

REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE
MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR ET DE RECHERCHE SCIENTIFIQUE

UNIVERSITE DE BLIDA
INSTITUT DES SCIENCES EXACTES
DEPARTEMENT DE PHYSIQUE

THESE DE MAGISTER

SPECIALITE PHYSIQUE
OPTION PLASMAS ET ASTROPHYSIQUE

THEME

**Gravitation Non Symétrique Topologique
à 2+1 Dimensions .**

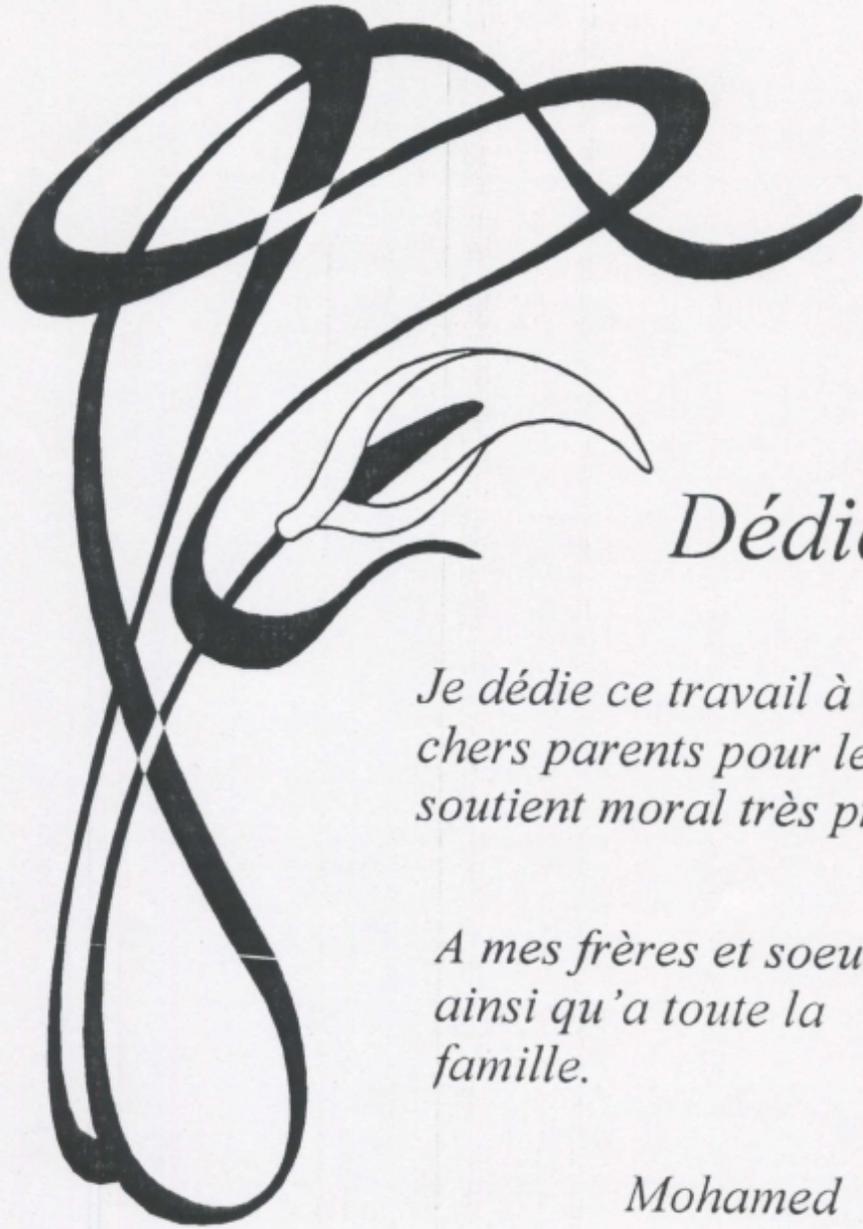
PAR

MOAKAFI MOHAMED

PRESENTE DEVANT LE JURY :

PRESIDENT : Mr A. AMGHAR (M.C, I.N.H Boumerdès)
RAPPORTEUR : Mr N. MEBARKI (Prof, Univ. Constantine)
EXAMINATEURS : Mr A. ABADA (M.C, E.N.S Kouba)
Mr M. BENTAIBA (M.C, U.S.T.B)

BLIDA, ALGERIE 1998



Dédicace

*Je dédie ce travail à mes
chers parents pour leur
soutien moral très précieux.*

*A mes frères et soeurs,
ainsi qu'à toute la
famille.*

Mohamed

Remerciements.

Le sujet de cette thèse m'a été proposé par Mr N. Mebarki. Sans son aide, ses encouragements et son soutien constant, cette thèse n'aurait pas vu le jour. Je tiens ici à lui témoigner ma profonde gratitude et à lui rendre un hommage prononcé pour ses grandes qualités scientifiques et humaines.

Durant la préparation de cette thèse, j'ai eu l'occasion de faire plusieurs séjours à l'Institut de Physique de l'Université de Constantine. Pour l'accueil chaleureux qu'il m'a été réservé, je remercie toute l'équipe de recherche du labo de Physique Théorique et tout particulièrement Mrs M. Haouchine et H. Aissaoui.

Je remercie Mr A. Amghar de m'avoir fait l'honneur d'accepter de présider le jury de soutenance de cette thèse.

Je remercie également Mrs A. Abada et M. Bentaiba d'avoir accepté d'être membres du même jury.

Je saisis cette occasion pour remercier tous mes amis du Centre Culturel de Boufarik, et plus particulièrement le club d'Informatique et la Bibliothèque, pour leur aide précieuse.

Abstract.

In this thesis we had purposed to us to build a topological non symmetric theory of gravitation in three dimensions.

We started by writing the appropriate field equations from the topological considerations, and we linearised this late by expanding the general metric about an arbitrary Einsteinian background metric.

After this, we made a link with the topological symmetric theory of gravitation (TMG) by adopting his Einsteinian metric. This choice permits an explicit writing of our equations.

The obtained equations leads to a set of four non linear differential equations for four inconnus. For solving our equations we need to use a power calculator, and a power method of calculus, because his high non-linearity.

Because the non-disponibility of an adequate calculator, we had turned to discus the types of solutions which can be generated by our differential equations. Finally, we obtained that the form of this equations leads to an asymptotiquely Euclidean comportment at infinity, and that it can be exist the Wormhole regular solutions.

Résumé

Dans cette thèse nous nous sommes proposé de construire une théorie de la Gravitation Non Symétrique Topologique à trois dimensions.

Nous avons commencé par écrire les équations du champ appropriées de cette théorie à partir de considérations topologiques, puis nous avons linéarisé ces dernières en développant la métrique générale au voisinage d'une métrique Einsteinienne arbitraire.

Après cela, nous avons fait le lien avec la théorie de la gravitation symétrique topologique (TMG) en adoptant la métrique Einsteinienne de cette dernière. Ce choix permet, alors, une écriture plus explicite de nos équations.

Les équations obtenues forment, en fait, un système de quatre équations différentielles, non linéaires, à quatre inconnues. La résolution de nos équations demande l'utilisation d'une méthode de calcul et d'un calculateur de puissance conséquente, Vu le haut degré de non - linéarité qu'elles présentent.

A défaut de calculateur adéquat, nous nous sommes tourné vers la discussion des types de solutions qui pourraient être générées par nos équations différentielles. Nous trouvons, finalement, que la forme de ces équations suggère un comportement asymptotique Euclidien à l'infini et que des solutions régulières, de type Trou de ver (Wormhole Solutions), peuvent exister.

