ et } i, j = 1, 2, \dots, d$$

**Proposition 1.4.1 Tiao et Grupe (1980)**

Le modèle  $d$ -varié autorégressif moyenne mobile stationnaire associé au modèle univarié autorégressif moyenne mobile d'ordre  $(p_t, q_t)$   $d$ -périodique ci-dessus, est donné par l'équation aux différences stochastique suivante :

$$\sum_{j=0}^{p^*} A(j)X_{\tau-j} = \sum_{j=0}^{q^*} B(j)\eta_{\tau-j} \quad (1.4.2)$$

où  $\eta_\tau = (\eta_{\tau,1}, \eta_{\tau,2}, \dots, \eta_{\tau,d})'$  avec  $\eta_{\tau,i} = \varepsilon_{i+d\tau}$ ,  $i = 1, \dots, d$  est un processus bruit blanc  $d$ -varié dont la matrice de covariance est diagonale d'éléments  $\sigma_i^2$ ,  $i = 1, \dots, d$ . Le processus  $d$ -varié  $\{X_\tau, \tau \in \mathbb{Z}\}$  est défini par :

$X_\tau = (X_{\tau,1}, X_{\tau,2}, \dots, X_{\tau,d})'$  avec  $X_{\tau,i} = y_{i+d\tau}$ ,  $i = 1, \dots, d$  et l'ordre  $(p^*, q^*)$  est donné par :

$$p^* = \max_{1 \leq i \leq d} \left( \frac{p_i - i}{d} \right) + 1, q^* = \max_{1 \leq i \leq d} \left( \frac{q_i - i}{d} \right) + 1.$$

Les matrices  $A(k), B(r), k = 1, \dots, p^*$  et  $r = 1, \dots, q^*$  sont comme ci-dessus.

**Démonstration** Voir Bentarzi (1995) p.26-28.

De la proposition (1.4.1) nous établissons que de chaque modèle univarié autorégressif moyenne mobile d'ordre  $(p_t, q_t)$   $d$ -périodique nous pouvons lui est associé son modèle  $d$ -varié autorégressif moyenne mobile stationnaire d'ordre  $(p^*, q^*)$  et inversement pour un processus  $d$ -varié stationnaire admettant une représentation autorégressif moyenne mobile stationnaire on peut lui est associer son modèle univarié  $d$ -périodique autorégressif moyenne mobile d'ordre  $(p_i, q_i)$   $i = 1, 2, \dots, d$  tels que  $p_i \leq dp^* + i - 1$  et  $q_i \leq dq^* + i - 1$  et  $p_0 \geq d(p^* - 1) + 1$  et  $q_0 \geq d(q^* - 1) + 1$ .

Alors la modélisation du processus univarié  $d$ - périodique  $y_t$ , construit à partir du processus  $d$ -varié  $X(\tau)$  nécessite  $\sum_{i=1}^d (p_i + q_i + i)$  paramètres à prendre en considération où les ordres  $p_i$  et  $q_i$   $i = 1, 2, \dots, d$  vérifiant les contraintes (2.1.2) et (2.1.3). Ce nombre de paramètres est souvent, considérablement inférieur au nombre de paramètres intervenant dans le modèle  $VARMA(p^*, q^*)$  qui est d'ailleurs d'ordre  $d^2 (p^* + q^*) + d(d+1)/2$ .

#### 1.4.2 Modèle autorégressif multivarié associé à un modèle autorégressif univarié périodique

Soit  $\{y_t, t \in \mathbb{Z}\}$  un processus autorégressif  $d$ - périodique d'ordre  $p_t$  noté  $PAR_d(p_t)$  et est donné par l'équation aux différences stochastique suivante :

$$y(t) - \sum_{j=1}^{p_t} \phi_{tj} y_{t-j} = \varepsilon(t) \quad (1.4.3)$$

les paramètres  $\phi_{tj}$ ,  $j = 1, 2, \dots, p_t$  et  $\sigma_t^2$  sont des fonctions périodiques en  $t$  de période  $d$ . Alors pour le rendre un processus  $VAR$  stationnaire nous utilisons le théorème de Gladyshev (1961).

Alors (1.4.3) prend la forme

$$\begin{aligned} y_{(i+d\tau)} - \sum_{j=1}^{p_{i+d\tau}} \phi_{(i+d\tau)j} y_{i+d\tau-j} = \varepsilon_{(i+d\tau)} &\iff y_{(i+d\tau)} - \sum_{j=1}^{p_i} \phi_{ij} y_{i-j+d\tau} = \varepsilon_{(i+d\tau)} \\ i = 1 \quad y_{(1+d\tau)} - [\phi_{11} y_{1-1+d\tau} + \phi_{12} y_{1-2+d\tau} + \dots + \phi_{1p_1} y_{1-p_1+d\tau}] &= \varepsilon_{(1+d\tau)} \\ i = 2 \quad y_{(2+d\tau)} - [\phi_{21} y_{2-1+d\tau} + \phi_{22} y_{2-2+d\tau} + \dots + \phi_{2p_2} y_{2-p_2+d\tau}] &= \varepsilon_{(2+d\tau)} \\ \vdots & \\ i = d \quad y_{(d+d\tau)} - [\phi_{d1} y_{d-1+d\tau} + \phi_{d2} y_{d-2+d\tau} + \dots + \phi_{dp_d} y_{d-p_d+d\tau}] &= \varepsilon_{(d+d\tau)} \end{aligned}$$

donc (1.4.3) s'écrit

$$A(0)X(\tau) = U(\tau) - A(1)X(\tau-1) + \dots + A(p^*)X(\tau-p^*) \quad (1.4.4)$$

Pour obtenir la forme standard du modèle  $VAR(p^*)$  il suffit de multiplier à gauche l'expression (1.4.4) par  $A^{-1}(0)$  on a

$$X(\tau) = A^{-1}(0)U(\tau) - A^{-1}(0)A(1)X(\tau-1) + \dots + A^{-1}(0)A(p^*)X(\tau-p^*)$$

Si on note  $\Psi_k = A^{-1}(0)A(k)$ ,  $k = 1, 2, \dots, p^*$ , on obtient :

$$X(\tau) = U(\tau) - \Psi_1 X(\tau - 1) + \dots + \Psi_p \cdot X(\tau - p^*)$$

### Exemple

Soit  $\{y_t, t \in \mathbb{Z}\}$  un processus périodique univarié admettant un modèle autorégressif 6-périodique dont les ordres autorégressifs  $p_i$  sont donnés par :

$$p_i = \begin{cases} 1 & \text{si } i = 1, 3 \\ 2 & \text{si } i = 2, 4, 6 \quad i = 1, 2, \dots, 6 \\ 3 & \text{si } i = 5 \end{cases}$$

Le modèle (1.4.3) s'écrit sous la forme :

$$\left\{ \begin{array}{l} y_{1+d\tau} + \phi_{11}y_{1-1+d\tau} = \varepsilon_{1+d\tau} \\ y_{2+d\tau} + \phi_{12}y_{2-1+d\tau} + \phi_{22}y_{2-2+d\tau} = \varepsilon_{2+d\tau} \\ y_{3+d\tau} + \phi_{13}y_{3-1+d\tau} = \varepsilon_{3+d\tau} \\ y_{4+d\tau} + \phi_{14}y_{4-1+d\tau} + \phi_{24}y_{4-2+d\tau} = \varepsilon_{4+d\tau} \\ y_{5+d\tau} + \phi_{15}y_{5-1+d\tau} + \phi_{25}y_{5-2+d\tau} + \phi_{35}y_{5-3+d\tau} = \varepsilon_{5+d\tau} \\ y_{6+d\tau} + \phi_{16}y_{6-1+d\tau} + \phi_{26}y_{6-2+d\tau} = \varepsilon_{6+d\tau} \end{array} \right.$$

ou encore

$$\left\{ \begin{array}{l} X_1(\tau) + \phi_1(1)X_6(\tau - 1) = U_1(\tau) \\ X_2(\tau) + \phi_2(1)X_1(\tau) + \phi_2(2)X_6(\tau - 1) = U_2(\tau) \\ X_3(\tau) + \phi_3(1)X_2(\tau) = U_3(\tau) \\ X_4(\tau) + \phi_4(1)X_3(\tau) + \phi_4(2)X_2(\tau) = U_4(\tau) \\ X_5(\tau) + \phi_5(1)X_4(\tau) + \phi_5(2)X_3(\tau) + \phi_5(3)X_2(\tau) = U_5(\tau) \\ X_6(\tau) + \phi_6(1)X_5(\tau) + \phi_6(2)X_4(\tau) = U_6(\tau) \end{array} \right.$$

ou encore

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \phi_2(1) & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \phi_3(1) & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \phi_4(2) & \phi_4(1) & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \phi_5(3) & \phi_5(2) & \phi_5(1) & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \phi_6(2) & \phi_6(1) & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_1(\tau) \\ X_2(\tau) \\ X_3(\tau) \\ X_4(\tau) \\ X_5(\tau) \\ X_6(\tau) \end{pmatrix} +$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \phi_1(1) \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \phi_2(2) \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_1(\tau-1) \\ X_2(\tau-1) \\ X_3(\tau-1) \\ X_4(\tau-1) \\ X_5(\tau-1) \\ X_6(\tau-1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} U_1(\tau) \\ U_2(\tau) \\ U_3(\tau) \\ U_4(\tau) \\ U_5(\tau) \\ U_6(\tau) \end{pmatrix}$$

$\Leftrightarrow A(0)X(\tau) + A(1)X(\tau-1) = U(\tau)$ , comme  $A(0)$  est inversible donc

$$X(\tau) = A^{-1}(0)U(\tau) - A^{-1}(0)A(1)X(\tau-1)$$

### Condition de causalité d'un modèle ARMA multivarié

Le modèle multivarié à coefficients constants  $VARMA(p^*, q^*)$  de représentation (1.3.3) est causal si et seulement si les racines de l'équation caractéristique

$$\det \left( \sum_{j=0}^{p^*} A_j z^{p-j} \right) = 0, z \in \mathbb{C} \quad (1.4.5)$$

sont à l'intérieur du cercle unité.

### Condition d'inversibilité d'un modèle ARMA multivarié

Le modèle multivarié à coefficients constants  $VARMA(p^*, q^*)$  de représentation (1.3.3) est inversible si et seulement si les racines de l'équation caractéristique

$$\det \left( \sum_{j=0}^{q^*} B_j z^{q-j} \right) = 0, z \in \mathbb{C} \quad (1.4.6)$$

sont à l'intérieur du cercle unité.

### Condition de causalité d'un modèle AR périodique

Le modèle univarié  $PAR(p_t)$   $d$ -périodique

$$y_t - \sum_{j=1}^{p_t} \phi_{t,j} y_{t-j} = \varepsilon_t$$

est causal si et seulement si le modèle  $d$ -varié autorégressif à coefficients constants qui lui correspond

$$\sum_{j=0}^{p^*} A(j)X_{t-j} = \eta_t$$

est causal c'est -à-dire, si seulement si les racines de l'équation caractéristique  $\det \left( \sum_{j=0}^{p^*} A(j)z^{p-j} \right) = 0, z \in \mathbb{C}$  sont à l'intérieur du cercle unité.

### Condition d'inversibilité d'un modèle MA périodique

Le modèle univarié  $PMA(q_t)$   $d$ -périodique

$$y_t = \varepsilon_t - \sum_{j=1}^{q_t} \theta_{t,j} \varepsilon_{t-j}$$

est inversible si et seulement si le modèle  $d$ -varié moyenne mobile à coefficients constants associé est inversible c'est-à-dire, les racines de l'équation caractéristique  $\det \left( \sum_{j=0}^{q^*} B(j)z^j \right) = 0, z \in \mathbb{C}$  sont à l'intérieur du cercle unité.

## 1.5 Approche de "order-span lumping"

Nous présentons maintenant une approche, dite *order-span lumping*, introduite par Bentarzi et Hallin (1994), pour étudier les propriétés des modèles périodiques. Cette technique consiste à représenter le modèle univarié ( $m$ -varié) moyenne mobile  $d$ -périodique d'ordre  $q$  par un modèle  $q$  ( $mq$ ) varié moyenne mobile  $S$ -périodique d'ordre 1, où  $S$  est en fonction de  $d$  et  $q$ . Ainsi, le modèle obtenu est exploité pour étudier les propriétés d'un processus moyenne mobile périodique en particulier les conditions d'inversibilité. Ula et Smadi (1997) ont utilisé cette approche pour établir une condition nécessaire et suffisante pour qu'un modèle  $AR$  périodique soit causal.

Modèle multivarié moyenne mobile périodique d'ordre 1 associé à un modèle multivarié moyenne mobile périodique d'ordre  $q$

Soit  $\{y_t, t \in \mathbb{Z}\}$  un processus  $m$ -varié moyenne mobile d'ordre  $q$  et  $d$ -périodique

$$y_t = \sum_{j=0}^q \theta_{t,j} \varepsilon_{t-j} \tag{1.5.1}$$

où  $\{\varepsilon_t, t \in \mathbb{Z}\}$  est un bruit blanc périodique de variance  $\sigma_t^2$  les paramètres  $\theta_{t,j}$ ,  $j = 1, \dots, q$  sont des matrices  $m \times m$ .

Bentarzi et Hallin (1994) ont défini le processus  $mq$ -varié suivant :

$$Y_T = (y'_{qT}, y'_{qT-1}, \dots, y'_{qT-q+1})',$$

$$\eta_T = (\varepsilon'_{qT}, \varepsilon'_{qT-1}, \dots, \varepsilon'_{qT-q+1})'.$$

Nous remarquons que le modèle (1.5.1), peut être représenté sous la forme suivante :

$$Y_T = B_{T,0}\eta_T + B_{T,1}\eta_{T-1} \quad (1.5.2)$$

où les matrices  $(mq \times mq)$   $B_{T,0}, B_{T,1}$  sont données en fonction des coefficients  $\theta_{t,j}$ ,  $j = 0, \dots, q_t$  du (1.5.1) comme

$$B_{T,0} = \begin{pmatrix} \theta_{qT,0} & \theta_{qT,1} & \cdots & \theta_{qT,i-1} & \cdots & \theta_{qT,q-1} \\ 0_m & \theta_{qT-1,0} & \theta_{qT-1,1} & \vdots & \cdots & \theta_{qT-1,q-2} \\ \vdots & 0_m & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0_m & \vdots & \ddots & \theta_{qT-i+1,0} & \cdots & \theta_{qT-i+1,q-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0_m & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \theta_{qT-q+1,q} \end{pmatrix}$$

$$B_{T,1} = \begin{pmatrix} \theta_{qT,q} & 0_m & \cdots & 0_m & \cdots & 0_m \\ \theta_{qT-1,q-1} & \theta_{qT-1,q} & 0_m & \vdots & \ddots & 0_m \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \theta_{qT-i+1,q-i+1} & \vdots & \ddots & \theta_{qT-i+1,q} & \cdots & 0_m \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \theta_{qT-1,0} & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \theta_{qT-q+1,q} \end{pmatrix} \quad (1.5.3)$$

Le modèle (1.5.2) est un modèle  $mq$ -varié moyenne mobile  $S$ -périodique d'ordre 1, où  $S$  ( $S > 1$ ) est le plus petit entier tel que  $qS$  est le plus petit multiple commun de  $q$  et  $d$ .

Bentarzi et Hallin (1994) ont montré que :

**Proposition (1.5.1) (Bentarzi et Hallin (1994))**

Le modèle  $m$ -varié moyenne mobile  $d$ -périodique d'ordre  $q$  est inversible si et seulement si les racines de l'équation caractéristique  $|\Psi - Iz| = 0$  sont à l'intérieur du cercle unité, où  $\Psi$

est une matrice carrée de dimension  $(mq \times mq)$  donnée par :

$$\Psi = B_{S,0}^{-1} B_{S,1} B_{S-1,0}^{-1} B_{S-1,1} \dots B_{2,0}^{-1} B_{2,1} B_{1,0}^{-1} B_{1,1} \quad (1.5.4)$$

où les matrices  $B_{j,0}$  et  $B_{j,1}$ ,  $j = 1, \dots, S$  sont données par (1.5.3).

**Démonstration** Voir Bentarzi et Hallin (1994).

**Proposition (1.5.2) (Bentarzi (1995))**

*Le modèle univarié moyenne mobile  $d$ -périodique d'ordre 1*

$$y_t = \theta_{t,0} \varepsilon_t + \theta_{t,1} \varepsilon_{t-1}$$

est inversible si et seulement si  $\left| \frac{\theta_{1,1} \theta_{2,1} \dots \theta_{d,1}}{\theta_{1,0} \theta_{2,0} \dots \theta_{d,0}} \right| < 1$ .

**Démonstration** Voir Bentarzi (1995) p.108-110

Par analogie, Ula et Smadi (1997) ont exploité la technique introduite par Bentarzi et Hallin (1994) pour obtenir une condition suffisante pour la stationnarité des modèles autorégressifs moyennes mobiles.

**Modèle AR multivarié périodique d'ordre 1 associé à un modèle AR multivarié périodique d'ordre  $p$**

Soit  $\{y_t, t \in \mathbb{Z}\}$  un processus périodiquement corrélé de période  $d$  satisfaisant le modèle  $m$ -varié autorégressif périodique de période  $d$  et d'ordre  $p$  et

$$y_t - \sum_{j=1}^p \phi_{t,j} y_{t-j} = \varepsilon_t \quad (1.5.5)$$

Ula et Smadi (1997) ont défini le processus suivant :

$$\begin{aligned} Y_T &= (y'_{pT}, y'_{pT-1}, \dots, y'_{pT-p+1})' \\ \eta_T &= (\varepsilon'_{pT}, \varepsilon'_{pT-1}, \dots, \varepsilon'_{pT-p+1})' \end{aligned}$$

Le modèle (1.5.5) s'écrira donc sous la forme suivante :

$$A_{T,0} Y_T - A_{T,1} Y_{T-1} = \eta_T \quad (1.5.6)$$



où les matrices  $B_{T,0}$  et  $B_{T,1}$  de dimension  $(mp \times mp)$  sont données en fonction des coefficients périodiques  $\phi_{t,j}$ ,  $j = 1, \dots, p$  comme suit :

$$\begin{aligned}
 A_{T,0} &= \begin{pmatrix} I_m & -\phi_{pT,1} & \cdots & -\phi_{pT,p-1} & \cdots & -\phi_{pT,p-1} \\ 0_m & I_m & -\phi_{pT-1,1} & \vdots & \cdots & \phi_{pT-1,p-2} \\ \vdots & 0_m & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0_m & \vdots & \ddots & I_m & \cdots & \phi_{pT-i+1,p-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0_m & \cdots & \cdots & \cdots & 0_m & I_m \end{pmatrix} \\
 A_{T,1} &= \begin{pmatrix} \phi_{pT,p} & 0_m & \cdots & 0_m & \cdots & 0_m \\ \phi_{pT-1,p-1} & \phi_{pT-1,p} & 0_m & \vdots & \cdots & 0_m \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \phi_{pT-i+1,p-i+1} & \vdots & \ddots & \phi_{pT-i+1,p} & \cdots & 0_m \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \phi_{pT-1,0} & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \phi_{pT-p+1,p} \end{pmatrix}
 \end{aligned} \tag{1.5.7}$$

**Proposition (1.5.3) (Ula et Smadi (1997))**

Le modèle  $m$ -varié autoregressif  $d$ -périodique d'ordre  $q$  est stationnaire si et seulement si les racines du polynôme  $|Iz - \Omega| = 0$  sont à l'intérieur du cercle unité, où  $\Omega$  est la matrice carrée de dimension  $(mp \times mp)$  donnée par:

$$\Omega = A_{S,0}^{-1} A_{S,1} A_{S-1,0}^{-1} A_{S-1,1} \cdots A_{2,0}^{-1} A_{2,1} A_{1,0}^{-1} A_{1,1} \tag{1.5.8}$$

où les matrices  $A_{j,0}$  et  $A_{j,1}$ ,  $j = 1, \dots, S$  sont données par (1.5.7).

Démonstration Voir Ula et Smadi (1997).

## 1.6 Fonction d'autocovariance et la fonction d'autocorrélation dans le cas périodiques

**Définition (1.6.1)** Soit  $\{y_t, t \in \mathbb{Z}\}$  un processus périodiquement corrélé de période  $d$ , de moyenne nulle et de fonction d'autocovariance  $\gamma(.,.)$ . Pour tout entier  $t \in \mathbb{Z}, i = 1, \dots, d$  et  $\tau \in \mathbb{Z}$  tel que  $t = i + d\tau$ , alors la fonction d'autocovariance pour l'horizon  $h$  et relative à la

$i$  <sup>eme</sup> période, notée  $\gamma_h^{(i)}$ ,  $i = 1, \dots, d$  est définie par :

$$\gamma_h^{(i)} = \gamma(t, t - h) = \gamma(i, i - h), \quad i = 1, \dots, d, \quad h \in \mathbb{N} \text{ et } t \in \mathbb{Z}.$$

Il est facile de vérifier que

$$\gamma_h^{(i+d\tau)} = \gamma_h^{(i)} \quad \text{et} \quad \gamma_{-h}^{(i)} = \gamma_h^{(i+h)}.$$

**Définition (1.6.2)** Nous appelons matrice d'autocovariances d'ordre  $k$  et relative à la  $i$  <sup>eme</sup> période d'un processus périodiquement corrélé  $d$ -périodique toute matrice  $(k \times k)$  définie par:

$$\Gamma^{(i)}(k, h) = \begin{pmatrix} \gamma_{-h}^{(i-1)} & \gamma_{-h+1}^{(i-2)} & \cdots & \gamma_{-h+k-1}^{(i-k)} \\ \gamma_{-h-1}^{(i-1)} & \gamma_{-h}^{(i-2)} & \cdots & \gamma_{-h+k-2}^{(i-k)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \gamma_{-h-k+1}^{(i-1)} & \gamma_{-h-k+2}^{(i-2)} & \cdots & \gamma_{-h}^{(i-k)} \end{pmatrix}, \quad \text{où } i = 1, \dots, d, \quad h, k \in \mathbb{N}.$$

**Définition (1.6.3)** Nous appelons matrice d'autocorrélation d'ordre  $k$ , relative à la  $i$  <sup>eme</sup> période d'un processus périodiquement corrélé  $d$ -périodique toute matrice  $(k \times k)$  définie par :

$$\Sigma^{(i)}(k, h) = \begin{pmatrix} \rho_{-h}^{(i-1)} & \rho_{-h+1}^{(i-2)} & \cdots & \rho_{-h+k-1}^{(i-k)} \\ \rho_{-h-1}^{(i-1)} & \rho_{-h}^{(i-2)} & \cdots & \rho_{-h+k-2}^{(i-k)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \rho_{-h-k+1}^{(i-1)} & \rho_{-h-k+2}^{(i-2)} & \cdots & \rho_{-h}^{(i-k)} \end{pmatrix}, \quad i = 1, \dots, d, \quad h, k \in \mathbb{N}.$$

où  $\rho_h^{(i+d\tau)} = \rho_h^{(i)} = \frac{\gamma_h^{(i)}}{\gamma_0^{(i)}}$  est la fonction d'autocorrélation pour l'horizon  $h$  et relative à la  $i$  <sup>eme</sup> période du processus  $y_t$

### 1.6.1 Relations entre les autocovariances d'un processus multivarié stationnaire et les autocovariances d'un processus périodiquement corrélé

D'après le théorème de Gladychév (1961) le processus  $d$ -varié  $\{X_\tau, \tau \in \mathbb{Z}\}$  défini par :

$$\begin{aligned} X_\tau &= (X_{\tau,1}, X_{\tau,2}, \dots, X_{\tau,d})' \\ &= (y_{1+d\tau}, y_{2+d\tau}, \dots, y_{k+d\tau})' \end{aligned}$$

est stationnaire si et seulement si le processus  $\{y_t, t \in \mathbb{Z}\}$  est périodiquement corrélé de période  $d$ .

Soit  $\Gamma(\tau_1, \tau_2)$  la matrice de variance-covariance de  $X_{\tau_1}$  et  $X_{\tau_2}$  définie par :

$$\Gamma(\tau_1, \tau_2) = (\gamma_{i,j}(\tau_1, \tau_2))_{i,j=1,\dots,d}, \tau_1, \tau_2 \in \mathbb{Z}$$

où

$$\gamma_{i,j}(\tau_1, \tau_2) = \text{cov}(X_{\tau_1,i}, X_{\tau_2,j}) = \text{cov}(y_{i+d\tau_1}, y_{j+d\tau_2}), \quad i, j = 1, \dots, d \quad \text{Nous avons alors}$$

$$\gamma_{i,j}(\tau_1, \tau_2) = \gamma_{i-j+d(\tau_1-\tau_2)}^{(i)}, \quad i, j = 1, \dots, d.$$

Le processus  $d$ -varié  $X_\tau$  étant stationnaire, sa matrice d'autocovariance à l'horizon  $h$  est donnée par :

$$\Gamma(h) = \Gamma(\tau, \tau - h) = (\gamma_{i-j+dh}^{(i)})_{i,j=1,\dots,d}.$$

## Chapitre 2

# Méthodes d'Estimation des Paramètres d'un Modèle $ARMA_d(p_t, q_t)$

### 2.1 Introduction

Les méthodes d'estimation sont généralement classées en deux classes; les méthodes *hors-ligne* et les méthodes *en-ligne*. Dans la première classe, il s'agit d'une série de taille fixe, alors que dans la deuxième les données sont progressivement disponibles. Les méthodes d'estimation *hors-ligne* peuvent être classées en deux groupes les méthodes utilisant directement les données et les méthodes utilisant des transformations des données. Nous commencerons, par la première classe en exposant les principaux résultats concernant l'estimation, par la méthode des moments, des paramètres d'un processus autorégressif pur  $d$ -périodique d'ordre constant  $p$ , puis nous passerons à l'étude d'un modèle ARMA mixte  $d$ -périodique. À la fin de cette section nous présenterons l'algorithme de Boshnakov (1996). La deuxième section est consacrée à l'estimation par la méthode du maximum de vraisemblance. Nous présenterons à ce sujet l'algorithme de Vecchia (1985a). Nous terminerons par la présentation d'une deuxième méthode basée sur l'utilisation directe des données qui est la méthode des moindres carrés. Parmi les méthodes d'estimation *en-ligne*, nous présenterons deux algorithmes. Le premier est l'algorithme des moindres carrés récursifs périodique (PRLS), relatif aux modèles autorégressifs purs. Le second qui n'est autre qu'une généralisation du premier aux cas des modèles autorégressifs moyennes mobiles, c'est l'algorithme *Periodic Recursive Maximum Likelihood* (PRML). Nous présenterons et interpréterons dans la dernière section les résultats de simulation, où nous simulerons des modèles autorégressifs  $d$ -périodiques d'ordre  $p$ , les paramètres sont estimés par la méthode des moindres carrés et sous les conditions de normalité.

## 2.2 Méthode des moments

### 2.2.1 Estimation des paramètres d'un modèle AR $d$ -périodiques

#### Equations de Yule-walker périodiques

Soit  $\{y_t, t \in \mathbb{Z}\}$  un processus autorégressif  $d$ -périodique d'ordre  $p_t$  et de représentation (1.2.4), qui peut s'écrire aussi sous la forme suivante :

$$y_{k+d\tau} - \sum_{j=1}^{p_t} \phi_{k+d\tau, j} y_{k+d\tau-j} = \varepsilon_{k+d\tau}, k = 1, \dots, d \quad (2.2.1)$$

Multiplions les membres de l'équation (2.2.1) par  $y_{t-\nu}$  (ou également par  $y_{k+d\tau-\nu}$ ,  $k = 1, \dots, d$ ). Pour  $\nu$  positif et  $\varepsilon_t$  supposée non corrélée avec  $y_{t-\nu}$ , en prenant l'espérance des deux membres de l'équation, nous obtenons :

$$\gamma(k, k - \nu) - \sum_{j=1}^{p_k} \phi_{i, j} \gamma(k - j, k - \nu) = \delta_{\nu 0} \sigma_k^2, \quad \nu \geq 0 \quad (2.2.2)$$

où  $\gamma(\cdot, \cdot)$  est la fonction d'autocovariance du processus et  $\delta_{\nu 0}$  désigne le symbole de Kronecker.

L'estimation des paramètres d'un modèle *ARMA*  $d$ -périodique par la méthode des moments, est semblable à l'estimation des modèles *ARMA* stationnaire, basée sur les équations de Yule-Walker périodiques. Le principe de ces méthodes consiste à remplacer, dans les équations de Yule-Walker périodiques, les autocovariances théoriques par leurs estimations empiriques.

Supposons qu'on dispose d'une série de taille  $dT$  considérée comme réalisation d'un modèle *PARMA* gaussien.

Soit

$$\mu_i = \frac{1}{T} \sum_{\tau=0}^{T-1} y_{i+d\tau}$$

un estimateur sans biais de la moyenne relative à la  $i^{\text{ème}}$  période.

Dans ce cas l'estimateur, par la méthode des moments, de la fonction d'autocovariance  $\gamma_h^{(i)}$ , pour la  $i^{\text{ème}}$  période et l'horizon  $h$ , est la fonction d'autocovariance empirique notée par  $\tilde{\gamma}_h^{(i)}$  et définie par :

$$\tilde{\gamma}_h^{(i)} = \frac{1}{T} \sum_{\tau=0}^{T-1} (y_{i+d\tau} - \mu_i) (y_{i+d\tau-h} - \mu_{i-h})$$

où  $y_{i+d\tau-l} = 0$  pour  $i + d\tau - l < 1$  ou pour  $i + d\tau - l > dT$ .

## Estimateurs de Yule-Walker dans le cas périodique

Considérons le processus  $\{y_{i+d\tau}, i = 1, \dots, d, \tau \in \mathbb{Z}\}$  supposé être représenté par le modèle :

$$y_{i+d\tau} - \sum_{j=1}^p \phi_{i,j} y_{i+d\tau-j} = \varepsilon_{i+d\tau}, \quad i = 1, \dots, d; \tau \in \mathbb{Z} \quad (2.2.3)$$

Notons par  $\Phi_i, i = 1, \dots, d$  le  $p_i$ -vecteur des paramètres, relatif à la  $i^{\text{ème}}$  période, défini par  $(\phi_{i,1}, \phi_{i,2}, \dots, \phi_{i,p})'$ . En multipliant (2.2.3) par  $y_{i+d\tau-h}, h = 1, \dots, p$ , et en prenant l'espérance mathématique des deux membres, alors nous obtenons pour chaque  $i$ , l'ensemble des  $p + 1$  équations suivantes :

$$\gamma_h^{(i)} - \sum_{j=1}^p \phi_{i,j} \gamma_{h-j}^{(i)} = \delta_{h0} \sigma_i^2, \quad i = 1, \dots, d$$

ou encore, sous la forme matricielle

$$\begin{cases} \Gamma_i \Phi_i = \gamma_i \\ \sigma_i^2 = \gamma_0^{(i)} - \Phi_i' \gamma_i \end{cases} \quad (2.2.4)$$

avec  $(\Gamma_i)_{k,j=1,\dots,p} = \gamma_{j-k}^{(i)}$  et  $\gamma_i = (\gamma_1^{(i)}, \gamma_2^{(i)}, \dots, \gamma_p^{(i)})'$ .

Les estimateurs  $\tilde{\Phi}_i$  et  $\tilde{\sigma}_i^2$  par la méthode des moments de  $\Phi_i$  et  $\sigma_i^2$  sont obtenus à partir de (2.2.4) en remplaçant les autocovariances théoriques par leurs estimateurs empiriques et en résolvant le système d'équations suivant :

$$\begin{cases} \tilde{\Gamma}_i \tilde{\Phi}_i = \tilde{\gamma}_i \\ \tilde{\sigma}_i^2 = \tilde{\gamma}_0^{(i)} - \tilde{\Phi}_i' \tilde{\gamma}_i \end{cases} \quad (2.2.5)$$

Les propriétés de ces estimateurs seront discutées dans le chapitre 4.

## Estimation des paramètres d'un modèle *PARMA*

L'estimation par la méthode des moments d'un modèle *PARMA* devienne plus délicate. En effet, pour les paramètres moyennes mobiles périodiques, nous aurons besoin de résoudre des systèmes non linéaires très compliqués. Cependant, les estimateurs obtenus par la méthode des moments seront considérés seulement comme valeurs initiales pour les méthodes itératives telles que la méthode du maximum de vraisemblance ou des moindres carrés. En effet, cette classe de méthodes, comme nous verrons par la suite, requiert une routine d'optimisation numérique et par conséquent un ensemble d'itérations nécessaire jusqu'à l'obtention de la convergence voulue.

Il y'a donc un grand intérêt à utiliser des valeurs initiales convenables pour ne pas altérer la sensibilité de la méthode.

D'après Vecchia (1985a), la valeur  $\tilde{\Phi}_i$  obtenue par la résolution du système

$$\tilde{\Gamma}_{i,q} \tilde{\Phi}_i = \tilde{\gamma}_{i,q}$$

où  $(\tilde{\Gamma}_{i,q})_{k,j=1,\dots,p} = \tilde{\gamma}_{j-k-q}^{(i-k-q)}$  et  $\tilde{\gamma}_{i,q} = (\tilde{\gamma}_{q+1}^{(i)}, \tilde{\gamma}_{q+2}^{(i)}, \dots, \tilde{\gamma}_{q+p}^{(i)})'$  semble être une valeur initiale convenable.

## 2.2.2 Estimation des moments par des méthodes récursives

### Prédiction des processus périodiquement corrélés

Soit  $L^2(\Omega, A, P)$  l'espace de Hilbert des variables aléatoires de carrés intégrables, muni du produit scalaire  $\langle x, y \rangle = E(xy)$ . Soit  $\{y_t, t \in \mathbb{Z}\}$  un processus du second ordre. Nous notons  $M_{t,r}, t \in \mathbb{Z}, r \in \mathbb{N}^*$ , le sous-espace de Hilbert engendré par  $y_{t-r}, y_{t-r+1}, \dots, y_{t-1}$ . Alors, le prédicteur linéaire (ou le meilleur prédicteur linéaire au sens des moindres carrés)  $\hat{y}_t$  de  $y_t$  sachant  $y_{t-r}, y_{t-r+1}, \dots, y_{t-1}$  est défini, comme la projection orthogonale (au sens de  $L^2$ ) de  $y_t$  sur le sous-espace  $M_{t,r}$ , c'est-à-dire

$$\hat{y}_t = P_{M_{t,r}} y_t \quad *$$

### Equation de prédiction prospective

Puisque  $\hat{y}_t \in M_{t,r}$ , il existe donc des coefficients  $\phi_{t,j}^{(r)}, j = 1, \dots, r$  tel que

$$\hat{y}_t = \sum_{j=1}^r \phi_{t,j}^{(r)} y_{t-j}$$

où les coefficients  $\phi_{t,j}^{(r)}, j = 1, \dots, r$  satisfont les équations de prédiction, c'est-à-dire

$$\langle y_t - \hat{y}_t, y_{t-j} \rangle = 0 \text{ pour tout } j = 1, \dots, r$$

ou encore

$$\sum_{k=1}^r \phi_{t,k}^{(r)} \langle y_{t-k}, y_{t-j} \rangle = \langle y_t, y_{t-j} \rangle, \quad j = 1, \dots, r$$

d'où

$$\sum_{k=1}^r \phi_{t,k}^{(r)} \gamma(t-k, t-j) = \gamma(t, t-j), \quad j = 1, \dots, r$$

où  $\gamma(\cdot, \cdot)$  est la fonction d'autocovariance du processus  $y_t$ .

La dernière équation peut se mettre sous la forme matricielle suivante :

$$\Gamma_{t,r} \Phi_{t,r} = \gamma_{t,r}$$

où  $\Phi_{t,r} = (\phi_{t,1}^{(r)}, \phi_{t,2}^{(r)}, \dots, \phi_{t,r}^{(r)})'$ ,  $\gamma_{t,r} = (\gamma(t, t-1), \gamma(t, t-2), \dots, \gamma(t, t-r))'$   
 et  $\Gamma_{t,r} = (\Gamma_{t,r}(j, k))_{j,k=1, \dots, r}$ ,  $\Gamma_{t,r}(j, k) = \gamma(t-k, t-j)$

De plus si la matrice  $\Gamma_{t,r}$  est régulière, alors les coefficients du meilleur prédicteur linéaire de  $y_t$  peuvent être définis par l'équation suivante :

$$\Phi_{t,r} = \Gamma_{t,r}^{-1} \gamma_{t,r}$$

### Equation de prédiction rétrospective

Nous notons par  $\tilde{y}_t^{(r)}$  la meilleure projection de  $y_t$  sur le sous espace  $M_{t+r+1,r}$  qui est engendré par  $y_{t+1}, y_{t+2}, \dots, y_{t+r}$ . Comme  $\tilde{y}_t \in M_{t+r+1,r}$ , il existe donc des coefficients  $\beta_{t,j}^{(r)}$ ,  $j = 1, \dots, r$  tel que :

$$\tilde{y}_t = \sum_{j=1}^r \beta_{t,j}^{(r)} y_{t+j}$$

où les coefficients  $\beta_{t,j}^{(r)}$ ,  $j = 1, \dots, r$  satisfont les équations de prédiction, c'est-à-dire

$$\langle y_t - \tilde{y}_t, y_{t+j} \rangle = 0 \text{ pour tout } j = 1, \dots, r$$

ou encore

$$\sum_{k=1}^r \beta_{t,k}^{(r)} \langle y_{t+k}, y_{t+j} \rangle = \langle y_t, y_{t+j} \rangle, \quad j = 1, \dots, r$$

d'où

$$\sum_{k=1}^r \beta_{t,k}^{(r)} \gamma(t+k, t+j) = \gamma(t, t+j), \quad j = 1, \dots, r$$

où  $\gamma(\cdot, \cdot)$  est la fonction d'autocovariance du processus  $y_t$ .

### Remarque

- Si le processus  $\{y_t, t \in \mathbb{Z}\}$  est périodiquement corrélé de période  $d$ , alors la fonction d'autocovariance est  $d$ -périodique. Donc on aura pour tout  $t, \tau \in \mathbb{Z}$  et  $i = 1, \dots, d$  tel que  $t = i + d\tau$  :

$$\Gamma_{i+d\tau,r} = \Gamma_{i,r} \text{ et } \gamma_{i+d\tau,r} = \gamma_{i,r}, \quad i = 1, \dots, d; \tau \in \mathbb{Z}.$$

- Si en plus la matrice  $\Gamma_{i,r}$  est régulière, alors les coefficients de prédictions seront  $d$ -



périodiques et ils sont donnés par :

$$\sum_{k=1}^r \phi_{t,k}^{(r)} \gamma_{j-k}^{(i-k)} = \gamma_j^{(i)}, \quad j = 1, \dots, r; i = 1, \dots, d.$$

### Estimation des moments par des méthodes récursives

Nous présentons maintenant une méthode récursive, pour l'estimation des paramètres d'un modèle autorégressif moyenne mobile  $d$ -périodique. L'idée de cette méthode est de déterminer progressivement les coefficients du meilleur prédicteur de  $y_t$  sachant  $y_{t-1}, \dots, y_{t-p}, \varepsilon_{t-1}, \dots, \varepsilon_{t-q}$ .

Soit alors,

$$\hat{y}_t^{(p,q)} = E(y_t / y_{t-1}, \dots, y_{t-p}, \varepsilon_{t-1}, \dots, \varepsilon_{t-q}) = \sum_{j=1}^p \phi_{t,j}^{(p,q)} y_{t-j} + \sum_{j=1}^q \theta_{t,j}^{(p,q)} \varepsilon_{t-j}$$

$$\varepsilon_t^{(p,q)} = y_t - \hat{y}_t^{(p,q)}, \quad \sigma_i^{2(p,q)} = \left\| y_t - \hat{y}_t^{(p,q)} \right\|^2 = E \left( \varepsilon_t^{(p,q)} \right)^2.$$

$$\begin{aligned} \tilde{y}_t^{(p,q)} &= E(y_t / y_{t+1}, \dots, y_{t+p}, \varepsilon_{t+p-q+1}, \dots, \varepsilon_{t+p}) \\ &= \sum_{j=1}^p \beta_{t,j}^{(p,q)} y_{t+j} + \sum_{j=1}^q \delta_{t,j}^{(p,q)} \varepsilon_{t+p-q+j} \end{aligned}$$

$$a_t^{(p,q)} = y_t - \tilde{y}_t^{(p,q)}, \quad \nu_i^{2(p,q)} = \left\| y_t - \tilde{y}_t^{(p,q)} \right\|^2 = E \left( a_t^{(p,q)} \right)^2.$$

Boshnakov (1996) a présenté un algorithme pour calculer récursivement les paramètres d'un modèle autorégressif moyenne mobile périodique. C'est une généralisation de l'algorithme de Levinson-Durbin (1960) pour un modèle autorégressif stationnaire, l'algorithme de Sakai (1982) pour un modèle autorégressif périodique et l'algorithme de Franke (1985) pour un modèle ARMA stationnaire.

