

32-530-729-1



MINISTÈRE DE L'ENSEIGNEMENT SUPÉRIEUR ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

UNIVERSITÉ DE BLIDA

INSTITUT DE MÉCANIQUE

Option : ENERGETIQUE

**THESE DE MAGISTER**

Présentée par: Mr. **CHEHAT ABDELMADJID**  
Ingénieur d'Etat en Mécanique Option Energétique

**THEME**

**SIMULATION NUMERIQUE DE  
L'AEROTHERMODYNAMIQUE INSTATIONNAIRE D'UN  
ECOULEMENT TURBULENT COMPRESSIBLE DANS UN  
MOTEUR ALTERNATIF**

Dr. N. AIT MESSAOUDANE	M.C	Univ. BLIDA	PRESIDENT
Dr. B. BOUMEDDANE	C.C	Univ. BLIDA	RAPPORTEUR
Dr. A. HARHAD	M.C	Univ. BLIDA	EXAMINATEUR
Dr. DAMOU	M.C	Univ. BLIDA	«
Dr. Z. NEMOUCHI	M.C	Univ. CONTANTINE	«

Soutenue le 30.09.1998

## RESUME

L'écoulement instationnaire turbulent de l'air supposé visqueux et compressible à l'intérieur du cylindre d'un moteur à combustion interne durant les deux phases admission et compression, est simulé numériquement, avec et sans swirl par la méthode des volumes finis, avec un schéma dit « **PLDS** » : (Power Law Differencing Scheme) dans l'espace et un schéma **implicite** dans le temps. Le modèle de turbulence utilisé est celui à deux équations de transport basé sur la théorie du groupe de rénormalisation (**RNG k-ε**). Le code de calcul **TEAM** initialement conçu pour simuler des écoulements stationnaires incompressible dans des jets libres a été étendu aux écoulements non stationnaires compressibles. Les résultats ainsi obtenus sont satisfaisants et ouvrent la voie pour la simulation des autres phases du cycle.

## ABSTRACT

The instationary turbulent flow of compressible viscous fluid (air) within the internal combustion engine cylinder in the two admission and compression phases is simulated numerically with and without swirl by the finite volume method with a scheme said « **PLDS** »: (Power Law Differencing Scheme) in the space and an **implicit** scheme in the time. the used turbulence model based on the **Renormalization Group** theory, is the one to two equations of transport (**RNG k-ε**). The computer code **TEAM** initially conceived in order to simulate some stationary and incompressible flows in a free jets was extended to the compressible and instationary flows. The obtained results are satisfactory and open the way for the simulation of the other phases of cycle.

## DEDICACES

- A mes chers parents;
- Mes frères et sœurs;
- Tous mes collègues d'étude;
- Tous ceux qui travaillent jours et nuits pour le bien de la nation

Je dédie ce modeste travail

CHEHHAT. A

## REMERCIEMENTS

*Je remercie vivement mon encadreur Monsieur le docteur :*

***B. BOUMMEDDANE** , d'avoir assuré le suivi de cette thèse, et d'avoir toujours porté une attention bienveillante à l'évolution de mon travail.*

*J'adresse mes sincères remerciements à Messieurs les Maîtres de conférence:*

***N. AIT MESSAOUDENE, A. HARHAD et M. DAMOU** de l'université de **Blida** et **Z. NEMOUCHI** de l'université de **Constantine**, qui ont accepté de faire partie du jury et de juger ce travail.*

*Je remercie sincèrement Messieurs:*

***A. MAMERI, R. HADEF et F. KALDOUNE** du centre universitaire d'**Oum el Bouaghi**, qui m'ont bien orienté vers une étude captivante.*

*Mes remerciements vont enfin à tous ceux qui m'ont aidé de près ou de loin pour réaliser ce travail.*



A. CHAÏBI.

## NOMENCLATURE

$A_N, A_S, A_E, A_W, A_P$	: Coefficients dans le système d'équations algébriques discrétisées.
$a, b, c, d$	: Eléments de la matrice tridiagonale.
$a_n, a_s, a_e, a_w$	: Aires des faces du volume de contrôle.
$d$	: Rayon de la manivelle.
$D$	: Longueur de la bielle, Terme de diffusion.
$dv$	: Volume élémentaire.
$dx$	: Distance entre deux noeuds dans la direction $x$ .
$dr$	: « « « « « $r$ .
$\bar{f}$	: Terme de convection : Facteur compris entre 0 et 1 pour la discrétisation temporelle.
$fx(i)$	: Facteur d'interpolation linéaire suivant $x$ .
$fy(j)$	: « « « « $r$ .
$G$	: Taux de génération de l'énergie cinétique turbulente.
$H(t)$	: Déplacement instantané du piston.
$i$	: Indice des noeuds suivant $x$ .
$j$	: « « « $r$ .
$k$	: Energie cinétique turbulente.
$L$	: Longueur caractéristique prise égale à la taille moyenne de la maille.
$L_m$	: Longueur de mélange.
$m$	: Exposant de la température pour les gaz parfaits = 0.5.
$n$	: Exposant polytropique.
$P$	: Pression, Nombre de Peclet = $F/D$ , Production de l'énergie cinétique turbulente
$R$	: Rayon du cylindre, Terme dans l'équation de $\epsilon$
$Re$	: Nombre de Reynolds.
$r$	: coordonnée radiale.
$S_\phi$	: Terme source pour la variable $\phi$ .
$S_c$	: Partie indépendante de la variable $\phi$ du terme source.
$S_p$	: Partie dépendante de la variable $\phi$ du terme source.
$T$	: Température.
$t$	: Temps.

U	: Composante axiale de la vitesse.
V	: Composante radiale de la vitesse.
VPM	: Vitesse moyenne du piston.
W	: Composante tangentielle de la vitesse.
Wp	: Vitesse instantané du piston.
x	: Coordonné axiale dans le domaine à frontière fixe.
z	: Coordonné axiale dans le domaine à frontière mobile.
P*	: Estimation de la pression.
P	: Correction de la pression, Fluctuation.
u*	: Estimation de la vitesse axiale.
v	: Correction de la vitesse axiale, Fluctuation.
w	: Fluctuation de la vitesse tangentielle
V*	: Estimation de la vitesse radiale.
V	: Correction de la vitesse radiale, Fluctuation.

#### Symboles grecs

$\alpha$	: Coefficient de sous-relaxation.
$\beta$	: Coefficient de la matrice.
$\gamma$	: Rapport des chaleurs spécifiques.
$\varepsilon$	: Taux de dissipation de l'énergie cinétique turbulente.
$\phi$	: Variable dépendante généralisée.
$\tau$	: Contrainte de frottement.
$\rho$	: Densité.
$\mu$	: Viscosité dynamique.
$\mu_{eff}$	: Viscosité effective
$\mu_t$	: Viscosité isotropique turbulente
$\nu$	: Viscosité cinématique.
$\kappa$	: Constante de VAN KARANAN.
$\delta_{ij}$	: Delta de KRONECKER.
$\Delta x$	: Dimension d'un volume de contrôle suivant x.
$\Delta r$	: Dimension d'un volume de contrôle suivant r.
$\theta$	: Angle du vilebrequin.

## Table des Matières

	<b>Pages</b>
DEDICACE	
REMERCIEMENTS	
NOMENCLATURE	
TRAVAUX ANTECEDENTS	
INTRODUCTION A LA PRESENTE CONTRIBUTION	
<b>Chapitre 1. FORMULATION MATHÉMATIQUE</b>	
1.1 Introduction	01
1.2 Equation de continuité	01
1.3 Equation de quantité de mouvement	01
1.4 Equation d'énergie	02
1.5 Equations régissant les écoulements turbulents	03
1.5.1 Introduction	03
1.5.2 Processus de moyennage	03
1.5.2.1 Décomposition de Reynolds et de Favre	03
1.5.2.2 Equations du bilan moyennées	05
1.5.3 Modélisation de la turbulence	06
1.5.3.1 Le modèle à contrainte de Reynolds (RSM)	06
1.5.3.2 La simulation des tourbillons à grande échelle (LES)	06
1.5.3.3 La simulation directe	06
1.5.3.4 Modèle à zéro équation	06
1.5.3.5 Modèle à une équation de transport	07
1.5.3.6 Le modèle à deux équations de transport ( $k-\varepsilon$ )	08
1.5.3.6.1 Traitement de Boussinesq modifié	08
1.5.3.6.2 Energie cinétique turbulente $k$	09
1.5.3.6.3 Taux de dissipation $\varepsilon$	09
1.6 Le modèle mathématique appliqué au problème étudié	11
1.6.1 Projection sur le domaine choisi	12
1.6.2 Généralisation du modèle mathématique	13
<b>Chapitre 2 A PROPOS DE LA PRESENTE ETUDE</b>	
2.1 Rénormalisation du modèle de turbulence $k-\varepsilon$	15
2.1.1 Introduction	15
2.1.2 Le modèle RNG $k-\varepsilon$ basé sur la méthodologie RNG	16
2.1.3 Fermeture de l'équation RNG $\varepsilon$ pour les écoulements dans les moteurs	17
2.2 Transformation du domaine	20
2.2.1 Introduction	20
2.2.2 Le modèle mathématique dans le domaine transformé	21
2.2.3 Généralisation du modèle mathématique dans le domaine transformé	23
<b>Chapitre 3 MODELISATION NUMERIQUE</b>	
3.1 Introduction	25
3.2 choix de la méthode numérique	25
3.3 Méthode des volumes finis	25
3.4 Maillage	25
3.5 Discrétisation	28
3.5.1 Discrétisation temporelle	28

3.5.2	Discretisation spatiale	30
3.5.2.1	Schéma des différences centrées (SDC)	34
3.5.2.2	Schéma upwind (UDS)	34
3.5.2.3	Schéma exponentiel (exacte)(EDS)	34
3.5.2.4	Schéma hybride (HDS)	34
3.5.2.5	Schéma en loi de puissance (PLDS)	34
3.5.3	Discretisation des termes sources	36
3.5.3.1	Terme source pour la composante axiale de la vitesse $u$	36
3.5.3.2	Terme source pour la composante radiale de la vitesse $v$	38
3.5.3.3	Terme source pour la composante tangentielle de la vitesse $w$	39
3.5.3.4	Terme source pour la température $T$	39
3.5.3.5	Terme source pour l'énergie cinétique turbulente $k$	40
3.5.3.6	Terme source pour le taux de dissipation $\epsilon$	40
<b>Chapitre 4</b>	<b>PROCEDURE DE RESOLUTION</b>	
4.1	Intrduction	41
4.2	L'Algorithme « SIMPLE »	41
4.3	Résolution du système d'équations	43
4.3.1	Développement de la méthode	44
4.4	Conditions aux limites	45
4.4.1	Traitement près de la paroi solide	46
4.4.2	Traitement à l'entrée	47
4.4.3	Traitement à la sortie	48
4.4.4	Traitement pour l'axe de symétrie	48
4.4.5	Résumé des conditions initiales et aux limites	48
4.5	Séquence des étapes de la résolution	49
4.6	Critère de convergence et facteur de sous relaxation	50
4.7	Architecture du programme de calcul	51
<b>Chapitre 5</b>	<b>RESULTATS ET DISCUSSIONS</b>	
5.1	Introduction	52
5.2	Champ des vitesses	54
5.2.1	visualisation	54
5.2.2	Etude paramétrique	60
5.3	Swirl	70
5.3.1	Introduction	70
5.3.2	visualisation	70
5.3.3	étude paramétrique	71
5.4	Paramètres de la turbulence	78
5.4.1	visualisation	78
5.4.2	Etude paramétrique	79
5.5	Paramètres thermodynamiques	92
5.6	Variation temporelle des grandeurs moyennes	93
	<b>CONCLUSION</b>	<b>101</b>
	<b>BIBLIOGRAPHIE</b>	<b>103</b>

## TRAVAUX ANTECEDENTS

WATKINS (1973) tenta de résoudre numériquement les équations différentielles de conservation de masse, de quantité de mouvement et d'énergie gouvernant un écoulement laminaire à deux dimensions pour un montage piston-cylindre sans valves d'admission / échappement avec génération du maillage et déplacement de la tête du piston.

GOSMAN et WATKINS (1977) ont incorporé un modèle de turbulence dans la procédure ci-dessus, en ajoutant deux équations différentielles : une pour l'énergie cinétique turbulente  $k$  et l'autre pour son taux de dissipation  $\epsilon$ .

GRIFFEN et AL (1976) ont rapporté une étude numérique de l'écoulement bidimensionnelle plan dans un arrangement chambre plane/piston plan. La transformation des coordonnées était identique à celle utilisée par Watkins (1973). un modèle de turbulence était inclus. Le cycle complet de 4 temps était simulé à l'exception de la combustion.

GRIFFEN et AL (1979) ont étendu leur étude au cas tridimensionnel en utilisant le système de coordonnées cylindro-polaire et un maillage de  $10 \times 8 \times 9$ . Les calculs sont effectués pour une moitié du cylindre ( $180^\circ$ ). les résultats n'étaient pas d'un grand bénéfice par l'absence des données expérimentales dans ce cas et par la grossièreté du maillage.

GOSMAN et AL (1984) ont étendu leur procédure numérique pour une géométrie à trois dimensions. ils ont fait les calculs pour un écoulement d'air dans deux configurations différentes de moteurs . les prédictions pour les deux moteurs sont comparées avec l'expérience de Witze et Al (1980).

EL TAHRY (1985) était le premier chercheur a utilisé la version du modèle des contraintes de Reynolds (RSM) pour le calcul des effets de la turbulence dans une chambre de combustion (en l'absence de combustion). Le code bidimensionnel de Butler et Al (1980) équipé avec le modèle (RSM) était appliqué pour une configuration axisymétrique piston/cylindre .

SANTHANAM S. et V. GANESAN (1986) ont présenté une étude concernant les prédictions d'un écoulement tridimensionnel dans une chambre de combustion . L'écoulement est supposé permanent, turbulent et en présence de réactions chimiques. Le modèle de turbulence utilisé est celui à deux équations de transport  $k$ - $\epsilon$  .

C. HABCHI (1990) a réalisé une contribution a la simulation numérique d'un moteur deux temps , il a simulé l'écoulement aérodynamique interne à la chambre de combustion des moteurs deux temps choisissant comme base de travail le code de calcul KIVA qui offre de

bonnes propriétés d'adaptation à ce type de problème . l'écoulement étudié est turbulent , les résultats obtenus sont comparés avec l'expérience réalisée avec cette étude sous la direction du professeur Daniel EUVRARD.

BO et WATKINS (1994) ont incorporé deux modèles de turbulence  $k-\epsilon-\tau$  et le modèle des contraintes de Reynolds (RSM) pour la simulation des écoulements dans un moteur à combustion interne . Le premier modèle tient compte des effets de la compression en introduisant l'échelle de temps. Le deuxième modèle s'est avéré plus performant pour une simulation précise de l'écoulement. La géométrie choisie pour cette étude est axisymétrique , l'écoulement est non tourbillonnaire (sans swirl).

N. BOUKHEZAR (1994) a réalisé une étude de l'injection de deux fluides non réactifs aux régimes laminaire et turbulent, dans une chambre de combustion a géométrie complexe . La méthode numérique utilisée est celle des volumes finis . les équations différentielles résolues sont celles d'un écoulement stationnaire incompressible (masse , quantité de mouvement , concentration, énergie cinétique turbulente et son taux de dissipation). Les résultats présentés sont consacrés au champ des vitesses et de concentration .

D. BELKHERCHOUCHE (1995) a étendu l'étude précédente à un écoulement instationnaire incompressible pour une configuration axisymétrique pour un seul fluide inerte . Les résultats sont consacrés aux distributions des vitesses et des présentations paramétriques pour les variations temporelles de la vitesse et celles de l'énergie cinétique de turbulence. pour les deux études réalisées sur une chambre à longueur fixe (sans déplacement de la tête du piston ) , aucune validation avec l'expérience a été faite.

A. MAMERI (1997) a réalisé une étude numérique d'un écoulement compressible turbulent injecté dans une chambre de combustion à longueur fixe , avec la méthode des volumes finis pour résoudre les équations différentielles de la masse, la quantité de mouvement, l'énergie, les espèces, l'énergie cinétique turbulente  $k$  et son taux de dissipation  $\epsilon$  (sans combustion). pour les profils de vitesse axiale une comparaison avec l'expérience a été faite avec succès .

## INTRODUCTION A LA PRESENTE CONTRIBUTION

*L'apparition de nouveaux codes de calcul a amené ces dernières années les motoristes à intensifier leurs recherches dans le domaine de la combustion et à réorienter la conception des moteurs à combustion interne dans le but d'améliorer le rendement d'une part et de réduire les nuisances (pollution et bruit) d'autre part.*

*Dans toute démarche, la première contrainte réside dans la détermination du champ aérodynamique à l'intérieur des cylindres des moteurs alternatifs. Cette donnée indispensable à l'amélioration de la répartition du mélange air-carburant donc à une meilleure combustion (diminution de consommation d'énergie).*

*Dans un moteur Diesel, la pénétration du (des) jet (jets) dans l'air aspiré, est liée à la turbulence en fin de compression. Et les phénomènes de transport de masse, de quantité de mouvement et de chaleur dépendent du niveau d'agitation de l'écoulement.*

*Ainsi la connaissance du champ aérodynamique qui s'est révélé complexe est nécessaire à la compréhension du phénomène d'interaction de la turbulence avec la propagation de la flamme. Il semble donc intéressant de développer une modélisation numérique de cet écoulement qui permettrait une étude paramétrique détaillée.*

*Naturellement, ce calcul doit être tridimensionnel puisque les directions du conduit d'admission de la soupape et du cylindre sont totalement différentes. Malgré, les progrès considérables obtenues ces dernières années au niveau de la maîtrise des phénomènes physiques, du développement des nouvelles techniques de mesure et des ordinateurs de plus en plus puissants, l'étude de ce champ aérodynamique, instationnaire, tridimensionnel, turbulent, avec combustion et dans un milieu confiné reste un problème ouvert et difficile. D'où la nécessité de procéder par approches successives. La simulation numérique de cette étude consiste à une configuration bidimensionnelle d'un écoulement visqueux compressible turbulent sans combustion et pendant les deux phases d'admission et de compression.*

*Nous avons choisi comme base de travail le code de calcul « TEAM »: (Turbulent Elliptic Algorithm Manchester), initialement conçu pour adapter aux problèmes des jets turbulents libres incompressibles en régime permanent, par P.G. HUANG ; B.E. LAUNDER et M.A. LISCHZNER ( UMIST), au début des années 1980.*

*Afin d'atteindre notre objectif, il était nécessaire de formuler le problème en régime non stationnaire, et de tenir compte de la compressibilité de l'écoulement, tout en*

bénéficiant de la méthode de discrétisation temporelle fournie par Patankar en volumes finis, et d'apporter des modifications sur l'algorithme de correction de la pression « SIMPLE »: (Semi-Implicite Method for Pressure Linked Equation), par l'introduction de la correction de la densité.

Afin de modéliser l'écoulement dans le moteur alternatif, les conditions aux limites sont adaptées au problème de la frontière mobile pour tenir compte du déplacement du piston. Ceci est réalisé par la transformation du domaine physique mobile à chaque pas du temps en un domaine de calcul fixe dans le temps.

Le modèle de turbulence à deux équations de transport  $k-\epsilon$  standard, utilisé par TEAM, perd sa validité dans le cas d'un milieu déformable, il était donc nécessaire de tenir compte des modifications apportées sur ce modèle par Z. HAN et R. D. REITZ (1995).

Les équations de conservation sont écrites sous forme différentielle dans le système de coordonnées cylindriques pour une configuration axisymétrique à élargissement brusque, leur résolution numérique est faite par la méthode des volumes finis, le système algébrique d'équations obtenu est résolu sous forme matricielle par l'algorithme de Thomas « TDMA »: (Tri-Diagonal Matrix Algorithm).

Le phénomène du swirl est pris en considération par l'introduction d'une équation de conservation de quantité de mouvement pour la composante tangentielle de la vitesse.

Après une introduction historique, le contenu de cette thèse est réparti sur cinq chapitres, dans le premier, la formulation mathématique du problème est présentée sous forme d'équations générales régissant l'écoulement en régime turbulent dans le domaine physique choisi. Le deuxième chapitre est rédigé à propos de la présente étude il contient des modifications apportées sur le modèle de turbulence  $k-\epsilon$  standard pour adapter aux problèmes à densité variable, ainsi que le modèle mathématique appliqué au domaine de calcul à frontière fixe. Tandis que le troisième chapitre est consacré au traitement numérique du problème concernant la méthode, le maillage et la discrétisation. Une fois la forme algébrique des équations est obtenue, le chapitre quatre s'occupe de la procédure de résolution, les résultats ainsi obtenus et leurs discussions sont présentés dans le cinquième chapitre. Une conclusion qui contient des perspectives et des recommandations est rédigée à la fin de ce travail.

## CHAPITRE 1

### FORMULATION MATHÉMATIQUE

#### 1.1 Introduction

Les équations différentielles régissant l'écoulement sur notre domaine d'étude sont tirées des lois de conservation fondamentales .

- loi de conservation de la masse .
- loi de conservation de quantité de mouvement .
- loi de conservation de l'énergie .

pour pouvoir décrire l'écoulement turbulent on doit coupler ces équations à un modèle de turbulence, en plus si l'écoulement est compressible le système d'équation sera fermé par l'équation d'état du fluide supposé parfait.

#### 1.2 Equation de continuité

Elle est tirée de la loi de conservation de masse et s'exprime mathématiquement sous forme tensorielle par :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial (\rho U_j)}{\partial x_j} = 0 \quad (1.1)$$

#### 1.3 Equation de quantité de mouvement

Le principe de conservation de quantité de mouvement permet d'établir les relations entre les caractéristiques du fluide et son mouvement et les causes qui le produisent.

les équations de quantité de mouvement s'écrivent sous forme tensorielle comme suit:

$$\frac{\partial (\rho U_i)}{\partial t} + \frac{\partial (\rho U_j U_i)}{\partial x_j} = F_i + \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} \quad (1.2)$$

---1---      ----2-----      ---3 ---      --- 4 ----

où : -1- Représente le taux de variation de la quantité de mouvement dans le temps par unité de volume .

2- Représente le taux de transport par convection de quantité de mouvement par unité de volume, suivant la direction  $x_i$

-3- Représente la force nette par unité de volume de la particule suivant la direction  $x_i$  .

-4- Représente les forces de surface par unité de volume (dues aux contraintes et à la pression )

**1.3.1 Quantité de mouvement axiale:**

$$\frac{\partial(\rho U)}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(\rho U U) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r}(r \rho V U) = -\frac{\partial p}{\partial x} - \frac{\partial \tau_{xx}}{\partial x} - \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r}(r \tau_{rx}) \quad (1.3)$$

**1.3.2 Quantité de mouvement radiale:**

$$\frac{\partial(\rho V)}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(\rho U V) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r}(r \rho V V) - \frac{\rho}{r} W W = -\frac{\partial p}{\partial r} - \frac{\partial \tau_{rx}}{\partial x} - \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r}(r \tau_{rr}) + \frac{\tau_{\theta\theta}}{r} \quad (1.4)$$

**1.3.3 Quantité de mouvement tangentielle:**

$$\frac{\partial(\rho W)}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(\rho U W) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r}(r \rho V W) - \frac{2}{r} V W = -\frac{\partial \tau_{\theta x}}{\partial x} - \frac{\partial \tau_{r\theta}}{\partial r} + \frac{2\tau_{r\theta}}{r} \quad (1.5)$$

$$\tau_{xx} = -\mu \left[ 2 \frac{\partial U}{\partial x} - \frac{2}{3} (\nabla \cdot \vec{V}) \right]$$

$$\tau_{rr} = -\mu \left[ 2 \frac{\partial V}{\partial r} - \frac{2}{3} (\nabla \cdot \vec{V}) \right]$$

$$\tau_{\theta\theta} = -\mu \left[ 2 \frac{V}{r} - \frac{2}{3} (\nabla \cdot \vec{V}) \right]$$

où:

$$\tau_{rx} = -\mu \left[ \frac{\partial U}{\partial r} - \frac{\partial V}{\partial x} \right]$$

$$\tau_{r\theta} = -\mu \left[ r \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{W}{r} \right) \right]$$

$$\tau_{\theta x} = -\mu \left[ \frac{\partial W}{\partial x} \right]$$

**1.4 Equation d'énergie**

Elle est déduite de la loi de conservation de l'énergie et s'exprime en terme d'enthalpie massique  $h$  comme suit:

$$\frac{\partial(\rho h)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho U_j h)}{\partial x_j} - \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \frac{\mu_{eff}}{\sigma_h} \frac{\partial h}{\partial x_j} \right) = \frac{Dp}{Dt} \quad (1.6)$$

Les trois termes du membre gauche de l'équation (1.4) représentent respectivement le taux de variation de l'énergie par unité de temps, le terme de transport de l'énergie par convection par unité de volume, et le terme de transport de cette énergie par diffusion par unité de volume.

Le membre droite représente le terme source.

## 1.5 Equations régissant les écoulements en régime turbulent

### 1.5.1 Introduction

les écoulements réels sont souvent turbulents à cause du mouvement aléatoire et instationnaire des particules fluides. La turbulence est gérée par les équations de Navier -Stokes . Elle est caractérisée par des échelles spatiales et temporelle de tailles très différentes . cela rend ces équations difficiles à résoudre ,car il faudrait couvrir toutes ces échelles , ce qui est hors des capacités des ordinateurs actuels. donc une approche statistique doit être utilisée . elle consiste à décomposer les variables du problème en deux parties, une partie moyenne, et une fluctuations par rapport à cette moyenne. En effectuant. une opération de moyenne statistique sur les équations de Navier -Stokes , on obtient les équations décrivant l'évolution de la vitesse et de la pression moyenne mais cette opération engendre un nouveau problème : la non-linéarité des équations fait apparaître des inconnues supplémentaires qui sont les moments statistiques de vitesse et de pression .

Le système d'équations est donc ouvert et il ne peut être fermé que par l'utilisation des hypothèses de fermeture à un niveau plus ou moins élevé.

### 1.5.2 Processus de moyennage

Une des méthodes classiques de l'analyse des écoulements turbulents consiste à décomposer chaque variable indépendante en une composante moyenne et une fluctuation. Cette décomposition peut s'effectuer par divers méthodes :

#### 1.5.2.1 Décomposition de Reynolds et de Favre [13]

La moyenne temporelle d'une quantité tensorielle aléatoire  $\bar{\phi}(\vec{x}, t)$ , est définie par :

$$\bar{\phi}(\vec{x}) = \frac{1}{\theta} \int_{t-\frac{\theta}{2}}^{t+\frac{\theta}{2}} \phi(\vec{x}, t) dt \quad (1.7)$$

où  $\theta$  est un temps long mais suffisamment court pour ne pas exclure les mouvements moyens non permanents. Ainsi on peut séparer  $\phi$  en une valeur moyenne et une fluctuation :

$$\phi = \bar{\phi} + \phi' \quad (1.8)$$

On voit facilement que :

$$\overline{\phi'} = 0 \quad (1.9)$$

Cette décomposition de Reynolds est la plus souvent utilisée dans l'analyse des écoulements incompressible, par contre, lorsque l'écoulement est compressible (ce qui est le

cas ici) il est commode de remplacer la décomposition de Reynolds par une décomposition pondérée par la masse. Cette technique introduite par Favre en 1965 pour l'analyse des écoulements turbulents est maintenant dans la majorité des études de la combustion turbulente.

La moyenne de masse (ou moyenne de Favre) de quantité aléatoire  $\phi$  est définie par:

$$\tilde{\phi} = \frac{\overline{\rho\phi}}{\bar{\rho}} \quad (1.10)$$

Les signes tilde et barre désignent respectivement les moyennes de Favre et de Reynolds. La décomposition de Favre s'écrit:

$$\phi = \tilde{\phi} + \phi'' \quad (1.11)$$

On démontre aussi que  $\tilde{\phi}'' = 0$ ; par contre, nous avons maintenant  $\overline{\phi''} \neq 0$ .

L'avantage principal du concept de moyenne de Favre est de permettre une diminution notable du nombre de termes de corrélation qui apparaissent dans les équations du bilan moyennées.

En effet, soit  $\psi(\vec{x}, t)$ , une deuxième variable aléatoire, la quantité  $\overline{\rho\phi\psi}$  s'écrit en adoptant la décomposition de Reynolds :

$$\begin{aligned} \overline{\rho\phi\psi} &= \overline{(\bar{\rho} + \rho')(\bar{\phi} + \phi')(\bar{\psi} + \psi')} \\ \overline{\rho\phi\psi} &= \bar{\rho}\bar{\phi}\bar{\psi} + \bar{\rho}\overline{\phi'\psi'} + \bar{\phi}\overline{\rho'\psi'} + \bar{\psi}\overline{\rho'\phi'} + \overline{\rho'\phi'\psi'} \end{aligned}$$

par contre, par l'intermédiaire de la décomposition de Favre, il ne subsiste que deux termes, en effet:

$$\begin{aligned} \overline{\rho\phi\psi} &= \overline{\rho(\tilde{\phi} + \phi'')(\tilde{\psi} + \psi'')} \\ \overline{\rho\phi\psi} &= \bar{\rho}\tilde{\phi}\tilde{\psi} + \bar{\rho}\overline{\psi''\tilde{\phi}} + \bar{\rho}\overline{\tilde{\psi}''\phi} + \overline{\rho\psi''\phi''} \\ \overline{\rho\phi\psi} &= \bar{\rho}\tilde{\phi}\tilde{\psi} + \bar{\rho}\overline{\psi''\tilde{\phi}} \end{aligned}$$

Notons que les opérations de moyenne de Reynolds et de Favre obéissent aux propriétés suivantes:

$$\overline{\phi + \psi} = \bar{\phi} + \bar{\psi}, \quad \overline{c\phi} = c\bar{\phi}, \quad \bar{c} = c, \quad \frac{\partial \phi}{\partial s} = \frac{\partial \bar{\phi}}{\partial s}$$

où  $s$  désigne  $x, y, z$  et  $t$ ;  $c$  étant une constante.

Autrement dit, l'opération de moyenne et les opérations de dérivation par rapport à  $x, y, z$  et  $t$  sont commutatives.

1.5.2.2 Equations du bilan moyennées [17]Conservation de masse:

$$\frac{\partial \bar{\rho}}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(\rho \bar{u}) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r}(r \rho \bar{v}) = 0 \quad (1.12)$$

Conservation de quantité de mouvement axiale:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t}(\rho \bar{u}) + \frac{\partial}{\partial x}(\rho \bar{u} \bar{u} + \overline{\rho u' u'}) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r}(r \rho \bar{u} \bar{v} + r \overline{\rho v' u'}) - \frac{\partial}{\partial x}(\mu \frac{\partial \bar{u}}{\partial x}) - \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r}(\mu r \frac{\partial \bar{u}}{\partial r}) \\ = -\frac{\bar{d}P}{\bar{d}x} + \frac{\partial}{\partial x}(\mu \frac{\partial \bar{u}}{\partial x}) - \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r}(\mu r \frac{\partial \bar{v}}{\partial r}) - \frac{\partial}{\partial x} \left[ \frac{2}{3} \mu (\nabla \cdot \vec{V}) \right] \end{aligned} \quad (1.13)$$

Conservation de quantité de mouvement radiale:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t}(\rho \bar{v}) + \frac{\partial}{\partial x}(\rho \bar{u} \bar{v} + \overline{\rho u' v'}) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r}(r \rho \bar{v} \bar{v} + r \overline{\rho v' v'}) - \frac{\partial}{\partial x}(\mu \frac{\partial \bar{v}}{\partial x}) - \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r}(\mu r \frac{\partial \bar{v}}{\partial r}) \\ = -\frac{\bar{d}P}{\bar{d}r} + \frac{\partial}{\partial x}(\mu \frac{\partial \bar{u}}{\partial x}) - \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r}(\mu r \frac{\partial \bar{v}}{\partial r}) - 2\mu \frac{v}{r^2} + \frac{1}{r}(\overline{\rho v' w'} + \overline{\rho w' v'}) - \\ \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left[ \frac{2}{3} \mu r (\nabla \cdot \vec{V}) \right] + \frac{2}{3} \frac{\mu}{r} (\nabla \cdot \vec{V}) \end{aligned} \quad (1.14)$$

Conservation de quantité de mouvement tangentielle:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t}(\rho \bar{w}) + \frac{\partial}{\partial x}(\rho \bar{u} \bar{w} + \overline{\rho u' w'}) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r}(r \rho \bar{w} \bar{v} + r \overline{\rho v' w'}) - \frac{\partial}{\partial x}(\mu \frac{\partial \bar{w}}{\partial x}) - \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r}(\mu r \frac{\partial \bar{w}}{\partial r}) \\ = -\frac{1}{r}(\overline{\rho w' w'} + \overline{\rho v' w'}) - \frac{w}{r^2} \frac{\partial}{\partial r}(r \mu) \end{aligned} \quad (1.15)$$

Conservation de l'énergie interne:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t}(\rho \bar{e}) + \frac{\partial}{\partial x}(\rho \bar{u} \bar{e} + \overline{\rho u' e'}) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r}(r \rho \bar{v} \bar{e} + r \overline{\rho v' e'}) = -\bar{P} \left[ \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + \frac{\partial \bar{u}}{\partial r} + \frac{\bar{v}}{r} \right] \\ + \frac{\lambda}{C_v} \left[ \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial \bar{e}}{\partial r} \right) + \frac{\partial \bar{e}}{\partial x} \right] - \bar{P} \left[ \frac{\partial \bar{v}}{\partial r} + \frac{\partial \bar{u}}{\partial r} + \frac{\bar{v}}{r} \right] \end{aligned} \quad (1.16)$$

### 1.5.3 Modélisation de la turbulence[21]

Il existe différents types de modélisation qui permet d'aborder des écoulements turbulents. On mentionne quelques modèles, à savoir:

#### 1.5.3.1 Le modèle à contraintes de Reynolds (RSM)

Avec le modèle RSM, on obtient les contraintes de Reynolds des équations de transport sans faire la supposition de Boussinesq (hypothèse de la viscosité). Ce modèle résout les équations de transport des tensions de Reynolds en faisant intervenir les six équations pour les corrélations doubles  $U_i U_j$  plus une équation de transport pour le taux de dissipation.

#### 1.5.3.2 La simulation des tourbillons à grandes échelles (LES)

Avec le modèle LES, on calcule le mouvement réel à grande échelle tridimensionnelle instationnaire, et on modélise la turbulence à petite échelle. Cette méthode est coûteuse en temps de calcul et n'est pas pour l'instant, applicable à des écoulements à caractère industriel.

#### 1.5.3.3 La simulation directe

Dans ce cas, les équations de Navier-Stokes sont directement résolues sans aucune modélisation. Aussi dans ce cas se pose le problème des capacités de stockage faible et le temps de calcul considérable.

#### 1.5.3.4 modèle à zéro équation

L'un des modèles de turbulence les plus utilisés est celui de l'hypothèse de la longueur de mélange de Prandtl. Ce modèle emploie le concept de la viscosité tourbillonnaire qui relie les termes de transport turbulent au gradient des quantités de l'écoulement moyen :

$$-\overline{uw} = \nu_t \frac{\partial u}{\partial y}, \quad -\overline{v\phi} = \frac{\nu_t}{\sigma_t} \frac{\partial \phi}{\partial y} \quad (1.17)$$

où  $\sigma_t$  est le nombre de Prandtl turbulent associé à la quantité  $\phi$ .

L'hypothèse de la longueur de mélange de Prandtl calcule la distribution de la viscosité cinématique turbulente  $\nu_t$  en reliant au gradient de la vitesse moyenne locale.

$$\nu_t = l_m^2 \left| \frac{\partial u}{\partial y} \right| \quad (1.18)$$

Un paramètre inconnu est introduit, la longueur de mélange  $l_m$  dont la distribution doit être prescrite avec l'aide d'information purement empirique.

L'application du modèle à une grande variété d'écoulements a apporté à la lumière des restrictions de l'hypothèse de la longueur de mélange, en particulier le manque de l'universalité des données empiriques. ce défaut essentiel est basé sur la supposition implicite que , la turbulence est dans un équilibre local : à chaque point de l'écoulement, l'énergie de turbulence  $k$  est dissipée au même taux que sa production .

L'approche de Prandtl prévoit une viscosité turbulente nulle lorsque le gradient de vitesse est égal à zéro , ce qui conduit à une simulation irréaliste dans plusieurs cas par exemple à l'axe de symétrie.

Dans le but de vaincre les limitations susmentionnées, des modèles ont été développés pour décrire la turbulence, en introduisant une ou plusieurs équations de transport des quantités turbulentes

### 1.5.3.5 modèle à une équation de transport

Le plus simple des modèles expliquant les effets de transport de la turbulence, utilise une équation de transport pour l'énergie cinétique turbulente  $K$  qui est une mesure de l'intensité des fluctuations turbulentes dans les trois directions.

L'équation de  $k$  employée est:

$$\underbrace{\frac{\partial k}{\partial t}}_{\text{taux de variation temporelle}} + \underbrace{u_j \frac{\partial k}{\partial x_j}}_{\text{convection}} = \underbrace{\frac{\partial}{\partial x_j} \left[ \nu_T \frac{\partial k}{\partial x_j} \right]}_{\text{diffusion}} - \underbrace{\overline{u_i u_j} \frac{\partial u_i}{\partial x_j}}_{\text{production}} - \underbrace{\varepsilon}_{\text{dissipation}} \quad (1.19)$$

Cette équation dérive des équations de Navier-Stokes à l'exception du terme de diffusion supposé proportionnel au gradient de  $k$  .

L'équation (1.19) montre comment le taux de variation de  $k$  est équilibré par un transport convectif, un transport diffusif, une production de  $k$  par interaction entre les fluctuations et le gradient de vitesses moyennes et la destruction de  $k$  par la viscosité au niveau des plus petites échelles des tourbillons.

Dans ce modèle le taux de dissipation est déterminé par :

$$\varepsilon = C_D (k^{3/2} / L) \quad (1.20)$$

Ceci est le résultat d'une analyse dimensionnelle lorsqu'on suppose que le taux de dissipation  $\varepsilon$  est gouverné par les plus grandes échelles de turbulence et que le mouvement de turbulence est caractérisé par l'échelle de vitesse ( $\sqrt{k}$ ) et l'échelle de longueur  $L$  des grands tourbillons.

La principale suggestion a été donnée pour relier les forces de turbulence à l'énergie cinétique  $k$ , elle emploie le concept de viscosité tourbillonnaire qui a été suggérée en 1940 par Prandtl - Kolmogorov:

$$-\overline{\rho w' u'} = \mu^t \frac{\partial \bar{w}}{\partial x} \quad (1.28)$$

$\mu^e = \mu^t + \mu$ ,  $\mu^e$  : est la viscosité effective,  $\mu^t$  : est la viscosité turbulente,  $\mu$  est la viscosité laminaire,

Par l'introduction de ces expressions dans celles de quantité de mouvement correspondantes on aura:

Q.m. Axiale

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial t}(\rho \bar{u}) + \frac{\partial}{\partial x}(\rho \bar{u} \bar{u}) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r}(r \rho \bar{u} v) - \frac{\partial}{\partial x} \left( \mu_{xx}^e \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} \right) - \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( \mu_{rx}^e r \frac{\partial \bar{u}}{\partial r} \right) \\ & = -\frac{\partial}{\partial x} \left( \bar{p} + \frac{2}{3} \bar{\rho} k \right) + \frac{\partial}{\partial x} \left( \mu_{xx}^e \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} \right) - \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( \mu_{rx}^e r \frac{\partial \bar{u}}{\partial r} \right) - \frac{\partial}{\partial x} \left[ \frac{2}{3} \mu_{xx}^e (\nabla \cdot \vec{V}) \right] \end{aligned} \quad (1.29)$$

Q.m. Radiale

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial t}(\rho \bar{v}) + \frac{\partial}{\partial x}(\rho \bar{u} \bar{v}) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r}(r \rho \bar{v} \bar{v}) - \frac{\partial}{\partial x} \left( \mu_{rx}^e \frac{\partial \bar{v}}{\partial x} \right) - \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( \mu_{rr}^e r \frac{\partial \bar{v}}{\partial r} \right) \\ & = -\frac{\partial}{\partial r} \left( \bar{p} + \frac{2}{3} \bar{\rho} k \right) + \frac{\partial}{\partial x} \left( \mu_{rx}^e \frac{\partial \bar{v}}{\partial x} \right) - \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( \mu_{rr}^e r \frac{\partial \bar{v}}{\partial r} \right) - 2 \mu_{\theta\theta}^e \frac{\bar{v}}{r^2} + \frac{1}{r} (\rho \bar{v} \bar{w}) - \\ & \quad \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left[ \frac{2}{3} \mu_{rr}^e r (\nabla \cdot \vec{V}) \right] + \frac{2}{3} \frac{\mu_{\theta\theta}^e}{r} (\nabla \cdot \vec{V}) \end{aligned} \quad (1.30)$$

Q. m. Tangentielle

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial t}(\rho \bar{w}) + \frac{\partial}{\partial x}(\rho \bar{u} \bar{w}) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r}(r \rho \bar{v} \bar{w}) - \frac{\partial}{\partial x} \left( \mu_{\theta x}^e \frac{\partial \bar{w}}{\partial x} \right) - \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( \mu_{r\theta}^e r \frac{\partial \bar{w}}{\partial r} \right) \\ & = -\frac{1}{r} (\rho \bar{v} \bar{w}) - \frac{\bar{w}}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r \mu_{r\theta}^e) \end{aligned} \quad (1.31)$$

### 1.5.3.6.2 Energie cinétique de turbulence

En conjonction avec les équations de quantité de mouvement, les équations de transport de l'énergie cinétique turbulente  $k$  et son taux de dissipation  $\varepsilon$  doivent être aussi résolues.

Avec une expression de viscosité turbulente isotropique, une expression exacte de l'énergie cinétique turbulente peut être trouvée par:

- 1) Multiplier chaque composante de l'équation de quantité de mouvement instantanée ( $j=1,2,3$ ) par sa vitesse correspondante ( $u_j$ ).
- 2) Sommer suivant les trois directions et faire la moyenne pour donner l'expression de

l'énergie cinétique totale.

3) Soustraire l'énergie cinétique moyenne de l'écoulement de l'énergie cinétique totale pour obtenir l'énergie cinétique moyenne des fluctuations turbulente ;

$$\frac{D}{Dt} \left( \overline{\rho u_j^2} \right) = \underbrace{\frac{\partial}{\partial x_j} \left[ \rho u_j \left( \overline{\frac{p'}{\rho} + \frac{1}{2} u_j^2} \right) \right]}_{(I)} - \underbrace{\overline{\rho u_j u_j} \frac{\partial \tilde{u}_j}{\partial x_j}}_{(II)} + \underbrace{\mu \frac{\partial^2}{\partial x_j^2} \left( \overline{\frac{u_j^2}{2}} \right)}_{(IV)} - \underbrace{\mu \left( \overline{\frac{\partial u_j}{\partial x_j}} \right)^2}_{(V)} \quad (1.32)$$

L'énergie cinétique de turbulence est définie par :

$$k = \frac{1}{2} \overline{u_j^2} \quad (1.33)$$

- (I) : Transport convectif de l'énergie cinétique de turbulence par le mouvement moyen;
- (II) : Diffusion de l'énergie cinétique turbulente et la pression dynamique de turbulence;
- (III) : Travail de déformation sur l'écoulement moyen par les contraintes de Reynolds, il est référé comme terme de production de turbulence. Ce terme extrait l'énergie du mouvement moyen et la transforme au mouvement turbulent;
- (IV) : Résultat du travail par les contraintes de cisaillement visqueuse du mouvement turbulent, il est considéré négligeable en cas des nombres de Reynolds élevés;
- (V) : Dissipation visqueuse (  $\varepsilon$  ) de l'énergie cinétique de turbulence.