Table des Matières

Introduction	1
<u>Chapitre I : Gravitation Non Symétrique.</u>	
I.1: Introduction.....	3
I.2: Structure du champ.....	4
I.3: Lagrangien de NGT.....	6
I.4: Nouveau formalisme de NGT.....	8
I.5: Les équations du champ.....	11
I.6: Prédications de NGT.....	12
<u>Chapitre II : Solutions Statiques à Symétrie Sphérique de NGT.</u>	
II.1: Introduction.....	13
II.2: Solutions statiques.....	13
II.3: Interprétation des résultats.....	20
<u>Chapitre III : Gravitation Topologique.</u>	
III.1: Introduction.....	21
III.2: Théorie de YANG-MILLS topologiques.....	21
III.3: Gravitation Topologique.....	22
III.3.1: EGT Topologique.....	25
III.3.2: NGT Topologique.....	27
<u>Chapitre IV: NGT Topologique à $d=2+1$.</u>	
IV.1: Introduction.....	28
IV.2: Formalisme Général.....	28
IV.3: Linéarisation de la théorie.....	29

IV.4: Paramétrisation du problème.....	32
IV.5: Développement de la partie Einsteinienne.....	33
IV.5.1: Calcul du tenseur d'Einstein.....	34
IV.5.2: Calcul du tenseur topologique.....	36
IV.6: Développement de la partie perturbée.....	38
IV.6.1: Calcul du tenseur d'Einstein perturbé.....	39
IV.6.2: Calcul du tenseur topologique perturbé.....	42
IV.6.3: Développement de l'équation du champ (IV.15).....	44
IV.7: Choix de la métrique $^{(E)}g_{\mu\nu}$	44
IV.7.1: Simplification de la partie Einsteinienne.....	46
IV.7.2: Simplification de la partie perturbée.....	47
IV.7.3: Discussion des solutions.....	52
Conclusion.....	53
Annexes.....	55
Références.....	72

Introduction Générale

INTRODUCTION

La Relativité Générale a expliqué bon nombre de phénomènes physiques, mais pas tous. Une généralisation de la théorie a donné naissance à la théorie du champ unifié (UFT) à travers laquelle Einstein essaya d'unifier l'électromagnétisme et la gravitation. Son idée était de prendre une métrique générale $g_{\mu\nu}$, pas nécessairement symétrique, et d'identifier la partie antisymétrique comme étant le champ électromagnétique $F_{\mu\nu}$, mais ce fut l'échec.

Pour plusieurs raisons, beaucoup d'efforts ont été dépensés, après cela, dans l'étude des extensions de la structure géométrique de RG. Les deux extensions les plus populaires ont été la Supergravité et les théories de Kaluza-Klein. Des tentatives ont, aussi, été faites pour généraliser ces idées dans le cadre des théories de Jauge, de la Gravitation Quantique, de la Géométrie Différentielle et autres. Malheureusement, ni la Supergravité ni les théories de Kaluza-Klein n'ont conduit à des prédictions testables expérimentalement.

En se basant sur l'idée d'Einstein, Moffat (1979) a repris la théorie UFT, mais dans un cadre gravitationnel pur. La théorie de Gravitation Non Symétrique de Moffat (NGT) a été développée dans une série de publications démontrants l'accord de celle-ci avec les données expérimentales récentes, elle reste, cependant, jusqu'à ce jour, sujette à de nombreuses investigations.

Entre temps, l'idée d'une connexion possible entre le Modèle Standard et la Gravitation a abouti à la formulation, par Deser, Templeton, et 't Hooft (1982), d'une théorie de gravitation topologique baptisée the Massiv Gravitation Theory, mais il a fallu attendre toute une décennie pour lui trouver une famille de solutions possibles grâce à

G. Clément (1992). Ce résultat nous a motivé pour entreprendre l'étude de la Gravitation Non Symétrique, dans un contexte Topologique et dans l'espace tridimensionnel, de manière analogue à ce qui a été fait pour la gravitation symétrique (TMG).

Le travail présenté dans cette thèse rentre dans le cadre des investigations sur la théorie NGT. Il représente une modeste contribution oeuvrant pour une meilleure compréhension de cette théorie.

Dans le chapitre I de cette thèse, nous commençons par rappeler les bases mathématiques de NGT en insistant sur la nouvelle formulation de cette dernière. Dans le deuxième chapitre, nous déterminons les solutions stationnaires de NGT. Au troisième chapitre, nous expliquons l'intérêt d'une théorie topologique de la gravitation et donnons un bref aperçu sur TMG. Le chapitre quatre sera entièrement consacré à la résolution des équations du champ linéarisées et à l'interprétation des résultats.

Chapitre I

Gravitation Non Symétrique

GRAVITATION NON SYMETRIQUE

1 - INTRODUCTION:

En 1979, Moffat proposa de ne plus donner à la structure de champ non symétrique $g_{[\mu\nu]}$ une interprétation liée à électromagnétisme, mais de la considérer plutôt comme une description générale de la géométrie de l'espace-temps. Cette nouvelle vision permet alors de décrire une théorie de champ gravitationnel pur appelée la théorie non symétrique de la gravitation (NGT), ou encore Théorie de la Gravitation Hermitienne.

La théorie non symétrique de la gravitation est basée sur les postulats suivants :

-1/ Les lois de la physique sont invariantes sous transformations de coordonnées généralisées.

-2/ Le principe d'équivalence est valide pour la totalité de la structure du champ gravitationnel.

-3/ Les équations du champ sont obtenues à partir de l'action et se présentent sous la forme d'équations différentielles partielles du second ordre.

-4/ La géométrie de l'espace-temps est non riemannienne et sera décrite par un tenseur métrique $g_{\mu\nu}$ et une connexion $\Gamma_{\mu\nu}^{\lambda}$, tout les deux hermitiens et non symétriques.

-5/ Les lignes d'univers de la particule matérielle test obéissent à l'équation géodésique :

$$\frac{d^2 x^\mu}{ds^2} + \Gamma^\mu_{\alpha\beta} \frac{dx^\alpha}{ds} \frac{dx^\beta}{ds} = 0.$$

2 - LA STRUCTURE DU CHAMP :

La géométrie de l'espace-temps sera déterminée donc par un tenseur $g_{\mu\nu}$ non symétrique et hermitien que l'on peut écrire sous la forme d'une somme de deux tenseurs; l'un étant symétrique et l'autre antisymétrique[3-5] :

$$g_{\mu\nu} = g_{(\mu\nu)} + g_{[\mu\nu]} \quad (I.1)$$

où

$$g_{(\mu\nu)} = \frac{1}{2}(g_{\mu\nu} + g_{\nu\mu}) \quad ; \quad g_{[\mu\nu]} = \frac{1}{2}(g_{\mu\nu} - g_{\nu\mu}) \quad (I.2)$$

Le tenseur contravariant $g^{\mu\nu}$ est donné par le tenseur covariant à travers la relation d'orthogonalité;

$$g^{\mu\nu} g_{\sigma\nu} = g^{\nu\mu} g_{\nu\sigma} = \delta^\mu_\sigma \quad (I.3)$$

La notion de transport parallèle d'un vecteur A^μ exprime la variation de celui-ci le long d'un contour (C). Soit;

$$\delta A^\mu = -\Gamma^\mu_{\alpha\beta} A^\alpha dx^\beta \quad (\text{ou } \delta A_\mu = \Gamma^\alpha_{\mu\beta} A_\alpha dx^\beta) \quad (I.4)$$

où, $\Gamma^\mu_{\alpha\beta}$ est une connexion affine, non symétrique et hermitienne, qui s'écrit, elle aussi, sous la forme :

$$\Gamma^\mu_{\alpha\beta} = \Gamma^\mu_{(\alpha\beta)} + \Gamma^\mu_{[\alpha\beta]} \quad (I.5)$$

Nous définissons une nouvelle connexion non symétrique, dite: libre, dont

l'intérêt est expliqué en annexe B. Cette dernière peut aussi se mettre sous la forme :

$$W_{\mu\nu}^{\lambda} = W_{(\mu\nu)}^{\lambda} + W_{[\mu\nu]}^{\lambda} \quad (I.6)$$

$W_{\mu\nu}^{\lambda}$ n'est pas hermitienne, mais elle est exprimé en fonction de la connexion hermitienne $\Gamma_{\mu\nu}^{\lambda}$ par la relation :

$$W_{\mu\nu}^{\lambda} = \Gamma_{\mu\nu}^{\lambda} - \frac{2}{3} \delta_{\mu}^{\lambda} W_{\nu} \quad (I.7)$$

où, W_{ν} est un vecteur qui exprime la torsion de l'espace-temps. Il est donné par :

$$W_{\nu} \equiv W_{[\nu\sigma]}^{\sigma} = \frac{1}{2} (W_{\nu\sigma}^{\sigma} - W_{\sigma\nu}^{\sigma}) \quad (I.8)$$