Considérons le modèle autorégressif moyenne mobile  $d$ -périodique suivant :

$$y_{i+d\tau} = \sum_{j=1}^p \phi_{i,j} y_{i+d\tau-j} + \varepsilon_{i+d\tau} - \sum_{j=1}^q \theta_{i,j} \varepsilon_{i+d\tau-j}, \quad i = 1, \dots, d; \tau \in \mathbb{Z}$$

Nous supposons que le modèle est causal, c'est-à-dire

$$y_{i+d\tau} = \varepsilon_{i+d\tau} + \sum_{j=1}^{\infty} h_{i,j} y_{i+d\tau-j}$$

où la série infinie est convergente, en moyenne quadratique. Alors le schéma récursif pour calculer  $\phi_{i,j}$  et  $\theta_{i,k}$  à partir de  $\gamma_h^{(i)}$ ,  $i = 1, \dots, d$ ,  $j = 1, \dots, P$ ,  $k = 1, \dots, Q$  est donné par l'algorithme suivant :

**Algorithme de Boshnakov (1996)**

1<sup>ère</sup> étape : Pour  $p = q = 0$

$$\sigma_i^{2(0,0)} = \nu_i^{2(0,0)} = \gamma_0^{(i)}, i = 1, \dots, d$$

2<sup>ème</sup> étape : Pour  $p = 0, q \geq 1$

$$\begin{aligned} \theta_{i,k}^{(0,q)} &= h_{i,k}, \quad k = 1, \dots, q \\ \sigma_i^{2(0,q)} &= \sigma_i^{2(0,q-1)} - (h_{i,q})^2 \sigma_{i-q}^2 \\ \delta_{i,k}^{(0,q)} &= h_{i,q-k}, \quad k = 1, \dots, q \\ \nu_i^{2(0,q)} &= \nu_i^{2(0,q-1)} - (h_{i,q-1})^2 \sigma_{i-q+1}^2 \end{aligned}$$

3<sup>ème</sup> étape : Pour  $p \geq 1, q = 0$

$$\begin{aligned} \phi_{i,p}^{(p,0)} &= \left( \gamma_p^{(i)} - \sum_{j=1}^{p-1} \beta_{i-p,j}^{(p-1,0)} \gamma_{p-j}^{(i)} \right) / \nu_{i-p}^{2(p-1,0)} \\ \phi_{i,j}^{(p,0)} &= \phi_{i,j}^{(p-1,0)} - \phi_{i,p}^{(p,0)} \beta_{i-p,p-j}^{(p-1,0)}, \quad j = 1, \dots, p-1 \\ \sigma_i^{2(p,0)} &= \sigma_i^{2(p-1,0)} - \left( \phi_{i,p}^{(p,0)} \right)^2 \nu_{i-p}^{2(p-1,0)} \\ \beta_{i,p}^{(p,0)} &= \left( \gamma_{-p}^{(i)} - \sum_{j=1}^{p-1} \phi_{i+p,j}^{(p-1,0)} \gamma_{j-p}^{(i)} \right) / \sigma_{i+p}^{2(p-1,0)} \\ \beta_{i,j}^{(p,0)} &= \beta_{i,j}^{(p-1,0)} - \beta_{i,p}^{(p,0)} \phi_{i+p,p-j}^{(p-1,0)}, \quad j = 1, \dots, p-1 \\ \nu_i^{2(p,0)} &= \left( 1 - \phi_{i+p,p}^{(p,0)} \beta_{i,p}^{(p,0)} \right) \sigma_i^{2(p-1,0)} \end{aligned}$$

4<sup>ème</sup> étape : Pour  $p \geq 1, q \geq 1$

$$\begin{aligned} \phi_{i,p}^{(p,q)} &= \frac{\left( \gamma_p^{(i)} - \sum_{j=1}^{p-1} \beta_{i-p,j}^{(p-1,q)} \gamma_{p-j}^{(i)} - \sum_{j=1}^q \delta_{i-p,j}^{(p-1,q)} \sigma_{i-1-q+j}^2 h_{i,q+1-j} \right)}{\nu_{i-p}^{2(p-1,q)}} \\ \phi_{i,j}^{(p,q)} &= \phi_{i,j}^{(p-1,q)} - \phi_{i,p}^{(p,q)} \beta_{i-p,p-j}^{(p-1,q)}, \quad j = 1, \dots, p-1 \\ \theta_{i,k}^{(p,q)} &= \theta_{i,k}^{(p-1,q)} - \phi_{i,p}^{(p,q)} \delta_{i-p,q+1-k}^{(p-1,q)}, \quad k = 1, \dots, q \\ \sigma_i^{2(p,q)} &= \sigma_i^{2(p-1,q)} - \left( \phi_{i,p}^{(p,q)} \right)^2 \nu_{i-p}^{2(p-1,q)} \\ \beta_{i,p}^{(p,q)} &= \frac{\left( \gamma_p^{(i+p)} - \sum_{j=1}^{p-1} \phi_{i+p,j}^{(p-1,q-1)} \gamma_{p-j}^{(i+p-j)} - \sum_{j=1}^{q-1} \delta_{i+p,j}^{(p-1,q-1)} \sigma_{i+p-j}^2 h_{i,j-p} \right)}{\left( \sigma_{i+p}^{2(p-1,q-1)} - \sigma_{i+p}^2 \right)} \\ \beta_{i,j}^{(p,q)} &= \beta_{i,j}^{(p-1,q-1)} - \beta_{i,p}^{(p,q)} \phi_{i+p,p-j}^{(p-1,q-1)}, \quad j = 1, \dots, p-1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\delta_{i,k}^{(p,q)} &= \delta_{i,k}^{(p-1,q-1)} - \beta_{i,p}^{(p,q)} \theta_{i+p,q-k}^{(p-1,q-1)}, \quad k = 1, \dots, q-1 \\ \delta_{i,q}^{(p,q)} &= -\beta_{i,p}^{(p,q)} \\ \nu_i^{2(p,q)} &= \nu_i^{2(p-1,q-1)} - \left(\beta_{i,p}^{(p,q)}\right)^2 \left(\sigma_{i+p}^{2(p-1,q-1)} - \sigma_{i+p}^2\right)\end{aligned}$$

5<sup>eme</sup> étape : Pour  $p \geq 1$ ,  $q \geq 1$  et  $\sigma_{i+p}^{2(p-1,q-1)} - \sigma_{i+p}^2 \neq 0$

$$\beta_{i,p}^{(p,q)} = \left(\phi_{i+p,p}^{(p,q-1)} \nu_i^{2(p-1,q-1)}\right) / \left(\sigma_{i+p}^{2(p-1,q-1)} - \sigma_{i+p}^2\right)$$

Les équations ci-dessus seront appliquées pour  $p = 1, \dots, P$ ,  $q = 1, \dots, Q$  et  $i = 1, \dots, d$ . Les paramètres seront obtenus à partir de

$$\phi_{i,j} = \phi_{i,j}^{(P,Q)}, \theta_{i,k} = \theta_{i,k}^{(P,Q)} \text{ et } \sigma_i^2 = \sigma_i^{2(P,Q)} \text{ pour tout } i = 1, \dots, d \quad \square$$

## 2.3 Méthode du maximum de vraisemblance

Supposons maintenant que nous voulons estimer les paramètres d'un modèle *PARMA*, en se basant sur une réalisation donnée. Alors, ces estimateurs sont choisis de façon à minimiser une fonction critère fixée.

Nous considérons le modèle (1.2.3) avec une hypothèse très précise sur la distribution du bruit blanc. Soit  $\{\varepsilon_t, t \in \mathbb{Z}\}$  une suite de variables aléatoires i.i.d, de loi  $\mathcal{N}(0, \sigma_\varepsilon^2)$ . Pour une  $dT$ -réalisation  $y_1, \dots, y_{dT}$ , le modèle (1.2.3) peut se mettre sous la forme suivante :

$$A Y_T = B \underline{\varepsilon}_T + C I_* \quad (2.3.1)$$

où  $Y_T = (y_1, \dots, y_{dT})'$ ,  $\underline{\varepsilon}_T = (\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_{dT})'$ ,  $I_* = (y_0, \dots, y_{1-p}, \varepsilon_0, \dots, \varepsilon_{1-q})'$ . et  $A$  et  $B$  sont des matrices triangulaires inférieures de taille  $(dT \times dT)$  à diagonale unité. La matrice  $C$  est de taille  $(dT \times (p+q))$ . L'expression exacte de ces matrices est donnée par :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ -\phi_{2,1} & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ -\phi_{p,p-1} & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & -\phi_{p,p-1} & \dots & -\phi_{p,1} & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ -\theta_{2,1} & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ -\theta_{q,q-1} & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & -\theta_{q,q-1} & \dots & -\theta_{q,1} & 1 \end{pmatrix}$$

$$C = \begin{pmatrix} -\phi_{1,p} & \dots & \dots & -\phi_{1,1} & \theta_{1,q} & \dots & \dots & \theta_{1,1} \\ 1 & -\phi_{2,p} & \dots & -\phi_{2,2} & 0 & \theta_{2,q} & \dots & \theta_{2,2} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & -\phi_{p,p} & \dots & \ddots & \ddots & \theta_{p,p} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & 0 & 0 & \dots & \dots & 0 \end{pmatrix}.$$

Pour plus de clarté considérons la série  $y_1, \dots, y_{2T}$  supposée issue d'un modèle  $MA_2(1)$  suivant :

$$\begin{cases} y_{1+2\tau} = \varepsilon_{1+2\tau} - \theta_1 \varepsilon_{2\tau}, \\ y_{2+2\tau} = \varepsilon_{2+2\tau} - \theta_2 \varepsilon_{1+2\tau}. \end{cases} \quad (2.3.2)$$

où  $\theta = (\theta_1, \theta_2)'$  est le vecteur des paramètres à estimer.

### 2.3.1 Méthode du maximum de vraisemblance conditionnelle

Dans cette section nous exposons la méthode du maximum de vraisemblance conditionnelle pour les modèles *PARMA*

Soit  $\mathcal{L}_*(\theta_1, \theta_2)$  la fonction de vraisemblance conditionnelle à  $\varepsilon_0 = 0$ . La densité conjointe du  $\varepsilon = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_{2T})$  est égale à

$$f(\varepsilon) = \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\right)^{2T} \left(\prod_{t=1}^{2T} \sigma_t^2\right)^{-1/2} \exp\left(-\frac{1}{2} \sum_{t=1}^{2T} \frac{\varepsilon_t^2}{\sigma_t^2}\right),$$

ou encore

$$f(\varepsilon) = \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\right)^{2T} \sigma_1^{-T} \sigma_2^{-T} \exp\left\{-\frac{1}{2} \left(\sum_{\tau=0}^{T-1} \frac{\varepsilon_{1+2\tau}^2}{\sigma_1^2} + \sum_{\tau=0}^{T-1} \frac{\varepsilon_{2+2\tau}^2}{\sigma_2^2}\right)\right\} \quad (2.3.3)$$

Supposons que  $y = (y_1, y_2, \dots, y_{2T})$  est une  $2T$ -réalisation du modèle. La matrice Jacobienne de la transformation de  $\mathbb{R}^{2T}$  qui applique  $y$  sur  $\varepsilon$  à l'aide de (2.2.6) est triangulaire inférieure et les éléments diagonaux sont égaux à 1. La fonction de densité de  $y$  sachant  $\varepsilon_0 = 0$  est donc donnée par (2.3.3). On aura donc

$$\begin{aligned} \log \mathcal{L}_*(\theta_1, \theta_2, \sigma_1^2, \sigma_2^2) &= T \times \log(2\pi) \\ &\quad - \frac{T}{2} \log \sigma_1^2 - \frac{T}{2} \log \sigma_2^2 - \frac{1}{2} \left(\sum_{\tau=0}^{T-1} \frac{\varepsilon_{1+2\tau}^2}{\sigma_1^2} + \sum_{\tau=0}^{T-1} \frac{\varepsilon_{2+2\tau}^2}{\sigma_2^2}\right) \end{aligned} \quad (2.3.4)$$

cette dernière on donne

$$\begin{cases} \frac{\partial \log \mathcal{L}_*(\theta_1, \theta_2)}{\partial \sigma_1^2} = -\frac{T}{2\sigma_1^2} + \frac{1}{2} \left( \sum_{\tau=0}^{T-1} \frac{\varepsilon_{1+2\tau}^2}{\sigma_1^4} \right) \\ \frac{\partial \log \mathcal{L}_*(\theta_1, \theta_2)}{\partial \sigma_2^2} = -\frac{T}{2\sigma_2^2} + \frac{1}{2} \left( \sum_{\tau=0}^{T-1} \frac{\varepsilon_{2+2\tau}^2}{\sigma_2^4} \right) \end{cases}$$

d'où

$$\begin{cases} \frac{\partial \log \mathcal{L}_*(\theta_1, \theta_2)}{\partial \sigma_1^2} = 0 \\ \frac{\partial \log \mathcal{L}_*(\theta_1, \theta_2)}{\partial \sigma_2^2} = 0 \end{cases} \implies \begin{cases} \sigma_1^2 = \frac{1}{T} \left( \sum_{\tau=0}^{T-1} \varepsilon_{1+2\tau}^2 \right) \\ \sigma_2^2 = \frac{1}{T} \left( \sum_{\tau=0}^{T-1} \varepsilon_{2+2\tau}^2 \right) \end{cases} \quad (2.3.5)$$

en remplaçant ce résultat dans (2.3.4), on obtient à une constante près

$$-\frac{T}{2} \log \left( \sum_{\tau=0}^{T-1} \varepsilon_{1+2\tau}^2 \right) - \frac{T}{2} \log \left( \sum_{\tau=0}^{T-1} \varepsilon_{2+2\tau}^2 \right) \quad (2.3.6)$$

Ce qui montre que l'estimateur du maximum de vraisemblance  $(\hat{\theta}_1, \hat{\theta}_2)$  de  $(\theta_1, \theta_2)$  sera choisi de façon à minimiser (2.3.6). Sachant  $(\hat{\theta}_1, \hat{\theta}_2)$  on peut déterminer l'estimateur  $(\hat{\sigma}_1^2, \hat{\sigma}_2^2)$  de  $(\sigma_1^2, \sigma_2^2)$  par (2.3.5).

Il est facile de prouver pour un modèle  $ARMA_d(p, q)$  que

$$\hat{\sigma}_i^2 = \frac{1}{T} \left( \sum_{\tau=0}^{T-1} \varepsilon_{i+d\tau}^2 \right), \quad i = 1, \dots, d$$

Ainsi, en remplaçant dans la vraisemblance on trouve que l'estimateur du maximum de vraisemblance sera choisi de façon à minimiser

$$\log \left( \prod_{i=1}^d \sum_{\tau=0}^{T-1} \varepsilon_{i+d\tau}^2 \right)$$

### 2.3.2 Méthode du maximum de vraisemblance non conditionnelle

Dans cette section nous donnons la méthode du maximum de vraisemblance non conditionnelle pour les modèles  $PARMA$ .

Nous savons que

$$A Y_T = B \varepsilon_T + C I_*$$

qui implique

$$Y_T = A^{-1} B \varepsilon_T + A^{-1} C I_*$$

d'où

$$\text{cov}(Y_N) = A^{-1} B \text{cov}(\varepsilon_T) B' (A^{-1})' + A^{-1} C \text{cov}(I_*) C' (A^{-1})' \quad (2.3.7)$$

Or  $\text{cov}(\varepsilon) = \text{Diag}(\sigma_1^2, \dots, \sigma_{dT}^2) I_{dT} = D_{1,dT}^2 I_{dT}$ , où  $I_{dT}$  est la matrice identité d'ordre  $dT$  et  $D_{i,j}^k$  est la matrice diagonale d'éléments  $\sigma_i^k, \sigma_{i+1}^k, \dots, \sigma_j^k$ . Pour plus de commodité, on note par  $\Gamma$  la matrice de covariance du vecteur  $\text{Diag}(\sigma_1^{-1}, \dots, \sigma_{dT}^{-1}) Y_T$ , alors on obtient la matrice de covariance de  $Y_T$  qui est égale à  $D_{1,dT} \Gamma D_{1,dT}$ .

L'estimation de la fonction de vraisemblance semble être compliquée, en effet, on peut l'écrire sous la forme générale

$$\mathcal{L}(\phi, \theta, Y_T) = (2\pi)^{-\frac{dT}{2}} \left( \prod_{t=1}^{dT} \sigma_t^2 \det \Gamma \right)^{-1/2} \exp \left\{ -\frac{1}{2} (Y_T' D_{1,dT}^{-1} \Gamma^{-1} D_{1,dT}^{-1} Y_T) \right\} \quad (2.3.8)$$

D'où

$$\begin{aligned} \log \mathcal{L}(\phi, \theta, Y_T) = & -\left(\frac{dT}{2}\right) \log(2\pi) - \frac{1}{2} \log(\det \Gamma) \\ & - \frac{T}{2} \sum_{t=1}^d \log \sigma_t^2 - \frac{1}{2} (Y_T' D_{1,dT}^{-1} \Gamma^{-1} D_{1,dT}^{-1} Y_T) \end{aligned} \quad (2.3.9)$$

En explicitant l'équation normale par rapport à  $\sigma_t^2$  et en remplaçant dans l'équation (2.3.9) ceci fournit l'estimateur du maximum de vraisemblance.

### Algorithme de Vecchia (1985)

#### Fonction de vraisemblance lorsque $p = 0$

Lorsque  $p = 0$ , nous aurons :

$$y_{i+d\tau} = \varepsilon_{i+d\tau} - \sum_{j=1}^q \theta_{i,j} \varepsilon_{i+d\tau-j}, \quad i = 1, \dots, d; \tau \in \mathbb{Z} \quad (2.3.10)$$

Soient

$$\begin{aligned} y_m &= (y_{m+1}, y_{m+2}, \dots, y_{dT})' \\ \varepsilon_m &= (\varepsilon_{m+1}, \varepsilon_{m+2}, \dots, \varepsilon_{dT})' \end{aligned} \quad \text{avec } 0 \leq m \leq dT - 1$$

De la représentation (2.3.10), nous aurons :

$$y_m = L_{\theta,m} \varepsilon_m - M_{\theta,m} \varepsilon_*$$

où  $\varepsilon_* = (\varepsilon_{m+1-q}, \varepsilon_{m+2-q}, \dots, \varepsilon_m)'$ ,  $L_{\theta,m}$  est une matrice  $(dT - m) \times (dT - m)$  triangulaire inférieure définie par :

$$(L_{\theta,m})_{i,j} = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ 0 & \text{si } i < j \\ -\theta_{m+i,i-j} & \text{si } i > j \end{cases}$$

et  $M_{\theta,m}$  est une matrice  $(dT - m) \times q$  définie par :

$$(M_{\theta,m})_{i,j} = \begin{cases} \theta_{m+i,q+i-j} & \text{si } i < q \\ 0 & \text{si } i > q \end{cases}$$

Vechia (1985a) a donné l'expression de la fonction de vraisemblance du vecteur  $y_m$  par :

$$\mathcal{L}(\theta, \sigma / y_m) = \left( \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \right)^{(dT-m)} |D_{m+1-q,dT}|^{-\frac{1}{2}} |A_{\theta,m}|^{-\frac{1}{2}} \times \exp \left\{ -\frac{1}{2} \left[ \hat{\varepsilon}'_* D_{m+1-q,m}^{-1} \hat{\varepsilon}_* + \hat{\varepsilon}'_m D_{m+1,dT}^{-1} \hat{\varepsilon}_m \right] \right\}, \quad (2.3.11)$$

où

$$\begin{aligned} D_{i,j} &= \text{diag} \{ \sigma_i^2, \sigma_{i+1}^2, \dots, \sigma_j^2 \}, \\ A_{\theta,m} &= D_{m+1-q,m}^{-1} + F'_{\theta,m} D_{m+1,dT}^{-1} F_{\theta,m}, \\ F_{\theta,m} &= -L_{\theta,m}^{-1} M_{\theta,m}, \\ \hat{\varepsilon}_* &= E(\varepsilon_* / y_m) \text{ et } \hat{\varepsilon}_m = E(\varepsilon_m / y_m) \end{aligned} \quad (2.3.12)$$

**Approximation de la fonction de vraisemblance pour  $p > 0$**

Pour  $p > 0$  nous ne pouvons pas calculer la fonction de vraisemblance exacte en utilisant la méthode précédente. Cependant, une transformation adéquate permet d'obtenir une bonne approximation de celle-ci.

Soit la transformation suivante :

$$w_{p+j} = y_{p+j} - \sum_{k=1}^p \theta_{p+j,k} y_{p+j-k}, \quad j = 1, 2, \dots, dT - p \quad (2.3.13)$$

et

$$w_p = (w_{p+1}, w_{p+2}, \dots, w_{dT})'$$

Cette transformation permet de passer à une série chronologique  $\{w_t, t \in \mathbb{Z}\}$  d'un modèle  $MA_d(q)$  en considérant  $y_1, y_2, \dots, y_p$  fixes. La transformation de  $y_p$  à  $w_p$  a un Jacobien égal à 1.

Comme la série  $\{w_t, t \in \mathbb{Z}\}$  est d'un modèle  $MA_d(q)$ , nous avons donc

$$-2 \log [\mathcal{L}(\phi, \theta, \sigma / w_p)] = dT \log(2\pi) + \log |D_{p+1-q, dT}| + \log |A_{\theta, p}| \\ + \hat{\varepsilon}'_* D_{p+1-q, p}^{-1} \hat{\varepsilon}_* + \hat{\varepsilon}'_p D_{p+1, dT}^{-1} \hat{\varepsilon}_p, \quad (2.3.14)$$

où  $D_{i,j}$ ,  $A_{\theta, p}$  et  $F_{\theta, p}$  sont données par (2.3.12)

$$\hat{\varepsilon}_* = (\hat{\varepsilon}_{p+1-q}, \hat{\varepsilon}_{p+2-q}, \dots, \hat{\varepsilon}_p) = A_{\theta, p}^{-1} F'_{\theta, p} D_{p+1}^{-1} L_{\theta, p}^{-1} w_p,$$

et

$$\hat{\varepsilon}_{p+j} = w_{p+j} + \sum_{k=1}^p \theta_{p+j, k} \hat{\varepsilon}_{p+j-k}, \quad j = 1, 2, \dots, dT - p,$$

Estimation du maximum de vraisemblance par l'algorithme de Vecchia

*Algorithme de Vecchia (1985)*

1<sup>ère</sup> étape : Nous commençons par des estimations initiales  $\hat{\phi}_0$  et  $\hat{\theta}_0$  obtenues par la méthode des moments.

2<sup>ème</sup> étape : Nous posons  $\hat{\varepsilon}_j = 0$ , pour  $p+1-q \leq j \leq p$  et nous calculons  $\hat{\varepsilon}_j$ ,  $p+1 \leq j \leq dT$  par la formule

$$\hat{\varepsilon}_{p+j} = w_{p+j} + \sum_{k=1}^p \theta_{p+j, k} \hat{\varepsilon}_{p+j-k},$$

3<sup>ème</sup> étape : Nous calculons les estimateurs des variances

$$\hat{\sigma}_i^2 = (T - K_2)^{-1} \sum_{n=1}^{T-K_1} \hat{\varepsilon}_{dK_1+i+d(n-1)}^2,$$

où  $\hat{\varepsilon}_j = 0$  pour  $dK_1 < j \leq p - q$ ,  $K_1$  est le plus grand entier satisfaisant  $dK_1 < p + 1 - q$  et  $K_2$  est le plus grand entier satisfaisant  $dK_2 < p + 1 + d$ .

4<sup>ème</sup> étape : Nous utilisons une routine d'optimisation non linéaire pour déterminer  $\hat{\phi}$  et  $\hat{\theta}$  minimisant  $-2 \log [\mathcal{L}(\phi, \theta, \hat{\sigma} / w_p)]$ , où  $\hat{\sigma} = (\hat{\sigma}_1^2, \hat{\sigma}_2^2, \dots, \hat{\sigma}_d^2)'$ .

5<sup>ème</sup> étape : Nous calculons  $\hat{\varepsilon}_j$ , pour  $p+1-q \leq j \leq dT$  comme suit :

$$\hat{\varepsilon}_* = (\hat{\varepsilon}_{p+1-q}, \hat{\varepsilon}_{p+2-q}, \dots, \hat{\varepsilon}_p) = A_{\theta, p}^{-1} F'_{\theta, p} D_{p+1}^{-1} L_{\theta, p}^{-1} w_p$$

et

$$\hat{\varepsilon}_{p+j} = w_{p+j} + \sum_{k=1}^p \theta_{p+j, k} \hat{\varepsilon}_{p+j-k}, \quad j = 1, 2, \dots, dT - p,$$

avec  $\sigma = \hat{\sigma}$ ,  $\phi = \hat{\phi}$  et  $\theta = \hat{\theta}$ .



6<sup>ème</sup> étape : nous répétons les étapes 3-5 jusqu'à l'obtention de précision voulue.

## 2.4 Méthode des moindres carrés

### 2.4.1 Méthode des moindres carrés conditionnelle

La méthode des moindres carrés conditionnelle dans le cas périodique consiste à choisir un estimateur des paramètres du modèle minimisant la somme des carrés. Contrairement au cas d'un *ARMA* stationnaire les membres de la somme seront pondérés par la variance de l'erreur. Nous supposons que  $I_* = \varepsilon_0$  est fixé, soit par exemple égal à 0. De (5.3.7), nous avons

$$\begin{aligned}\varepsilon_1 &= y_1 \\ \varepsilon_2 &= y_2 + \theta_2 y_1 \\ \varepsilon_3 &= y_3 + \theta_1 y_2 + \theta_1 \theta_2 y_1\end{aligned}$$

et ainsi de suite

$$\begin{aligned}\varepsilon_{1+d\tau} &= \sum_{j=0}^{2\tau} \theta_1^{[(j+1)/2]} \theta_2^{[j/2]} y_{1+2\tau-j} \\ \varepsilon_{2+d\tau} &= \sum_{j=0}^{2\tau} \theta_1^{[j/2]} \theta_2^{[(j+1)/2]} y_{2+2\tau-j}\end{aligned}$$

où  $[x]$  désigne la partie entière de  $x$ .

Nous pouvons expliciter la valeur de  $\varepsilon_t$  en fonction de  $(\theta_1, \theta_2, \sigma_1^2, \sigma_2^2)$  et de  $y$  seulement. Par la suite, sachant que  $I_* = 0$ , la somme des carrés s'écrit comme suit :

$$\begin{aligned}S_*(\theta_1, \theta_2, \sigma_1^2, \sigma_2^2) &= \sum_{t=1}^{dT} \frac{\varepsilon_t^2}{\sigma_t^2} = \sum_{i=1}^2 \sum_{\tau=0}^{T-1} \frac{\varepsilon_{i+d\tau}^2(\theta_1, \theta_2, \sigma_1^2, \sigma_2^2)}{\sigma_{i+d\tau}^2} \\ &= \sum_{\tau=0}^{T-1} \frac{\varepsilon_{1+d\tau}^2(\theta_1, \theta_2, \sigma_1^2, \sigma_2^2)}{\sigma_1^2} + \sum_{\tau=0}^{T-1} \frac{\varepsilon_{2+d\tau}^2(\theta_1, \theta_2, \sigma_1^2, \sigma_2^2)}{\sigma_2^2}\end{aligned}$$

qui est égale à

$$\sum_{\tau=0}^{T-1} \frac{\left(\sum_{j=0}^{2\tau} \theta_1^{[(j+1)/2]} \theta_2^{[j/2]} y_{1+2\tau-j}\right)^2}{\sigma_1^2} + \sum_{\tau=0}^{T-1} \frac{\left(\sum_{j=0}^{2\tau} \theta_1^{[j/2]} \theta_2^{[(j+1)/2]} y_{2+2\tau-j}\right)^2}{\sigma_2^2} \quad (2.4.1)$$

Nous pouvons remarquer que la fonction  $S_*$  n'est pas une fonction quadratique en  $(\theta_1, \theta_2, \sigma_1^2, \sigma_2^2)$ .

L'équation normale permettant d'estimer  $(\theta_1, \theta_2, \sigma_1^2, \sigma_2^2)$  n'est donc pas linéaire.

Notons qu'en pratique on ne peut pas toujours évaluer la fonction  $S_*$  explicitement en fonction des paramètres et des observations. Mais la valeur de l'erreur  $\varepsilon_t$  sera déduite à partir d'un schéma récursif.

## 2.4.2 Méthode des moindres carrés non conditionnelle

La méthode des moindres carrés non conditionnelle dans le cas périodique se diffère de la première par le fait que nous devons déterminer une valeur de  $I_* = \varepsilon_0$  meilleur que 0. Si le modèle (1.2.3) est correct, on peut écrire également

$$\begin{cases} y_{1+2\tau} = \varepsilon'_{1+2\tau} - \theta_1 \varepsilon'_{2+2\tau} \\ y_{2+2\tau} = \varepsilon'_{2+2\tau} - \theta_2 \varepsilon'_{3+2\tau} \end{cases} \quad (2.4.2)$$

où les  $\varepsilon'_t$  sont les innovations en temps inversé. En supposant que  $\varepsilon'_{k+2T} = 0$  pour  $k \geq 1$ , nous déterminons successivement  $\varepsilon'_{2T} = y_{2T}$  puis  $\varepsilon'_{2T-1} = y_{2T-1} + \theta_1 y_{2T}$ .

De façon similaire au (2.4.1) nous obtenons

$$\begin{aligned} \varepsilon'_{2T-2} &= y_{2T-2} + \theta_2 y_{2T-1} + \theta_1 \theta_2 y_{2T} \\ &\vdots \\ \varepsilon'_1 &= \sum_{j=1}^{2T} \theta_1^{[j/2]} \theta_2^{[(j-1)/2]} y_j \end{aligned}$$

ce qui fournit finalement la prédiction rétrospective

$$\hat{y}_0 = -\theta_2 \varepsilon'_1 = \varepsilon'_1 = -\sum_{j=1}^{2T} \theta_1^{[j/2]} \theta_2^{[(j+1)/2]} y_j$$

En prenant maintenant  $\varepsilon_0 = \hat{y}_0$  nous pouvons obtenir les  $\varepsilon_t$  par (2.5.20). Nous déduisons alors la somme des carrés non conditionnelle comme suit

$$\begin{aligned} S(\theta_1, \theta_2, \sigma_1^2, \sigma_2^2) &= \sum_{t=1}^{dT} \frac{\varepsilon_t^2}{\sigma_t^2} = \sum_{\tau=0}^{T-1} \sum_{j=0}^{2\tau} \frac{\theta_1^{[(j+1)/2]} \theta_2^{[j/2]} y_{1+2\tau-j}}{\sigma_1^2} \\ &+ \sum_{\tau=0}^{T-1} \sum_{j=0}^{2\tau} \frac{\theta_1^{[j/2]} \theta_2^{[(j+1)/2]} y_{2+2\tau-j}}{\sigma_2^2} - \sum_{t=1}^{dT} \theta_1^{[j/2]} \theta_2^{[(j+1)/2]} y_j. \end{aligned} \quad (2.4.3)$$

Nous présentons (sans détail), dans ce qui suit, deux algorithmes d'estimation *en-ligne*. Le

premier c'est l'algorithme des moindres carrés récurrents périodique (PRLS) relatif aux modèles autorégressifs purs. Le second qui n'est autre qu'une généralisation du premier, aux cas des modèles autorégressifs moyennes mobiles, est l'algorithme *Periodic Recursive Maximum Likelihood* (PRML).

### 2.4.3 Estimation *en-ligne* des modèles *PARMA*

Algorithme des moindres carrés récurrents périodique (PRLS) Bentarzi et Aknouche (2002)

Cet algorithme est dérivé, par Bentarzi et Aknouche (2002), de la méthode usuelle des moindres carrés, mais sous une forme récurrente.

Considérons le modèle causal autorégressif  $d$ -périodique d'ordre constant  $p$  suivant :

$$y_{i+d\tau} = \sum_{j=1}^p \phi_{i,j} y_{i+d\tau-j} + \varepsilon_{i+d\tau}, \quad i = 1, \dots, d, \quad \tau \in \mathbb{Z} \quad (2.4.4)$$

où  $\{\varepsilon_t, t \in \mathbb{Z}\}$  est un bruit blanc périodique de variance  $\sigma_t^2$ . Soit  $\beta = (\phi'_1, \phi'_2, \dots, \phi'_d)'$  le vecteur de dimension  $pd \times 1$  des paramètres autorégressifs, où  $\phi_i = (\phi_{i,1}, \phi_{i,2}, \dots, \phi_{i,p})'$ ,  $i = 1, 2, \dots, d$ .

Nous définissons le vecteur  $\varphi_{i+d\tau}$  de dimension  $pd \times 1$  comme suit :

$$\varphi_{i+d\tau}(j) \begin{cases} y_{i+d\tau-(j-(i-1)p)} & \text{si } j = (i-1)p + 1, \dots, ip \\ 0 & \text{si non} \end{cases}$$

Les équations récurrentes de l'algorithme PRLS pour estimer les paramètres d'un modèle AR  $d$ -périodique sont données par Bentarzi et Aknouche comme suit :

*Algorithme de Bentarzi et Aknouche (2002)*

$$\begin{aligned} \hat{\varepsilon}_{i+d\tau} &= y_{i+d\tau} - \hat{\beta}'_{i+d\tau-1} \varphi_{i+d\tau}, \\ \hat{\sigma}_j^{2(i,0)} &= \begin{cases} \hat{\varepsilon}_j^2 & \text{si } 1 \leq j \leq i \\ 0 & \text{si } j \geq i \end{cases} \\ \hat{\sigma}_j^{2(i,\tau)} &= \begin{cases} \frac{\tau}{\tau+1} \hat{\sigma}_j^{2(i,\tau-1)} + \frac{\tau}{\tau+1} \hat{\varepsilon}_{j+d\tau}^2 & \text{si } 1 \leq j \leq i \\ \frac{\tau-1}{\tau} \hat{\sigma}_j^{2(i,\tau-1)} + \frac{1}{\tau} \hat{\varepsilon}_{j+d(\tau-1)}^2 & \text{si } j \geq i \end{cases} \\ L_{i+d\tau} &= (P_{i+d\tau-1} \varphi_{i+d\tau}) / (\hat{\sigma}_i^2 + \varphi'_{i+d\tau} L_{i+d\tau-1} \varphi_{i+d\tau}), \\ \hat{\beta}_{i+d\tau} &= \hat{\beta}_{i+d\tau-1} + L_{i+d\tau} \hat{\varepsilon}_{i+d\tau}, \\ P_{i+d\tau} &= P_{i+d\tau-1} - L_{i+d\tau} \varphi'_{i+d\tau} P_{i+d\tau-1} \end{aligned}$$

## Algorithme Periodic Recursive Maximum Likelihood (PRML)

Cet algorithme n'est qu'une généralisation de l'algorithme PRLS, aux cas des modèles autorégressifs moyennes mobiles.

Considérons le modèle causal autorégressif moyenne mobile  $d$ -périodique d'ordre constant  $(p, q)$  suivant :

$$y_{i+d\tau} = \sum_{j=1}^p \phi_{i,j} y_{i+d\tau-j} + \varepsilon_{i+d\tau} - \sum_{j=1}^q \theta_{i,j} \varepsilon_{i+d\tau-j}, \quad i = 1, \dots, d; \tau \in \mathbb{Z} \quad (2.4.5)$$

où  $\{\varepsilon_t, t \in \mathbb{Z}\}$  est un bruit blanc périodique de variance  $\sigma_i^2$ .

Soit  $\beta = (\phi'_1, \theta'_1, \phi'_2, \theta'_2, \dots, \phi'_d, \theta'_d)'$  le vecteur de dimension  $d(p+q) \times 1$  des paramètres, où  $\phi_i = (\phi_{i,1}, \phi_{i,2}, \dots, \phi_{i,p})'$ ,  $\theta_i = (\theta_{i,1}, \theta_{i,2}, \dots, \theta_{i,q})'$ ,  $i = 1, 2, \dots, d$ . Nous définissons le vecteur  $\varphi_{i+d\tau}$  de dimension  $d(p+q) \times 1$  comme suit :

$$\varphi_{i+d\tau}(j) \begin{cases} y_{i+d\tau-(j-(i-1)(p+q))} & \text{si } j = (i-1)(p+q) + 1, \dots, i(p+q) - q \\ -\varepsilon_{i+d\tau-(j-((i-1)(p+q)+p))} & \text{si } j = (i-1)(p+q) + 1 + p, \dots, i(p+q) \\ 0 & \text{si non} \end{cases}$$

Les equations récursives de l'algorithme PRML pour estimer les paramètres d'un modèle ARMA  $d$ -périodique sont données par Bentarzi et Aknouche (2003) comme suit :

*Algorithme de Bentarzi et Aknouche (2003)*

$$\begin{aligned} \hat{\varepsilon}_{i+d\tau} &= y_{i+d\tau} - \hat{\beta}'_{i+d\tau-1} \varphi_{i+d\tau}, \\ \hat{\sigma}_j^{2(i,0)} &= \begin{cases} \hat{\varepsilon}_j^2 & \text{si } 1 \leq j \leq i \\ 0 & \text{si } j \geq i \end{cases}, \\ \hat{\sigma}_j^{2(i,\tau)} &= \begin{cases} \frac{\tau}{\tau+1} \hat{\sigma}_j^{2(i,\tau-1)} + \frac{\tau}{\tau+1} \hat{\varepsilon}_{j+d\tau}^2 & \text{si } 1 \leq j \leq i \\ \frac{\tau-1}{\tau} \hat{\sigma}_j^{2(i,\tau-1)} + \frac{1}{\tau} \hat{\varepsilon}_{j+d(\tau-1)}^2 & \text{si } j \geq i \end{cases}, \\ L_{i+d\tau} &= (P_{i+d\tau-1} \psi_{i+d\tau}) / \left( \hat{\sigma}_i^2 + \psi'_{i+d\tau} L_{i+d\tau-1} \psi_{i+d\tau} \right), \\ \hat{\beta}_{i+d\tau} &= \hat{\beta}_{i+d\tau-1} + L_{i+d\tau} \hat{\varepsilon}_{i+d\tau}, \\ \psi_{i+d\tau+1} &= \sum_{k=1}^q \hat{\theta}_{i,k}^{(i+d\tau-1)} \psi_{i+d\tau-k+1} + \varphi_{i+d\tau}, \\ P_{i+d\tau} &= P_{i+d\tau-1} - L_{i+d\tau} \psi'_{i+d\tau} P_{i+d\tau-1} \end{aligned}$$

où



$$\widehat{\beta}_{i+d\tau} = \left( \widehat{\phi}_{1,1}^{(i+d\tau)}, \dots, \widehat{\phi}_{1,p}^{(i+d\tau)}, \widehat{\theta}_{1,1}^{(i+d\tau)}, \dots, \widehat{\theta}_{1,q}^{(i+d\tau)}, \dots, \widehat{\phi}_{d,1}^{(i+d\tau)}, \dots, \widehat{\phi}_{d,p}^{(i+d\tau)}, \widehat{\theta}_{d,1}^{(i+d\tau)}, \dots, \widehat{\theta}_{d,q}^{(i+d\tau)} \right).$$

## 2.5 Estimation de la fonction d'autocorrélation d'un processus périodiquement corrélé

Soit  $\{y_t, t \in \mathbb{Z}\}$  un processus périodiquement corrélé de période  $d$ , de moyenne  $\mu_t$  et de fonction d'autocovariance  $\gamma(\cdot, \cdot)$   $d$ -périodique. Pour tout entier  $t \in \mathbb{Z}$ ,  $i = 1, \dots, d$  et  $\tau \in \mathbb{Z}$  tel que  $t = i + d\tau$ , soit  $\gamma_h^{(i)}$  sa fonction d'autocovariance pour l'horizon  $h$  et relative à la  $i^{\text{ème}}$  période.

L'estimation de  $\mu_t$ ,  $\{\gamma_h^{(i)}, i = 1, \dots, d\}$  et de fonction d'autocorrélation relative à la  $i^{\text{ème}}$  période  $\{\rho_h^{(i)}, i = 1, \dots, d\}$  à partir des observations  $y_1, \dots, y_{dT}$ , joue donc un rôle très important dans les problèmes de l'inférence et en particulier dans le problème de l'identification du modèle. Dans cette section, nous étudierons l'estimation de la moyenne, de la fonction d'autocovariance  $\gamma_h^{(i)}$  et la fonction d'autocorrélation  $\rho_h^{(i)}$ . Puis nous examinerons les propriétés asymptotiques des estimateurs obtenus.