**1.5.3.6.3 Taux de dissipation de l'énergie cinétique turbulente**

L'équation de transport de la dissipation isotropique est obtenue de la forme fluctuante de l'équation de quantité de mouvement (par soustraction de l'équation moyenne de quantité de mouvement de celle totale).

$$\rho \frac{\partial}{\partial x_k} \left( \overline{u_k u_j} + \overline{u_k' u_j'} + \overline{u_k u_j'} - \overline{u_k' u_j} \right) = - \frac{\partial p'}{\partial x_j} + \frac{\partial}{\partial x_k} \left[ \mu \left( \frac{\partial u_k'}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j'}{\partial x_k} \right) \right] \quad (1.34)$$

L'équation de quantité de mouvement fluctuante pour  $u_i'$  est différenciée respectant  $x_j$ ,

multipliée par  $\mu \left( \frac{\partial u_i'}{\partial x_j} \right)$  et moyenne dans le temps pour donner :

$$\frac{D(\rho \varepsilon)}{Dt} = \frac{\partial(\rho \varepsilon)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho \overline{U_k} \varepsilon)}{\partial x_k} = -2\mu \left\{ \begin{aligned} & \left[ \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \overline{\frac{\partial u_i'}{\partial x_j} \frac{\partial p'}{\partial x_j}} \right) + \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x_k} \left( \overline{u_k' \frac{\partial u_i'}{\partial x_j} \frac{\partial u_i'}{\partial x_j}} \right) + \overline{u_k'} \frac{\partial u_i'}{\partial x_j} \frac{\partial^2 \overline{U_j}}{\partial x_j \partial x_k} \right] \\ & + \left[ \overline{\frac{\partial u_i'}{\partial x_j} \frac{\partial u_i'}{\partial x_k} \frac{\partial U_k}{\partial x_j}} + \overline{\frac{\partial u_i'}{\partial x_j} \frac{\partial u_i'}{\partial x_k} \frac{\partial U_j}{\partial x_k}} + \overline{\frac{\partial u_i'}{\partial x_j} \frac{\partial u_i'}{\partial x_k} \frac{\partial u_k}{\partial x_j}} + \nu \left( \frac{\partial^2 \overline{u_i'}}{\partial x_j \partial x_k} \right)^2 \right] \\ & + \mu \frac{\partial^2 \varepsilon}{\partial x_k^2} \end{aligned} \right\} \quad (1.35)$$

Une analyse d'ordre de grandeur a révélé que la majorité des termes sont négligeables pour des nombres de Reynolds élevés.

les termes : (I) et (II) sont les termes de transport diffusifs, le terme (II) est le dominant, les termes (III) à (IV) représentent la génération du taux de dissipation, les quantités contenant les termes de cisaillement moyens sont négligeables. Comparant les deux dernières quantités, seul le terme (VII) est significatif comme terme de destruction du taux de dissipation.

Les expressions du modèle k- $\epsilon$  suivant la substitution des approximations de Boussinesq et du gradient de diffusion sont reliées avec la viscosité turbulente isotropique à travers la relation de Prandtl-Kolmogorov (1.43) et peuvent avoir les formes (1.39) et (1.40).

La comparaison des équations du modèle k- $\epsilon$  avec celle analogues montre que l'expression de l'énergie cinétique turbulente k garde presque sa forme originale, tandis que celle de son taux de dissipation est différente de sa version originale, ceci est dû à sa nature empirique.

### 1.6 Le modèle mathématique appliqué au problème étudié

Tenant compte des hypothèses de cette étude, L'écoulement est décrit, par les équations de conservation de la masse, de quantité de mouvement et d'énergie, couplées au modèle de turbulence k- $\epsilon$ . Le système est fermé par l'équation d'état du fluide supposé parfait.

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial (\rho U_j)}{\partial x_j} = 0 \quad (1.36)$$

$$\frac{\partial (\rho U_i)}{\partial t} + \frac{\partial (\rho U_j U_i)}{\partial x_j} = -\frac{\partial p}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left[ \mu_{eff} \left( \frac{\partial U_i}{\partial x_j} + \frac{\partial U_j}{\partial x_i} \right) \right] + \frac{\partial}{\partial x_j} \left( -\frac{2}{3} \delta_{ij} \rho \frac{\partial U_m}{\partial x_m} \right) \quad (1.37)$$

$$\frac{\partial (\rho h)}{\partial t} + \frac{\partial (\rho U_j h)}{\partial x_j} - \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \frac{\mu_{eff}}{\sigma_h} \frac{\partial h}{\partial x_j} \right) = \frac{Dp}{Dt} \quad (1.38)$$

$$\frac{\partial (\rho k)}{\partial t} + \frac{\partial (\rho U_j k)}{\partial x_j} - \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \frac{\mu_{eff}}{\sigma_k} \frac{\partial k}{\partial x_j} \right) = \mu_t G_{ij} - \frac{2}{3} \frac{\partial U_m}{\partial x_m} \left( \mu_t \frac{\partial U_m}{\partial x_m} + \rho k \right) - \rho \epsilon \quad (1.39)$$

$$\frac{\partial (\rho \epsilon)}{\partial t} + \frac{\partial (\rho U_j \epsilon)}{\partial x_j} - \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \frac{\mu_{eff}}{\sigma_\epsilon} \frac{\partial \epsilon}{\partial x_j} \right) = C_1 \frac{\epsilon}{k} \left[ \mu_t G_{ij} - \frac{2}{3} \frac{\partial U_m}{\partial x_m} \left( \mu_t \frac{\partial U_m}{\partial x_m} + \rho k \right) \right] +$$

$$C_3 \rho \epsilon \frac{\partial U_m}{\partial x_m} - C_2 \rho \frac{\epsilon^2}{k} \quad (1.40)$$

$$p = \rho r T \quad (1.41)$$

Avec:

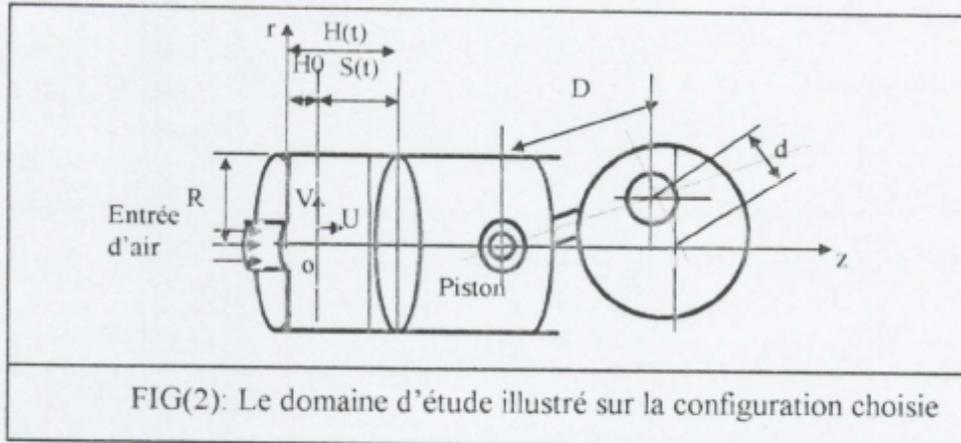
$h$ : est l'enthalpie massique

$$G_{ij} = \frac{\partial U_i}{\partial x_j} \left( \frac{\partial U_i}{\partial x_j} + \frac{\partial U_j}{\partial x_i} \right) \quad (1.42)$$

$$\mu_t = \rho C_\mu \frac{k^2}{\varepsilon} \quad (1.43)$$

$$\mu_{\text{eff}} = \mu + \mu_t \quad (1.44)$$

### 1.6.1 Projection sur le domaine choisi



FIG(2): Le domaine d'étude illustré sur la configuration choisie

Dans le domaine  $(o,r,z,t)$  de largeur  $R$  et de longueur  $H(t)$  (FIG (2)), les équations régissant l'écoulement s'écrivent:

#### 1.6.1.1: Equation de continuité

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho U)}{\partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial(r\rho V)}{\partial r} = 0 \quad (1.45)$$

#### 1.6.1.2: Equation de quantité de mouvement pour $U$

$$\frac{\partial(\rho U)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho U U)}{\partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial(r\rho V U)}{\partial r} = -\frac{\partial p}{\partial z} + \frac{\partial}{\partial z} \left( \mu_{\text{eff}} \frac{\partial U}{\partial z} \right) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \mu_{\text{eff}} \frac{\partial U}{\partial r} \right) + S^u \quad (1.46)$$

#### 1.6.1.3: Equation de quantité de mouvement pour $V$

$$\frac{\partial(\rho V)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho U V)}{\partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial(r\rho V V)}{\partial r} = -\frac{\partial p}{\partial r} - 2\mu_{\text{eff}} \frac{V}{r^2} + \frac{\rho W^2}{r} + \frac{\partial}{\partial z} \left( \mu_{\text{eff}} \frac{\partial V}{\partial z} \right) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \mu_{\text{eff}} \frac{\partial V}{\partial r} \right) + S^v \quad (1.47)$$

#### 1.6.1.3: Equation de quantité de mouvement pour $W$

$$\frac{\partial(\rho W)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho U W)}{\partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial(r\rho V W)}{\partial r} = +\frac{\partial}{\partial z} \left( \mu_{\text{eff}} \frac{\partial W}{\partial z} \right) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \mu_{\text{eff}} \frac{\partial W}{\partial r} \right) - \left( \frac{\rho V}{r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r \mu_{\text{eff}}) \right) W \quad (1.48)$$

Avec :

$$S^u = \frac{\partial}{\partial z} \left( \mu_{\text{eff}} \frac{\partial U}{\partial z} \right) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \mu_{\text{eff}} \frac{\partial V}{\partial r} \right) - \frac{2}{3} \frac{\partial}{\partial z} \left( \mu_{\text{eff}} \nabla \vec{U} + \rho K \right) \quad (1.49)$$

$$S^v = \frac{\partial}{\partial z} \left( \mu_{\text{eff}} \frac{\partial U}{\partial z} \right) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \mu_{\text{eff}} \frac{\partial V}{\partial r} \right) - \frac{2}{3} \frac{\partial}{\partial r} \left( \mu_{\text{eff}} \nabla \vec{U} + \rho K \right)$$

**1.6.1.4: Equation d'énergie**

$$\frac{\partial(\rho c_p T)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho U c_p T)}{\partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial(r \rho V c_p T)}{\partial r} = \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{\mu_{\text{eff}}}{\text{Pr}} \frac{\partial c_p T}{\partial z} \right) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\mu_{\text{eff}}}{\text{Pr}} \frac{\partial c_p T}{\partial r} \right) + \frac{DP}{Dt} \quad (1.50)$$

**1.6.1.5: Equation de l'énergie cinétique turbulente k**

$$\frac{\partial(\rho k)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho U k)}{\partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial(r \rho V k)}{\partial r} = \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{\mu_{\text{eff}}}{\sigma_k} \frac{\partial k}{\partial z} \right) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\mu_{\text{eff}}}{\sigma_k} \frac{\partial k}{\partial r} \right) + \rho(G - \varepsilon) \quad (1.51)$$

**1.6.1.6: Equation du taux de dissipation ε**

$$\frac{\partial(\rho \varepsilon)}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial z} (\rho U \varepsilon) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (\rho V r \varepsilon) = \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{\mu_{\text{eff}}}{\sigma_\varepsilon} \frac{\partial \varepsilon}{\partial z} \right) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\mu_{\text{eff}}}{\sigma_\varepsilon} \frac{\partial \varepsilon}{\partial r} \right) + C_1 C_\mu G \frac{\rho k}{\mu_t} - C_2 \frac{\rho \varepsilon}{k} + C_3 \nabla \bar{U} \quad (1.52)$$

G: est le taux de production de l'énergie cinétique turbulente, il est défini par:

$$G = \mu_t \left\{ 2 \left[ \left( \frac{\partial U}{\partial z} \right)^2 + \left( \frac{\partial V}{\partial r} \right)^2 + \frac{V^2}{r} \right] + \left( \frac{\partial U}{\partial r} + \frac{\partial V}{\partial z} \right)^2 + \left( \frac{\partial W}{\partial z} \right)^2 + \left[ r \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{W}{r} \right) \right]^2 \right\} - \frac{2}{3} \nabla \bar{U} (\mu_t \nabla \bar{U} + \rho k) \quad (1.53)$$

$\mu$ : la viscosité laminaire;

$\mu_t$ : la viscosité turbulente elle est donnée par la relation (1.31);

$\mu_{\text{eff}}$ : la viscosité effective elle est définie par la relation (1.32);

Les constantes du modèle k-ε sont données par le tableau (2)

**1.6.2 Généralisation du modèle mathématique**

L'ensemble des équations précédentes est résumé sous la forme générale, utilisant une variable généralisée  $\phi$  comme suit:

$$\frac{\partial \rho \phi}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial z} \left( \rho U \phi \right) - \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial z} \left( r \Gamma_\phi \frac{\partial \phi}{\partial z} \right) + \frac{\partial}{\partial r} \left( \rho V \phi \right) - \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \Gamma_\phi \frac{\partial \phi}{\partial r} \right) = S_\phi \quad (1.54)$$

Où  $\Gamma_\phi$  et  $S_\phi$  sont respectivement le coefficient de diffusion et le terme source de la grandeur  $\phi$ , leurs expressions sont données par le tableau(2).

Tableau (1): le coefficient de diffusion et le terme source pour chaque grandeur  $\phi$ 

Equations	$\phi$	$\Gamma_\phi$	$S_\phi$
masse	1	0	0
quantité de mvt / z	U	$\mu_{\text{eff}}$	$S^u - \frac{\partial P}{\partial z}$
quantité de mvt / r	V	$\mu_{\text{eff}}$	$S^v - \frac{\partial P}{\partial r} - \frac{2\mu_{\text{eff}}V}{r^2} + \frac{\rho W^2}{r}$
quantité de mouvement azimutale	W	$\mu_{\text{eff}}$	$-\left(\frac{\rho V}{r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r}(r\mu_{\text{eff}})\right)W$
énergie	CpT	$\mu_{\text{eff}}/Pr$	$DP/Dt$
énergie cinétique turbulente	k	$\mu_{\text{eff}}/\sigma_k$	$G - C_\mu K \rho^2 / \mu_t$
taux de dissipation	$\epsilon$	$\mu_{\text{eff}}/\sigma_\epsilon$	$C_1 C_\mu G \rho K / \mu_t - \frac{C_2 \rho \epsilon}{K} + C_3 \rho (\nabla \bar{U})$

## CHAPITRE 2

### A PROPOS DE LA PRESENTE ETUDE

#### 2.1 Rénormalisation du modèle de turbulence k- $\epsilon$

##### 2.1.1 Introduction[16]

L'écoulement à l'intérieur du cylindre d'un moteur à combustion interne est fortement turbulent et sujet d'une variation de densité, séparation, recirculation et stagnation. Avec cette complexité certains modèles de turbulence ont été proposés et utilisés pour modéliser la turbulence des moteurs. Ces modèles ont différents niveaux de complexité, allant des modèles simples reliant la viscosité turbulente directement au champ moyen des vitesses, aux modèles les plus sophistiqués employant les équations de transport des contraintes/flux turbulents.

Parmi ces modèles de turbulence, celui de deux équations de transport k- $\epsilon$ , indiqué dans le chapitre 1, est le plus utilisé (El Tahry et Haworth 1992) en raison de sa simplicité et son économie du temps de calcul et de stockage.

Le modèle k- $\epsilon$  est originalement développé et validé pour des écoulements cisailés minces (Launder et Spalding 1972), il a été utilisé avec faibles ou sans modifications pour simuler l'écoulement dans un moteur à densité variable lorsque la technique de la moyenne de Favre est utilisée. Watkins et Gosman (1977) l'ont étendu à un écoulement dans un moteur où la densité change à cause du mouvement du piston, l'étude a été portée sur l'introduction de l'effet de la compressibilité dans les équations constitutives.

Des recherches principalement portées sur l'effet de dilatation de vitesse sur le taux de dissipation de la turbulence ont été faites par: (Reynolds 1980; Ramos et Sirignano 1980 ; Morel et Mansour 1982; El Tahry 1983; Grasso et Bracco 1983) ils ont donnés à la constantes  $C_3$  de l'équation de  $\epsilon$  des valeurs comprises entre -1.0 et +1.0, mais il est difficile de valider ceci sous certains conditions de fonctionnement du moteur.

Récemment, un nouveau modèle k- $\epsilon$  est proposé par Yakhot et Orszag (1986), ce modèle est dérivés des équations fondamentales gouvernants un écoulement utilisant la théorie du Groupe de Rénormalisation (RNG). le modèle RNGk- $\epsilon$  de Yakhot et Orszag (1986) dans la limite des nombres de Reynolds très élevés est identique dans la forme à celui k- $\epsilon$  standard. L'un des traitements de ce modèle est que toutes ces constantes peuvent être évaluées par une théorie explicitement basée sur certains développements mathématiques (Yakhot et Smith 1992).

Le modèle RNGk- $\varepsilon$  original est développé formellement pour un écoulement incompressible, l'extension pour un écoulement compressible a été faite par (Han et Reitz 1995).

### 2.1.2 Le modèle RNG k- $\varepsilon$ basé sur la méthodologie RNG

L'idée principale de la méthode RNG et la forme correspondre aux grands nombres de Reynolds du modèle RNG k- $\varepsilon$  de Yakhot et Orszag sont résumées ici :

pour une unité de densité l'écoulement turbulent incompressible de vitesse  $u$ , de viscosité cinématique  $\nu_0$  et de pression  $P$  peut être décrit par:

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} + u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} = -\frac{\partial p}{\partial x_i} + \nu_0 \nabla^2 u_i + f_i \quad (2.1)$$

et 
$$\frac{\partial u_i}{\partial x_i} = 0 \quad (2.2)$$

où  $f(x,t)$  est la force due aux contraintes de Reynolds  $\overline{\tau_{ij}} = \overline{u_i' u_j'}$

$$\overline{\tau_{ij}} = \frac{2}{3} k \delta_{ij} - \nu_t \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \quad (2.3)$$

$\nu_t$  est la viscosité turbulente  $\nu_t = C_\mu \frac{k^2}{\varepsilon}$  (2.4)

$$\varepsilon = \nu_0 \overline{\frac{\partial u_i}{\partial x_j} \frac{\partial u_i}{\partial x_j}} \quad (2.5)$$

L'énergie cinétique turbulente  $k$  et son taux de dissipation  $\varepsilon$  sont donnés par les équations:

$$\frac{\partial k}{\partial t} + u_j \frac{\partial k}{\partial x_j} - \nu_0 \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \nu_0 \nabla^2 k - \frac{\partial u_i P}{\partial x_i} + u_i f_i \quad (2.6)$$

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial t} + u_j \frac{\partial \varepsilon}{\partial x_j} = 2\nu_0 \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \frac{\partial f_i}{\partial x_j} - 2\nu_0 \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \frac{\partial u_i}{\partial x_i} - 2\nu_0^2 \left( \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j \partial x_i} \right)^2 - 2\nu_0 \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \frac{\partial^2 P}{\partial x_i \partial x_j} + \nu_0 \nabla^2 \varepsilon \quad (2.7)$$

les termes d'ordre supérieur dans les équations (2.6) et (2.7) laissent ces équations non résolubles dans le sens de la modélisation. Ces termes doivent donc être fermés en terme de quantités moyennes de l'écoulement.

La voie pour fermer les équations instantanées de transport des paramètres de turbulence comme celles (2.6) et (2.7), constitue une des différences majeurs entre l'approche RNG et celle traditionnelle, dans l'approche traditionnelle on utilise le raisonnement empirique et l'analyse dimensionnelle, les constantes du modèle sont évaluées par voie expérimentale.

Tandis que l'approche RNG applique le groupe de renormalisation dynamique et l'expansion de  $\varepsilon$  pour marcher avec les équations fondamentales. Le groupe de renormalisation est un type d'une opération mathématique qui consiste à une famille continue de transformations.

L'application de l'approche RNG sur les équations (2.6) (2.7) abouti aux équations de transport suivantes:

$$\frac{\partial k}{\partial t} + u_i \frac{\partial k}{\partial x_i} = 2\nu_t S_y S_y - \varepsilon + \frac{\partial}{\partial x_i} \left( \alpha_k \nu \frac{\partial k}{\partial x_i} \right) \quad (2.8)$$

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial t} + u_i \frac{\partial \varepsilon}{\partial x_i} = 2C_1 \frac{\varepsilon}{k} \nu_t S_y S_y - C_2 \frac{\varepsilon^2}{k} - R + \frac{\partial}{\partial x_i} \left( \alpha_\varepsilon \nu \frac{\partial \varepsilon}{\partial x_i} \right) \quad (2.9)$$

où 
$$R = \frac{\nu_t S^3 (1 - \eta / \eta_0)}{1 + \beta \eta^3} \quad (2.10a)$$

ou alternativement 
$$R = \frac{C_\mu \eta^3 (1 - \eta / \eta_0) \varepsilon^2}{1 + \beta \eta^3} \frac{1}{k} \quad (1.10b)$$

où  $\eta = S \frac{k}{\varepsilon}$  est le rapport de la déformation moyenne turbulente à l'échelle du temps;

$S = (2S_y S_y)^2$  est le module de la déformation moyenne;

$$S_y = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right), \quad \nu = \nu_0 + \nu_t$$

Comparée avec celle du modèle  $k-\varepsilon$  standard, l'équation de  $k$  reste la même. Alors qu'un terme  $R$  apparaît dans l'équation de  $\varepsilon$ .  $R$  est petit pour une turbulence faiblement déformée tel que dans l'écoulement de cisaillement homogène, et grand dans la limite de la distorsion rapide où  $\eta$  approche de l'infinie.

Chaudhury et al (1993) ont récemment expliqués comment change  $R$  avec le taux de déformation moyenne, dans les régions où  $\eta$  est grand, le signe de  $R$  change et la viscosité turbulente diminue.

### 2.1.3 Fermeture de l'équation RNG $\varepsilon$ pour les écoulements dans les moteurs

La turbulence dans les moteurs à combustion interne est très compliquée, bien que le nombre de Mach est très bas, le mouvement du piston met le fluide sous une grande variation de densité. Avec un tel comportement de l'écoulement, le modèle de turbulence ainsi discuté est non applicable directement, la compressibilité de l'écoulement doit donc être considérée.

Dans l'histoire de la modélisation de la turbulence dans les moteurs, la considération de la compressibilité est principalement portée sur l'effet de la dilatation de vitesse sur le taux de

dissipation de la turbulence (Reynolds,1980; Morel et Mansour, 1982; El tahry, 1983). Cependant des recherches récentes avec l'aide de DNS (direct numerical simulation) ont révélés que la compressibilité influe aussi sur l'évaluation de l'énergie cinétique turbulente à cause de la dilatation de pression (Durbin et Zeman, 1992). L'effet de la compressibilité dépend du nombre de Mach, de la rapidité de compression et des modes de déformation moyenne (unidimensionnelle, plane, sphérique .etc.) (Lele, 1994).

puisque le modèle qui peut rendre compte à une déformation arbitraire et indépendante du taux de déformation aux faibles nombres de Mach est non valable, la présente étude ferme l'équation RNG  $\varepsilon$  sous les conditions de faibles nombres de Mach (Han et Reitz, 1995).

Le modèle RNGk- $\varepsilon$  appliqué à un écoulement turbulent compressible est donné par:

$$\frac{D(\rho k)}{Dt} = P - \rho\varepsilon + \frac{\partial}{\partial x_i} \left( \alpha_k \mu \frac{\partial k}{\partial x_i} \right) \quad (2.11)$$

$$\frac{D(\rho\varepsilon)}{Dt} = \frac{\varepsilon}{k} (C_1 P - C_2 \rho\varepsilon) - \rho R + C_3 \rho\varepsilon \nabla \cdot u + \frac{\partial}{\partial x_i} \left( \alpha_\varepsilon \mu \frac{\partial \varepsilon}{\partial x_i} \right) \quad (2.12)$$

où  $P$  est la production de  $k$

$$P = 2C_\mu \rho \frac{k^2}{\varepsilon} \left( S_{ij} S_{ij} - \frac{1}{3} (\nabla \cdot u)^2 \right) - \frac{2}{3} \rho k \nabla u \quad (2.13)$$

La forme de l'équation de  $\varepsilon$  est similaire à celle standard, bien que la constante  $C_3$  est inconnue. ici,  $C_3$  se détermine à partir de l'analyse de la distorsion rapide sphérique. Cette méthode est développée par Reynolds (1980) et étendue par Coleman et Mansour (1991).

$$\frac{dk}{dt} = -\frac{2}{3} (\nabla \cdot u) k \quad (2.14)$$

$$\frac{d\omega^2}{dt} = -\frac{4}{3} (\nabla \cdot u) \omega^2 \quad (2.15)$$

où  $\omega^2 = \overline{\omega_i \omega_i} = \frac{\varepsilon}{\nu_0}$ . D'une autre part, l'équation de  $\varepsilon$  (2.15), peut être appliquée à cette écoulement tel que :

$$S = \sqrt{\frac{2}{3}} |\nabla \cdot u| \quad (2.16)$$

Alors que, 
$$P = -\frac{2}{3} \rho k (\nabla \cdot u) \quad (2.17)$$

et 
$$R = \sqrt{\frac{2}{3}} C_\mu C_\eta \eta \varepsilon |\nabla \cdot u| \quad (2.18)$$

où 
$$C_\eta = \frac{\eta(1 - \eta/\eta_0)}{1 + \beta\eta^3} \quad (2.19)$$

par conséquent l'équation (2.15) - où les termes de convection et de diffusion disparaissent à cause de la distorsion rapide - se réduit à :

$$\frac{d\varepsilon}{dt} = \left(-\frac{2}{3}C_1 + C_3\right)\varepsilon\nabla \cdot u - C_2 \frac{\varepsilon^2}{k} - \sqrt{\frac{2}{3}}C_\mu C_\eta \eta \varepsilon |\nabla \cdot u| \quad (2.20)$$

Pour un écoulement homogène l'effet de la dilatation-dissipation est négligeable d'où  $\varepsilon \equiv \nu_0 \omega^2$  l'équation (2.20) devient :

$$\frac{d\omega^2}{dt} = \left[ \left(-\frac{2}{3}C_1 + C_3\right)\nabla \cdot u - \frac{1}{\nu_0} \frac{d\nu_0}{dt} - \sqrt{\frac{2}{3}}C_\mu C_\eta \eta |\nabla \cdot u| - C_2 \nu_0 \frac{\omega^2}{k} \right] \omega^2 \quad (2.21)$$

Dans le régime de la distorsion rapide  $\left| S \frac{k}{\varepsilon} \right| \approx \left| (\nabla \cdot u) \frac{k}{\varepsilon} \right| \gg 1$ , donc :

$$C_\eta \eta = -\frac{1}{\beta \eta_0} \quad (2.22)$$

et  $\nu_0^{-1} \frac{d\nu_0}{dt} \approx o(\nabla \cdot u)$  le dernier terme dans le membre droit de l'équation (2.21) est

relativement petit, il est de l'ordre de  $\frac{\varepsilon}{k}$  tandis que aux autres termes sont de l'ordre de  $\nabla \cdot u$

donc ils peuvent être négligés.

Par comparaison des équations (2.21) et (2.15), les constantes du modèle doivent satisfaire:

$$\left(-\frac{2}{3}C_1 + C_3\right)\nabla \cdot u - \frac{1}{\nu_0} \frac{d\nu_0}{dt} - \sqrt{\frac{2}{3}}C_\mu C_\eta \eta |\nabla \cdot u| = -\frac{4}{3}\nabla \cdot u \quad (2.23)$$

d'où 
$$C_3 = \frac{-4 + 2C_1 + 3(\nu_0 \nabla \cdot u)^{-1} (d\nu_0 / dt) + (-1)^\delta \sqrt{6} C_\mu C_\eta}{3} \quad (2.24)$$

où  $\delta$  est le delta de Kroneker, il dépend du signe de la dilatation de la vitesse.

$$\delta = 1 \quad \text{si} \quad \nabla \cdot u < 0$$

$$\delta = 0 \quad \text{si} \quad \nabla \cdot u > 0$$

pour les gaz parfaits la viscosité moléculaire  $\mu \propto T^m$ , où  $T$  est la température et  $m = 0.5$  (Bird et al, 1960). pour les systèmes thermodynamiques fermés le processus polytropique se caractérise par la relation  $\frac{P}{\rho^n} = \text{const}$ . Les processus particuliers sont définis par les valeurs de

$n$ , on peut donc écrire:

caractérisé par la relation  $\frac{P}{\rho^n} = \text{const}$ . Les processus particuliers sont définis par les valeurs de  $n$ , on peut donc écrire:

$$(v_0 \nabla \cdot u)^{-1} \frac{dv_0}{dt} = 1 - m(n-1) \quad (2.5)$$

d'où l'équation (2.24) peut s'écrire comme suit:

$$C_3 = \frac{-1 + 2C_1 + 3m(n-1) + (-1)^\delta \sqrt{6} C_\mu C_\eta}{3} \quad (2.26)$$

De cette façon l'équation RNG  $\varepsilon$  est fermée avec  $C_3$  calculé par l'équation (2.26).

Il est révélé par l'équation (2.26) que, premièrement, à la limite de la distorsion rapide  $C_3$  est dépendant du signe de la dilatation de vitesse, qui dépend du temps, les processus de distorsion sont soit compression ou expansion. Deuxièmement,  $C_3$  est aussi dépendant de l'exposant polytropique  $n$ . l'évaluation de la dissipation de la turbulence est effectuée par les détails thermiques du processus de compression / expansion. Si le processus est isotherme ( $n=1$ ) l'effet de la variation viscosité-température sur  $\varepsilon$  disparaît. Pour un processus adiabatique ( $n=\gamma$ ),  $\gamma$  est le rapport des chaleurs spécifiques, pour les moteurs à combustion interne  $n$  varie de 1.3 à 1.4.

pour les régions de faibles nombres de Reynolds, le traitement du modèle RNGk- $\varepsilon$  est identique à celui du modèle k- $\varepsilon$  standard. Les constantes des deux modèles son données par:

Tableau (2): Valeurs des constantes du modèle k- $\varepsilon$

$C_\mu$	$C_1$	$C_2$	$C_3$	$\alpha_k$	$\alpha_\varepsilon$	$\eta_0$	$\beta$	Modèle
0.0845	1.42	1.68	Eq.(2.26)	1.39	1.39	4.38	0.012	RNGk- $\varepsilon$
0.09	1.44	1.92	-1.0	1.0	0.769	-	-	k- $\varepsilon$ standard

## 2.2 Transformation du domaine

### 2.2.1 Introduction

A cause du mouvement périodique du piston, le domaine  $(o,r,z,t)$  de la figure (3) se déforme au cours du temps. Il est donc nécessaire de le transformer en un domaine  $(o,r,x,t)$  à frontière fixe dans le temps, à l'aide de la transformation  $x=z/H(t)$  qui fait passer à chaque instant du domaine réel  $(o,r,z)$  de largeur  $R$  et de longueur  $H(t)$ , un domaine  $(o,r,x)$  de largeur  $R$  et de longueur unité soit 1 voir fig(4).

**2.2.2 Le modèle mathématique dans le domaine transformé**

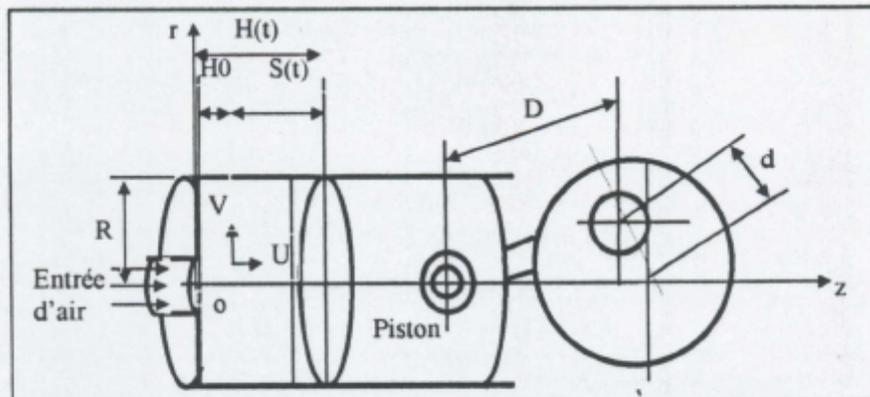


FIG (3): Domaine réel à frontière mobile dans le temps

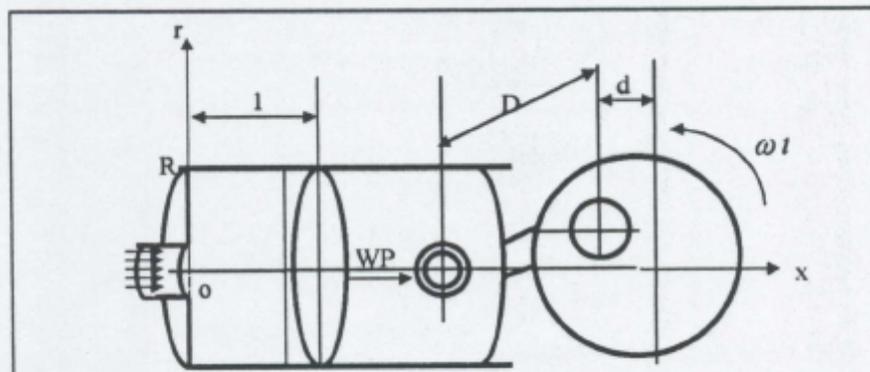


FIG (4): Domaine transformé à frontière fixe dans le temps

Toutes les équations régissant l'écoulement doivent être écrites dans le domaine transformé en introduisant le changement  $x = z/H(t)$  en prenant la vitesse axiale relative  $\tilde{U} = U - Wp$

Il faut donc vérifier que :

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial z} &= \frac{\partial x}{\partial z} \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial t}{\partial z} \frac{\partial}{\partial t} = \frac{1}{H(t)} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial t} &= \frac{\partial x}{\partial t} \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial t}{\partial t} \frac{\partial}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} - \frac{x}{H(t)} Wp \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial r} &= \frac{\partial}{\partial r} \end{aligned} \tag{2.27}$$

$H(t) = H0 + S(t)$ : est déterminé par la lois bielle-manivelle:

$$H(t) = H0 + d(1 - \cos \theta) + D \left[ 1 - \sqrt{1 - \left(\frac{d}{D} \sin \theta\right)^2} \right] \tag{2.28}$$

$H0$ : est la distance entre la culasse et le point mort haut

$S(t)$ : est la course du piston;

$\theta = \omega t$ ;

$d$ : diamètre de la manivelle;

$D$ : entraxe de la bielle;

$Wp$ : vitesse de translation du piston  $=dH(t)/dt$ ;

**2.2.2.1: Equation de continuité:**

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{1}{H(t)} \frac{\partial(\rho \bar{U})}{\partial x} + \frac{1}{r} \frac{\partial(r\rho V)}{\partial r} = \frac{x}{H(t)} Wp \frac{\partial \rho}{\partial x} \tag{2.29}$$

multipliant l'équation (2.27) par  $H(t)$  sachant que :

$$x \frac{\partial \rho}{\partial x} = \frac{\partial(\rho x)}{\partial x} - \rho \tag{2.30}$$

$$H(t) \frac{\partial \rho}{\partial t} = \frac{\partial(H(t)\rho)}{\partial t} - \rho Wp$$

on aura ;

$$\frac{\partial(H(t)\rho)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho \bar{U})}{\partial x} + \frac{H(t)}{r} \frac{\partial(r\rho V)}{\partial r} = Wp \frac{\partial(x\rho)}{\partial x} \tag{2.31}$$

**2.2.2.2: Equation de quantité de mouvement pour U:**

Avec les mêmes opérations effectuées sur l'équation (2.27) on aura;

$$\frac{\partial(\rho H(t)U)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho \bar{U}U)}{\partial x} + \frac{H(t)}{r} \frac{\partial(r\rho VU)}{\partial r} = -\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\mu_{eff}}{H(t)} \frac{\partial U}{\partial x} \right) + \frac{H(t)}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r\mu_{eff} \frac{\partial U}{\partial r} \right) + H(t)S^w + Wp \frac{\partial(\rho Ux)}{\partial x} \tag{2.32}$$

**2.2.2.3: Equation de quantité de mouvement pour V:**

D'une façon similaire à l'équation (2.32) on aura pour V;

$$\frac{\partial(H(t)\rho V)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho \bar{U}V)}{\partial x} + \frac{H(t)}{r} \frac{\partial(r\rho VV)}{\partial r} = -H(t) \frac{\partial P}{\partial r} - 2H(t)\mu_{eff} \frac{V}{r^2} + \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\mu_{eff}}{H(t)} \frac{\partial V}{\partial x} \right) + \frac{H(t)}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r\mu_{eff} \frac{\partial V}{\partial r} \right) + \frac{\rho W^2}{r} + H(t)S^v + Wp \frac{\partial(\rho Vx)}{\partial x} \tag{2.33}$$

Avec :

$$S^w = \frac{1}{H(t)} \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{1}{H(t)} \frac{\partial U}{\partial x} \right) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{r}{H(t)} \frac{\partial V}{\partial r} \right) - \frac{2}{3} \frac{1}{H(t)} \frac{\partial}{\partial x} (\mu_{eff} \nabla \bar{U} + \rho K) \tag{2.34}$$

$$S^v = \frac{1}{H(t)} \frac{\partial}{\partial x} (\mu_{eff} \frac{\partial U}{\partial r}) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r\mu_{eff} \frac{\partial V}{\partial r}) - \frac{2}{3} \frac{\partial}{\partial r} (\mu_{eff} \nabla \bar{U} + \rho K)$$

**2.2.2.4: Equation de quantité de mouvement pour W**

$$\frac{\partial(\rho H(t)W)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho \tilde{U}W)}{\partial x} + \frac{H(t)}{r} \frac{\partial(r\rho VW)}{\partial r} = \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\mu_{eff}}{H(t)} \frac{\partial W}{\partial x} \right) + \frac{H(t)}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r\mu_{eff} \frac{\partial W}{\partial r} \right) - H(t) \left( \rho \frac{V}{r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r\mu_{eff}) \right) W + Wp \frac{\partial(\rho Wx)}{\partial x} \quad (2.35)$$

**2.2.2.5: Equation d'énergie:**

$$\frac{\partial(H(t)\rho c_p T)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho \tilde{U}c_p T)}{\partial x} + \frac{H(t)}{r} \frac{\partial(r\rho Vc_p T)}{\partial r} = \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\mu_{eff}}{H(t)Pr} \frac{\partial c_p T}{\partial x} \right) + \frac{H(t)}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\mu_{eff}}{Pr} \frac{\partial c_p T}{\partial r} \right) + H(t) \frac{DP}{Dt} + Wp \frac{\partial(x\rho c_p T)}{\partial x} \quad (2.36)$$

$$\text{Avec } \frac{DP}{Dt} = \frac{\partial P}{\partial t} - \frac{x}{H(t)} Wp \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{U}{H(t)} \frac{\partial P}{\partial x} + V \frac{\partial P}{\partial r}$$

**2.2.2.6: Equation de l'énergie cinétique turbulente k**

$$\frac{\partial(H(t)\rho k)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho \tilde{U}k)}{\partial x} + \frac{H(t)}{r} \frac{\partial(r\rho Vk)}{\partial r} = \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\mu_{eff}}{H(t)\sigma_k} \frac{\partial k}{\partial x} \right) + \frac{H(t)}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{\mu_{eff}}{\sigma_k} \frac{\partial k}{\partial r} \right) + H(t)\rho(G - \varepsilon) + Wp \frac{\partial(x\rho k)}{\partial x} \quad (2.37)$$

**2.2.2.7: Equation du taux de dissipation  $\varepsilon$** 

$$\frac{\partial(H(t)\rho\varepsilon)}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} (\rho \tilde{U}\varepsilon) + \frac{H(t)}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r\rho V\varepsilon) = \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\mu_{eff}}{\sigma_\varepsilon H(t)} \frac{\partial \varepsilon}{\partial x} \right) + \frac{H(t)}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\mu_{eff}}{\sigma_\varepsilon} \frac{\partial \varepsilon}{\partial r} \right) + C_1 C_\mu G \frac{\rho K}{\mu_t} - C_2 \frac{\rho \varepsilon}{k} + C_3 \nabla \tilde{U} + Wp \frac{\partial(x\rho \varepsilon)}{\partial x} \quad (2.38)$$

Avec:

$$G = \mu_t \left\{ 2 \left[ \left( \frac{1}{H(t)} \frac{\partial U}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial V}{\partial r} \right)^2 + \frac{V^2}{r} \right] + \left( \frac{\partial U}{\partial r} + \frac{1}{H(t)} \frac{\partial V}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{1}{H(t)} \frac{\partial W}{\partial x} \right)^2 + \left[ r \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{W}{r} \right) \right]^2 \right\} - \frac{2}{3} \nabla \tilde{U} (\mu_t \nabla \tilde{U} + \rho k) \quad (2.39)$$

**2.2.3 Généralisation du modèle mathématique appliqué au domaine transformé**

L'équation généralisée pour le domaine transformé (à frontière fixe dans le temps) pourra donc prendre la forme:

$$\frac{\partial(r\rho H(t)\phi)}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left( (\rho r \tilde{U}\phi) - r \left( \frac{\Gamma_\phi}{H(t)} \frac{\partial \phi}{\partial x} \right) \right) + H(t) \frac{\partial}{\partial r} \left( r(\rho V\phi) - r \left( \Gamma_\phi \frac{\partial \phi}{\partial r} \right) \right) = r S_\phi \tag{2.40}$$

où  $S_\phi = H(t)S'_\phi + Wp \frac{\partial(x\rho\phi)}{\partial x}$

$S'_\phi$  : est le terme source de la grandeur  $\phi$  dans le domaine réel mobile dans le temps

prenant  $J_x = (\rho \tilde{U}\phi - \frac{\Gamma_\phi}{H(t)} \frac{\partial \phi}{\partial x})$  et  $J_r = (\rho V\phi - \Gamma_\phi \frac{\partial \phi}{\partial r})$  les flux totaux (convectifs + diffusifs)

suivant x et r, l'équation générale de transport devient:

$$\frac{\partial(rH(t)\rho\phi)}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(rJ_x) + H(t) \frac{\partial}{\partial r}(rJ_r) = r S_\phi \tag{2.41}$$

Le modèle mathématique peut donc être résumé dans le tableau (4):

Tableau (3): terme source et coefficient de diffusion sur le domaine transformé.

Eq	$\phi$	$\Gamma_\phi$	$S_\phi$
masse	1	0	$Wp x \frac{\partial \rho}{\partial x}$
qtité de mvt /x	u	$\mu_{eff}$	$H(t)S^u - \frac{\partial P}{\partial x} + Wp \rho x \frac{\partial u}{\partial x}$
qtité de mv r	v	$\mu_{eff}$	$H(t)S^v - H(t) \frac{\partial P}{\partial r} - H(t) \frac{2\mu_{eff} v}{r^2} + Wp \rho x \frac{\partial v}{\partial x}$
qtité de mvt azimuthale	w	$\mu_{eff}$	$-H(t) \left( \rho \frac{v}{r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r\mu_{eff}) \right) w + Wp \rho x \frac{\partial w}{\partial x}$
énergie	T	$\frac{\mu_{eff}}{\sigma_\tau}$	$\frac{H(t)}{Cp} \frac{dP}{dt} + Wp \rho x \frac{\partial T}{\partial x}$
énergie cinétique turbulente	k	$\alpha_k \mu_{eff}$	$H(t)(G - \rho\varepsilon) + Wp \rho x \frac{\partial k}{\partial x}$
taux de dissipation	$\varepsilon$	$\alpha_\varepsilon \mu_{eff}$	$H(t) \left[ \frac{C_1 G \varepsilon}{k} - \frac{C_2 \rho \varepsilon^2}{k} + C_3 \rho \varepsilon (\nabla \cdot \vec{V}) \right] + Wp \rho x \frac{\partial \varepsilon}{\partial x}$

Pour résoudre l'équation généralisée (2.40) afin de décrire l'écoulement , on fait appel à un modèle numérique qui fait l'objet du chapitre suivant.

## CHAPITRE 3

### MODELISATION NUMERIQUE

#### 3.1 Introduction

La forme finale du modèle mathématique élaboré est un système d'équations aux dérivées partielles elliptiques. A cause de leur non linéarité et la complexité du problème physique, elle ne peuvent être résolues analytiquement . La seule approche à envisagée ici est la procédure numérique .

#### 3.2 Choix de la méthode numérique

La résolution des problèmes de l'aérodynamique interne des écoulements pourra être abordée par plusieurs méthodes numériques. Parmi ces méthodes les plus couramment utilisées sont celle des différences finies (MDF), celle des éléments finis (MEF) et celle des volumes finis (MVF) .

La méthode (MDF) procède par approximation des dérivées d'une fonction en terme de ces valeurs approchées aux noeuds du maillage .

La méthode (MEF) en plus de ça , procède par recherche de fonction d'interpolation approchant la solution entre ces noeuds.

#### 3.3 Méthode des volumes finis

Contrairement aux deux méthodes précédentes . Celle des volumes finis (Patankar) procède par intégration des équations locales sur un ensemble discret de volumes jointifs recouvrant la totalité du domaine d'écoulement. Mettant ainsi en oeuvre les bilans macroscopiques , cette méthode apporte une généralité beaucoup plus importante , par son formalisme et traitement conservatifs (conservation de toute quantité transportable), et son aptitude à résoudre des écoulements complexes .