Des équations (I.7) et (I.8), nous déduisons la relation :

$$\Gamma_{\mu}^{\sigma} \equiv \Gamma_{[\mu\sigma]}^{\sigma} = 0 \quad (I.9)$$

Un tenseur de courbure peut être formé à partir de la connexion libre W . Soit;

$$R_{\mu\nu\rho}^{\sigma}(W) = (W_{\mu\nu,\rho}^{\sigma} - W_{\sigma\nu}^{\rho} W_{\mu\rho}^{\sigma}) - (W_{\mu\rho,\nu}^{\sigma} - W_{\sigma\rho}^{\nu} W_{\mu\nu}^{\sigma}) \quad (I.10)$$

Le tenseur de courbure contracté aura donc pour expression :

$$R_{\mu\nu}(W) = W_{\mu\nu,\beta}^{\beta} - W_{\mu\beta,\nu}^{\beta} + W_{\alpha\beta}^{\beta} W_{\mu\nu}^{\alpha} - W_{\alpha\nu}^{\beta} W_{\mu\beta}^{\alpha} \quad (I.11)$$

nous pouvons symétriser $R_{\mu\nu}$ par rapport à μ et ν dans le terme $W_{\mu\beta,\nu}^{\beta}$ pour avoir :

$$R_{\mu\nu}(W) = W_{\mu\nu,\beta}^{\beta} - \frac{1}{2} (W_{\mu\beta,\nu}^{\beta} + W_{\nu\beta,\mu}^{\beta}) + W_{\alpha\beta}^{\beta} W_{\mu\nu}^{\alpha} - W_{\alpha\nu}^{\beta} W_{\mu\beta}^{\alpha} \quad (I.12)$$

en substituant (1.7) dans (1.12), nous trouvons :

$$R_{\mu\nu}(W) = R_{\mu\nu}(\Gamma) + \frac{2}{3}W_{[\mu,\nu]} \quad (I.13)$$

où

$$R_{\mu\nu}(\Gamma) = \Gamma_{\mu\nu,\beta}^{\beta} - \frac{1}{2}(\Gamma_{(\mu\beta),\nu}^{\beta} + \Gamma_{(\nu\beta),\mu}^{\beta}) + \Gamma_{(\alpha\beta)}^{\beta} \Gamma_{\mu\nu}^{\alpha} - \Gamma_{\alpha\nu}^{\beta} \Gamma_{\mu\beta}^{\alpha} \quad (I.14)$$

et

$$W_{[\mu,\nu]} = W_{\mu,\nu} - W_{\nu,\mu} \quad (I.15)$$

3- LE LAGRANGIEN DE NGT :

Le lagrangien de cette théorie est donné par [4-5] :

$$L = \hat{g}^{\mu\nu} R_{\mu\nu}(W) + L_m \quad (I.16)$$

où L_m est la densité lagrangienne d'une source de matière phénoménologique donnée par:

$$L_m = -8\pi\hat{g}^{\mu\nu} T_{\mu\nu} \quad (I.17)$$

$T_{\mu\nu}$ est le tenseur Energie-Impulsion, et $\hat{g}^{\mu\nu} = \sqrt{-g}g^{\mu\nu}$.

Le principe de moindre action est exprimé à travers l'intégrale;

$$\delta I = \delta \int L d^4x = 0 \quad (I.18)$$

dans cette intégration, on fera varier g et W comme des variables de champ indépendantes de façon à annuler δg et δW aux bornes d'intégration.

La variation de W donne :

$$g^{\mu\nu}{}_{;\sigma} + g^{\rho\nu}W_{\rho\sigma}^{\mu} + g^{\mu\rho}W_{\rho\sigma}^{\nu} - g^{\mu\nu}W_{\rho\sigma}^{\rho} + \frac{2}{3}\delta_{\sigma}^{\nu}g^{\mu\rho}W_{[\rho\sigma]}^{\beta} = 0 \quad (\text{I.19})$$

en contractons ν et ρ et en antisymétrisant, on obtient l'équation du champ,

$$\left(\mathfrak{G}^{[\mu\nu]}\right)_{;\nu} = 0. \quad (\text{I.20})$$

En variant g dans l'équation (I.17), nous obtenons :

$$G_{\mu\nu}(W) = 8\pi T_{\mu\nu} \quad (\text{I.21})$$

où $G(W)$ est le tenseur généralisé d'Einstein donné par la relation :

$$G_{\mu\nu}(W) = R_{\mu\nu}(W) - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R(W) \quad (\text{I.22})$$

Cependant, le produit $g^{\mu\nu}G_{\mu\nu}(W)$ donne le résultat :

$$R = -8\pi T \quad (\text{I.23})$$

Injectons (I.23) dans (I.21), nous trouvons :

$$R_{\mu\nu}(W) = 8\pi\left(T_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}T\right) \quad (\text{I.24})$$

L'équation (I.13) devient :

$$R_{\mu\nu}(W) = \frac{2}{3}W_{[\mu,\nu]} + 8\pi\left(T_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}T\right) \quad (\text{I.25})$$

4 - NOUVEAU FORMALISME DE NGT :

Pour trouver les extensions de RG une nouvelle technique a été introduite. Cette technique, appelée la méthode de l'extension algébrique (AE), suppose que les champs tensoriels prennent leurs valeurs non pas dans l'algèbre des nombres réels \mathbb{R} , mais plutôt dans une algèbre très arbitraire A dont les hypothèses générales sont [6]:

A - Les théories AE doivent se réduire à RG dans le cas particulier $A = \mathbb{R}$.

B - La structure algébrique introduite par A doit être compatible avec la géométrie de l'espace-temps.

C - Les quantités Physiques (telles que la charge e et l'intervalle de longueur) doivent avoir des valeurs réelles.

La méthode AE démontre que RG ne pouvait être étendue de manière consistante qu'en cinq algèbres seulement, celles-ci arrivent donc à décrire cinq théories de la gravitation. Ces algèbres sont \mathbb{R} , \mathbb{C} , \mathbb{H} , \mathbb{O} , \mathbb{H} et désignent respectivement les nombres réels, complexes, hypercomplexes, quaternions, et hyper-quaternions. Dans la littérature, $A = \mathbb{R}$ représente RG, et algèbre \mathbb{H} fait référence à NGT.

Le groupe de jauge local de GR, associé à la bande de fibre (fiber bundle) quadri-dimensionnelle, est le groupe homogène de Lorentz $SO(3,1)$. En NGT, le groupe de jauge $SO(3,1)$ est étendu à un groupe de jauge plus large $U(3,1,\Omega)$, basé sur l'anneau des nombres complexes hyperboliques Ω , qui est lui même isomorphe à $GL(4,\mathbb{R})$.

Puisque $GL(4,\mathbb{R})$ préserve la forme du tenseur fondamental $g_{\mu\nu}$, ce dernier pourra prendre ses valeurs dans l'anneau des nombres complexes hyperboliques. L'équation (I.1) devient donc [7] :

$$g_{\mu\nu} = g_{(\mu\nu)} + \varepsilon g_{[\mu\nu]} \quad , \quad (\varepsilon^2 = +1) \quad (I.26)$$

Le tenseur $g_{\mu\nu}$ est hermitien au sens hyperbolique complexe ($\tilde{g}_{\mu\nu}$ étant le complexe hyperbolique conjugué de $g_{\mu\nu}$),

$$\tilde{g}_{\mu\nu} = g_{\mu\nu} \quad (I.27)$$

et son inverse est toujours défini par la relation d'orthogonalité (I.3).

Dans cette nouvelle formulation mathématique, nous définissons des vecteurs de base hypercomplexes ; e_μ^a appelé verbiens (ou tétrades), au moyen de la relation :

$$e_\mu^a = \text{Re}(e_\mu^a) + \varepsilon \text{Im}(e_\mu^a) \quad (I.28)$$

où les indices $a=1,2,3,4$ et $\mu=1,2,3,4$, représentent respectivement les composantes vectorielles dans l'espace tangent et l'espace temps non riemannien.

Les verbiens obéissent à la condition d'orthogonalité suivante :

$$e_a^\mu e_\mu^b = \delta_a^b \quad ; \quad e_\mu^a e_a^\nu = \delta_\mu^\nu \quad (I.29)$$

ce qui permet d'écrire $g_{\mu\nu}$ sous sa forme sesquilineaire ;

$$g_{\mu\nu} = e_\mu^a \tilde{e}_\nu^b \eta_{ab}, \quad (I.30)$$

où η_{ab} est la métrique de l'espace plat de minkowski.