### 2.5.1 Estimation de la moyenne

Soit  $y_1, \dots, y_{dT}$  une  $dT$ -réalisation d'un processus  $\{y_t, t \in \mathbb{Z}\}$  périodiquement corrélé  $d$ -périodique. L'estimateur le plus simple et le plus naturel de la moyenne  $\mu_t$  de  $y_t$  est la moyenne de l'échantillon

$$\bar{y} = \frac{1}{dT} \sum_{t=1}^{dT} y_t = \frac{1}{dT} \sum_{i=1}^d \sum_{\tau=0}^{T-1} y_{i+d\tau}, \quad (2.5.1)$$

qui est un estimateur sans biais. On remarque que la moyenne de la  $i^{\text{ème}}$  période  $\mu_i$  est estimé par

$$\bar{y}_i = \frac{1}{T} \sum_{\tau=0}^{T-1} y_{i+d\tau}, \quad (2.5.2)$$

#### Proposition (2.5.1)

Si  $\{y_t, t \in \mathbb{Z}\}$  est un processus périodiquement corrélé  $d$ -périodique de moyenne  $\mu_t$  et de fonction d'autocovariances relative à la  $i^{\text{ème}}$  période  $\{\gamma_h^{(i)}, i = 1, \dots, d\}$ , alors,

$$E[(\bar{y}_i - \mu_i)^2] \xrightarrow{T \rightarrow \infty} 0 \quad \text{si } \gamma_T^{(i)} \xrightarrow{T \rightarrow \infty} 0, i = 1, \dots, d$$

et

$$T \times E[(\bar{y}_i - \mu_i)^2] \xrightarrow{T \rightarrow \infty} \sum_{h=-\infty}^{\infty} \gamma_h^{(i)} \quad \text{si } \sum_{h=-\infty}^{\infty} |\gamma_h^{(i)}| < \infty, i = 1, \dots, d,$$

**Proposition (2.5.2)**

On suppose que le processus  $\{y_t, t \in Z\}$  est causal. Alors  $\bar{y}_i$  est asymptotiquement normalement distribuée avec une moyenne  $\mu_i$  et de variance  $\frac{1}{N} \sum_{h=-\infty}^{\infty} \gamma_h^{(i)}$ .

**2.5.2 Estimation de la fonction d'autocorrélation**

Soit  $y_1, \dots, y_{dT}$  une  $dT$ -réalisation d'un processus périodiquement corrélé,  $d$ -périodique. Pour plus de simplicité, nous supposons dans tout le reste que  $d = 2$ . L'estimateur naturel de la fonction d'autocovariance  $\gamma_h^{(i)} = E[(y_{i+d\tau} - \mu_i)(y_{i+d\tau-h} - \mu_{i-h})]$  est

$$\hat{\gamma}_h^{(i)} = \frac{1}{T} \sum_{\tau=0}^{T-1} (y_{i+d\tau} - \bar{y})(y_{i+d\tau-h} - \bar{y}), \tag{2.5.3}$$

où  $y_{i+d\tau-l} = 0$  pour  $i + d\tau - l < 1$  ou pour  $i + d\tau - l > dT$ .

nous remarquons que

$$cov(y_{i+d\tau}, y_{j+d\tau-h}) = cov(y_{i+d\tau}, y_{i+d\tau-(i-j+h)}) = \gamma_{i-j+h}^{(i)}$$

Cette fonction d'autocovariance peut être estimée par :

$$\hat{\gamma}_{i-j+h}^{(i)} = \frac{1}{T} \sum_{\tau=0}^{T-1} (y_{i+d\tau} - \bar{y})(y_{j+d\tau-h} - \bar{y}), \tag{2.5.4}$$

Si  $i = j$ , (2.5.4) est réduit à  $\hat{\gamma}_h^{(i)}$ .

Nous estimons également la fonction d'autocorrélation entre  $y_{i+d\tau}$  et  $y_{j+d\tau-h}$  par :

$$\hat{\rho}_{i-j+h}^{(i)} = \hat{\gamma}_{i-j+h}^{(i)} / \hat{\gamma}_0^{(i)}, h \in Z. \tag{2.5.5}$$

Nous montrons d'abord la consistance faible de l'estimateur  $\hat{\gamma}_h^{(i)}$  (et par conséquent  $\hat{\rho}_h^{(i)}$ ) pour des moyennes mobiles périodique d'ordre infini. Puis nous calculons la distribution asymptotique de  $\hat{\gamma}_h^{(i)}$  et de  $\hat{\rho}_h^{(i)}$  dans quelques cas spéciaux.

### ***Théorème (2.5.1)***

Soit  $\{y_t, t \in \mathbb{Z}\}$  un processus 2-périodique causal, c'est-à-dire  $y_t = \mu_t + \sum_{k=0}^{+\infty} \psi_{t,k} \varepsilon_{t-k}$  où  $\{\varepsilon_t, t \in \mathbb{Z}\}$  est un bruit blanc périodique de variance  $\sigma_\varepsilon^2$  et  $\{\psi_{t,k}, t \in \mathbb{Z}; k \geq 0\}$  est une suite telle que  $\sum_{k=0}^{\infty} |\psi_{t,k}| < +\infty, \forall t \in \mathbb{Z}$ .

Alors, pour tout  $h$  fixe  $h \geq 0$  et  $i = 1, 2$

$$\widehat{\gamma}_h^{(i)} \xrightarrow{\text{Pr}} \gamma_h^{(i)} \quad \text{lorsque } T \rightarrow \infty \quad \text{et} \quad \widehat{\rho}_h^{(i)} \xrightarrow{\text{Pr}} \rho_h^{(i)} \quad \text{lorsque } T \rightarrow \infty.$$

En général, la dérivation de la distribution asymptotique de la fonction d'autocorrélation de l'échantillon dans le cas  $d$ -périodique est tout à fait compliquée même pour des moyennes mobiles  $d$ -périodique. Un cas spécial important se présente lorsque le processus  $y_t$  est un processus causal autorégressif gaussien  $d$ -périodique. La distribution asymptotique de  $\widehat{\gamma}_h^{(i)}$  pour un tel processus est donnée dans le chapitre 4.

## **2.6 Applications numériques**

### **2.6.1 Introduction**

Des simulations intensives ont été réalisées, pour étudier l'estimation des paramètres, d'un modèle autorégressif périodique par la méthode des moindres carrés sous les conditions de normalité.

Pour évaluer le comportement et le gain en efficacité des résultats, obtenus nous avons calculer la moyenne de l'estimateur de moindre carré (*EMC*) et le critère d'efficacité *RMSE* (Root Mean Square Error) qui est défini par :

$$RMSE = \sqrt{(Biais)^2 + Variance} \quad (2.6.1)$$

qui spécifie la précision et la stabilité d'un estimateur.

Ainsi la valeur de la moyenne et le *RMSE* sont calculés à partir de la simulation de 1000 échantillons pour les diverses valeurs de la taille d'échantillon et pour différentes valeurs des paramètres. Nous utiliserons ces résultats dans le chapitre suivant pour évaluer le gain en efficacité de la méthode d'estimation d'un processus multivarié stationnaire proposée par Newton(1982).

## 2.6.2 Résultats numériques

Nous génèrons successivement  $T$  observations à partir des modèles suivants :

### Modèle 1

Modèle autorégressif 2- périodique d'ordre 1 c'est-à-dire,  $PAR_2(1)$  simulé d'après l'équation

:

$$\begin{cases} y_{2\tau+1} = \phi_{1,1}y_{2\tau} + \varepsilon_{2\tau+1} \\ y_{2\tau+2} = \phi_{1,2}y_{2\tau+1} + \varepsilon_{2\tau+2} \end{cases} \quad \varepsilon_t \sim \mathcal{N}(0, \sigma_t^2)$$

Valeurs de paramètres

$$\begin{cases} \phi_{1,1} = 0.9, \phi_{1,2} = 0.7 \\ \sigma_1^2 = 1, \sigma_2^2 = 1.2 \end{cases},$$

### Modèle 2

Modèle autorégressif 4- périodique d'ordre 1, c'est-à-dire,  $PAR_4(1)$  simulé d'après l'équation :

$$\begin{cases} y_{4\tau+1} = \phi_{1,1}y_{4\tau} + \varepsilon_{4\tau+1} \\ y_{4\tau+2} = \phi_{1,2}y_{4\tau+1} + \varepsilon_{4\tau+2} \\ y_{4\tau+3} = \phi_{1,3}y_{4\tau+2} + \varepsilon_{4\tau+3} \\ y_{4\tau+4} = \phi_{1,4}y_{4\tau+3} + \varepsilon_{4\tau+4} \end{cases} \quad \varepsilon_t \sim \mathcal{N}(0, \sigma_t^2)$$

Valeurs de paramètres

$$\begin{cases} \phi_{11} = 0.4, \phi_{12} = -0.6, \phi_{13} = 0.5, \phi_{14} = 0.7 \\ \sigma_1^2 = 1, \sigma_2^2 = 1.2, \sigma_3^2 = 0.8, \sigma_4^2 = 0.9 \end{cases}$$

### Modèle 3

Modèle autorégressif 2- périodique d'ordre 2, c'est-à-dire,  $PAR_2(2)$  simulé d'après l'équation

:

$$\begin{cases} y_{2\tau+1} = \phi_{1,1}y_{2\tau} + \phi_{2,1}y_{2\tau-1} + \varepsilon_{2\tau+1} \\ y_{2\tau+2} = \phi_{1,2}y_{2\tau+1} + \phi_{2,2}y_{2\tau} + \varepsilon_{2\tau+2} \end{cases} \quad \varepsilon_t \sim \mathcal{N}(0, \sigma_t^2)$$

Valeurs de paramètres



$$\begin{cases} \phi_{1,1} = 0.5, \phi_{2,1} = 0.7, \phi_{1,2} = 0.4, \phi_{2,2} = 0.3 \\ \sigma_1^2 = 0.8, \sigma_2^2 = 0.9 \end{cases}$$

#### Modèle 4

Modèle autorégressif 2- périodique d'ordre  $p_1 = 1, p_2 = 2, PAR_2(2)$  simulé d'après l'équation

$$\begin{cases} y_{2\tau+1} = \phi_{11}y_{2\tau} + \varepsilon_{2\tau+1} \\ y_{2\tau+2} = \phi_{21}y_{2\tau+1} + \phi_{22}y_{2\tau} + \varepsilon_{2\tau+2} \end{cases} \quad \varepsilon_t \sim \mathcal{N}(0, \sigma_t^2)$$

Valeurs de paramètres

$$\begin{cases} \phi_{11} = 0.7, \phi_{21} = -0.6, \phi_{22} = 0.4 \\ \sigma_1^2 = 1, \sigma_2^2 = 1.2 \end{cases}$$

#### Modèle 5

Modèle autorégressif 4- périodique d'ordre  $p_1 = 2, p_2 = 1, p_3 = 3, p_4 = 2, PAR_4(3)$  simulé d'après l'équation :

$$\begin{cases} y_{4\tau+1} = \phi_{11}y_{4\tau} + \phi_{12}y_{4\tau-1} + \varepsilon_{4\tau+1} \\ y_{4\tau+2} = \phi_{21}y_{4\tau+1} + \varepsilon_{4\tau+2} \\ y_{4\tau+3} = \phi_{31}y_{4\tau+2} + \phi_{32}y_{4\tau+1} + \phi_{33}y_{4\tau} + \varepsilon_{4\tau+3} \\ y_{4\tau+4} = \phi_{41}y_{4\tau+3} + \phi_{42}y_{4\tau+2} + \varepsilon_{4\tau+4} \end{cases} \quad * \varepsilon_t \sim \mathcal{N}(0, \sigma_t^2)$$

Valeurs de paramètres

$$\begin{cases} \phi_{11} = 0.3, \phi_{12} = 0.7, \phi_{21} = 0.8, \phi_{31} = 1.4, \phi_{32} = 0.4, \phi_{3,3} = 0.6, \phi_{41} = -0.6, \phi_{42} = 0.4 \\ \sigma_1^2 = 1, \sigma_2^2 = 1.2, \sigma_3^2 = 0.8, \sigma_4^2 = 0.9 \end{cases}$$

#### Modèle 6

Modèle autorégressif 5 - périodique d'ordre  $p_1 = 1, p_2 = 3, p_3 = 2, p_4 = 1, p_5 = 2, PAR_4(3)$  simulé d'après l'équation :

$$\begin{cases} y_{5\tau+1} = \phi_{11}y_{5\tau} + \varepsilon_{5\tau+1} \\ y_{5\tau+2} = \phi_{21}y_{5\tau+1} + \phi_{22}y_{5\tau} + \phi_{23}y_{5\tau-1} + \varepsilon_{5\tau+2} \\ y_{5\tau+3} = \phi_{31}y_{5\tau+2} + \phi_{32}y_{5\tau+1} + \varepsilon_{5\tau+3} \\ y_{5\tau+4} = \phi_{41}y_{5\tau+3} + \varepsilon_{5\tau+4} \\ y_{5\tau+5} = \phi_{51}y_{5\tau+4} + \phi_{52}y_{5\tau+3} + \varepsilon_{5\tau+5} \end{cases} \quad \varepsilon_t \sim \mathcal{N}(0, \sigma_t^2)$$

Valeurs de paramètres

$$\left\{ \begin{array}{l} \phi_{11} = 0.3, \phi_{21} = 0.5, \phi_{22} = 0.2, \phi_{23} = 0.3, \phi_{31} = 0.4, \phi_{32} = 0.5, \phi_{41} = 0.7, \phi_{51} = 0.3, \phi_{52} = 0.4 \\ \sigma_1^2 = 1, \sigma_2^2 = 1.2, \sigma_3^2 = 0.9, \sigma_4^2 = 0.8, \sigma_5^2 = 1 \end{array} \right.$$

### Représentation des résultats

Les estimations des moindres carrés de chaque modèle sont données pour les diverses valeurs de paramètres et les diverses tailles de l'échantillon, les résultats sont présentés comme suit :

Les tableaux (2.1),..., (2.6) représentent les résultats de simulation du modèle 1, modèle 2, modèle 3, modèle 4, modèle 5 et modèle 6 respectivement à partir de 1000 réalisations de diverses tailles de l'échantillon et diverses valeurs de paramètres.

Les valeurs de *RMSE* calculées de tous les paramètres de chaque modèle sont représentées graphiquement de la manière suivante :

La figure (2, *i*) : représente le graphe des valeurs de *RMSE* calculées pour le modèle 1, modèle 2, modèle 3, modèle 4, modèle 5 et modèle 6 où  $i = 1, 2, 3, \dots, 6$

Paramètres		$\hat{\phi}_{11}$	$\hat{\phi}_{12}$	$\hat{\sigma}_1^2$	$\hat{\sigma}_2^2$
T=40	Moyenne	0.8497	0.7001	1.0045	1.1949
	RMSE	0.1411	0.1423	0.3206	0.3926
T=80	Moyenne	0.8777	0.6795	1.0069	0.1718
	RMSE	0.1079	0.1040	0.2345	0.2571
T=120	Moyenne	0.8992	0.6950	0.9887	1.2073
	RMSE	0.0833	0.0755	0.1724	0.2569
T=160	Moyenne	0.8924	0.6914	1.0070	1.2095
	RMSE	0.0693	0.0647	0.1604	0.1792
T=200	Moyenne	0.8911	0.6997	1.0240	1.2013
	RMSE	0.0627	0.0642	0.1558	0.1682
T=240	Moyenne	0.8943	0.6882	0.9920	1.2256
	RMSE	0.0623	0.0604	0.1319	0.1652
T=280	Moyenne	0.9020	0.6990	1.0108	1.2173
	RMSE	0.0515	0.0500	0.1240	0.1477
T=320	Moyenne	0.8979	0.6963	0.9830	1.2013
	RMSE	0.0464	0.0486	0.1011	0.1315
T=360	Moyenne	0.8986	0.6945	1.0200	1.1820
	RMSE	0.0415	0.0466	0.1001	0.1132
T=400	Moyenne	0.8954	0.6999	1.0115	1.2011
	RMSE	0.0413	0.0445	0.0953	0.1087

Tableau 2-1

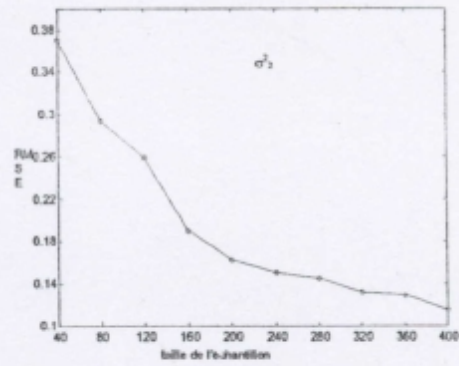
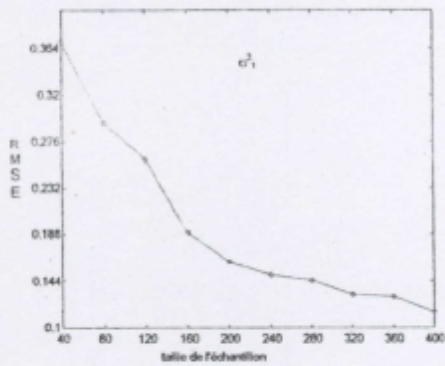
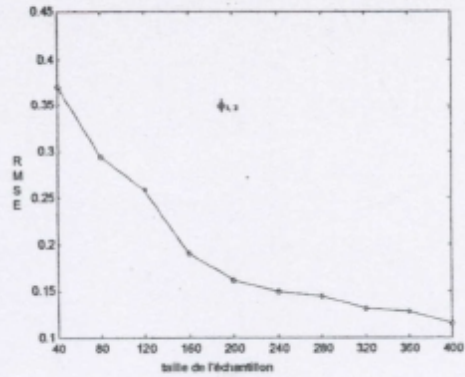
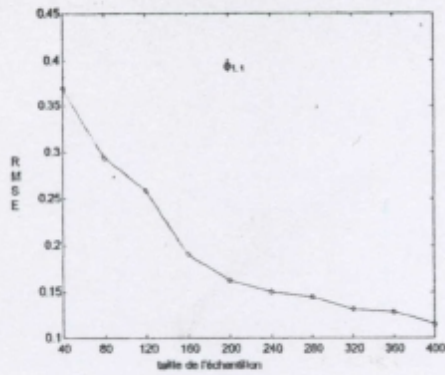


Figure (2-1) : Les valeurs de RMSE calculées pour le modèle 1

Paramètres		$\hat{\phi}_{11}$	$\hat{\phi}_{12}$	$\hat{\phi}_{13}$	$\hat{\phi}_{14}$
T=40	<i>Moyenne</i>	0.4261	-0.6226	0.5147	0.6487
	<i>RMSE</i>	0.3167	0.3823	0.2630	0.3298
T=80	<i>Moyenne</i>	0.3998	-0.5939	0.5053	0.6940
	<i>RMSE</i>	0.2012	0.2254	0.1392	0.2063
T=120	<i>Moyenne</i>	0.3964	-0.5796	0.4888	0.6777
	<i>RMSE</i>	0.1604	0.1627	0.1250	0.1806
T=160	<i>Moyenne</i>	0.3921	-0.5856	0.4925	0.7137
	<i>RMSE</i>	0.1355	0.1489	0.1106	0.1342
T= 200	<i>Moyenne</i>	0.4017	-0.5802	0.5135	0.6970
	<i>RMSE</i>	0.1215	0.1226	0.0970	0.1202
T= 240	<i>Moyenne</i>	0.4220	-0.6098	0.5068	0.6831
	<i>RMSE</i>	0.1090	0.1173	0.0909	0.1149
T= 280	<i>Moyenne</i>	0.3913	-0.5942	0.5196	0.7067
	<i>REMSE</i>	0.0986	0.1123	0.0853	0.1058
T= 320	<i>Moyenne</i>	0.3954	-0.6167	0.5089	0.7033
	<i>RMSE</i>	0.0970	0.0985	0.0826	0.0931
T= 360	<i>Moyenne</i>	0.3854	-0.6001	0.4893	0.6905
	<i>RMSE</i>	0.0889	0.0785	0.0779	0.0889
T= 400	<i>Moyenne</i>	0.4141	-0.5803	0.5032	0.6982
	<i>RMSE</i>	0.0815	0.0686	0.0733	0.0781

Tableau 2-2 a

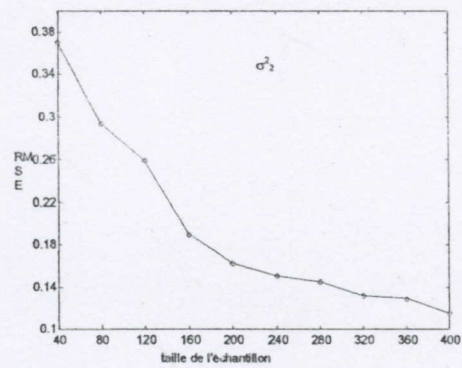
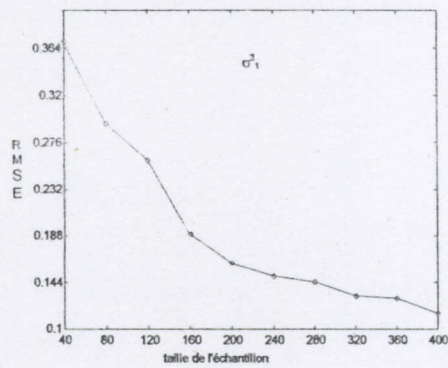
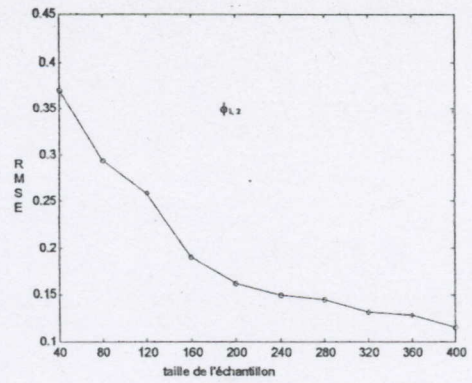
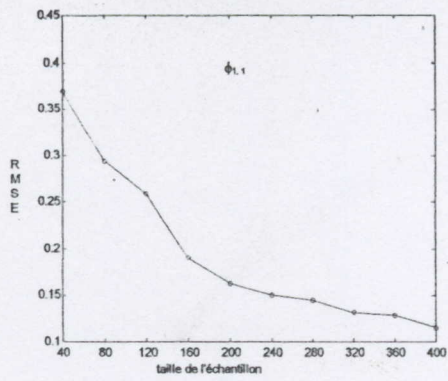


Figure (2-1) : Les valeurs de RMSE calculées pour le modèle 1

Paramètres		$\hat{\phi}_{11}$	$\hat{\phi}_{12}$	$\hat{\phi}_{13}$	$\hat{\phi}_{14}$
T=40	<i>Moyenne</i>	0.4261	-0.6226	0.5147	0.6487
	<i>RMSE</i>	0.3167	0.3823	0.2630	0.3298
T=80	<i>Moyenne</i>	0.3998	-0.5939	0.5053	0.6940
	<i>RMSE</i>	0.2012	0.2254	0.1392	0.2063
T=120	<i>Moyenne</i>	0.3964	-0.5796	0.4888	0.6777
	<i>RMSE</i>	0.1604	0.1627	0.1250	0.1806
T=160	<i>Moyenne</i>	0.3921	-0.5856	0.4925	0.7137
	<i>RMSE</i>	0.1355	0.1489	0.1106	0.1342
T= 200	<i>Moyenne</i>	0.4017	-0.5802	0.5135	0.6970
	<i>RMSE</i>	0.1215	0.1226	0.0970	0.1202
T= 240	<i>Moyenne</i>	0.4220	-0.6098	0.5068	0.6831
	<i>RMSE</i>	0.1090	0.1173	0.0909	0.1149
T= 280	<i>Moyenne</i>	0.3913	-0.5942	0.5196	0.7067
	<i>REMSE</i>	0.0986	0.1123	0.0853	0.1058
T= 320	<i>Moyenne</i>	0.3954	-0.6167	0.5089	0.7033
	<i>RMSE</i>	0.0970	0.0985	0.0826	0.0931
T= 360	<i>Moyenne</i>	0.3854	-0.6001	0.4893	0.6905
	<i>RMSE</i>	0.0889	0.0785	0.0779	0.0889
T= 400	<i>Moyenne</i>	0.4141	-0.5803	0.5032	0.6982
	<i>RMSE</i>	0.0815	0.0686	0.0733	0.0781

Tableau 2-2 a

Paramètres		$\hat{\sigma}_1^2$	$\hat{\sigma}_2^2$	$\hat{\sigma}_3^2$	$\hat{\sigma}_4^2$
T=40	<i>Moyenne</i>	0.9753	1.1804	0.8319	0.9264
	<i>RMSE</i>	0.4767	0.5512	0.3807	0.3721
T=80	<i>Moyenne</i>	1.0327	1.2149	0.8107	0.9501
	<i>RMSE</i>	0.3002	0.3658	0.2652	0.2917
T=120	<i>Moyenne</i>	0.9991	1.1771	0.8273	0.8829
	<i>RMSE</i>	0.2505	0.2897	0.2223	0.2381
T=160	<i>Moyenne</i>	0.9997	1.1819	0.8324	0.9135
	<i>RMSE</i>	0.2308	0.2551	0.1926	0.2124
T= 200	<i>Moyenne</i>	1.0263	1.1906	0.8346	0.8957
	<i>RMSE</i>	0.2012	0.2317	0.1704	0.2052
T=240	<i>Moyenne</i>	0.9892	1.1956	0.8015	0.9220
	<i>RMSE</i>	0.1897	0.2121	0.1428	0.1914
T=280	<i>Moyenne</i>	0.9886	1.1916	0.7823	0.8972
	<i>RMSE</i>	0.1575	0.1161	0.1338	0.1660
T=320	<i>Moyenne</i>	0.9954	1.2042	0.8171	0.9045
	<i>RMSE</i>	0.1432	0.1143	0.1229	0.1432
T=360	<i>Moyenne</i>	0.9957	1.2004	0.8113	0.8962
	<i>RMSE</i>	0.1304	0.1070	0.1145	0.1300
T=400	<i>Moyenne</i>	1.0021	1.1857	0.8108	0.9200
	<i>RMSE</i>	0.1212	0.0922	0.1001	0.1215

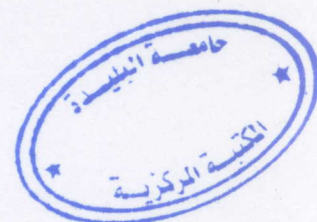


Tableau 2-2 b



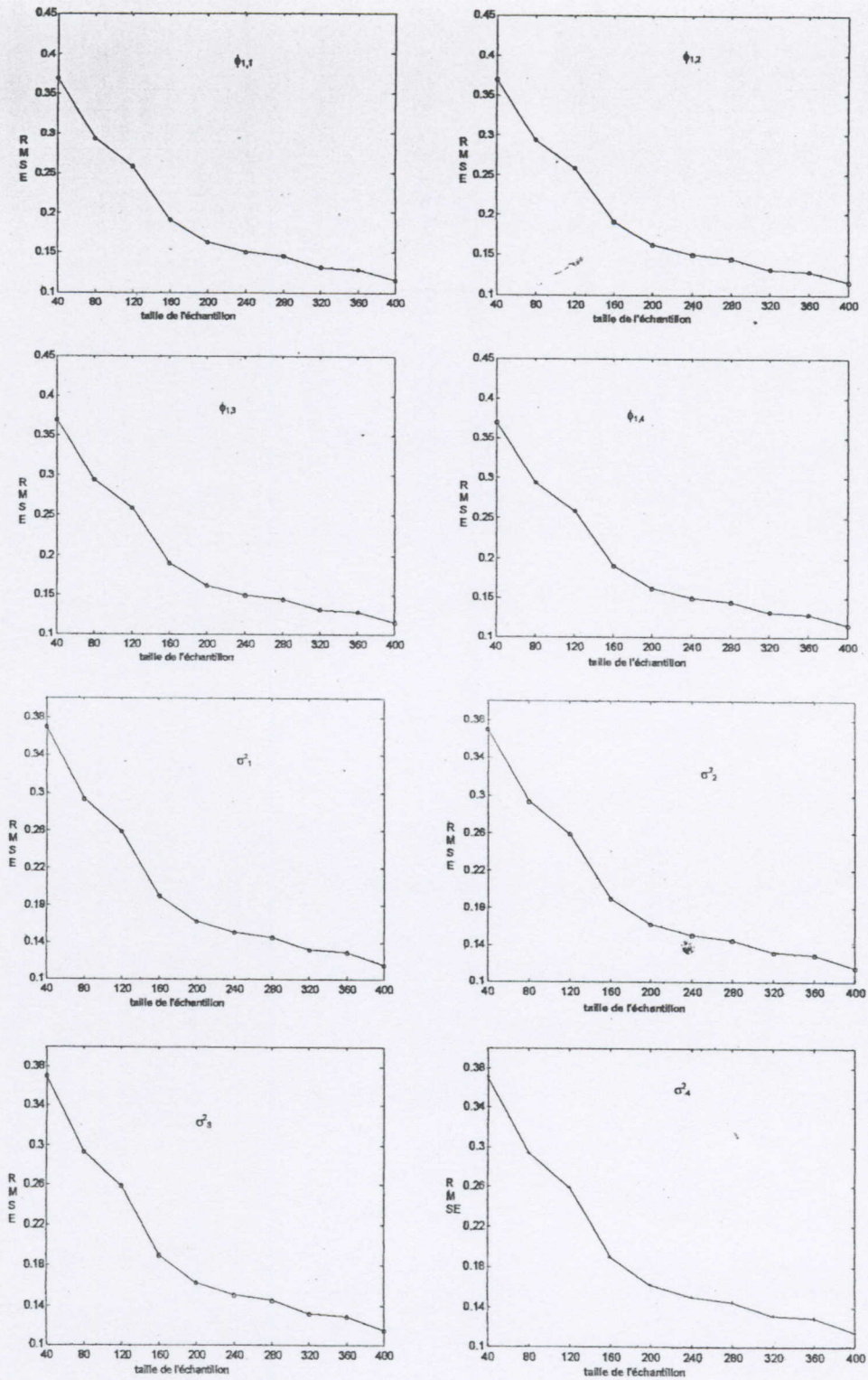


Figure (2-2) : Les valeurs de RMSE calculées pour le modèle 2

Paramètres	$\hat{\phi}_{11}$	$\hat{\phi}_{12}$	$\hat{\phi}_{21}$	$\hat{\phi}_{22}$	$\hat{\sigma}_1^2$	$\hat{\sigma}_2^2$
T=40 <i>Moyenne</i>	0.5274	0.6366	0.4588	0.1459	0.8040	0.9062
<i>RMSE</i>	0.2366	0.1859	0.1739	0.2848	0.2700	0.3254
T=80 <i>Moyenne</i>	0.5115	0.6676	0.4547	0.1921	0.7978	0.9109
<i>RMSE</i>	0.1490	0.1085	0.1354	0.2135	0.1894	0.2230
T=120 <i>Moyenne</i>	0.5074	0.6763	0.4181	0.2285	0.8121	0.9023
<i>RMSE</i>	0.1426	0.0877	0.0938	0.1589	0.1428	0.1486
T=160 <i>Moyenne</i>	0.4980	0.6904	0.4164	0.2540	0.8072	0.8996
<i>RMSE</i>	0.0921	0.0576	0.0830	0.1406	0.1159	0.1363
T=200 <i>Moyenne</i>	0.5042	0.6881	0.4077	0.2696	0.7965	0.9167
<i>RMSE</i>	0.0789	0.0526	0.0727	0.1192	0.1144	0.1229
T=240 <i>Moyenne</i>	0.4890	0.6930	0.4204	0.2580	0.7955	0.8952
<i>RMSE</i>	0.0780	0.0487	0.0628	0.1000	0.1006	0.1121
T=280 <i>Moyenne</i>	0.5079	0.6886	0.4213	0.2573	0.8084	0.9085
<i>RMSE</i>	0.0736	0.0456	0.0585	0.0995	0.1005	0.1005
T=320 <i>Moyenne</i>	0.5008	0.6904	0.4172	0.2613	0.7795	0.9149
<i>RMSE</i>	0.0733	0.0433	0.0563	0.0955	0.0814	0.0941
T=360 <i>Moyenne</i>	0.5123	0.6857	0.4160	0.2681	0.7871	0.8947
<i>RMSE</i>	0.0652	0.0411	0.0521	0.0870	0.0797	0.0838
T=400 <i>Moyenne</i>	0.5073	0.6889	0.4069	0.2781	0.8038	0.9072
<i>RMSE</i>	0.0517	0.0364	0.0517	0.0846	0.0779	0.0796

Tableau 2-3

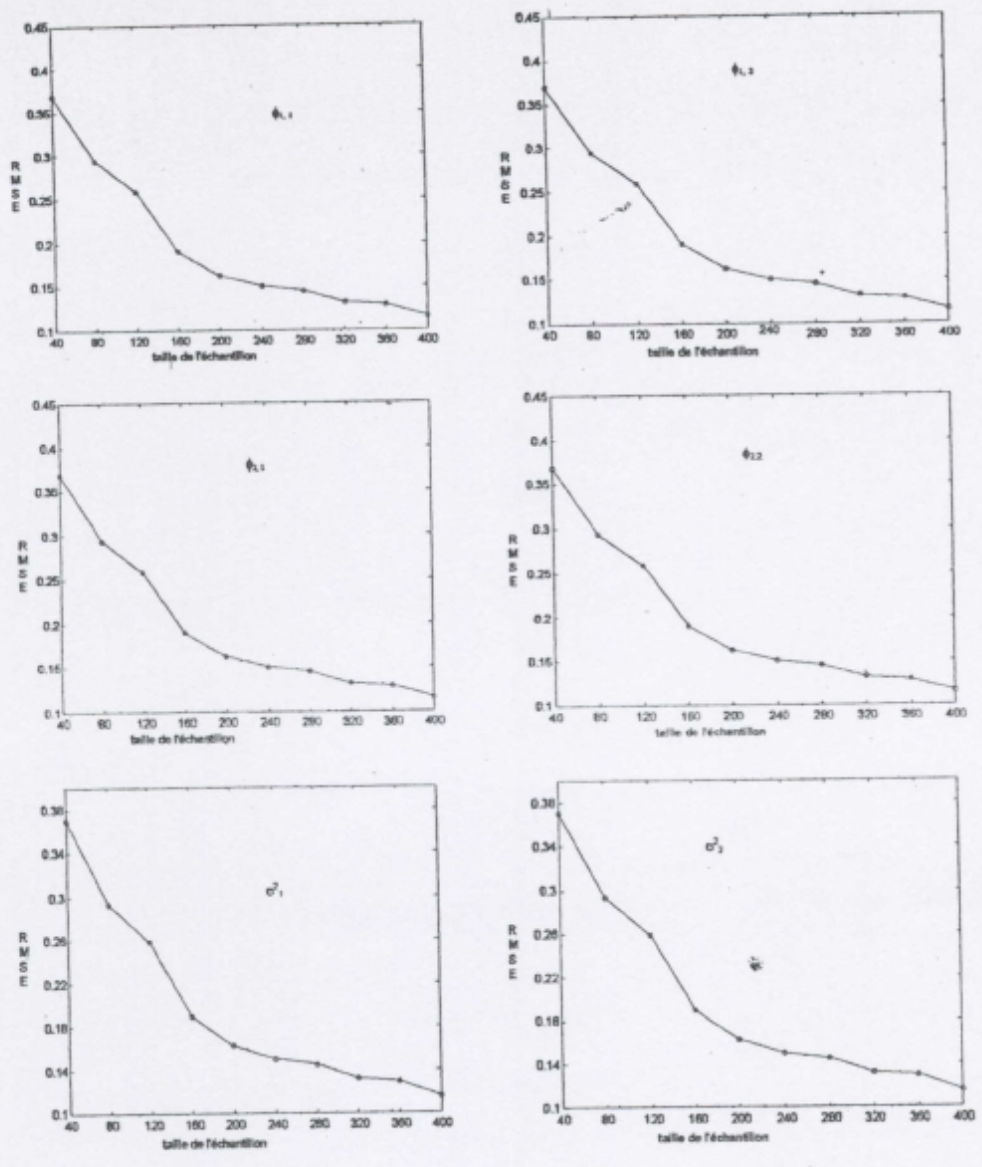


Figure (2-3) : Les valeurs de RMSE calculées pour le modèle 3

paramètres	$\hat{\phi}_{11}$	$\hat{\phi}_{21}$	$\hat{\phi}_{22}$	$\hat{\sigma}_1^2$	$\hat{\sigma}_2^2$	
T=40	Moyenne	0.7232	-0.5625	0.4035	1.0264	1.1660
	RMSE	0.2062	0.2635	0.2762	0.2667	0.2986
T=80	Moyenne	0.6962	-0.5963	0.4056	1.0514	1.1897
	RMSE	0.1343	0.1839	0.1688	0.2154	0.2634
T=120	Moyenne	0.7137	-0.5674	0.3796	1.0053	1.1821
	RMSE	0.1125	0.1465	0.1554	0.1915	0.2137
T=160	Moyenne	0.7059	-0.6136	0.4001	1.0152	1.2229
	RMSE	0.0981	0.1297	0.1309	0.1615	0.2080
T=200	Moyenne	0.7066	-0.5821	0.3834	0.9927	1.2135
	RMSE	0.0849	0.1227	0.1220	0.1295	0.1952
T=240	Moyenne	0.7001	-0.6083	0.4017	1.0092	1.2198
	RMSE	0.0836	0.0958	0.0958	0.1138	0.1597
T=280	Moyenne	0.7113	-0.5919	0.3946	1.0115	1.2188
	RMSE	0.0830	0.0890	0.0892	0.1015	0.1361
T=320	Moyenne	0.7092	-0.5869	0.3927	0.9952	1.2043
	RMSE	0.0778	0.0869	0.0889	0.1004	0.1333
T=360	Moyenne	0.6991	-0.5989	0.3964	0.9786	1.2246
	RMSE	0.0657	0.0710	0.0801	0.0996	0.1306
T=400	Moyenne	0.7002	-0.5998	0.3893	0.9939	1.2091
	RMSE	0.0645	0.0617	0.0784	0.0908	0.1135

tableau (2-4)

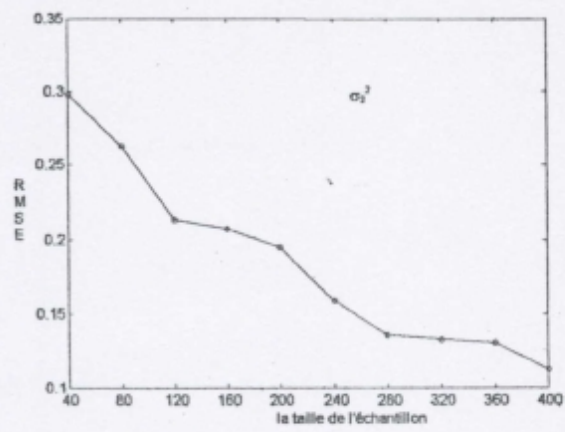
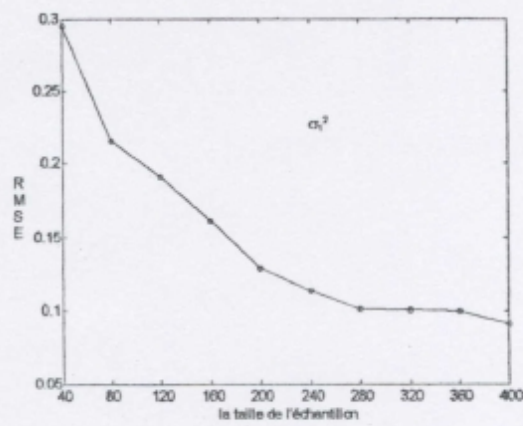
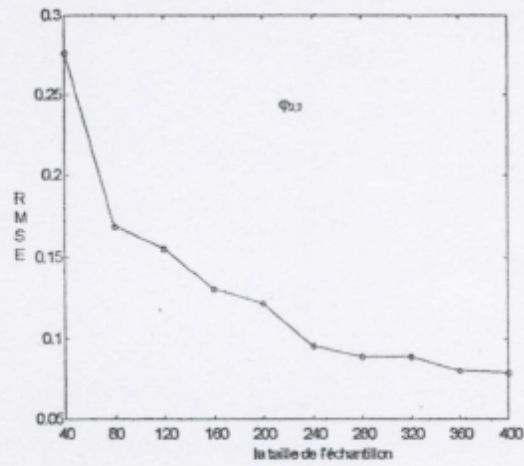
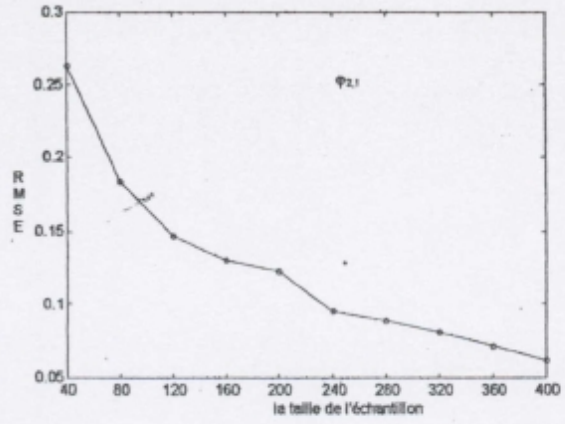
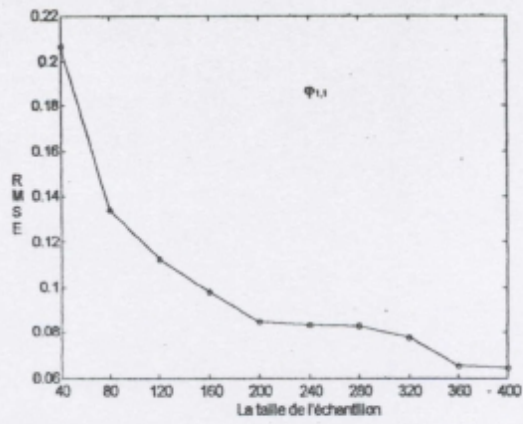