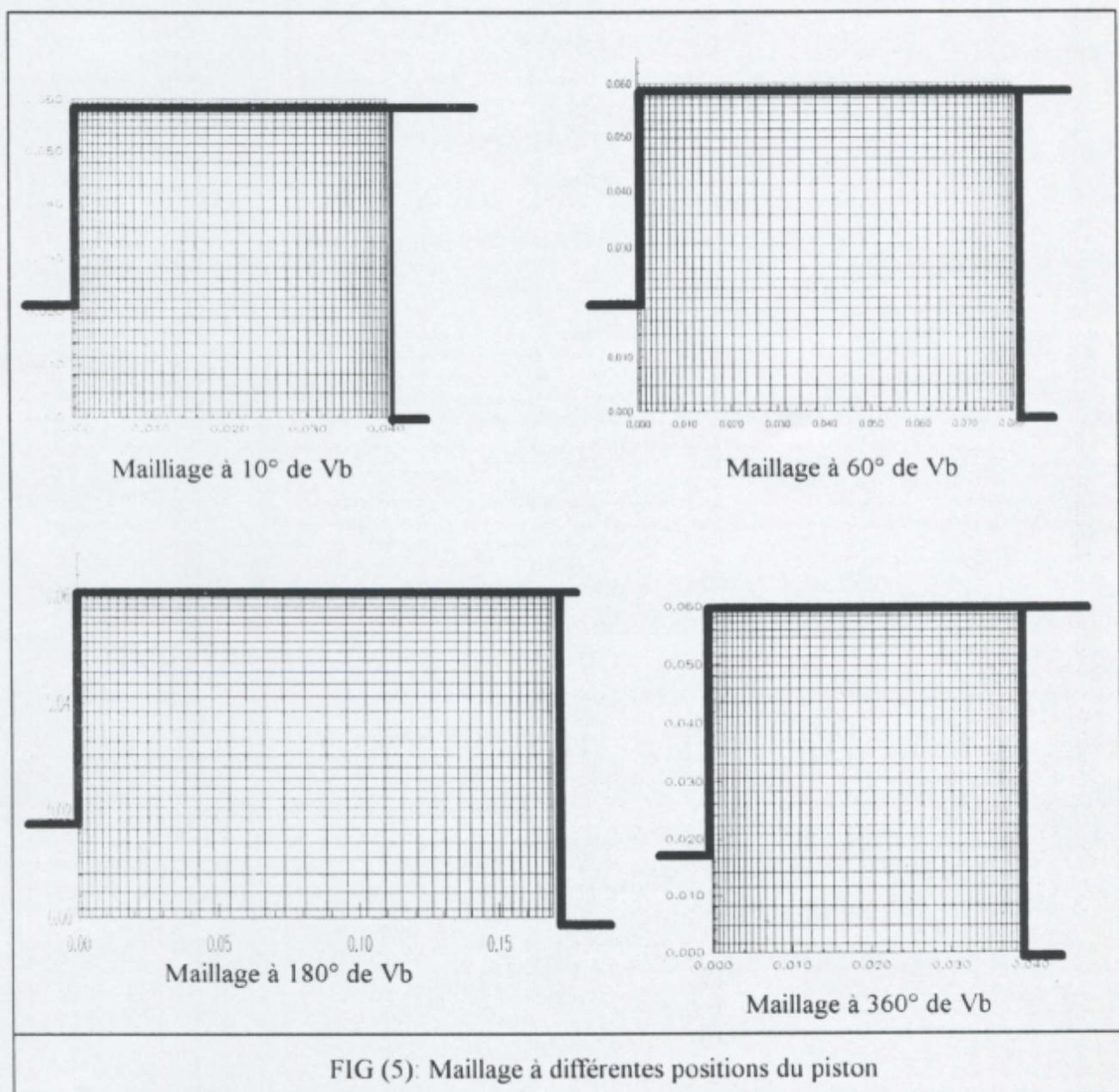
#### 3.4 Maillage

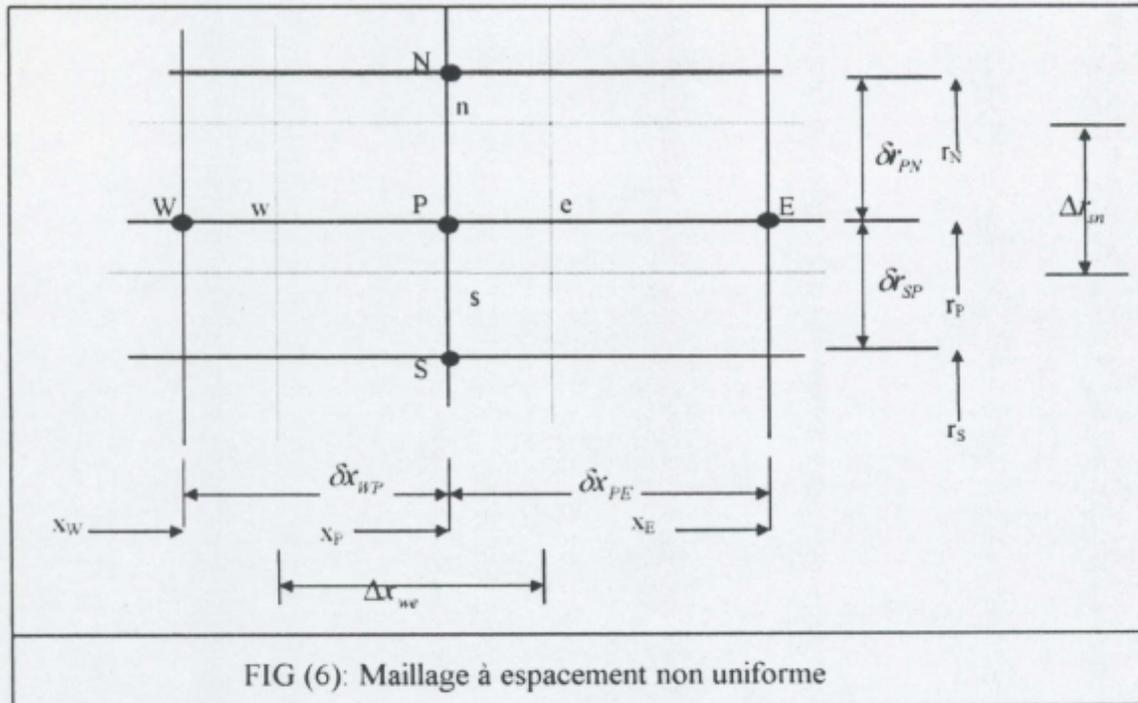
Le domaine d'étude est subdivisé suivant les directions radiale et axiale en domaines finis dont la disposition et la distribution sont dictées par la manière avec laquelle les conditions aux limites sont introduites et par la nécessité d'un raffinage du maillage près des parois solides pour capter les changements rapides qui y prennent naissance voir FIG (5) ceci conduit à adopter un maillage rectangulaire (  $\Delta x, \Delta r$  ) avec un espacement non uniforme entre les noeuds principaux du maillage (  $\delta x_{WP} \neq \delta x_{PE}$  et  $\delta r_{SP} \neq \delta r_{PN}$  ) voir FIG (6).

Quant à la localisation des variables, on conviendra de noter par la lettre P le noeud du volume de contrôle principal et par les lettres E, W, N et S, ceux relatifs aux volumes de contrôle adjacents, respectivement situés à l'Est, l'Ouest, le Nord et le Sud du volume de contrôle principal.

De même pour les volumes de contrôle secondaires, situés entre les noeuds principaux, on notera par les lettres e, w, n et s, les noeuds localisés respectivement sur les faces est, ouest, nord et sud du volume de contrôle principal.

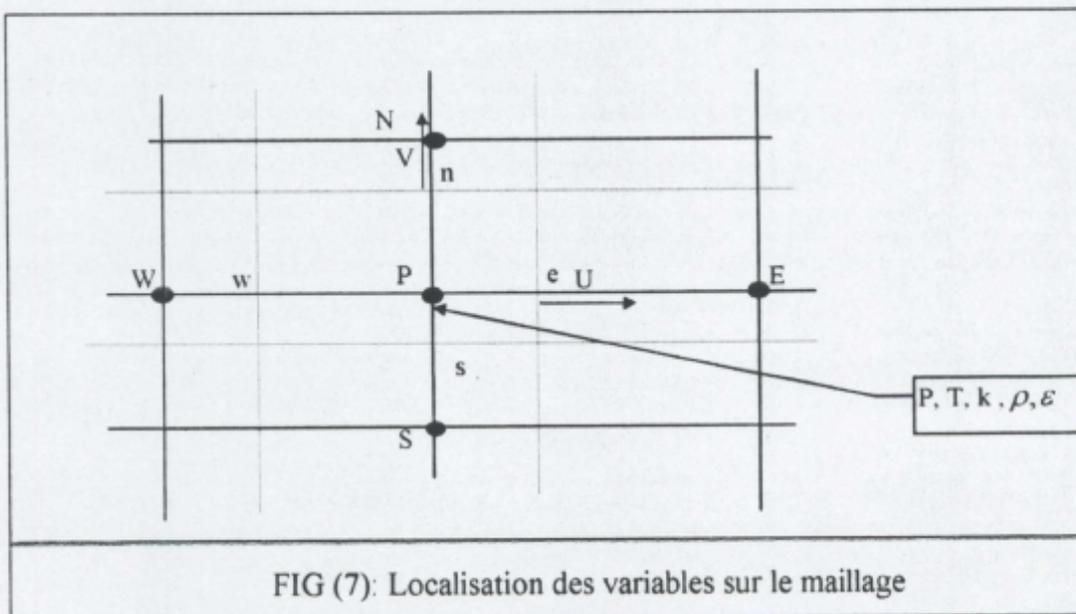
Les faces de ce dernier étant situées entre les noeuds principaux à des espacements non uniformes (FIG(6)).





Avec un tel maillage, les variables scalaires telles que la pression  $P$ , la température  $T$ , la densité  $\rho$ , l'énergie cinétique turbulente  $k$  et son taux de dissipation  $\varepsilon$ , sont stockées aux noeuds principaux des volumes de contrôle.

Alors que celles vectorielles  $U$ ,  $V$  sont stockées aux noeuds secondaires  $e$  et  $n$  respectivement localisés aux faces est et nord du volume de contrôle principal voir FIG (7).



### 3.5 Discrétisation

Elle consiste à transformer l'équation différentielle générale de transport en un système d'équations algébriques non linéaires qui peuvent être résolues en chaque point du maillage par une méthode numérique convenable.

On réécrit l'équation générale de transport:

$$\frac{\partial(rH(t)\rho\phi)}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(rJ_x) + H(t)\frac{\partial}{\partial r}(rJ_r) = rS_\phi \quad (3.1)$$

Taux de variation temporelle

termes des flux total (convection + diffusion)

terme source

$$J_x = (\rho\tilde{U}\phi - \frac{\Gamma_\phi}{H(t)}\frac{\partial\phi}{\partial x}) \quad \text{et} \quad J_r = (\rho V\phi - \Gamma_\phi\frac{\partial\phi}{\partial r}) \quad (3.2)$$

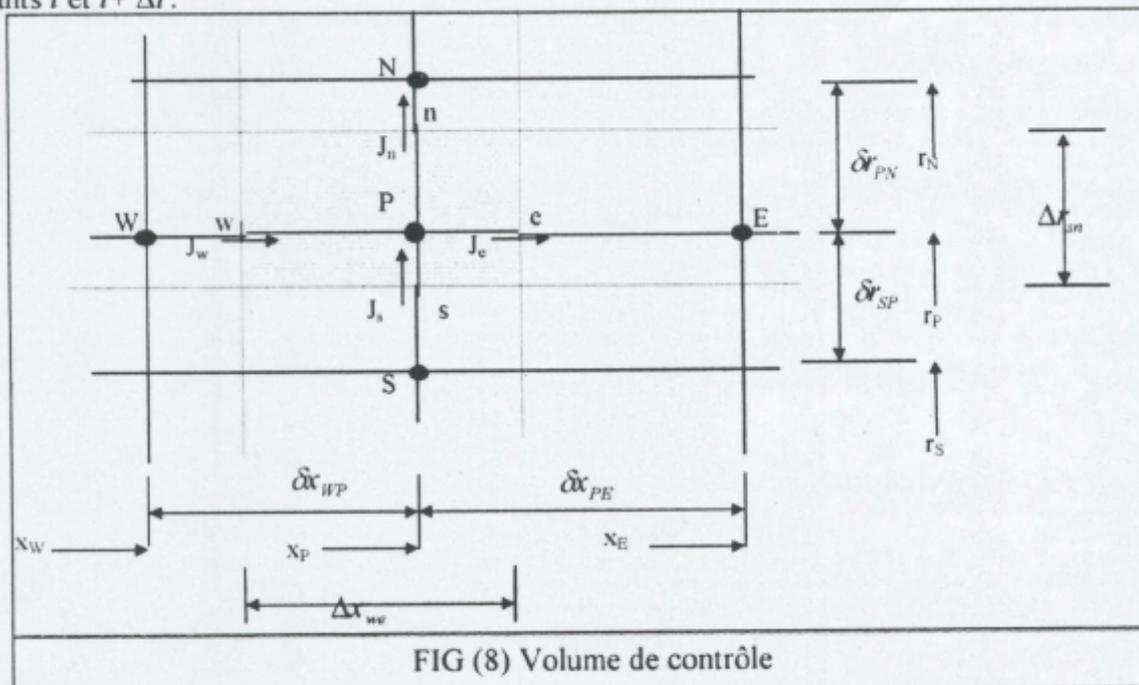
$$S_\phi = H(t)S'_\phi + Wp\frac{\partial(x\rho\phi)}{\partial x} \quad (3.3)$$

Suivant la classification des termes de l'équation (3.1), la discrétisation peut s'effectuer en trois étapes :

- Discrétisation temporelle;
- Discrétisation spatiale;
- Discrétisation des termes sources;

#### 3.5.1 Discrétisation temporelle

Il consiste à intégrer l'équation (3.1) sur le volume de contrôle de la figure (8) entre les instants  $t$  et  $t + \Delta t$ .



Nous obtenons la solution dans le temps par l'initialisation de la distribution de la grandeur  $\phi$ .

Avec le « pas de temps », la tâche est comme suit:

donner à chaque point du maillage les valeurs de  $\phi$  au temps  $t$ , chercher les valeurs de  $\phi$  au temps  $t + \Delta t$ .

Les valeurs « anciennes » (données) de  $\phi$  à chaque point du maillage seront notées par  $\phi^0$ , et celles « nouvelles » (inconnues) par  $\phi^1$ .

$$\underbrace{\int_t^{t+\Delta t} \int_w^e \int_s^n \frac{\partial H \rho \phi}{\partial t} r dr dx dt}_{a} + \underbrace{\int_t^{t+\Delta t} \int_s^e \int_w^n \frac{\partial}{\partial x} (r J_x) dx dr dt}_{b} + \underbrace{\int_t^{t+\Delta t} \int_w^e \int_s^n \frac{\partial}{\partial r} (r J_r) H dr dx dt}_{c} = \underbrace{\int_t^{t+\Delta t} \int_w^e \int_s^n S_\phi r dr dx dt}_{d} \quad (3.4)$$

$$a = r \Delta r \Delta x (H^1 \rho_P^1 \phi_P^1 - H^0 \rho_P^0 \phi_P^0)$$

$$b = \int_t^{t+\Delta t} \int_s^e J_e r_e dr dt - \int_t^{t+\Delta t} \int_s^e J_w r_w dr dt = \int_t^{t+\Delta t} (J_e a_e - J_w a_w) dt$$

$$c = \int_t^{t+\Delta t} \int_w^e H J_n r_n dx dt - \int_t^{t+\Delta t} \int_w^e H J_s r_s dx dt = \int_t^{t+\Delta t} H (J_n a_n - J_s a_s) dt$$

$$a_e = \int_s^n r_e dr \quad , \quad a_w = \int_s^n r_w dr \quad , \quad a_n = \int_w^e r_n dx \quad , \quad a_s = \int_w^e r_s dx$$

sont les faces du volume de contrôle respectivement est, ouest, nord et sud.

Les expressions des flux total sont:

$$\mathcal{F}_e = \int_t^{t+\Delta t} \left[ \rho_e \tilde{U}_e a_e \phi_e - \frac{\Gamma_e a_e}{H \delta x_{PE}} (\phi_e - \phi_P) \right] dt \quad (3.5)$$

$$\mathcal{F}_w = \int_t^{t+\Delta t} \left[ \rho_w \tilde{U}_w a_w \phi_w - \frac{\Gamma_w a_w}{H \delta x_{WP}} (\phi_P - \phi_w) \right] dt \quad (3.6)$$

$$\mathcal{F}_n = \int_t^{t+\Delta t} \left[ \rho_n V_n a_n \phi_n - \frac{\Gamma_n a_n}{H \delta r_{PN}} (\phi_n - \phi_P) \right] dt \quad (3.7)$$

$$\mathcal{F}_s = \int_t^{t+\Delta t} \left[ \rho_s V_s a_s \phi_s - \frac{\Gamma_s a_s}{H \delta r_{SP}} (\phi_P - \phi_s) \right] dt \quad (3.8)$$

A ce point , on a besoin d'une supposition sur la variation de  $\phi_P, \phi_e, \phi_n, \phi_s$  et  $\phi_w$  avec le temps de  $t$  à  $t + \Delta t$ . Plusieurs suppositions sont possibles et un grand nombre de celles-ci peut être généralisé par la proposition:

$$\int_t^{t+\Delta t} \phi_p dt = [f\phi_p^1 + (1-f)\phi_p^0] \Delta t \quad (3.9)$$

où  $f$  est un facteur compris entre 0 et 1 .

Utilisant cette formule pour évaluer les termes  $\mathcal{F}_i = \int_t^{t+\Delta t} J_i a_i dt$  ( $i = e, w, n, s$ ) on obtient :

$$\mathcal{F}_i = [f(J_i a_i)^1 + (1-f)(J_i a_i)^0] \Delta t \quad (3.10)$$

Pour certaines valeurs spécifiques de  $f$ , la discrétisation se réduit aux schémas les plus connues.

En particulier,  $f = 0$  conduit au schéma explicite,  $f = 0.5$  conduit au schéma de Crank-Nicolson,  $f = 1$  donne le schéma implicite. Une discussion abordée par Patankar sur ces schémas a préférée le schéma implicite par des raisons de stabilité numérique.

On enlève l'indice 1 car les grandeurs qui lui sont associées prennent leurs nouvelles valeurs à l'instant  $t + \Delta t$ .

Avec un tel choix, l'équation (3.4) prendra donc la forme:

$$\frac{\Delta v}{\Delta t} (H \rho_p \phi_p - H^0 \rho_p^0 \phi_p^0) + J_e a_e - J_w a_w + H(J_n a_n - J_s a_s) = S_p \Delta v \quad (3.11)$$

### 3.5.2 Discrétisation spatiale

Revenons maintenant aux expressions (3.5), (3.6), (3.7), et (3.8) des flux de  $\phi$  dû à la convection et à la diffusion à travers les faces du volume de contrôle FIG (8), pour simplifier le travail on va prendre en discussion  $\mathcal{F}_e$ . Quant à  $\mathcal{F}_w$ ,  $\mathcal{F}_n$ , et  $\mathcal{F}_s$  sont similaires.

L'expression (3.5) montre que  $\mathcal{F}_e$  prend la forme suivante:

$$\mathcal{F}_e = (\text{flux massique à travers la face } e) \times (\text{quantité géométrique}) \times \phi_e -$$

$$(\text{diffusivité à travers la face } e) \times (\text{quantité géométrique}) \times (\phi_e - \phi_p)$$

Les valeurs des quantités géométriques reliées au maillage choisi sont connues. Le flux massique et la diffusivité à l'interface  $e$  peuvent être approximés par une interpolation linéaire. La tâche la plus difficile dans l'évaluation de  $\mathcal{F}_e$  est donc l'approximation de  $\phi_e$ , pour ce but on considère un cas unidimensionnel permanent ( FIG (9) ).

Soient les deux symboles  $F$  et  $D$ , définis comme suit:

$$F \equiv \rho u, \quad D \equiv \frac{\Gamma}{\delta x} \quad (3.12)$$

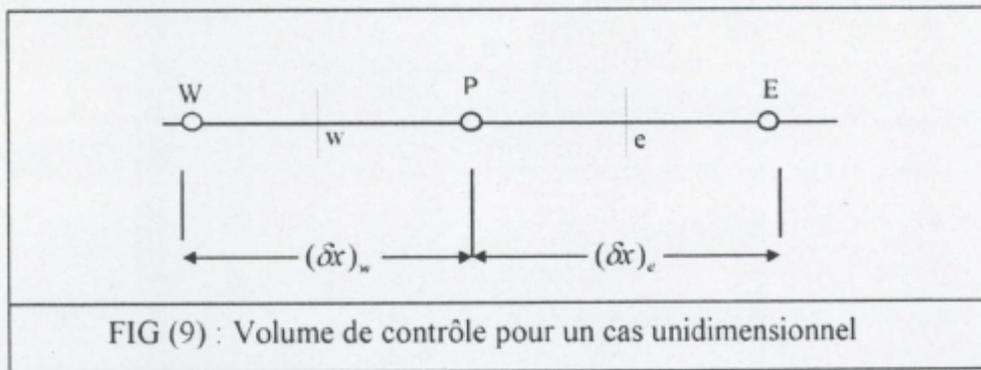


FIG (9) : Volume de contrôle pour un cas unidimensionnel

l'équation gouvernant l'écoulement dans ce cas est:

$$\frac{d}{dx}(\rho u \phi) = \frac{d}{dx} \left( \Gamma \frac{d\phi}{dx} \right) \tag{3.13}$$

Pour pouvoir généraliser la formulation appliquée à la discrétisation de l'équation (3.13) qui peut être écrite sous la forme  $dJ/dx = 0$ , on considère deux points  $i$  et  $i+1$  entre lesquels l'interface est traversée par le flux total  $J$  FIG (10).

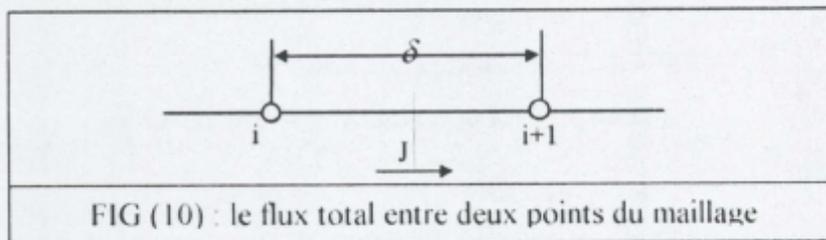


FIG (10) : le flux total entre deux points du maillage

Nous écrivons;

$$J^* = \frac{J\delta}{\Gamma} = P\phi - \frac{d\phi}{d(x/\delta)} \tag{3.14}$$

$P$  est le nombre de Peclet,  $\rho u \delta / \Gamma$ .

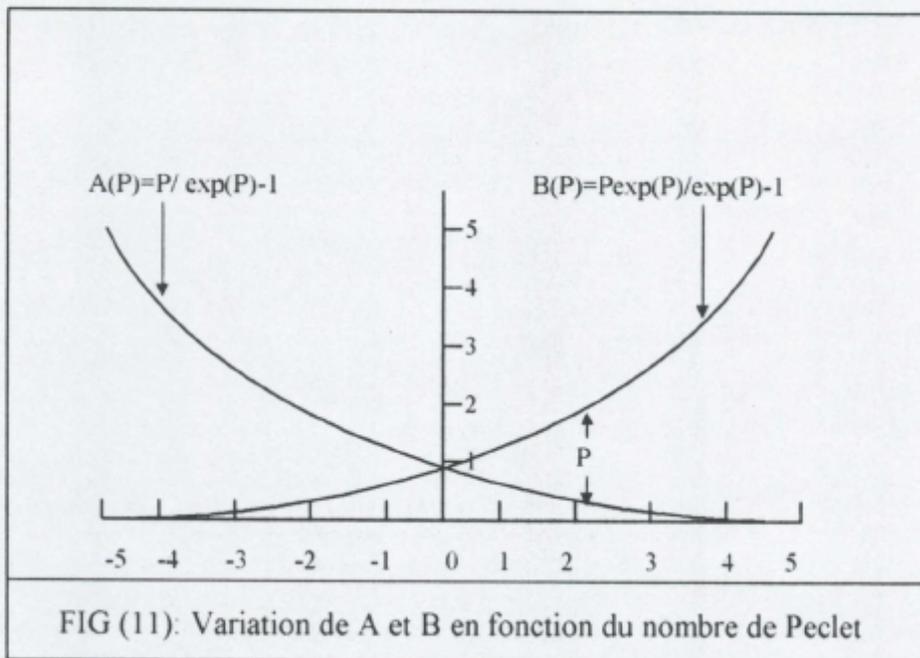
La valeur de  $\phi$  à l'interface doit être interpolée entre  $\phi_i$  et  $\phi_{i+1}$ , alors que le gradient  $\frac{d\phi}{d(x/\delta)}$  doit être un multiple de  $\phi_{i+1} - \phi_i$ , donc:

$$J^* = P[\alpha\phi_i + (1-\alpha)\phi_{i+1}] - \beta(\phi_{i+1} - \phi_i) \tag{3.15}$$

où  $\alpha$  et  $\beta$  sont des coefficients adimensionnels qui sont fonctions du nombre de Peclet,  $J^*$  peut être exprimé par :

$$J^* = B\phi_i - A\phi_{i+1} \tag{3.16}$$

où  $A$  et  $B$  sont aussi des coefficients adimensionnels qui dépend du  $P$  ( $A$  est associé au point  $i+1$  qui est « Ahead » de l'interface,  $B$  est associé au point  $i$  qui est « Behind » de l'interface traversé par  $J$ )



Les propriétés des coefficients  $A$  et  $B$  sont étudiées en fonction du nombre de Peclet :

\* La première ; si  $\phi_i$  et  $\phi_{i+1}$  sont égales le flux doit être nul .  $J$  est exprimé par le flux convectif  $\rho u \phi_i$ , dans ces conditions nous avons :

$$J^* = P \phi_i = P \phi_{i+1} \quad (3.17)$$

la combinaison des équations (3.16) et (3.17) conduit à :

$$B = A + P \quad (3.18)$$

\* La deuxième propriété de  $A$  et  $B$  est le genre de symétrie entre eux . Si nous reversons l'axe des coordonnées,  $P$  devient  $-P$  et  $A$  et  $B$  changent de rôle, les fonctions  $A(P)$  et  $B(P)$  doivent être reliée par:

$$A(-P) = B(P) \quad (3.19a)$$

$$B(-P) = A(P) \quad (3.19b)$$

La variation exacte de  $A$  et  $B$  avec  $P$  qui peut être déduite de la solution exacte de l'équation (3.13) qui exprime  $J$  par  $J_e = F_e \left( \phi_p + \frac{\phi_p - \phi_E}{\exp(P_e) - 1} \right)$  où  $P_e = F_e / D_e$  est montrée par la figure (11)

où nous observons que la distance verticale entre les courbes  $A$  et  $B$  est égale à  $P$ . Comme nous constatons que les deux courbes sont symétriques par rapport à  $P=0$ .

L'implication des deux propriétés est que les fonctions  $A(P)$  et  $B(P)$  sont connues seulement pour des valeurs positives de  $P$ .

$$A(P) = B(P) - P \quad \text{de} \quad (3.18)$$

$$=A(-P)-P \text{ de } (3.19a)$$

$$=A(|P|)-P \quad (3.20)$$

Ainsi, pour toute valeur de  $P$ , positive ou négative, nous écrivons:

$$A(P) = A(|P|) + \|-P, 0\| \quad (3.21)$$

où  $\|-P, 0\|$  indique la valeur la plus grande de  $-P$  et 0.

utilisant l'équation (4.18) nous obtenons:

$$B(P) = A(|P|) + \|P, 0\| \quad (3.22)$$

Aussi nous signalons que la combinaison des deux équations (3.16) et (3.18) aboutie à :

$$J^* - P\phi_i = A(\phi_i - \phi_{i+1}) \quad (3.23)$$

$$J^* - P\phi_{i+1} = B(\phi_i - \phi_{i+1}) \quad (3.24)$$

Si on applique maintenant la relation du flux (3.16) aux interfaces e et w (voir FIG (9)) en utilisant les équation (3.21) et (3.22) nous obtenons la formulation générale (convection-diffusion) suivante:

$$a_p \phi_p = a_e \phi_e + a_w \phi_w \quad (3.25)$$

$$a_e = D_e A(|P|) + \|-F_e, 0\|$$

$$a_w = D_w A(|P|) + \|F_e, 0\| \quad (3.26)$$

où:

$$a_p = a_E + a_w + (F_e - F_w)$$

Les différents schémas de discrétisation peuvent être donc obtenus par les différents choix de la fonction  $A(|P|)$  listés dans le tableau suivant:

tableau (4) : La fonction  $A(|P|)$  pour les différents schémas de discrétisation

Schéma	Formule de $A( P )$
Différence centrale (C.D.S)	$1 - 0.5 P $
Upwind (U.D.S)	1
Hybride (H.D.S)	$\ 0, 1 - 0.5 P \ $
Lois de puissance (P.L.D.S)	$\ 0, (1 - 0.1 P )^5\ $
exponentiel (exacte)	$ P  / [\exp( P ) - 1]$

### 3.5.2.1 Schéma des différences centrées (C.D.S)

Ce schéma est utilisé dans le cas où la convection ne domine pas la diffusion. Il permet un compromis satisfaisant entre précision et économie. mais une fois la convection est dominante , ce schéma est sujet à une instabilité numérique.

### 3.5.2.2 Schéma Upwind (U.D.S)

Appliqué pour les écoulements à dominance convective , ce schéma est inconditionnellement stable . Malheureusement, il introduit une erreur de troncature substantielle, souvent nommée diffusion artificielle ou fausse diffusion.

Cette erreur est d'autant plus sérieuse que l'écoulement est incliné par rapport aux faces des volumes de contrôle et en même temps que le nombre de Peclet est supérieur à 2.

### 3.5.2.3 Schéma Exponentiel (exacte) (E.D.S)

Ce schéma est issu de la résolution analytique (exacte) d'un problème unidimensionnel permanent de convection-diffusion sans source.

Malgré cette caractéristique . L'utilisation de ce schéma est moins répandue dans la pratique ; car le calcul des exponentielles est coûteux en temps de machine .

### 3.5.2.4 Schéma hybride (H.D.S)

Comme son nom l'indique, ce schéma est la combinaison des schéma C.D.S et U.D.S rassemblant ainsi leurs caractéristiques. Donc dans ce cas si l'écoulement est à dominance convective (  $|Pe| \geq 2$  ), les termes convectives sont approximés par le schéma U.D.S, autrement ils sont approximés par le schéma C.D.S.

### 3.5.2.5 Schéma Power-Law (en loi de puissance) (P.L.D.S)

Dérivé du schéma exponentiel par interpolation polynomiale, celui-ci, contrairement au schéma H.D.S, approxime au mieux la solution exacte (exponentielle) en augmentant le nombre et l'étendue de l'intervalle d'approximation. C'est le schéma dérivé et recommandé par Patankar (1982).

Revenons maintenant à l'équation de transport à deux dimensions. Pour obtenir la forme discrétisée finale similaire à (3.25) on doit d'abord linéariser le terme source.

#### Linéarisation du terme source:

Quand la source est une fonction de la variable  $\phi$ , nous procédons à sa linéarisation en l'évaluant au point considéré du maillage sous la forme linéaire :

$$S_{\phi} = S_c + S_p \phi_p \quad (3.27)$$

où  $S_c$  est la partie du terme source indépendante explicitement de  $\phi_p$ , et  $S_p$  est le coefficient de  $\phi_p$ , il doit être positif ou nul et sera soustrait du coefficient  $a_p$  pour assurer la stabilité numérique.

écrivons l'équation (3.11) comme une équation de conservation de la masse ( $\phi = 1, S_\phi = 0, J_i = F_i$ )  $i=e,w,n,s$  les  $F_i$  sont les débits massiques à travers les faces du volume de contrôle

$$H \left( \frac{\rho - \rho^0}{\Delta t} \right) \Delta v + F_e a_e - F_w a_w + H F_n a_n - H F_s a_s = (xWp \frac{\partial \rho_p}{\partial x}) \Delta v \quad (3.28)$$

Une technique consiste à multiplier (3.28) par  $\phi_p$  et la retrancher terme à terme de (3.11) nous donne:

$$H \left( \frac{\phi_p - \phi_p^0}{\Delta t} \right) \rho_p^0 \Delta v + (J_e - F_e \phi_p) a_e - (J_w - F_w \phi_p) a_w + H (J_n - F_n \phi_p) a_n - H (J_s - F_s \phi_p) a_s = (HS'_p + xWp \rho_p \frac{\partial \phi_p}{\partial x}) \Delta v \quad (3.29)$$

Suivant le schéma P.L.D.S

$$\begin{aligned} Ha_n (J_n - F_n \phi_p) &= A_N (\phi_p - \phi_N) & A_N &= Ha_n [D_n A(|P_n|) + \|0, -F_n\|] \\ Ha_s (J_s - F_s \phi_p) &= A_S (\phi_p - \phi_S) & A_S &= Ha_s [D_s A(|P_s|) + \|0, F_s\|] \\ a_e (J_e - F_e \phi_p) &= A_E (\phi_p - \phi_E) & A_E &= a_e [D_e A(|P_e|) + \|0, -F_e\|] \\ a_w (J_w - F_w \phi_p) &= A_W (\phi_p - \phi_W) & A_W &= a_w [D_w A(|P_w|) + \|0, F_w\|] \end{aligned} \quad (3.30)$$

La notation  $\|A, B\|$  désigne la plus grande valeur de A et B c-à-d  $\max(A, B)$

$P$ : est le nombre de Peclet =  $F/D$

$F = \rho U$  suivant  $x$ ,  $\rho V$  suivant  $r$

$D = \frac{\Gamma \Delta r}{H \Delta x}$  suivant  $x$ ,  $\frac{\Gamma \Delta x}{\Delta r}$  suivant  $r$

$$A(|p|) = \|0, (1 - 0.5|P|)^5\|$$

L'équation (3.29) aura donc la forme :

$$A_p \phi_p = A_E \phi_E + A_W \phi_W + A_N \phi_N + A_S \phi_S + b \quad (3.31)$$

$$A_p^0 = H \frac{\Delta v}{\Delta t} \rho_p^0 \quad (3.32)$$

$$A_p = A_E + A_W + A_N + A_S - S_p \Delta v + A_p^0 \quad (3.33)$$

$$b = A_p^0 \phi_p^0 + S_c \Delta v \quad (3.34)$$

Pour résoudre l'équation (3.31) il faut qu'elle soit sous forme purement algébrique, Alors que les termes  $b$  et  $A_p$  contient encore des expressions différentielles du terme source qui doivent être évaluées .

### 3.5.3 Discrétisation des termes sources

Les expressions des termes sources pour toute grandeur  $\phi$  sont données par le tableau (5)

Tableau (5): Termes sources pour les différentes grandeurs physiques

$\phi$	$S_p$	$S_c$
1	0	0
U	0	$H(t)S^u - \frac{\partial P}{\partial x} + Wp\rho x \frac{\partial U}{\partial x}$
V	$-H(t) \frac{2\mu_{eff}}{r^2}$	$H(t)S^v - H(t) \frac{\partial P}{\partial r} + Wp\rho x \frac{\partial V}{\partial x}$
W	$-H(t) \left( \rho \frac{v}{r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r\mu_{eff}) \right)$	$Wp\rho x \frac{\partial w}{\partial x}$
h	0	$H(t)DP/Dt + Wp\rho x \frac{\partial}{\partial x} C_p T$
k	$-H(t)C_\mu K \rho^2 / \mu_t$	$H(t)G + Wp\rho x \frac{\partial}{\partial x} K$
$\varepsilon$	$H(t) \left[ -\frac{C_\mu C_2 \rho \varepsilon}{K} + C_3 \rho (\nabla \vec{U}) \right]$	$H(t)C_1 C_\mu G \rho K / \mu_t + Wp\rho x \frac{\partial \varepsilon}{\partial x}$

#### 3.5.3.1 Terme source pour la composante axiale de la vitesse U

Sur le volume de contrôle de la composante U (fig (15)) on discrétise le terme

$$S^u = S_c^u + S_p^u U_p$$

$$S_p^u = 0$$

$$S_c^u = -\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\mu_{eff}}{H(t)} \frac{\partial U}{\partial x} \right) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( \mu_{eff} r \frac{\partial V}{\partial x} \right) - \frac{2}{3} \frac{\partial}{\partial x} (\mu_{eff} Div \vec{V} + \rho k) + Wp\rho x \frac{\partial U}{\partial x} \quad (3.35)$$

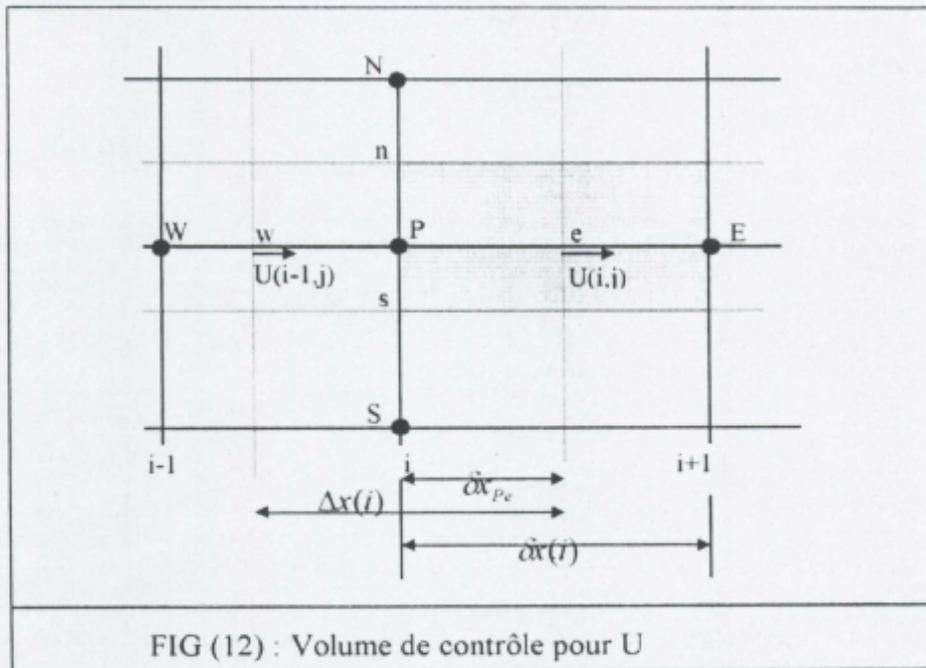


FIG (12) : Volume de contrôle pour U

$$\frac{\partial P}{\partial x} = \frac{P_p - P_w}{\Delta x_{pw}} = P(i, j) - P(i-1, j) / \Delta x_{pw}$$

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\mu_{eff}}{H(t)} \frac{\partial U}{\partial x} \right) = \left[ \frac{\mu_e}{H(t)} \frac{\partial U}{\partial x} \Big|_e - \frac{\mu_w}{H(t)} \frac{\partial U}{\partial x} \Big|_w \right] / \Delta x(i)$$

$$\frac{\partial U}{\partial x} \Big|_e = U(i+1, j) - U(i, j) / \Delta x(i)$$

$$\frac{\partial U}{\partial x} \Big|_w = U(i, j) - U(i-1, j) / \Delta x(i)$$

$$\frac{1}{r} (\mu_{eff} r \frac{\partial V}{\partial x}) = \frac{1}{R(j)} \left[ \mu_n r_n \frac{\partial V}{\partial x} \Big|_n - \mu_s r_s \frac{\partial V}{\partial x} \Big|_s \right] / \Delta r_{ns}$$

$$r_n \frac{\partial V}{\partial x} \Big|_n = r(j) (V(i+1, j) - V(i, j)) / \Delta x(i)$$

$$r_s \frac{\partial V}{\partial x} \Big|_s = r(j-1) (V(i+1, j-1) - V(i, j-1)) / \Delta x(i)$$

$$Div \vec{V} = \frac{1}{H(t)} \frac{\partial U}{\partial x} + \frac{1}{r} \frac{\partial (rV)}{\partial r}$$

$$\frac{\partial}{\partial x} (\mu_{eff} \rho k) = \mu_e \rho_e k_e - \mu_w \rho_w k_w$$

$$Wp\rho x \frac{\partial U}{\partial x} = Wp \left[ \rho(i, j) + FX(i) (\rho(i+1, j) - \rho(i, j)) \right] [U(i+1, j) - U(i-1, j)] / 2 \Delta x(i)$$

$FX(i)$  est le facteur d'interpolation linéaire suivant x

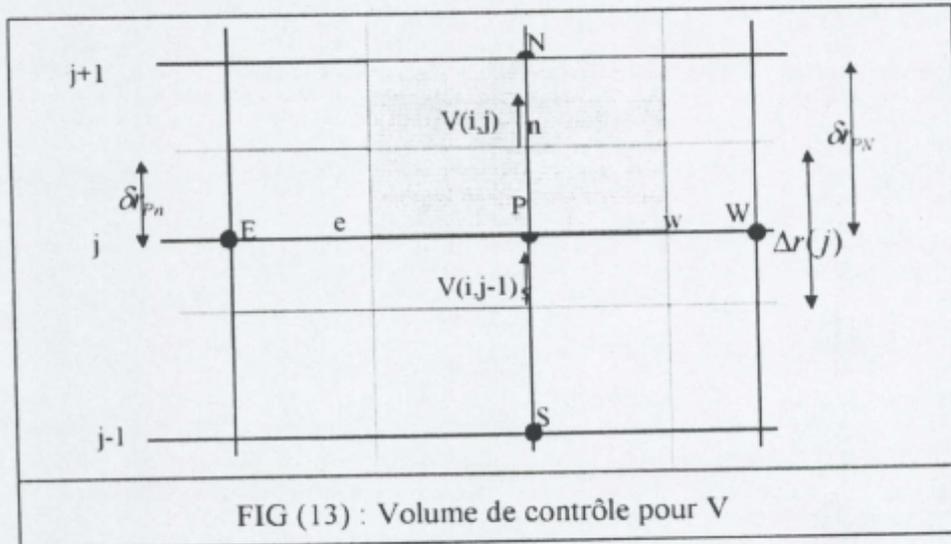
**3.5.3.2 Terme source pour la composante radiale de la vitesse V**

Sur le volume de contrôle de la composante U (fig (15)) on discrétise le terme

$$S^v = S_c^v + S_p^v V_p$$

$$S_p^v = -2\mu_{eff} H(t) V / r^2$$

$$S_c^v = -H(t) \frac{\partial P}{\partial r} + \frac{\rho W^2}{r} + \frac{\partial}{\partial x} \left( \mu_{eff} \frac{\partial U}{\partial r} \right) + \frac{H(t)}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( \mu_{eff} r \frac{\partial V}{\partial r} \right) - \frac{2H(t)}{3} \frac{\partial}{\partial r} \left( \mu_{eff} (Div \vec{V} + \rho k) \right) + W p \rho x \frac{\partial V}{\partial x} \quad (3.36)$$



$$\frac{\partial P}{\partial r} = P(i, j+1) - P(i, j) / \delta r_{PN}$$

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( \mu_{eff} \frac{\partial U}{\partial r} \right) = \mu_e \frac{\partial U}{\partial r} \Big|_e - \mu_w \frac{\partial U}{\partial r} \Big|_w / \Delta x(i)$$

$$\frac{\partial U}{\partial r} \Big|_e = U(i, j+1) - U(i, j) / \delta r(j)$$

$$\frac{\partial U}{\partial r} \Big|_w = U(i-1, j+1) - U(i-1, j) / \delta r(j)$$

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( \mu_{eff} r \frac{\partial V}{\partial r} \right) = \mu_n r_n \frac{\partial V}{\partial r} \Big|_n - \mu_s r_s \frac{\partial V}{\partial r} \Big|_s / \Delta r(j)$$

$$r_n \frac{\partial V}{\partial r} \Big|_n = R(j+1)(V(i, j+1) - V(i, j)) / \Delta r(j+1)$$

$$r_s \frac{\partial V}{\partial r} \Big|_s = R(j)(V(i, j) - V(i, -1)) / \Delta r(j)$$

le reste des termes est défini dans (§ 3.5.3.1)

### 3.5.3.3 Terme source pour la composante tangentielle de la vitesse W

La composante tangentielle de la vitesse W est considérée comme une variable scalaire à cause de l'axisymétrie de la cofiguration utilisée.

le terme source de l'équation de quntité de mouvement dans la direction azimutale est :

$$S_w = -H(t) \left( \rho \frac{v}{r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r \mu_{\theta\theta}) \right) w + W p \rho x \frac{\partial w}{\partial x} \quad (3.37)$$

$$\rho \frac{v}{r} = \rho(i, j) (V(i, j) + V(i, j)) / (r(j) + r(j+1))$$

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r \mu_{\theta\theta}) = \frac{1}{r(j)^2} [(\mu_{\theta\theta} r_n - \mu_{\theta\theta} r_s) / \Delta r(j)]$$

$$\rho x \frac{\partial w}{\partial x} = \rho(i, j) x(i) (W_e - W_w) / \Delta x(i)$$

### 3.5.3.4 Terme source pour la température T

Comme nous l'avons indiquer ( § 3.4) la température est un scalaire, elle s'évalue donc sur le noeud principal du volume de contrôle de la figure (10).