Les verbiens e_μ^a satisfont aussi à la condition de compatibilité suivante :

$$e_{\mu,\sigma}^a + (\omega_\sigma^a)_c^a e_\mu^c - W_{\sigma\mu}^a e_\mu^a = 0, \quad (I.31)$$

où ω_σ est la connexion de spin, de NGT, définissant la dérivé covariante D_σ dans

l'espace tangent.

$$D_\sigma e_\mu^a = \partial_\sigma e_\mu^a + (\omega_\sigma)_b^a e_\mu^b \quad (I.32)$$

et satisfaisant la condition :

$$(\omega_\sigma)_{ca} = -(\tilde{\omega}_\sigma)_{ac} \quad (I.33)$$

$W_{\mu\nu}^\lambda$ est la connexion affine non symétrique (ou la connexion évaluée dans IE) définie par:

$$W_{\mu\nu}^\lambda = W_{(\mu\nu)}^\lambda + \varepsilon W_{[\mu\nu]}^\lambda, \quad (I.34)$$

où $\varepsilon W_{[\mu\nu]}^\lambda$ est la partie purement imaginaire.

La condition B conduit à:

$$D_\sigma g_{\mu\nu} = 0 \quad (I.35)$$

ou

$$g_{\mu\nu,\sigma} - g_{\rho\nu} W_{\mu\sigma}^\rho - g_{\mu\rho} W_{\sigma\nu}^\rho = 0 \quad (I.36)$$

En tenant compte de la condition d'hermité [8] :

$$\tilde{W}_\nu = -W_\nu \quad (I.37)$$

l'équation (I.35) se réduit donc à :

$$g_{\mu\nu,\sigma} - g_{\rho\nu} \Gamma_{\mu\sigma}^\rho - g_{\mu\rho} \Gamma_{\sigma\nu}^\rho = 0 \quad (I.38)$$

En introduisant la compatibilité de la métrique avec la connexion, la structure de groupe $GL(4,IR)$ a été réduite à $U(n-1,1,A)$, le groupe des matrices unitaires qui prennent leurs valeurs dans algèbre A .

En coordonnées holonomiques, le tenseur de courbure est donné par :

$$R_{\sigma\mu\nu}^{\lambda} = (R_{\mu\nu})_b^a e_a^{\lambda} e_{\sigma}^b \quad (I.39)$$

avec (voir annexe B) :

$$R_{\mu\nu} = \left([D_{\mu}, D_{\nu}] \right)_b^a \equiv (\omega_{\nu})_{b,\mu}^a - (\omega_{\mu})_{b,\nu}^a + [\omega_{\nu}, \omega_{\mu}]_b^a \quad (I.40)$$

La courbure scalaire prend donc la forme :

$$R = e^{\mu\nu} \tilde{e}^{ab} (R_{\mu\nu})_{ab} \quad (I.41)$$

La densité lagrangienne de NGT est exprimée par :

$$L = |e| e_a^{\mu} \tilde{e}^{ab} (R_{\mu\nu})_b^a \equiv |g|^{\frac{1}{2}} g^{\mu\nu} R_{\mu\nu}(W), \quad (I.42)$$

avec

$$|e| = (e\tilde{e})^{\frac{1}{2}}, \text{ et } \tilde{e} = \det(\tilde{e}_{\mu}^a) \quad (I.43)$$

et où $R_{\mu\nu}(W)$ est donnée par l'équation (I.12).

La condition C implique que :

$$R_{\mu\nu}(W) = \tilde{R}_{\mu\nu}(W). \quad (I.44)$$

5 - LES EQUATIONS DE CHAMP DE NGT :

Les équations du champ sont donc :

$$g_{\mu\nu,\sigma} - g_{\rho\nu} \Gamma_{\mu\sigma}^{\rho} - g_{\mu\rho} \Gamma_{\sigma\nu}^{\rho} = 0$$

$$\bar{g}^{[\mu\nu]}_{;v} = 0 \quad (\text{ou } \Gamma_{[\mu\sigma]}^{\sigma} = 0) \quad (\text{I.45})$$

$$R_{\mu\nu}(\Gamma) = \frac{2}{3}W_{[\mu,\nu]} + 8\pi\left(T_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}T\right)$$

la dernière équation peut prendre la même forme que (I.1), avec ;

$$R_{(\mu\nu)}(\Gamma) = 8\pi\left(T_{(\mu\nu)} - \frac{1}{2}g_{(\mu\nu)}T\right) \quad (\text{I.46})$$

$$R_{\{\mu\nu\}}(\Gamma) = \frac{2}{3}W_{\{\mu,\nu\}} + 8\pi\left(T_{\{\mu\nu\}} - \frac{1}{2}g_{\{\mu\nu\}}T\right) \quad (\text{I.47})$$

6 - LES PREDICTIONS DE NGT [9] :

Les prédictions de NGT diffèrent partiellement de celles de la Relativité Générale. Dans cette théorie les trous noirs n'existent pas et leurs effets sont plutôt dus à des objets super-denses (SDO). De plus, les singularités qui apparaissent en RG disparaissent en NGT.

Concernant le problème des prédictions du modèle cosmologique du Big Bang, il a été démontré qu'une solution exacte, homogène et anisotrope, des équations du champ présente des propriétés analytiques qui excluent toute singularité, à l'origine du temps $t=0$, de l'espace-temps physique.

En plus d'autres prédictions intéressantes, NGT reste la seule théorie qui donne une explication satisfaisante du phénomène d'avancé du périastre des étoiles binaires.

Chapitre II

*Solutions Stationnaires
à Symétrie Sphérique de NGT*

SOLUTIONS STATIQUES A SYMETRIE SPHERIQUE DE NGT

1 - INTRODUCTION :

Dans le chapitre précédant, le formalisme de NGT a été présenté et ses équations du champ écrites. Dans ce qui va suivre, nous étudierons les conséquences de cette nouvelle théorie à travers ses solutions statiques à symétrie sphérique.

Les équations de champ de NGT dans le vide ($T_{\mu\nu} = 0$) se réduisent à :

$$g_{\mu\nu,\sigma} - \Gamma^{\rho}_{\mu\sigma} g_{\rho\nu} - \Gamma^{\rho}_{\sigma\nu} g_{\mu\rho} = 0, \quad (\text{II.1})$$

$$\hat{g}^{[\mu\nu]}_{;\nu} = 0 \quad (\text{ou } \Gamma^{\sigma}_{[\mu\sigma]} = 0.) \quad (\text{II.2})$$

$$R_{(\mu\nu)}(\Gamma) = 0, \quad (\text{II.3})$$

$$R_{[\mu\nu]}(\Gamma) = 2/3 W_{[\mu,\nu]} \quad (\text{ou } R_{[\mu\nu],\sigma}(\Gamma) = 0.) \quad (\text{II.4})$$

2 - LES SOLUTIONS STATIQUES :

En coordonnées sphériques $x^1 = r$, $x^2 = \theta$, $x^3 = \varphi$, et $x^4 = t$, la forme générale de $g_{\mu\nu}$ pour un champ statique à symétrie sphérique, donnée par PAPAPETROU en 1947, a la forme [10] :

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} -\alpha & 0 & 0 & \omega \\ 0 & -\beta & f \sin\theta & 0 \\ 0 & -f \sin\theta & -\beta \sin^2\theta & 0 \\ -\omega & 0 & 0 & \gamma \end{pmatrix} \quad (\text{II.5})$$

où

$$\beta = r^2 \quad (\text{II.6})$$

et où α , γ , f et ω sont des fonctions réelles qui ne dépendent que de la coordonnée r .

L'inverse de $g_{\mu\nu}$ est donné par

$$g_{\mu\nu} g^{\mu\sigma} = \delta^\sigma_\nu. \quad (\text{II.7})$$

Des équations (II.5) et (II.7), on déduit les composantes non nulles de $g^{\mu\nu}$.