Figure (2-4) : Les valeurs de RMSE calculées pour le modèle 4

paramètres	$\hat{\phi}_{11}$	$\hat{\phi}_{12}$	$\hat{\phi}_{21}$	$\hat{\phi}_{31}$	$\hat{\phi}_{32}$	$\hat{\phi}_{33}$	$\hat{\phi}_{41}$	$\hat{\phi}_{42}$
40 M	.2570	.6320	.7350	1.3816	.3658	.5962	-.6017	.4555
40 R	.2913	.2820	.2736	.2453	.2464	.2664	.2956	.2698
80 M	.3226	.7098	.8500	1.3692	.3988	.6140	-.6050	.3553
80 R	.2534	.2662	.2317	.1916	.2066	.1533	.1744	.2252
120 M	.2933	0.7057	0.8117	1.3906	0.3694	.5730	-.6107	.3923
120 R	.2033	0.2308	0.1888	0.1845	0.1820	.1409	.1489	.2100
160 M	.3233	.7096	.8051	1.3924	.3943	.6094	-.5920	.3890
160 R	.1678	.1720	.1667	.1564	.1528	.1136	.1238	.2062
200 M	.2910	.6746	.7887	1.4192	.3685	.5940	-.6109	.4275
200 R	.1606	.1639	.1475	.1340	.1348	.1006	0.1037	.1889
240 M	.2983	.6955	.7877	1.4064	.3779	.5939	-.6063	.4063
240 R	.1520	.1511	.1361	.1163	.1192	.1024	.0999	.1753
280 M	.2887	.6927	.8047	1.3988	.3952	.59133	-.6023	.3946
280 R	.1216	.1371	.1342	.1125	.1126	.0938	.0975	.1728
320 M	.3002	.6971	.8132	1.4042	.4022	.5965	-.6038	.4158
320 R	.1131	.1194	.1242	0.0967	0.1005	.0775	.0908	.1652
360 M	.3100	.7093	.8006	1.4129	.3846	.5981	-.5985	.4018
360 R	.1089	.1023	.1169	.0911	.0891	.0729	.0853	.1485
400 M	.2882	.6956	.7922	1.3904	.3986	.5943	-.5983	.4024
400 R	.1045	.0960	.1034	.0780	.0835	.0715	.0787	.1300

tableau (2-5a)

paramètres	$\hat{\sigma}_1^2$	$\hat{\sigma}_2^2$	$\hat{\sigma}_3^2$	$\hat{\sigma}_4^2$
T=40 <i>Moyenne</i>	0.9988	1.2495	0.8105	0.8913
<i>RMSE</i>	0.2817	0.2943	0.2733	0.2887
T=80 <i>Moyenne</i>	1.0201	1.1812	0.8335	0.9050
<i>RMSE</i>	0.2688	0.2453	0.2593	0.2813
T=120 <i>Moyenne</i>	0.9996	1.2050	0.8068	0.8976
<i>RMSE</i>	0.2510	0.2347	0.2056	0.2571
T=160 <i>Moyenne</i>	0.9989	1.2485	0.8050	0.9175
<i>RMSE</i>	0.2322	0.2197	0.1899	0.1905
T=200 <i>Moyenne</i>	0.9748	1.1992	0.7907	0.8989
<i>RMSE</i>	0.1904	0.2063	0.1574	0.1787
T=240 <i>Moyenne</i>	0.9854	1.2159	0.8381	0.9229
<i>RMSE</i>	0.1664	0.1955	0.1521	0.1615
T=280 <i>Moyenne</i>	1.0097	1.2117	0.8285	0.9076
<i>RMSE</i>	0.1587	0.1817	0.1426	0.1510
T=320 <i>Moyenne</i>	1.0042	1.2041	0.7621	0.9080
<i>RMSE</i>	0.1530	0.1787	0.1210	0.1442
T=360 <i>Moyenne</i>	0.9819	1.2270	0.8024	0.8944
<i>RMSE</i>	0.1245	0.1584	0.1193	0.1403
T=400 <i>Moyenne</i>	0.9790	1.2378	0.7846	0.8915
<i>RMSE</i>	0.1159	0.1300	0.1041	0.1299

tableau (2-5b)

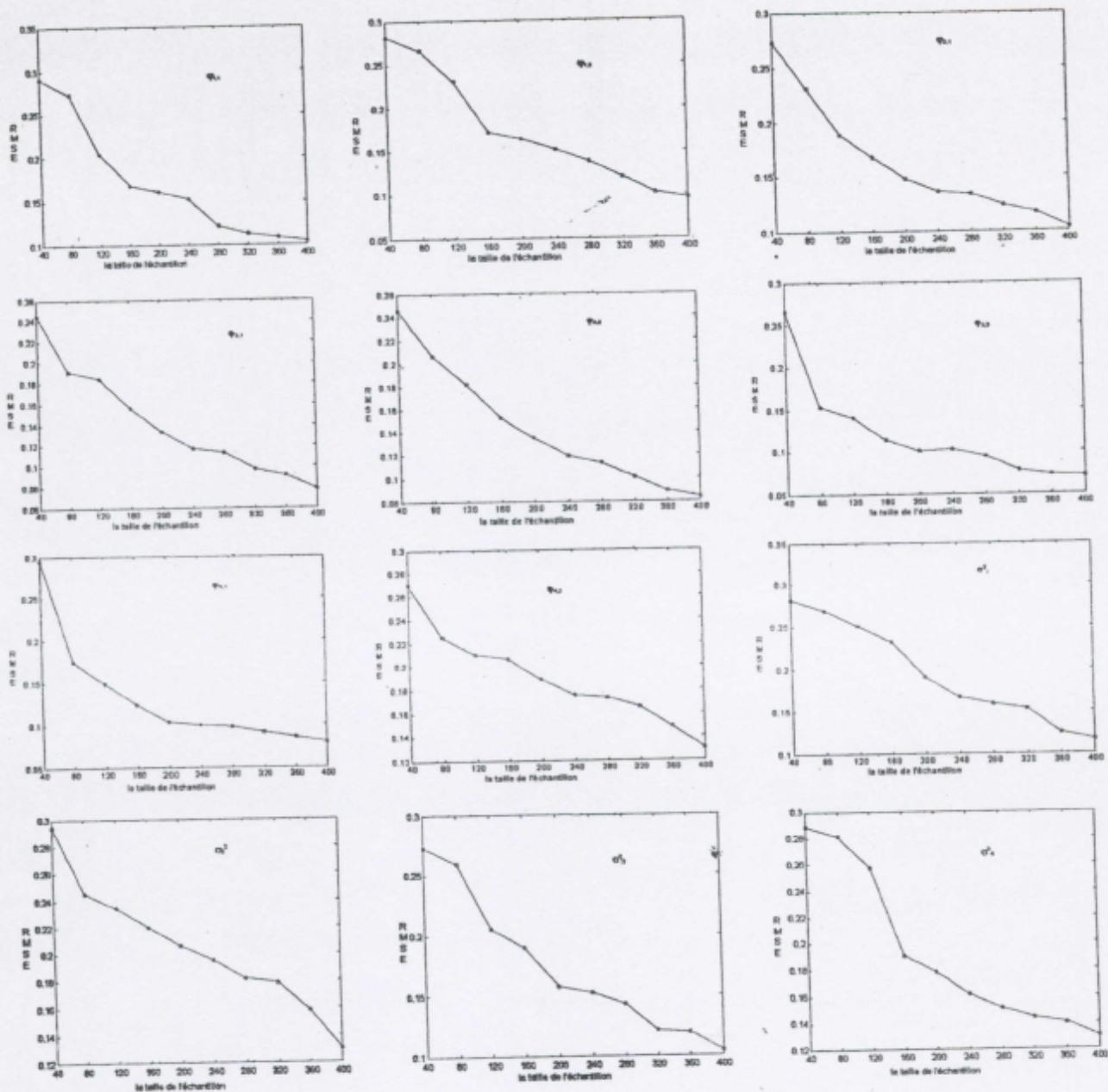


Figure (2-5) : Les valeurs de RMSE calculées pour le modèle 5



paramètres	$\hat{\phi}_{11}$	$\hat{\phi}_{21}$	$\hat{\phi}_{22}$	$\hat{\phi}_{23}$	$\hat{\phi}_{31}$	$\hat{\phi}_{32}$	$\hat{\phi}_{41}$
40							
<i>Moyenne</i>	0.2976	0.6152	0.1420	0.3174	0.3957	0.5109	0.6884
<i>RMSE</i>	0.2829	0.2998	0.2961	0.2990	0.2637	0.2905	0.2784
80							
<i>Moyenne</i>	0.3445	0.4410	0.1988	0.3003	0.3770	0.5177	0.7320
<i>RMSE</i>	0.2552	0.2509	0.2713	0.2776	0.2451	0.2722	0.2262
120							
<i>Moyenne</i>	0.3165	0.5075	0.1873	0.3233	0.4097	0.4756	0.7033
<i>RMSE</i>	0.2172	0.2404	0.2543	0.2240	0.1889	0.2417	0.2119
160							
<i>Moyenne</i>	0.3128	0.4855	0.2032	0.3250	0.3708	0.5066	0.6830
<i>RMSE</i>	0.1819	0.1848	0.2174	0.1887	0.1442	0.1812	0.1707
200							
<i>Moyenne</i>	0.3114	0.5094	0.1839	0.3089	0.4064	0.5062	0.6908
<i>RMSE</i>	0.1659	0.1646	0.1752	0.1809	0.1365	0.1696	0.1371
240							
<i>Moyenne</i>	0.2891	0.5108	0.1870	0.2973	0.4059	0.4835	0.7080
<i>RMSE</i>	0.1609	0.1472	0.1707	0.1495	0.1267	0.1578	0.1295
280							
<i>Moyenne</i>	0.3181	0.5040	0.1843	0.3223	0.3986	0.5088	0.7003
<i>RMSE</i>	0.1314	0.1444	0.1513	0.1482	0.1256	0.1467	0.1185
320							
<i>Moyenne</i>	0.3114	0.5096	0.1982	0.2963	0.4039	0.4866	0.7183
<i>RMSE</i>	0.1263	0.1429	0.1410	0.1461	0.1145	0.1360	0.1170
360							
<i>Moyenne</i>	0.3097	0.5081	0.1927	0.3004	0.3951	0.5093	0.7008
<i>RMSE</i>	0.1208	0.1313	0.1359	0.1148	0.0992	0.1336	0.1108
400							
<i>Moyenne</i>	0.3030	0.4834	0.2107	0.3057	0.3935	0.4880	0.7077
<i>RMSE</i>	0.1160	0.1128	0.1279	0.1097	0.0886	0.1176	0.1013

tableau (2-6a)

paramètres	$\hat{\phi}_{51}$	$\hat{\phi}_{52}$	$\hat{\sigma}_1^2$	$\hat{\sigma}_2^2$	$\hat{\sigma}_3^2$	$\hat{\sigma}_4^2$	$\hat{\sigma}_5^2$
40							
<i>Moyenne</i>	0.3103	0.4084	1.0944	1.2294	0.8647	0.8808	0.9364
<i>RMSE</i>	0.2973	0.2857	0.2882	0.2882	0.2797	0.2495	0.2768
80							
<i>Moyenne</i>	0.2673	0.4159	1.0063	1.2730	0.8269	0.8540	1.0572
<i>RMSE</i>	0.2860	0.2754	0.2615	0.2739	0.2319	0.2215	0.2657
120							
<i>Moyenne</i>	0.3428	0.2639	1.0202	1.1759	0.9426	0.7661	1.0301
<i>RMSE</i>	0.2623	0.2225	0.2528	0.2388	0.2240	0.2165	0.2511
160							
<i>Moyenne</i>	0.2986	0.4077	1.0245	1.2132	0.8935	0.8174	1.0113
<i>RMSE</i>	0.1809	0.2081	0.2467	0.2233	0.2180	0.2026	0.2300
200							
<i>Moyenne</i>	0.3212	0.3881	0.9878	1.2332	0.8909	0.7862	1.0081
<i>RMSE</i>	0.1749	0.1881	0.2360	0.2160	0.2140	0.1761	0.2122
240							
<i>Moyenne</i>	0.2849	0.3983	0.9918	1.2001	0.8597	0.8040	1.0087
<i>RMSE</i>	0.1450	0.1735	0.2141	0.2018	0.1993	0.1608	0.2011
280							
<i>Moyenne</i>	0.2823	0.4070	1.0267	1.2034	0.8926	0.8036	0.9942
<i>RMSE</i>	0.1379	0.1573	0.1874	0.2006	0.1672	0.1452	0.2007
320							
<i>Moyenne</i>	0.3013	0.4061	1.0008	1.2033	0.9349	0.7954	0.9928
<i>RMSE</i>	0.1282	0.1465	0.1826	0.2000	0.1596	0.1316	0.1862
360							
<i>Moyenne</i>	0.2994	0.3999	0.9942	1.1904	0.8990	0.7958	0.9985
<i>RMSE</i>	0.1233	0.1374	0.1625	0.1894	0.1540	0.1222	0.1797
400							
<i>Moyenne</i>	0.3001	0.4000	1.0001	1.1977	0.9004	0.7999	0.9950
<i>RMSE</i>	0.1171	0.1148	0.1235	0.1757	0.1470	0.1120	0.1536

tableau (2-6b)

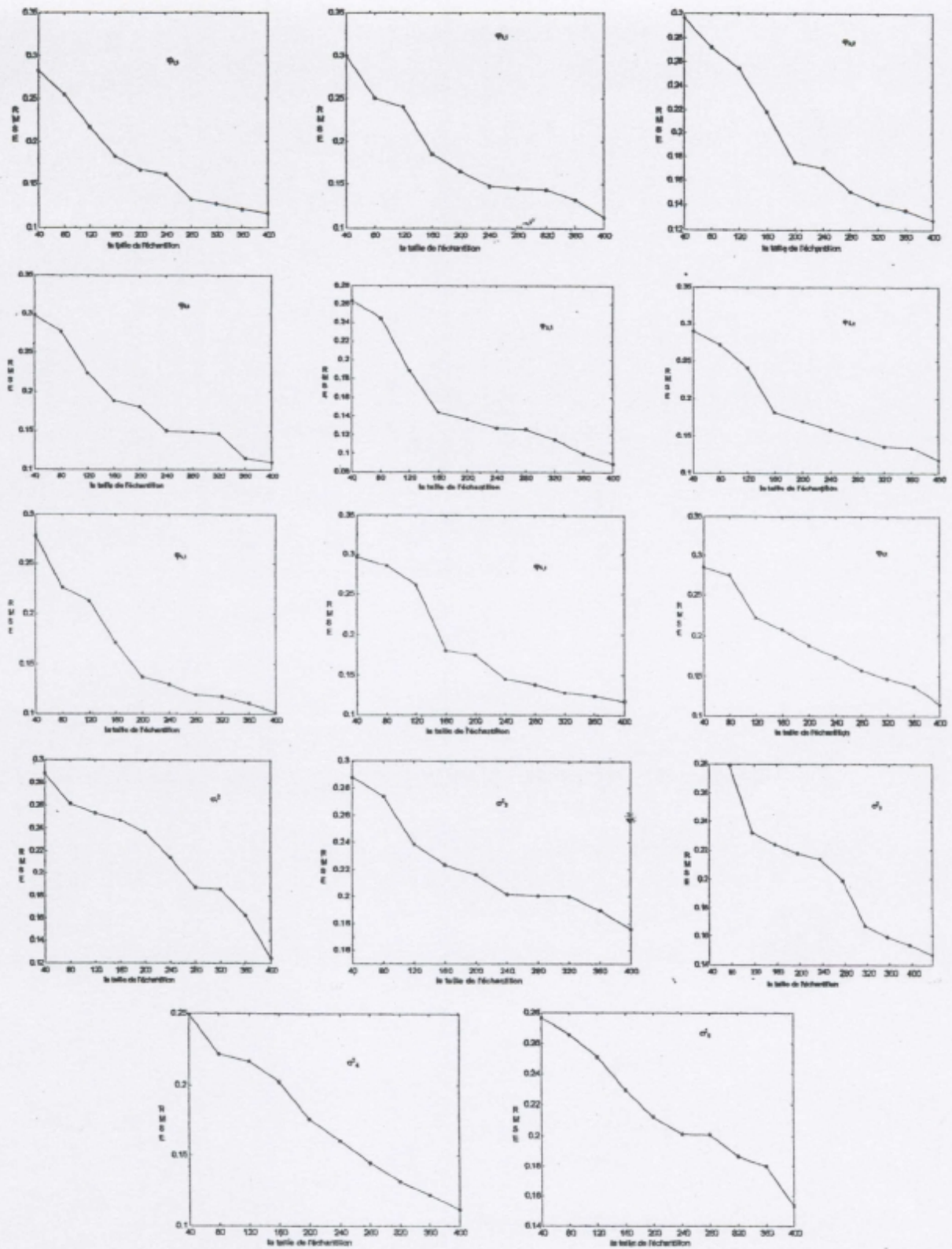


Figure (2-6) : Les valeurs de RMSE calculées pour le modèle 6

### 2.6.3 Interprétation des résultats

Les résultats de simulation dans les tableaux (2,  $i$ ) où  $i = 1, 2, \dots, 6$  montrent que les paramètres estimés du modèle autorégressif périodique pur sont biaisés quand la taille de l'échantillon est petite. Le biais des estimateurs des moindres carrés dans les différentes simulations réalisées décroît progressivement comme la fonction  $1/T$  lorsque la taille de l'échantillon  $T$  augmente. Les figures (2,  $i$ ), où  $i = 1, 2, \dots, 6$  reflètent cela. Ainsi plus la taille de l'échantillon augmente, plus la valeur de  $RMSE$  diminue pour l'estimateur des moindres carrés ( $EMC$ ), nous déduisons que les estimateurs des paramètres du modèle autorégressif périodique sont très bien estimés quand la taille de l'échantillon est importante.

Le nombre d'itérations effectuées nous a permis de conclure que les estimateurs convergent en probabilité vers les vrais valeurs des paramètres quand la taille de l'échantillon est importante

- Les résultats de simulation présentés dans ce chapitre seront utilisés dans le chapitre suivant pour réduire le nombre de paramètres du modèle autorégressif multivarié stationnaire ce qui est le but principal de notre étude.

## Chapitre 3

# Méthodes d'Estimation des Paramètres d'un Modèle *VARMA*

### 3.1 Introduction

L'estimation des paramètres d'un modèle autorégressif moyenne mobile multivarié noté *VARMA* était l'objectif de plusieurs chercheurs. Lund et Basawa (2000) ont évalué la vraisemblance d'un modèle autorégressif moyenne mobile multivarié à partir d'un modèle  $ARMA_d(p_t, q_t)$  correspondant et ils ont explicité les calculs pour un modèle  $PARMA(4, 1)$ . Hilmer et Tiao (1979) ont développé les procédures d'estimation exacte par la méthode du maximum de vraisemblance d'un modèle moyenne mobile multivarié pur. Ils ont obtenus une approximation pour estimer les paramètres d'un modèle *VARMA* mixte. Dans la même situation, Melard (1984), Sheat (1984), Khon et Ausley (1983) ont estimé les paramètres d'un modèle *VARMA* par la méthode de maximum de vraisemblance comme d'autres...

L'estimation des paramètres d'un modèle *VARMA* est basée sur les mêmes démarches de l'étude d'un modèle *VAR* qui est plus simple à traiter. Nous supposons que l'on dispose d'une série chronologique multivariée  $x_1, \dots, x_T$  avec  $X_t = (x_{1t}, \dots, x_{dt})'$  généré par un processus *VAR* stable stationnaire

$$X_t = v + \sum_{i=1}^{p^*} A_i X_{t-i} + U_t \quad (3.1.1)$$

$v$  est un vecteur  $d \times 1$  de termes constants, les paramètres  $A_i$  ( $i = 1, \dots, p^*$ ) sont des matrices d'ordre  $d$ ,  $U_t$  est un bruit blanc vectoriel de matrice de covariance  $\Sigma_U$  non singulière.

## 3.2 Méthode du maximum de vraisemblance

### 3.2.1 La fonction de vraisemblance d'un modèle VAR( $p^*$ )

Soit un modèle VAR( $p^*$ ),  $(X_t - \mu) = v + \sum_{i=1}^{p^*} A_i(X_{t-i} - \mu) + U_t$

Nous considérons l'estimation du maximum de vraisemblance sous la supposition que ces processus  $X_t$  du modèle VAR( $p^*$ ) sont gaussiens plus précisément,

$[U_1, \dots, U_T]' \sim \mathcal{N}(0, I_T \otimes \Sigma_U)$ , et la densité de probabilité de  $\mathbf{U}$  est

$$f_{\mathbf{u}}(\mathbf{U}) = \frac{1}{(2\pi)^{dT/2}} |I_T \otimes \Sigma_U|^{-1/2} \exp \left[ -\frac{1}{2} \mathbf{U}' (I_T \otimes \Sigma_U) \mathbf{U} \right] \quad (3.2.1)$$

$$\mathbf{U} = \begin{pmatrix} I_d & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ -A_1 & I_d & \dots & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & & \vdots \\ -A_{p^*} & -A_{p^*-1} & \dots & I_d & & 0 \\ \vdots & & \ddots & & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & -A_{p^*} & \dots & I_d \end{pmatrix} (\mathbf{X} - \mu^*) + \begin{pmatrix} -A_{p^*} & -A_{p^*-1} & \dots & -A_1 \\ 0 & -A_{p^*} & \dots & -A_2 \\ \vdots & & \ddots & \\ 0 & 0 & \dots & -A_{p^*} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} (X_0 - \mu) \quad (3.2.2)$$

où  $\mathbf{X} = \text{vec}(X)$ ,  $\mu^* = (\mu'_1, \dots, \mu'_d)'$  est un vecteur ( $dT \times 1$ ),  $X_0 = (X'_0, \dots, X'_{-p^*+1})$  et  $\mu =$

$(\mu'_1, \dots, \mu'_d)'$  est un vecteur ( $dp^* \times 1$ )

$$\begin{aligned} X^0 &= (X_1 - \mu, \dots, X_T - \mu) && (d \times T) \\ X_t^0 &= (X_t - \mu \quad \dots \quad X_{t-p^*+1} - \mu)' && (dp^* \times 1) \\ A &= (A_1, \dots, A_{p^*}) && (d \times dp^*) \\ Y &= (X_0^0, \dots, X_{T-1}^0)' && (dp^* \times T) \\ X^0 &= \text{vec}(X^0) && (dT \times 1) \\ \alpha &= \text{Vec}(A) && (d^2 p^* \times 1) \end{aligned} \quad (3.2.3)$$

par conséquent  $\partial \mathbf{U} / \partial \mathbf{X}$  est une matrice triangulaire inférieure à diagonale d'unité d'où on a

$$\mathbf{U} = \mathbf{X} - \mu^* - (Y' \otimes I_d) \alpha$$

$$f_{\mathbf{x}}(\mathbf{X}) = \left| \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial \mathbf{X}} \right| f_{\mathbf{u}}(\mathbf{U})$$

$$= (2\pi)^{-dT/2} |I_T \otimes \Sigma_U|^{-1/2} \exp \left[ -\frac{1}{2} (\mathbf{X} - \mu^* - (Y' \otimes I_d) \alpha)' (I_T \otimes \Sigma_U^{-1}) (\mathbf{X} - \mu^* - (Y' \otimes I_d) \alpha) \right] \quad (3.2.4)$$

pour simplifier on fixe la valeur initiale  $X_0$

$$\begin{aligned}
 \ln l(\mu, \alpha, \Sigma_U) &= -\frac{dT}{2} \ln 2\pi - \frac{T}{2} \ln |\Sigma_U| \\
 &\quad - \frac{1}{2} \left[ (\mathbf{X} - \mu^* - (Y' \otimes I_d) \alpha)' (I_T \otimes \Sigma_U^{-1}) (\mathbf{X} - \mu^* - (Y' \otimes I_d) \alpha) \right] \\
 &= -\frac{dT}{2} \ln 2\pi - \frac{T}{2} \ln |\Sigma_U| \\
 &\quad - \frac{1}{2} \sum_{t=1}^T \left[ (X_t - \mu) - \sum_{i=1}^{p^*} A_i (X_{t-i} - \mu) \right]' \Sigma_U^{-1} \left[ (X_t - \mu) - \sum_{i=1}^{p^*} A_i (X_{t-i} - \mu) \right] \\
 &= -\frac{dT}{2} \ln 2\pi - \frac{T}{2} \ln |\Sigma_U| \\
 &\quad - \frac{1}{2} \sum_{t=1}^T \left( X_t - \sum_{i=1}^{p^*} A_i X_{t-i} \right)' \Sigma_U^{-1} \left( X_t - \sum_{i=1}^{p^*} A_i X_{t-i} \right) \\
 &\quad + \mu' \left( I_d - \sum_{i=1}^{p^*} A_i \right)' \Sigma_U^{-1} \sum_{t=1}^T \left( X_t - \sum_{i=1}^{p^*} A_i X_{t-i} \right) \\
 &\quad - \frac{T}{2} \mu' \left( I_d - \sum_{i=1}^{p^*} A_i \right)' \Sigma_U^{-1} \left( I_d - \sum_{i=1}^{p^*} A_i \right) \mu
 \end{aligned}$$

$$\ln l(\mu, \alpha, \Sigma_U) = -\frac{dT}{2} \ln 2\pi - \frac{T}{2} \ln |\Sigma_U| - \frac{1}{2} \text{tr} (X^0 - AY)' \Sigma_U^{-1} (X^0 - AY) \quad (3.2.5)$$

### 3.2.2 Estimateurs du maximum de vraisemblance

En dérivant les membres de (3.2.4) par rapport à  $\mu, \alpha$  et  $\Sigma_U$ , on obtient :

$$\frac{\partial \ln l}{\partial \mu} = [I_d - A(j \otimes I_d)]' \Sigma_U^{-1} \left[ \sum_t (X_t - \mu - AX_{t-1}^0) \right] \quad (3.2.6)$$

$j$  est un vecteur ( $p^* \times 1$ ) de 1

$$\frac{\partial \ln l}{\partial \alpha} = (Y \otimes \Sigma_U^{-1}) (\mathbf{X} - \mu^*) - (YY' \otimes \Sigma_U^{-1}) \alpha \quad (3.2.7)$$

$$\frac{\partial \ln l}{\partial \Sigma_U} = -\frac{T}{2} \Sigma_U^{-1} + \frac{1}{2} \Sigma_U^{-1} (X^0 - AY) (X^0 - AY)' \Sigma_U^{-1} \quad (3.2.8)$$

En égalant à zéro, nous obtenons le système des équations normales dont la résolution conduit respectivement aux estimateurs du maximum de vraisemblance pour  $\mu, \alpha$  et  $\Sigma_U$  suivants :

$$\tilde{\mu} = \frac{1}{T} \left[ I_d - \sum_i \tilde{A}_i \right]^{-1} \sum_t \left[ X_t - \sum_i \tilde{A}_i X_{t-i} \right] \quad (3.2.9)$$

$$\tilde{\alpha} = \left( (\tilde{Y}\tilde{Y}')^{-1} \tilde{Y} \otimes I_d \right) (\mathbf{X} - \tilde{\mu}^*) \quad (3.2.10)$$

$$\tilde{\Sigma}_U = \frac{1}{T} (\tilde{X}^0 - \tilde{A}\tilde{Y}) (\tilde{X}^0 - \tilde{A}\tilde{Y})' \quad (3.2.11)$$

$\tilde{X}^0$  et  $\tilde{Y}$  sont obtenus à partir de  $X^0$  et  $Y$  lorsqu'on remplace  $\mu$  par  $\tilde{\mu}$  respectivement.

### 3.3 Cas général VARMA ( $p^*, q^*$ )

Supposons que  $x_1, \dots, x_T$  sont générés à partir d'un processus gaussien stable, inversible VARMA ( $p^*, q^*$ )  $d$ -dimensionnel

$$(X_t - \mu) = v + \sum_{i=1}^{p^*} A_i (X_{t-i} - \mu) + U_t + M_1 U_{t-1} + \dots + M_{q^*} U_{t-q^*} \quad (3.3.1)$$

de vecteur moyen  $\mu$  et de matrice de covariance du bruit blanc  $\Sigma_U$  non singulière.

Habituellement quelques éléments des matrices des coefficients seront nuls ou obéiront à d'autres types de restrictions par conséquent, nous définissons,  $\beta = \text{vec} [A_1, \dots, A_{p^*}, M_1, \dots, M_{q^*}]$ . Et nous supposons que ces coefficients sont linéairement reliés à un vecteur de paramètre  $\gamma$  de dimension ( $N \times 1$ ), c'est-à-dire,  $\beta = R\gamma + r$ . Pour une matrice d'ordre ( $d^2 (p^* + q^* + 1) \times N$ ),  $R$  connue est un vecteur de dimension ( $d^2 (p^* + q^* + 1) \times N$ ),  $r$  connu. La forme exacte de la vraisemblance sachant les valeurs initiales  $X_{-p^*+1}, \dots, X_0$  peut être déduite de façon analogue aux cas particuliers suivants. Ici nous donnons uniquement l'approximation de la vraisemblance obtenue en supposant

$X_{-p^*+1} - \mu = \dots = X_0 - \mu = U_{-q^*+1} = \dots = U_0 = 0$ , à une constante près nous obtenons,

$$l_0(\mu, \gamma, \Sigma_U) = |\Sigma_U|^{-T/2} \exp \left\{ -\frac{1}{2} \sum_{t=1}^T U_t(\mu, \gamma)' \Sigma_U^{-1} U_t(\mu, \gamma) \right\} \quad (3.3.2)$$

où  $U_t(\mu, \gamma) = (X_t - \mu) - \sum_{i=1}^{t-1} \Pi_i(\gamma) (X_{t-i} - \mu)$  et où les  $\Pi_i(\gamma)$  sont des matrices des coefficients de la représentation VAR pur de  $X_t$ .

Le problème de l'identification est reflété dans la fonction de vraisemblance. Si le modèle est paramétré de façon unique, la fonction de vraisemblance a un maximum local unique. Cette propriété est évidemment importante car elle garantit l'unicité des estimateurs ML. Cependant, nous notons en général que la fonction de vraisemblance possède plus d'un maximum local.

Dans ce qui suit, nous nous intéressons sur la maximisation de la fonction de vraisemblance



approximative (3.3.2) ou, sur la maximisation de son logarithme

$$\ln l_0(\mu, \gamma, \Sigma_U) = -\frac{T}{2} |\Sigma_U| - \frac{1}{2} \sum_{t=1}^T U_t'(\mu, \gamma) \Sigma_U^{-1} U_t(\mu, \gamma) \quad (3.3.3)$$

### 3.3.1 Calcul des estimateurs du maximum de vraisemblance

Dans la représentation VAR pur, nous avons obtenu les estimateurs du maximum de vraisemblance (ML) en résolvant les équations normales. Dans le cas VARMA( $p^*, q^*$ ) nous pouvons utiliser le même principe. En d'autres termes, nous déterminons les dérivées du logarithme de la fonction de vraisemblance ou son approximation donnée en (3.3.3) et les égalons à zéro. Nous obtiendrons les équations normales dans le suivant. Il s'avère que ce sont des fonctions non linéaires en les paramètres et nous présenterons l'algorithme pour résoudre le problème d'optimisation dans la section (3.4).

Les équations normales

$$\frac{\partial \ln l_0}{\partial \mu'} = - \sum_{t=1}^T U_t' \Sigma_U^{-1} \frac{\partial U_t'}{\partial \mu'} = \sum_{t=1}^T U_t' \Sigma_U^{-1} \left[ I_d - \sum_{i=1}^{t-1} \Pi_i(\gamma) \right] \quad (3.3.4)$$

$$\frac{\partial \ln l_0}{\partial \gamma} = - \sum_{t=1}^T U_t' \Sigma_U^{-1} \frac{\partial U_t'}{\partial \gamma} \quad * \quad (3.3.5)$$

$$\frac{\partial \ln l_0}{\partial \Sigma_U} = -\frac{T}{2} |\Sigma_U|^{-1} + \frac{1}{2} \Sigma_U^{-1} \left[ \sum_{t=1}^T U_t U_t' \right] \Sigma_U^{-1} \quad (3.3.6)$$

En égalant la dernière expression (3.3.6) à zéro, nous obtenons

$$\widetilde{\Sigma}_U(\mu, \gamma) = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T U_t(\mu, \gamma) U_t'(\mu, \gamma) \quad (3.3.7)$$

En la substituant à  $\Sigma_U$  dans (3.3.4) et (3.3.5) et on égalant à zéro, nous obtenons des équations normales non linéaires qui peuvent être résolues par des méthodes numériques.

Pour bien comprendre nous allons traiter les cas suivants

### 3.3.2 La fonction de vraisemblance d'un processus MA(1)

Soit  $X_1, \dots, X_T$  un échantillon généré par un processus MA(1) inversible  $d$ -dimensionnel, c'est-à-dire

$$X_t = U_t + M_1 U_{t-1} \quad (3.3.8)$$

où  $U_t$  est un bruit blanc vectoriel gaussien de matrice de covariance  $\Sigma_U$ . Donc,

$$\mathbf{X} = \begin{pmatrix} X_1 \\ \vdots \\ X_T \end{pmatrix} = \overline{\mathbf{M}}_1 \begin{pmatrix} U_0 \\ U_1 \\ \vdots \\ U_T \end{pmatrix}, \text{ où } \overline{\mathbf{M}}_1 = \underbrace{\begin{pmatrix} M_1 & I_d & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & M_1 & I_d & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & M_1 & \ddots & & \\ \vdots & & & \ddots & \ddots & \\ \vdots & & & & \ddots & I_d \\ 0 & & & & & M_1 \end{pmatrix}}_{(dT \times d(T+1))}$$

Utilisant  $U_t$  un bruit blanc gaussien, alors  $(U_0, \dots, U_T)' \sim N(0, I_{T+1} \otimes \Sigma_U)$  donc

$$\mathbf{X} \sim N\left(0, \overline{\mathbf{M}}_1 (I_{T+1} \otimes \Sigma_U) \overline{\mathbf{M}}_1'\right)$$

et la fonction de vraisemblance est donnée par

$$l(M_1, \Sigma_U \setminus \mathbf{X}) \propto \left| \overline{\mathbf{M}}_1 (I_{T+1} \otimes \Sigma_U) \overline{\mathbf{M}}_1' \right|^{-1/2} \exp \left\{ -\frac{1}{2} \mathbf{X}' \left[ \overline{\mathbf{M}}_1 (I_{T+1} \otimes \Sigma_U) \overline{\mathbf{M}}_1' \right]^{-1} \mathbf{X} \right\}$$

où  $\propto$  signifie que (est proportionnel à).

Une forme plus simple est obtenue si  $U_0$  est égal à zéro dans ce cas  $\mathbf{X} = \mathbf{M}_1 \mathbf{U}$  où

$$\mathbf{M}_1 = \underbrace{\begin{pmatrix} I_d & 0 & \dots & 0 \\ M_1 & I_d & 0 & 0 \\ & \ddots & \ddots & \\ 0 & \dots & M_1 & I_d \end{pmatrix}}_{(dT \times dT)}, \mathbf{U} = \begin{pmatrix} U_1 \\ \vdots \\ U_T \end{pmatrix}$$

La fonction de vraisemblance est alors proportionnelle à

$$\begin{aligned} l_0(M_1, \Sigma_U \setminus \mathbf{X}) &= \left| \mathbf{M}_1 (I_T \otimes \Sigma_U) \mathbf{M}_1' \right|^{-1/2} \exp \left\{ -\frac{1}{2} \mathbf{X}' \left[ \mathbf{M}_1 (I_T \otimes \Sigma_U) \mathbf{M}_1' \right]^{-1} \mathbf{X} \right\} \\ &= |\Sigma_U|^{-T/2} \exp \left\{ -\frac{1}{2} \mathbf{X}' \mathbf{M}_1^{-1} (I_T \otimes \Sigma_U^{-1}) \mathbf{M}_1^{-1} \mathbf{X} \right\} \\ &= |\Sigma_U|^{-T/2} \exp \left\{ -\frac{1}{2} \sum_{t=1}^T U_t' \Sigma_U^{-1} U_t \right\} \end{aligned} \quad (3.3.9)$$

puisque  $|M_1| = 1$  et

$$M_1^{-1} = \begin{pmatrix} I_d & 0 & \dots & 0 & 0 \\ -M_1 & I_d & & 0 & 0 \\ (-M_1)^2 & -M_1 & \ddots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ (-M_1)^{T-1} & (-M_1)^{T-2} & & -M_1 & I_d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_d & 0 & \dots & 0 \\ -\Pi_1 & I_d & \dots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ -\Pi_{T-1} & -\Pi_{T-2} & \dots & I_d \end{pmatrix}$$

où les  $\Pi_i = -(-M_1)^i$  sont les coefficients de la représentation VAR pur du processus. De plus, le processus MA(1) en (3.3.7) peut être réécrit à l'aide des substitutions successives

$$X_t + \sum_{i=1}^{t-1} (-M_1)^i X_{t-i} + (-M_1)^t U_0 = U_t$$

donc si  $U_0 = 0$  alors,  $U_t = X_t + \sum_{i=1}^{t-1} (-M_1)^i X_{t-i}$  et la dernière expression dans (3.3.9) est obtenue. L'équation précédente montre aussi que pour  $T$  grand la supposition concernant  $U_0$  devienne sans importance parce que pour un processus inversible  $M_1^t$  tend vers zéro lorsque  $t$  tend vers  $\infty$ . L'impact de  $U_0$  disparaît plus rapidement pour un processus pour lequel  $M_1^t$  tend vers zéro plus rapidement lorsque  $T$  devienne grand. Autrement dit si toutes les valeurs propres de  $M_1^t$  sont proches de zéros où bien toutes les racines de  $\det(I_d + M_1 Z)$  sont hors du cercle unité l'impact de  $U_0$  sera faible. Donc l'approximation de la vraisemblance dans (3.3.9) s'améliore lorsque la taille de l'échantillon devienne grande et deviendra exacte lorsque  $T \rightarrow \infty$ .