Le terme source de l'équation de l'énergie est :

$$H(t) S_T + W p x \rho \frac{\partial T}{\partial x} = \frac{1}{C_p} \left[ H(t) \frac{\partial P}{\partial t} - x W p \frac{\partial P}{\partial x} + U \frac{\partial P}{\partial x} + H(t) V \frac{\partial P}{\partial r} + W p x \rho \frac{\partial T}{\partial x} \right] \quad (3.38)$$

$$S_T = 0$$

$$\frac{\partial P}{\partial t} = P(i, j) - P^0(i, j) / \Delta t$$

$$U \frac{\partial P}{\partial x} = \frac{1}{2} (U(i, j) + U(i-1, j)) \frac{P_e - P_w}{\Delta x(i)}$$

$$V \frac{\partial P}{\partial r} = \frac{1}{2} (V(i, j) + V(i, j-1)) \frac{P_n - P_s}{\Delta r(j)}$$

$$\frac{\partial T}{\partial x} = \frac{T_e - T_w}{\Delta x(i)}$$

### 3.5.3.5 Terme source pour l'énergie cinétique de turbulence k

D'une manière similaire , on discrétise le terme source de k qui est définit par:

$$\begin{aligned} S_c^k &= H(t)G \\ S_p^k &= -H(t)C_\mu \rho^2 k / \mu_t \end{aligned} \quad (3.39)$$

$$G = \mu_t \left\{ \begin{aligned} &2 \left[ \frac{U_e - U_w}{\Delta x(i)} + \frac{V_n - V_s}{\Delta r(j)} + \left( \frac{V_p}{R(j)} \right)^2 \right] + \left( \frac{U_n - U_s}{\Delta r(j)} + \frac{V_e - V_w}{\Delta x(i)} \right)^2 \\ &+ \left( \frac{W_e - W_w}{\Delta x(i)} \right)^2 + \frac{1}{r(j)} \left( \frac{(W/r)_n - (W/r)_s}{\Delta r(j)} \right)^2 \end{aligned} \right\} - \frac{2}{3} (\mu_t (Div \vec{V}^7 + \rho k)) Div \vec{V}^7$$

$Div \vec{V}^7$  est définit dans (§3.5.3.1)

### 3.5.3.6 Terme source pour le taux de dissipation ε

Similairement au calcul de la source de k, on obtient celle de ε :

$$S_p^\varepsilon = -H(t)C_2 C_\mu \frac{\rho \varepsilon}{k} + H(t)C_3 \rho (\nabla U)$$

$$S_c^\varepsilon = H(t)C_1 C_\mu G \frac{\rho k}{\mu_t}$$

$$\nabla \vec{U} = (U(i,j) - U(i-1,j)) / \Delta x(i) + \frac{1}{R(j)} (r(j)V(i,j) - r(j-1)V(i,j-1)) / \Delta r(j)$$

G est définit dans (§3.5.3.5).

## CHAPITRE 4

### PROCEDURE DE RESOLUTION

#### 4.1 Introduction

La nature instationnaire du problème traité demande l'utilisation d'un schéma de résolution dépendant du temps. Il est nécessaire de mettre au point une solution itérative pour trois raisons:

- 1/ chaque équation contient au moins cinq inconnues, toutes à un instant donné  $t+dt$ .
- 2/ Les équations sont non-linéaires avec des coefficients dépendant des variables inconnues ( $u, v, \dots$ ).
- 3/ Les équations sont couplées.

Le présent chapitre concerne la manière dans laquelle ces équations couplées non-linéaires sont résolues pour n'importe quelle intervalle de temps et avec un algorithme pour déterminer la pression.

#### 4.2 L'Algorithme « SIMPLE » (Semi-Implicit Méthode for Pressure-Linked Equations)

En principe, les composantes du vecteurs vitesses peuvent être obtenue de la simple résolution des équations de mouvement correspondantes, pourvu que le champs de pression soit prescrit ou fournit. Toutefois, non seulement le champs de pression est inconnu, il n'y a pas d'équation explicite gouvernant la pression; en contre partie l'équation de continuité pose une condition de compatibilité entre  $U$  et  $V$  qui ne peut être satisfaite que si le champs de pression est correct. Donc une séquence de résolution doit être construite, qui permet une estimation du champs de pression, utilisé pour calculer les vitesses des équations de mouvement, ensuite corrigé de sorte que les équations de mouvement et de continuité soient satisfaites simultanément. Ceci est l'objectif de l'algorithme SIMPLE.

Les détails de la procédure sont comme suit:

Les équations de mouvement discrétisées s'écrivent:

$$\begin{aligned}
 a_e U_e &= \sum a_{nb} U_{nb} + b + (P_p - P_E) \Delta r \\
 a_w U_w &= \sum a_{nb} U_{nb} + b + (P_W - P_p) \Delta r \\
 a_n V_n &= \sum a_{nb} V_{nb} + b + (P_p - P_N) H \Delta x \\
 a_s V_s &= \sum a_{nb} V_{nb} + b + (P_S - P_p) H \Delta x
 \end{aligned}
 \tag{4.1}$$

Il consiste à estimer des valeurs de pression  $P^*$  pour obtenir des valeurs estimées des vitesses  $U^*$  et  $V^*$  partir des équations (4.1)

$$\begin{aligned}
 a_e U^*_{e_e} &= \sum a_{nb} U^*_{nb} + b + (P^*_{p_e} - P^*_{E_e}) \Delta r \\
 a_n V^*_{n_n} &= \sum a_{nb} V^*_{nb} + b + (P^*_{p_n} - P^*_{N_n}) H \Delta x \\
 a_w U^*_{w_w} &= \sum a_{nb} U^*_{nb} + b + (P^*_{w_w} - P^*_{P_p}) \Delta r \\
 a_s V^*_{s_s} &= \sum a_{nb} V^*_{nb} + b + (P^*_{s_s} - P^*_{P_p}) H \Delta x
 \end{aligned} \tag{4.2}$$

la valeur corrigée de la pression est donnée par  $P = P^* + P'$  (4.3)

$P'$  : est la correction de pression

de même pour les composantes du vecteur vitesse  $U = U^* + U'$ ,  $V = V^* + V'$  (4.4)

la soustraction (4.2)-(4.1) nous donne

$$\begin{aligned}
 a_e U^p_{e_e} &= \sum a_{nb} U^p_{nb} + (P^p_{p_e} - P^p_{E_e}) \Delta r \\
 a_n V^p_{n_n} &= \sum a_{nb} V^p_{nb} + (P^p_{p_n} - P^p_{N_n}) H \Delta x \\
 a_w U^p_{w_w} &= \sum a_{nb} U^p_{nb} + (P^p_{w_w} - P^p_{P_p}) \Delta r \\
 a_s V^p_{s_s} &= \sum a_{nb} V^p_{nb} + (P^p_{s_s} - P^p_{P_p}) H \Delta x
 \end{aligned} \tag{4.5}$$

par des raisons numériques on néglige le terme  $\sum a_{nb} U^p_{nb}$  ( $nb$ : indique voisin)

$$\begin{aligned}
 a_e U^p_{e_e} &= (P^p_{p_e} - P^p_{E_e}) \Delta r \\
 a_n V^p_{n_n} &= (P^p_{p_n} - P^p_{N_n}) H \Delta x \\
 a_w U^p_{w_w} &= (P^p_{w_w} - P^p_{P_p}) \Delta r \\
 a_s V^p_{s_s} &= (P^p_{s_s} - P^p_{P_p}) H \Delta x
 \end{aligned} \tag{4.6}$$

$$\text{Si } d_{e,w} = \frac{\Delta r}{a_{e,w}} \quad \text{et} \quad d_{n,s} = H \frac{\Delta x}{a_{n,s}} \tag{4.7}$$

Les équations de correction des vitesses s'écrivent donc :

$$\begin{aligned}
 U^p_{e_e} &= d_e (P^p_{p_e} - P^p_{E_e}) \\
 V^p_{n_n} &= d_n (P^p_{p_n} - P^p_{N_n}) \\
 U^p_{w_w} &= d_w (P^p_{w_w} - P^p_{P_p}) \\
 V^p_{s_s} &= d_s (P^p_{s_s} - P^p_{P_p})
 \end{aligned} \tag{4.8}$$

elles peuvent s'écrire sous la forme :

$$\begin{aligned}
 U_e &= U^*_{e_e} + d_e (P^p_{p_e} - P^p_{E_e}) \\
 V_n &= V^*_{n_n} + d_n (P^p_{p_n} - P^p_{N_n}) \\
 U_w &= U^*_{w_w} + d_w (P^p_{w_w} - P^p_{P_p}) \\
 V_s &= V^*_{s_s} + d_s (P^p_{s_s} - P^p_{P_p})
 \end{aligned} \tag{4.9}$$

L'équation de continuité discrétisée s'écrit sous la forme :

$$H \left( \frac{\rho - \rho^0}{\Delta t} \right) \Delta v + F_e a_e - F_w a_w + H F_n a_n - H F_s a_s = (x W p \frac{\partial p_p}{\partial x}) \Delta v \tag{4.10}$$

par l'introduction des expressions (4.3), (4.4) et (4.8) dans l'équation de continuité (4.10), l'équation de correction de pression est donc l'équation de continuité discretisée pour  $P'$

Il faut signaler que la densité  $\rho$  est en relation avec la pression  $P$  par l'équation d'états du fluide supposé parfait et compressible. Donc le terme  $\rho U$  sera approximé par :

$(\rho^* + \rho^*)(U + U^*) \approx \rho^* U^* + \rho^* U^* + \rho^* U$ , il est de même pour  $\rho V$ .

$$\begin{aligned} A_p P_p' &= A_E P_E' + A_W P_W' + A_N P_N' + A_S P_S' + S_c^P \\ A_E &= a_e [\rho_e^* d_e + fx k_e \max(-U_e^*, 0)] \\ A_W &= a_w [\rho_w^* d_w + (1 - fx) k_w \max(U_w^*, 0)] \\ A_N &= a_n [\rho_n^* d_n + fy k_n \max(-V_n^*, 0)] \\ A_S &= a_s [\rho_s^* d_s + (1 - fy) k_s \max(V_s^*, 0)] \end{aligned} \quad (4.11)$$

$$A_p = \Sigma A_i + k_p \frac{\Delta v H(t)}{\Delta t} + \left( a_e k_e \max(U_e^*, 0) + a_w k_w \max(U_w^*, 0) \right. \\ \left. + a_n H k_n \max(V_n^*, 0) + a_s H k_s \max(V_s^*, 0) \right)$$

$$S_c^P = H(t) \frac{\Delta v}{\Delta t} (\rho^* - \rho^0) + Ha_n \rho_n^* Y_n^* - Ha_s \rho_s^* Y_s^* + a_e \rho_e U_e^* - a_w \rho_w U_w^* - \Delta v (x W p \frac{\rho_e^* - \rho_w^*}{\Delta x})$$

$$i = E, W, N, S$$

$$k = 1 / rT$$

$fx$  et  $fy$  sont les facteurs d'interpolation linéaire suivant  $x$  et  $r$

La procédure de résolution de l'équation (4.11), ensemble avec les équations de mouvement déjà développées, constitue l'algorithme SIMPLE. Les équations ci-dessus, si elles sont résolues pour tous les volumes de contrôle, donnent un champ de correction de pression. Par la suite on aboutit aux corrections de la vitesse qui satisferont le principe de la continuité.

Cependant, le champ de pression corrigé  $P = P' + P^*$ , quand il est utilisé pour résoudre l'équation de mouvement, engendre des résidus massiques, cela signifie qu'une résolution répétée des équations de mouvement et de correction de pression est nécessaire jusqu'à ce que les résidus tendent vers zéro.

### 4.3 Résolution du système d'équation

Il y a plusieurs méthodes de résolution des systèmes d'équations algébriques essentiellement les méthodes directes et les méthodes itératives.

A partir de la discrétisation de l'équation générale de transport nous avons obtenu un système d'équations algébrique, avec des coefficients qui dépendent de la variable  $\phi$ . Donc sa résolution demande une méthode numérique itérative, mais vu que cette résolution reste difficile à réaliser, on utilise une méthode semi-itérative (balayage ligne par ligne).

**4.3.1 Développement de la méthode**

On suppose que les valeurs de  $\phi$  pour des lignes  $(i+1)$  et  $(i-1)$  sont connues, donc nous sommes en présence de trois inconnues seulement dans chaque équation.

$$(A_{i,j} + Sp_{i,j})\phi_{i,j} - A_{i,j-1}\phi_{i,j-1} - A_{i,j+1}\phi_{i,j+1} = A_{i+1,j}\phi_{i+1,j} + A_{i-1,j}\phi_{i-1,j} + S_c$$

$$1 \leq i \leq n_i \quad 1 \leq j \leq n_j \tag{4.12}$$

On pose :

$$A_{i,j-1} = b(j)$$

$$A_{i,j+1} = a(j)$$

$$A_{i+1,j}\phi_{i+1,j} + A_{i-1,j}\phi_{i-1,j} + S_c = c(j)$$

$$A_{i,j} + Sp_{i,j} = d(j) \tag{4.13}$$

L'équation (4.12) devient :

$$-b(j)\phi_{j-1} + d(j)\phi_j - a(j)\phi_{j+1} = c(j) \tag{5.14}$$

Ce système peut être représenté sous forme matricielle:

$$\{A\}\phi = c$$

$$\{A\} = \begin{bmatrix} d(2) & -a(2) & 0 & . & . & . & 0 \\ -b(3) & d(3) & -a(3) & 0 & . & . & . \\ 0 & -b(4) & d(4) & -a(4) & 0 & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . \\ 0 & . & . & . & . & 0 & -b(n) & d(n) \end{bmatrix} \tag{4.15}$$

La matrice  $\{A\}$  est une matrice tridiagonale, l'algorithme de THOMAS (TDMA:Tri-Digonal Matrix Algorithm) se résume à sa réduction en une matrice bidiagonale dont les termes de la diagonale principale sont égaux à l'unité.

$$\begin{bmatrix} 1 & \gamma_2 & 0 & . & . & . & 0 \\ 0 & 1 & \gamma_3 & 0 & . & . & . \\ . & 0 & 1 & \gamma_4 & 0 & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & 1 & 0 \\ 0 & . & . & . & . & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \phi_2 \\ \phi_3 \\ \phi_4 \\ . \\ . \\ . \\ \phi_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \beta_2 \\ \beta_3 \\ \beta_4 \\ . \\ . \\ . \\ \beta_n \end{bmatrix} \tag{4.16}$$

Avec :

$$\begin{aligned}
 \gamma_2 &= \frac{a(2)}{b(2)} \\
 \gamma_j &= \frac{a(j)}{b(j) - c(j)\gamma_{j-1}} \quad j = 3, n_j, 1 \\
 \beta_2 &= \frac{c(2) + b(2)\phi_1}{d(2)} \\
 \beta_j &= \frac{c(j) - b(j)\beta_{j-1}}{d(j) - b(j)\gamma_{j-1}} \quad j = 3, n_j
 \end{aligned} \tag{4.17}$$

La résolution est comme suit:

$\phi_1$  est donnée au condition aux limites,

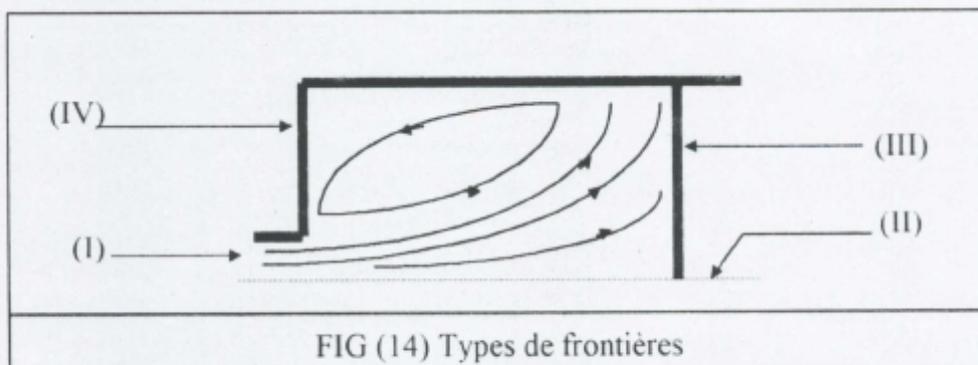
$$\phi_n = \beta_n$$

$$\phi_j = \beta_j - \gamma_j \phi_{j-1} \quad j = n-1, 2, \dots, 1$$

Après la résolution de la colonne  $i$ , on procède à la résolution des colonnes  $i+1$ ,  $i+2$ , jusqu'à la frontière est du domaine. Une fois tout le domaine balayé cette opération est répétée jusqu'à ce que le champs des  $\phi$  ne change plus au cours du balayage.

#### 4.4 Conditions aux limites

Une essentielle exigence de la procédure de résolution d'un écoulement elliptique est que les conditions aux limites doivent être spécifiées le long du domaine d'écoulement pour chaque propriété physique gouvernée par une équation différentielle. Notre domaine d'étude est limité par quatre type de frontières :



- (I) : Entrée du fluide
- (II) : Axe de symétrie
- (III) : Sortie du fluide
- (IV) : Parois solides

Pour un écoulement turbulent modélisé par  $k-\varepsilon$ , la paroi solide demande un traitement spécial.

#### 4.4.1 Traitement près de la paroi solide

Deux principales raisons font que près de la paroi solide le traitement des deux équations de transport de  $k$  et  $\varepsilon$  soit spécial vis-à-vis de toutes les régions du champ d'écoulement.

Premièrement, le nombre de Reynolds est petit, donnant l'importance à la viscosité du fluide dans l'établissement de la structure de l'écoulement. Deuxièmement, le transport (convectif-diffusif) devient négligeable, de telle sorte que la structure de l'écoulement est dominée par les caractéristiques locales. Relativement au transport de  $k$ , un équilibre local production-dissipation s'établit.

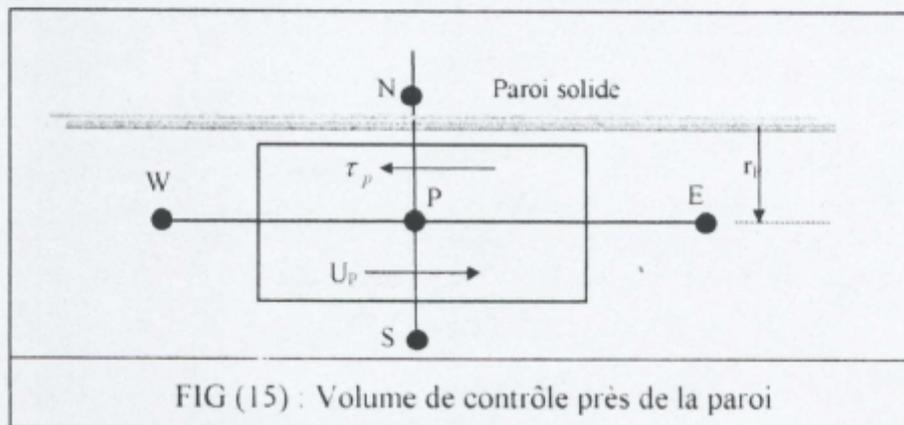
Deux procédures de résolution peuvent alors être employées pour le traitement près de la paroi. Celle qui utilise un maillage dense dans la région et qui est par suite consommatrice en mémoire de stockage. Et celle adoptée dans le présent travail, qui utilise des formules semi-empiriques dites « lois de paroi » faisant « pont » sur la sous-couche laminaire entre la couche turbulente et la paroi.

Cette « lois de parois » est principalement basée sur l'hypothèse de la constance de la contrainte de cisaillement, dans la région proche de la paroi, conduisant à l'établissement de la fameuse « lois logarithmique de la paroi »:

$$\frac{U}{U_\tau} = \frac{1}{\kappa} \ln(E y^*) \quad (4.18)$$

où  $y^* = \frac{\rho U_\tau r_p}{\mu}$  : nombre de Reynolds,  $E = 9.0$  : pour des parois lisses

$U_\tau = \left(\frac{\tau_w}{\rho}\right)^{1/2}$  : vitesse de friction,  $\kappa = 0.4$ : constante de Von Karaman



L'hypothèse de l'équilibre local, conduit à une simplification de l'équation de transport de  $k$ , qui prendra une forme d'une égalité entre le taux de production et celui de dissipation.

$$\tau \frac{\partial U}{\partial r} = \rho \varepsilon \quad (4.19)$$

qui conduit à :

$$\tau^2 = \rho^2 C_\mu k^2 \quad \text{ou bien} \quad \tau = \rho C_\mu^{1/2} k \quad (4.20)$$

La supposition de la constance de la contrainte de cisaillement permet d'écrire:

$$\tau_w = \rho C_\mu^{1/2} k \quad (4.21)$$

En combinant cette équation avec la loi logarithmique, on aura :

$$\tau_w = \frac{U_p}{r_p} \frac{\kappa \mu y^+}{\ln(E y^+)} \quad (4.22)$$

L'évaluation de l'énergie cinétique de turbulence  $k$ , près de la paroi, est obtenue par modification du terme source pour prendre compte de la contrainte de cisaillement; le transport convectif-diffusif étant négligeable devant le terme source.

$$G = \iiint_V \mu_t \left( \frac{\partial U}{\partial r} + \frac{\partial V}{\partial x} \right)^2 dv = \tau_w \frac{U_p}{r_p} \Delta v \quad (4.23)$$

où  $\Delta v$  est le volume du « volume de contrôle » relatif au noeud près de la paroi.

De la même manière,  $\varepsilon$  est intégrée sur le volume de contrôle de telle sorte que:

$$\iiint_V \varepsilon dv = C_\mu^{3/4} k_p^{3/2} U^+ \frac{\Delta v}{r_p} \quad (4.24)$$

$$\text{où} \quad U^+ = \begin{cases} y^+ & \text{si } y^+ \leq 11.63 \\ \ln(E y^+) / \kappa & \text{si } y^+ > 11.63 \end{cases} \quad [29]$$

Le taux de dissipation est obtenu en utilisant la relation qui relie ce dernier à l'échelle de longueur par:

$$\varepsilon = C_\mu^{3/4} k^{3/2} / \kappa l \quad (4.25)$$

où  $l$  est l'échelle intégrale de Prandtl.

#### 4.4.2 Traitement à l'entrée

A travers le plan d'entrée, la distribution de toutes les variables, doit être définie, soit à partir des données expérimentales disponibles ou par la connaissance préalable des paramètres

Dans la présente étude une vitesse d'aspiration est modélisée à chaque pas de temps par une différence de pression entre la pression moyenne à l'intérieur du cylindre et celle de la tubulure d'admission, en moyennant l'expression relative à l'écoulement isentropique suivante:

$$U_{asp} = \sqrt{2CpT_0 \left( 1 - \left( \frac{P_{moy}}{P_0} \right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} \right)} \quad (4.26)$$

$P_0, T_0$  : la pression et la température dans la tubulure d'admission

$P_{moy}$  : la pression moyenne instantanée à l'intérieur du cylindre, elle est donnée par :

$$P_{moy} = \frac{\sum P_i \Delta v_i}{V_k} \quad (4.27)$$

$P_i$  : la pression au point  $i$

$\Delta v_i$  : le volume de contrôle associé au point  $i$

$V_k$  : le volume total à l'itération  $k$

#### 4.4.3 Traitement à la sortie

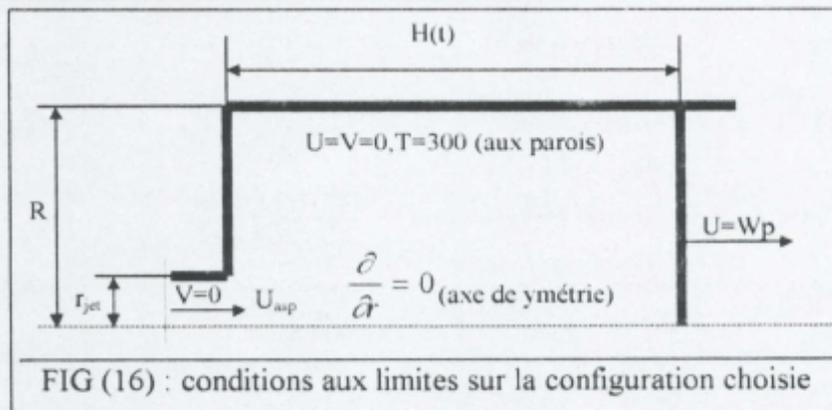
Dans la présente étude la frontière (III) de la figure (17) ne représente pas une sortie du fluide, mais une paroi mobile qui se déplace à la vitesse  $Wp$  (la vitesse de translation du piston)

Près de cette paroi le traitement est similaire à celui présenté dans (§ 4.4.1)

#### 4.4.4 Traitement pour l'axe de symétrie

Le long de cette limite, les gradients de toutes les grandeurs transportables sont nulles, une condition qu'on peut facilement incorporer en mettant le coefficient correspondant égale à zéro ( $A_s = 0$ ).

#### 4.4.5 Résumé des conditions initiales et aux limites



**Conditions Initiales (à  $t = 0$ ):**

T	P	U	V	k	$\rho$	$\varepsilon$
300° k	1 bar	0	0	$0.5CW_p^2(90^\circ v)$	P/rT	$0.41 k^{1.5} / L$

**Conditions aux limites à l'entrée:**

$U = U_{asp}, w_{in}(r) = 2\pi N\omega r$	V = 0	$k_a = 0.91U_\tau^2 / (r^* + 0.14)$	$\varepsilon = \varepsilon_a = 0.41k_a^{1.5} / l$
---	-------	-------------------------------------	---

**Conditions aux limites aux parois solides :**

U=W=V=0	T=300	k=0	$\varepsilon = 0$
---------	-------	-----	-------------------

**Conditions aux limites sur l'axe de symétrie:**

$\frac{\partial U}{\partial n}$	V=W=0	$\frac{\partial T}{\partial n} = 0$	$\frac{\partial k}{\partial n} = 0$	$\frac{\partial \varepsilon}{\partial n} = 0$
---------------------------------	-------	-------------------------------------	-------------------------------------	---

$$r^* = r / r_{jet}$$

$$l' \text{ échelle intégrale de Prandtl } l = r_{jet}(1 - 1.5r^* + 0.6r^{*2} - 0.15r^{*3}) \quad (4.28)$$

$$U_\tau : \text{ vitesse de frottement } = \frac{U_{asp}}{0.75 + 2.19 \log(\text{Re})} \quad (4.29)$$

Wp(t): vitesse instantanée du piston .

L: longueur caractéristique prise égale à la taille moyenne des mailles

Wp(90°v): vitesse de déplacement du piston à 90 degrés vilebrequin .

$\omega$  : est le rapport du swirl.

N: est la vitesse de rotation du moteur, en tr/mn .

**4.5 Séquence des étapes de la résolution**

- 1- Initialisation de toutes les variables.
- 2- Donner le champs de pression P\*.
- 3- Calcul des coefficients de transport effectifs.
- 4- Assembler les coefficients pour l'équation de mouvement.
- 5- Imposer les conditions aux limites par la modification des coefficients et les termes sources.

- 6- Résoudre les équations de mouvements pour obtenir  $U^*$  et  $V^*$ .
- 7- Résoudre l'équation de  $P'$ .
- 8- Calculer  $P$  de la relation  $P=P'+P^*$ .
- 9- Calculer  $U, V$  en utilisant les équations de correction des vitesses (4.8).
- 10- Calculer la densité de l'équation d'état du fluide supposé parfait.

SIMPLE

- 11- Résoudre les autres équations pour ( $\phi = K, \varepsilon, T$ ) en utilisant la pression et les vitesses corrigées.
- 12- Prendre la pression corrigée comme une valeur estimée  $P^*$  et retourner à l'étape 6.
- 13- Répéter la procédure jusqu'à la convergence.

#### 4.6 Critère de convergence et facteur de sous relaxation

Le critère de convergence de la résolution itérative est basé sur les résidus absolus normalisés des équations à résoudre. Ils sont définis comme suit:

$$RESOR\phi = \sum \left| \sum A_i \phi_i + S_c - A_p \phi_p \right| / F_{in,\phi} \quad (\phi = U, V, W, T, k, \varepsilon) \quad (4.30)$$

$RESOR\phi$  est la somme des résidus normalisés en valeurs absolue de l'équation pour  $\phi$  associée à tous les volumes de contrôle du domaine.

$$RESORM = \sum |m_v| / m_{in} \quad (4.31)$$

$RESORM$  est la somme des résidus de masse normalisés en valeur absolue.

pour les équations de mouvement,  $F_{in}$  et  $m_{in}$  sont respectivement le flux et le débit massique total à l'entrée. La solution convergera quand ces résidus se réduisent à une valeur inférieure à celle prescrite  $SORMAX$ .

La sous relaxation est une bonne méthode pour ralentir ou minimiser les oscillations durant la résolution, d'une itération à une autre. Elle peut être exprimée par :

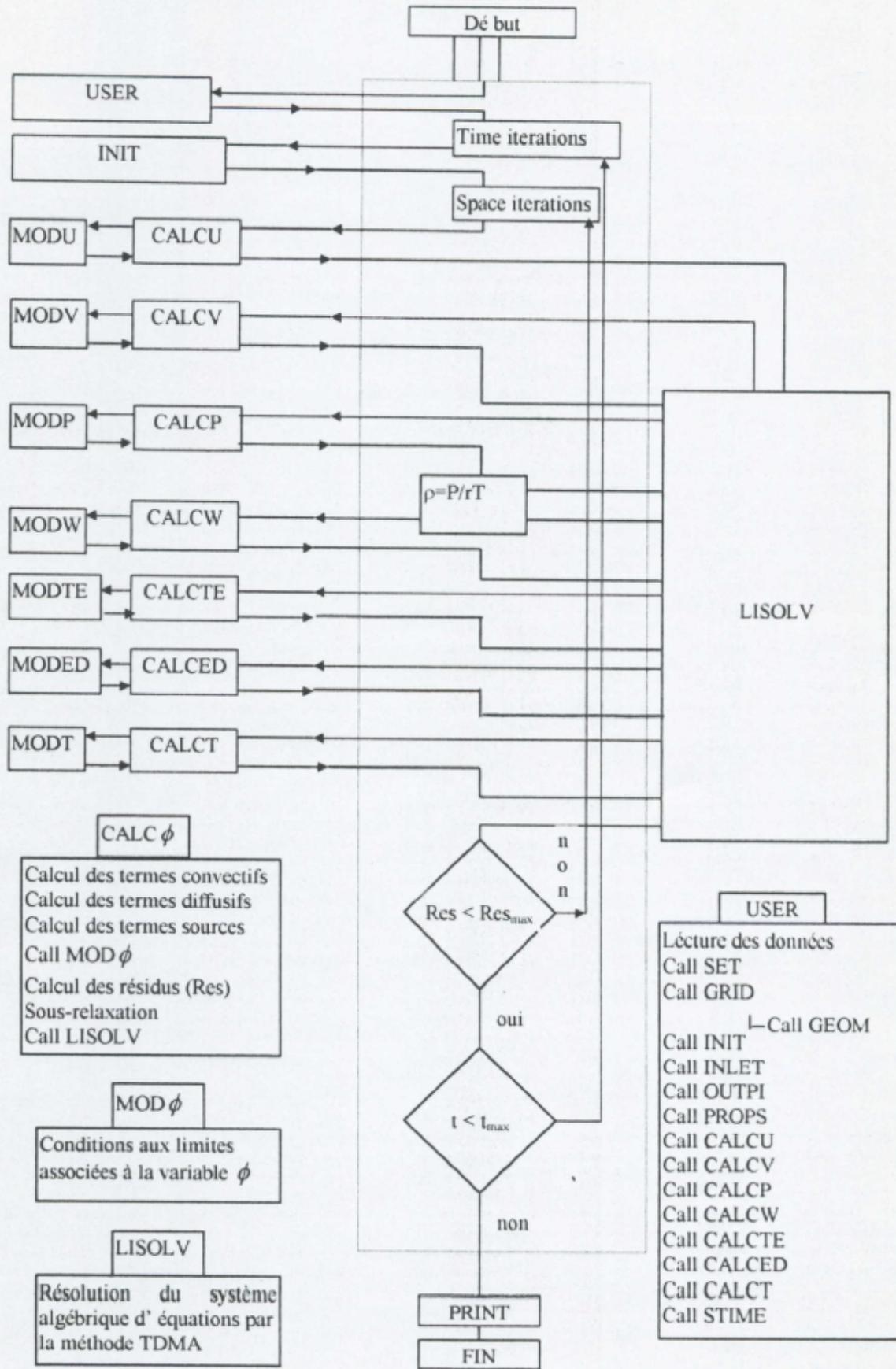
$$\phi_p = \phi_p^0 + \alpha_\phi (\phi_p^1 - \phi_p^0) \quad (4.32)$$

où  $\phi_p^0$  est la valeur obtenue de l'itération précédente.

$\phi_p^1$  est la valeur obtenue de la résolution en cours.

$\alpha_\phi$  est le facteur de sous relaxation compris entre 0 et 1.

4.7 Architecture du programme de calcul



## CHAPITRE 5

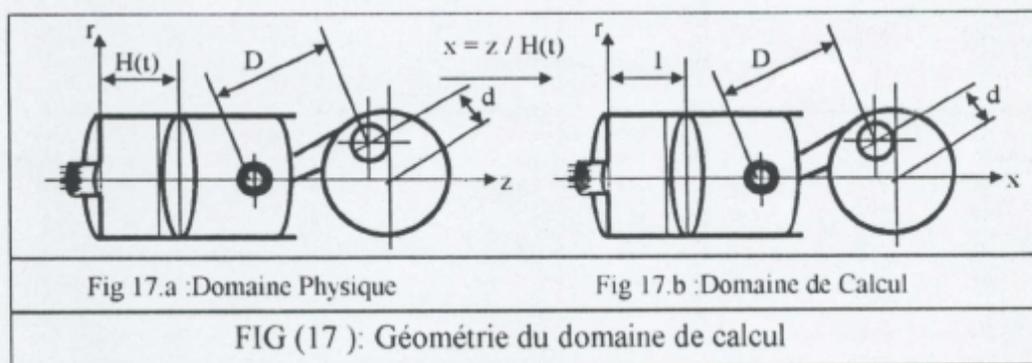
### RESULTATS ET DISCUSSIONS

#### 5.1 Introduction:

Un code de calcul utilisant la méthode des volumes finis a été adapté pour résoudre un problème d'écoulement elliptique, turbulent, compressible, et instationnaire d'un fluide inerte (air) aspiré et comprimé par un piston à travers une ouverture de **2 cm** de rayon localisée sur l'axe d'un cylindre de **6 cm** de rayon, le mouvement du piston est géré par la loi cinématique du système bielle-manivelle. La bielle choisie est de longueur **35,36 cm**, tandis que la manivelle de rayon de **4,7 cm** est en régime de rotation de **1000 tr/mn**.

Durant la phase de compression, la fermeture de l'orifice d'admission est modélisée par la considération de la vitesse d'entrée comme étant nulle, et les autres paramètres de l'écoulement sont considérés comme sur une paroi solide.

Les calculs numériques ont été effectués sur un **PC 586 DX4-100 MZ** en langage **FORTTRAN** avec un maillage de  $(z=40) \times (r=30)$ , généré à chaque pas du temps sur un domaine de calcul  $(o, r, x)$  de longueur unité et de largeur  $R=6 \text{ cm}$ , le retour au domaine physique à frontière mobile après chaque convergence se fait par le changement  $z = x \cdot H(t)$  voir FIG (17).



Pour pouvoir capter les variations rapides dans les régions de faibles nombres de Reynolds, le maillage est raffiné près des parois solides et dans la région de cisaillement pour la phase d'admission voir fig ( 18 ). Pour pouvoir générer ce maillage dans des conditions de stabilité numériques, la première valeur de  $H(t)$  (à  $t = 0$ ) est choisie égale à  $H_0 = 0.039 \text{ m}$ .

L'incrément temps  $\Delta t$  est utilisé en terme d'angle de rotation en degré de vilebrequin  $\theta = \omega t = \omega \cdot \Delta t \cdot k$ ,  $k$  est le nombre d'itération, la vitesse de rotation angulaire  $\omega = 2\pi N/60$ ,  $N$  est le nombre de tour par minute.

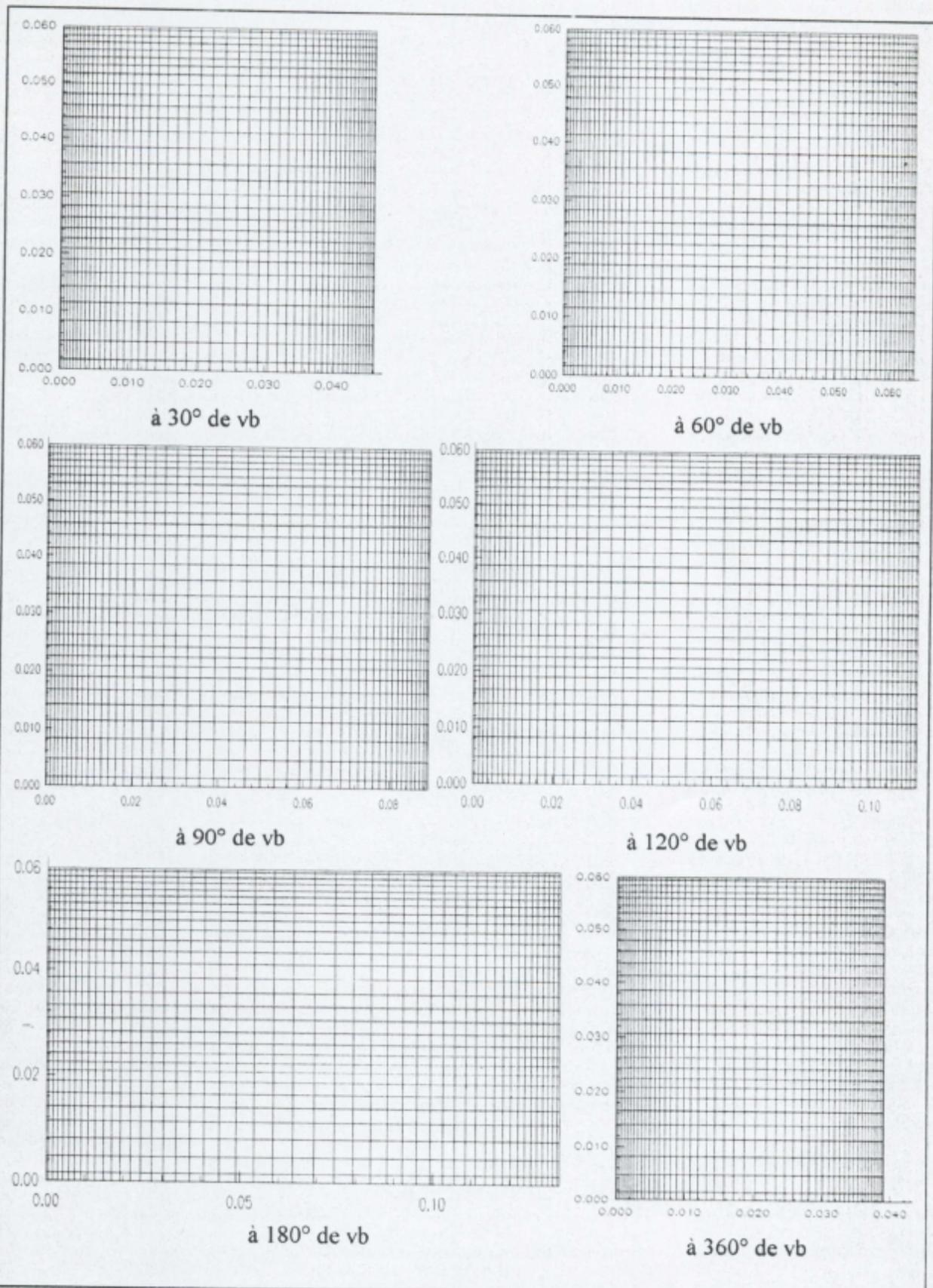


FIG ( 18 ) : Maillage utilisé pour le calcul (40x30)

## 5.2 Champs des vitesses

### 5.2.1 Visualisation

Sur les figures (19) et (20), les visualisations des champs de vitesse sont prises à chaque  $30^\circ$  de vilebrequin.

Dans la phases d'admission, à  $30^\circ$  fig (19 a) après le point mort haut (début d'aspiration), l'air considéré au repos commence à subir un entraînement par le mouvement du piston, cette masse d'air apparaît à  $60^\circ$  fig (19 b) sous forme d'un tourbillon ayant un sens de rotation suivant le mouvement de la masse d'air aspirée, le centre de ce tourbillon suit la tête du piston dans son mouvement, il s'agrandit jusqu'au point mort bas ( $180^\circ$ ) là où il remplit la chambre cylindrique fig (19 f).

Au début de la phase de compression fig (20 a) , le petit tourbillon embrassant la tête du piston près de la paroi supérieur a disparu par le retour du piston , seul le grand tourbillon a subit la compression jusqu'au point mort haut ( $360^\circ$ ) fig (20 f).

Ce comportement aérodynamique est plus illustré en traçant les lignes de courant fig (21) et fig (22).

Durant la phase d'aspiration, deux régions d'écoulement sont séparées, celle qui représente l'air existant à l'intérieur du cylindre qui est considéré initialement au repos, et celle qui représente la quantité d'air aspiré à travers l'orifice d'admission, le fluide dans la première région est entraîné par celui aspiré , ce dernier est présenté par des lignes de courant parallèles au niveau de l'axe de symétrie là où la vitesse axiale est maximale. La zone séparant les deux régions est une zone de cisaillement dont le maillage est assez fin ce qui laisse la ligne de séparation difficile à distinguer.

Vers la fin d'admission l'orifice d'aspiration vient de se fermer , la compression du fluide fait déplacer le centre du tourbillon vers la paroi supérieur du cylindre.