Soit ;

$$g^{11} = \frac{\gamma}{\omega^2 - \alpha\gamma}, \quad g^{22} = g^{33} \sin^2\theta = \frac{-\beta}{\beta^2 + f^2}, \quad g^{44} = \frac{-\alpha}{\omega^2 - \alpha\gamma}, \quad (\text{II.8})$$

$$g^{14} = \frac{\omega}{\omega^2 - \alpha\gamma}, \quad g^{23} \sin\theta = \frac{f}{\beta^2 + f^2}.$$

Si nous choisissons les conditions aux limites suivantes:

$$g_{(\mu\nu)} \longrightarrow \eta_{\mu\nu}, \quad g_{[\mu\nu]} \longrightarrow 0 \quad \text{quand } r \longrightarrow \infty. \quad (\text{II.9a,b})$$

où

$$\eta_{\mu\nu} = \text{diag}(1, -1, -1, -1). \quad (\text{II.10})$$

est le tenseur métrique de Minkowski.

La seconde condition (II.9b) conduit directement à [3] :

$$g_{[23]} \equiv 0. \quad (\text{ou } f \equiv 0.) \quad (\text{II.11})$$

Les équations (II.5) et (II.8) se réduisent à:

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} -\alpha & 0 & 0 & \omega \\ 0 & -\beta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\beta \sin^2 \theta & 0 \\ -\omega & 0 & 0 & \gamma \end{pmatrix} \quad (\text{II.12})$$

et

$$g^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} \frac{-\gamma}{\alpha\gamma - \omega^2} & 0 & 0 & \frac{-\omega}{\alpha\gamma - \omega^2} \\ 0 & \frac{-1}{\beta} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{-1}{\beta \sin^2 \theta} & 0 \\ \frac{\omega}{\alpha\gamma - \omega^2} & 0 & 0 & \frac{\alpha}{\alpha\gamma - \omega^2} \end{pmatrix} \quad (\text{II.13})$$

Le système d'équations (II.1) détermine complètement les 64 coefficients Γ^k_{ij} .
A partir de (II.12), les composantes non nulles de Γ^k_{ij} auront pour expressions:

$$\begin{aligned} \Gamma^1_{11} &= \frac{\alpha'}{2\alpha}, \quad \Gamma^1_{22} = \frac{1}{\sin^2 \theta}, \quad \Gamma^1_{33} = \frac{-r}{\alpha}, \quad \Gamma^1_{44} = \frac{4\omega\omega'\alpha\gamma - 2\omega^2\alpha'\gamma - (\omega^2 + \alpha\gamma)\alpha\gamma'}{2\alpha^2(\omega^2 - \alpha\gamma)} \\ \Gamma^1_{14} &= \frac{\omega}{2\alpha} \left[\log\left(1 - \frac{\alpha\gamma}{\omega^2}\right) \right]' = -\Gamma^1_{41}, \\ \Gamma^2_{12} &= \Gamma^2_{21} = \frac{1}{r}, \quad \Gamma^2_{33} = -\sin\theta\cos\theta, \quad \Gamma^2_{24} = -\Gamma^2_{42} = \frac{-\omega}{\alpha r}, \\ \Gamma^3_{13} &= \Gamma^3_{31} = \frac{1}{r}, \quad \Gamma^3_{34} = -\Gamma^3_{43} = \frac{-\omega}{\alpha r}, \quad \Gamma^3_{23} = \Gamma^3_{32} = \cot\theta, \\ \Gamma^4_{14} &= \Gamma^4_{41} = \frac{2\omega\omega'\alpha - \omega^2\alpha' - \alpha^2\gamma'}{2\alpha(\omega^2 - \alpha\gamma)}. \end{aligned} \quad (\text{II.14})$$

En utilisant l'équation (II.16), on trouve:

$$R_{11} = \frac{\alpha'}{\alpha r} + \Gamma^4_{14} \left(\frac{\alpha'}{2\alpha} - \Gamma^4_{14} \right) - \Gamma^4_{14,1}, \quad (\text{II.15})$$

$$R_{22} = -\frac{1}{\alpha} - \frac{r}{2\alpha} \xi' + 1, \quad (\text{II.16})$$

$$R_{44} = \frac{\omega^2}{4\alpha^2} (\psi')^2 + \frac{2\omega^2}{\alpha^2 r^2} + \Gamma^1_{44} \left(\frac{\alpha'}{2\alpha} - \Gamma^4_{14} + \frac{2}{r} \right) + \Gamma^1_{44,1}, \quad (\text{II.17})$$

où

$$\psi = \log(1 - \alpha\gamma/\omega^2), \quad \xi = \log(\omega^2 - \alpha\gamma). \quad (\text{II.18})$$

Cependant, l'équation (II.2) se réduit à:

$$\hat{g}^{4+1}_{,1} = 0 \quad (\text{ou } \frac{\partial}{\partial r} [\sqrt{-g} g^{4+1}] = 0.) \quad (\text{II.19})$$

avec

$$\sqrt{-g} = \sqrt{-\det g_{\mu\nu}} = (\alpha\gamma - \omega^2)^{1/2} \beta \sin\theta. \quad (\text{II.20})$$

et

$$g^{4+1} = \frac{\omega}{\alpha\gamma - \omega^2}. \quad (\text{II.21})$$

l'équation (II.19) devient donc :

$$\frac{d}{dr} \left[\frac{r^2 \omega \sin\theta}{(\alpha\gamma - \omega^2)^{1/2}} \right] = 0. \quad (\text{II.22})$$

ce qui donne après intégration :

$$\frac{r^2 \omega \sin\theta}{(\alpha\gamma - \omega^2)^{1/2}} = \text{Const.} \quad \text{ou} \quad \frac{\omega}{(\alpha\gamma - \omega^2)^{1/2}} = \frac{k}{r^2}. \quad (\text{II.23})$$

La solution de l'équation (II.22) est donc:

$$\omega^2 = \alpha\gamma H. \quad (\text{II.24})$$

où

$$H = \frac{k^2}{k^2 + r^4}. \quad (\text{II.25})$$

Nous devons maintenant résoudre l'équation de champ (II.3). Pour cela, procédons à la substitution :

$$\alpha = e^\lambda, \quad \text{et} \quad \gamma = e^\nu, \quad (\text{II.26})$$

avec $\lambda = \lambda(r)$ et $\nu = \nu(r)$.

Nous obtenons à partir des équations (II.15) et (II.17)

$$R_{11} + \frac{\alpha}{\gamma} R_{44} = \frac{\lambda' + \nu}{r} + \frac{4H}{r^2} = 0. \quad (\text{II.27})$$

où H est donné par l'équation (II.25)

L'équation de $R_{22}(\Gamma)$ est obtenue à partir de (II.16) ;

$$-\frac{\nu}{r} e^{-\lambda} + \frac{\lambda'}{r} e^{-\lambda} - \frac{2}{r^2} (e^{-\lambda} - 1) - \frac{4H}{r^2} e^{-\lambda} = 0. \quad (\text{II.28})$$

Multiplions l'équation (II.27) par $e^{-\lambda}$ et substituons l'expression résultante de $(-\nu'/r)e^{-\lambda}$ dans l'équation (II.28), nous trouvons:

$$e^{-\lambda} \left(\frac{\lambda'}{r} - \frac{1}{r^2} \right) + \frac{1}{r^2} = 0. \quad (\text{II.29})$$

En multipliant cette dernière équation par $r^2 e^\lambda$, nous obtenons:

$$r \frac{d\lambda}{dr} + e^\lambda = 1. \quad (\text{II.30})$$

L'intégration de l'équation (II.30) donne:

$$\alpha = \left(1 - \frac{2m}{r}\right)^{-1}. \quad (\text{II.31})$$

où m est une constante réelle arbitraire qui correspond à la distribution de masse.