### 3.3.3 Le cas MA( $q^*$ )

Un raisonnement semblable comme pour les processus MA(1) peut aussi être employé pour des processus MA d'ordre élevé. Alors si le processus  $X_t$  possède une représentation MA( $q^*$ ) de moyenne nulle

$$X_t = U_t + M_1 U_{t-1} + \dots + M_{q^*} U_{t-q^*} \quad (3.3.10)$$

$$X = M_{q^*} \begin{pmatrix} U_{-q^*+1} & \dots & U_0 & U_1 & \dots & U_T \end{pmatrix}'$$

Une approximation commode de la vraisemblance est obtenue en posant

$U_{-q^*+1} = \dots = U_0 = 0$ , dans ce cas la vraisemblance est

$$l_0(M_1, \dots, M_{q^*}, \Sigma_U \setminus X) = |\Sigma_U|^{-T/2} \exp \left\{ -\frac{1}{2} X' \left[ M_{q^*}^{-1} (I_T \otimes \Sigma_U^{-1}) M_{q^*} \right] X \right\}$$

où

$$M_{q^*} = \begin{pmatrix} I_d & 0 & \dots & 0 & 0 \\ M_1 & \ddots & & 0 & 0 \\ M_2 & M_1 & \ddots & 0 & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \vdots \\ M_{q^*} & M_{q^*-1} & & \ddots & \\ 0 & \ddots & & \ddots & \\ 0 & 0 & M_{q^*} & \dots & \dots & M_1 & I_d \end{pmatrix}$$

Une expression alternative est la suivante :

$$l_0(M_1, \dots, M_{q^*}, \Sigma_U \setminus \mathbf{X}) = |\Sigma_U|^{-T/2} \exp \left\{ -\frac{1}{2} \sum_{t=1}^T U_t' \Sigma_U^{-1} U_t \right\}$$

où  $U_t = X_t - \sum_{i=1}^{t-1} \Pi_i X_{t-i}$ .

Encore l'approximation de la vraisemblance sera assez précise si  $T$  est raisonnablement grand et les racines de  $\det(I_d + M_1 Z + \dots + M_{q^*} z^{q^*})$  ne sont pas proche du cercle unité.

Le cas le plus simple correspond au modèle VARMA est pour  $p^* = q^* = 1$

### 3.3.4 Le cas VARMA(1.1)

Soit un processus gaussien stable et inversible de moyenne nulle

$$X_t = A_1 X_{t-1} + U_t + M_1 U_{t-1} \quad (3.3.11)$$

$$\tau_{p^*} = \begin{pmatrix} I_d & 0 & \dots & \dots & 0 & 0 \\ -A_1 & \ddots & & & 0 & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & & 0 & 0 \\ -A_{p^*} & -A_{p^*-1} & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & -A_{p^*} & & \ddots & \ddots & 0 & 0 \\ \vdots & & \ddots & & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & & -A_{p^*} & \dots & -A_1 & I_d \end{pmatrix}$$

Pour  $u_0 = 0$  fixées nous obtenons

$\tau_1(X_1, \dots, X_T)' = M_1(U_0, \dots, U_T)'$ , d'où,

$\mathbf{X} = (X_1, \dots, X_T)' \rightarrow N(0, \tau_1^{-1} M_1 (I_T \otimes \Sigma_U) M_1' \tau_1^{-1})$  nous obtenons alors

$$l_0(A_1, M_1, \Sigma_U \setminus \mathbf{X}) = |\Sigma_U|^{-T/2} \exp \left\{ -\frac{1}{2} \left[ (M_1^{-1} \tau_1 \mathbf{X})' (I_T \otimes \Sigma_U^{-1}) M_1^{-1} \tau_1 \mathbf{X} \right] \right\}$$

$$= |\Sigma_U|^{-T/2} \exp \left\{ -\frac{1}{2} \sum_{t=1}^n U_t' \Sigma_U^{-1} U_t \right\} \quad (3.3.12)$$

où  $U_t = X_t - \sum_{i=1}^{t-1} \Pi_i X_{t-i}$ , et les  $\Pi_i$  sont des matrices des coefficients de la représentation VAR pur et pour un modèle VARMA(1,1) sont donnés par :  $\Pi_i = (-1)^{i-1} (M_1^i + M_1^{i-1} + A_1)$ ,  $i \in \mathbb{N}^*$

### 3.4 Méthode des moindres carrés multivariés

Dans cette section nous présentons la méthode des moindres carrés multivariés

(*M L S*) les estimateurs obtenus pour un processus VAR sont considérés dans la suite les propriétés des estimateurs puis nous passons au cas général VARMA.

#### 3.4.1 L'estimation

Soit  $x_1, \dots, x_T, T$  observations d'un processus généré par un VAR( $p^*$ ) de dimension  $d$ . Posons

$$X = (x_1, \dots, x_T) \quad (d \times T)$$

$$B = (v, A_1, \dots, A_{p^*}) \quad (d \times (dp^* + 1))$$

$$Z_t = \begin{pmatrix} 1 \\ x_t \\ \vdots \\ x_{t-p^*+1} \end{pmatrix} \quad ((dp^* + 1) \times 1)$$

$$\begin{aligned} Z &= (z_0, \dots, z_{T-1}) \quad ((dp^* + 1) \times T) \\ U &= (u_1, \dots, u_T) \quad (d \times T) \\ X &= \text{vec}(X) \quad (d \times T \times 1) \\ \beta &= \text{vec}(B) \quad ((d^2 p^* + d) \times 1) \\ b &= \text{vec}(B') \quad ((d^2 p^* + d) \times 1) \\ U &= \text{vec}(U) \quad (dT \times 1) \end{aligned} \quad (3.4.1)$$

En utilisant cette notation pour  $t = 1, \dots, T$  le modèle VAR( $p^*$ ) donné par (3.1.1) peut être écrit d'une manière compacte comme suit :

$$X = BZ + U \quad (3.4.2)$$

où bien  $\text{vec}(X) = \text{vec}(BZ) + \text{vec}(U) = (Z' \otimes I_d) \text{vec}(B) + \text{vec}(U)$   
 où encore

$$X = (Z' \otimes I_d) \beta + U \quad (3.4.3)$$

Notons que la matrice de covariance de  $U = \text{vec}(U)$  est  $\Sigma_U = I_T \otimes \Sigma_U$

Donc l'estimation *LS* multivariée de  $\beta$  consiste à choisir l'estimateur qui minimise

$$\begin{aligned} S(\beta) &= U' (I_T \otimes \Sigma_U)^{-1} U = U' (I_T \otimes \Sigma_U^{-1}) U \\ &= (X - (Z' \otimes I_d) \beta)' (I_T \otimes \Sigma_U^{-1}) (X - (Z' \otimes I_d) \beta) \\ &= \text{vec}(X - BZ)' (I_T \otimes \Sigma_U^{-1}) \text{vec}(X - BZ) \\ &= X' (I_T \otimes \Sigma_U^{-1}) X + \beta' (Z \otimes I_d) (I_T \otimes \Sigma_U^{-1}) (Z' \otimes I_d) \beta \\ &\quad - 2\beta' (Z \otimes I_d) (I_T \otimes \Sigma_U^{-1}) X \\ &= X' (I_T \otimes \Sigma_U^{-1}) X + \beta' (ZZ' \otimes \Sigma_U^{-1}) \beta - 2\beta' (Z \otimes \Sigma_U^{-1}) X \end{aligned} \quad (3.4.4)$$

D'où,

$$\frac{\partial S(\beta)}{\partial \beta} = 2(ZZ' \otimes \Sigma_U^{-1}) \beta - 2(Z \otimes \Sigma_U^{-1}) X$$

En égalant à zéro, nous obtenons les équations normales

$(ZZ' \otimes \Sigma_U^{-1}) \hat{\beta} = (Z \otimes \Sigma_U^{-1}) X$ , et par conséquent, l'estimateur *LS* est

$$\hat{\beta} = ((ZZ')^{-1} \otimes \Sigma_U) (Z \otimes \Sigma_U^{-1}) X = ((ZZ')^{-1} Z \otimes I_d) X$$

La matrice hessienne de  $S(\beta)$  est définie positive ce qui confirme que  $\hat{\beta}$  minimise  $S(\beta)$  les estimateurs *LS* peuvent être écrits de façons différentes

$$\hat{\beta} = ((ZZ')^{-1} Z \otimes I_d) \text{vec}(X) = \text{vec}(XZ' (ZZ')^{-1}), \text{ donc}$$

$$\hat{B} = XZ' (ZZ')^{-1} = (BZ + U) Z' (ZZ')^{-1} = B + UZ' (ZZ')^{-1} \quad (3.4.5)$$

### 3.4.2 Propriétés asymptotiques des estimateurs des moindres carrés

Puisque les propriétés de l'estimateur *LS* sont difficiles à déduire analytiquement pour de petits échantillons nous nous concentrons sur les propriétés asymptotiques. La consistance et la normalité asymptotique de l'estimateur *LS* sont facilement établies si

$$\Gamma = \text{plim } ZZ' / T \quad (3.4.6)$$

$$\frac{1}{\sqrt{T}} (Z \otimes I_d) \mathbf{U} \xrightarrow[T \rightarrow \infty]{L} N(0, \Gamma \otimes \Sigma_U) \quad (3.4.7)$$

où  $L$  désigne la convergence en loi.  $c$  finie on a  $E(U_{it}U_{jt}U_{kt}U_{mt}) \leq c$  pour  $i, j, k, m = 1, \dots, d$  et tout  $t$

### Définition du bruit blanc standard

Un processus bruit blanc  $U_t = (u_{1t}, \dots, u_{dt})$  est appelé bruit blanc standard si les  $U_t$  sont des vecteurs aléatoire ssatisfaisant à  $E(U_t) = 0, \Sigma_U = E(U_t U_t')$  est non singulière où  $U_t$  et  $U_s$  sont indépendants pour  $s \neq t$  et pour constante  $c$  finie on a  $E(U_{it}U_{jt}U_{kt}U_{mt}) \leq c$  pour  $i, j, k, m = 1, \dots, d$  et tout  $t$

La dernière condition signifie que tous les moments d'ordre 4 existent et sont bornés. Evidemment si les  $U_t$  sont distribués normalement ils satisfont les exigences sur les moment avec cette définition il est facile d'établir les conditions pour la consistance et la normalité asymptotique des estimateurs  $LS$

### Proposition 3.4.1 (propriété asymptotique des estimateurs $LS$ )

Soit  $X_t$  un processus  $VAR(p^*)$   $d$ - dimensionnel défini par (3.1.1) avec un bruit blanc standard  $\hat{B} = XZ'(ZZ')^{-1}$  est l'estimateur  $LS$  du coefficient  $VAR$ . Alors  $\text{plim } \hat{B} = B$  et  $\sqrt{T}(\hat{\beta} - \beta) = \sqrt{T} \text{vec}(\hat{B} - B) \xrightarrow[T \rightarrow \infty]{L} N(0, \Gamma^{-1} \otimes \Sigma_U)$

Si  $U_t$  est un bruit blanc gaussien il satisfait la condition de proposition (3.4.1) ainsi la consistance et la normalité asymptotique de l'estimateur  $LS$  sont assurées pour un processus  $VAR(p^*)$   $X_t$  stable gaussien. La normalité de  $U_t$  implique la normalité de  $X_t$  pour les processus stables.

De (3.4.6) un estimateur consistant de  $\Gamma$  est  $\hat{\Gamma} = ZZ'/n$  car  $\Sigma_U = E(U_t U_t')$  un estimateur de cette matrice est

$$\begin{aligned} \widetilde{\Sigma}_U &= \frac{1}{T} \sum_{t=1}^n \hat{U}_t \hat{U}_t' = \frac{1}{T} (X - \hat{B}Z) (X - \hat{B}Z)' \\ &= \frac{1}{T} X \left( I_T - Z' (ZZ')^{-1} Z \right) \left( I_T - Z' (ZZ')^{-1} Z \right)' X' \\ &= \frac{1}{T} X \left( I_T - Z' (ZZ')^{-1} Z \right) X' \end{aligned}$$

Donc un estimateur sans biais

$$\hat{\Sigma}_U = \frac{T}{(T - dp^* - 1)} \widetilde{\Sigma}_U \quad (3.4.8)$$

### 3.4.3 L'estimation des moindres carrés et l'estimation de Yule-Walker

Estimation lorsque la moyenne du processus est connue

$$(x_t - \mu) = A_1(x_{t-1} - \mu) + \dots + A_{p^*}(x_{t-p^*} - \mu) + u_t \quad (3.4.9)$$

L'estimation par la méthode des moments du modèle (3.4.9) si la moyenne est connue sera donnée. Alors posons les mêmes notations que (3.2.3), donc peut écrire (3.4.9) pour  $t = 1, \dots, T$  d'une manière compacte comme suit :

$$X^0 = AY + U \quad (3.4.10)$$

$$\text{où bien } x^0 = (Y' \otimes I_d) \alpha + U \quad (3.4.11)$$

$$\hat{\alpha} = \left( (YY')^{-1} Y \otimes I_d \right) x^0 \quad (3.4.12)$$

$$\text{où bien } \hat{A} = X^0 Y' (YY')^{-1} \quad (3.4.13)$$

ce sont les estimateurs par la méthode des moments.

#### Remarque

Si  $x_t$  est stable et  $u_t$  est un bruit blanc standard on peut montrer que :

$$\sqrt{T}(\hat{\alpha} - \alpha) \rightarrow N(0, \Sigma_{\hat{\alpha}}) \text{ où } \Sigma_{\hat{\alpha}} = \Gamma_{\gamma}^{-1}(0) \otimes \Sigma_U \text{ et } \Gamma_{\gamma}(0) = E(X_t^0 X_t^{0'})$$

### 3.4.4 Estimation de la moyenne du processus

Si la moyenne n'est pas connue nous pouvons la estimer par le vecteur moyen de l'échantillon

$$\bar{x} = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T x_t$$

D'après (3.4.9)  $\bar{x}$  peut être écrite comme suit :

$$\begin{aligned} \bar{x} &= \mu + A_1 \left[ \bar{x} + \frac{1}{T} (x_0 - x_1) - \mu \right] + \dots \\ &+ A_{p^*} \left[ \bar{x} + \frac{1}{T} (x_{-p^*+1} + \dots + x_0 - x_{T-p^*+1} - \dots - x_T) - \mu \right] + \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T u_t \end{aligned}$$

donc

$$(I_d - A_1 - \dots - A_{p^*})(\bar{x} - \mu) = \frac{1}{T} z_t + \frac{1}{T} \sum_t u_t \quad (3.4.14)$$



où

$$z_t = \sum_{i=1}^{p^*} A_i \left[ \sum_{j=0}^{i-1} (x_{0-j} - x_{T-j}) \right]$$

et nous avons

$$E(z_t/\sqrt{T}) = \frac{1}{\sqrt{T}} E(z_t) = 0 \text{ et } \text{var}(z_t/\sqrt{T}) = \frac{1}{\sqrt{T}} \text{var}(z_t)$$

Au d'autre terme si  $x_t$  est stable  $z_t/\sqrt{T}$  converge vers zéro en moyenne quadratique, et

$\sqrt{T}(I_d - A_1 - \dots - A_{p^*})(\bar{x} - \mu)$  possède la même distribution asymptotique que  $\sum_t u_t/\sqrt{T}$  ceci par le théorème central limite

$$\frac{1}{\sqrt{T}} \sum_{t=1}^T u_t \rightarrow N(0, \Sigma_u)$$

### 3.4.5 Estimation lorsque la moyenne du processus est connue

Si le vecteur moyen  $\mu$  est peut être remplacé par  $\bar{x}$  dans les vecteurs et les matrices dans (3.2.3)

qui donne  $\hat{Y}, \hat{X}^0$ . Alors l'estimateur des moments est donné par :

$$\hat{\alpha} = \left( (\hat{Y}\hat{Y}')^{-1} \hat{Y} \otimes I_d \right) \hat{X}^0 \text{ qui est asymptotiquement équivalent à } \hat{\alpha}$$

### 3.4.6 Estimateur de Yule-Walker

L'estimateur *LS* peut être obtenu à partir des équations de Yule-Walker sont données dans le chapitre 1 par (1.3.18) et (1.3.19). Ceci donne

$$\Gamma_x(h) = [A_1, \dots, A_{p^*}] \begin{pmatrix} \Gamma_x(h-1) \\ \vdots \\ \Gamma_x(h-p^*) \end{pmatrix}, \quad h > 0$$

où bien

$$[\Gamma_x(1), \dots, \Gamma_x(p^*)] = [A_1, \dots, A_{p^*}] \begin{pmatrix} \Gamma_x(0) & \dots & \Gamma_x(p^*-1) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \Gamma_x(-p^*+1) & \dots & \Gamma_x(0) \end{pmatrix} = A \Gamma_\gamma(0)$$

et  $A = [\Gamma_x(1), \dots, \Gamma_x(p^*)] \Gamma_\gamma^{-1}(0)$

Nous estimons  $\Gamma_\gamma(0)$  par  $\widehat{Y}\widehat{Y}'/T$  et  $[\Gamma_x(1), \dots, \Gamma_x(p^*)]$  par  $\widehat{X}^0\widehat{Y}'/T$ . Alors nous avons :

$$\widehat{A} = \widehat{X}^0\widehat{Y}' \left( \widehat{Y}\widehat{Y}' \right)^{-1} \quad (3.4.15)$$

alternativement les moments des matrices  $\Gamma_x(k)$  peuvent être estimés par :

$$\widehat{\Gamma}_x(k) = \frac{1}{T+p^*-k} \sum_{t=-p^*+k+1}^T (x_t - \bar{x}^*) (x_{t-k} - \bar{x}^*)', \text{ où } \bar{x}^* = \frac{1}{T+p^*} \sum_{t=-p^*+1}^T x_t \quad (3.4.16)$$

On utilisant ces estimateurs dans (3.4.15), nous obtenons l'estimateur de Yule-Walker de  $A$ .

### 3.5 Estimation préliminaire dans le cadre d'un modèle VARMA( $p^*, q^*$ )

#### 3.5.1 Calcul des estimateurs par la méthode des moindres carrés multivariés

Les coefficients d'un modèle VARMA( $p^*, q^*$ ) dans la forme standard

$$X_t = A_1 X_{t-1} + \dots + A_p X_{t-p^*} + U_t + M_1 U_{t-1} + \dots + M_{q^*} U_{t-q^*}$$

pourraient être estimés par la méthode des moindres carrés multivariés (*LS*) si les  $U_t$  sont donnés. Pour déduire des estimateurs préliminaires pour les autres paramètres, l'idée est d'ajuster d'abord un processus autorégressif pur d'ordre assez grand ensuite d'utiliser les résidus estimés au lieu des vrais résidus. D'où nous ajustons un modèle VAR( $n$ )

$$X_t = \sum_{i=1}^n \Pi_i(n) X_{t-i} + U_t(n)$$

$n$  est un peu plus grand que  $p^*$  et  $q^*$ . De cette estimation, nous calculons les résidus

$$\widehat{U}_t(n) = X_t - \sum_{i=1}^n \widehat{\Pi}_i(n) X_{t-i}, \text{ les } \widehat{\Pi}_i(n) \text{ sont des estimateurs des moindres carrés.}$$

En suite nous posons

$$X = [A \ M] Y_n + U \quad (3.5.1)$$

où

$$X = [X_1, \dots, X_T], A = [A_1, \dots, A_{p^*}], M = [M_1, \dots, M_{q^*}], Y_n = [X_0, \dots, X_{T-1}]$$

$$\text{et } X_t = \begin{pmatrix} x_t \\ \vdots \\ x_{t-p^*+1} \\ \hat{U}_t(n) \\ \vdots \\ \hat{U}_{t-q^*+1}(n) \end{pmatrix}$$

U est une matrice ( $d \times T$ ) des résidus habituellement des restrictions seront imposées sur les paramètres A et M du modèle, par exemple  $\text{vec}[A \ M] = R\gamma$ , en appliquant l'opérateur  $\text{vec}$  à (3.5.1) et en substituant  $R\gamma$  à  $\text{vec}[A \ M]$  nous obtenons  $\text{vec}(X) = (Y_n' \otimes I_d) R\gamma + \text{vec}(U)$  et l'estimateur des moindres carrés de  $\gamma$  est  $\hat{\gamma}(n) = [R' (Y_n Y_n' \otimes I_d) R]^{-1} R' (Y_n \otimes I_d) \text{vec}(X)$

En utilisant cet estimateur, un nouvel ensemble de résidus est obtenu

$\text{vec}(U) = \text{vec}(X) - (Y_n' \otimes I_d) R\hat{\gamma}(n)$  et on l'utilise pour obtenir une estimation de la covariance du bruit blanc

$$\tilde{\Sigma}_U(n) = \hat{U}\hat{U}'/T$$

### 3.5.2 Résultats numériques

Nous générons successivement  $T$  observations à partir des modèles suivants :

Modèle 7

Modèle autorégressif 2-dimensionnel d'ordre 1 simulé d'après l'équation :

$$X(t) + A(1)X(t-1) = U(t), U_t \sim \mathcal{N}(0, \Sigma_U).$$

Valeurs de paramètres

$$\left\{ A(1) = \begin{pmatrix} 0.4 & 0.3 \\ 0.6 & 0.5 \end{pmatrix}, \Sigma_U = \begin{pmatrix} 0.7 & 0.4 \\ 0.4 & 0.5 \end{pmatrix} \right.$$

Modèle 8

Modèle autorégressif 2- dimensionnel d'ordre 2 simulé d'après l'équation :

$$X(t) + A(1)X(t-1) + A(2)X(t-2) = U(t), U_t \sim \mathcal{N}(0, \Sigma_U).$$

Valeurs de paramètres

$$\left\{ A(1) = \begin{pmatrix} 0.2 & 0.5 \\ 0.1 & -0.3 \end{pmatrix}, A(2) = \begin{pmatrix} 0.3 & 0.2 \\ 0.7 & -0.4 \end{pmatrix}, \Sigma_U = \begin{pmatrix} 0.6 & 0.3 \\ 0.3 & 0.4 \end{pmatrix} \right.$$



### Modèle 9

Modèle autorégressif 4-dimensionnel d'ordre 1 simulé d'après l'équation :

$$X(t) + A(1)X(t-1) = U(t), U_t \sim \mathcal{N}(0, \Sigma_U).$$

Valeurs de paramètres

$$\left\{ \begin{array}{l} A(1) = \begin{pmatrix} -0.3 & 0.1 & -0.1 & 0.2 \\ -0.4 & 0.2 & -0.3 & 0.1 \\ 0.3 & -0.5 & 0.1 & 0.7 \\ 0.1 & 0.5 & 0.6 & 0.3 \end{pmatrix}, \quad \Sigma_U = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 5 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \end{array} \right.$$

### Modèle 10

Modèle autorégressif 2-dimensionnel d'ordre 4 simulé d'après l'équation :

$$X(t) + A(1)X(t-1) + A(2)X(t-2) + A(3)X(t-3) + A(4)X(t-4) = U(t), U_t \sim \mathcal{N}(0, \Sigma_U).$$

Valeurs de paramètres

$$\left\{ \begin{array}{l} A(1) = \begin{pmatrix} 0.3 & 0.1 \\ -0.1 & 0.2 \end{pmatrix}, \quad A(2) = \begin{pmatrix} -0.4 & 0.2 \\ 0.3 & 0.5 \end{pmatrix} \\ A(3) = \begin{pmatrix} 0.7 & 0.4 \\ -0.3 & 0.1 \end{pmatrix}, \quad A(4) = \begin{pmatrix} -0.4 & 0.4 \\ -0.3 & 0.3 \end{pmatrix}, \quad \Sigma_U = \begin{pmatrix} 0.7 & 0.4 \\ . & 0.5 \end{pmatrix} \end{array} \right.$$

### Modèle 11

Modèle autorégressif 2-dimensionnel d'ordre 7 simulé d'après l'équation :

$$X(t) + A(1)X(t-1) + A(2)X(t-2) + A(3)X(t-3) + A(4)X(t-4) + A(5)X(t-5) + A(6)X(t-6) + A(7)X(t-7) = U(t), U_t \sim \mathcal{N}(0, \Sigma_U).$$

Valeurs de paramètres

$$\left\{ \begin{array}{l} A(1) = \begin{pmatrix} -0.3 & -0.1 \\ 0.1 & 0.7 \end{pmatrix}, \quad A(2) = \begin{pmatrix} 0.1 & 0.1 \\ -0.1 & 0.5 \end{pmatrix}, \quad A(3) = \begin{pmatrix} 0.2 & -0.9 \\ -0.1 & 0.4 \end{pmatrix} \\ A(4) = \begin{pmatrix} 0.1 & -0.2 \\ -0.9 & -0.7 \end{pmatrix}, \quad A(5) = \begin{pmatrix} -0.3 & 0.9 \\ 0.3 & -0.1 \end{pmatrix}, \quad A(6) = \begin{pmatrix} 0.6 & 0.5 \\ 0.6 & 0.2 \end{pmatrix} \\ A(7) = \begin{pmatrix} -0.5 & 0.5 \\ -0.5 & 0.6 \end{pmatrix}, \quad \Sigma_U = \begin{pmatrix} 0.7 & 0.4 \\ 0.4 & 0.5 \end{pmatrix}. \end{array} \right.$$

### Représentation des résultats

Les estimations des moindres carrés multivariés de chaque modèle sont données pour les diverses valeurs des paramètres et les diverses tailles d'échantillons; les résultats sont présentés comme suit :

Les tableaux (3-1), (3-2), ..., (3-5) représentent les résultats des simulations du modèle 7, modèle 8, modèle 9, le modèle 10 et le modèle 11 respectivement et ceci à partir de 1000 réalisations de diverses tailles de l'échantillon et pour les diverses valeurs de paramètres.

Les valeurs de *RMSE* calculées de tous les paramètres de chaque modèle de ces modèles sont représentées graphiquement de la manière suivante :

La figure (3, *i*) : représente le graphe des valeurs de *RMSE* calculées pour le modèle 7, modèle 8, modèle 9, modèle 10 et le modèle 11, où ( $i = 1, 2, 3, 4, 5$ ).

Paramètres	$\hat{A}_1$	$\hat{\Sigma}_U$
T=40 Moyenne	$\begin{pmatrix} 0.3436 & 0.3360 \\ 0.5724 & 0.5215 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0.7370 & 0.4354 \\ . & 0.5225 \end{pmatrix}$
T=80 Moyenne	$\begin{pmatrix} 0.4212 & 0.2836 \\ 0.6098 & 0.4942 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0.7182 & 0.4128 \\ . & 0.5097 \end{pmatrix}$
T=120 Moyenne	$\begin{pmatrix} 0.3939 & 0.3011 \\ 0.6049 & 0.4991 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0.7191 & 0.4256 \\ . & 0.5223 \end{pmatrix}$
T=160 Moyenne	$\begin{pmatrix} 0.3870 & 0.3086 \\ 0.6042 & 0.4996 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0.7061 & 0.4008 \\ . & 0.5004 \end{pmatrix}$
T=200 Moyenne	$\begin{pmatrix} 0.3851 & 0.3068 \\ 0.5990 & 0.5010 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0.6938 & 0.4032 \\ . & 0.5081 \end{pmatrix}$
T=240 Moyenne	$\begin{pmatrix} 0.3849 & 0.3081 \\ 0.5969 & 0.5029 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0.6979 & 0.4020 \\ . & 0.5061 \end{pmatrix}$
T=280 Moyenne	$\begin{pmatrix} 0.3967 & 0.3034 \\ 0.6063 & 0.4989 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0.6898 & 0.3972 \\ . & 0.5022 \end{pmatrix}$
T=320 Moyenne	$\begin{pmatrix} 0.4062 & 0.2964 \\ 0.6075 & 0.4971 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0.6953 & 0.3998 \\ * & 0.5018 \end{pmatrix}$
T=360 Moyenne	$\begin{pmatrix} 0.3999 & 0.3006 \\ 0.5992 & 0.5034 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0.6996 & 0.4014 \\ . & 0.4966 \end{pmatrix}$
T=400 Moyenne	$\begin{pmatrix} 0.3924 & 0.3060 \\ 0.5960 & 0.5058 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0.6954 & 0.3982 \\ . & 0.4984 \end{pmatrix}$

Tableau 3-1a

Paramètres	$\hat{A}_1$	$\hat{\Sigma}_U$
T=40 RMSE	$\begin{pmatrix} 0.2277 & 0.1525 \\ 0.1857 & 0.1260 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0.1811 & 0.1417 \\ . & 0.1304 \end{pmatrix}$
T=80 RMSE	$\begin{pmatrix} 0.1507 & 0.1054 \\ 0.1200 & 0.0798 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0.1225 & 0.0869 \\ . & 0.0922 \end{pmatrix}$
T=120 RMSE	$\begin{pmatrix} 0.1077 & 0.0757 \\ 0.0918 & 0.0653 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0.0874 & 0.0679 \\ . & 0.0677 \end{pmatrix}$
T=160 RMSE	$\begin{pmatrix} 0.1017 & 0.0702 \\ 0.0887 & 0.0607 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0.0809 & 0.0613 \\ . & 0.0577 \end{pmatrix}$
T=200 RMSE	$\begin{pmatrix} 0.0777 & 0.0558 \\ 0.0787 & 0.0566 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0.0590 & 0.0483 \\ . & 0.0574 \end{pmatrix}$
T=240 RMSE	$\begin{pmatrix} 0.0729 & 0.0536 \\ 0.0760 & 0.0555 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0.0586 & 0.0444 \\ . & 0.0428 \end{pmatrix}$
T=280 RMSE	$\begin{pmatrix} 0.0683 & 0.0516 \\ 0.0652 & 0.0462 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0.0559 & 0.0406 \\ . & 0.0410 \end{pmatrix}$
T=320 RMSE	$\begin{pmatrix} 0.0663 & 0.0515 \\ 0.0615 & 0.0460 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0.0523 & 0.0397 \\ . & 0.0403 \end{pmatrix}$
T=360 RMSE	$\begin{pmatrix} 0.0649 & 0.0512 \\ 0.0614 & 0.0452 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0.0513 & 0.0383 \\ . & 0.0381 \end{pmatrix}$
T=400 RMSE	$\begin{pmatrix} 0.0626 & 0.0483 \\ 0.0582 & 0.0420 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0.0503 & 0.0361 \\ . & 0.0308 \end{pmatrix}$

Tableau 3-1 b

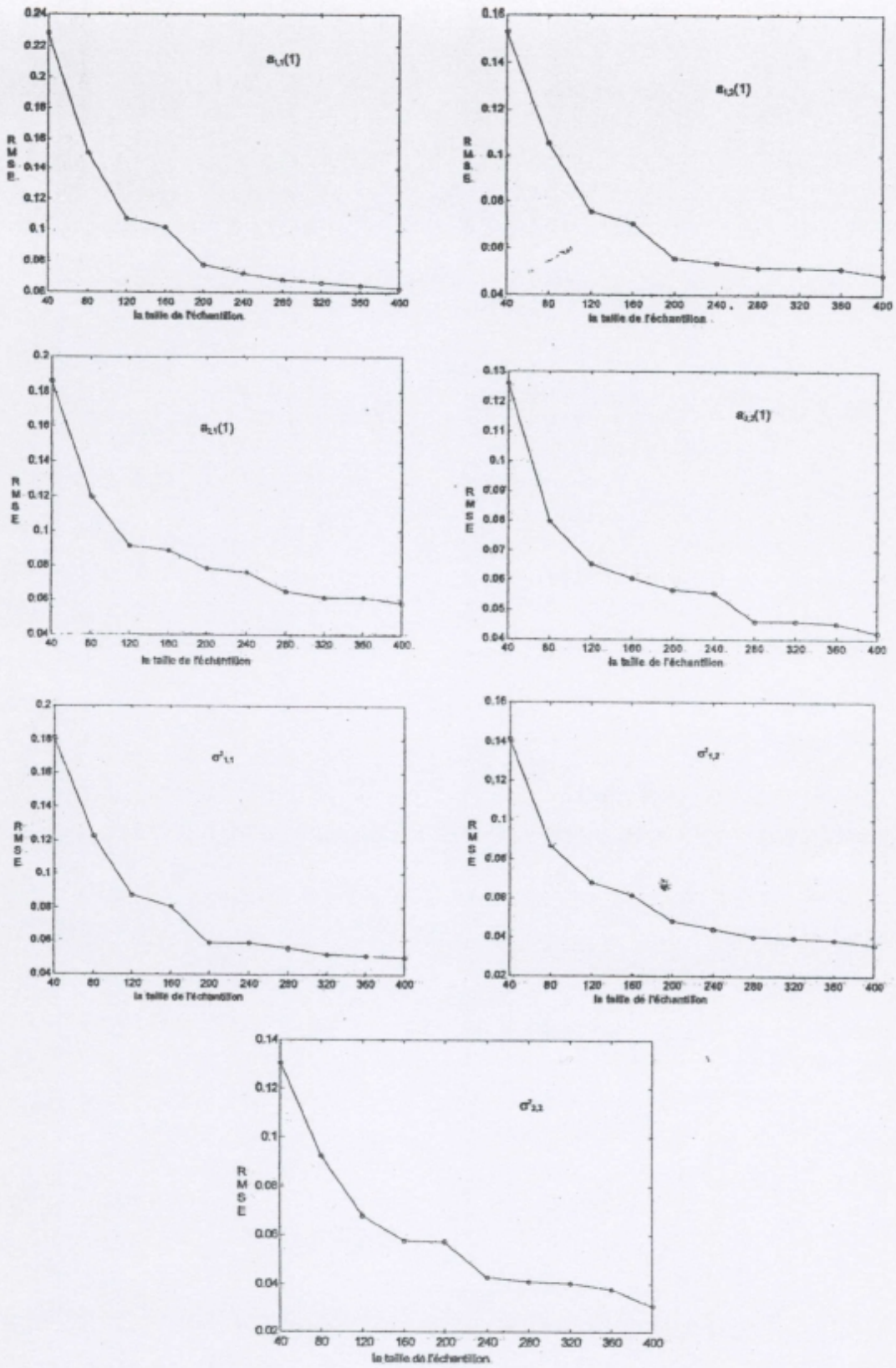


Figure (3-1) : Les valeurs de RMSE calculées pour le modèle 7



Paramètres	$\hat{A}_1$	$\hat{A}_2$	$\hat{\Sigma}_U$
T=40 Moyenne	$\begin{pmatrix} 0.2366 & 0.4947 \\ 0.1508 & -0.3025 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0.2817 & 0.1861 \\ 0.6784 & -0.4084 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0.6102 & 0.3053 \\ . & 0.3978 \end{pmatrix}$
T=80 Moyenne	$\begin{pmatrix} 0.2085 & 0.5019 \\ 0.1116 & -0.3009 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0.2870 & 0.2048 \\ 0.6973 & -0.3928 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0.5774 & 0.2918 \\ . & 0.3992 \end{pmatrix}$
T=120 Moyenne	$\begin{pmatrix} 0.1958 & 0.5235 \\ 0.1047 & -0.2870 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0.2904 & 0.2111 \\ 0.6968 & -0.3970 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0.5993 & 0.3061 \\ . & 0.4039 \end{pmatrix}$
T=160 Moyenne	$\begin{pmatrix} 0.2140 & 0.4799 \\ 0.1041 & -0.3038 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0.2988 & 0.2071 \\ 0.6999 & -0.3853 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0.6001 & 0.3013 \\ . & 0.4029 \end{pmatrix}$
T=200 Moyenne	$\begin{pmatrix} 0.2160 & 0.4933 \\ 0.1076 & -0.22925 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0.2876 & 0.2033 \\ 0.6953 & -0.3996 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0.5947 & 0.3016 \\ . & 0.4000 \end{pmatrix}$
T=240 Moyenne	$\begin{pmatrix} 0.2021 & 0.5026 \\ 0.1011 & -0.2943 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0.2941 & 0.2081 \\ 0.7014 & -0.3926 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0.5971 & 0.3012 \\ . & 0.3955 \end{pmatrix}$
T=280 Moyenne	$\begin{pmatrix} 0.1657 & 0.4953 \\ 0.0991 & -0.2970 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0.3089 & 0.2014 \\ 0.7022 & -0.3908 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0.5938 & 0.2990 \\ . & 0.3997 \end{pmatrix}$
T=320 Moyenne	$\begin{pmatrix} 0.2030 & 0.4979 \\ 0.1049 & -0.2989 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0.2889 & 0.2090 \\ 0.6947 & -0.3940 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0.6014 & 0.3038 \\ . & 0.4019 \end{pmatrix}$
T=360 Moyenne	$\begin{pmatrix} 0.2087 & 0.4923 \\ 0.1074 & -0.3066 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0.2997 & 0.1881 \\ 0.7024 & -0.4052 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0.6021 & 0.3023 \\ . & 0.3996 \end{pmatrix}$
T=400 Moyenne	$\begin{pmatrix} 0.2044 & 0.5004 \\ 0.0975 & -0.3015 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0.2996 & 0.2046 \\ 0.7048 & -0.3906 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0.6028 & 0.3056 \\ . & 0.4041 \end{pmatrix}$

Tableau 3-2 a

Paramètres	$\widehat{A}_1$	$\widehat{A}_2$	$\widehat{\Sigma}_U$
T=40 <i>RMSE</i>	$\begin{pmatrix} 0.2145 & 0.2009 \\ 0.1741 & 0.1569 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0.1701 & 0.2009 \\ 0.1361 & 0.1658 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0.1371 & 0.0835 \\ . & 0.0769 \end{pmatrix}$
T=80 <i>RMSE</i>	$\begin{pmatrix} 0.1159 & 0.1150 \\ 0.1089 & 0.1110 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0.0990 & 0.1292 \\ 0.0811 & 0.1055 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0.0911 & 0.0675 \\ . & 0.0567 \end{pmatrix}$
T=120 <i>RMSE</i>	$\begin{pmatrix} 0.1076 & 0.0968 \\ 0.0921 & 0.0776 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0.0668 & 0.1104 \\ 0.0609 & 0.0870 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0.0718 & 0.0511 \\ . & 0.0522 \end{pmatrix}$
T=160 <i>RMSE</i>	$\begin{pmatrix} 0.0988 & 0.0936 \\ 0.0755 & 0.0688 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0.0664 & 0.0973 \\ 0.0524 & 0.0750 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0.0648 & 0.0477 \\ . & 0.0420 \end{pmatrix}$
T=200 <i>RMSE</i>	$\begin{pmatrix} 0.0835 & 0.0871 \\ 0.0587 & 0.0625 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0.0634 & 0.0880 \\ 0.0490 & 0.0651 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0.0638 & 0.0445 \\ . & 0.0414 \end{pmatrix}$
T=240 <i>RMSE</i>	$\begin{pmatrix} 0.0741 & 0.0716 \\ 0.0579 & 0.0522 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0.0615 & 0.0762 \\ 0.0449 & 0.0583 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0.0621 & 0.0372 \\ . & 0.0356 \end{pmatrix}$
T=280 <i>RMSE</i>	$\begin{pmatrix} 0.0664 & 0.0606 \\ 0.0567 & 0.0513 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0.0553 & 0.0613 \\ 0.0429 & 0.0538 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0.0574 & 0.0336 \\ . & 0.0320 \end{pmatrix}$
T=320 <i>RMSE</i>	$\begin{pmatrix} 0.0648 & 0.0589 \\ 0.0515 & 0.0506 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0.0504 & 0.0600 \\ 0.0395 & 0.0498 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0.0471 & 0.0329 \\ . & 0.0318 \end{pmatrix}$
T=360 <i>RMSE</i>	$\begin{pmatrix} 0.0562 & 0.0531 \\ 0.0507 & 0.0499 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0.0500 & 0.0595 \\ 0.0378 & 0.0485 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0.0413 & 0.0285 \\ . & 0.0310 \end{pmatrix}$
T=400 <i>RMSE</i>	$\begin{pmatrix} 0.0556 & 0.0509 \\ 0.0472 & 0.0440 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0.0466 & 0.0568 \\ 0.0328 & 0.0473 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0.0403 & 0.0285 \\ . & 0.0286 \end{pmatrix}$