Une étude tirée de la référence [26] faite par A. D. Gosman a confirmé ce comportement aérodynamique de l'air comprimé dans une configuration axisymétrique voir fig (20 g)

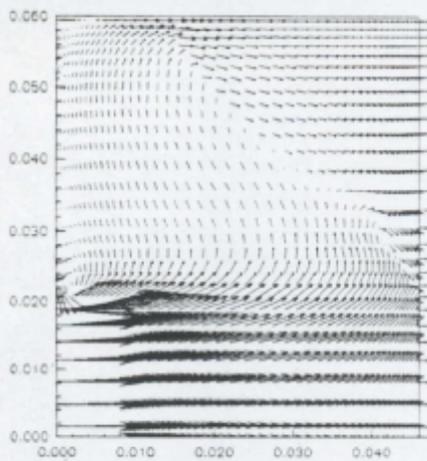


FIG (19 a): Champ des vitesses à 30° de Vilebrequin

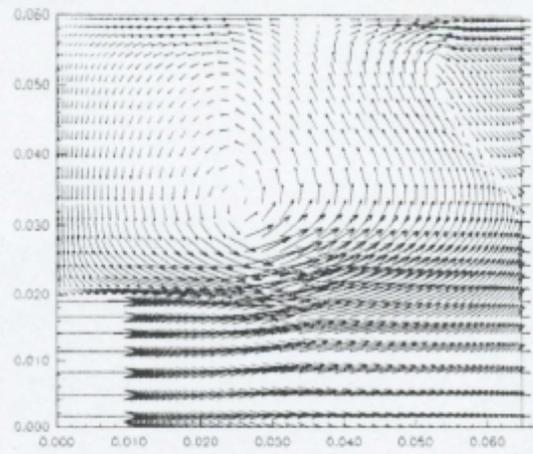
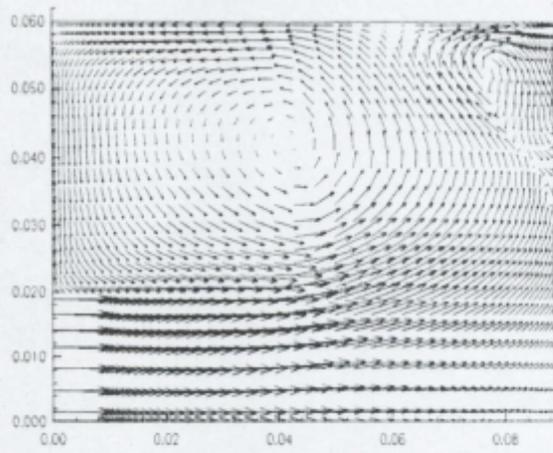
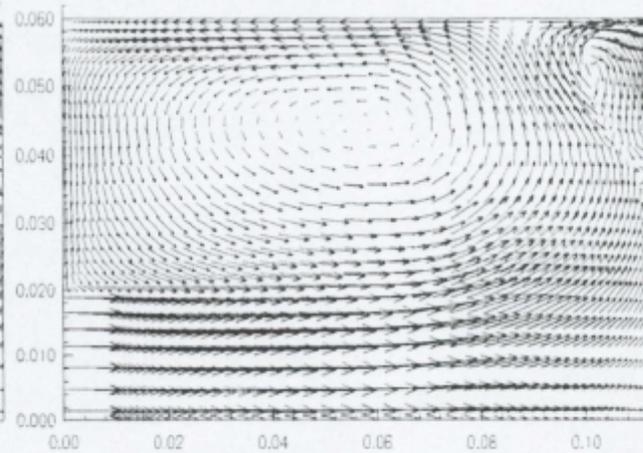


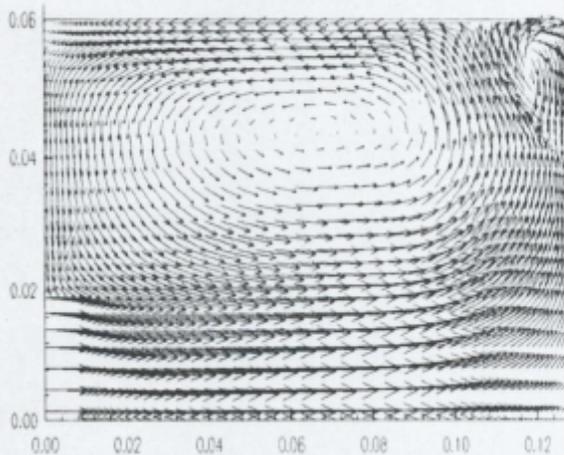
FIG (19 b): Champ des vitesses à 60° de Vilebrequin



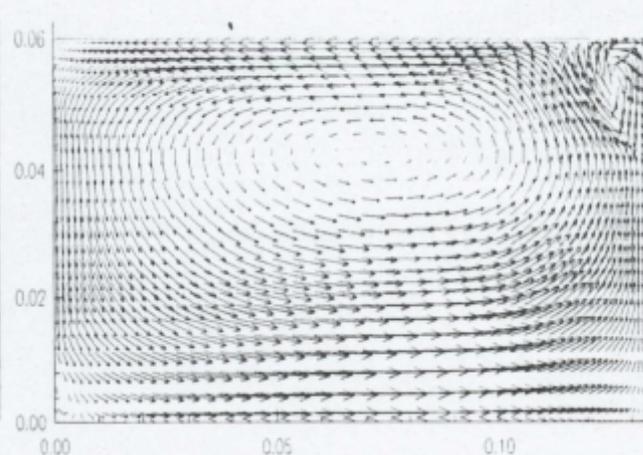
FIG(19 c) Champ des vitesses à 90° de Vilebrequin



FIG(19 d): Champ des vitesses à 120° de Vilebrequin

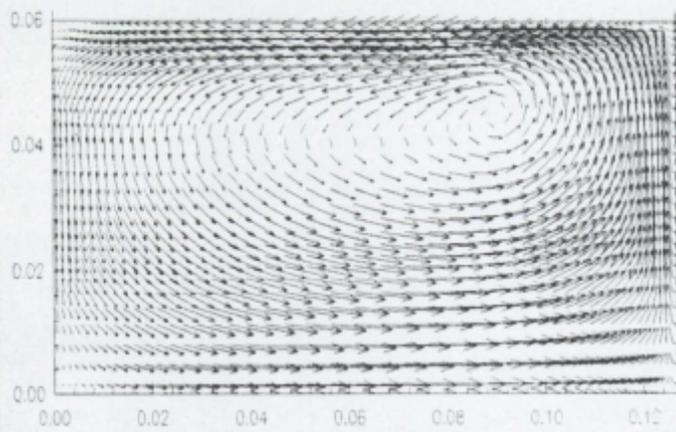


FIG(19 e): Champ des vitesses à 150° de Vilebrequin

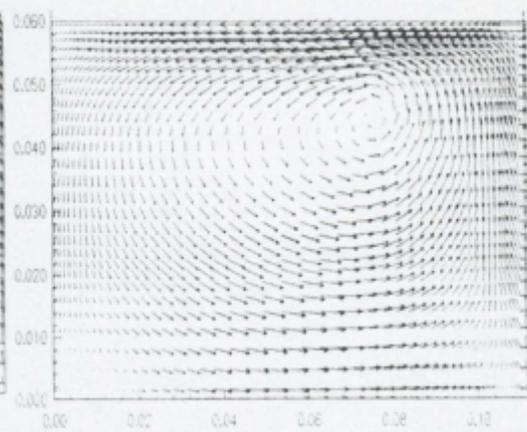


FIG(19 f): Champ des vitesses à 180° de Vilebrequin

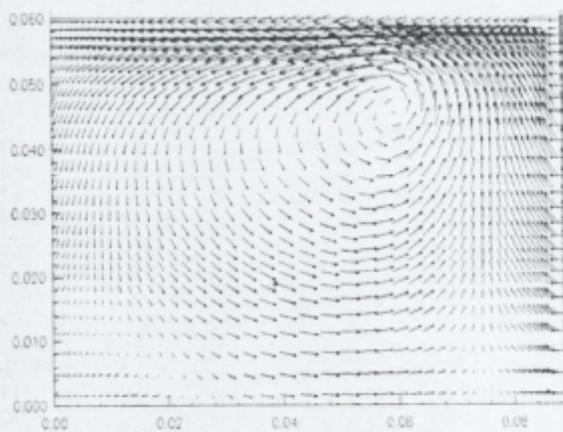
FIG (19): Champs des vitesses durant la phases d'admission



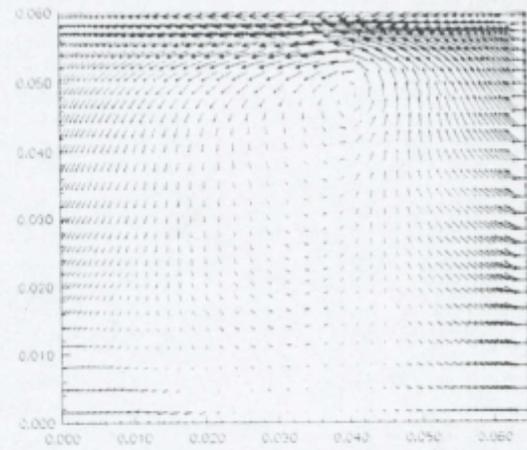
FIG(20 a): Champ des vitesses à 210° de vilebrequin



FIG(20 b): Champ des vitesses à 240° de vilebrequin



FIG(20 c): Champ des vitesses à 270° de vilebrequin



FIG(20 d): Champ des vitesses à 300° de vilebrequin

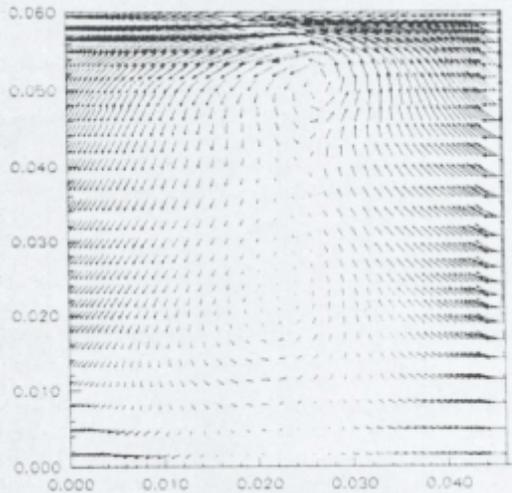


FIG.(20 e): Champ des vitesses à 330° de vilebrequin

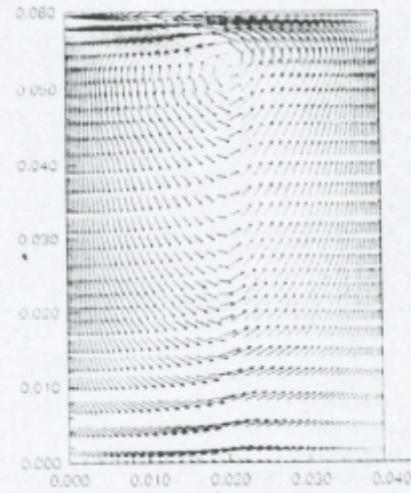


FIG.(20 f): Champ des vitesses à 360° de vilebrequin

FIG (20): Champs des vitesses durant la phases de compression.

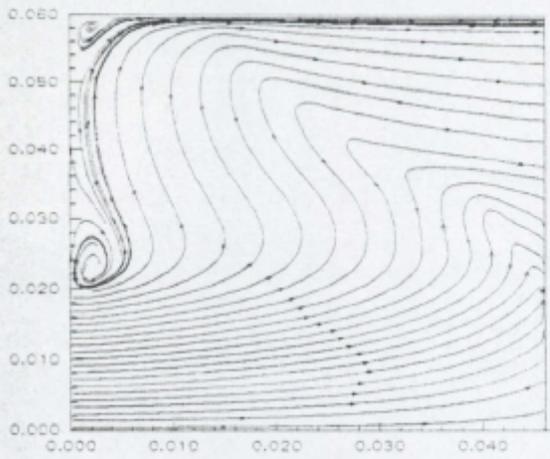


FIG.(21 a) Lignes de courants à 30° de vb

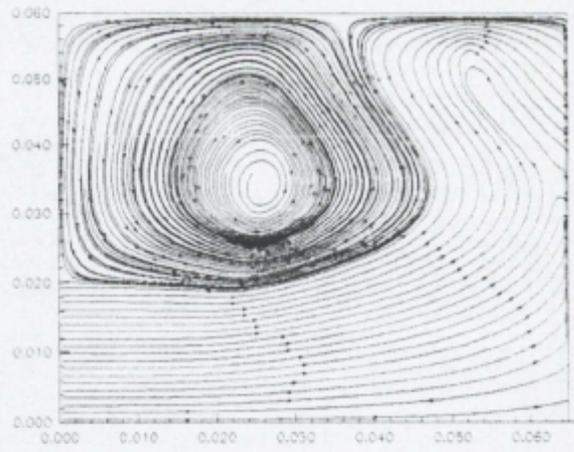


FIG.(21 b) Lignes de courants à 60° de vb

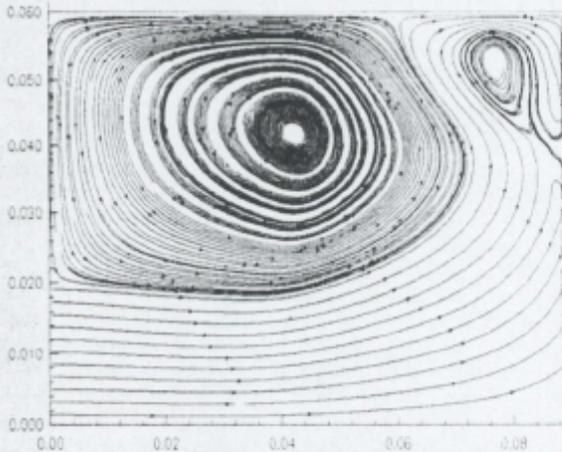


FIG. (21 c) Lignes de courants à 90° de vb

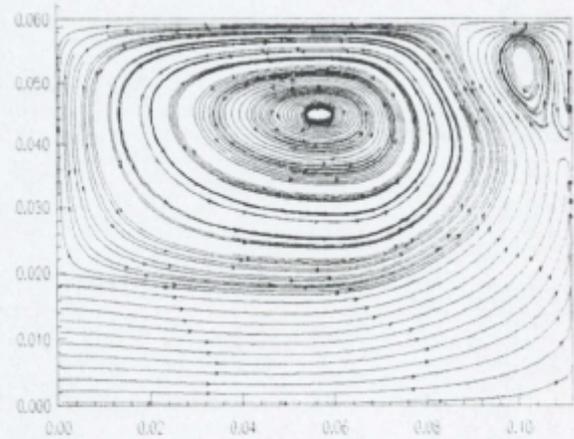


FIG (21 d) Lignes de courants à 120° de vb

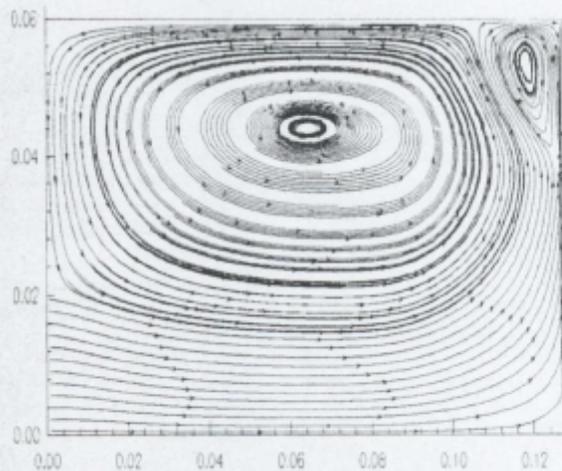


FIG (21 e) Lignes de courants à 150° de vb

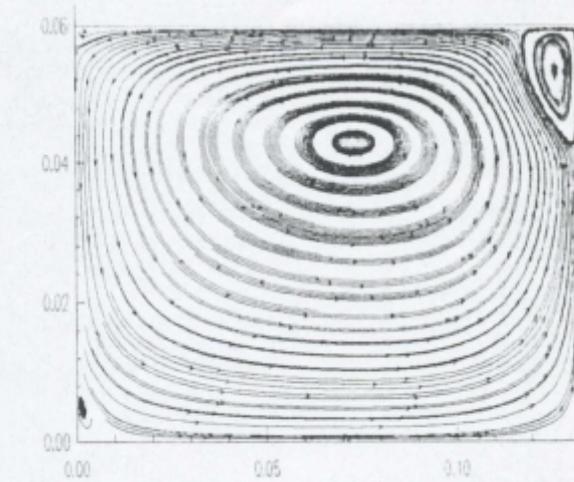


FIG (21 f) Lignes de courants à 180° de vb

FIG (21) : Lignes de courant durant la phase d'admission

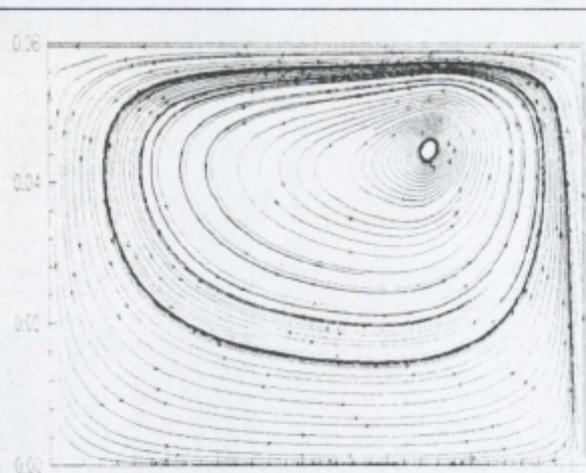


FIG (22 a) : Lignes de courant à 210° vb

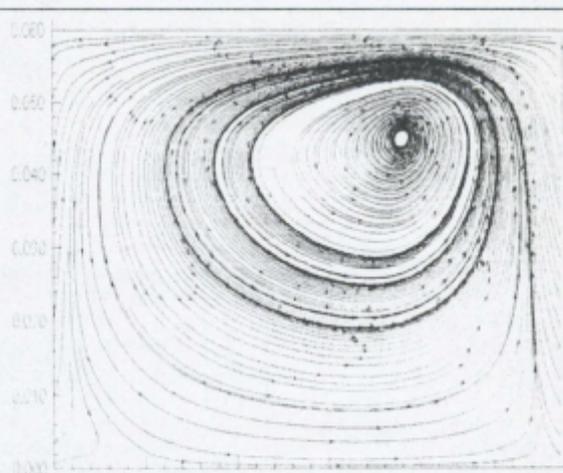


FIG (22 b) : Lignes de courant à 240° vb

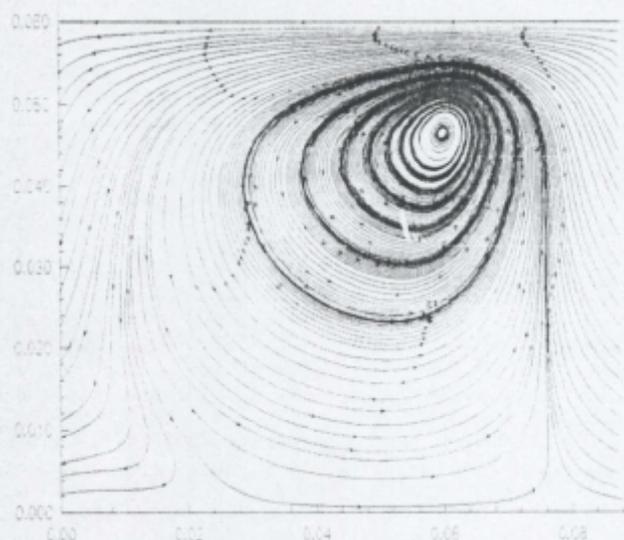


FIG (22 c) : Lignes de courant à 270° vb

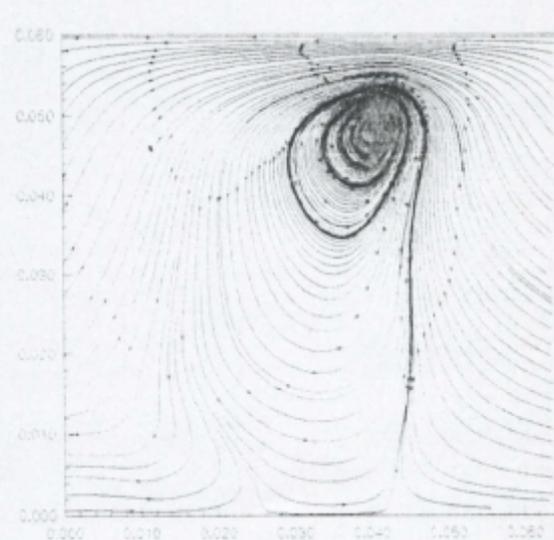


FIG (22 d) : Lignes de courant à 300° vb

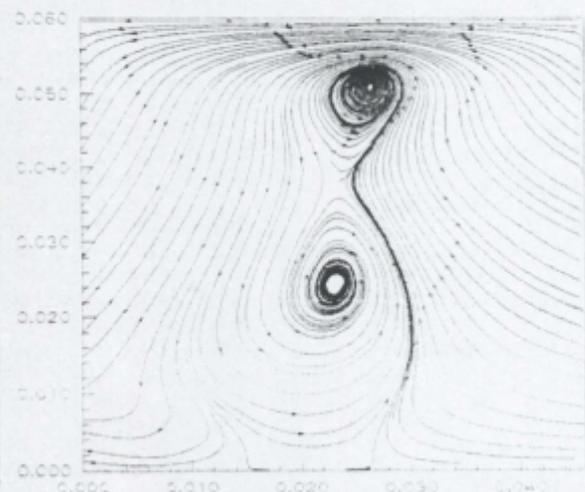


FIG (22 e) : Lignes de courant à 330° vb

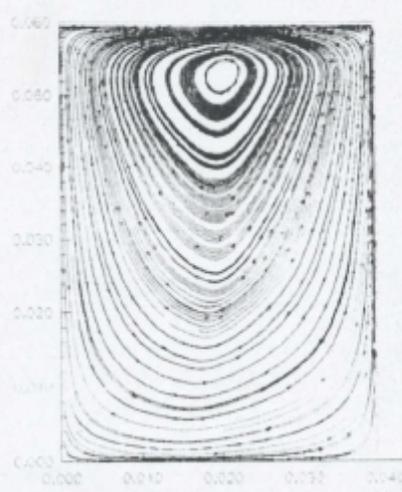


FIG (22 f) : Lignes de courant à 360° vb

FIG (22) : Lignes de courant durant la phase de compression

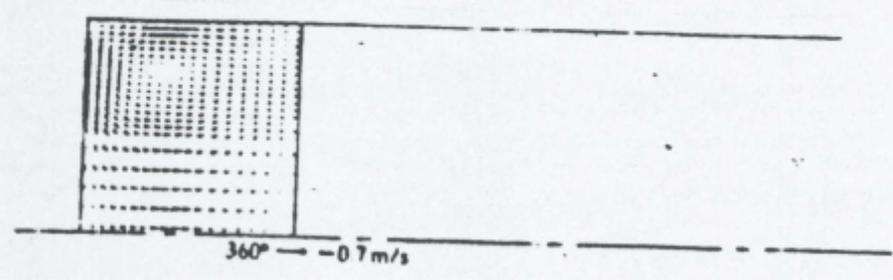
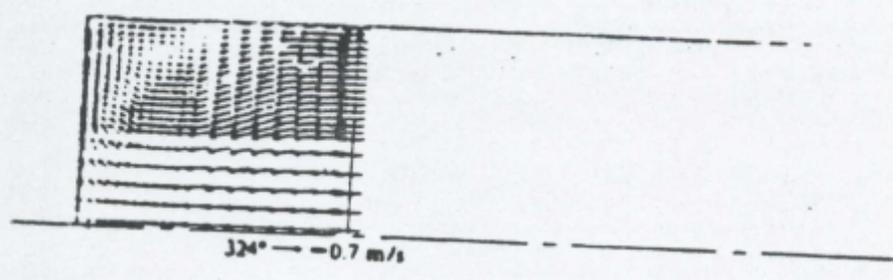
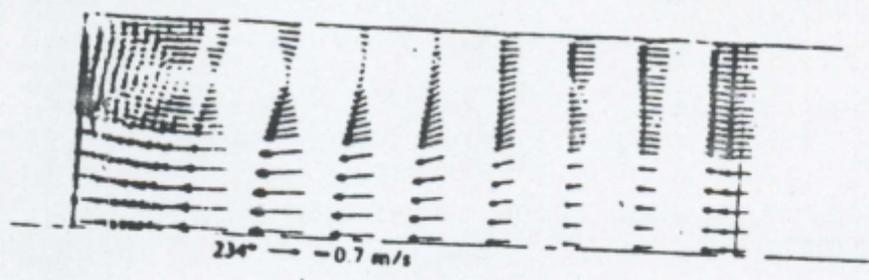


FIG (20 g) : étude de A. D. Gosman

### 5.2.2 Etude paramétrique

Sur la fig (21), durant la phase d'admission des stations transversales sont choisies près et loin des parois solides auxquelles on a tracé les profils des vitesses axiales.

Pour la (station a), les profils tracés à chaque  $30^\circ$  de vilebrequin sont aplatis au niveau de l'entrée et représente des valeurs importantes de la vitesse axiale, ceci est en fonction de la vitesse de translation du piston qui prend sa valeur maximale à  $90^\circ$  de vilebrequin. Tandis que la zone de recirculation présente des valeurs faibles à cette station près du fond du cylindre.

A partir de la (station b), l'effet de l'écoulement de retour fait apparaître des valeurs négatives des vitesses axiales, ceci est en fonction du développement du tourbillon dû au déplacement de la tête du piston (station c , station d ).

Pour la (station e) près de la tête du piston, les valeurs maximales indiquées par les profils sont faibles par rapport à celle du déplacement du piston, ceci s'explique par le déplacement des particules du fluide suivant la direction radiale parallèlement à la tête du piston, la composante axiale de la vitesse est faible devant celle radiale.

Durant la phase de compression fig (22), l'orifice d'admission est fermé les vitesses axiales sont toujours faibles aux stations près de la tête du piston et près du fond du cylindre, ceci par rapport aux autres stations b, c et d , mais en général les valeurs des vitesses axiales par rapport à celle de translation du piston diminuent plus qu'on se rapproche du point mort haut ceci s'explique par la diminution du volume dans sa direction axiale, l'importance devient donc de plus en plus aux composantes radiales de la vitesse.

Dans tous les cas envisagés dans la phase de compression fig (22 ), le profil de la vitesse axiale est aplati ce qui explique la nature turbulente de l'écoulement sauf quelques pointes qui figurent dans les sous-couches laminaires près de la paroi supérieur du cylindre .

Dans les figures (23), (24), (25) et (26), l'allure des vitesses axiales suivant des stations parallèles à l'axe du cylindre et celle des vitesses radiales suivant des stations parallèles au rayon du cylindre, est tracée durant les deux phases ;

Pour la phase d'admission fig (23), la vitesse est importante par rapport à celle du déplacement du piston sur les stations localisées dans la zone d'entrée par contre dans la zone de recirculation elle est faible ou négative, mais l'allure en général possède toujours un extremum existe dans la zone loin des parois solides.

Pour la phase de compression fig (24), seule la station existant près de la paroi supérieur du cylindre a présenté des valeurs négatives importantes de la vitesses. l'allure pour les autres stations est similaire à celle de la phase d'admission sauf pour les deux limites : fond du cylindre et tête du piston, les vitesses sont nulles.

Pour l'allure des composantes radiales de la vitesse durant la phase d'admission fig (25) suivant la distance radiale, on constate que pour les stations a et b au début d'aspiration à  $30^\circ$  de vilebrequin, la vitesses radiale est positive, mais à partir de  $60^\circ$  où l'écoulement vient de compléter son retour (toutes les composantes radiales sont orientées vers le bas), alors que pour les stations c, d, et e, la vitesse radiale atteint son maximum à  $90^\circ$  de même que celle de la tête du piston, puis elle diminue surtout pour la (station c) située au milieu de la chambre cylindrique. Par contre pour d et e qui représentent des zones où toutes les composantes radiales sont orientées vers le haut, les valeurs sont positives.

Pour les deux limites : axe de symétrie et paroi supérieur les valeurs sont évidemment nulles.

Sur les figures (27) et (28) les profils de la vitesse radiale sont traces suivant des stations longitudinales, on remarque que le profil obtenu durant les deux phases conserve relativement sa forme passant d'une position de la tête du piston à une autre, sauf pour quelques positions particulières fig (27), telle que à  $30^\circ$  de vilebrequin sur la (station b), ceci s'explique par le début de formation du tourbillon, et à  $90^\circ$  sur les (stations d et e) où la vitesse du piston atteint son maximum.

Dans les deux phases les changements rapides près des parois solides : tête du piston et fond du cylindre sont envisagés ceci est dû à l'effet de la couche limite.

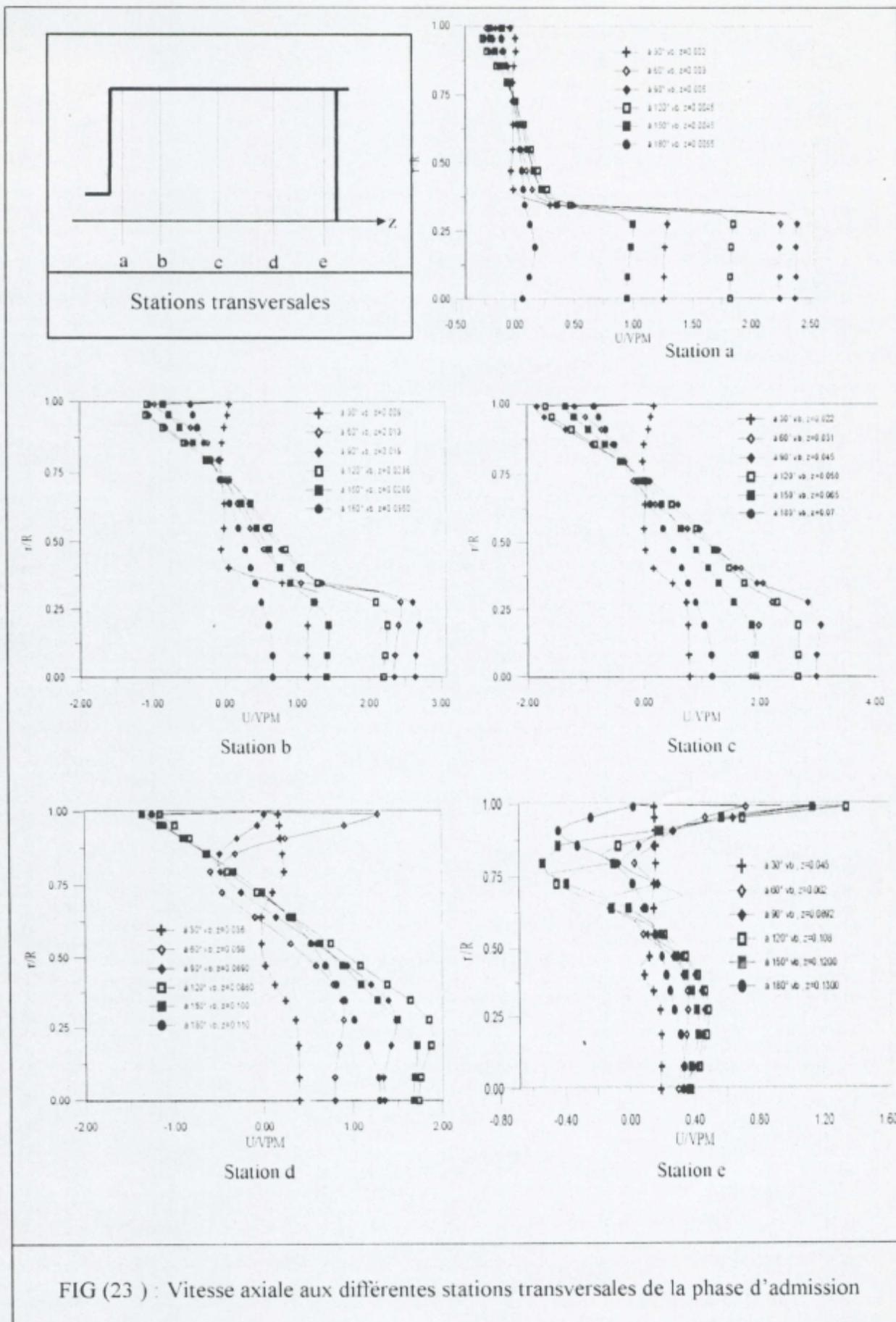


FIG (23) : Vitesse axiale aux différentes stations transversales de la phase d'admission

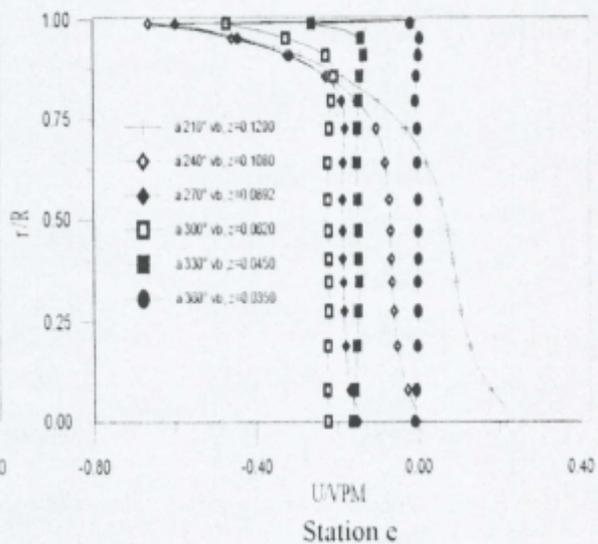
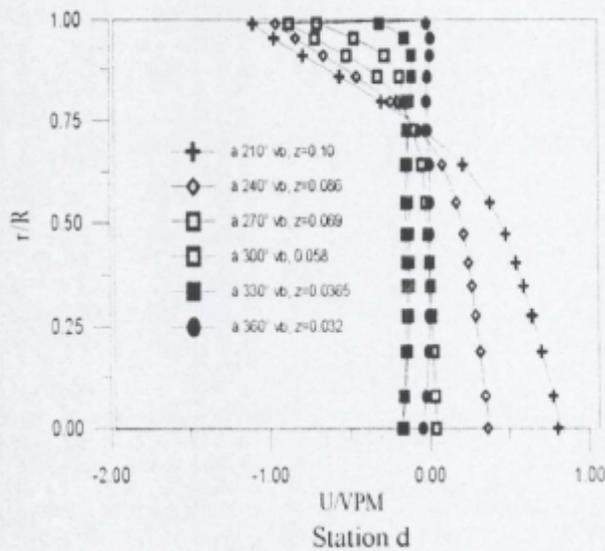
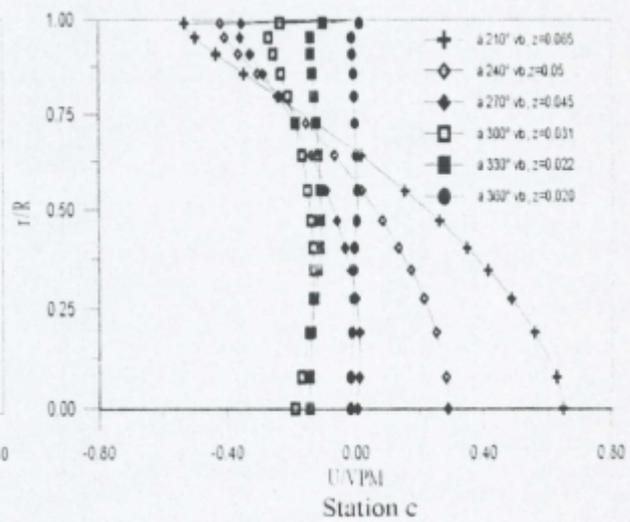
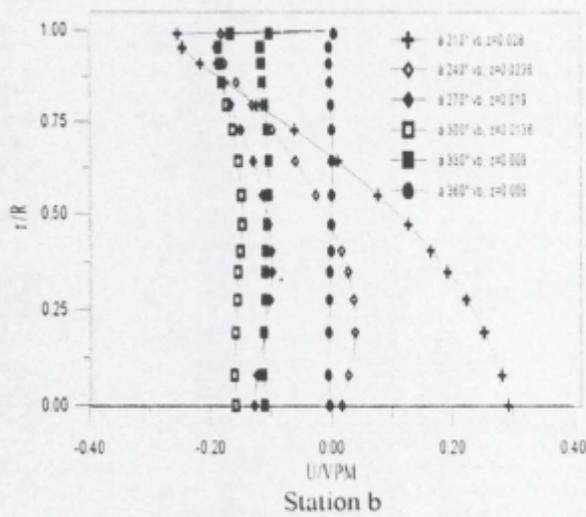
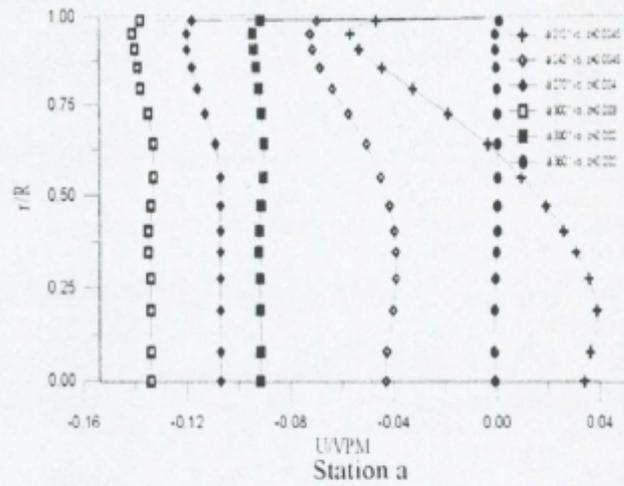
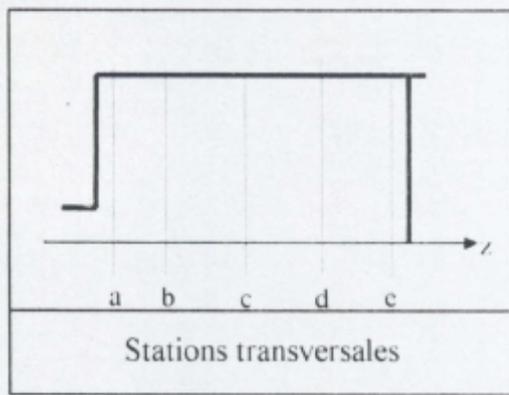


FIG (24) : Vitesse axiale aux différentes stations transversales de la phase de compression

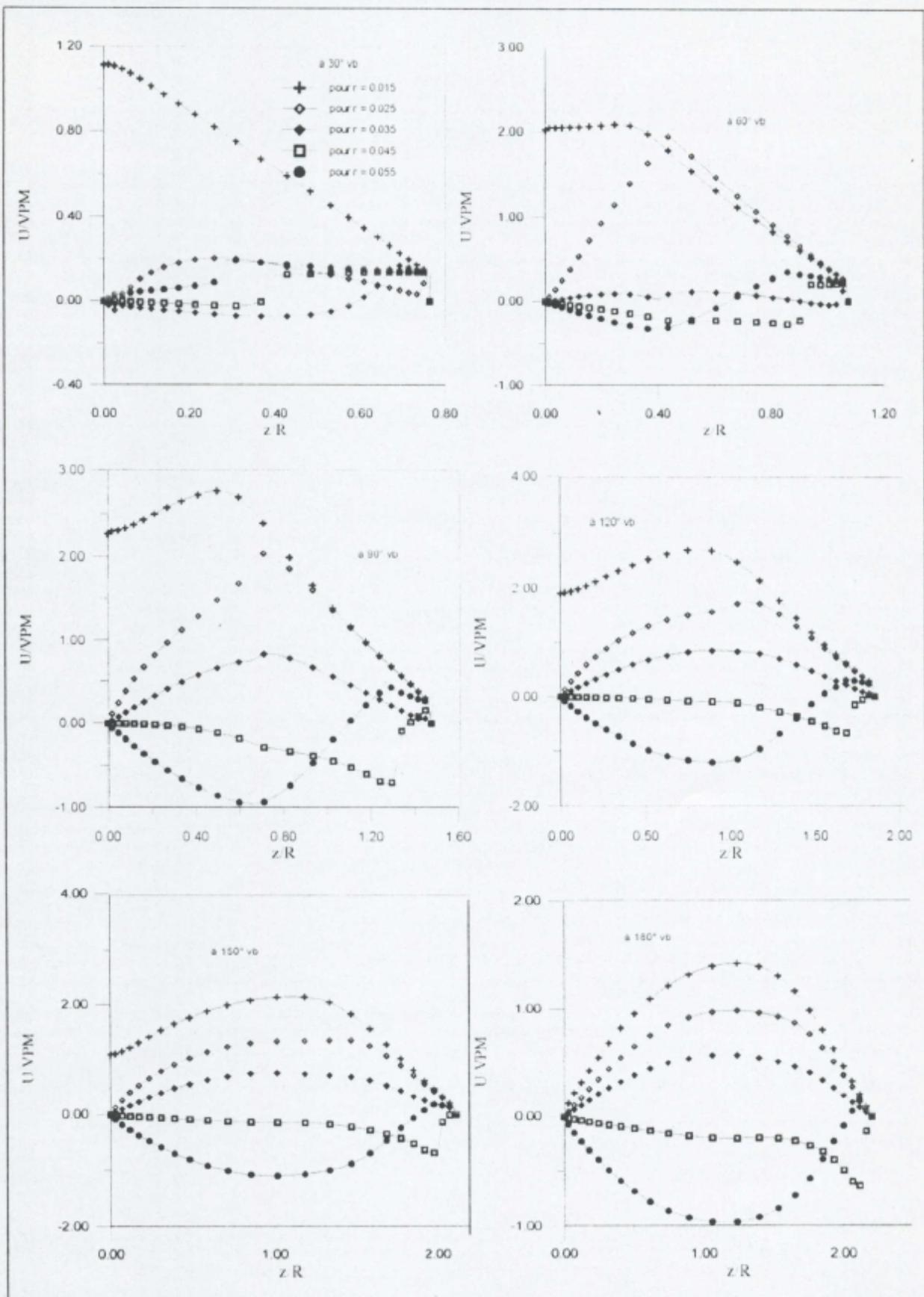


FIG (25) : Vitesse axiale aux différentes stations longitudinales de la phase d'admission

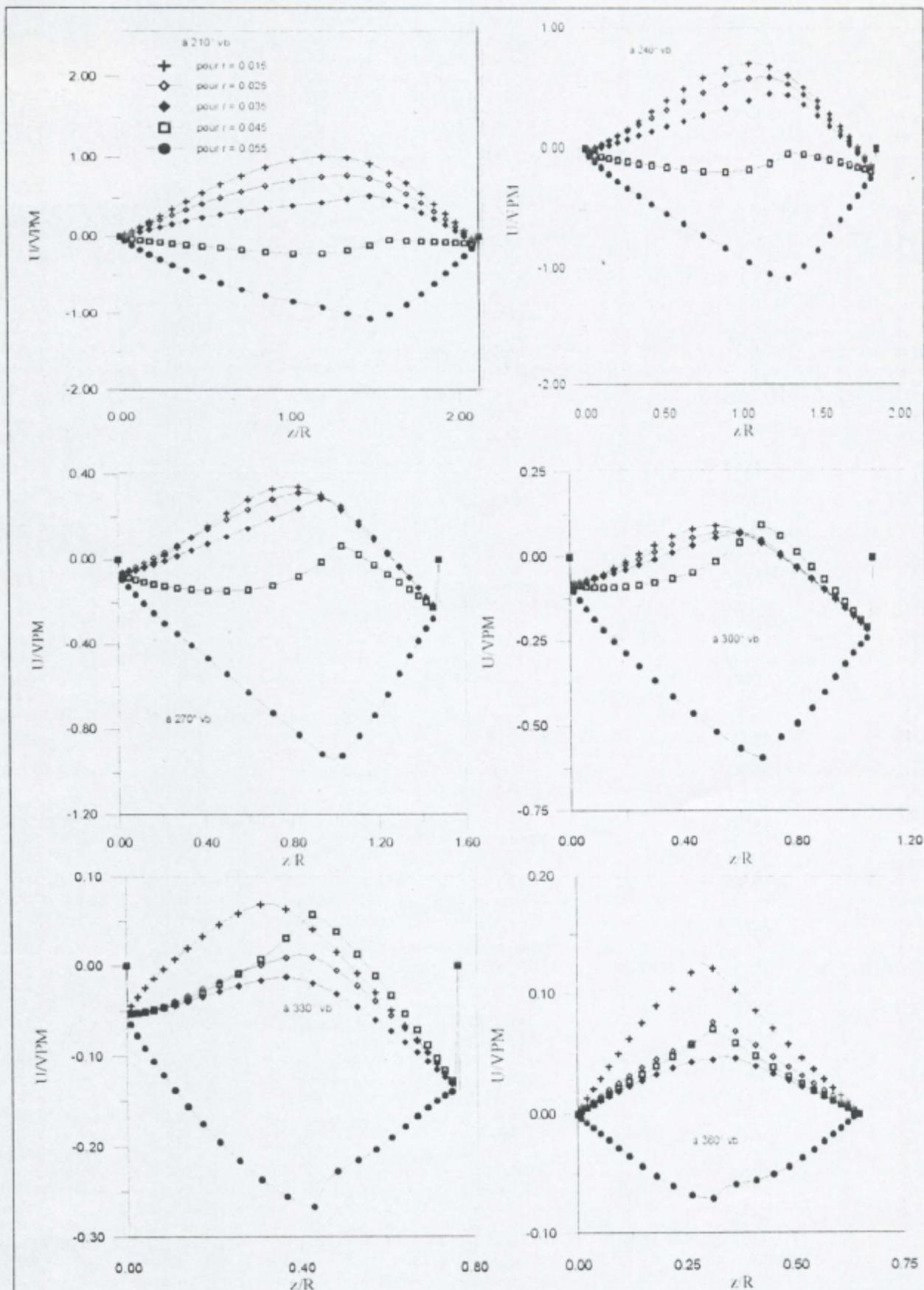


FIG (26) : Vitesse axiale aux différentes stations longitudinales de la phase de compression