En vertu de (II.25), l'équation (II.27) peut être réécrite sous la forme:

$$\left[\nu + \lambda + \log\left(\frac{r^4}{r^4 + k^2}\right) \right]' = 0. \quad (\text{II.32})$$

soit,

$$\nu + \lambda + \log\left(\frac{r^4}{r^4 + k^2}\right) = \log C^2. \quad (\text{II.33})$$

où C est une autre constante d'intégration. Nous aboutissons à :

$$\alpha \gamma \frac{r^4}{r^4 + k^2} = C^2 \quad (\text{II.34})$$

En utilisant l'équation (II.24), il vient que :

$$\omega = \pm C \frac{k}{r^2}. \quad (\text{II.35})$$

L'équation (II.34) se réduit finalement à:

$$\gamma = C^2 \left(1 + \frac{k^2}{r^4}\right) \left(1 - \frac{2m}{r}\right) \quad (\text{II.36})$$

Pour $r \longrightarrow \infty$ nous avons: $\omega \longrightarrow 0$ et $g_{(\mu\nu)} \longrightarrow \eta_{\mu\nu}$. Donc l'équation (II.36) n'est

satisfaite que si $C^2=1$.

$$\gamma = \left(1 + \frac{k^2}{r^4}\right) \left(1 - \frac{2m}{r}\right). \quad (\text{II.37})$$

Donc la solution finale qui assure le comportement galiléen à l'infini est:

$$\left\{ \begin{array}{l} \alpha = \left(1 - \frac{2m}{r}\right)^{-1} \\ \beta = r^2 \\ \gamma = \left(1 + \frac{k^2}{r^4}\right) \left(1 - \frac{2m}{r}\right) \\ \omega = \pm \frac{k}{r^2} \end{array} \right. \quad (\text{II.38})$$

Cette solution contient trois constantes arbitraires k, m, C et conduit à la métrique extérieure suivante :

$$ds^2 = \left(1 + \frac{k^2}{r^4}\right) \left(1 - \frac{2m}{r}\right) dt^2 - \left(1 - \frac{2m}{r}\right)^{-1} dr^2 - r^2 d\Omega^2. \quad (\text{II.39})$$

k est une constante d'intégration arbitraire par conséquent, on peut la choisir comme étant imaginaire pure

$$k = i l^2, \quad (i^2 = -1) \quad (\text{II.40})$$

l^2 est une constante qui est identifiée comme étant la charge électrique de NGT (ou constante de couplage gravitationnel) et elle est essentielle pour le calcul du décalage spectral gravitationnel[3].

La métrique de l'espace-temps devient:

$$ds^2 = \left(1 - \frac{l^4}{r^4}\right) \left(1 - \frac{2m}{r}\right) dt^2 - \left(1 - \frac{2m}{r}\right)^{-1} dr^2 - r^2 d\Omega^2. \quad (\text{II.41})$$

3 - INTERPRETATION DES RESULTATS :

La métrique (II.41) se réduit à celle de Schwarzschild quand $l=0$ et ne présente aucune singularité essentielle de, car pour $r < l$ la métrique n'a pas la signature d'un espace-temps physique.

Pour $r = l$ une surface se forme autour de l'origine et aucune ligne d'univers ne peut pénétrer cette surface. Par conséquent, dans la théorie NGT l'espace-temps ne contient pas de singularité essentielle en $r=0$.

Il faut aussi signaler que la constante l permet de donner un ordre de grandeur à plusieurs autres constantes de l'astrophysique et ce à travers la détermination du décalage spectral d'origine gravitationnel. Le fait d'être vérifiable expérimentalement représente un atout majeur pour NGT. Les autres prestigieuses théories (voir introduction) sont beaucoup plus défavorisées dans ce domaine et ne font que graviter dans des orbites purement théoriques.

Remarque: La signature de l'espace-temps (notée S) a pour définition:

$$S = \sum_{i=1}^4 \text{sign} g_{ii} = -2 + \text{sign} g_{11} + \text{sign} g_{44},$$

où, $g_{11} = -\alpha \Rightarrow \text{sign} g_{11}$ dépend de r et $g_{44} = \gamma \Rightarrow \text{sign} g_{44}$ dépend de l et r .

Chapitre III

Gravitation Topologique

GRAVITATION TOPOLOGIQUE

1 - INTRODUCTION :

Le problème de la non-renormalisabilité de la théorie de la gravitation semble être le même que celui rencontré dans la théorie du Modèle Standard lors de son élaboration, il est donc naturel de vouloir utiliser les mêmes outils, soit les théories de YANG-MILLS (théories de JAUGE), pour en venir à bout.

Il est, cependant, intéressant de rappeler que le terme « Invariance de Jauge » a été introduit par Weyl en 1919, lors d'un essai infructueux d'unification de la gravitation et de l'électromagnétisme. En 1929, Weyl formula le principe de jauge et donna le nom de transformation de jauge à la transformation combinée. En 1954, Yang et Mills utilisent le principe de jauge pour introduire de nouveaux types d'interactions.

2 - THEORIES DE YANG-MILLS TOPOLOGIQUES:

Ce sont des théories quantifiables, de préférence, à l'aide de la méthode intégrale de Feynman. D'un point de vue géométrique, cette méthode a l'avantage de rendre compte de la topologie globale du potentiel de jauge alors que la théorie des perturbations n'est sensible qu'à une topologie locale de ce dernier.

Dans cette théorie, les équations du champ sont invariantes vis-a-vis de la transformation de jauge. La variation de l'action est exprimée par :

$$-\delta I_{YM} = \frac{\mu}{2} \int dx^* F^a \delta A_a \quad (\text{III.1})$$

A et F représentent, respectivement, le potentiel et le champ de Yang-Mills, et μ la densité de masse.

Dans le cadre de notre thèse ces théories de jauges ne nous intéressent que dans la mesure où, dans le cas fermionique, celles-ci font intervenir de manière automatique le tenseur topologique de Weyl. Finalement, il faut remarquer qu'elles sont super-renormalisables dans un espace tridimensionnel.

Il faut noter que d'une part F et A sont des quantités qui désigneront respectivement, dans le cas qui nous intéressera, la courbure et la connexion, et que d'autre part cette intégrale est toujours exprimée en fonction de quantités topologiques, telles que les classes de Chern, de Pontrjagin, et d'Euler [11,17], indispensables à la compréhension des propriétés géométriques de l'espace étudié.

3 - GRAVITATION TOPOLOGIQUE:

La quantification de la gravitation est l'un des problèmes les plus ardues de la physique théorique. A cause du caractère non polynomial de la théorie les méthodes standards ne marchent pas. L'approche de la méthode intégrale de Feynman semble être, jusqu'à présent, la procédure la plus viable pour quantifier la gravitation. Cependant, la théorie de la gravitation n'est pas renormalisable au sens usuel, on rencontre toujours des difficultés avec les divergences non-renormalisables dans les calculs pratiques.

Il est clair que pour faire une étude de la gravitation topologique il nous faut corriger l'action gravitationnelle classique en lui ajoutant une action topologique, l'action totale sera donc

$$I = \frac{1}{\kappa^2} \int dx \sqrt{g} R + \frac{1}{\kappa^2 m} I_{CS} \quad (\text{III.2})$$

κ^{-2} est un coefficient qui a la dimension d'une masse et m représente une densité de masse.

Le terme I_{CS} représente l'action de Chern-Simon et ce n'est rien d'autre qu'une nouvelle notation, plus appropriée, du terme I_{YM} . I_{CS} est, à l'opposé de I_{YM} , exprimée directement en fonction des paramètres de la gravitation.

Remarque 1: I étant exprimée dans l'espace tridimensionnel, l'action gravitationnelle prend une forme légèrement différente de celle donnée dans les chapitres I et II car elle y était exprimée dans l'espace quadri-dimensionnel. En effet, nous avons doté la métrique de la signature (+--) sans laquelle l'élément de volume dans l'hyperespace $\sqrt{+g}$ ne serait plus réel.

L'identification de l'action de Chern-Simon commence par le fait que l'on a constaté que les éléments du tenseur de Riemann $R_{\alpha\beta\gamma\delta}$ pouvaient être décomposés en un tenseur de Ricci $R_{\mu\nu} \equiv R_{\alpha\mu}{}^{\alpha}{}_{\nu}$ plus un tenseur de Weyl $C^{\alpha}{}_{\beta\gamma\delta}$. Cependant, pour $d=3$ ce dernier est identiquement nul, il sera donc remplacé par un nouveau tenseur du second ordre $C^{\mu\nu}$.