Tableau 3-2 b

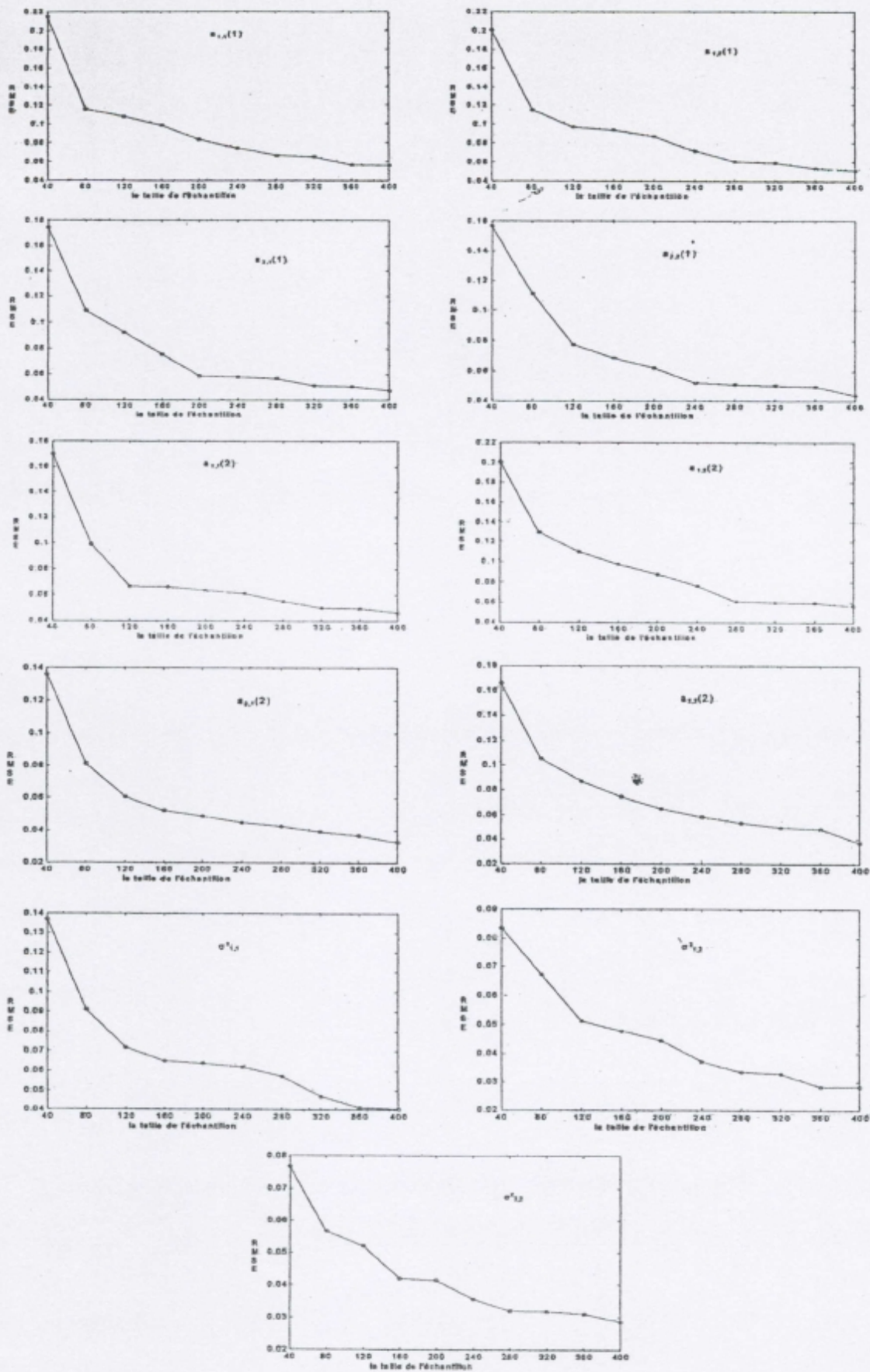


Figure (3-2) : Les valeurs de RMSE calculées pour le modèle 8

paramètres	$\hat{A}(1)$	$\hat{\Sigma}_U$
40 M	$\begin{pmatrix} -0.2985 & 0.1372 & -0.1082 & 0.2111 \\ -0.4008 & 0.1796 & -0.2922 & 0.0820 \\ 0.3053 & -0.4977 & 0.0789 & 0.6728 \\ 0.1071 & 0.5093 & 0.0789 & 0.3075 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1.9795 & 0.0131 & 1.9788 & 0.0051 \\ . & 1.0125 & 1.0092 & 0.0034 \\ . & . & 4.9444 & 0.9851 \\ . & . & . & 1.0039 \end{pmatrix}$
80 M	$\begin{pmatrix} -0.3083 & 0.1040 & -0.0985 & 0.1974 \\ -0.3970 & 0.1951 & -0.2930 & 0.0944 \\ 0.2860 & -0.5001 & 0.1022 & 0.6805 \\ 0.0931 & 0.4963 & 0.6014 & 0.2966 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1.9770 & 0.0009 & 1.9551 & 0.0128 \\ . & 1.0017 & 1.0186 & 0.0250 \\ . & . & 4.9721 & 0.1494 \\ . & . & . & 0.0006 \end{pmatrix}$
120 M	$\begin{pmatrix} -0.2952 & 0.1231 & -0.1092 & 0.2119 \\ -0.3974 & 0.1923 & -0.2977 & 0.0970 \\ 0.3133 & -0.4877 & 0.0954 & 0.6936 \\ 0.1036 & 0.5001 & 0.6031 & 0.2944 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1.9738 & 0.0128 & 1.9747 & 0.0098 \\ . & 1.0132 & 1.0261 & 0.0016 \\ . & . & 4.9605 & 0.9961 \\ . & . & . & 0.9943 \end{pmatrix}$
160 M	$\begin{pmatrix} -0.2998 & 0.1077 & -0.1014 & 0.2016 \\ -0.3922 & 0.2015 & -0.2999 & 0.1016 \\ 0.3064 & -0.4922 & 0.0956 & 0.7000 \\ 0.1087 & 0.5005 & 0.5955 & 0.3053 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1.9659 & 0.0016 & 1.9676 & 0.0023 \\ . & 0.9938 & 0.9874 & 0.0012 \\ . & . & 4.9451 & 0.9946 \\ . & . & . & 0.9983 \end{pmatrix}$
200 M	$\begin{pmatrix} -0.2968 & 0.1131 & -0.1010 & 0.2027 \\ -0.4053 & 0.1964 & -0.2965 & 0.0953 \\ 0.2965 & -0.4923 & 0.0966 & 0.6950 \\ 0.1021 & 0.5037 & 0.5954 & 0.3038 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 2.001 & 0.0050 & 2.0167 & 0.0004 \\ . & 0.9994 & 0.9963 & 0.0013 \\ . & . & 5.0051 & 1.0029 \\ . & . & . & 1.0034 \end{pmatrix}$

Tableau 3-3 a

paramètres	$\hat{A}(1)$	$\hat{\Sigma}_U$
T=40 R	$\begin{pmatrix} 0.1278 & 0.1277 & 0.0709 & 0.0897 \\ 0.0759 & 0.0867 & 0.0469 & 0.0608 \\ 0.1427 & 0.2023 & 0.1101 & 0.1527 \\ 0.0870 & 0.0840 & 0.0439 & 0.0605 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0.2833 & 0.1442 & 0.3485 & 0.1370 \\ . & 0.1544 & 0.2775 & 0.0993 \\ . & . & 0.0758 & 0.2470 \\ . & . & . & 0.1534 \end{pmatrix}$
T=80 R	$\begin{pmatrix} 0.0839 & 0.0791 & 0.0426 & 0.0656 \\ 0.0523 & 0.0632 & 0.0318 & 0.0414 \\ 0.1273 & 0.1242 & 0.0724 & 0.1069 \\ 0.0509 & 0.0569 & 0.0310 & 0.0463 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0.1807 & 0.1083 & 0.2482 & 0.0891 \\ . & 0.0974 & 0.1791 & 0.0830 \\ . & . & 0.0433 & 0.1494 \\ . & . & . & 0.0888 \end{pmatrix}$
T=120 R	$\begin{pmatrix} 0.0729 & 0.0685 & 0.0394 & 0.0517 \\ 0.0469 & 0.0487 & 0.0245 & 0.0359 \\ 0.1031 & 0.1171 & 0.0552 & 0.0829 \\ 0.0425 & 0.0519 & 0.0244 & 0.0347 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0.1493 & 0.0844 & 0.2292 & 0.0815 \\ . & 0.0867 & 0.1533 & 0.0606 \\ . & . & 0.0424 & 0.1407 \\ . & . & . & 0.0768 \end{pmatrix}$
T=160 R	$\begin{pmatrix} 0.0597 & 0.0562 & 0.0305 & 0.0420 \\ 0.0429 & 0.0412 & 0.0229 & 0.0314 \\ 0.0933 & 0.1007 & 0.0523 & 0.0696 \\ 0.0406 & 0.0378 & 0.0231 & 0.0283 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0.1437 & 0.0685 & 0.1776 & 0.0598 \\ . & 0.0761 & 0.1238 & 0.0539 \\ . & . & 0.0369 & 0.1261 \\ . & . & . & 0.0714 \end{pmatrix}$
T=200 R	$\begin{pmatrix} 0.0537 & 0.0475 & 0.0270 & 0.0405 \\ 0.0373 & 0.0383 & 0.0199 & 0.0246 \\ 0.0795 & 0.0830 & 0.0431 & 0.0604 \\ 0.0358 & 0.0334 & 0.0211 & 0.0266 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0.1173 & 0.0594 & 0.1484 & 0.0526 \\ . & 0.0611 & 0.1204 & 0.0522 \\ . & . & 0.0286 & 0.1106 \\ . & . & . & 0.0598 \end{pmatrix}$

Tableau 3-3 b

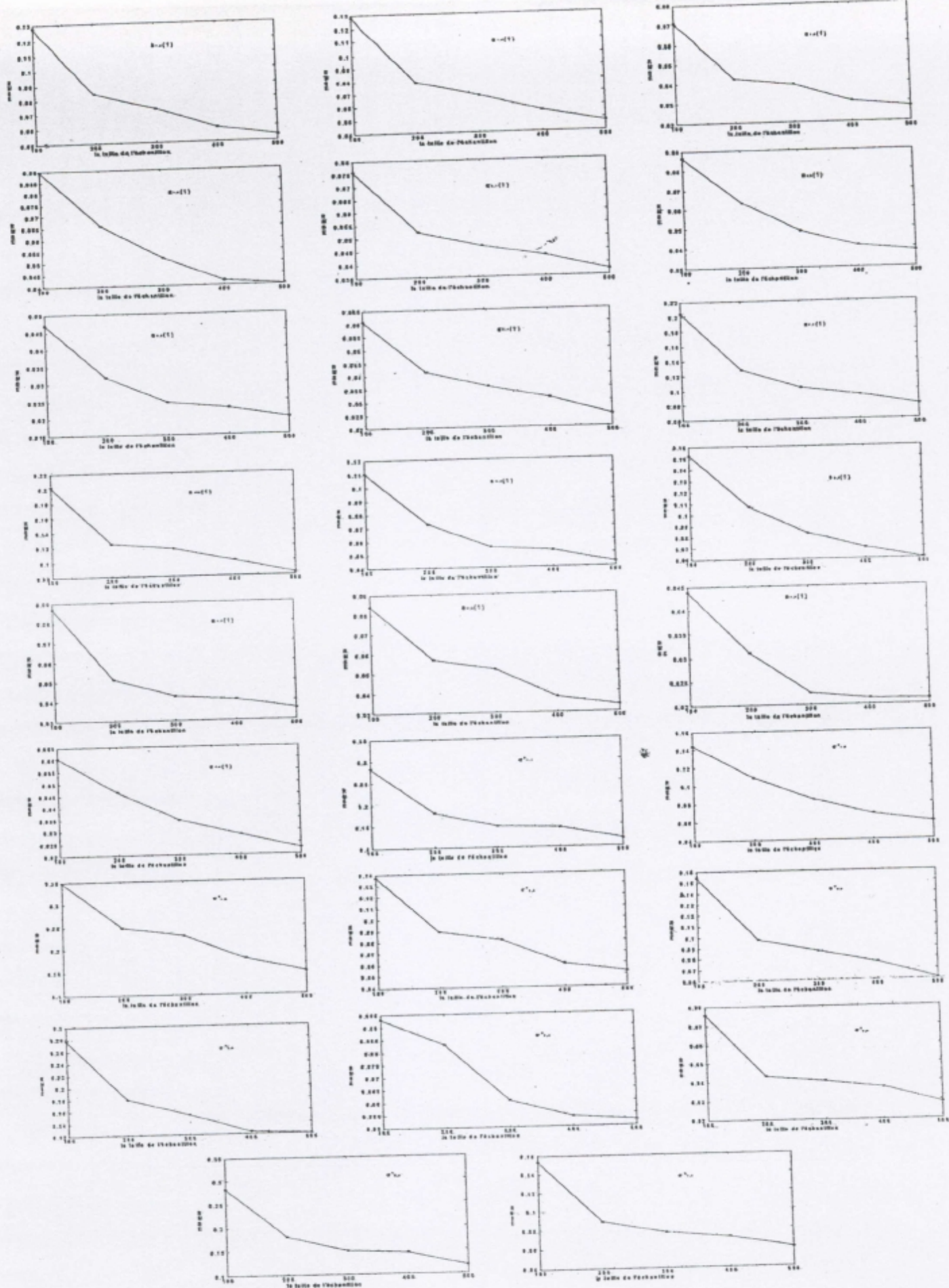


Figure (3-3) : Les valeurs de RMSE calculées pour le modèle 9

Paramètres	40	80	120
$\hat{A}(1)$	$\begin{pmatrix} .3129 & .1329 \\ -.0910 & .2335 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} .2855 & .1248 \\ -.1027 & .2048 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} .2939 & .1154 \\ -.1048 & .2147 \end{pmatrix}$
$\hat{A}(2)$	$\begin{pmatrix} -.4176 & .2290 \\ .2675 & .5464 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -.3806 & .1987 \\ .3147 & .5021 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -.3856 & .1998 \\ .3150 & .5014 \end{pmatrix}$
$\hat{A}(3)$	$\begin{pmatrix} .7232 & .4284 \\ -.3261 & .0674 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} .6864 & .3786 \\ -.2967 & .0868 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} .6961 & .3882 \\ -.2987 & .0831 \end{pmatrix}$
$\hat{A}(4)$	$\begin{pmatrix} -.3397 & .3419 \\ -.3605 & .3370 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -.3706 & .3914 \\ -.2850 & .2807 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -.3841 & .3828 \\ -.2873 & .2810 \end{pmatrix}$
$\hat{\Sigma}_U$	$\begin{pmatrix} .7256 & .4407 \\ . & .5332 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} .7078 & .4109 \\ . & .5104 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} .7169 & .4194 \\ . & .5149 \end{pmatrix}$

Paramètres	160	200
$\hat{A}(1)$	$\begin{pmatrix} .2912 & .1118 \\ -.1003 & .2026 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} .2904 & .1097 \\ -.1041 & .2035 \end{pmatrix}$
$\hat{A}(2)$	$\begin{pmatrix} -.3892 & .2008 \\ .3088 & .4986 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -.3988 & .1994 \\ .3035 & .5008 \end{pmatrix}$
$\hat{A}(3)$	$\begin{pmatrix} .6933 & .3880 \\ -.2993 & .0899 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} .6981 & .4048 \\ -.2964 & .0997 \end{pmatrix}$
$\hat{A}(4)$	$\begin{pmatrix} -.3854 & .3977 \\ -.2941 & .2950 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -.3864 & .3884 \\ -.2923 & .2877 \end{pmatrix}$
$\hat{\Sigma}_U$	$\begin{pmatrix} .6995 & .4025 \\ . & .5059 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} .6995 & .4043 \\ . & .5063 \end{pmatrix}$

Tableau 3-4 a

paramètres	$\hat{A}(1)$	$\hat{A}(2)$	$\hat{A}(3)$
40 <i>RMSE</i>	$\begin{pmatrix} .1189 & .1572 \\ .1074 & .1295 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} .1331 & .1625 \\ .1083 & .1307 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} .1255 & .1509 \\ .1028 & .1277 \end{pmatrix}$
80 <i>RMSE</i>	$\begin{pmatrix} .0823 & .1045 \\ .0838 & .0862 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} .0536 & .0744 \\ .0428 & .0582 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} .0741 & .0824 \\ .0629 & .0639 \end{pmatrix}$
120 <i>RMSE</i>	$\begin{pmatrix} .0751 & .0960 \\ .0598 & .0752 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} .0421 & .0585 \\ .0352 & .0492 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} .0650 & .0593 \\ .0518 & .0524 \end{pmatrix}$
160 <i>RMSE</i>	$\begin{pmatrix} .0695 & .0751 \\ .0589 & .0677 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} .0397 & .0506 \\ .0330 & .0417 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} .0565 & .0576 \\ .0508 & .0470 \end{pmatrix}$
200 <i>RMSE</i>	$\begin{pmatrix} .0564 & .0720 \\ .0509 & .0618 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} .0349 & .0484 \\ .0288 & .0383 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} .0505 & .0555 \\ .0455 & .0438 \end{pmatrix}$

paramètres	$\hat{A}(4)$	$\hat{\Sigma}_U$
40 <i>RMSE</i>	$\begin{pmatrix} .1218 & .1422 \\ .1075 & .1374 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} .0960 & .0804 \\ . & .0775 \end{pmatrix}$
80 <i>RMSE</i>	$\begin{pmatrix} .0874 & .0821 \\ .0818 & .0654 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} .0721 & .0593 \\ . & .0531 \end{pmatrix}$
120 <i>RMSE</i>	$\begin{pmatrix} .0812 & .0610 \\ .0609 & .0546 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} .0631 & .0486 \\ . & .0486 \end{pmatrix}$
160 <i>RMSE</i>	$\begin{pmatrix} .0628 & .0574 \\ .0599 & .0465 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} .0418 & .0347 \\ . & .0393 \end{pmatrix}$
200 <i>RMSE</i>	$\begin{pmatrix} .0500 & .0513 \\ .0545 & .0445 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} .0402 & .0297 \\ . & .0284 \end{pmatrix}$

Tableau 3-4 b



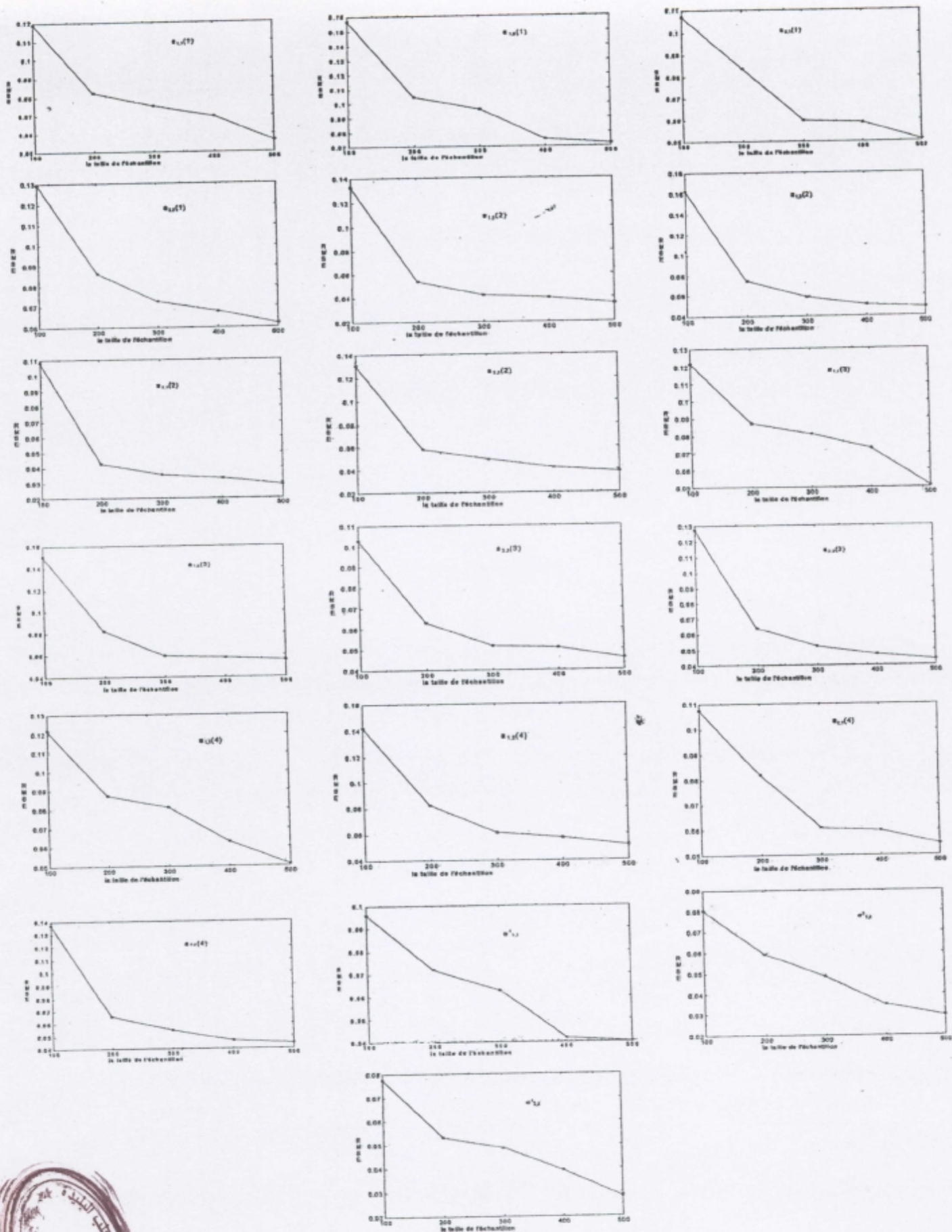


Figure (3-4) : Les valeurs de RMSE calculées pour le modèle 10

Paramètres	40	80	120
$\hat{A}(1)$ Moyenne	( $-.3229$ $-.1327$ $.1490$ $-.6334$ )	( $-.2989$ $.1227$ $.1002$ $-.6884$ )	( $-.3121$ $-.1013$ $.1011$ $-.6937$ )
$\hat{A}(2)$ Moyenne	( $.1248$ $.1290$ $-.1154$ $.3387$ )	( $.1146$ $.1280$ $-.1155$ $.3628$ )	( $.1118$ $.1159$ $-.1059$ $.3817$ )
$\hat{A}(3)$ Moyenne	( $.1982$ $-.8994$ $-.1054$ $.4351$ )	( $.1999$ $-.8874$ $-.1019$ $.4051$ )	( $.2019$ $-.8984$ $-.1110$ $.3981$ )
$\hat{A}(4)$ Moyenne	( $.1337$ $-.2319$ $-.8905$ $-.6870$ )	( $.1227$ $-.1997$ $-.8805$ $-.6985$ )	( $.1124$ $-.2134$ $-.9005$ $-.6898$ )
$\hat{A}(5)$ Moyenne	( $-.3629$ $.9127$ $.2714$ $-.1123$ )	( $-.3229$ $.9127$ $.2714$ $-.1123$ )	( $-.3229$ $.9127$ $.2714$ $-.1123$ )
$\hat{A}(6)$ Moyenne	( $.6316$ $.51290$ $.6851$ $.2154$ )	( $.5966$ $.4929$ $.5981$ $.1985$ )	( $.5877$ $.4899$ $.6016$ $.2019$ )
$\hat{A}(7)$ Moyenne	( $-.5435$ $.4984$ $-.5311$ $.6374$ )	( $-.5135$ $.4984$ $-.5211$ $.5974$ )	( $.5037$ $.4998$ $-.5111$ $..$ )
$\widehat{\Sigma}_U$ Moyenne	( $.7246$ $.4407$ $..$ $.5332$ )	( $.7068$ $.4108$ $..$ $.5104$ )	( $.7169$ $.4193$ $..$ $.5149$ )

Paramètres	160	200
$\hat{A}(1)$ Moyenne	( $-.3130$ $-.1020$ $.1100$ $-.6928$ )	( $-.3001$ $-.1012$ $.1000$ $-.7101$ )
$\hat{A}(2)$ Moyenne	( $.1123$ $.1148$ $-.1147$ $.3824$ )	( $.1028$ $.1092$ $-.1031$ $.4071$ )
$\hat{A}(3)$ Moyenne	( $.1989$ $-.8897$ $-.1021$ $.3998$ )	( $.2019$ $-.8987$ $-.1003$ $.4051$ )
$\hat{A}(4)$ Moyenne	( $.1131$ $-.2043$ $-.9017$ $-.6997$ )	( $.1037$ $-.2003$ $-.9012$ $-.6998$ )
$\hat{A}(5)$ Moyenne	( $-.3234$ $.9129$ $.2714$ $-.1123$ )	( $-.3122$ $.9012$ $.2769$ $-.1025$ )
$\hat{A}(6)$ Moyenne	( $.5967$ $.4999$ $.6019$ $.2104$ )	( $.6031$ $.4979$ $.5998$ $.1954$ )
$\hat{A}(7)$ Moyenne	( $-.4947$ $.4998$ $-.5012$ $.6074$ )	( $-.5013$ $.4999$ $-.4989$ $.6001$ )
$\widehat{\Sigma}_U$ Moyenne	( $.7059$ $.4155$ $..$ $.5104$ )	( $.6995$ $.4021$ $..$ $.5058$ )

Tableau 3-5 a

Paramètres	40	80	120
$\hat{A}(1)$ RMSE	(.1177 .1563) (.1064 .1185)	(.0813 .1033) (.0828 .0852)	(.0741 .0966) (.0591 .0722)
$\hat{A}(2)$ RMSE	(.1331 .1525) (.1033 .1207)	(.0872 .1121) (.0984 .0998)	(.0536 .0743) (.0428 .0582)
$\hat{A}(3)$ RMSE	(.1245 .1509) (.1027 .1277)	(.1028 .1138) (.0987 .1054)	(.0741 .0825) (.0629 .0639)
$\hat{A}(4)$ RMSE	(.1214 .1422) (.1075 .1374)	(.1087 .1121) (.0987 .0954)	(.0864 .0821) (.0817 .0754)
$\hat{A}(5)$ RMSE	(.1327 .1554) (.1164 .1218)	(.1109 .1235) (.1042 .1177)	(.0901 .1025) (.0956 .0874)
$\hat{A}(6)$ RMSE	(.1431 .1725) (.1257 .1322)	(.1121 .1287) (.1087 .1047)	(.0973 .0843) (.0689 .0787)
$\hat{A}(7)$ RMSE	(.1221 .1568) (.1503 .1327)	(.1087 .1127) (.1269 .1039)	(.0971 .0987) (.0887 .0739)
$\hat{\Sigma}_U$ RMSE	(.0984 .0811) (.0765)	(.0859 .0784) (.0659)	(.0721 .0593) (.0531)

Paramètre	160	200
$\hat{A}(1)$ RMSE	(.0654 .0846) (.0443 .0637)	(.0582 .0621) (.0395 .0547)
$\hat{A}(2)$ RMSE	(.0421 .0585) (.0351 .0492)	(.0397 .0498) (.0312 .0417)
$\hat{A}(3)$ RMSE	(.0650 .0592) (.0518 .0524)	(.0565 .0567) (.0520 .0470)
$\hat{A}(4)$ RMSE	(.0812 .0710) (.0608 .0546)	(.0628 .0574) (.0597 .0465)
$\hat{A}(5)$ RMSE	(.0769 .0996) (.0681 .0772)	(.0595 .0669) (.0579 .0656)
$\hat{A}(6)$ RMSE	(.0692 .0685) (.0473 .0592)	(.0498 .0509) (.0336 .0474)
$\hat{A}(7)$ RMSE	(.0756 .0865) (.0668 .0635)	(.0625 .0645) (.0598 .0542)
$\hat{\Sigma}_U$ RMSE	(.0634 .0487) (.0486)	(.0418 .0347) (.0393)

Tableau 3-5 b

Paramètres	40	80	120
$\hat{A}(1)$ RMSE	( $\begin{matrix} .1177 & .1563 \\ .1064 & .1185 \end{matrix}$ )	( $\begin{matrix} .0813 & .1033 \\ .0828 & .0852 \end{matrix}$ )	( $\begin{matrix} .0741 & .0966 \\ .0591 & .0722 \end{matrix}$ )
$\hat{A}(2)$ RMSE	( $\begin{matrix} .1331 & .1525 \\ .1033 & .1207 \end{matrix}$ )	( $\begin{matrix} .0972 & .1121 \\ .0984 & .0998 \end{matrix}$ )	( $\begin{matrix} .0536 & .0743 \\ .0428 & .0582 \end{matrix}$ )
$\hat{A}(3)$ RMSE	( $\begin{matrix} .1245 & .1509 \\ .1027 & .1277 \end{matrix}$ )	( $\begin{matrix} .1028 & .1138 \\ .0987 & .1054 \end{matrix}$ )	( $\begin{matrix} .0741 & .0825 \\ .0629 & .0639 \end{matrix}$ )
$\hat{A}(4)$ RMSE	( $\begin{matrix} .1214 & .1422 \\ .1075 & .1374 \end{matrix}$ )	( $\begin{matrix} .1087 & .1121 \\ .0987 & .0954 \end{matrix}$ )	( $\begin{matrix} .0864 & .0821 \\ .0817 & .0754 \end{matrix}$ )
$\hat{A}(5)$ RMSE	( $\begin{matrix} .1327 & .1554 \\ .1164 & .1218 \end{matrix}$ )	( $\begin{matrix} .1109 & .1235 \\ .1042 & .1177 \end{matrix}$ )	( $\begin{matrix} .0901 & .1025 \\ .0956 & .0874 \end{matrix}$ )
$\hat{A}(6)$ RMSE	( $\begin{matrix} .1431 & .1725 \\ .1257 & .1322 \end{matrix}$ )	( $\begin{matrix} .1121 & .1287 \\ .1087 & .1047 \end{matrix}$ )	( $\begin{matrix} .0973 & .0843 \\ .0689 & .0787 \end{matrix}$ )
$\hat{A}(7)$ RMSE	( $\begin{matrix} .1221 & .1568 \\ .1503 & .1327 \end{matrix}$ )	( $\begin{matrix} .1087 & .1127 \\ .1269 & .1039 \end{matrix}$ )	( $\begin{matrix} .0971 & .0987 \\ .0887 & .0739 \end{matrix}$ )
$\hat{\Sigma}_U$ RMSE	( $\begin{matrix} .0984 & .0811 \\ .0765 & .0765 \end{matrix}$ )	( $\begin{matrix} .0859 & .0784 \\ .0659 & .0659 \end{matrix}$ )	( $\begin{matrix} .0721 & .0593 \\ .0531 & .0531 \end{matrix}$ )

Paramètre	160	200
$\hat{A}(1)$ RMSE	( $\begin{matrix} .0654 & .0846 \\ .0443 & .0637 \end{matrix}$ )	( $\begin{matrix} .0582 & .0621 \\ .0395 & .0547 \end{matrix}$ )
$\hat{A}(2)$ RMSE	( $\begin{matrix} .0421 & .0585 \\ .0351 & .0492 \end{matrix}$ )	( $\begin{matrix} .0397 & .0498 \\ .0312 & .0417 \end{matrix}$ )
$\hat{A}(3)$ RMSE	( $\begin{matrix} .0650 & .0592 \\ .0518 & .0524 \end{matrix}$ )	( $\begin{matrix} .0565 & .0567 \\ .0520 & .0470 \end{matrix}$ )
$\hat{A}(4)$ RMSE	( $\begin{matrix} .0812 & .0710 \\ .0608 & .0546 \end{matrix}$ )	( $\begin{matrix} .0628 & .0574 \\ .0597 & .0465 \end{matrix}$ )
$\hat{A}(5)$ RMSE	( $\begin{matrix} .0769 & .0996 \\ .0681 & .0772 \end{matrix}$ )	( $\begin{matrix} .0595 & .0669 \\ .0579 & .0656 \end{matrix}$ )
$\hat{A}(6)$ RMSE	( $\begin{matrix} .0692 & .0685 \\ .0473 & .0592 \end{matrix}$ )	( $\begin{matrix} .0498 & .0509 \\ .0336 & .0474 \end{matrix}$ )
$\hat{A}(7)$ RMSE	( $\begin{matrix} .0756 & .0865 \\ .0668 & .0635 \end{matrix}$ )	( $\begin{matrix} .0625 & .0645 \\ .0598 & .0542 \end{matrix}$ )
$\hat{\Sigma}_U$ RMSE	( $\begin{matrix} .0634 & .0487 \\ .0486 & .0486 \end{matrix}$ )	( $\begin{matrix} .0418 & .0347 \\ .0393 & .0393 \end{matrix}$ )

Tableau 3-5 b

### 3.5.3 Interprétation des résultats

Les résultats de simulation dans les tableaux (3,  $i$ ), où  $i = 1, 2, \dots, 5$  montrent que les paramètres estimés du modèle autorégressif multivarié stationnaire, sont biaisés quand la taille de l'échantillon est petite, consistants avec les résultats théoriques asymptotiques, dans le biais de paramètres estimés du modèle autorégressif multivarié. Le biais des estimateurs des moindres carrés multivariés dans les différentes simulations réalisées décroît régulièrement comme la fonction  $1/T$ , quand la taille de l'échantillon  $T$  augmente. Les figures (3,  $i$ ), où  $i = 1, 2, \dots, 5$  montrent ceci ainsi, plus la taille de l'échantillon augmente plus la valeur de  $RMSE$  diminue pour l'estimateur de moindre carré multivarié, nous nous déduisons que les estimateurs des paramètres du modèle autorégressif multivarié stationnaire sont consistants quand la taille de l'échantillon est importante; ainsi, chaque modèle de ces modèles autorégressifs multivariés stationnaires contient un grand nombre de paramètres, ceci rend l'estimation des paramètres un peu difficile de plus ça demande un temps d'exécution assez long. Notre but est de réduire ce nombre de paramètres du modèle autorégressif multivarié stationnaire.

- Les résultats de simulation présentés dans ce chapitre seront utilisés dans le chapitre suivant pour réduire le nombre de paramètres du modèle vectoriel autorégressif stationnaire qui est le but principal de notre étude.

## Chapitre 4

# Méthodes d'Estimation des Séries Temporelles Multiples

### 4.1 Introduction

Les différentes quantités  $EX$ ,  $EXX^T$  sont impossibles à connaître de façon précise; puisque nous disposons d'une suite discrète et finie de  $T$  points  $X_0, X_1, \dots, X_{T-1}$ , nous calculons les valeurs estimées de ces grandeurs; en supposant que le processus est stationnaire et ergodique, nous remplaçons alors les moyennes théoriques par leurs correspondants empiriques.

L'analyse des séries temporelles multiples est fondée classiquement sur l'application des méthodes non paramétriques et des méthodes paramétriques existant. L'outil fondamental pour les méthodes non paramétriques est le périodogramme, le problème de cet estimateur est sa non consistence. La solution alternative est le périodogramme modifié. Les méthodes paramétriques sont basées généralement sur la méthode autorégressive classique.

Nous supposons que l'on dispose d'une série chronologique multivariée  $x_1, \dots, x_T$  avec  $X_t = (x_{1t}, \dots, x_{dt})'$  généré par un processus  $VAR$  stationnaire, donc, la méthode est connue par la méthode autorégressive classique. Ainsi, les résultats de l'utilisation des méthodes traditionnelles d'estimation montrent que les méthodes paramétriques fournissent généralement de meilleurs résultats que les méthodes non paramétriques.

Bien que la méthode autorégressive classique possède l'avantage qu'il existe un rationnel pour le choix objectif d'un ordre  $\widehat{P}^*$  qui possède plusieurs propriétés d'optimalité, les analystes montrent qu'il existe plus d'un ordre qui peut être considéré pour retrouver les estimateurs, donc une méthode d'estimation modifiée pour les séries temporelles multiples est proposée par Newton(1982). Cette méthode est basée sur l'analyse des processus autorégressifs péri-

odiques; elle peut éliminer plusieurs difficultés qui figurent dans les méthodes traditionnelles d'estimation, en particulier dans la méthode autorégressive classique. Ainsi les informations sur la structure d'une série temporelle multiple, peuvent être obtenues par l'utilisation d'un processus autorégressif univarié périodique Newton (1982), Pagano (1978), Jones et Brelsford (1967) et Gladyshev(1961).

Ce chapitre est consacré à l'étude des méthodes d'estimation des séries temporelles multiples. Il est composé de quatre sections. Dans la première et la deuxième nous passons en revue les méthodes traditionnelles d'estimation d'une série temporelle multivariée stationnaire, puis nous passons à l'étude d'une méthode proposée par Newton (1982) et fondée sur le concept des processus autorégressifs périodiques. Le principe de la méthode et des exemples illustratifs sont donnés dans la dernière section pour mieux comprendre sa méthodologie, puis nous présentons les résultats de simulation qui précisent son efficacité.

## 4.2 Méthodes non paramétriques

Un outil naturel pour l'analyse spectrale d'une série temporelle stationnaire au second ordre est le periodogramme.

### 4.2.1 Méthode du périodogramme

Etant donné un échantillon de réalisation  $X(1), X(2), \dots, X(T)$  à partir d'une série temporelle  $X$ , nous supposons que  $E(X(t))$  est nulle; un estimateur naturel de  $R(v) = \text{cov}(X(t), X(t+v)) = E\{X(t)X^T(t+v)\}$  est la moyenne de  $(T-v)$  produits croisés de retards  $v$  est donné par :

$$R_T(v) = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^{T-|v|} X(t)X(t+|v|), \quad |v| \leq T-1 \quad (4.2.1)$$

On a divisé par  $T$  au lieu de  $(T-v)$  pour avoir un estimateur de  $R$  qui est défini positif, une propriété importante qui nous assure que l'estimateur de la densité spectrale donné est toujours défini positif. Alors le périodogramme (qui est un estimateur de la fonction densité spectrale) est donné par (1.4.20) au point  $v = \pm(T-1)$  et on estime  $R(v)$  par  $R_T(v)$ , on obtient

$$f_T(w) = \frac{1}{2\pi} \sum_{v=-(T-1)}^{T-1} R_T(v) \exp(-ivw), \quad w \in [-\pi, \pi] \quad (4.2.2)$$

$f_T(w)$  est approximativement un estimateur sans biais de  $f(w)$  pour  $T$  assez grand. On peut remarquer que  $f_T(w_1)$  et  $f_T(w_2)$ , pour  $w_1$  et  $w_2$  dans  $[-\pi, \pi]$ , sont non corrélés mais les variances et les covariances de ces éléments ne tendent pas vers zéro lorsque  $T$  tend vers l'infini; donc le périodogramme est une fonction de  $w$  très oscillatoire et qui peut contenir plusieurs faux pics<sup>1</sup>; l'inconvénient de cette méthode est que le périodogramme  $f_T(w)$  est un estimateur non consistant de la fonction densité spectrale  $f(w)$  alors on peut estimer  $f(w)$  au point  $w_0$  par la valeur moyenne de  $f_T(w)$  au voisinage  $w_0$ . Ceci donne un estimateur consistant non pas de  $f(w_0)$  mais de la moyenne spectrale au voisinage  $w_0$ .

Une méthode similaire pour obtenir un estimateur consistant de la densité spectrale est celle de Bartlett (1975) qui a proposé une forme modifiée du périodogramme<sup>2</sup>.

<sup>1</sup>Pour plus de détails voir Hanan (1970), P 249

<sup>2</sup>Pour plus de détails voir Parzen (1957)



## 4.2.2 Méthode du périodogramme de lissage

Des méthodes, pour le périodogramme lissé, pour éliminer les faux pics sont proposées. La forme, inspirée de la précédente est

$$f_{T,M}(w) = \frac{1}{2\pi} \sum_{v=-M}^M K\left(\frac{v}{M}\right) R_T(v) \exp(-ivw) \quad (4.2.3)$$

où  $M$  est un entier appelé point de troncation,  $K(\cdot)$  est une fonction de poids appelé covariance de noyau; si  $K(\cdot)$  est une fonction positive, alors  $f_{T,M}(w)$  est définie positive par le choix a priori de  $M$  et de  $K(\cdot)$ . Pour une série temporelle particulière on peut obtenir un estimateur qui possède de meilleures propriétés statistiques; cependant ces choix sont extrêmement difficiles à réaliser au point de vue pratique et plusieurs analyses sont faites avec l'utilisation de la même fonction  $K(\cdot)$  et en faisant varier  $M$  dans le but de déterminer la vraie nature de la densité spectrale.

## 4.3 Méthodes paramétriques : la méthode autorégressive

On suppose que l'on dispose d'une série chronologique multivariée  $x_1, \dots, x_T$  avec  $X_t = (x_{1t}, \dots, x_{dt})'$  généré par un processus VAR stationnaire, donc, la méthode est connue par la méthode autorégressive classique.

Dans notre étude on génère les modèles autorégressifs multivariés stationnaires qui sont les plus utilisés en pratique.

Dans le cas d'un modèle autorégressif, nous supposons que  $X(t)$  est solution de l'équation aux différences stochastique suivante :

$$X(t) + A(1)X(t-1) + \dots + A(p^*)X(t-p^*) = U(t) \quad (4.3.1)$$

les coefficients  $A(i)$ ,  $i = 1, \dots, p^*$  sont des matrices carrés d'ordre  $d$ ,  $\{U(t), t \in \mathbb{Z}\}$  est le bruit blanc vectoriel  $d$ -dimensionnel de moyenne nulle et de matrice de covariance donnée par :

$$\text{cov}(U(t), U(s)) = \begin{cases} \Sigma_U & \text{si } t = s \\ 0 & \text{si } t \neq s \end{cases}$$

$\Sigma_U$  est une matrice carré d'ordre  $d$  (symétrique définie positive). L'entier  $p^*$  est appelé l'ordre du processus autorégressif  $X$ .



## Exemple

Etude d'un modèle autorégressif 2- dimensionnel d'ordre 1.