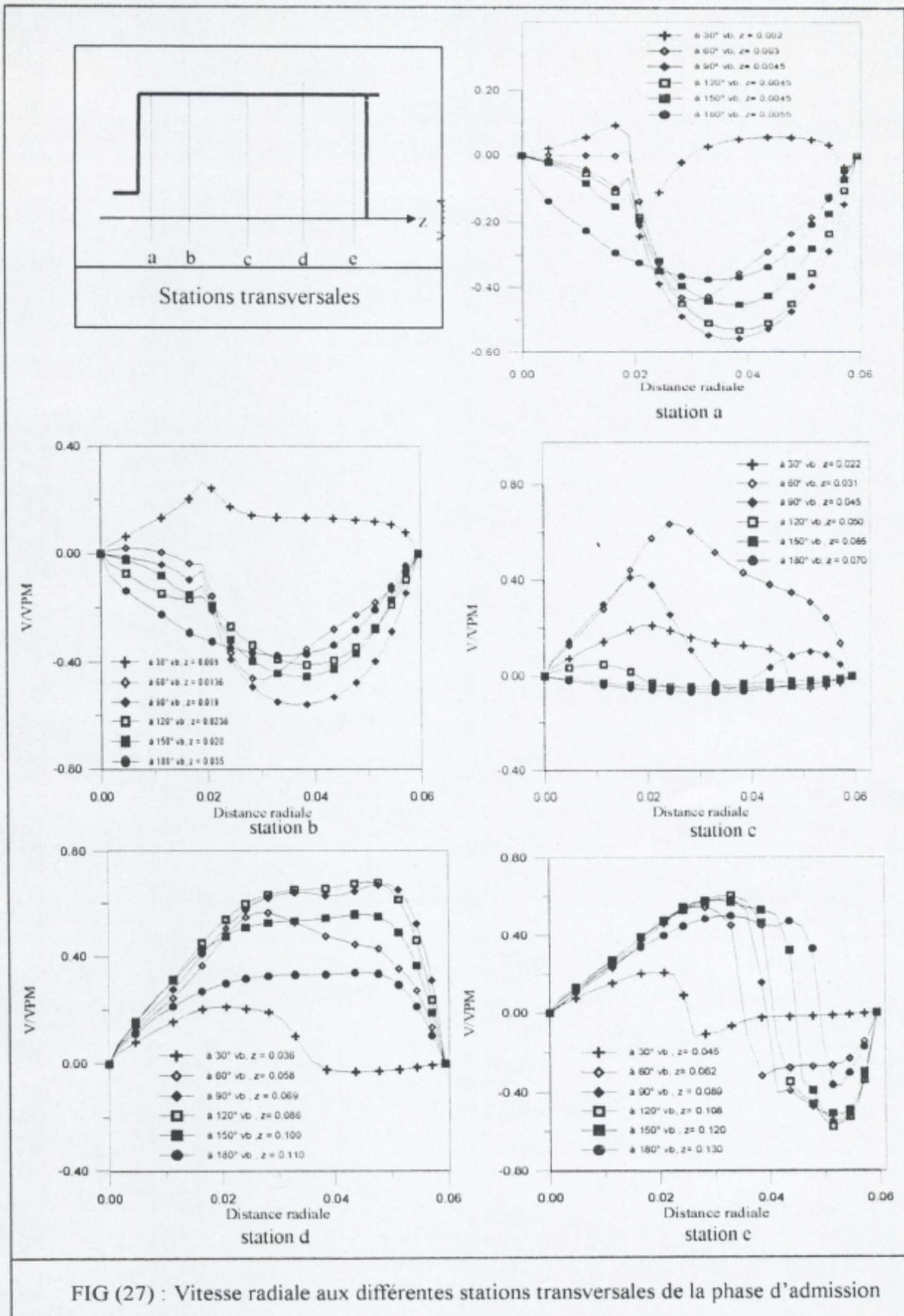


FIG (27) : Vitesse radiale aux différentes stations transversales de la phase d'admission

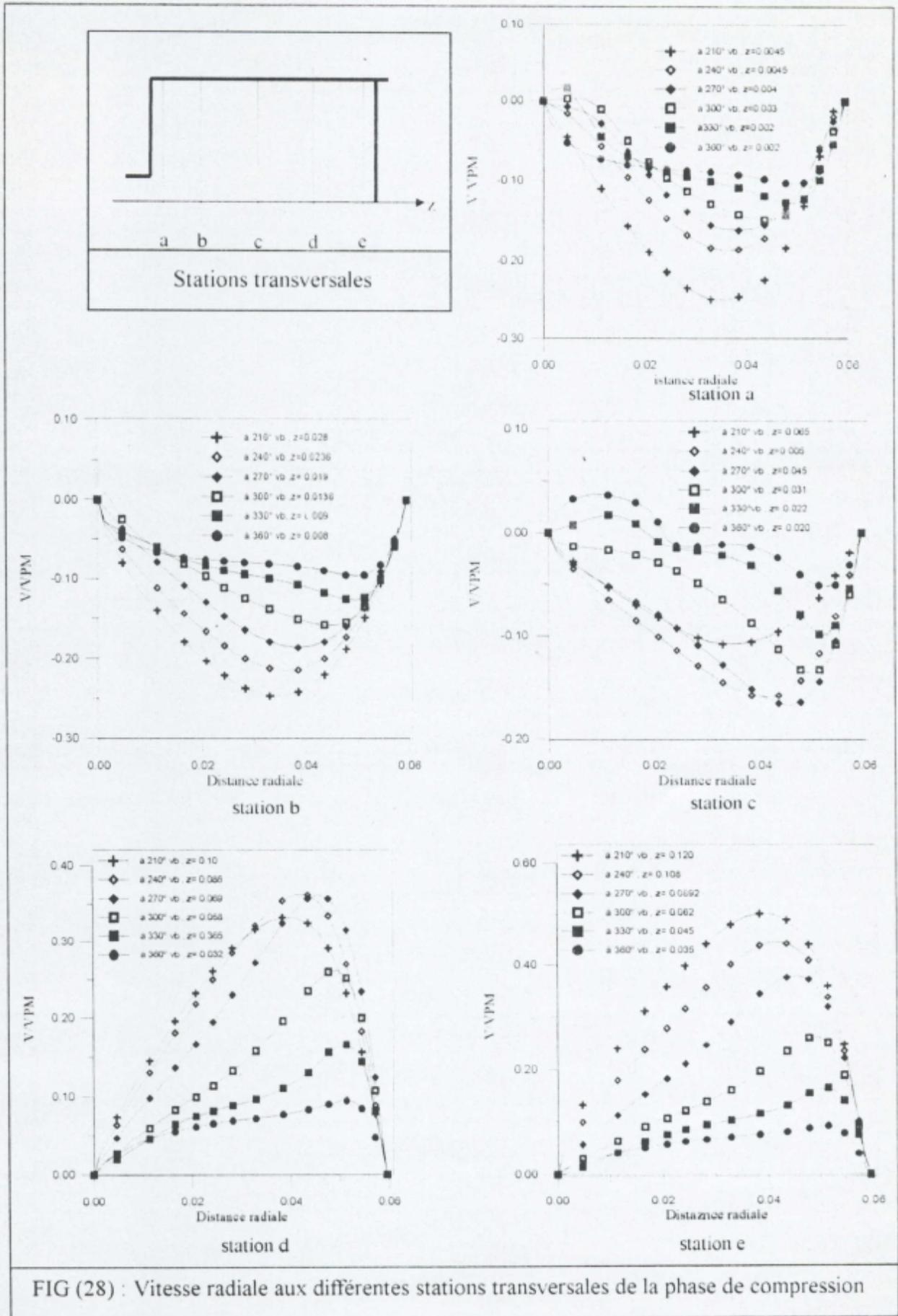
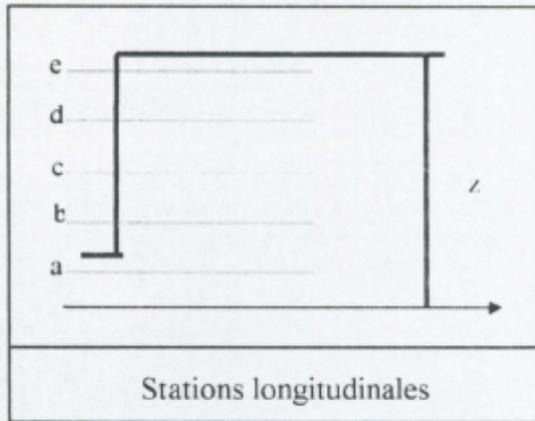


FIG (28) : Vitesse radiale aux différentes stations transversales de la phase de compression



Stations longitudinales

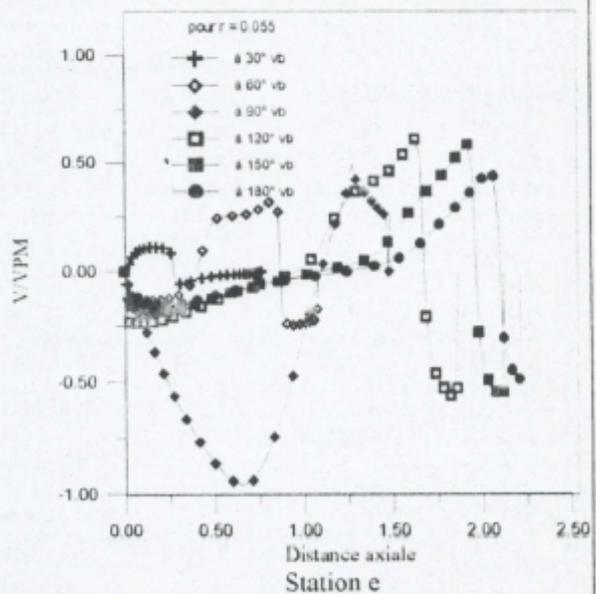
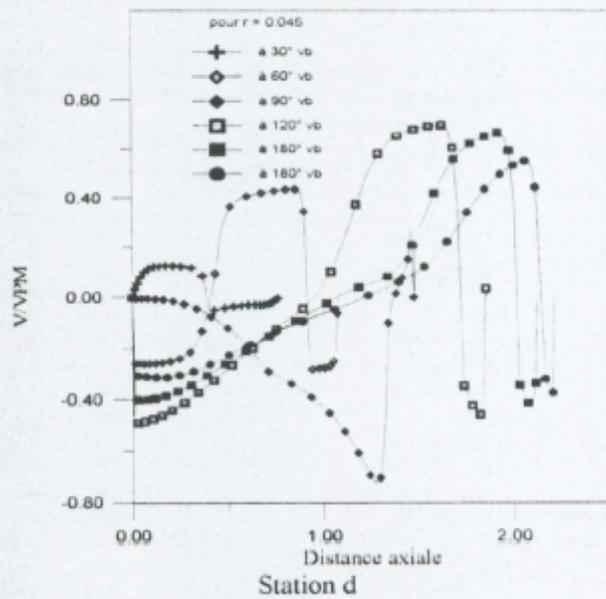
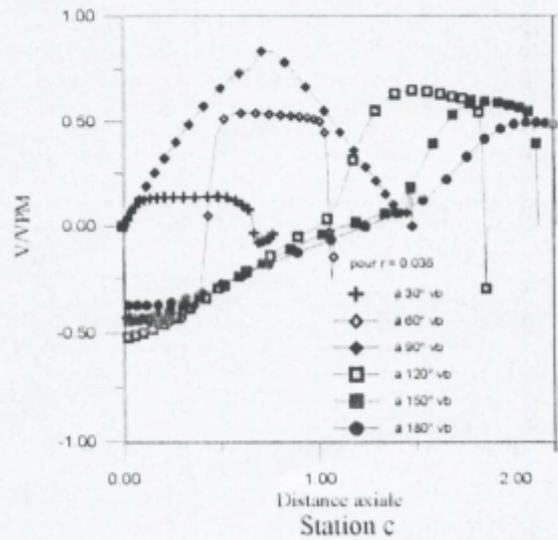
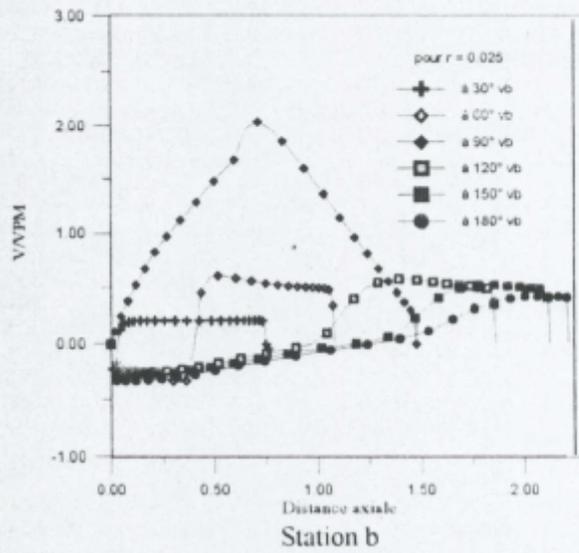
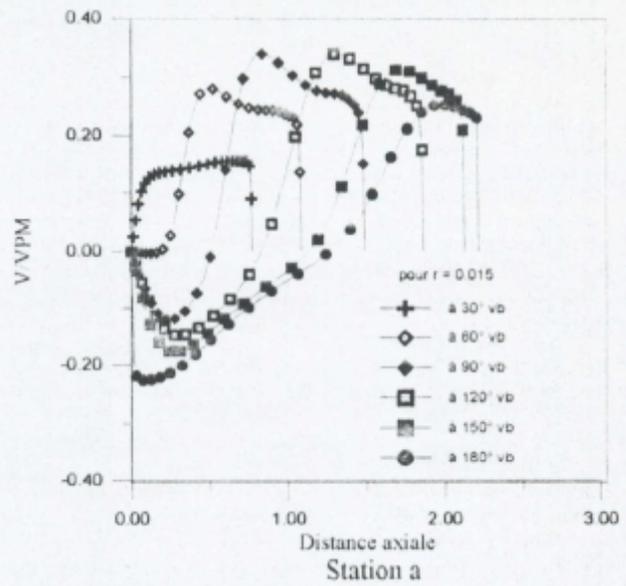


FIG (29) : Vitesse radiale aux différentes stations longitudinales de la phase d'admission

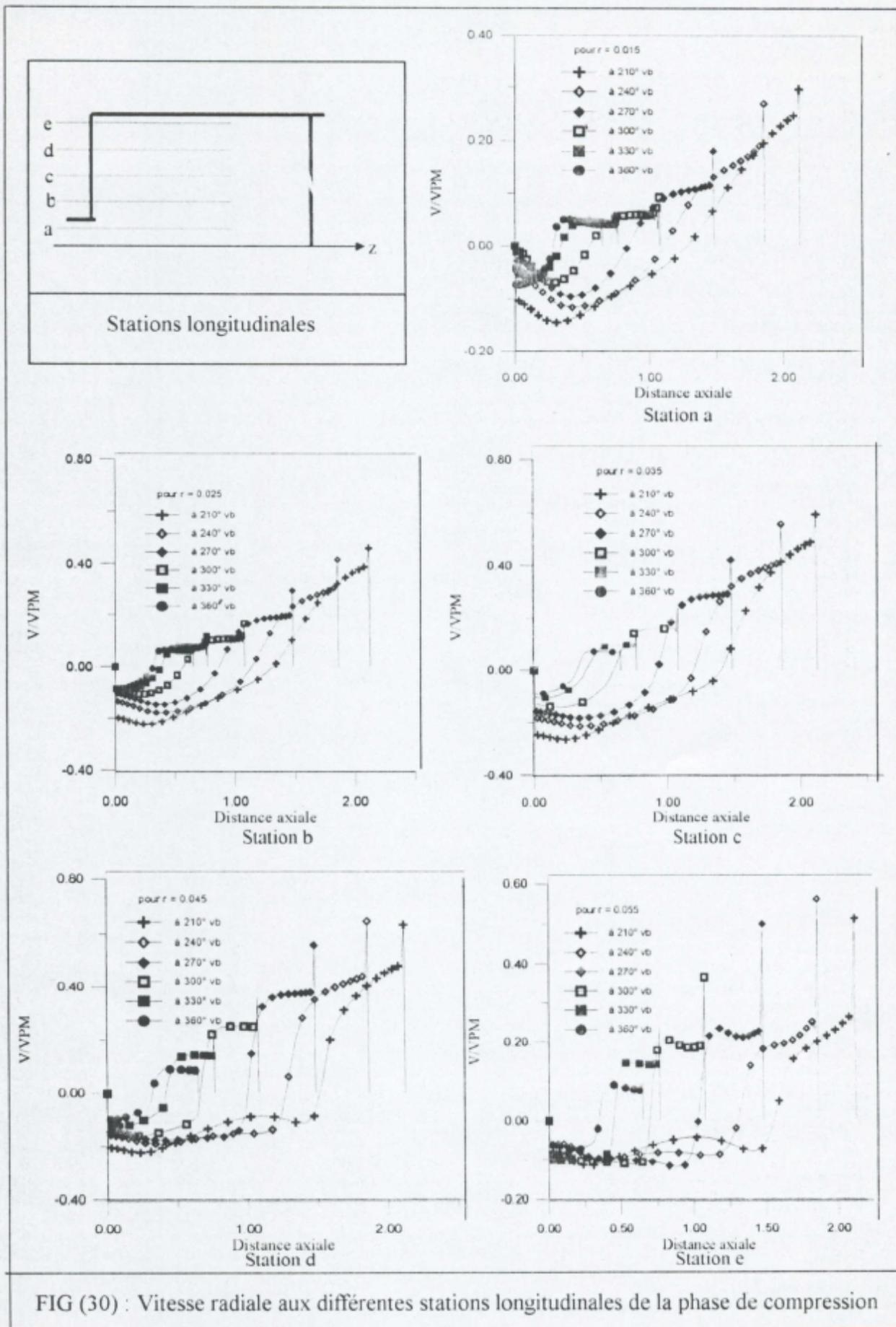


FIG (30) : Vitesse radiale aux différentes stations longitudinales de la phase de compression

### 5.3 Swirl

#### 5.3.1 Introduction

Le swirl est défini toujours comme rotation organisée du fluide autour de l'axe du cylindre, le swirl est généralement créée à l'admission du fluide dans le cylindre avec une quantité de mouvement angulaire initiale. Souvent quelques perturbation dans le swirl dû aux frottements apparaissent durant le cycle moteur, le swirl généré à l'admission continu même pendant les phases de compression, combustion et expansion (J. B. Heywood 1988) [24].

Dans les moteurs possédant une cavité sur la tête du piston comme une chambre de combustion, le mouvement rotatoire s'installant à l'admission est substantiellement modifié durant la phase de compression. Le swirl est utilisé dans les moteurs diesel pour rendre rapide le mélange entre l'air aspiré et le combustible injecté. Le swirl est utilisé aussi pour accélérer le processus de combustion dans les moteurs à allumage par étincelle.

Dans notre cas les résultats ainsi obtenus ne sont pas du même ordre de grandeur qu'un swirl généré par une vanne ou par une conduite d'admission tordue, du fait que notre domaine de calcul se termine juste au plan passant par le fond du cylindre, il ne contient pas la partie où le swirl est pratiquement généré. Mais une vitesse tangentielle initiale est choisie à l'entrée comme celle d'un corps solide en rotation :

$$W_{in} = 2\pi N \omega r_{jet}$$

$\omega$  est appelé rapport du swirl, il est défini comme rapport de la vitesse du swirl (tr/mn) à celle du moteur, le rapport du swirl initial est pris égal à 2.15 [15].

Le reste des valeurs de la vitesse tangentielle sont calculées par résolution numérique de l'équation de conservation de la quantité de mouvement tangentielle avec un traitement près de la paroi solide appliqué de la même façon que sur les composantes axiales et radiales. Alors que sur l'axe de symétrie la vitesse tangentielle est considérée nulle.

#### 5.3.2 Visualisation

Comme il est indiqué dans le chapitre 3, la composante tangentielle de la vitesse est considérée comme étant un scalaire vu l'axisymétrie du problème.

Les contours (champs) pour cette grandeur sont tracés à chaque  $30^\circ$  de vilebrequin durant la phase d'admission fig (31) et celle de compression fig (32) .

Durant l'admission les iso-valeurs de la vitesse du swirl présentées à  $30^\circ$  jusqu'à  $180^\circ$  (PMB) sont réparties d'une manière décroissante de l'entrée jusqu'à la tête du piston où elle devient très faibles, du faite que le mouvement rotatoire du fluide s'effectue toujours au niveau de l'entrée où le rayon est petit avec une vitesse tangentielle relativement importante que celle correspondante à l'intérieur du cylindre où le rayon augmente.

On constate aussi que le swirl inclus dans cette étude est aspiré par le piston durant la phase d'admission en plus de sa quantité de mouvement angulaire initiale qui lui assure l'existence même dans la phase de compression mais avec une intensité relativement faible par rapport à celle initiale ce qui nécessite l'utilisation des systèmes appelés « générateurs du swirl » au niveau du collecteur d'admission mais la modélisation dans ce cas fait l'objet des études abordées dans la littérature sous le nom « high swirl flows » surtout pour avoir l'influence sur le transfert de chaleur à travers les parois solides ce qui est hors de notre sujet.

### 5.3.3 Etude Paramétrique

Sur les figures (33) et (34), la variation de la vitesse tangentielle est présentée avec la distance radiale aux différentes stations choisies sur l'axe du cylindre parallèlement à son rayon durant les deux phases admission et compression .

On constate que cette variation obéi à la nature physique du problème illustrée dans le paragraphe 5.3.2. Mais une différence a été envisagée au niveau de l'ordre de grandeur entre ces résultats et celles présentées dans la littérature consultée; (Gosman [24], Gupta [27], David. J [17]). Ceci s'explique par la nature du swirl utilisé. Dans contexte on peut dire que le swirl qu'on a étudié est aspiré par le piston à travers une ouverture circulaire qui lui donne au début d'admission une quantité de mouvement angulaire initiale qui est faible devant celle axiale. Il est intéressant de signaler ici que le degré du swirl est souvent caractérisé par un

nombre adimensionnel appelé nombre du swirl ( $SN$ ) qui défini par :

$$SN = \frac{G_{\phi}}{RG_x} \quad (5.1)$$

où  $G_x$  = le flux axial de la quantité de mouvement axiale ;

$G_{\phi}$  = le flux axial de la quantité de mouvement angulaire;

$R$  = le rayon de l'orifice d'entrée ;

$$SN = \frac{\int r^2 \rho \overline{UW} dr}{R \int r \rho (\overline{UU} - \frac{1}{2} \overline{WW}) dr} \quad (5.2)$$

De là vient la nécessité d'un système de génération du swirl discuté précédemment dans le paragraphe 5.3.2 qui doit être modélisé d'une manière raisonnable qui est dans la plus part des cas basée sur des techniques expérimentales et empirique. Alors l'utilisation de celles-ci nous faire lancer dans un autre axe d'étude situant hors de nos disponibilités.

La même remarque est faite pour les résultats de la figure (35) où la vitesse tangentielle est présentée suivant des stations longitudinales durant la phases d'admission .

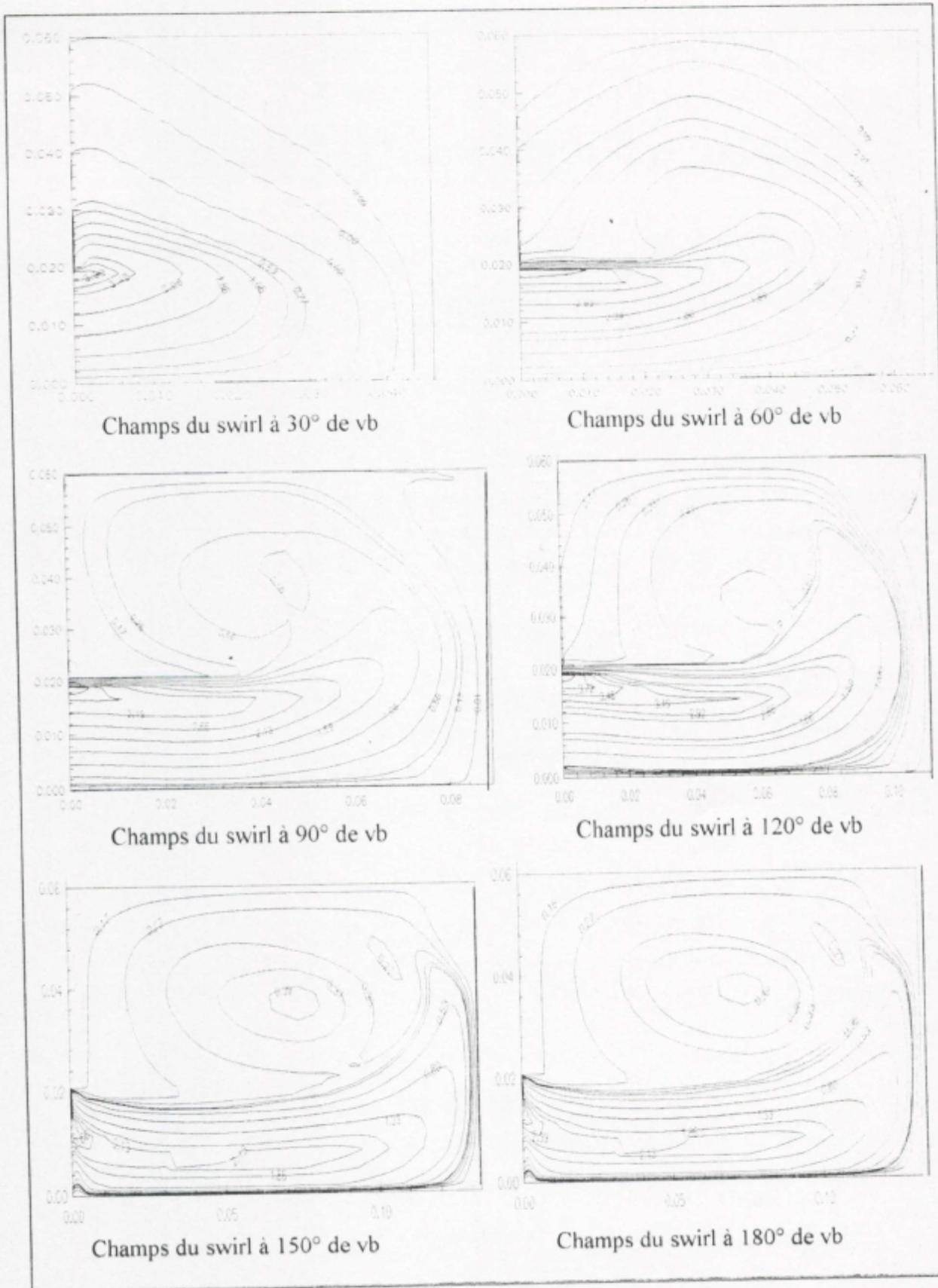


FIG (31) : Champs du swirl durant la phase d'admission

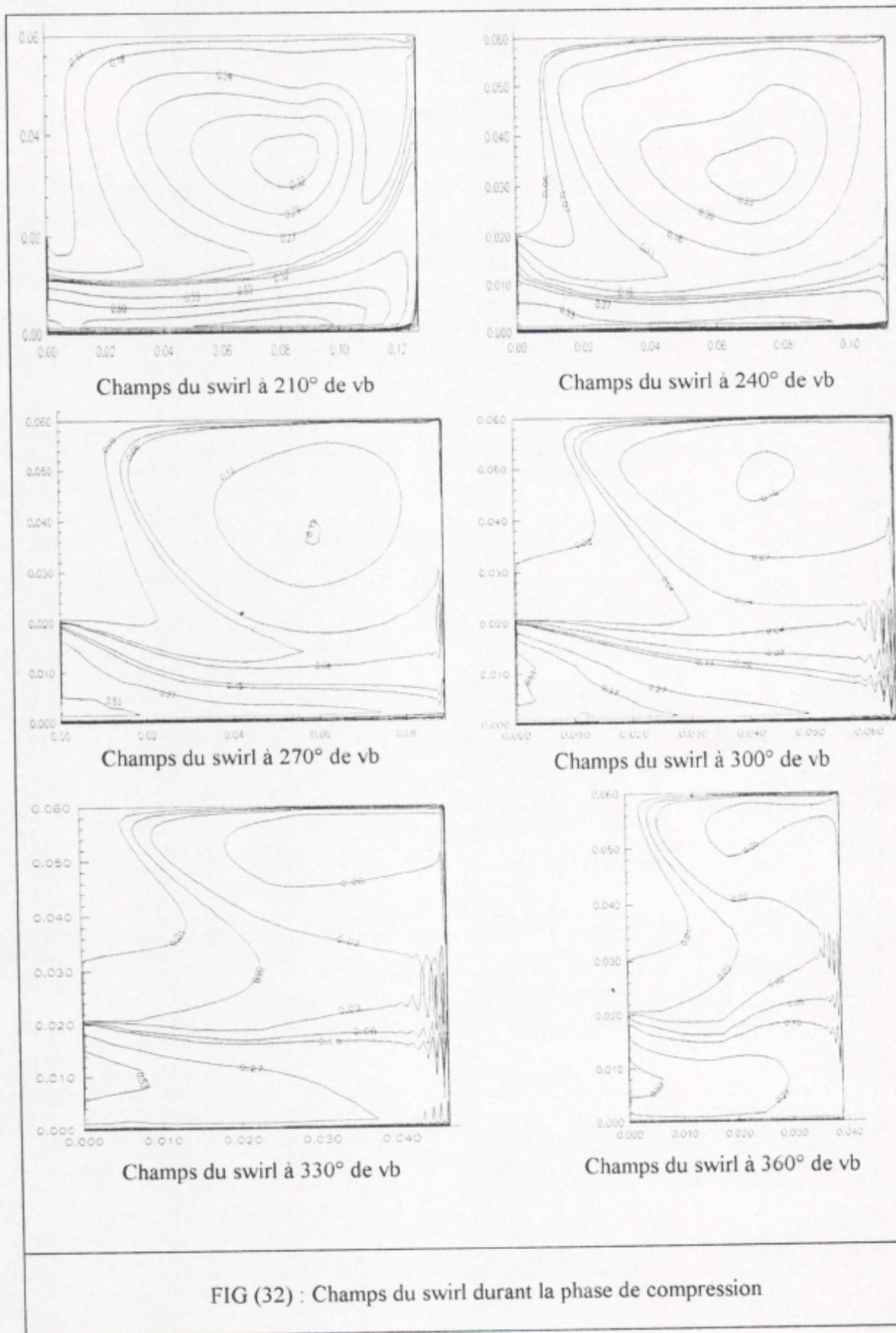


FIG (32) : Champs du swirl durant la phase de compression

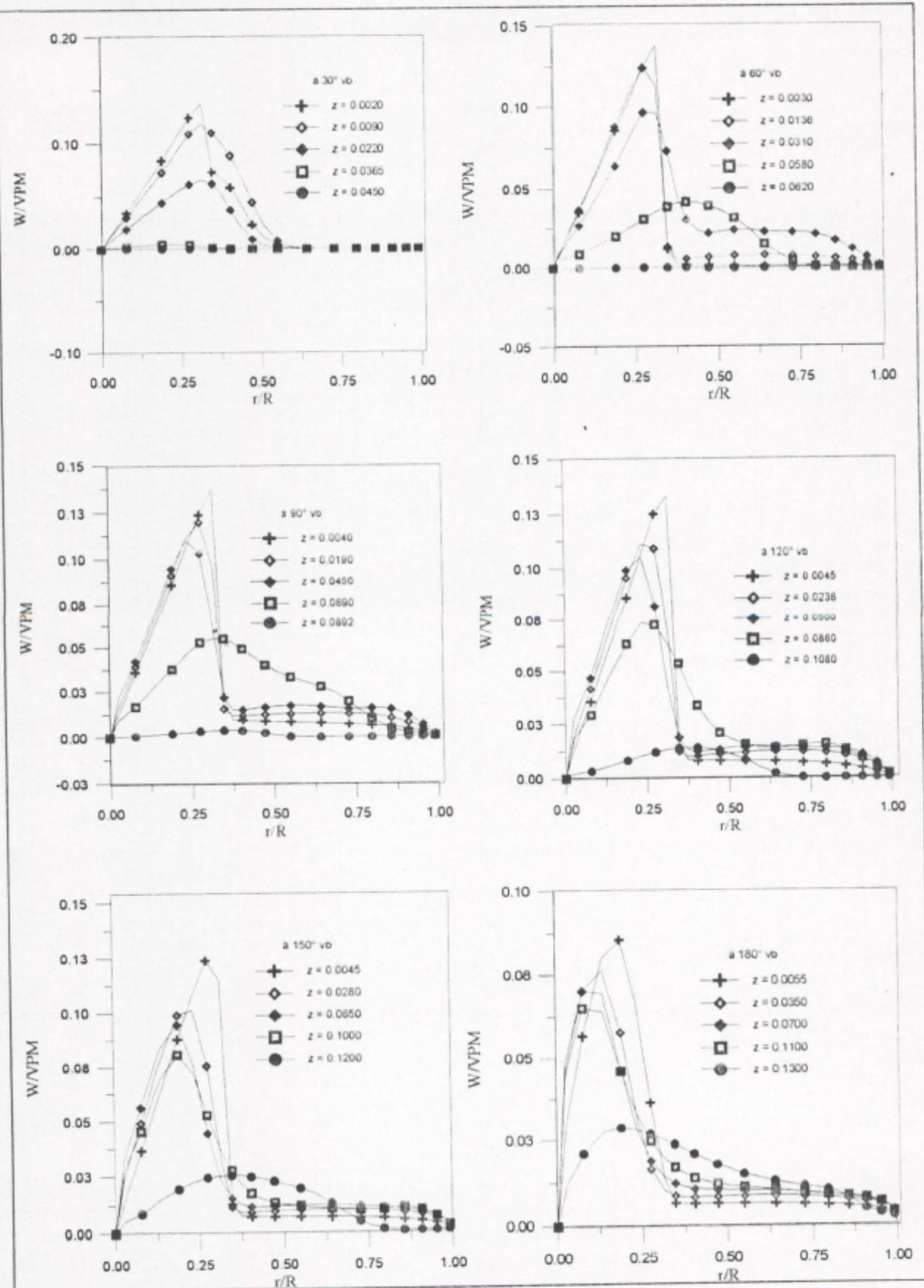


FIG (33) : Vitesse tangentielle aux différentes stations transversales de la phase d'admission

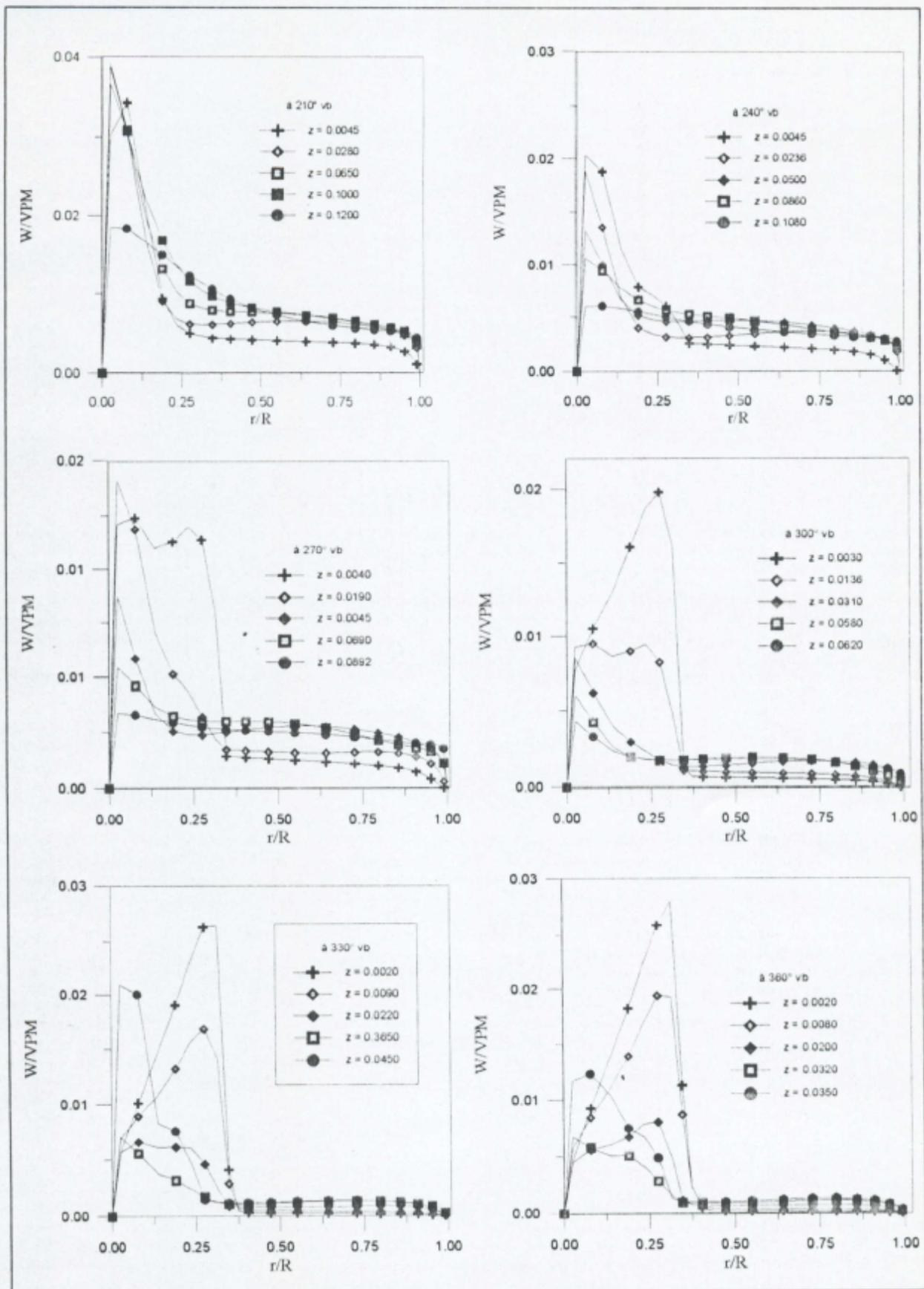


FIG (34) : Vitesse tangentielle aux différentes stations transversales de la phase de compression

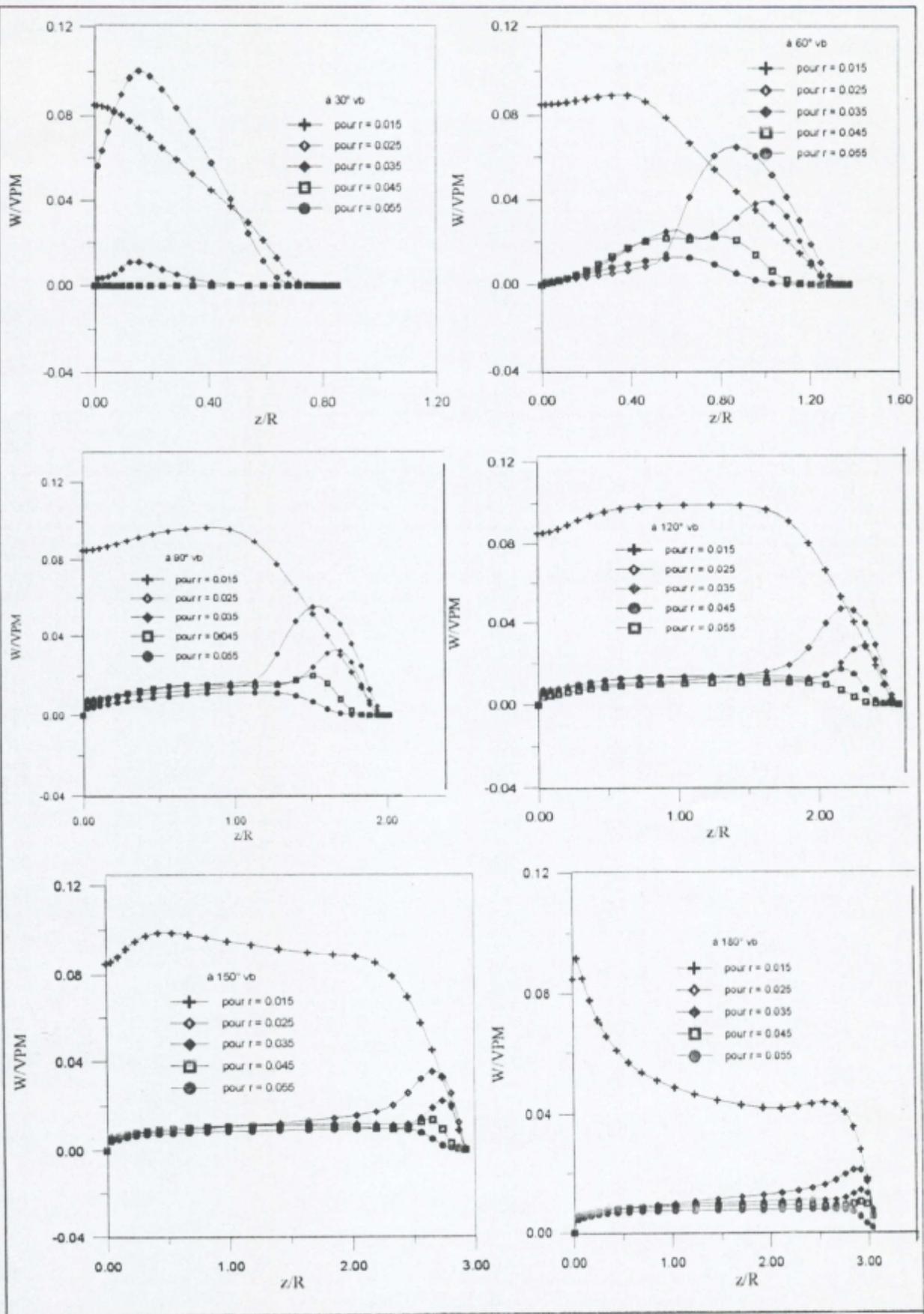


FIG (35) : Vitesse tangentielle aux différentes stations longitudinales de la phase d'admission

## 5.4 Paramètres de la turbulence

### 5.4.1 Introduction

Dans cette étude, la turbulence est modélisée par le modèle à deux équations de transport k-ε basé sur la méthodologie RNG [16], illustrée dans le chapitre 2, en se basant sur l'hypothèse de Favre pour le processus de moyennage, l'hypothèse de Boussinesq modifiée pour la modélisation des termes de contraintes de Reynolds et la relation de Prandtl-Kolmogorov (1.21) pour la fermeture. Après la résolution des deux équations, les paramètres choisis pour caractériser la turbulence sont :

- L'intensité de turbulence calculée par la relation:  $i = \frac{\sqrt{\frac{2}{3}k}}{VPM}$ , où  $VPM$  est la vitesse moyenne du piston .

- L'échelle intégrale de longueur de turbulence calculé par la relation:

$$l_\epsilon = \frac{C_\mu^{3/4} k^{3/2}}{\epsilon R}, \text{ où } R \text{ est le rayon du cylindre.}$$

### 5.4.2 Visualisation

Les contours (champs) des deux paramètres déjà indiqués sont donnés par les figures (36), (37), (38) et (39) pour les deux phases admission est compression .

la remarque qu'on peut faire ici est que l'évolution des deux paramètres est presque la même ; leurs maximums sont toujours localisés au centre du tourbillon où le gradient des vitesses est important et au centre de la chambre pour le Point Mort Bas (180° de vb), la zone intense se colle sur la paroi supérieure du cylindre et chute progressivement au cours de la phase de compression. On remarque aussi que l'intensité de turbulence près de l'axe de symétrie est faible car le gradient des vitesses est nulle.

D'une manière générale les résultats présentés sur les différents champs sont relativement proches en ordre de grandeur en comparaison avec celle obtenus par A. D. Gosman pour une configuration axisymétrique mais avec des paramètres lié au régime du moteur différents .



### 5.4.3 Etude paramétrique

sur les figures (40) et (41), l'intensité de turbulence est tracée à chaque  $30^\circ$  de vilebrequin durant les deux phases admission et compression, avec la distance radiale suivant des stations transversales .

Durant la phase d'admission on remarque que l'intensité de turbulence augmente et chute rapidement au niveau de l'entrée sur les (stations a et b) qui sont proches de l'élargissement brusque, l'allure est identique le long de la course descendante du piston .

A partir de la (station c), situant au milieu de la chambre cylindrique l'effet de l'élargissement brusque commence à disparaître.

Une chute rapide est toujours envisagée près de la paroi supérieure du cylindre, des changements rapides sont constatés près de la tête du piston (station e) fig (40).

Au cours de la compression sur la (station a) situant près de la culasse où l'orifice d'admission est fermé, l'intensité de turbulence a connue des changements rapides dû à la l'effet de la paroi solide, au fur et à mesure qu'on s'éloigne de la culasse son profil devient similaire à celui d'une vitesse axiale d'un écoulement monophasique turbulent dans un tube à section circulaire constante, les parties du profil existant près de la culasse dans des sous-couches laminares sont écrasées surtout lorsque on se rapproche du Point Mort Haut. Ceci est présenté par les (stations b, c, d et e) fig (41).