Notons au passage que le tenseur de Weyl est très utilisé en géométrie n -dimensionnelle et il est caractérisé, dans le cas d'une métrique symétrique, par une trace nulle pour toute paire d'indices. Il a pour expression :

$$W_{\alpha\beta\gamma\delta} = R_{\alpha\beta\gamma\delta} + \frac{R}{(n-1)(n-2)}(g_{\alpha\mu}g_{\beta\nu} - g_{\alpha\nu}g_{\beta\mu}) - \frac{1}{(n-2)}(g_{\alpha\mu}R_{\beta\nu} - g_{\alpha\nu}R_{\beta\mu} - g_{\beta\mu}R_{\alpha\nu} + g_{\beta\nu}R_{\alpha\mu}) \quad (\text{III.3})$$

où $R_{\mu\nu} = R_{\mu\alpha\beta\gamma}g^{\alpha\beta}$, $R = R_{\mu\nu}g^{\mu\nu}$ et $n =$ dimension de l'espace.

D'un autre côté, on peut toujours exprimer le tenseur de courbure du quatrième ordre $R_{\alpha\beta\gamma\delta}$ de l'espace à trois dimensions au moyen du tenseur du second ordre $R_{\alpha\beta}$ et

ce indépendamment de toute considération de symétrie, on obtient:

$$R_{\alpha\beta\gamma\delta} = g_{\alpha\gamma} \tilde{R}_{\beta\delta} + g_{\beta\delta} \tilde{R}_{\alpha\gamma} - g_{\alpha\delta} \tilde{R}_{\beta\gamma} - g_{\beta\gamma} \tilde{R}_{\alpha\delta} \quad (\text{III.4})$$

où

$$\tilde{R}_{\beta\nu} = R_{\beta\nu} - \frac{1}{4} g_{\beta\nu} R \quad \left(\tilde{R}_{\beta}^{\nu} = R_{\beta}^{\nu} - \frac{1}{4} \delta_{\beta}^{\nu} R \right) \quad (\text{III.5})$$

En utilisant l'identité de Bianchi [15,17], très importante en géométrie différentielle, et la relation :

$$R_{\gamma\delta}^{\alpha\beta} = -\varepsilon^{\alpha\beta\mu} \varepsilon_{\gamma\delta\nu} G_{\mu}^{\nu} \quad (\text{III.6})$$

Le tenseur de Weyl prend finalement la forme :

$$C^{\mu\nu} = \frac{\varepsilon^{\mu\alpha\beta}}{\sqrt{g}} D_{\alpha} \tilde{R}_{\beta}^{\nu} \quad (\text{III.7})$$

En variant l'action (III.2) nous obtenons l'équation du champ de la gravitation topologique dans le vide

$$G_{\mu\nu} + \frac{1}{m} C_{\mu\nu} = 0 \quad (\text{III.8})$$

En fait, cette équation permet de rendre compte à la fois de la gravitation symétrique (RG ou EGT) et de la gravitation non symétrique (NGT), ce découplage a lieu respectivement selon que l'on prenne comme argument, la connexion symétrique d'Einstein, $\Gamma_{\mu\nu}^{\lambda}$ ou, la connexion libre non symétrique, $W_{\mu\nu}^{\lambda}$. Nous avons donc deux théories topologiques de la gravitation.

La situation exprimée par (III.8) reflète l'équivalence topologique des deux théories. Cette équivalence est d'autant plus facile à comprendre quand on sait que les propriétés géométriques intrinsèques ne dépendent pas de la torsion (voir annexe B2), et c'est précisément ce qui donne à nos deux théories de la gravitation toutes les similitudes présentées en annexe B1.

3 - 1 - EGT Topologique:

La théorie gravitationnelle d'Einstein topologique a pour équation de champ principale dans le vide:

$$G_{\mu\nu}(\Gamma) + \frac{1}{m} C_{\mu\nu}(\Gamma) = 0 \quad (\text{III.9})$$

Une première étude de cette théorie, faite en 1982 par Deser, Jackiw & Templeton [11], a eu pour but d'explorer le comportement de celle-ci par rapport à la théorie de Jauge. La conclusion de cette étude a insisté sur le fait que la gravitation devenait propagatrice (avec génération de mouvement).

En 1985, Vurió [16] tenta de faire une étude plus détaillée, en utilisant une approche directe. A cette fin, il proposa une paramétrisation du problème qui déboucha sur des solutions, dites de Vurió, qui n'étaient pas asymptotiquement plates à l'infini, donc inacceptables.

Enfin, en 1992, Clément [12-13] tenta une approche indirecte en proposant, en un premier temps, l'utilisation de la méthode matricielle de Landau [1] qui, du fait de la symétrie de EGT, présentait un avantage certain. Puis en second lieu, de prendre une paramétrisation qui rendait compte du choix, topologique, des conditions initiales.

Il pris donc une métrique stationnaire de l'espace-temps ayant la forme :

$$ds^2 = \lambda_{ab}(r) dx^a dx^b - dr^2 \quad (a, b = 0, 2) \quad (\text{III.10})$$

où θ est un angle tel que $0 \leq \theta \leq 2\pi$ et où la signature de la matrice λ est (+-).

Soit,

$$(t, r, \theta) \equiv (x^0, x^1, x^2) \quad (\text{III.11})$$

En posant,

$$\chi = \lambda^{-1} \lambda' \quad , \quad f = \frac{1}{2} \text{Tr} \chi \quad \text{et} \quad g = \frac{1}{4} |\chi| \quad (\text{III.12})$$

il a obtenu un système d'équations différentielles du troisième ordre en f et g , puis en σ, y, ω quand il choisit pour λ_{ab} la paramétrisation suivante:

$$\lambda_{ab} = \frac{\sigma}{y} \begin{pmatrix} 1 & -\omega \\ -\omega & \omega^2 - y^2 \end{pmatrix} \quad (\text{III.13})$$

Il dégagera, aussi, quelques classes de solutions exactes, dont celle de Vurio, qui ne seront pas retenues pour les mêmes raisons que celles évoquées plus haut.

En fait, le système d'équations différentielles obtenu avait deux inconvénients:

a- Il présentait des singularités, ce problème a été réglé, dans quelques cas seulement, en procédant à une réécriture du système en question en fonction de nouvelles variables.

b- Les conditions initiales du système étaient inconnues, car implicites. Leur détermination s'est faite dans le cadre de deux configurations topologiques distinctes:

b-1- Recherche des solutions dans le cadre de la topologie Euclidienne, de conditions initiales spécifiques.

b-2- Recherche des solutions dans le cadre de la topologie symétrique des trous de vers (Symmetric Wormhole Solutions), de conditions initiales conséquentes. Une investigation numérique a montrée qu'il n'existait de solutions valables (Asymptotiquement plates) que dans ce cas bien précis.

Remarque2: Le choix de la métrique n'étant pas univoque; il devient très difficile de dire, à priori, si la paramétrisation adoptée est adéquate ou non.

3 - 2 - NGT Topologique:

La théorie de la gravitation non symétrique topologique a pour équation de champ principale :

$$G_{\mu\nu}(W) + \frac{1}{m} C_{\mu\nu}(W) = 0 \quad (\text{III.14})$$

L'étude de cette théorie fait l'objet de notre thèse et le prochain chapitre sera entièrement consacré à son développement.

Chapitre IV

NGT Topologique à $d=2+1$

NGT TOPOLOGIQUE

à $d=2+1$

1 - INTRODUCTION:

Dans ce chapitre nous développerons la théorie de la gravitation non symétrique topologique tridimensionnelle où notre motivation essentielle sera de trouver des solutions acceptables.

2 - FORMALISME GENERAL:

Les équations du champ de NGT topologique tridimensionnelle sont :

$$g_{\mu\nu,\sigma} - \Gamma_{\mu\sigma}^{\lambda} g_{\lambda\nu} - \Gamma_{\nu\sigma}^{\lambda} g_{\mu\lambda} = 0 \quad (\text{IV.1})$$

$$(\sqrt{g} g^{[\mu\nu]})_{,\nu} = 0 \quad (\text{IV.2})$$

$$G^{\mu}_{\nu}(W) + \frac{1}{m} C^{\mu}_{\nu}(W) = 0 \quad (\text{IV.3})$$

où

$$C^{\mu}_{\nu}(W) = \frac{\varepsilon^{\mu\alpha\beta}}{\sqrt{g}} D_{\alpha} \tilde{R}_{\beta\nu}(W) \quad (\text{IV.4})$$

avec $\varepsilon^{\lambda\alpha\beta}$ le tenseur antisymétrique des permutations et D_{α} la dérivé covariante par rapport à la connexion non symétrique $\Gamma_{\mu\sigma}^{\lambda}$,

$$D_\alpha \tilde{R}_{\beta\nu}(W) = \tilde{R}_{\beta\nu,\alpha}(W) - \Gamma_{\beta\alpha}^\lambda \tilde{R}_{\lambda\nu}(W) - \Gamma_{\nu\alpha}^\lambda \tilde{R}_{\beta\lambda}(W) \quad (\text{IV.5})$$

La résolution des équations du champ (IV.1,5) pose un réel problème technique car elles présentent un haut degré de non linéarité.