Le modèle (4.3.1) prend la forme suivante

$$X(t) + A(1)X(t-1) = U(t), \quad t \in \mathbb{Z} \quad (4.3.3)$$

$A(1)$  est une matrice carré d'ordre 2.  $\{U(t), t \in \mathbb{Z}\}$  est le bruit blanc 2-dimensionnel de moyenne nulle et de matrice de covariance  $\Sigma_U$  carré d'ordre 2.

Le modèle (4.3.3) peut s'écrire sous la forme :

$$\begin{pmatrix} X_1(t) \\ X_2(t) \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} a_{1,1}(1) & a_{1,2}(1) \\ a_{2,1}(1) & a_{2,2}(1) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_1(t-1) \\ X_2(t-1) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} U_1(t) \\ U_2(t) \end{pmatrix}$$

$$\iff \begin{cases} X_1(t) = U_1(t) - a_{1,1}(1)X_1(t-1) - a_{1,2}(1)X_2(t-1) \\ X_2(t) = U_2(t) - a_{2,1}(1)X_1(t-1) - a_{2,2}(1)X_2(t-1) \end{cases}$$

Dans ce qui suit, nous donnons les différentes étapes pour estimer la densité spectrale en utilisant la méthode autorégressive classique.

### Étapes à suivre

- 1- Déterminer un ordre  $\hat{p}^*$  (s'il n'est pas connu a priori) qui est optimal pour  $X(1), X(2), \dots, X(T)$ .
- 2- Estimer les paramètres  $A(1), A(2), \dots, A(\hat{p}^*)$  et  $\Sigma_U$ .
- 3- A partir d'un estimateur  $f_{\hat{p}}$  de  $f_p$  remplacer les paramètres estimés dans l'expression de la densité spectrale d'un processus autorégressif d'ordre  $\hat{p}^*$ .

L'estimateur autorégressif spectrale  $f_{\hat{p}^*}(w)$  de  $f(w)$  est donné par :

$$f_{\hat{p}^*}(w) = G_{\hat{p}^*}^{-1}(e^{iw}) \Sigma_{\hat{p}^*} G_{\hat{p}^*}^{-*}(e^{iw}), \text{ avec } G_{\hat{p}^*}(z) = \sum_{j=0}^{\hat{p}^*} \hat{A}_{\hat{p}^*}(j) z^j$$

$$\sum_{j=0}^{\hat{p}^*} \hat{A}_{\hat{p}^*}(j) R_T(j-v) = \delta_v \hat{\Sigma}_{\hat{p}^*}, \text{ avec } v = 0, \dots, \hat{p}^*, \delta_v = \begin{cases} 1 & \text{si } v = 0 \\ 0 & \text{si non} \end{cases}$$

$\hat{p}^*$  est choisi comme une valeur de  $m$ , on minimise

$$CAT(m) = \text{tr} \left[ \frac{d}{T} \sum_{j=1}^m \left( \frac{T-jd}{T} \right) \hat{\Sigma}_j^{-1} - \frac{T-md}{T} \hat{\Sigma}_m^{-1} \right]$$

### Notations

-  $A^*$  ( $A^{-*}$ ) est la transposée du conjugué complexe (l'inverse de la transposée du conjugué complexe) d'une matrice  $A$ , et  $tr(A)$  est la trace de  $A$ .

La méthode autorégressive classique fournit généralement de meilleurs résultats que les méthodes précédentes. L'entier  $\hat{p}^*$  joue le rôle du paramètre de lissage pour la méthode autorégressive par analogie au rôle joué par  $M$  dans la méthode du périodogramme lissé; donc si  $\hat{p}^*$  prend une grande valeur, alors  $f_{\hat{p}}$  est la plus petite valeurs lissée. Son inconvénient réside dans le fait qu'elle exige souvent l'estimation d'un grand nombres de paramètres; par exemple si  $d = 4$  et  $\hat{p}^*$  est choisi égal à 6, alors il y a 106 paramètres à estimer, c'est-à-dire,  $96 = 16 \times 6$  éléments de  $A(1), \dots, A(6)$  et  $10 = 4 \times 5/2$  éléments distincts de la matrice symétrique  $\Sigma_U$ . Pour cette raison on propose d'utiliser la méthode proposée par Newton (1982) et fondée sur le concept des processus autorégressifs périodiques; elle peut éliminer plusieurs difficultés qui existent dans les méthodes traditionnelles d'estimation.

## 4.4 Méthode autorégressive périodique

### Principe de la méthode

Tout processus autorégressif multivarié  $d$ - dimensionnel peut être décomposé en  $d$  processus périodiques univariés stationnaires qui peuvent être analysés séparément.

Soit  $\{X_t, t \in \mathbb{Z}\}$  un processus  $VAR(p^*)$  de moyenne nulle et de covariance stationnaire et est donné par :

$$X(t) + \sum_{j=1}^{p^*} A(j) X(t-j) = U(t), t \in \mathbb{Z} \quad (4.4.1)$$

où  $U(t)$  est un bruit blanc  $d$ - dimensionnel de matrice de covariance  $\Sigma_U$  et les paramètres  $A(j), j = 1, 2, \dots, p^*$  et  $\Sigma_U$  sont des matrices carrés d'ordre  $d$ .

#### *Théorème 4.4.1 (Pagano (1978))*

Si  $X(\cdot)$  et  $y(\cdot)$  sont associés par (1.4.1). Alors  $X(\cdot)$  est un processus autorégressif d'ordre  $p^*$  de matrice de variance covariance  $\Sigma_U$  ( définie positive) si seulement si  $y(\cdot)$  est un processus périodique autorégressif de période  $d$  et d'ordre  $(p_1, p_2, \dots, p_d)$  et  $\sigma_1^2, \sigma_2^2, \dots, \sigma_d^2$  positives et  $p^* = \max_{1 \leq j \leq d} \left[ \frac{p_j - j}{d} \right] + 1$  et  $[x] = j$  pour  $j \leq x \leq j + 1$ .

**preuve**

$\Sigma_U$  est une matrice définie positive (de plus elle est symétrique) donc elle admet une décomposition unique sous la forme  $LDL^T$  (La décomposition de Cholesky modifiée, où  $L$  est matrice triangulaire inférieure ces éléments diagonaux valent 1.  $D$  est une matrice diagonale et  $L^T$  est la transposée de la matrice  $L$ ).

Les processus  $X(\cdot)$  et  $y(\cdot)$  sont reliés par (1.4.1).  $y(\cdot)$  est un processus périodique autorégressif de période  $d$  et d'ordre  $(p_1, p_2, \dots, p_d)$  peut être écrit sous la forme  $LX(t) + \sum_{j=1}^{p^*} A'(j)X_{t-j} = U'(t)$

$A(j) = L^{-1}A'(j) \quad j = 1, \dots, p^*$  et  $U(t) = L^{-1}U'(t), \quad t \in \mathbb{Z}$  et  $U'(\cdot)$  sont non corrélés avec la matrice de covariance diagonale;  $E(U'(\cdot), U'^T(\cdot)) = D = \text{diag}(\sigma_1^2, \sigma_2^2, \dots, \sigma_d^2)$ .

$U(\cdot)$  sont non corrélés avec la matrice de covariance  $\Sigma_U = L^{-1}DL^{-1T}$ .

Inversement on suppose  $X(t) + \sum_{j=1}^{p^*} A(j)X_{t-j} = U(t), \quad (t \in \mathbb{Z})$

$U(t)$  est un processus non corrélés de bruit blanc de matrice de covariance  $\Sigma_U$  qui admet une décomposition unique sous la forme  $LDL^T$ . Où  $L$  est une matrice triangulaire inférieure ces éléments diagonaux valent 1, donc elle est inversible et  $L^{-1}$  est aussi et  $X(\cdot)$  satisfie  $L^{-1}X(t) + \sum_{j=1}^{p^*} A'(j)X_{t-j} = U'(t), \quad t \in \mathbb{Z}$ , avec  $A'(j) = L^{-1}A(j) \quad j = 1, \dots, p^*$  et  $U'(t) = L^{-1}U(t), \quad (t \in \mathbb{Z})$  sont non corrélés de matrice de covariance qui est définie positive d'où la preuve du théorème.

$\Sigma_U$  est une matrice carré d'ordre  $d$ , elle admet une décomposition unique sous la forme  $LDL^T$  où

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \sigma_{12}/\sigma_{11} & 1 & 0 & 0 \\ \vdots & & & \\ \vdots & & \ddots & \\ \sigma_{1d}/\sigma_{11} & r_1 & r_2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$r_1 = (\sigma_{d2} - \sigma_{12}\sigma_{d1}/\sigma_{11})/\sigma_{22} - \sigma_{12}^2/\sigma_{11} \quad \text{et} \quad r_2 = \left( \sigma_{d(d-1)} - \sum_{k=1}^{d-2} l_{dk}l_{(d-1)k}d_{kk}/d_{d-1,d-1} \right)$$

$$D = \begin{pmatrix} \sigma_{11} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \sigma_{22} - \sigma_{12}^2/\sigma_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & & \\ \vdots & \vdots & & \ddots & \\ 0 & 0 & & & \sigma_{dd} - \sum_{l=1}^{d-1} l_{dl}^2 d_{ll} \end{pmatrix}$$

La matrice  $L$  est inversible et elle est donnée par

$$L^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ -\sigma_{12}/\sigma_{11} & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \ddots & \ddots & \ddots & 0 & \vdots \\ \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ l & \cdots & \cdots & k & 1 \end{pmatrix}$$

où  $l, k$  sont des constantes déterminables.

Revenons à notre modèle (4.4.1) on le multiplie par  $L^{-1}$

$$L^{-1} \left[ X(t) + \sum_{j=1}^{p^*} A(j) X_{t-j} = U(t) \right] \iff L^{-1} X(t) + \sum_{j=1}^{p^*} A'(j) X_{t-j} = U'(t), \quad t \in \mathbb{Z}$$

$$A'(j) = L^{-1} A(j), \quad j = 1, \dots, p^* \text{ et } U'(t) = L^{-1} U(t), \quad t \in \mathbb{Z}$$

$$E(U'(\cdot), U'^T(\cdot)) = \text{diag}(D_{11}, D_{22}, \dots, D_{dd}) = \text{diag}(\sigma_1^2, \sigma_2^2, \dots, \sigma_d^2)$$

(4.4.2)

Après certaines opérations algébriques, on obtient :

$$\left\{ \begin{aligned} & X_1(t) + a_{11}(1) X_1(t-1) + a_{12}(1) X_2(t-1) + \cdots + a_{1d}(1) X_d(t-1) + \\ & \quad \cdots + a_{11}(p^*) X_1(t-p^*) + a_{12}(p^*) X_2(t-p^*) + \cdots + a_{1d}(p^*) X_d(t-p^*) = U'_1(t) \\ & (\sigma_{21} - \sigma_{12}/\sigma_{11} a_{11}(1)) X_1(t-1) + (a_{22}(1) - \sigma_{12}/\sigma_{11} a_{12}(1)) X_2(t-1) + \cdots \\ & \quad + (a_{2d}(1) - \sigma_{12}/\sigma_{11} a_{1d}(1)) X_d(t-1) + \cdots + (\sigma_{21} - \sigma_{12}/\sigma_{11} a_{11}(p^*)) X_1(t-p^*) \\ & + (a_{22}(p^*) - \sigma_{12}/\sigma_{11} a_{12}(p^*)) X_2(t-p^*) + \\ & \quad \cdots + (a_{2d}(p^*) - \sigma_{12}/\sigma_{11} a_{1d}(p^*)) X_d(t-p^*) = U'_2(t) \\ & \quad \vdots \\ & X_d(t) - l X_{d-1}(t) + \cdots + k X_1(t) + [a_{d1}(1) + l a_{(d-1)1}(1) + \cdots + k a_{11}(1)] X_1(t-1) + \\ & [a_{d2}(1) + l a_{(d-1)2}(1) + \cdots + k a_{12}(1)] X_2(t-1) + \cdots + \\ & [a_{dd}(1) + l a_{(d-1)d-1}(1) + \cdots + k a_{1d}(1)] X_d(t-1) + \cdots + \\ & [a_{d1}(p^*) + l a_{(d-1)1}(p^*) + \cdots + k a_{11}(p^*)] X_1(t-p^*) + \\ & [a_{d2}(p^*) + l a_{(d-1)2}(p^*) + \cdots + k a_{12}(p^*)] X_2(t-p^*) + \\ & [a_{dd}(p^*) + l a_{(d-1)(d-1)}(p^*) + \cdots + k a_{1d}(p^*)] X_d(t-p^*) = U'_d(t) \end{aligned} \right.$$

Si  $X(\cdot)$  est un processus autorégressif  $d$ -varié stationnaire d'ordre  $p^*$ , de paramètres  $A(1), \dots, A(p^*)$ ,  $\Sigma_U$ . Alors  $y = \{\dots X^t(-1), X^t(0), X^t(1), \dots\}$  est un processus autorégressif périodique de période  $d$  et les ordres  $(p_1, p_2, \dots, p_d)$  sont donnés par :

$$\begin{aligned} p_1 &= p^*d \\ p_2 &= p^*d + 1 \\ &\vdots \\ p_d &= p^*d + (d - 1) \end{aligned}$$

et les paramètres  $a_k(j), \sigma_k^2, 1 \leq j \leq p_k, k = 1, \dots, d$  sont donnés par :

$$\begin{aligned} \sigma_k^2 &= D_{k,k} \quad \text{où } k = 1, \dots, d \text{ et} \\ a_k(j) &= \begin{cases} D_{k,k-j} & j < k = 1, \dots, d \\ B_{kd - \text{mod}(k,d)} \left( \left[ \frac{j-k}{d} \right] + 1 \right) & j > k = 1, \dots, p_k \end{cases} \end{aligned} \quad (4.4.3)$$

où  $\text{mod}(Lm) = L - m[Lm]$ ,  $\widehat{\Sigma} = L^{-1}DL^{-T}$ , avec  $L$  est une matrice triangulaire inférieure, ces éléments diagonaux valent 1,  $D$  est la matrice diagonale où  $D = \text{diag}(D_{11}, D_{22}, \dots, D_{dd})$  et  $B(v) = LA(v)$  avec  $v = 1, 2, \dots, p^*$ . Alors, si  $y$  est un processus autorégressif périodique univarié stationnaire de période  $d$  et d'ordre  $p_1, \dots, p_d$  de paramètres  $a_k(j), \sigma_k^2$  où  $1 \leq j \leq p_k, k = 1, \dots, d$ . Alors la série temporelle multivariée  $d$  dimensionnelle est obtenue comme suit :

$$\begin{aligned} X(1) &= (y(1), \dots, y(d))^T \\ X(2) &= (y(d+1), \dots, y(2d))^T \\ X(3) &= (y(2d+1), \dots, y(3d))^T \\ &\vdots \\ X(p^*) &= (y(d(p-1)+1), \dots, y(pd))^T \end{aligned} \quad (4.4.4)$$

est un processus autorégressif d'ordre  $p^* = [\max(p_j - j)/d] + 1$ , de paramètres  $\widehat{A}(\cdot), \widehat{\Sigma}$  qui sont donnés par :

$$\begin{aligned} \widehat{A}(j) &= L^{-1}B(j), \quad j = 1, \dots, p^* \quad \text{et} \quad \widehat{\Sigma} = L^{-1}DL^{-1T}, \\ D &= \text{Diag}(\sigma_1^2, \sigma_2^2, \dots, \sigma_d^2) \quad \text{et} \quad L_{kj} = a_k(k-j), \quad j \leq k = 1, \dots, d \\ B_{kj}(v) &= a_k(dv - j + k), \quad v = 1, \dots, p^*; \quad j, k = 1, \dots, d \\ a_k(dv - j + k) &= 0 \quad \text{si } dv - j + k > p_k \quad \text{et} \quad a_k(0) = 1 \end{aligned} \quad (4.4.5)$$

Dans ce qui suit on donne les différentes étapes pour estimer la densité spectrale on utilisant la méthode autorégressive périodique.

### Étapes à suivre

Pour estimer la densité spectrale d'un processus autorégressif multivarié par la méthode autorégressive périodique, il suffit de suivre les étapes suivantes :

1- Déterminer les ordres  $\hat{p}_1, \dots, \hat{p}_d$  de la série temporelle autorégressive périodique  $y$  avec l'ordre de la restriction déplacée.

2- Trouvez les estimateurs  $\hat{a}_k(j), \hat{\sigma}_k^2$  ( $j = 1, \dots, p_k, k = 1, \dots, d$ ) les coefficients et les variances des erreurs du modèle de  $d$  individuelles.

3- A partir de ces estimateurs reconstruire des estimateurs  $\hat{p}^*, \hat{A}(1), \dots, \hat{A}(p^*)$  et  $\hat{\Sigma}$  de la correspondance du processus autorégressif  $d$ - dimensionnel correspondant à ce modèle, on obtient un estimateur de la densité spectrale.

### Exemple

#### Etude d'un modèle autorégressif 3- dimensionnel d'ordre 1.

Soit  $\{X(t), t \in \mathbb{Z}\}$  un processus autorégressif 3- dimensionnel d'ordre 1.

Alors notre modèle (4.4.1) prend la forme suivante :

$$X(t) + A(1)X(t-1) = U(t), \quad t \in \mathbb{Z} \quad (4.4.6)$$

les paramètres  $A(1), \Sigma$  sont des matrices d'ordre 3 et  $\{U(t), t \in \mathbb{Z}\}$  est un bruit blanc 3 dimensionnel, de moyenne nulle et de matrice de covariance  $\Sigma_U$  qui admet une décomposition sous la forme  $LDL^t$ , où

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \sigma_{12}/\sigma_{11} & 1 & 0 \\ \sigma_{13}/\sigma_{11} & (\sigma_{32} - \sigma_{12}\sigma_{13}/\sigma_{11})/\sigma_{22} - \sigma_{12}^2/\sigma_{11} & 1 \end{pmatrix}$$

$$D = \begin{pmatrix} \sigma_{11} & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_{22} - \sigma_{12}^2/\sigma_{11} & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_{33} - [\sigma_{13}^2/\sigma_{11} + (\sigma_{23} - \sigma_{12}\sigma_{13}/\sigma_{11})^2/\sigma_{22} - \sigma_{12}/\sigma_{11}] \end{pmatrix}$$



$$L^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -\sigma_{12}/\sigma_{11} & 1 & 0 \\ k_1 & k_2 & 1 \end{pmatrix}$$

où  $k_1 = -\sigma_{13}/\sigma_{11} + \sigma_{12}/\sigma_{11} [(\sigma_{32} - \sigma_{12}\sigma_{13}/\sigma_{11})/\sigma_{22} - \sigma_{12}^2/\sigma_{11}]$ ,

$$k_2 = [\sigma_{12}\sigma_{13}/\sigma_{11} - \sigma_{32}] / [\sigma_{12}^2/\sigma_{11} - \sigma_{22}]$$

Revenons à notre modèle (4.4.6) on le multipliant par  $L^{-1}$ , on obtient :

$$L^{-1}X(t) + L^{-1}A_1X(t-1) = L^{-1}U(t) = \xi(t), \quad t \in \mathbb{Z}$$

Après certaines opérations algébriques on obtient :

$$\left\{ \begin{array}{l} X_1(t) + a_{11}(1)X_1(t-1) + a_{12}(1)X_2(t-1) + a_{13}(1)X_3(t-1) = \xi_1(t) \\ X_2(t) - \sigma_{12}/\sigma_{11}X_1(t) + (a_{21}(1) - \sigma_{12}/\sigma_{11}a_{11}(1))X_1(t-1) + \\ \quad (a_{22}(1) - \sigma_{12}/\sigma_{11}a_{12}(1))X_2(t-1) + (a_{23}(1) - \sigma_{12}/\sigma_{11}a_{13}(1))X_3(t-1) = \xi_2(t) \\ X_3(t) + k_2X_2(t) + k_1X_1(t) + (a_{31}(1) + k_2a_{21}(1) + k_1a_{11}(1))X_1(t-1) + \\ \quad (a_{32}(1) + k_2a_{22}(1) + k_1a_{12}(1))X_2(t-1) + \begin{pmatrix} a_{33}(1) + k_2a_{23}(1) + \\ k_1a_{13}(1) \end{pmatrix} X_3(t-1) = \xi_3(t) \end{array} \right.$$

Si on suppose que

$$a_{11}(1) = a_1(3), \quad a_{12}(1) = a_1(2), \quad a_{13}(1) = a_1(1)$$

$$a_2(1) = -\sigma_{12}/\sigma_{11}, \quad a_2(2) = a_{22}(1) - \sigma_{12}a_{12}(1)/\sigma_{11}$$

$$a_2(3) = a_{23}(1) - \sigma_{12}a_{13}(1)/\sigma_{11}, \quad a_2(4) = a_{21}(1) - \sigma_{12}a_{11}(1)/\sigma_{11}$$

$$a_3(1) = k_1, \quad a_3(2) = k_2, \quad a_3(3) = a_{33}(1) + k_2a_{23}(1) + k_1a_{13}(1)$$

$$a_3(4) = a_{31}(1) + k_2a_{21}(1) + k_1a_{11}(1)$$

$$a_3(5) = a_{32}(1) + k_2a_{22}(1) + k_1a_{12}(1)$$

donc on a

$$\left\{ \begin{array}{l} X_1(t) + a_1(3)X_1(t-1) + a_1(2)X_2(t-1) + a_1(1)X_3(t-1) = \xi_1(t) \\ X_2(t) + a_2(1)X_1(t) + a_2(4)X_1(t-1) + a_2(2)X_2(t-1) + a_2(3)X_3(t-1) = \xi_2(t) \\ X_3(t) + a_3(1)X_1(t) + a_3(2)X_2(t) + a_3(4)X_1(t-1) + a_3(5)X_2(t-1) + \\ \quad a_3(3)X_3(t-1) = \xi_3(t) \end{array} \right.$$

Alors on définit la série temporelle univariée  $y$  par :



$$\begin{cases} y(0) = X_1(0) \\ y(1) = X_2(0) \\ y(2) = X_3(0) \\ y(3) = X_1(1) \\ y(4) = X_2(1) \end{cases}$$

On remarque que notre modèle autorégressif de dimension 3 conduit à trois modèles de dimension un, l'un exprimant les éléments du premier canal de  $X$  en fonction des trois éléments précédents du processus  $y$ , le deuxième modèle exprimant les éléments du deuxième canal de  $X$  en fonction des quatre éléments précédents du processus  $y$  et le dernier exprimant le troisième canal comme une fonction des cinq éléments précédents du processus  $y$ ; sachant que  $y$  est une réalisation d'un processus autorégressif univarié périodiquement stationnaire d'ordre trois quatre et cinq. Nous déduisons que tout processus  $d$ -varié stationnaire peut être décomposé en  $d$ -processus périodiques univariés.

### Discussion

Le plus grand avantage de la méthode autorégressive périodique est lorsque la méthode autorégressive donne  $\hat{p}_1 = d\hat{p}^*$ ,  $\hat{p}_2 = d\hat{p}^* + 1, \dots, \hat{p}_d = d\hat{p}^* + (d - 1)$  des paramètres, la méthode autorégressive périodique est indépendante de la variation des indices, ce qui réduit le grand nombre de paramètres nécessaire à l'ajustement du modèle  $X$ . Dans la pratique, le plus souvent il existe un  $P_j^*$  plus grand que les autres et la méthode autorégressive ordinaire prend obligatoirement la plus grande valeur de  $\hat{p}^*$  afin de pouvoir contrôler le phénomène. Ainsi, nous contrôlons le nombre total des paramètres de sorte qu'il sera  $\hat{p}^*d^2 + d(d + 1)/2$ . Cependant, la méthode autorégressive périodique, ne dépend pas de la restriction des paramètres ce qui donne un nombre total  $\hat{p}_1 + \hat{p}_2 + \dots + \hat{p}_d + d$  des paramètres.

## 4.5 Estimation des paramètres

Pagano (1978) a montré les propriétés des estimateurs qui sont asymptotiquement efficaces sous les conditions de normalité pour les canaux précédents.

Etant donné un échantillon Gaussien  $y(1), \dots, y(T)$  de moyenne nulle et de covariance stationnaire d'un modèle autorégressif périodique d'ordre  $(p_1, \dots, p_d)$  et de période  $d$ .

On définit :

$$R_m(k, v) = m^{-1} \sum_{j=0}^s y(k + dj) y(v + dj), \quad s = \left[ m - \frac{\max(k, v)}{d} \right], \quad (4.5.1)$$

$$k = 1, \dots, d, \text{ et } v = 0, 1, \dots, T - k - 1$$

**Lemme 4.5.1 (Pagano 1978)**

Si  $y(\cdot)$  est processus Gaussien périodiquement corrélé, alors, avec  $R_m(k, v)$  définie par (4.5.1), quand  $T \rightarrow \infty$ , on a  $R_m(k, v)$  converge toujours en moyenne quadratique vers  $R(k, v)$ , et

$$m \operatorname{cov} \{R_m(k_1, v_1), R_m(k_2, v_2)\} \rightarrow \sum_{u=-\infty}^{\infty} \{R(k_1, k_2 + du) R(v_1, v_2 + du) + R(k_1, v_2 + du) R(v_1, k_2 + du)\}$$

(4.5.2)

Cependant,  $m^{1/2} (R_m(k, v) - R(k, v))$  sont asymptotiquement Gaussien, de moyenne nulle et de fonction de covariance précédente, pour  $k = 1, \dots, d$ ,  $v = 0, 1, \dots, q$ , ( $q$  fixé).

**Théorème (4.5.1) (Pagano 1978)**

Si  $y_t$  est un processus causal autorégressif gaussien  $d$ -périodique. Les variables aléatoires  $\sqrt{m} (R_m(k, v) - R(k, v))$ ,  $1 \leq k \leq d$ ,  $0 \leq v \leq q$ , où  $q$  est un entier positif fixe, sont asymptotiquement normalement distribuées avec des moyennes nulles et de covariance donnée dans le lemme (4.5.1).

**Démonstration** Voir Lund et Basawa (1999).

**Théorème 4.5.2 (Pagano 1978)**

Si  $y(\cdot)$  est un processus autorégressif périodique de covariance stationnaire d'ordre  $(p_1, \dots, p_d)$ , pour  $k = 1, \dots, d$ , on a

$$R(k, k - v) + \sum_{j=1}^{p_k} \phi_k(j) R(k - j, k - v) = \delta_{v0} \sigma_k^2, \quad v \geq 0. \quad (4.5.3)$$

**preuve**

Rappelons que  $y(t)$  est un processus périodiquement corrélé de période  $d$  et d'ordre  $(p_1, \dots, p_d)$  on a

$$y(t) + \sum_{j=1}^{p_t} \phi_t(j) y(t - j) = \varepsilon(t), \quad t \in \mathbb{Z} \quad (4.5.4)$$

et rappelons que  $y(t) = -\sum_{j=1}^{p_t} \phi_t(j) y(t-j) + \varepsilon(t) = \varepsilon(t) + \sum_{k=1}^{\infty} \beta_t(k) \varepsilon(t-k)$ . Ce résultat est immédiatement valable à partir du théorème (4.4.1). Donc pour  $v$  positif,  $y(t-v)$  est non corrélé avec  $\varepsilon(t)$ . On multipliant (4.5.4) par  $y(t-v)$  et on prend la valeur moyenne on obtient le théorème.

Dans (4.5.3) on remplace  $R$  par  $R_m$  et on résoud les équations obtenus les équations linéaires nous précise de retrouver les propriétés de ces estimateurs.

Si  $y(\cdot)$  est un processus périodiquement corrélé on note par  $F$  la matrice d'information de Fisher, et par  $F(\phi, \theta)$  les éléments dans cette matrice correspondant aux paramètres  $\phi, \theta$ .

### *Théorème 4.5.3 (Pagano 1978)*

Si  $y(\cdot)$  est processus Gaussien autorégressif périodique de covariance stationnaire d'ordre  $(p_1, \dots, p_d)$ , alors la matrice d'information est de Block diagonale,

$$\begin{aligned} F(\phi_k(j), \phi_m(l)) &= \delta_{km} R(k-j, k-l) / \sigma_k^2, \\ F(\phi_k(j), \sigma_m^2) &= 0 \\ F(\sigma_k^2, \sigma_m^2) &= \delta_{km} / 2\sigma_k^4, \\ \text{pour } j &= 1, \dots, p_k, l = 1, \dots, p_m, k, m = 1, \dots, d \end{aligned}$$

preuve

$X(\cdot)$  et  $y(\cdot)$  sont reliés par (1.4.1), alors  $LX(t) + \sum_{j=1}^{p^*} A(j) X(t-j) = U(t)$ , où  $L_{kj} = \phi_k(k-j)$ ,  $j < k$  et  $A_{kj}(v) = \phi_k(dv + k - j)$ ,  $v = 1, 2, \dots, p^*$

On définit  $D = \text{diag}(\sigma_1^2, \dots, \sigma_d^2)$ , et  $G(z) = L + \sum_{j=1}^{p^*} A(j) z^j$ ,  $z = e^{iw}$

La matrice de la densité spectrale du processus  $X(\cdot)$  est

$$\begin{aligned} f(w) &= G^{-1}(z) D G^{-*}(z) / 2\pi, \\ F(\phi, \theta) &= 1/4\pi \int_{-\pi}^{\pi} \text{tr} \left( \frac{\partial f^{-1}}{\partial \phi} f \frac{\partial f^{-1}}{\partial \theta} f \right) (w) d(w) \end{aligned} \quad (4.5.5)$$

Soit  $E_{jk}$  la matrice carré  $d$  dimensionnel les composantes  $(j, k)$  égales à 1 et zéros dans les autres cas. Alors

$$\frac{\partial f^{-1}}{\partial A_{kj}(v)} f = E_{jk} G^{-*} z^{-v} + G^* D E_{kj} f z^v \quad (4.5.6)$$

$$\frac{\partial f^{-1}}{\partial L_{kj}} f = E_{jk} G^{-*} + G^* D E_{kj} f, \quad j < k \quad (4.5.7)$$

$$\frac{\partial f^{-1}}{\partial \sigma_k^2} f = -G^* E_{kk} G^{-*} / \sigma_k^2 \quad (4.5.8)$$

Nous utilisons la formule

$$G^{-1}(z) = L^{-1} + \sum_{k=1}^{\infty} \theta(k) z^k, \quad (4.5.9)$$

Où  $\theta(\cdot)$  décroît exponentiellement vers zéros, et nous avons  $\text{tr} \int_{-\pi}^{\pi} E_{kj} G^{-1} E_{mn} e^{\pm i(v+u)w} dw = 0$ , pour tout  $k, j, m, n$  si  $v + u \neq 0$ , et pour  $k > j$ , et pour  $k > j$  ou bien  $m > n$  si  $v + u = 0$

D'après (4.5.6), (4.5.7), et (4.5.8), et (4.5.5) et après certaines opérations algébriques, nous obtenons la démonstration suivante

Si,  $R_m$  qui est définie par (4.5.1), nous définissons  $\hat{\phi}$  et  $\hat{\sigma}$  comme des solutions des équations normals,

$$R_m(k, k-v) + \sum_{j=1}^{p_k} \hat{\phi}_k(j) R_m(k-j, k-v) = \delta_{v0} \hat{\sigma}_k^2, \quad (4.5.10)$$

$$v = 0, \dots, p_k \text{ et } k = 1, \dots, d,$$

et le vecteur  $\hat{\phi}_k = (\hat{\phi}_k(1), \dots, \hat{\phi}_k(p_k))^T$ , alors on a le théorème suivant :

#### *Théorème 4.5.4 (Pagano 1978)*

Si  $y_1, y_2, \dots, y_{dm}$  une  $dm$  ( $m \in N^*$ )-réalisation d'un modèle autorégressif  $d$ -périodique de covariance stationnaire et d'ordre constant  $p$ . Alors, les estimateurs  $\hat{\phi}$  et  $\hat{\sigma}^2$  définis par (4.5.10) sont convergent presque sûrement ( $T \rightarrow \infty$ ). De plus  $m^{1/2} (\hat{\phi}_k - \phi_k)$ ,  $k = 1, \dots, d$  est asymptotiquement normalement distribuée de moyenne nulle et de matrice de covariance  $F^{-1}$  où  $F$  est le bloc approprié de la matrice d'information donnée par le théorème (4.5.3). Dans ce sens les estimateurs sont asymptotiquement efficaces.

**preuve**

A partir de (4.5.3) et (4.5.10), pour  $k = 1, \dots, d$  et

$$\sum_{j=0}^{p_k} R_m(k-j, k-v) \{ \hat{\phi}_k(j) - \phi_k(j) \} = \sum_{j=0}^{p_k} \phi_k(j) \{ R_m(k-j, k-v) - R(k-j, k-v) \} \quad (4.5.11)$$

• nous définissons  $\phi_k(0) = \widehat{\phi}_k(0) = 1$ . A partir du lemme (4.5.1) les variables aléatoires dans (4.5.11) sont asymptotiquement Gaussien de moyenne nulle. Pour trouver la matrice de covariance, on considère pour  $v_1$  et  $v_2$  positifs

$$\begin{aligned} & m \sum_{j_1=0}^{p_{k_1}} \sum_{j_2=0}^{p_{k_2}} \phi_{k_1}(j_1) \phi_{k_2}(j_2) \text{cov} \{R_m(k_1 - j_1, k_1 - v_1), R(k_2 - j_2, k_2 - v_2)\} \\ &= \sigma_{k_1}^2 \delta_{k_1, k_2} R(k_1 - v_1, k_1 - v_2), \end{aligned}$$

A partir du lemme (4.5.1) et à partir de l'application de (4.5.3), à partir de lemme (4.5.1) et le théorème de Cramer, les variables aléatoires dans (4.5.11) possèdent la même distribution asymptotique conjointe comme

$$\sum_{j=0}^{p_k} R_m(k - j, k - v) \left\{ \widehat{\phi}_k(j) - \phi_k(j) \right\}, v = 1, \dots, p_k, \text{ et } k = 1, \dots, d$$

et le théorème est démontré.

#### 4.5.1 Résultats numériques

Nous générons successivement  $T$  observations à partir du modèle 10 et le modèle 11 présentés dans le chapitre 3 qui sont des modèles autorégressifs 2-dimensionnel d'ordre 4 et 2-dimensionnel d'ordre 7 respectivement, et ceci par la méthode autorégressive périodique, pour les différentes valeurs de paramètres et diverses tailles de l'échantillon.

##### Modèle 10

Modèle autorégressif 2-dimensionnel d'ordre 4, c'est-à-dire,  $d = 2$  et  $p^* = 4$ , simulé d'après l'équation :

$$X(t) + A(1)X(t-1) + A(2)X(t-2) + A(3)X(t-3) + A(4)X(t-4) = U(t), U_t \sim \mathcal{N}(0, \Sigma_U)$$

$$\left\{ \begin{aligned} & A(1) = \begin{pmatrix} 0.3 & 0.1 \\ -0.1 & 0.2 \end{pmatrix}, A(2) = \begin{pmatrix} -0.4 & 0.2 \\ 0.3 & 0.5 \end{pmatrix} \\ & A(3) = \begin{pmatrix} 0.7 & 0.4 \\ -0.3 & 0.1 \end{pmatrix}, A(4) = \begin{pmatrix} -0.4 & 0.4 \\ -0.3 & 0.3 \end{pmatrix}, \Sigma_U = \begin{pmatrix} 0.7 & 0.4 \\ 0.4 & 0.5 \end{pmatrix} \end{aligned} \right.$$

Modèle autorégressif univarié périodique correspond au modèle 10

$$\Sigma_U = LDL^T$$

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0.57 & 1 \end{pmatrix}, D = \begin{pmatrix} 0.7 & 0 \\ 0 & 0.27 \end{pmatrix}, L^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -0.57 & 1 \end{pmatrix}$$

Si  $X(\cdot)$  est un processus autorégressif 2-dimensionnel d'ordre 4, de paramètres  $A(1), A(2), \dots, A(4)$  et la matrice symétrique  $\Sigma$ , alors  $y(\cdot)$  est un processus autorégressif univarié périodique de période 2 et les ordres sont :

$p_1 = 10, p_2 = 3$  et les paramètres  $\phi_k(j), \sigma_k^2, 1 \leq j \leq p_k, k = 1, 2$  sont donnés par (4.4.3). Le modèle multivarié correspondant à ce modèle univarié périodique est donné par (4.4.4); et l'ordre du processus et les paramètres sont donnés par (4.4.5); donc  $p^* = 5$

#### Modèle 11

Modèle autorégressif 2-dimensionnel d'ordre 7, c'est-à-dire,  $d = 2$  et  $p^* = 7$  simulé d'après l'équation :

$$X(t) + A(1)X(t-1) + A(2)X(t-2) + A(3)X(t-3) + A(4)X(t-4) + A(5)X(t-5) + A(6)X(t-6) + A(7)X(t-7) = U(t), U_t \sim N(0, \Sigma_U)$$

et pour les diverses valeurs de paramètres

$$\left\{ \begin{array}{l} A(1) = \begin{pmatrix} -0.3 & -0.1 \\ 0.1 & 0.7 \end{pmatrix}, A(2) = \begin{pmatrix} 0.1 & 0.1 \\ -0.1 & 0.5 \end{pmatrix}, A(3) = \begin{pmatrix} 0.2 & -0.9 \\ -0.1 & 0.4 \end{pmatrix} \\ A(4) = \begin{pmatrix} 0.1 & -0.2 \\ -0.9 & -0.7 \end{pmatrix}, A(5) = \begin{pmatrix} -0.3 & 0.9 \\ 0.3 & -0.1 \end{pmatrix}, A(6) = \begin{pmatrix} 0.6 & 0.5 \\ 0.6 & 0.2 \end{pmatrix} \\ A(7) = \begin{pmatrix} -0.5 & 0.5 \\ -0.5 & 0.6 \end{pmatrix}, \Sigma_U = \begin{pmatrix} 0.7 & 0.4 \\ 0.4 & 0.5 \end{pmatrix}. \end{array} \right.$$

Modèle autorégressif univarié périodique correspond au modèle 11

$$\Sigma_U = LDL^T$$

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0.57 & 1 \end{pmatrix}, D = \begin{pmatrix} 0.7 & 0 \\ 0 & 0.27 \end{pmatrix}, L^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -0.57 & 1 \end{pmatrix}$$

Si  $X(\cdot)$  est un processus autorégressif 2-dimensionnel d'ordre 7, de paramètres  $A(1), A(2), \dots, A(7)$  et la matrice symétrique  $\Sigma$ , alors  $y(\cdot)$  est un processus autorégressif univarié périodique de période 2 et les ordres sont :

$p_1 = 16, p_2 = 3$  et les paramètres  $\phi_k(j), \sigma_k^2, 1 \leq j \leq p_k, k = 1, 2$  sont donnés par (4.4.3). Le modèle multivarié correspondant à ce modèle univarié périodique est donné par (4.4.4); et l'ordre du processus et les paramètres sont donnés par (4.4.5); donc  $p^* = 8$ .

## 4.5.2 Représentation des résultats

Les résultats de l'estimation des paramètres du modèle 10 et du modèle 11 par la méthode autorégressive périodique d'estimation sont représentés comme suit :

La table (4,i) : représente les résultats de simulation du modèle 10 et du modèle 11 respectivement, à partir de 1000 réalisations pour les diverses tailles de l'échantillon et pour les différentes valeurs de paramètres où  $i=1,2,\dots,4$ .

Les valeurs de *RMSE* calculées de tous les paramètres du modèle 10 et du modèle 11 sont représentées graphiquement de la manière suivante

La figure (4, i) : représente le graphe des valeurs de *RMSE* calculées pour le modèle 10 et le modèle 11 où ( $i = 1, 2$ ).