Dans les figures (42) et (43), sur des stations choisies sur la distance radiale parallèlement à l'axe du cylindre, l'intensité de turbulence est présentée durant les deux phases admission et compression. On constate que celle-ci a une allure ascendante au fur et à mesure qu'on s'éloigne de l'entrée, puis une légère diminution avant d'augmenter et chuter rapidement près de la tête du piston. Ce comportement est envisagé pour les premières positions du piston avant le Point Mort Bas (PMB), où l'allure devient ascendante - descendante d'une manière régulière suivant le gradient des vitesses à cette position . Ceci pour la phase d'admission. Alors que pour celle de la compression, l'allure semble identique sur toutes les stations choisies et pour toute position du piston . Mais il faut signaler qu'avec la remonte de ce dernier, l'intensité de turbulence chute au fur et à mesure qu'on se rapproche du Point Mort Haut (PMH) à  $360^\circ$  de vilebrequin.

On peut faire les mêmes remarques pour l'échelle intégrale de longueur de la turbulence, présentée par les figures (44) et (45) avec la distance radiale et (46) et (47) avec la distance axiale, durant les deux phases admission et compression.

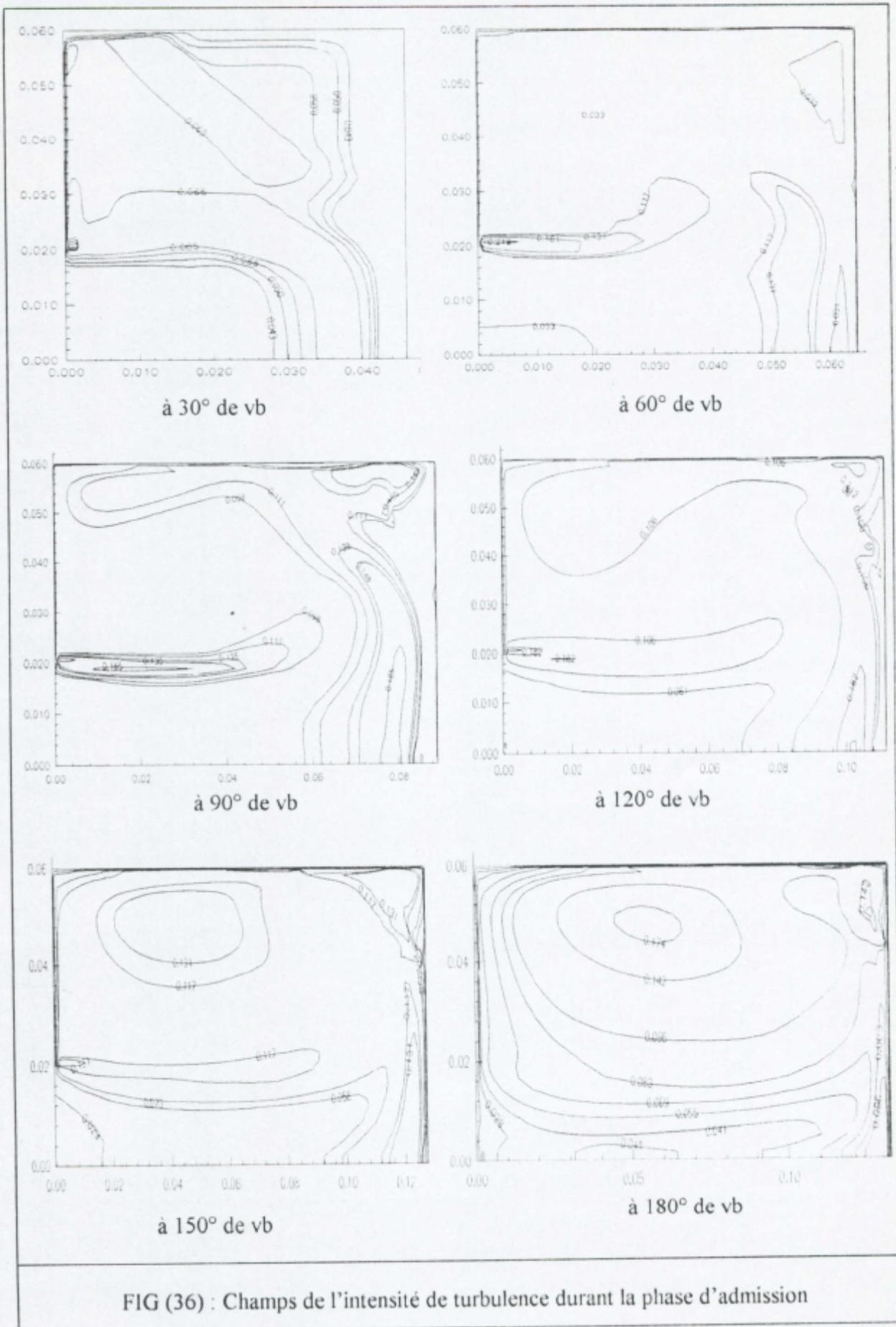


FIG (36) : Champs de l'intensité de turbulence durant la phase d'admission

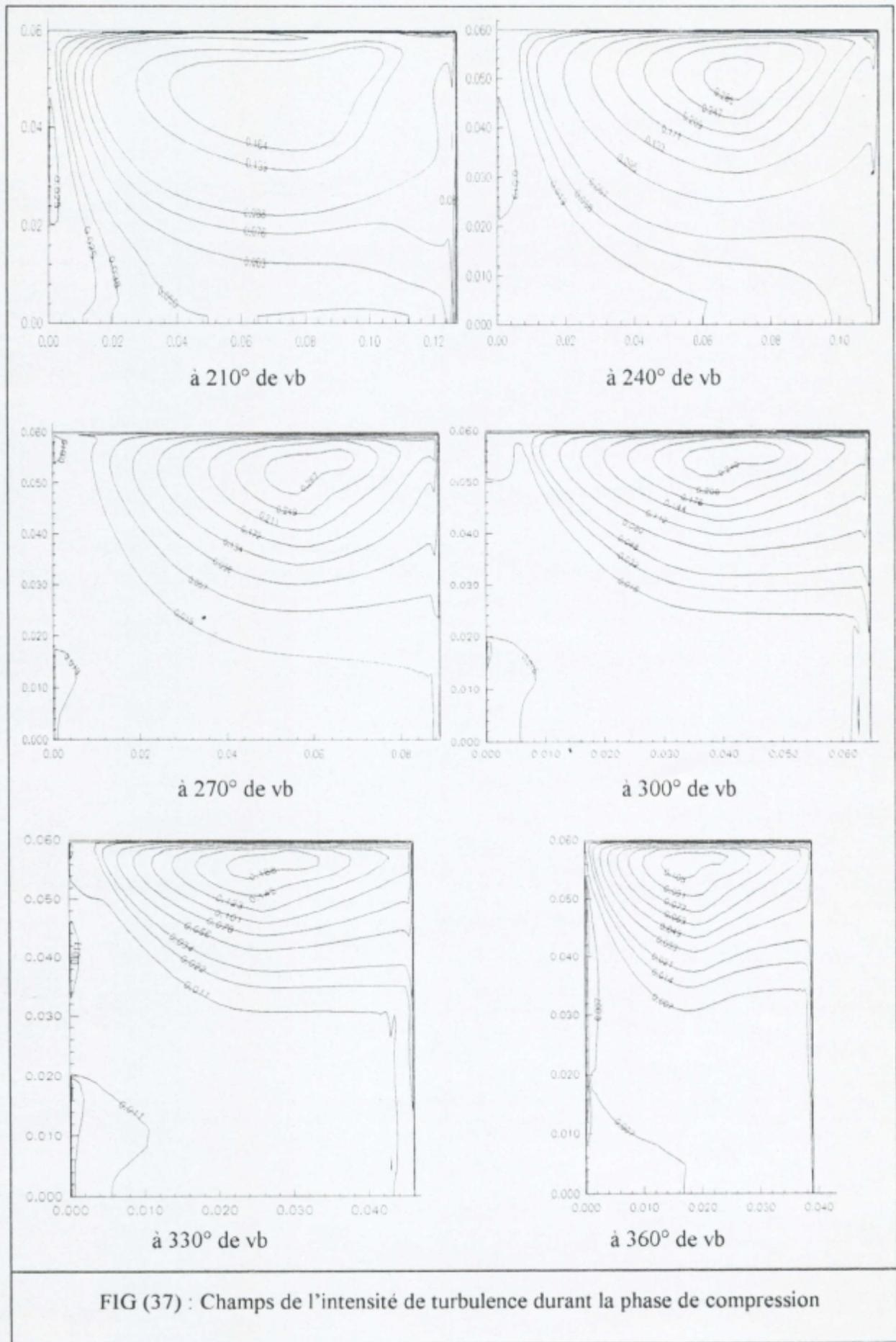


FIG (37) : Champs de l'intensité de turbulence durant la phase de compression

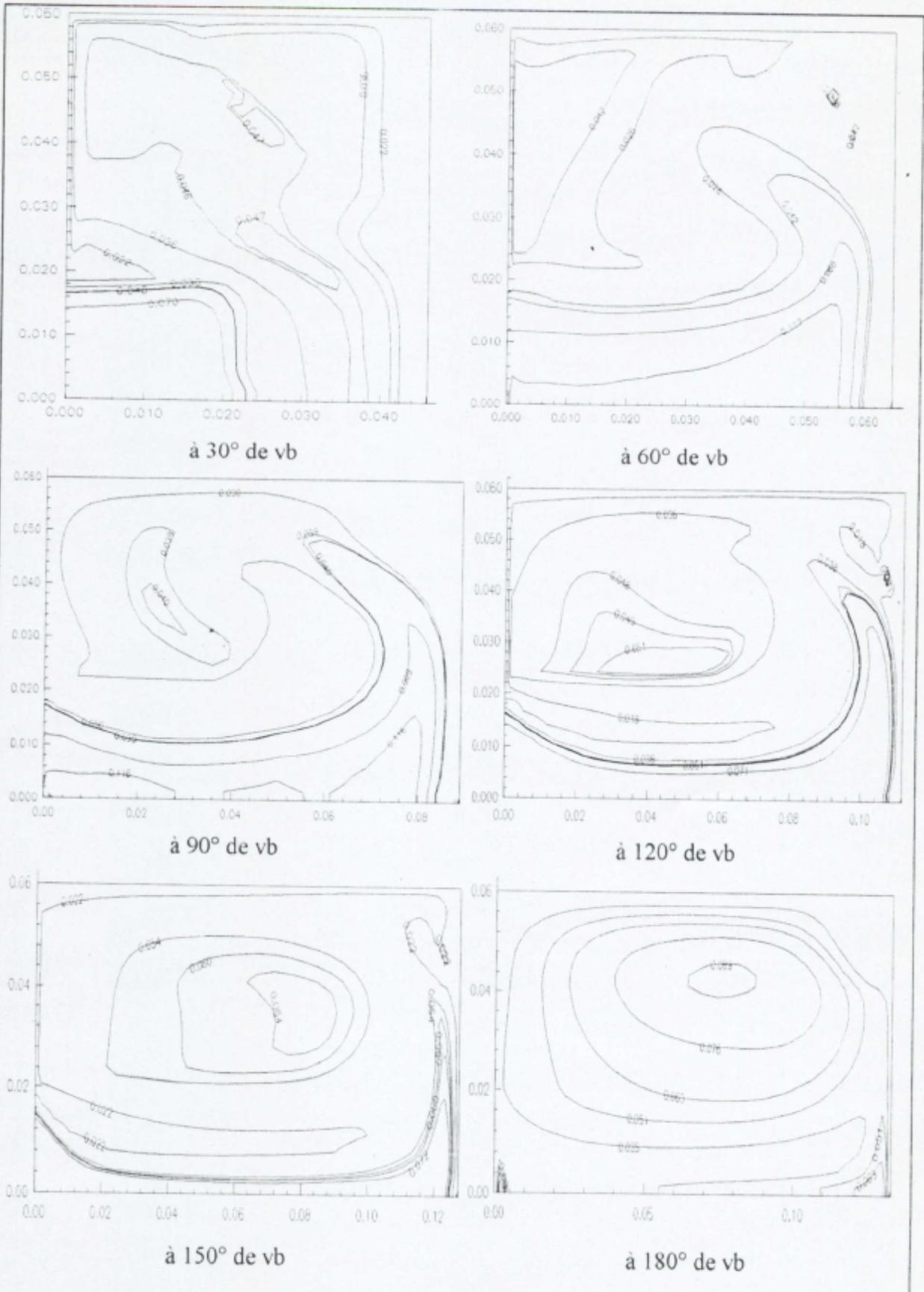


FIG (38): contours de l'échelle de la turbulence durant la phase d'admission

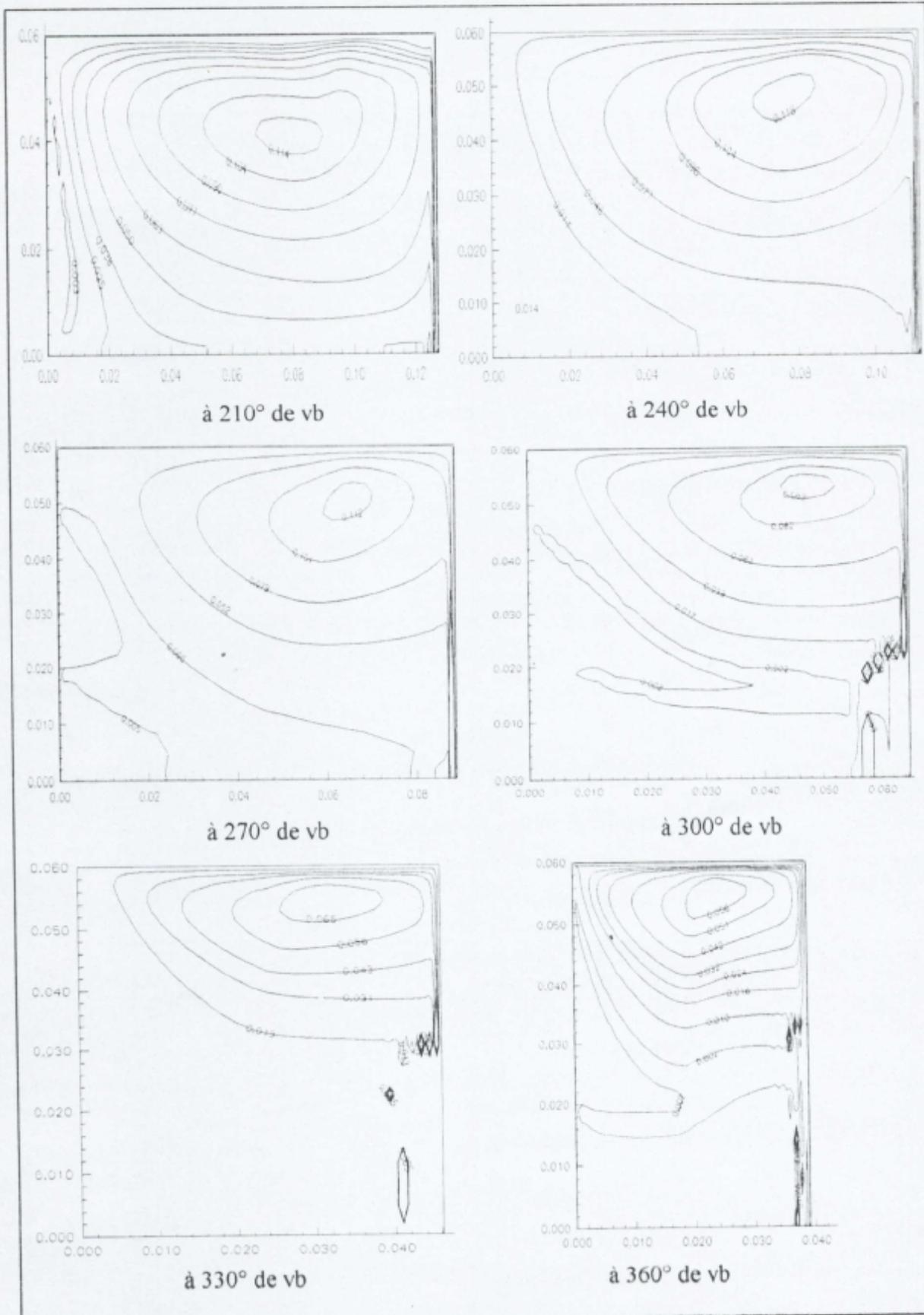


FIG (39): contours de l'échelle de la turbulence durant la phase de compression

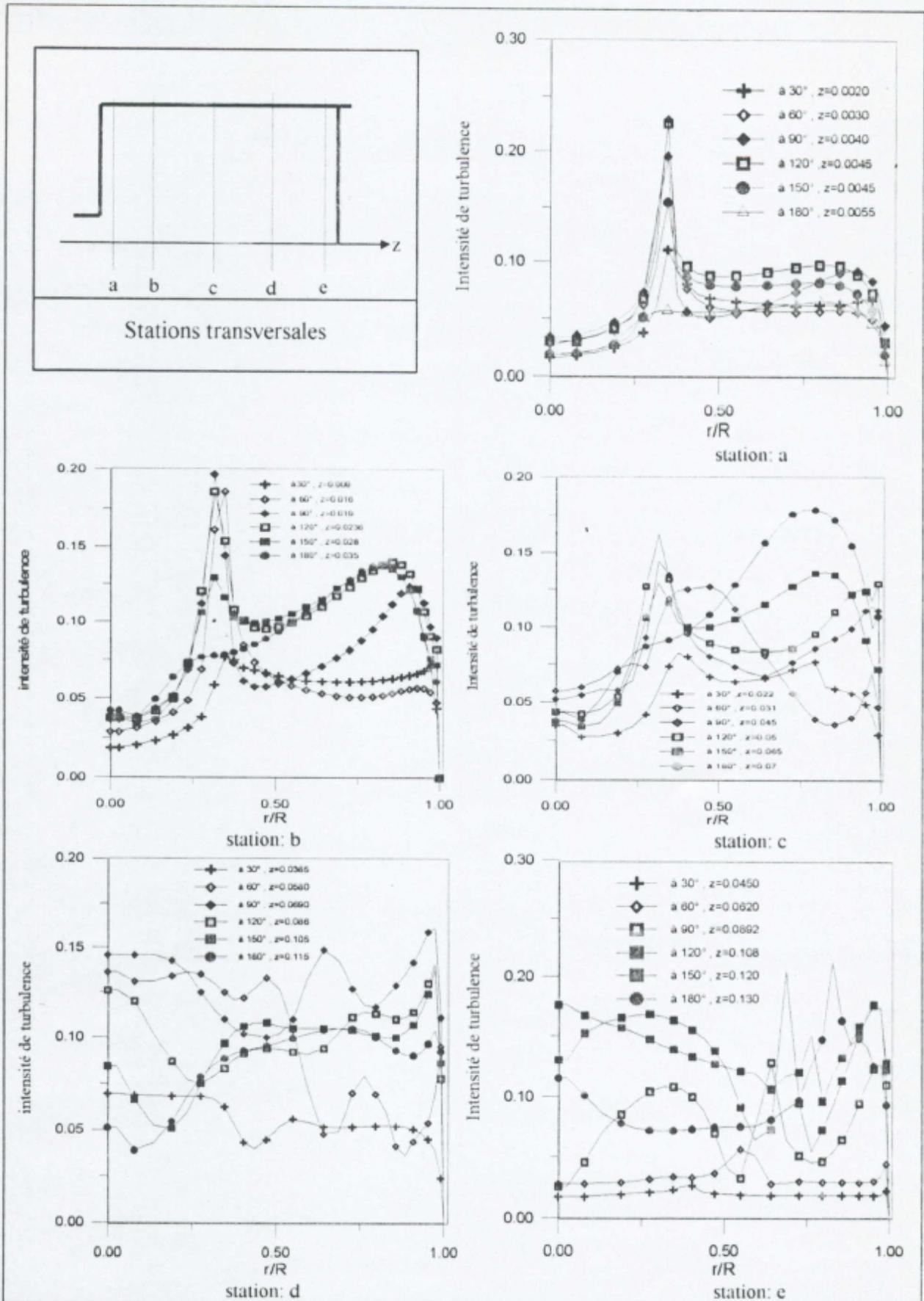


FIG (40) : Intensité de turbulence aux différentes stations transversales de la phase d'admission

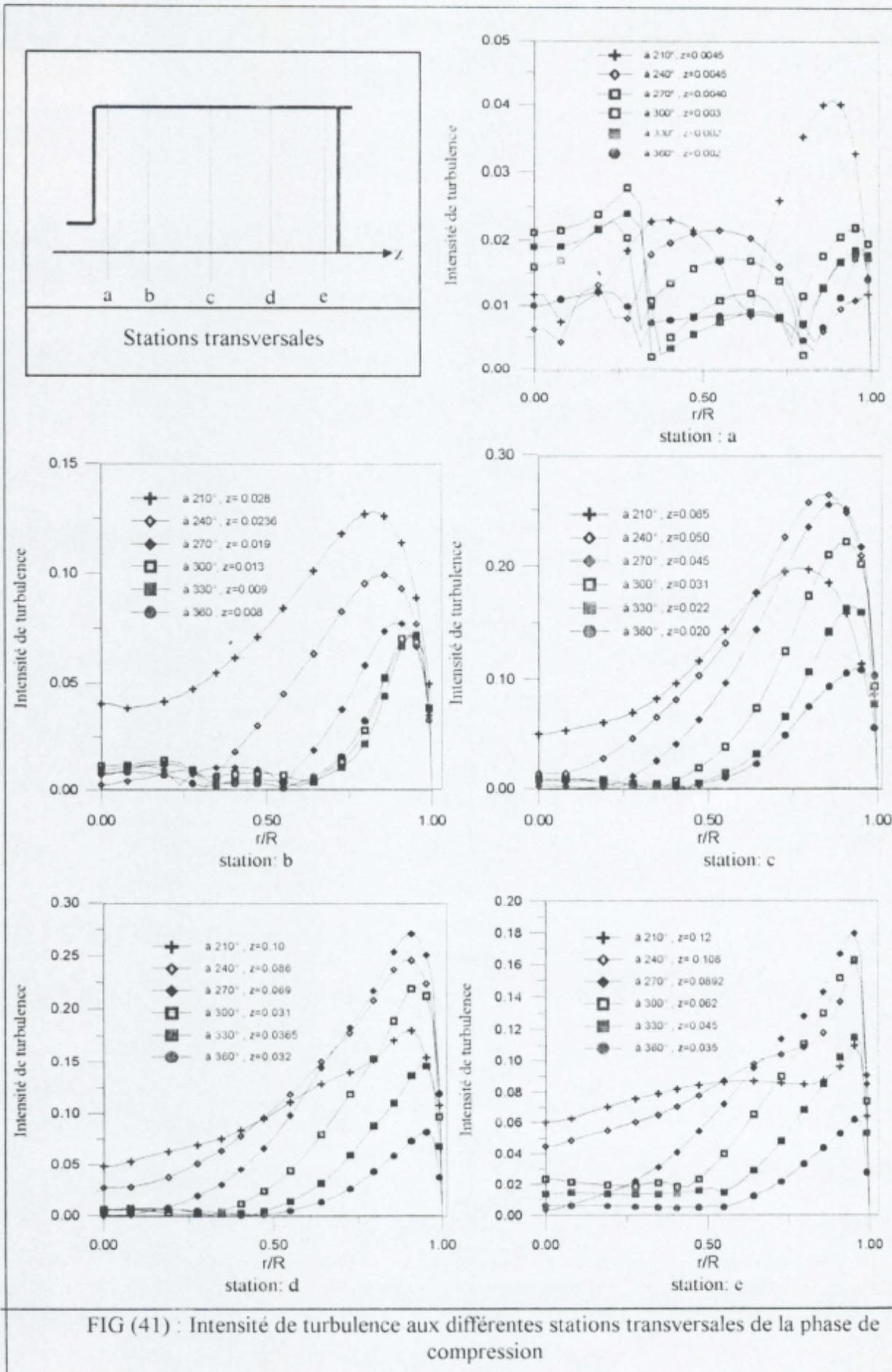


FIG (41) : Intensité de turbulence aux différentes stations transversales de la phase de compression

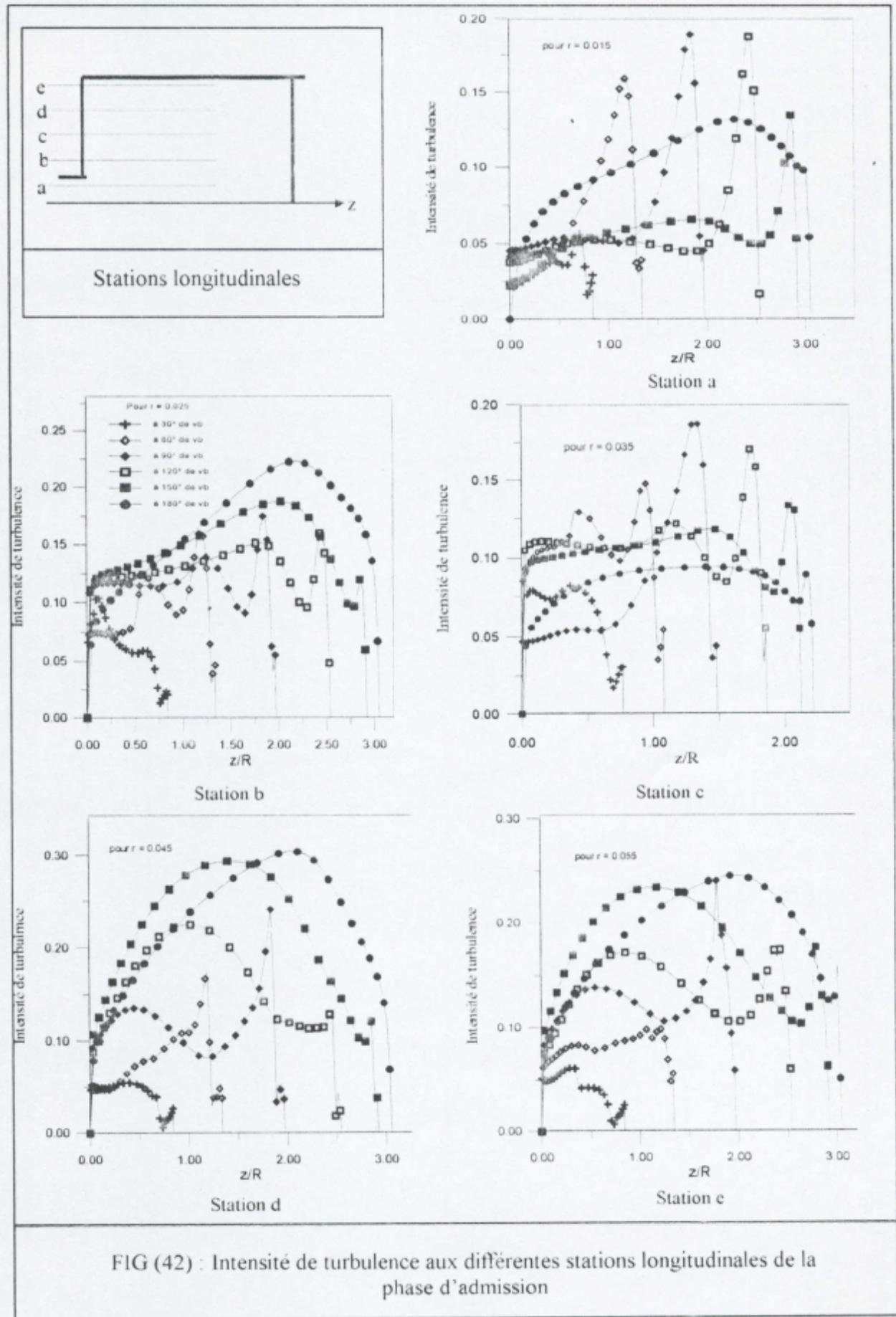


FIG (42) : Intensité de turbulence aux différentes stations longitudinales de la phase d'admission

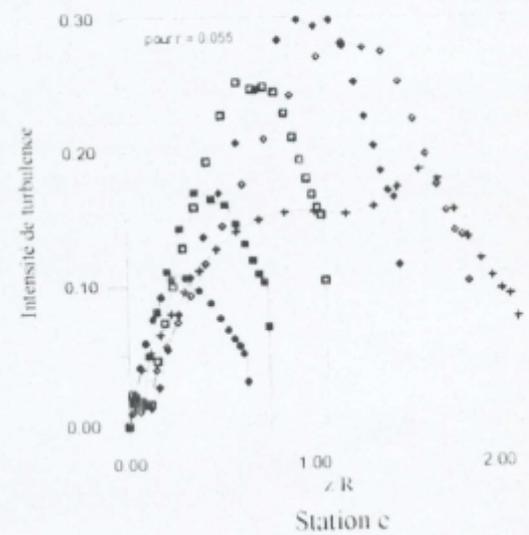
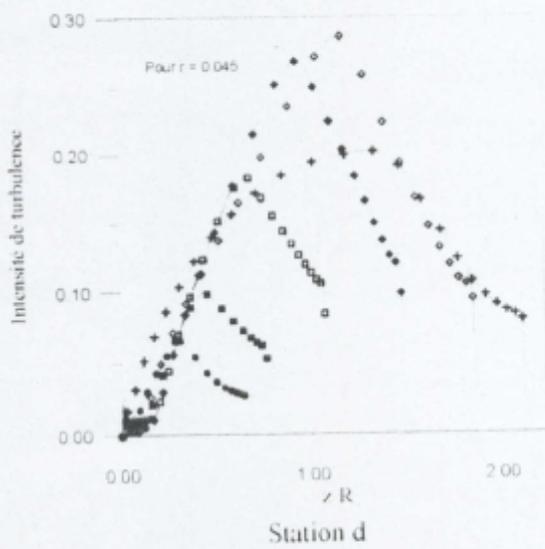
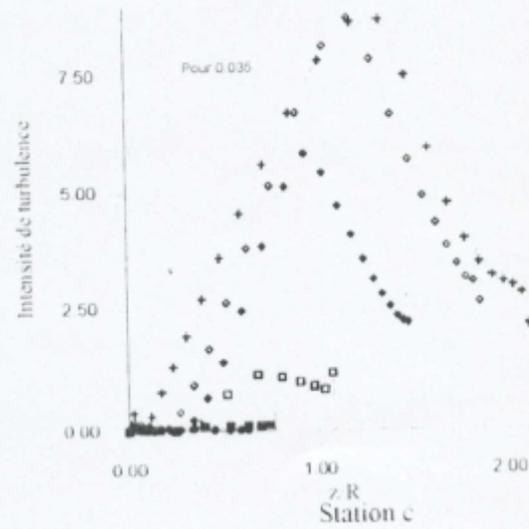
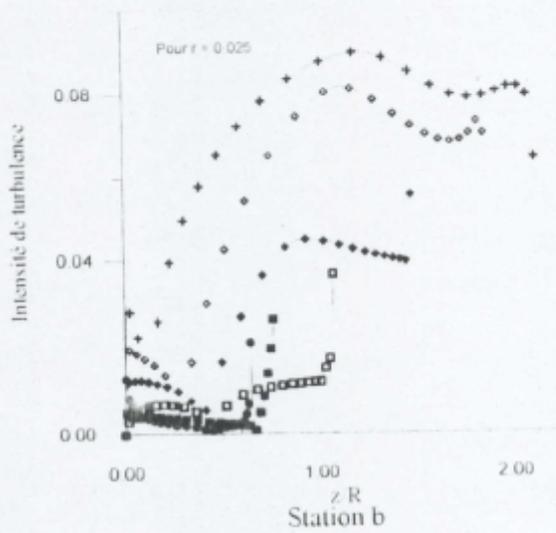
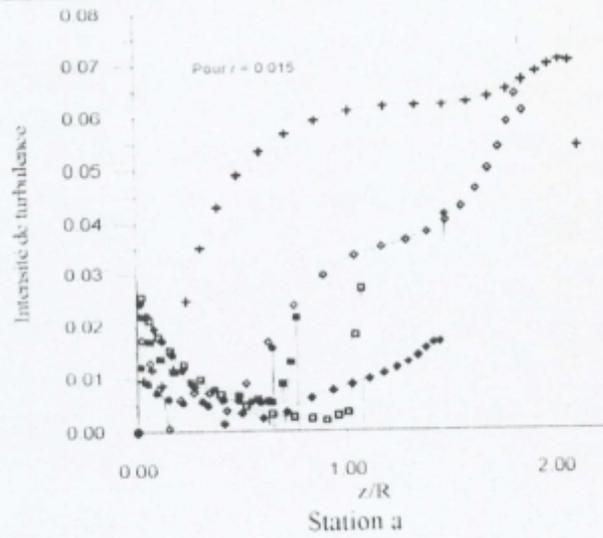
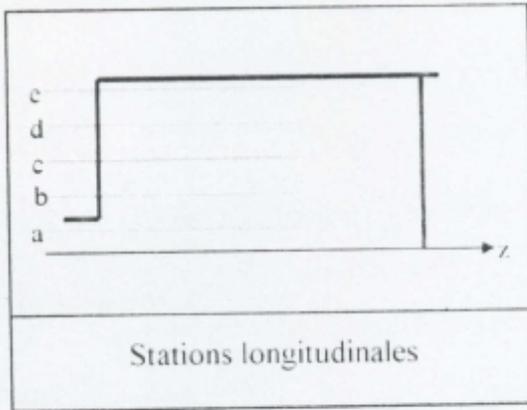


FIG (43) : Intensité de turbulence aux différentes stations longitudinales de la phase de compression

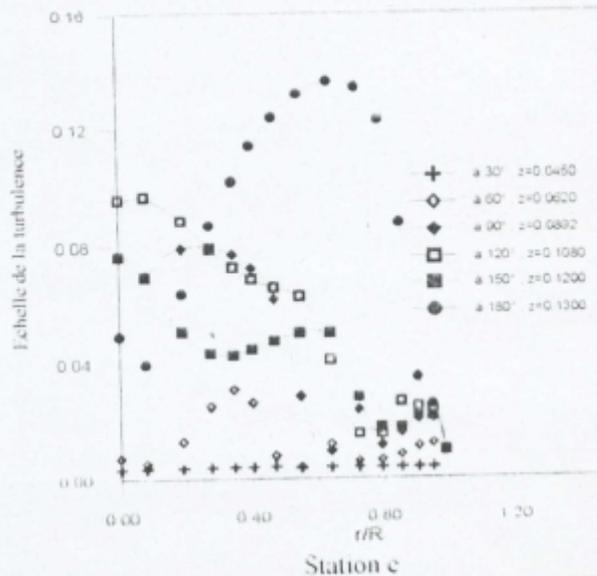
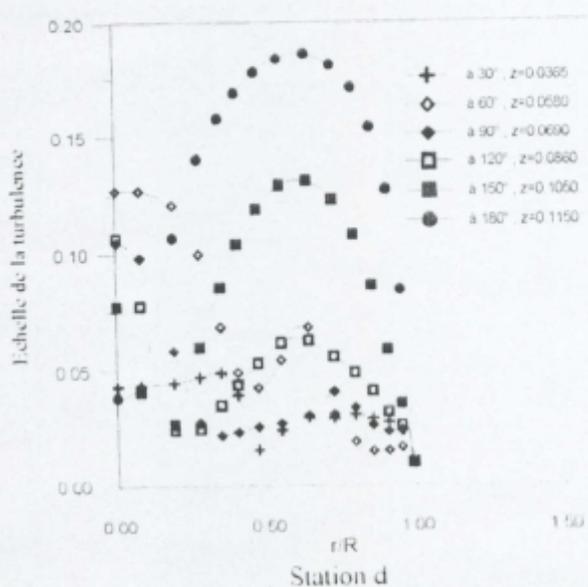
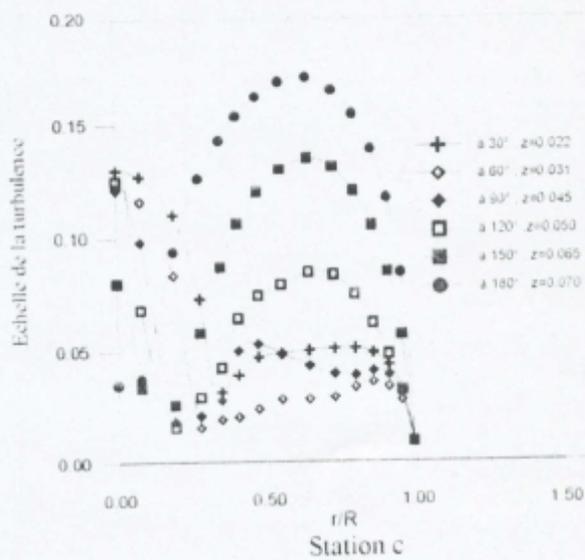
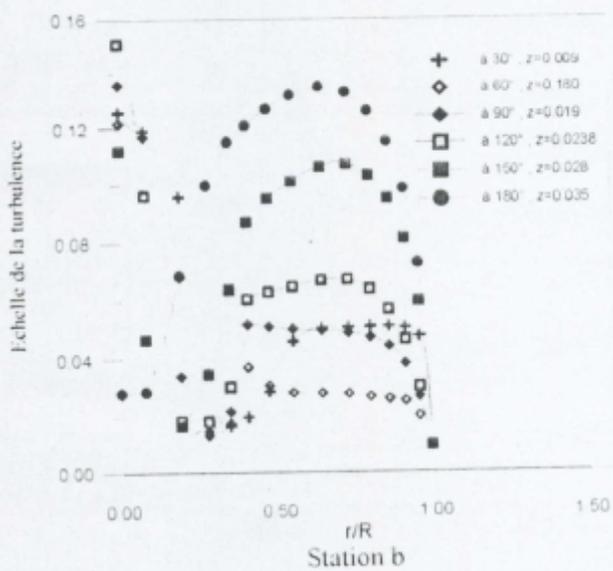
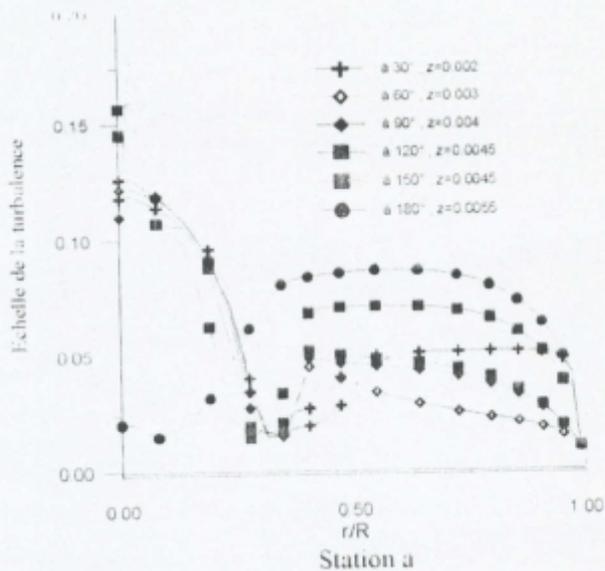
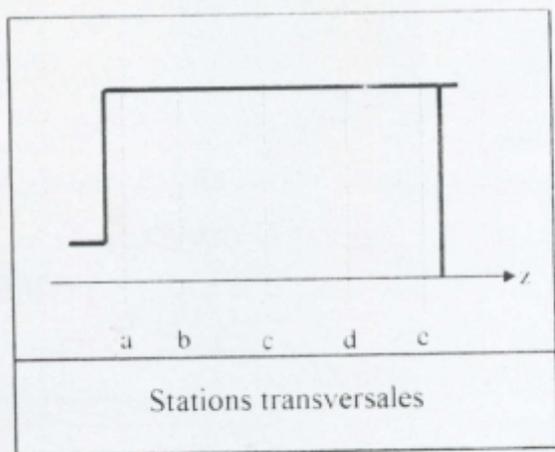


FIG (44) Echelle de la turbulence aux différentes stations transversales de la phase d'admission

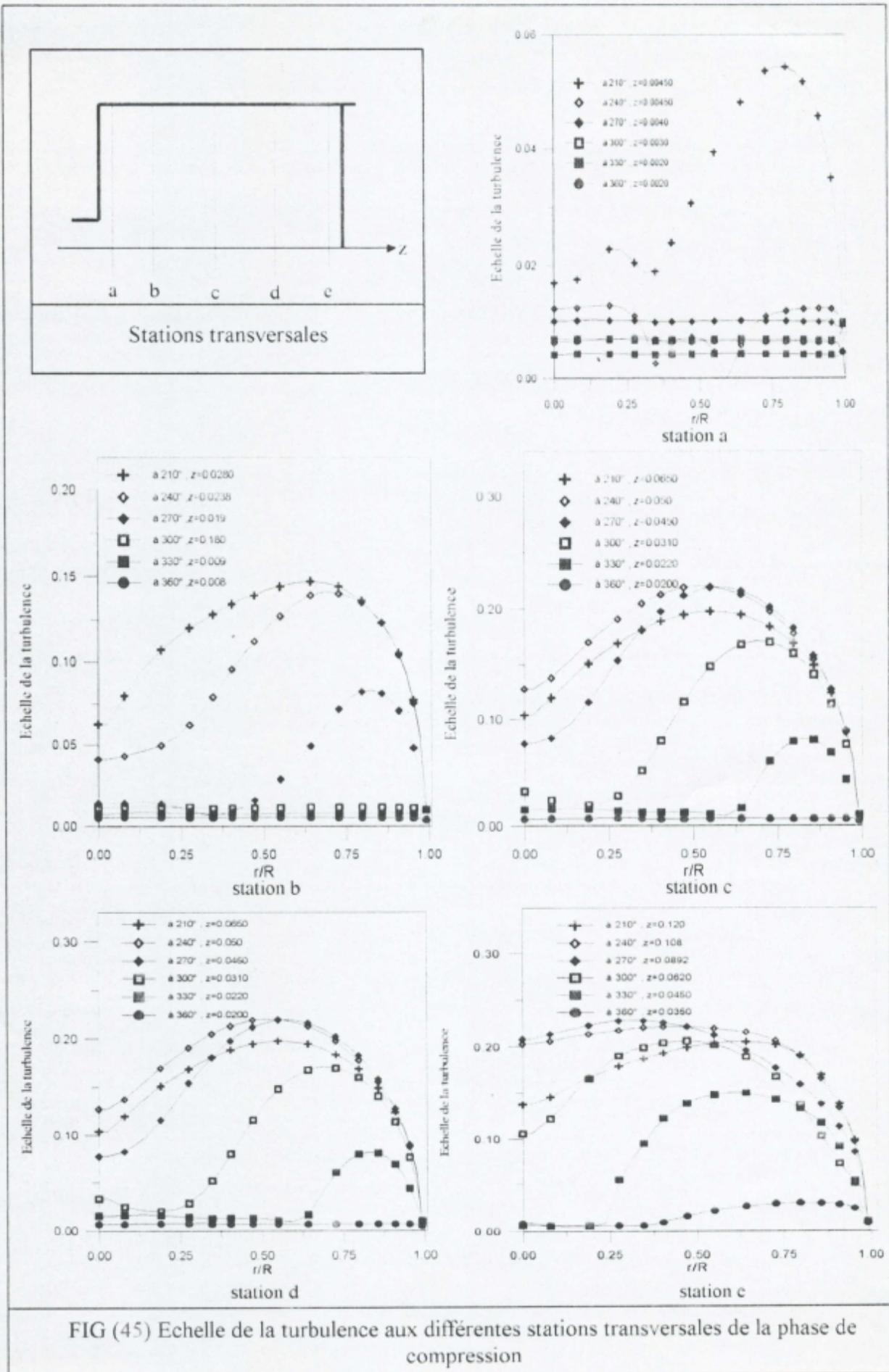


FIG (45) Echelle de la turbulence aux différentes stations transversales de la phase de compression

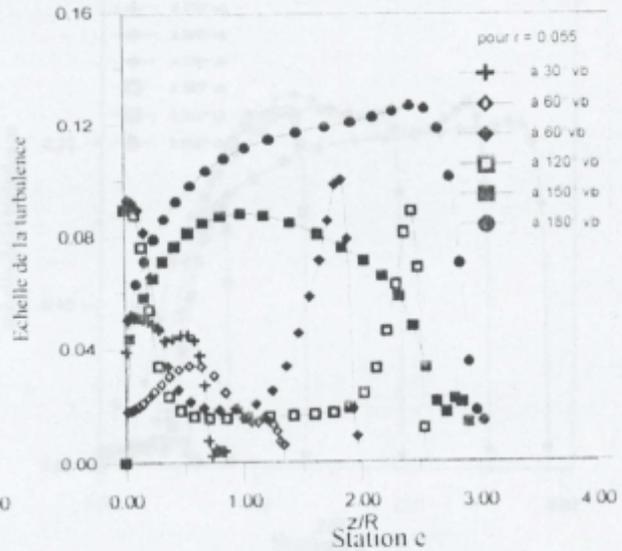
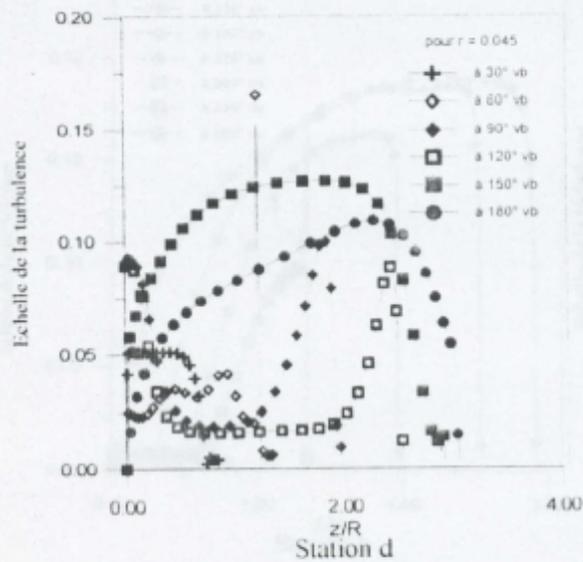
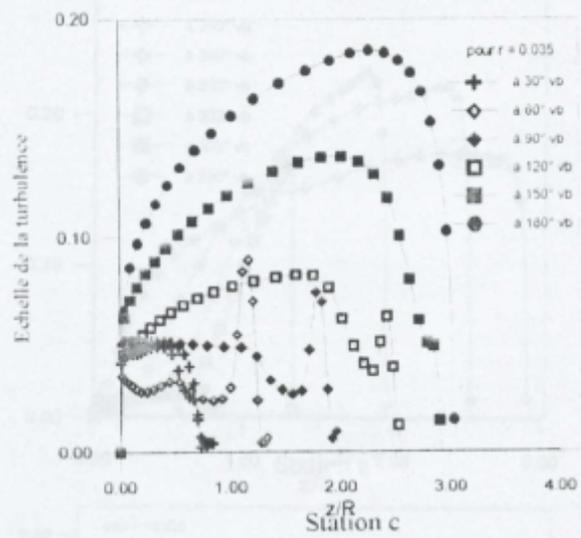
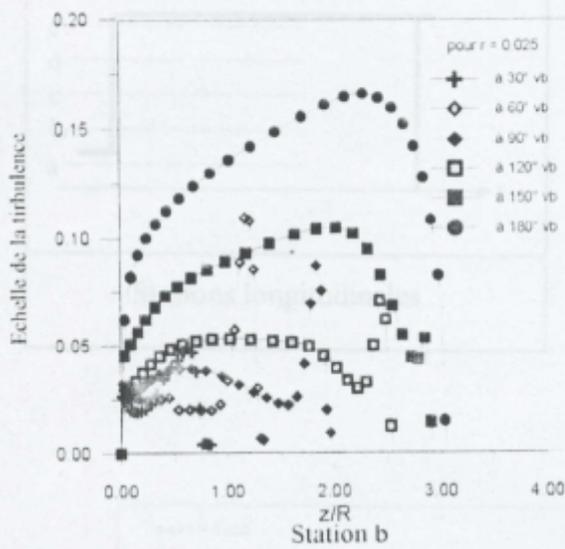
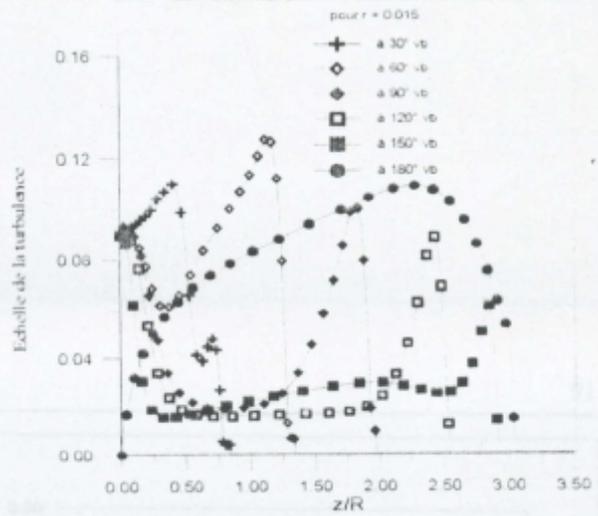
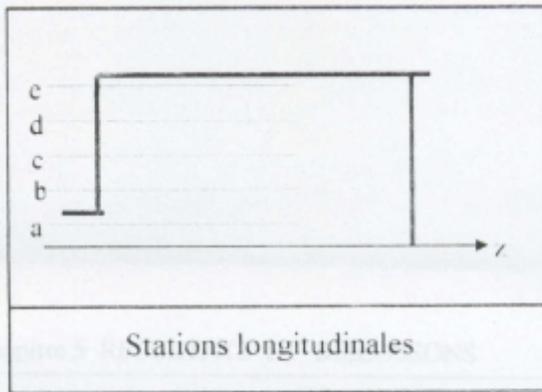


FIG (46) Echelle de la turbulence aux différentes stations longitudinales de la phase d'admission

### 5.5 Paramètres Thermodynamiques

On entant par paramètres thermodynamiques dans cette étude, la pression, la température et la densité. Le champ de la pression est déterminé par le biais de l'équation de continuité en utilisant l'algorithme classique « SIMPLE ». Tandis que la température est obtenue par la résolution de l'équation d'énergie et la densité par l'équation d'état du fluide supposé parfait .