Tailles	40	80	120
$\hat{A}(1)$ Moyenne	$\begin{pmatrix} .2124 & .1478 \\ -.1478 & .2784 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} .2287 & .1289 \\ -.1289 & .2778 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} .2998 & .1124 \\ -.1124 & .2122 \end{pmatrix}$
$\hat{A}(2)$ Moyenne	$\begin{pmatrix} -.3441 & .2241 \\ .3324 & .0034 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -.3749 & .2445 \\ .3138 & .0002 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -.4143 & .2174 \\ .3145 & 0 \end{pmatrix}$
$\hat{A}(3)$ Moyenne	$\begin{pmatrix} .0061 & .2249 \\ .0061 & .2314 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 & .3609 \\ 0 & .2104 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 & .3904 \\ 0 & .1098 \end{pmatrix}$
$\hat{A}(4)$ Moyenne	$\begin{pmatrix} -.3792 & .3682 \\ .0021 & .0042 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -.3899 & .3877 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -.4109 & .4114 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$
$\hat{A}(5)$ Moyenne	$\begin{pmatrix} .2223 & .1598 \\ -.1598 & .2777 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} .2298 & .1387 \\ -.1387 & .2679 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} .3014 & .1135 \\ -.1135 & .2134 \end{pmatrix}$
$\hat{\Sigma}_U$ Moyenne	$\begin{pmatrix} .6166 & .4142 \\ & .4955 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} .6444 & .4201 \\ & .5532 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} .6977 & .4145 \\ & .5113 \end{pmatrix}$

Tailles	160	200
$\hat{A}(1)$ Moyenne	$\begin{pmatrix} .3101 & .1118 \\ -.1118 & .2114 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} .3014 & .1041 \\ -.1041 & .2141 \end{pmatrix}$
$\hat{A}(2)$ Moyenne	$\begin{pmatrix} -.4122 & .2144 \\ .3042 & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} .4077 & .2231 \\ .3107 & 0 \end{pmatrix}$
$\hat{A}(3)$ Moyenne	$\begin{pmatrix} 0 & .4014 \\ 0 & .1004 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 & .4011 \\ 0 & .1109 \end{pmatrix}$
$\hat{A}(4)$ Moyenne	$\begin{pmatrix} -.4229 & .4143 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} .4101 & .4014 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$
$\hat{A}(5)$ Moyenne	$\begin{pmatrix} .3009 & .1125 \\ -.1125 & .2119 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} .3009 & .1109 \\ -.1109 & .2099 \end{pmatrix}$
$\hat{\Sigma}_U$ Moyenne	$\begin{pmatrix} .6921 & .4123 \\ & .5149 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} .7109 & .4092 \\ & .5101 \end{pmatrix}$

Tableau 4-1 a

Tailles	40	80	120
$\hat{A}(1)$ RMSE	$\begin{pmatrix} .1149 & .1342 \\ .1902 & .1124 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} .0877 & .0994 \\ .0983 & .0991 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} .0684 & .0674 \\ .0772 & .0821 \end{pmatrix}$
$\hat{A}(2)$ RMSE	$\begin{pmatrix} .1332 & .1224 \\ .9921 & .0941 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} .1014 & .1194 \\ .8871 & .0421 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} .0987 & .0995 \\ .0683 & .0091 \end{pmatrix}$
$\hat{A}(3)$ RMSE	$\begin{pmatrix} .0579 & .1149 \\ .0663 & .1472 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} .0214 & .1093 \\ .0334 & .1233 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} .0071 & .0908 \\ .0112 & .1043 \end{pmatrix}$
$\hat{A}(4)$ RMSE	$\begin{pmatrix} .1292 & .1492 \\ .0029 & .0033 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} .1081 & .1133 \\ .0021 & .0029 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} .0998 & .0101 \\ .0014 & .0021 \end{pmatrix}$
$\hat{A}(5)$ RMSE	$\begin{pmatrix} .1148 & .1344 \\ .1901 & .1121 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} .0868 & .0992 \\ .0991 & .0987 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} .0682 & .0673 \\ .0699 & .0811 \end{pmatrix}$
$\hat{\Sigma}_U$ RMSE	$\begin{pmatrix} .0942 & .0843 \\ & .0945 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} .07941 & .07721 \\ & .0844 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} .0682 & .0697 \\ & .0699 \end{pmatrix}$

Tailles	160	200
$\hat{A}(1)$ RMSE	$\begin{pmatrix} .0572 & .0599 \\ .0543 & .0649 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} .0461 & .0398 \\ .0392 & .0459 \end{pmatrix}$
$\hat{A}(2)$ RMSE	$\begin{pmatrix} .0648 & .0783 \\ .0592 & .0065 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} .0447 & .0538 \\ .0347 & .0459 \end{pmatrix}$
$\hat{A}(3)$ RMSE	$\begin{pmatrix} .0054 & .0803 \\ .0061 & .0994 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} .0049 & .0502 \\ .0032 & .0439 \end{pmatrix}$
$\hat{A}(4)$ RMSE	$\begin{pmatrix} .0887 & .0994 \\ .0010 & .0003 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} .0643 & .0449 \\ .0001 & .0002 \end{pmatrix}$
$\hat{A}(5)$ RMSE	$\begin{pmatrix} .0569 & .0598 \\ .0521 & .0644 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} .0449 & .0379 \\ .0381 & .0492 \end{pmatrix}$
$\hat{\Sigma}_U$ RMS	$\begin{pmatrix} .0591 & .0577 \\ & .0584 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} .0423 & .0441 \\ & .0421 \end{pmatrix}$

Tableau 4-1 b

Taille Paramètres	40	80	120
$\hat{A}(1)$ Moyenne	$\begin{pmatrix} -.2228 & -.1122 \\ .1347 & -.7434 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -.2222 & -.1023 \\ .1247 & -.7344 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -.2198 & -.1123 \\ .1258 & -.7251 \end{pmatrix}$
$\hat{A}(2)$ Moyenne	$\begin{pmatrix} .1127 & .1090 \\ .1154 & .1154 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} .1032 & .1103 \\ .1014 & .1014 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} .1129 & .1087 \\ .1129 & .1129 \end{pmatrix}$
$\hat{A}(3)$ Moyenne	$\begin{pmatrix} .1982 & -.7994 \\ .0004 & -.1351 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} .1977 & -.7877 \\ .0001 & -.1263 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} .1988 & -.7954 \\ .0000 & -.1347 \end{pmatrix}$
$\hat{A}(4)$ Moyenne	$\begin{pmatrix} .1037 & .0002 \\ .1095 & .0002 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} .1003 & .0001 \\ .1089 & .0001 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} .1001 & .0000 \\ .1049 & .0000 \end{pmatrix}$
$\hat{A}(5)$ Moyenne	$\begin{pmatrix} -.2928 & .8122 \\ -.1047 & -.1047 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -.2921 & .8072 \\ -.1157 & -.1157 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -.2933 & .8165 \\ -.1002 & -.1002 \end{pmatrix}$
$\hat{A}(6)$ Moyenne	$\begin{pmatrix} .4127 & .4127 \\ .0002 & .0002 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} .4011 & .4011 \\ .0001 & .0001 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} .4012 & .4012 \\ .0000 & .0000 \end{pmatrix}$
$\hat{A}(7)$ Moyenne	$\begin{pmatrix} -.4182 & .6174 \\ -.3121 & .1151 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -.4018 & .6087 \\ -.3031 & .1011 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -.4152 & .6054 \\ -.3031 & .1081 \end{pmatrix}$
$\hat{A}(8)$ Moyenne	$\begin{pmatrix} -.1989 & -.2154 \\ .1095 & -.1095 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -.1889 & -.2054 \\ .1088 & -.1088 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -.1881 & -.2001 \\ .1005 & -.1005 \end{pmatrix}$
$\hat{\Sigma}_U$ Moyenne	$\begin{pmatrix} .6244 & .4344 \\ . & .5352 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} .6426 & .4240 \\ . & .5432 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} .6372 & .4145 \\ . & .5234 \end{pmatrix}$

Taille Paramètres	160	200
$\hat{A}(1)$ Moyenne	$\begin{pmatrix} -.2135 & -.1243 \\ .1234 & -.7278 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -.2055 & -.1158 \\ .1254 & -.7158 \end{pmatrix}$
$\hat{A}(2)$ Moyenne	$\begin{pmatrix} .1154 & .1105 \\ .1154 & .1014 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} .1214 & .1047 \\ .1231 & .1027 \end{pmatrix}$
$\hat{A}(3)$ Moyenne	$\begin{pmatrix} .2011 & -.8012 \\ .0000 & -.1388 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} .1978 & -.7955 \\ .0000 & -.1258 \end{pmatrix}$
$\hat{A}(4)$ Moyenne	$\begin{pmatrix} .1155 & .0000 \\ .1123 & .0000 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} .1021 & .0000 \\ -.1002 & .0000 \end{pmatrix}$
$\hat{A}(5)$ Moyenne	$\begin{pmatrix} -.3011 & .8066 \\ -.1101 & -.1101 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -.3001 & .8071 \\ -.1004 & -.1004 \end{pmatrix}$
$\hat{A}(6)$ Moyenne	$\begin{pmatrix} .4121 & .4121 \\ .0000 & .0000 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} .4000 & .4000 \\ .0000 & .0000 \end{pmatrix}$
$\hat{A}(7)$ Moyenne	$\begin{pmatrix} -.4213 & .6122 \\ -.3122 & .1123 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -.4001 & .6103 \\ -.3091 & .1010 \end{pmatrix}$
$\hat{A}(8)$ Moyenne	$\begin{pmatrix} -.1955 & -.2109 \\ .1101 & -.1101 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -.1801 & -.2022 \\ .1001 & -.1001 \end{pmatrix}$
$\hat{\Sigma}_U$ Moyenne	$\begin{pmatrix} .6411 & .4089 \\ . & .5288 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} .6177 & .4254 \\ . & .5142 \end{pmatrix}$

Tableau 4-2 a

Taille Paramètres	40	80	120
$\hat{A}(1)$ RMSE	(.1017 .1263 .0966 .1075)	(.0674 .0829 .0798 .0728)	(.0554 .0759 .0635 .0632)
$\hat{A}(2)$ RMSE	(.1021 .1025 .0923 .0917)	(.0426 .0743 .0418 .0495)	(.0412 .0495 .0361 .0414)
$\hat{A}(3)$ RMSE	(.1015 .1009 .0014 .1077)	(.0641 .0735 .0014 .0610)	(.0585 .0501 .0010 .0524)
$\hat{A}(4)$ RMSE	(.1214 .0011 .0985 .0022)	(.0784 .0003 .0728 .0002)	(.0628 .0001 .0598 .0001)
$\hat{A}(5)$ RMSE	(.1327 .1554 .1164 .1218)	(.0901 .1025 .0956 .0874)	(.0769 .0996 .0681 .0772)
$\hat{A}(6)$ RMSE	(.1224 .1525 .0251 .0031)	(.0987 .1125 .0019 .0014)	(.0784 .0985 .0011 .0010)
$\hat{A}(7)$ RMSE	(.1022 .1326 .1003 .1077)	(.0929 .0925 .0818 .0898)	(.0716 .0698 .0625 .0596)
$\hat{A}(8)$ RMSE	(.1012 .1126 .1013 .1017)	(.0911 .0932 .0751 .0852)	(.0657 .0545 .0622 .0587)
$\hat{\Sigma}_U$ RMSE	(.0853 .0701 .0726 .)	(.0711 .0493 .0521 .)	(.0681 .0438 .0448 .)

Taille Paramètres	160	200
$\hat{A}(1)$ RMSE	(.0481 .0611 .0513 .0521)	(.0397 .0459 .0398 .0497)
$\hat{A}(1)$ RMSE	(.0401 .0432 .0321 .0401)	(.0399 .0374 .0301 .0391)
$\hat{A}(1)$ RMSE	(.0501 .0498 .0002 .0487)	(.0432 .0465 .0001 .0399)
$\hat{A}(1)$ RMSE	(.0522 .0001 .0567 .0001)	(.0438 .0001 .0422 .0001)
$\hat{A}(1)$ RMSE	(.0658 .0874 .0542 .0523)	(.0595 .0601 .0498 .0453)
$\hat{A}(1)$ RMSE	(.0598 .0765 .0009 .0008)	(.0498 .0529 .0004 .0003)
$\hat{A}(1)$ RMSE	(.0564 .0532 .0502 .0521)	(.0428 .0466 .0389 .0492)
$\hat{A}(1)$ RMSE	(.0547 .0504 .0542 .0469)	(.0452 .0394 .0347 .0321)
$\hat{\Sigma}_U$ RMSE	(.0574 .0399 .0374 .)	(.0401 .0324 .0321 .)

Tableau 4-2 b

### 4.5.3 Interprétation des résultats

Les résultats de simulations dans les tableaux (4, 1a), (4, 1b), (4, 2a), (4, 2b) montrent que l'utilisation de la méthode autorégressive périodique fournit de meilleurs résultats, et plus que la taille de l'échantillon augmente plus la valeur du *RMSE* diminue, et elle est presque nulle quand la taille de l'échantillon est importante, de plus, il y'a des paramètres qui sont négligeable dans la taille; et le temps d'exécution est très petit.

Le nombre d'itérations effectuées nous a permit de conclure que les estimateurs de chaque modèle converge en probabilités vers les vraie valeurs de paramètres, quand la taille de l'échantillon est importante.

### 4.5.4 Comparaison des résultats de la méthode autorégressive périodique et la méthode autorégressive classique

Revenons à notre modèle 11 par exemple qui est un modèle 2-dimensionnel d'ordre 7, c'est-à-dire,  $d = 2$  et  $p^* = 7$ , il y'a 31 paramètres à estimer dans ce modèle, c'est-à-dire,  $28 = (2)^2 \times 7$ , éléments de  $A(1), A(2), \dots, A(7)$  et  $3 = 2 \times 3/2$  éléments de la matrice symétrique  $\Sigma$ .

D'une part les résultats de simulation du modèle 11 par la méthode autorégressive classique, présenté dans la section 5 du chapitre 3, montrent que les paramètres estimés convergent en probabilités vers la vraie valeurs du paramètre quand la taille de l'échantillon est importante, et plus la taille de l'échantillon augmente plus la valeurs de *RMSE* diminue. Ainsi, le grand nombre de paramètres qui figure dans ce modèle rend l'estimation un peu difficile; ce qui demande un temps d'exécution assez long, alors cette méthode est coûteuse. D'autre part, il est possible de faire diminuer ce nombre de paramètres, en utilisant la méthode autorégressive périodique proposée par Newton (1982), elle est basée sur la construction du modèle autorégressif univarié périodique correspondant au modèle autorégressif multivarié stationnaire.

Le modèle autorégressif univarié périodique correspondant au modèle 11 contient 21 paramètres à estimer où  $p_1 = 16$ ,  $p_2 = 3$ . On remarque que ce nombre de paramètres est inférieur où cel qui figure dans le modèle multivarié donc, le nombre de paramètres est réduit par l'utilisation de la méthode autorégressive périodique. Enfin, reconstruisant le modèle multivarié correspondant au modèle périodique où l'ordre  $p^* = 8$ .

## **Conclusion**

Nous nous déduisons que la méthode autorégressive périodique fournit de meilleurs résultats que la méthode autorégressive classique; avec un nombre de paramètres réduit où les autres paramètres sont négligeables dans la taille, et les estimateurs convergent en probabilité vers la vraie valeur de paramètres, avec un temps d'exécution petit, donc, elle est moins coûteuse que la méthode autorégressive classique.

## CONCLUSION GENERALE :

Dans notre travail, nous nous sommes intéressés au problème de l'estimation; plus précisément, à l'estimation des paramètres d'un modèle autorégressif  $d$ -périodique d'ordre  $p$  et à celle des paramètres d'un modèle autorégressif  $d$ -varié stationnaire.

Nous avons considéré, d'une part, six types de modèles sont les modèles autorégressifs 2- périodiques d'ordre 1, 4 périodiques d'ordre 1, 2- périodiques d'ordre 2 et les modèles autorégressifs 2- périodiques d'ordres  $P_1 = 1, P_2 = 2$ , 4- périodiques d'ordres  $P_1 = 2, P_2 = 1, P_3 = 3$  et  $P_4 = 2$  et le modèle 5- périodiques d'ordre  $P_1 = 1, P_2 = 3, P_3 = 2, P_4 = 1$  et  $p_5 = 2$  et qui ont fait l'objet du deuxième chapitre.

Nous avons effectué une étude de simulation intensive en langage Matlab de ces modèles, qui nous a montré que les paramètres sont bien estimés par la méthode des moindres carrés. Nous avons remarqué que, plus la taille de l'échantillon est importante, plus la valeur de *RMSE* diminue. Le nombre d'itérations effectuées nous a permis de conclure que les estimateurs convergent en probabilité vers les vraies valeurs des paramètres.

D'autre part, nous avons considéré, cinq types de modèles multivariés stationnaires sont les modèles autorégressifs 2-dimensionnels d'ordre 1, 2-dimensionnels d'ordre 2, 4- dimensionnels d'ordre 1, 2- dimensionnels d'ordre 4 et 2-dimensionnels d'ordre 7. Nous avons effectué une étude de simulation intensive en langage Matlab de ces modèles, par la méthode des moindres carré multivarié. Là aussi, nous avons remarqué que, plus la taille d'échantillon est importante, plus la valeur du *RMSE* diminue. Le nombre d'itérations effectuées nous a permis de conclure que les estimateurs convergent en probabilité vers les vraies valeurs des paramètres. Nous avons remarqué que le temps d'exécution de chaque modèle de ces modèles multivariés stationnaires est très long; à cause du grand nombre de paramètres; qui figure dans ces modèles et ce qui rend l'estimation des paramètres plus difficile. Notre but été donc de réduire ce nombre de paramètres; la réduction est basée essentiellement sur l'utilisation d'une méthode paramétrique modifié d'estimation; elle est connue comme étant la méthode autorégressive périodique proposée par Newton (1982); cette méthode est basée sur l'analyse des processus autorégressifs périodiques; elle peut éliminer plusieurs difficultés qui figurent dans les méthodes traditionnelles d'estimation, en particulier dans la méthode autorégressive classique. Ainsi les informations sur la structure d'une série temporelle multiple, peuvent être obtenues par l'utilisation d'un processus autorégressif univarié périodique Newton (1982), Pagano (1978),

Jones et Brelsford (1967) et Gladyshev (1961). Une étude, par simulation intensive, pour différentes valeurs de paramètres et les diverses tailles de l'échantillon a été menée en langage Matlab pour le modèle 10 et le modèle 11 présentés dans le chapitre 3. Enfin, un exemple illustratif a été donné (modèle 11) qui est un modèle autorégressif 2-dimensionnel d'ordre 7 dans le but d'évaluer le gain en efficacité de l'estimation par la méthode autorégressive périodique par rapport à la méthode autorégressive classique et ont fait l'objet du quatrième chapitre.

Nous avons remarqué que dans le modèle 11 il y'a 31 paramètres à estimer tel que  $28 = 4 \times 7$  éléments de  $A(1), \dots, A(7)$  et  $3 = 2 \times 3/2$  éléments distincts de la matrice symétrique  $\Sigma_U$ . Il est possible de faire diminuer ce nombre de paramètres nous considérons son modèle autorégressif périodique correspondant. Le modèle périodique correspondant au modèle 11 contient 21 paramètres à estimer avec  $p_1 = 16$  et  $p_2 = 3$ . Enfin, reconstruisant le modèle multivarié correspondant à notre modèle périodique avec  $p^* = 8$ . Le nombre d'itérations effectuées nous a permis d'avoir une idée sur la convergence des paramètres et plus la taille de l'échantillon augmente plus la valeur du *RMSE* diminue. Nous nous déduisons que ; la méthode autorégressive périodique fournit généralement de meilleurs résultats avec un nombre de paramètres réduit où les autres paramètres sont négligeables dans la taille. Ainsi, le plus grand avantage de la méthode autorégressive périodique qu'elle ne demande pas un temps d'exécution assez long, donc, elle est moins coûteuse que la méthode autorégressive classique.

En effet si  $X$  est un processus autorégressif multivarié d'ordre  $p^*$ , alors les estimateurs sont asymptotiquement normaux et efficaces et si  $X$  peut être réécrit comme un ordre fini d'un processus autorégressif périodique, alors sous certaines conditions quand la taille de l'échantillon tend vers l'infini (BERK 1974) les estimateurs sont toujours asymptotiquement normaux et efficaces Pagano (1978) a montré les propriétés des estimateurs pour les modèles autorégressifs périodiques.

Ce travail peut être étendu aux cas particulier suivant :

- 1) **Modèle moyenne mobile vectoriel stationnaire.**
- 2) **Modèle autorégressif moyenne mobile vectoriel stationnaire.**



- [11] Bentarzi, M. (1998). Model-Bulding problem of Periodically m-Variate Moving Average Processes. *Journal of Multivariate Analysis* .66, 1-21.
- [12] Bentarzi, M. (2001). Predictive Density Order Selection of Periodic Autoregressive. A paraître (2001).
- [13] Boshnakov. N. (1995). Recursive computation of the parameters of periodic autoregressive moving-average processes.
- [14] Box, G.E.P et Jenkins, G. (1976). *Time Series Analysis, Forecasting and Control*, revised ed., Holden-Day.
- [15] Cadren, M. (1998). *Modelisation a court terme de la demande de produits petroliers en France*, These de doctorat, Universite de Bourgogne ENSPM.
- [16] Cipra, T. (1985). Periodic Moving Average processes. *Aplikace Matematiky* 30, 218 -229.
- [17] Cipra, T. and Tlustý, P. (1987). Estimation in multiple autoregressive -moving average models using periodicity, *Journal of Time Series Analysis*, 8, pp 293-300.
- [18] Cleveland, W.P et Tiao, G.C.(1979). Modeling seasonal time series. *Revue Economie Appliquee* 32, 107-129
- [19] Cramer, H. (1946). *Mathematical Methods of Statistics*. Princeton Univ. Press.
- [20] Franses. (1996). *Periodicity and stochastic time series*. Oxford University Press.
- [21] Ghysels, E and Hall, A. (1992). Testing periodicity in some linear macroeconomic models. To appear.
- [22] Ghysels, E ; Hall, A and Lee, H.S. (1996). On Periodic Structures and Testing for Seasonal Unit Roots. *JASA*, Decembre 1996, vol.91, N0.436, 1551-1559.
- [23] Gladyshev, E.G. (1961). Periodically correlated Random Sequences, *Soviet. Mathematics*, 2,385-388.
- [24] Guerbyenne, H and Bentarzi, M. (2000) Adaptive estimation of causal periodic Autoregressive Models with unspecified innovation densities. *JMA2000*. 12-15 Novembre 2000. Université de Blida.
- [25] Gwilym M. Jenkins. and Athar S. Alavi (1981). Some aspects of modeling and forecasting multivariate time series. *Journal of Time Series Analysis* Vol. 2, N<sup>o</sup>1.

# Bibliographie

- [1] Adams, G. J. and Goodwin, G. C. (1995). Parameter estimation for periodic ARMA models  
Journal of Time Series Analysis .16, 127-145.
- [2] Andel, J. (1983). Statistical analysis of periodic autoregression. Aplikace Matematiky, 364-385.
- [3] Andel, J. (1989). Periodic autoregression with exogenous variables and periodic variances. Aplikace matematiky 34, No.5. 387-395.
- [4] Anderson, P.L. and A.V. Vecchia. (1993). Asymptotic results for periodic autoregressive moving average processes. Journal of Time series Analysis 14, 1-18.
- [5] Akmal, M. , Stem, D. (2001). The structure of Australian Residential Energy Demand, Working paper in Ecological Economics, center of Resources and Environmental Studies (CRES), March 2001, n°0101.
- [6] Arnold, N. and Tapio, S.(2001). Estimation of parameters and eigenmodes of multivariate autoregressive models. Mathecal , Vol. 27, No. 1, Pages 27 - 57.
- [7] Bentarzi, M. and Hallin, M.(1994). On the Invertibility of Periodic Moving Average Models. Journal of Time Series Analysis .Vol 15, N0.3, 263-268.
- [8] Bentarzi, M. (1995). Modèles de séries chronologiques a coefficients périodiques. Thèse de doctorat Es-sciences. Institut de mathématiques. U.S.T.H.B, Alger, Algérie.
- [9] Bentarzi, M. and Hallin, M.(1996). Locally Optimal Tests against Periodical Autoregression: Parametric and Nonparametric Approaches. Journal of Econometric Theory, 12, 1996, 88-112.
- [10] Bentarzi, M. and Hallin, M.(1998). Spectral factorisation of periodically correlated MA(1) processes. Journal of Applied Probability .35, 46-54.

- [26] Hansen, L.P. and T. J. Sargent. (1990). Recursive linear models of dynamic economics. Unpublished manuscript.
- [27] Hajek, J. and Sidak, Z. (1967). Theory of ranks tests . Academic Press , New York.
- [28] Helmut Lükepohl.(1990). Introduction to Multiple Time Series Analysis, Berlin Heidelberg, New York.
- [29] Helmut Lükepohl.(1993). Introduction to Multiple Time Series Analysis, 2nd endn, Springer, Berlin.
- [30] Jones, R. H. and Brelsford. W. M. (1967). Time Series With Periodic Structure. *Biometrika*, 54, 403-408.
- [31] Lund. and I. V. Basawa. (1998). Recursive prediction and likelihood evaluation for periodic ARMA models.
- [32] Mauricio, J. A. (1997). The exact likelihood function of a vector autoregressive moving average model, *Applied Statistics, Series C*, 46, pp 157-171.
- [33] Mcleod, A. I. (1991). Parsimony model qdequacy and periodic correlation in time series forecasting. To appear.
- [34] Newton. H. Joseph. (1982). Using periodic autoregressions for multiple spectral estimation. *Technometrics*, Vol. 24, NO.2, 109-116.
- [35] Osbon, D.R. (1988). Seasonality and habit persistence in a life- cycle model of consumption. *Journal of Applied Econometrics* 3, 255-266.
- [36] Osbon, D.R. And J. P. Smith. (1989). The performance of periodic autoregressive models in forecasting seasonal U.k. Consumption. *Journal of Business and Economic Statistics* 7, 117-127.
- [37] Pagano, M. (1978). On periodic and multiple autoregression. *Annals of Statistics*, 6, 1310-1317.
- [38] Parzen, E. (1956). On consistent estimates of the spectral density of a stationary time series. From the proceeding of the National Academy of Sciences, Vol 42, No. 3, pp 154-157.

- [39] Parzen, E.(1957). On consistent estimates of the spectrum of a stationary time series. *Annals of mathematical Statistics*,Vol. 28, No. 2, pp 25-43.
- [40] Parzen, E. (1958). On asymptotically efficient consistent estimates of the spectral density function of a stationary time series. *J. roy. Statist.Soc. Ser. B.* 20, pp.303-322.
- [41] Parzen, E. (1962). On estimation of a probability density function and mode. *Annals of Mathematical Statistics* .Vol. 33 N0.3, September, 1962.
- [42] Parzen, E and Pagano, M. (1979). An approach to modeling seasonally stationary time series, *J. Econometrics.* 9, 137-153. North-Holland Publishing Company.
- [43] Roussas, G.G. (1979). Asymptotic distribution of the log-likelihood Function for Stochastic Processes. *Z.Wahrscheinlichkeitsstheorie verw. Gebiete.*47, 31-46 (1979).
- [44] Salas, J.D;Boes, D.C.and Smith, R.A.(1982). Estimation of ARMA Models with Seasonal Parameters. *Water Resources Research*, Vol. 18,N0.4,1006-1010.
- [45] Shibata. (1976). Selection of the order of an autoregressive model by akaike's information criterion. *Biometrika*, 63, 1, pp. 117-26.
- [46] Sims, A. (1980). Comparision of interwar and postwar business cycles : Monetarism reconsidered, *Amrean Economic Review*, vol, 62, pp 250-257.
- [47] Swensen, A.R. (1985). The asymptotic distribution of the likelihood ratio for autoregressive time series with a regression trend. *Journal of Multivariate Analysis.* 16, 54-70.
- [48] T. A. Ula and A. A. Smadi ( 1997). Periodic stationarity conditions for periodic Autoregressive Moving Average Processes as Eigenvalue Problems *Waters Resources Reseach*, Vol. 33, NO.8, P 1929-1934.
- [49] Tiao, G.C et Grupe, M.R. (1980). Hidden periodic autoregressive -moving average models in time series data. *Biometrika* 67,365-373.
- [50] Troutman, B.M. (1979). Some resultats in periodic autoregression. *Biometrika*, 66, 219-228.
- [51] Vecchia, A.V. (1985). Maximum likelihood estimation for periodic autoregressive moving average models. *Technometrics* ,November(1985),Vol.27,N0.4, 375-384.
- [52] Whittle, P. (1963). On the fitting of multivariate autoregressions and the approximate factorisation of the spectral density matrix. *Biometrika* 50, 29-34.

## ANNEXE 1 :

Dans cette annexe, on présente la factorisation des matrices symétriques et leur représentation mathématiques où un cas particulier est traité qui est à la base des analyses multidimensionnelles, puis on donne l'algorithme de la méthode de Cholesky modifiée.

### Factorisation des matrices symétriques.

#### Theorème

Si une matrice régulière  $A$  d'ordre  $N$  possède une factorisation  $A = LU$  où

$L$  est triangulaire inférieure à diagonale unité et  $U$  triangulaire supérieure, alors la factorisation est unique.

#### Remarque

On peut écrire  $U$  sous forme  $DR$  où  $D$  est diagonale et  $R$  triangulaire supérieure à diagonale unité La décomposition  $A = LDR$  si elle existe elle est unique.

Nous avons vu, à la remarque que l'on pouvait écrire la factorisation d'une matrice régulière  $A$  sous la forme  $LDR$ . Alors dans le cas où  $A$  est symétrique on a la simplification suivante

#### Theorème

Soit  $A$  une matrice symétrique régulière possédant une factorisation  $LDR$  où  $L$  et  $R$  sont des matrices triangulaires respectivement inférieures et supérieures à diagonale unité et  $D$  est une matrice diagonale. Alors  $R = L^t$  donc :

$$A = LDL^t.$$

#### Preuve

Puisque  $A = A^t = R^tDL^t$ , l'unicité de la décomposition  $\Rightarrow R = L^t$ .

La représentation mathématique de la factorisation  $A = LDL^t$

La factorisation  $A = LDL^t$  peut se faire selon la récurrence suivante.

Soit  $\bar{A}_1 = A$  une matrice symétrique décomposée en blocs de dimension 1 et  $(N - 1)$  en :  
 $(N - 1)$  en :

$$\bar{A}_1 = \begin{array}{|c|c|} \hline \begin{array}{|c|c|} \hline d_1 & b_1^t \\ \hline \end{array} & \\ \hline b_1 & B_1 \\ \hline \end{array}$$

Définissons la matrice élémentaire d'élimination décomposée en blocs de même dimension que ceux de  $\bar{A}_1$  par :

$$L_1 = \begin{array}{|c|c|} \hline \begin{array}{|c|c|} \hline 1 & 0 \\ \hline \end{array} & \\ \hline l_1 & I \\ \hline \end{array} \quad \text{avec } l_1 = 1/d_1 b_1$$

calculons  $\bar{A}_2$  telle que  $\bar{A}_1 = L_1 \bar{A}_2 L_1^t$ , ( $\bar{A}_2$  est encore symétrique).

$$\text{On'a } \bar{A}_2 = L_1^{-1} \bar{A}_1 L_1^{-t} = \begin{array}{|c|c|} \hline \begin{array}{|c|c|} \hline 1 & 0 \\ \hline \end{array} & \begin{array}{|c|c|} \hline d_1 & b_1^t \\ \hline \end{array} \\ \hline l_1 & I \\ \hline \end{array} = \begin{array}{|c|c|} \hline \begin{array}{|c|c|} \hline 1 & l_1 \\ \hline \end{array} & \begin{array}{|c|c|} \hline d_1 & 0 \\ \hline \end{array} \\ \hline 0 & I \\ \hline \end{array} = \begin{array}{|c|c|} \hline d_1 & 0 \\ \hline 0 & \bar{B}_2 \\ \hline \end{array}$$

$$\text{avec } \bar{B}_2 = B_1 - d_1 l_1 l_1^t = B_1 - 1/d_1 b_1 b_1^t$$

Au bout de  $(k-1)$  étapes, la matrice symétrique  $\bar{A}_k$ , décomposée en blocs de dimensions  $(k-1)$ , 1 et  $(N-k)$  à la structure suivante :

$$\bar{A}_k = \begin{array}{|c|c|c|} \hline \begin{array}{|c|c|c|} \hline D_{k-1} & 0 & 0 \\ \hline \end{array} & & \\ \hline 0 & d_k & b_k^t \\ \hline 0 & b_k & B_k \\ \hline \end{array}$$

Soit  $L_k$  la  $k^{\text{ème}}$  matrice élémentaire d'élimination, définie par :

$$L_k = \begin{array}{|c|c|c|} \hline \begin{array}{|c|c|c|} \hline I & 0 & 0 \\ \hline \end{array} & & \\ \hline 0 & 1 & 0 \\ \hline 0 & l_k & I \\ \hline \end{array} \quad \text{avec } l_k = 1/d_k b_k$$

Alors

$\bar{A}_{k+1} = L_k^{-1} \bar{A}_k L_k^{-t}$  est encore symétrique et l'on a :

$$\bar{A}_{k+1} = \begin{array}{|c|c|c|} \hline \begin{array}{|c|c|c|} \hline I & 0 & 0 \\ \hline \end{array} & \begin{array}{|c|c|c|} \hline D_{k-1} & 0 & 0 \\ \hline \end{array} & \begin{array}{|c|c|c|} \hline I & 0 & 0 \\ \hline \end{array} \\ \hline 0 & 1 & 0 \\ \hline 0 & l_k & I \\ \hline \end{array} = \begin{array}{|c|c|c|} \hline D_{k-1} & 0 & 0 \\ \hline 0 & d_k & 0 \\ \hline 0 & 0 & \bar{B}_{k+1} \\ \hline \end{array}$$

$$\text{avec } \bar{B}_{k+1} = B_k - d_k l_k l_k^t = B_k - 1/d_k b_k b_k^t$$

A la fin des  $(N-1)$  étapes, la matrice  $\bar{A}_N$  est diagonale. Posons  $D = \bar{A}_N$  et  $L = L_1 L_2 \dots L_{N-1}$  qui est triangulaire inférieure à diagonale unité. Alors

$$\bar{A}_1 = L_1 \bar{A}_2 L_1^t = L_1 L_2 \bar{A}_3 L_2^t L_1^t = \dots = L_1 L_2 \dots L_k \bar{A}_{k+1} L_k^t \dots L_2^t L_1^t$$

$$= L_1 L_2 \dots L_{N-1} \bar{A}_N L_{N-1}^t \dots L_2^t L_1^t = LDL^t$$

### Cas des matrices définies positives : (factorisation de Cholesky)

Si une matrice symétrique  $A$  possède une factorisation  $A = LDL^t$  donc toutes les sous-matrices principales de  $A$  sont régulières, en particulier si  $A$  est définie positive toutes les sous-matrices principales de lemme sont aussi définies positives. Dans ce cas on peut montrer que les coefficients des matrices successives ne peuvent pas devenir très grands au cours de la factorisation on a le lemme suivant

#### Lemme

Si  $\bar{A}_1$  est définie positive Alors

$$\max_k \left( \max_{i,j} |\bar{A}_k(i, j)| \right) = \max_{i,j} |\bar{A}_1(i, j)| = \max_i \bar{A}_1(i, i)$$

#### Théorème

Si une matrice symétrique  $A$  possède une factorisation  $A = LDL^t$  où  $L$  est triangulaire inférieure à diagonale unité et  $D$  est une matrice diagonale avec tous ses coefficients diagonaux strictement positifs si et seulement si  $A$  est symétrique définie positive. Une telle factorisation est unique.

**Théorème**  $A$  possède une factorisation de Cholesky si et seulement si est définie positive.

Dans ce cas elle possède une factorisation positive unique.

#### Algorithme de la Factorisation de Cholesky modifié.

Le calcul de la factorisation  $A = LDL^t$  peut se faire par identification des coefficients situés dans la partie triangulaire inférieure des matrices soit

$$A_{i,j} = \sum_{k=1}^N l_{i,k} d_k l_{j,k} = \sum_{k=1}^j l_{i,k} d_k l_{j,k} \text{ pour } j \leq i$$

Supposons qu'il ne soit pas utile d'effectuer des permutations (par exemple si  $A$  est définie positive). En faisant par exemple, le calcul ligne par ligne, on obtient l'algorithme suivant

- ayant calculé les  $(i-1)$  premières lignes

$$\begin{cases} l_{i,j} = \frac{a_{i,j} - \sum_{k=1}^{j-1} l_{i,k} d_k l_{j,k}}{d_j} & \text{pour } 1 \leq j \leq i-1 \\ d_i = a_{i,i} - \sum_{k=1}^{i-1} l_{i,k}^2 d_k \end{cases}$$

A première vue, le nombre d'opérations nécessaires au calcul de la  $i^{\text{ème}}$  ligne est de

$(i-1)$  divisions,  $\sum_{j=1}^i (j-1) = i(i-1)/2$  additions et  $i(i-1)$  multiplications, puisqu'il faut deux multiplications pour une addition.

Néanmoins, certaines multiplications peuvent être effectuées avant la sommation sur  $k$  et n'auront pas à être réexécutées à chaque fois que  $j$  varie. On peut en effet réécrire les formules précédente sous la forme

$$\begin{cases} l_{i,j} d_j = a_{i,j} - \sum_{k=1}^{j-1} (l_{i,k} d_k) l_{j,k} & \text{pour } 1 \leq j \leq i-1 \\ d_i = a_{i,i} - \sum_{k=1}^{i-1} l_{i,k}^2 d_k \end{cases}$$

Bien sûr, il existe 6 façons différentes de programmer la décomposition  $LDL^t$ , en pratique on aura intérêt à écrire ces programmes.



## ANNEXE 2 :

la notation Utilisé dans ce travail est clair en soi. La liste suivante rappelle des directives générales.

### Les symboles généraux

=	égal
$\sim$	suit la loi
$\rightarrow$	converge vers
lim	limite
plim	limite en probabilité
max	maximum
min	minimum
$ z $	valeur absolue ou module de z
$[x]$	partie entière de x
$L$	opérateur de décalage
$E$	espérance
$M$	moyenne
$VAR$	variance
$COV$	covariance, matrice de covariance
$RMSE$ ou $R$	root Mean Square Error
$EMC$	Estimateur de moindre carré
Pr	probabilité
$l(\cdot)$	fonction de vraisemblance
$\ln l$	logarithme de la fonction de vraisemblance
$l_0(\cdot)$	approximation de la fonction de vraisemblance
$\ln l_0$	approximation du logarithme de la fonction de vraisemblance
T	taille de l'échantillon ou longueur de la série chronologique

### • Distributions et processus stochastiques

$N(\mu, \Sigma)$	loi normal multivariée de moyenne $\mu$ et de matrice de covariace $\Sigma$
$AR$	processus autorégressif
$AR(p)$	processus autorégressif d'ordre $p$
$ARMA(p, q)$	processus autorégressif moyenne mobile d'ordre $(p, q)$
$MA$	processus moyenne mobile
$MA(q)$	processus moyenne mobile d'ordre $q$
$VAR(p^*)$	processus vectoriel autorégressif d'ordre $p^*$
$ARMA(p^*, q^*)$	processus vectoriel autorégressif moyenne mobile d'ordre $(p^*, q^*)$

### Vecteur et opération de la matrice

$M^t$	transposée de $M$
$M^{-1}$	inverse de $M$
$\otimes$	produit de Kronecker
$\det(M)$	
$\det M$	déterminant de $M$
$ M $	
$tr(M), tr M$	trace de $M$
$vec$	opérateur qui empile les colonnes d'une matrice

Les vecteurs et les matrices ont un rapport direct avec les processus stochastiques et les séries chronologiques multivariés

$u_t$  processus bruit blanc d-dimensionnel

$u_{dt}$  d<sup>ème</sup> élément de  $u_t$

$$u_t = \begin{bmatrix} u_{d1} \\ \vdots \\ u_{dT} \end{bmatrix}$$

$$U = [u_1, \dots, u_T]$$

$$u = \text{vec}(U)$$

$$U_t = \begin{bmatrix} u_t \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \text{ ou } \begin{bmatrix} u_t \\ 0 \\ \vdots \\ u_t \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

$x_t$  le processus stochastique d-dimensionnel

$\bar{x} = \sum_{t=1}^T x_t / T$  la moyenne empirique de l'échantillon

$$X = [x_1, \dots, x_T]$$

$$x = \text{vec}(X)$$

$$X_t = \begin{bmatrix} x_t \\ \vdots \\ x_{t-p^*+1} \end{bmatrix} \text{ ou } \begin{bmatrix} x_t \\ \vdots \\ x_{t-p^*+1} \\ u_t \\ \vdots \\ u_{t-q^*+1} \end{bmatrix}$$

$$Z_t = \begin{bmatrix} 1 \\ x_t \\ \vdots \\ x_{t-p^*+1} \end{bmatrix}$$

Les moments matriciels



- $\Gamma_x(h)$  COV  $(x_t, x_{t-h})$  pour un processus stationnaire  $x_t$
- $R_x(h)$  matrice de correlation qui correspond a  $\Gamma_x(h)$
- $\Sigma_u$   $E(u_t u_t') = Cov(u_t)$ , la matrice de covariance du bruit blanc
- $\Sigma_x$   $= E(x_t - \mu)(x_t - \mu)' = Cov(x_t)$ , la matrice de covariance du processus stationnaire  $x_t$

11-11-2018  
 11-11-2018  
 11-11-2018