Les champs de pression sont présentés durant la phase d'admission fig (48), et celle de compression fig (49). La remarque qu'on peut faire sur ces champs est que les valeurs minimales de la pression sont localisées au centre du tourbillon et celle maximale sur des zone près des parois solides et au niveau de l'axe de symétrie contrairement au gradient des vitesse on remarque aussi que ces zones sont aspirées par le piston lors de sa descente, laissant une chute légère par rapport à la pression d'entrée (1 bar). Ceci durant la phase d'admission. alors que pour celle de compression on remarque que la pression augmente lors de la remontée du piston jusqu'au Point Mort Haut (360° de vb) où le champ de pression reste presque uniforme.

On peut faire la même remarque pour la l'évolution de la densité représentée dans les figures (50) pour l'admission et (51) pour la compression.

Pour les champ de la température présentés durant les deux phases fig (52) et (53). Durant la phase d'admission fig (52), une légère chute par rapport à la température d'entrée (300k) est envisagée dans la zone de recirculation, alors qu'une légère augmentation, est située au début d'admission près de l'axe du cylindre, au fur et à mesure que le piston descend cette zone se déplace vers les parois qui sont supposées adiabatiques (pas de transfert de chaleur sur les parois vu l'absence de la combustion et la rapidité du processus).

Pendant la compression fig (53) la température augmente jusqu'à une valeur moyenne égale à 1.3 de sa valeur d'entrée c.à.d 390k qui est pour le taux de compression choisi (3.41) considérée acceptable pour l'inflammabilité.

### 5.6 Variation temporelle des grandeurs moyennes

Les valeurs moyennes des grandeurs scalaires sont calculées après chaque convergence en pas de temps par la manière suivante :

$$\phi_{moy} = \frac{\sum_i \phi_i \Delta v_i}{V_k}$$

$\phi_i$  : La grandeur  $\phi$  au point  $(i,j)$  du maillage.

$\Delta v_i$  : Le volume fini engendrant le point  $(i,j)$  du maillage.

$V_k$  : Le volume instantané du cylindre à l'itération  $k$ .

Ces grandeurs sont normalisées par leurs valeurs données à l'entrée ( $P_0, \rho_0, T_0, k_0$ ), la vitesse tangentielle  $w$  est normalisée par celle du déplacement du piston. L'évolution des celles-ci est présentées par la fig (54) telle que :

L'évolution des paramètres thermodynamiques résume ce qui a été illustré par les figures (48), (49), (50), (51), (52) et (53), une légère chute est envisagée durant l'admission et une augmentation remarquable et rapide durant la compression. Alors que les grandeurs liées au gradient des vitesses ( $k$  et  $w$ ) suivant la tête du piston dans son mouvement, ayant une augmentation durant l'admission et une chute durant la compression.

La vitesse d'entrée du fluide varie à chaque instant suivant la différence de pression entre le conduit d'admission et l'intérieur du cylindre :

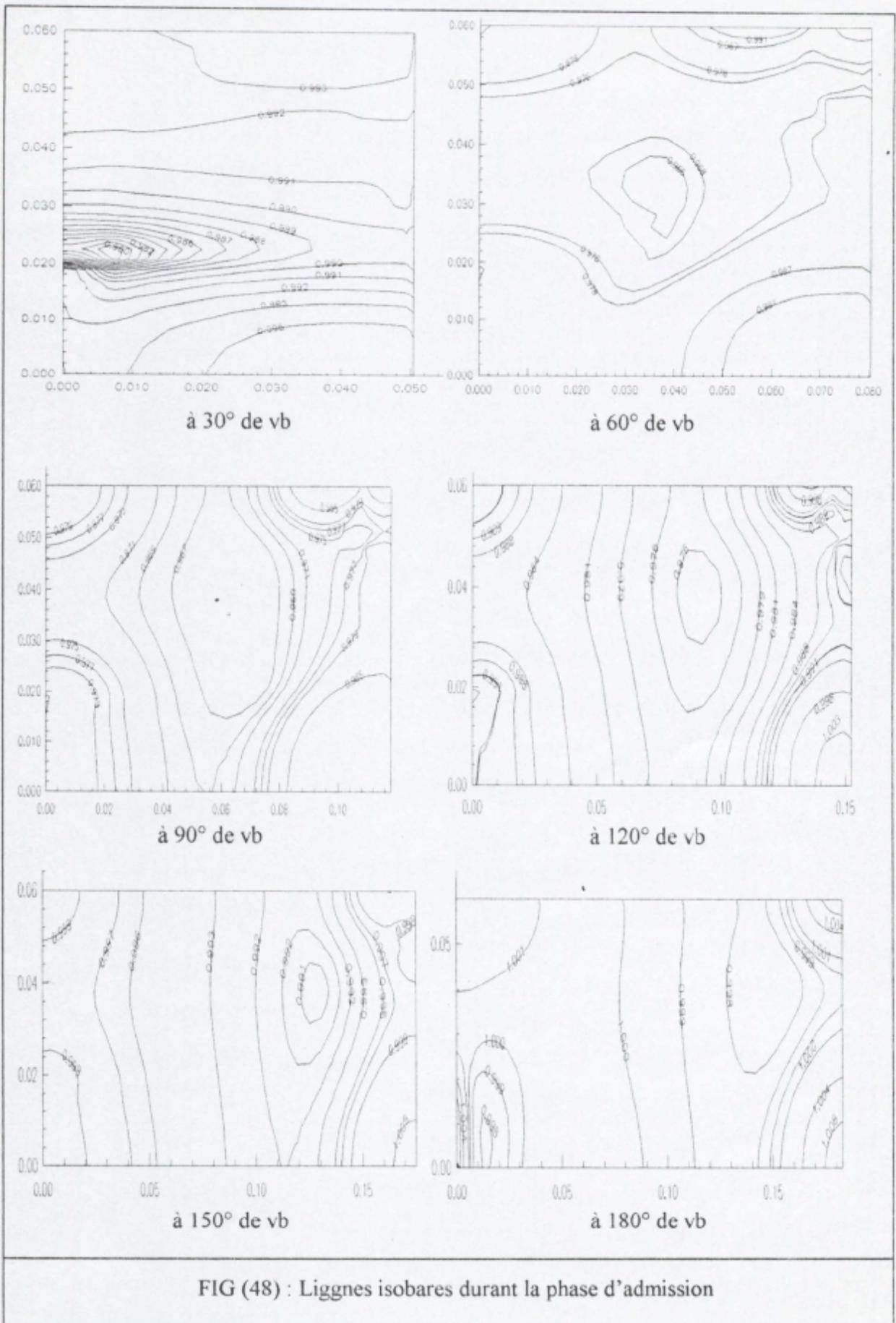
$$U_{asp} = \sqrt{2C_p T_0 \left( 1 - \left( \frac{P_{moy}}{P_0} \right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} \right)}$$

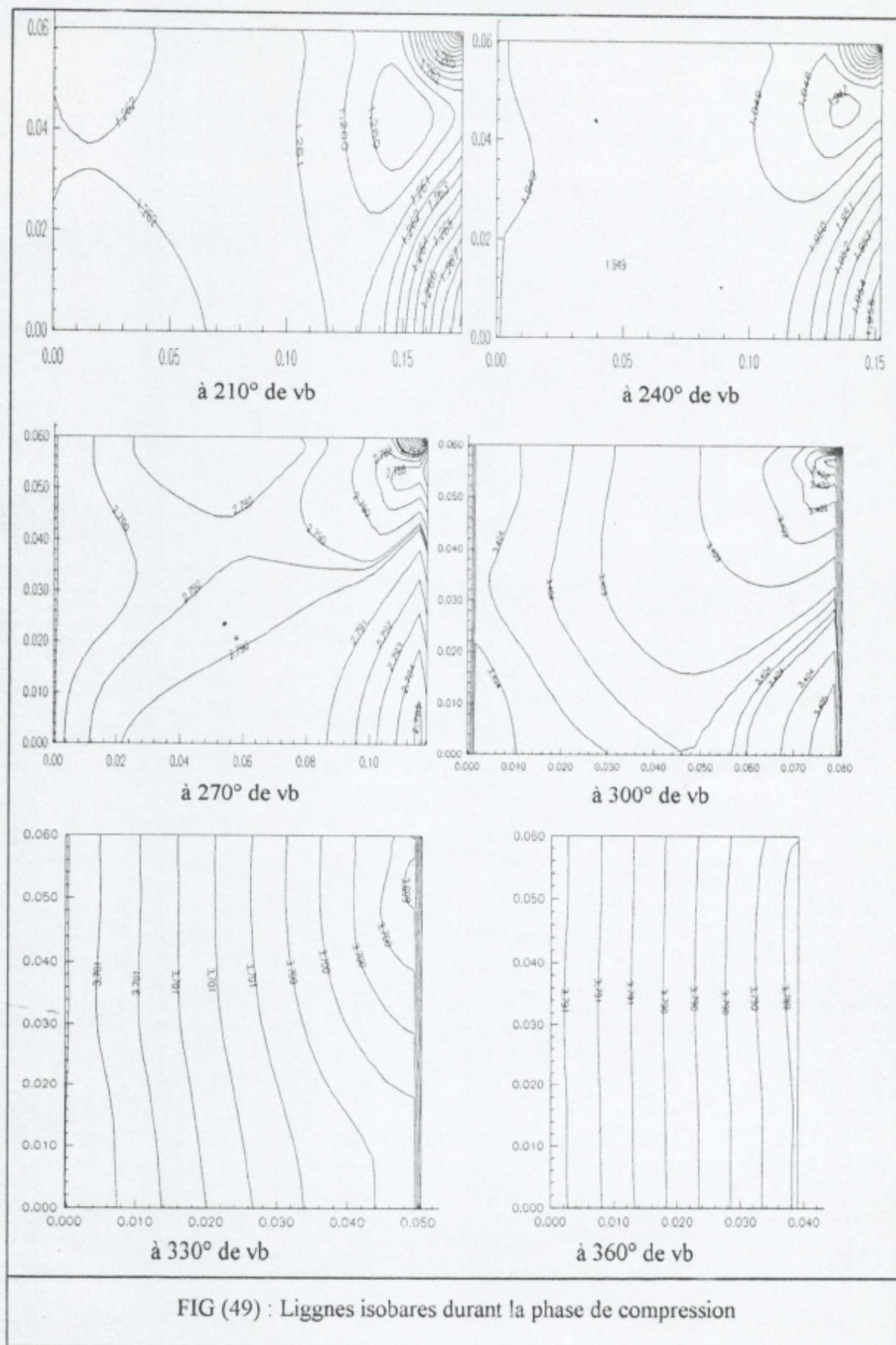
$P_0, T_0$  : la pression et la température dans la tubulure d'admission

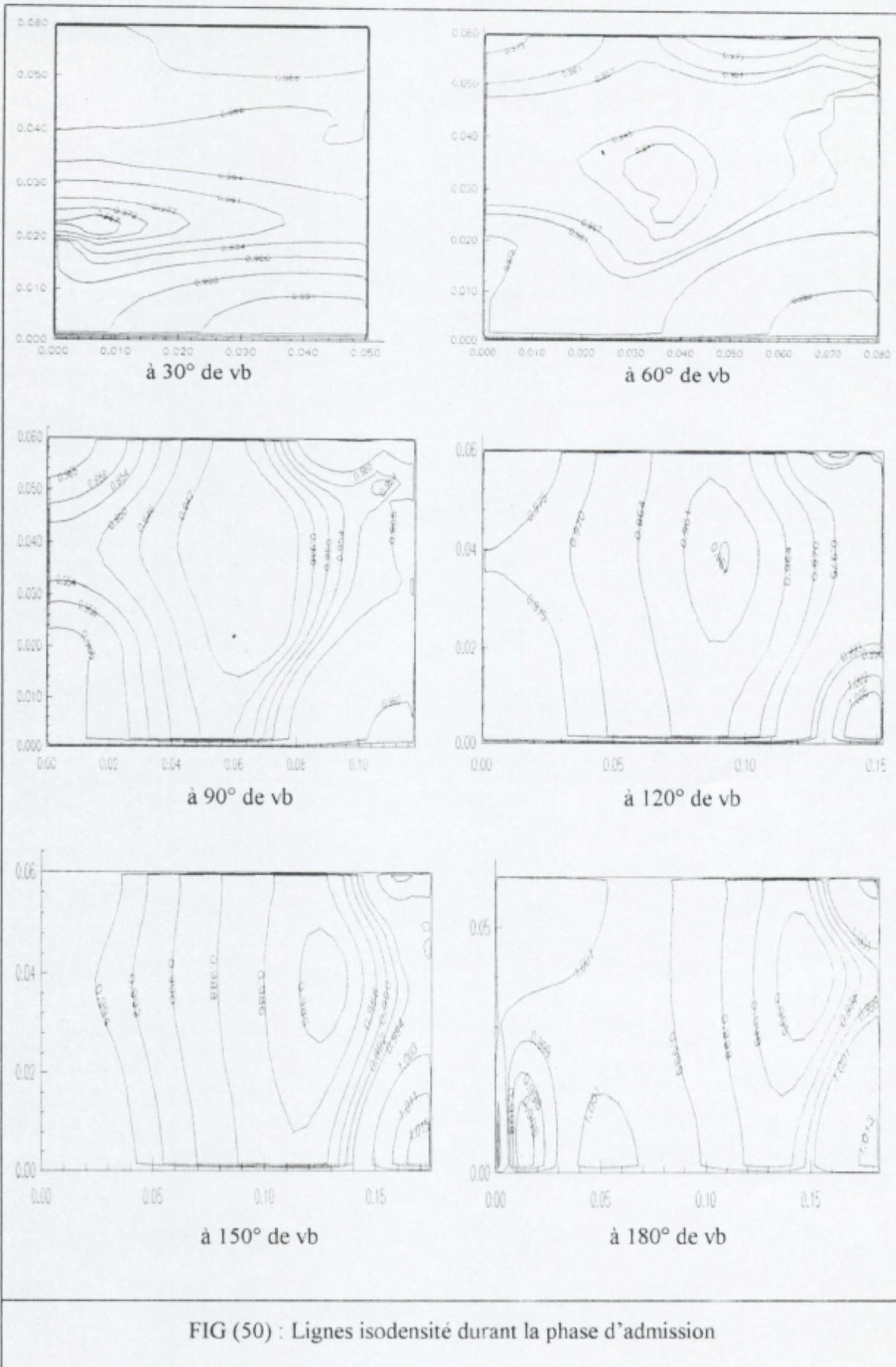
$P_{moy}$  : la pression moyenne instantanée à l'intérieur du cylindre, elle est donnée par :

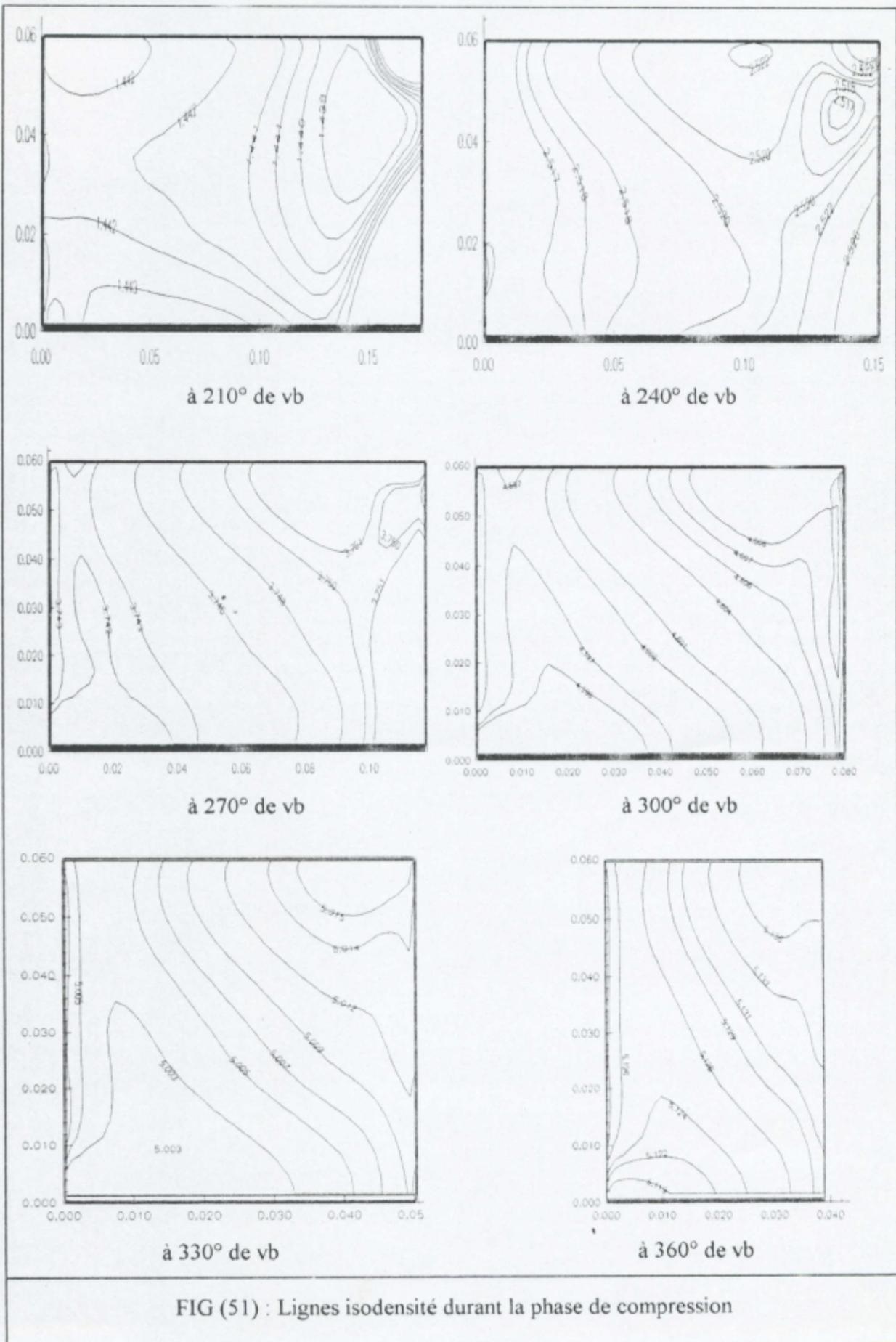
$$P_{moy} = \frac{\sum_i P_i \Delta v_i}{V_k}$$

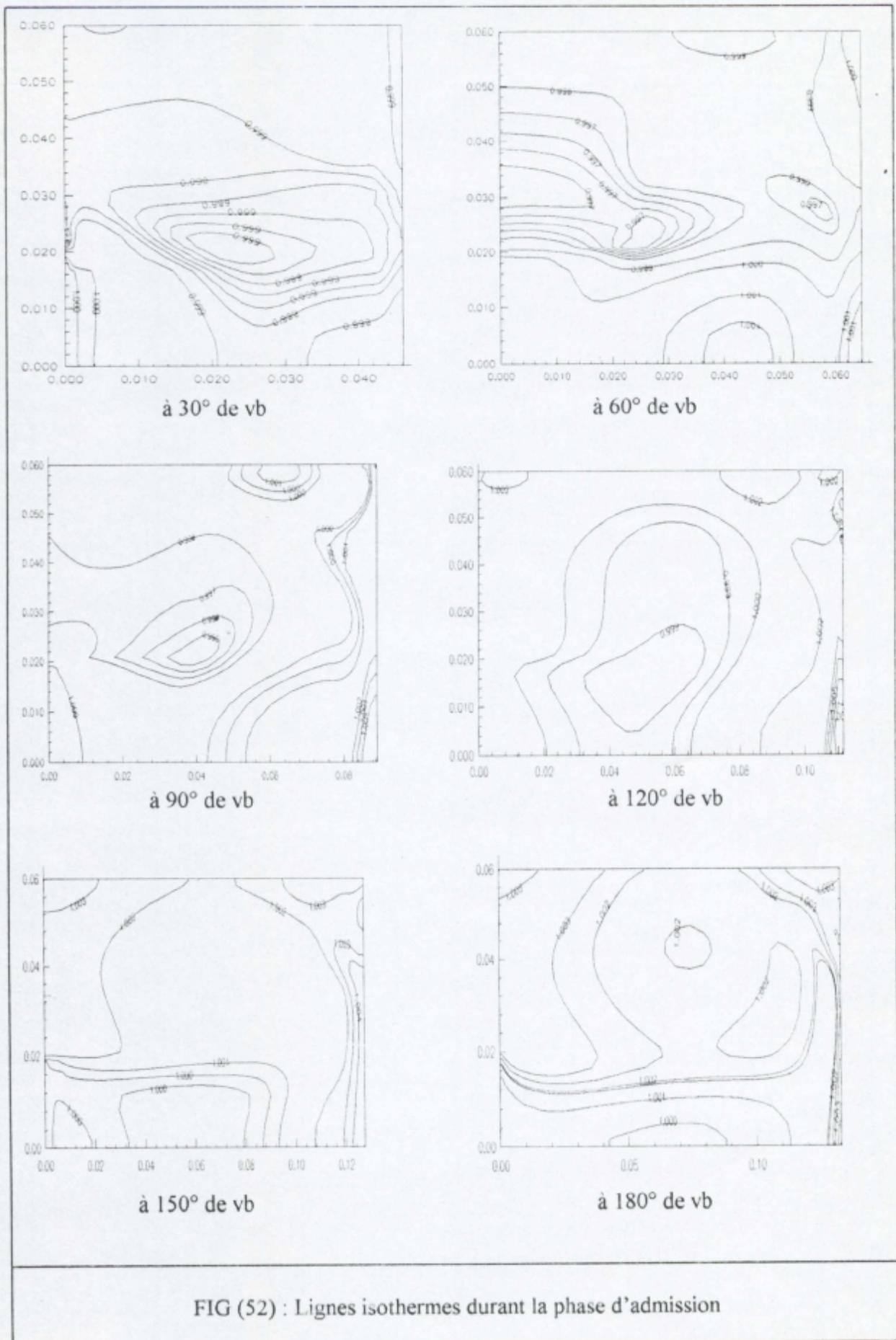
Elle atteint son maximum similairement à celle du piston, où elle prend 80 m/s, ce qui est acceptable en ordre de grandeur proportionnellement à la vitesse moyenne du piston.

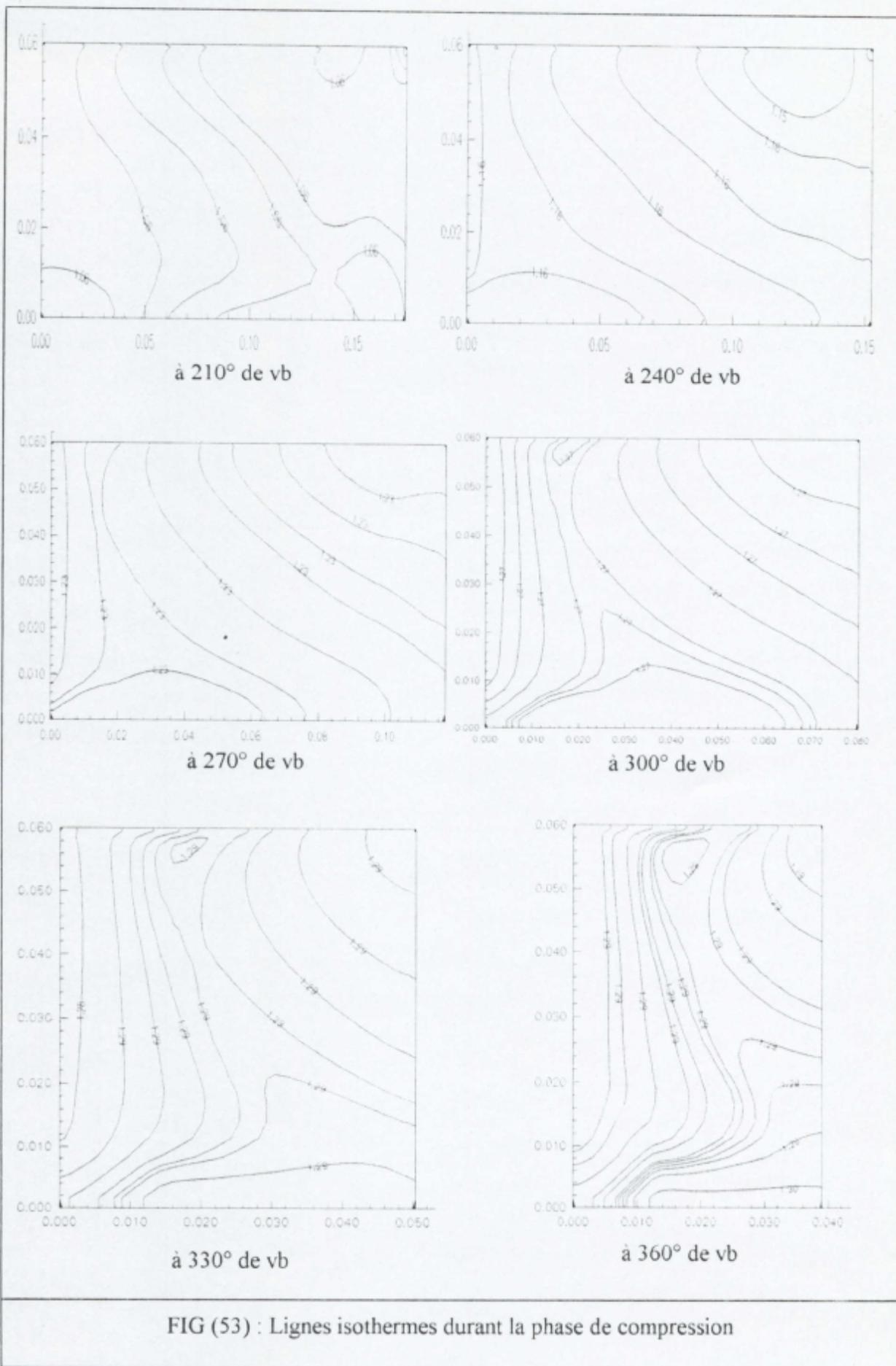












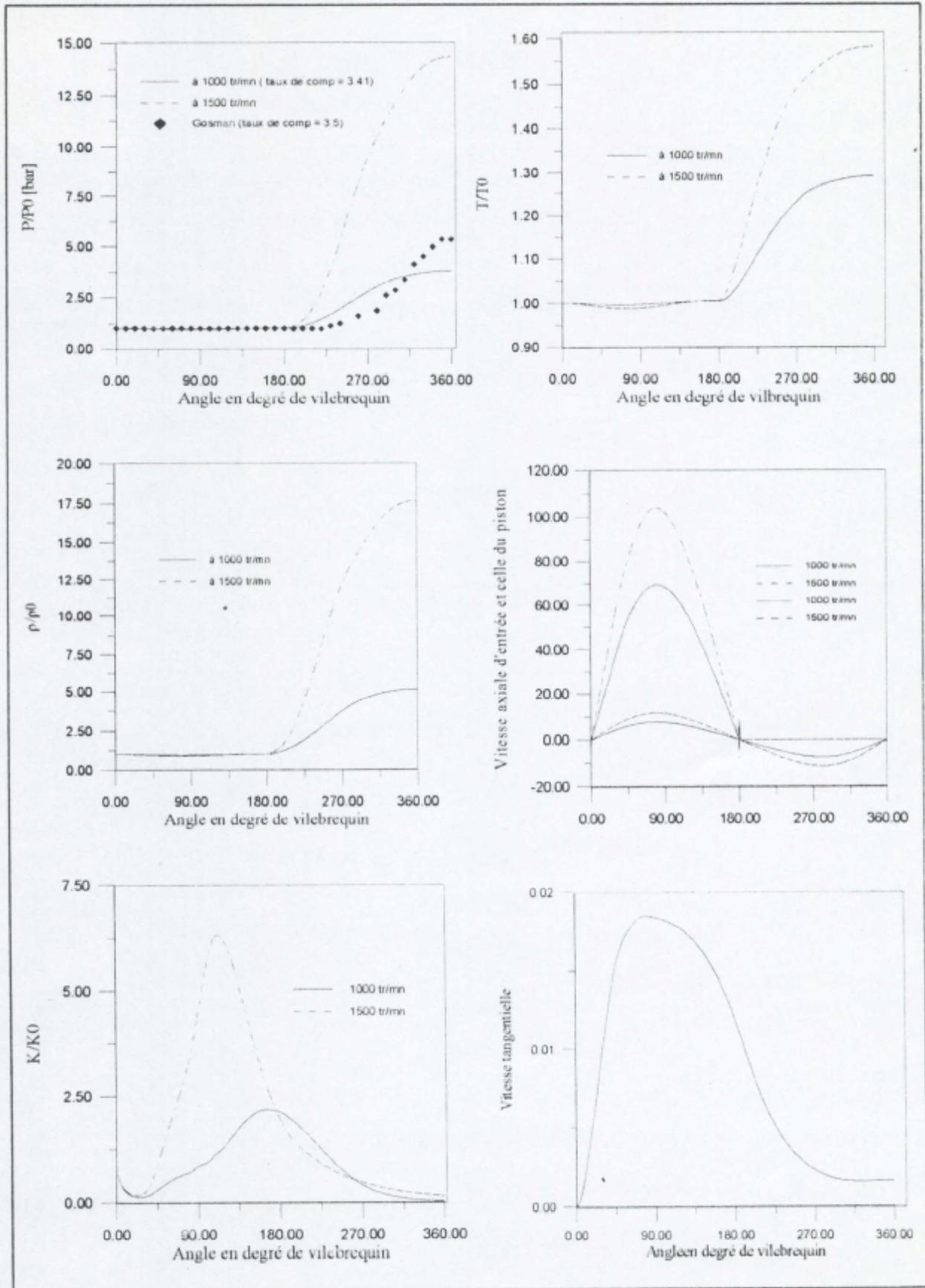


FIG (54) : Grandeurs moyennes durant les deux phases admission et compression

## CONCLUSION ET RECOMMANDATIONS

La résolution numérique en volumes finis des équations de transport est basée sur un équilibre qui doit s'établir entre les termes de variation temporelle, convection et diffusion et le terme source pour obéir au principe de la conservation des quantités transportables. Cet équilibre est relatif à un résidu maximum commun des grandeurs transportables qui doit être inférieur ou égal au résidu fixé pour les calculs, le choix de ce dernier est en liaison directe avec la capacité de la machine utilisée en terme de temps d'exécution; Ce qui laisse le code de calcul adapté à utilisation limitée sur un ordinateur personnel (PC).

C'est dans ces limites qu'on a réalisé notre travail. Les résultats sont obtenus avec un résidu maximum commun de 5% , en souhaitant une qualité des résultats plus performante sur un gros système ou une station de calcul.

Pour tester et valider l'adaptation réalisée, deux exécutions sont faites avec deux régimes de rotation du moteur; 1000 et 1500 tr/mn en gardant les mêmes caractéristiques géométriques du moteur. On a constaté qu'une augmentation (ou diminution) plus rapide des grandeur moyennes transportables pour 1500 tr/mn que pour 1000 tr/mn a lieu durant la phase de compression. Ceci est dû à l'augmentation de la masse d'air aspirée au fur et à mesure que le régime de rotation du moteur est rapide, ce qui est bien répondu à la physique du phénomène: aspiration-compression. Mais dans la pratique des moteurs alternatifs, du régime de rotation à un autre, les caractéristiques géométriques changent pour qu'un taux de remplissage et (ou) de compression soit convenable. La vérification de ceci dans notre étude est non disponible que pour une valeur limite du volume minimal du cylindre pour laquelle la génération du maillage répond à la stabilité numérique du problème. du faite que la distance entre la culasse et la tête du piston est gérée par la loi cinématique bielle-manivelle au moment où l'application de cette dernière sur la taille moyenne de la maille est souhaitable. Mais ceci demande une modification complète des routines GRID et GEOM qui s'occupent du traitement du maillage et de configuration géométrique dans le code utilisé.

Bien que les résultats recueillis ne reproduisent que l'aspect qualitatif de l'écoulement, il n'empêche qu'ils ouvrent la voie pour la simulation des autres phases du cycle.

De ce fait, notre recommandation est L'introduction de la combustion, et une meilleure modélisation des générateurs du swirl avec une étude de son influence sur le déroulement de la combustion et sur le transfert de chaleur à travers les parois solides du cylindre, en tenant compte d'une géométrie de la tête du piston autre que celle plate.

## BIBLIOGRAPHIE

- [01] B. E. LAUNDER et D. B. SPALDING  
The numerical computation of turbulent flows (1973)
- [02] S. RAGHAY, MY. H. ZOUGARI, A. HAKIM  
Numerical model for dynamic and thermal developments of a turbulent compressible flow, Faculty of sciences Semlalia, (Marocco).
- [03] A. BOUGHAMOURA, H. BELMABROUK, S. BEN NASRALLAH.  
Etude de la turbulence dans un cylindre muni d'un piston par la RDT et le modèle  $k-\varepsilon$  compressible, Ecole nationale d'ingénieurs de Monistir (Tunisie).
- [04] M. P. ERRERA, G. JANSSEMS  
Ecoulement autour de la soupape d'admission et dans la chambre de combustion d'un moteur diesel, Chatillon Sous Bagneux (F). ENTROPIE N° 122 (1985)
- [05] M. DOBREMELLE  
Etude dynamique et thermique de l'écoulement monophasique compressible, CNAM.
- [06] R. HADEF, A. MAMERI  
Aérodynamique de l'écoulement dans un moteur alternatif, 'JMM97' Guelma (Algérie).
- [07] D. A. KOUREMENOS, C. D. RAKOPOULES  
Analyse thermodynamique des processus d'écoulement et de combustion dans un cylindre du moteur diesel à injection directe à l'aide d'un modèle multi-zone. Grèce (1990).
- [08] SHIGEO FURUNO, SATOSHI IGUCHI  
The effect of 'Inclination angle of swirl axis' on the turbulence characteristics in a 4 valve lean burn engine with SCV. Toyota Motor Corp.
- [09] M. SAMIMY, C. A. LANGENFELD  
Experimental Study of Isothermal Swirling Flows in Dump Combustor. Ohio State University, Columbus, Ohio (1987).
- [10] TEOMAN UZKAN, J. R. HAZELTON  
The influence of swirl on the fresh charge stratification in an I C Engine combustion chamber. Society of Automotive Engineers, Inc. (1987).
- [11] G. KOMATSU, H. URAMACHI, Y. HOSOKAWA, et K. MOMOSE  
Numerical Simulation of Air Motion in The Swirl Chamber of a Diesel Engine (Effect of Connecting Port in Air Motion). JSME International Journal N° 3 (1991).
- [12] S. V. PATANKAR  
Numerical Heat transfer and Fluid Flow, McGraw-Hill, New York, 1980.
- [13] HABCHI C  
Contribution à la simulation numérique d'un moteur deux temps. thèse de Doctorat (1990) Institut Français du Pétrole et des Moteurs Rueil Malmaison. France.
- [14] J. K. LEE, K. H. LEE & J. G. JANG  
Effect of Parameters on Performance of Two-Stage Swirl-Flow Fluidized Bed Coal Combustors.  
Journal of Chemical Engineering of Japan. Vol. 24 N° 6. 1991. PP.703-708.
- [15] CHENG P. C et YING S. K  
Study of Turbulent Heat Transfer in Reciprocating Engine Using an Algebraic Grid Generation Technique. (1995).

- [16] Z. HAN et D. REITZ  
Turbulence Modeling of Internal Combustion Engines Using RNGk- $\varepsilon$  Models.  
Combustion Sci and Tech. 1995 Vol. PP . 267-295.
- [17] DAVID G. S , PHILIP J. S and L. DOUGLAS S.  
Modeling of Swirl in Turbulent Flow Systems Prog. Energy. Combust. Sci 1986 Vol.  
12. PP. 163-250.
- [18] K. DÖBBELING, B. LENZE, W. LEWKEL  
Four-Senor Hot-wire Probe Measurements of the isothermal flow in a Model  
Combustion Chamber at Different Levels of Swirl. Experimental Thermal and Fluid  
Science (1992)
- [19] S. MATSUSHITA, T. INOUE, K. NAKANICHI, T. OKUMURA, et ISOGAI  
effect of Helical Port with Swirl Control Valve on the Combustion and Performance of  
S. I. Engine. Toyota Motor Corp.(1986).
- [20] P. S MEHTA, K. GUPTA  
Modeling of spray-swirl interaction in direct injection diesel engine combustion  
chambers. Proc Instn Mech Engers Vol 199 N° D3 (1985).
- [21] D. BELKHARCHOUCHE  
Simulation Numérique de L'écoulement Instationnaire Laminaire ou Turbulent d'un  
Fluide Inerte dans une Chambre de Combustion, Thèse de Magister , Université de  
Constantine (Algérie) 1995.
- [22] N. BOKHESAR  
Injection de deux Fluides non Réactifs aux Régimes Laminaire et Turbulent dans une  
Chambre de Combustion à Géométrie Complexe. Thèse de Magister , INES de  
Mécanique d'Oum El Bouaghi (Algérie) 1994.
- [23] P. A. LIBBY, et F. A. WILLIAMS  
Turbulent Reacting-Flows, New York (1980).
- [24] JOHN B. HEYWOOD  
Internal Combustion Engine Fundamentals. MIT (1988).
- [25] KENNETH KUAN-YUN KUO  
Principles of Combustion (1986).
- [26] ROWLAND S. BENSON  
The Thermodynamics and Gas Dynamics of Internal-Combustion Engines, Volume II ,  
(1982).
- [27] A K GUPTA, D G LILLEY, N SYRED  
Swirl Flows, Abacus Press (1984).
- [28] Reference Manual for micro COMPACT Version 2.1 (*a general-purpose computer  
program for tow-dimensional fluid flow and heat transfer*) , Inovative Research, Inc,  
Maple Grove, Copyright 1988-1991.
- [29] P. G. HUANG, B. E. LAUNDER, et M. LESCHZINER  
The Computer Code TEAM Guid , Divi0sion of Thermofluids , Dept. of Mech. Eng.  
(UMIST)
- [30] B. E. LAUNDER, and D. B SPALDING  
Lectures in Mathematical Models of Turbulence  
Academic press ING. (LONDON) LTD. Seconde printing 1976.
- [31] A. CHEHHAT & B. BOUMEDDANE  
Modélisation Numérique de L'écoulement Turbulent et Instationnaire à L'intérieur  
d'un Cylindre d'un Moteur à C. I ; COMAJEP 3 Tamenrasset, Algérie

- [32] HADEF. R et MAMERI. A  
Simulation Numérique de l'injection Turbulente d'un Fluide Compressible dans une  
Chambre Fermée: Etude dynamique et thermique; 3<sup>rd</sup> inter Meeting on Energetic  
Physics Béchar (Algérie) 1996 PP 331-334.
- [33] MAMERI. A, HADEF. R & KHELDUONE. F  
Etude numérique de l'impact d'un jet compressible turbulent sur une plaque  
horizontale; 5<sup>th</sup> NSM INGM Boumerdès 1996 PP 61-66.
- [34] HADEF. R et MAMERI. A  
Phénomène de transport turbulent dans un réacteur à deux jets coaxiaux; 3eme congrès  
de Mécanique, Tetouan Maroc 1997 PP 735-740.



Handwritten notes on a set of four horizontal lines:  
1. *Ch. 1*  
2. *Ch. 2*  
3. *Ch. 3*  
4. *Ch. 4*