3 - LINEARISATION DE LA THEORIE:

Pour analyser le contenu de cette théorie nous la linéarisons en pratiquant un développement de la métrique générale au voisinage d'une métrique Einsteinienne arbitraire,

$$g_{\mu\nu} = {}^{(E)}g_{\mu\nu} + {}^{(1)}g_{\mu\nu} + {}^{(2)}g_{\mu\nu} + \dots \quad (\text{IV.6})$$

Nous ne retiendrons pour cette première approche que les termes du développement d'ordre inférieure à deux, donc :

$$g_{\mu\nu} = {}^{(E)}g_{\mu\nu} + {}^{(1)}g_{\mu\nu} \quad (\text{IV.7})$$

Rappelons le fait ,spécifique à NGT, exprimé par l'équation (I.1) :

$$g_{\mu\nu} = g_{(\mu\nu)} + g_{[\mu\nu]} \quad (\text{IV.8})$$

En imposant aux éléments de $g_{[\mu\nu]}$ d'être faibles devant ceux de $g_{(\mu\nu)}$, il devient possible de faire l'identification,

$$g_{(\mu\nu)} = {}^{(E)}g_{\mu\nu} \quad \text{et} \quad g_{[\mu\nu]} = {}^{(1)}g_{\mu\nu} \quad (\text{IV.9})$$

En injectons la relation (IV.7) dans les équations du champ, l'équation (IV.1) devient:

$$\nabla_\sigma {}^{(E)}g_{\mu\nu} + \nabla_\sigma {}^{(1)}g_{\mu\nu} - {}^{(1)}\Gamma_{\mu\sigma}^\lambda {}^{(E)}g_{\lambda\nu} - {}^{(1)}\Gamma_{\nu\sigma}^\lambda {}^{(E)}g_{\mu\lambda} = 0 \quad (\text{IV.10})$$

où ∇ représente la dérivée covariante par rapport à la connexion d'Einstein et où le premier terme n'est rien d'autre que la condition de compatibilité de la Relativité Générale, on a donc d'après [1]:

$$\nabla_{\sigma}^{(E)} g_{\mu\nu} = 0 \quad (\text{IV.11})$$

dont la solution est:

$${}^{(E)}\Gamma_{\lambda\eta}^{\sigma} = \frac{1}{2} {}^{(E)}g^{\sigma\zeta} \left[{}^{(E)}g_{\lambda\zeta,\eta} + {}^{(E)}g_{\zeta\eta,\lambda} - {}^{(E)}g_{\eta\lambda,\zeta} \right] \quad (\text{IV.12})$$

L'équation (IV.10) se réduit à :

$$\nabla_{\sigma}^{(i)} g_{\mu\nu} - {}^{(i)}\Gamma_{\mu\sigma}^{\lambda} {}^{(E)}g_{\lambda\nu} - {}^{(i)}\Gamma_{\nu\sigma}^{\lambda} {}^{(E)}g_{\mu\lambda} = 0 \quad (\text{IV.13})$$

qui a pour solution:

$${}^{(i)}\Gamma_{\lambda\eta}^{\sigma} = \frac{1}{2} {}^{(E)}g^{\sigma\zeta} \left[\nabla_{\eta}^{(i)} g_{\lambda\zeta} + \nabla_{\lambda}^{(i)} g_{\zeta\eta} - \nabla_{\zeta}^{(i)} g_{\eta\lambda} \right] \quad (\text{IV.14})$$

A partir de l'expression de \sqrt{g} donnée en annexe A, l'équation (IV.2) devient:

$$\left(\sqrt{{}^{(E)}g} {}^{(i)}g^{\mu\nu} \right)_{,\nu} = 0 \quad (\text{IV.15})$$

Quand à l'équation (IV.3), elle prend la forme suivante:

$$\left[{}^{(E)}G_{\mu\nu}(W) + {}^{(i)}G_{\mu\nu}(W) \right] + \frac{1}{m} \left[{}^{(E)}C_{\mu\nu}(W) + {}^{(i)}C_{\mu\nu}(W) \right] = 0 \quad (\text{IV.16})$$

où les tenseurs d'Einstein, non perturbé et perturbé, ont pour expressions:

$${}^{(E)}G_{\mu\nu}(W) = {}^{(E)}R_{\mu\nu}(\Gamma) - \frac{1}{2}{}^{(E)}g_{\mu\nu}{}^{(E)}R(\Gamma) \quad (\text{IV.17a,b})$$

$${}^{(E)}G^{\sigma}_{\nu}(W) = {}^{(E)}g^{\mu\sigma}{}^{(E)}G_{\mu\nu}(W) = {}^{(E)}R^{\sigma}_{\nu}(\Gamma) - \frac{1}{2}\delta^{\sigma}_{\nu}{}^{(E)}R(\Gamma)$$

et

$${}^{(1)}G_{\mu\nu}(W) = -\frac{1}{2}{}^{(1)}R_{\mu\nu}(\Gamma) + \frac{2}{3}W_{[\mu,\nu]} \quad (\text{IV.18a,b})$$

$${}^{(1)}G^{\sigma}_{\nu}(W) = {}^{(E)}g^{\mu\sigma}{}^{(1)}G_{\mu\nu}(W) + {}^{(1)}g^{\mu\sigma}{}^{(E)}G_{\mu\nu}(W)$$

et où les tenseurs topologiques, non perturbé et perturbé, sont donnés par :

$${}^{(E)}C^{\mu}_{\nu}(W) = {}^{(E)}\bar{\epsilon}^{\mu\alpha\beta}\nabla_{\alpha}{}^{(E)}\tilde{R}_{\beta\nu}(\Gamma) \quad (\text{IV.19})$$

$${}^{(1)}C^{\mu}_{\nu}(W) = {}^{(E)}\bar{\epsilon}^{\mu\alpha\beta}D_{\alpha}{}^{(1)}\tilde{R}_{\beta\nu}(W) - \frac{1}{2}{}^{(1)}g^{\mu\sigma}{}^{(E)}C^{\sigma}_{\nu}(W) \quad (\text{IV.20})$$

avec

$$D_{\alpha}{}^{(1)}\tilde{R}_{\beta\nu}(W) = D_{\alpha}{}^{(1)}\tilde{R}_{\beta\nu}(\Gamma) + \frac{2}{3}\nabla_{\alpha}\omega_{\beta\nu} \quad (\text{IV.21})$$

$$D_{\alpha}{}^{(1)}\tilde{R}_{\beta\nu}(\Gamma) = \nabla_{\alpha}{}^{(1)}\tilde{R}_{\beta\nu}(\Gamma) - {}^{(1)}\Gamma^{\rho}_{\beta\alpha}{}^{(E)}\tilde{R}_{\rho\nu}(\Gamma) - {}^{(1)}\Gamma^{\rho}_{\nu\alpha}{}^{(E)}\tilde{R}_{\beta\rho}(\Gamma) \quad (\text{IV.22})$$

Les tenseurs courbure prennent la forme:

$${}^{(E)}R_{\mu\nu}(\Gamma) = {}^{(E)}\Gamma^{\beta}_{\mu\nu,\beta} - {}^{(E)}\Gamma^{\beta}_{\mu\beta,\nu} - {}^{(E)}\Gamma^{\beta}_{\alpha\nu}{}^{(E)}\Gamma^{\alpha}_{\mu\beta} + {}^{(E)}\Gamma^{\beta}_{\alpha\beta}{}^{(E)}\Gamma^{\alpha}_{\mu\nu} \quad (\text{IV.23})$$

$${}^{(1)}R_{\mu\nu}(\Gamma) = \nabla_{\beta}{}^{(1)}\Gamma^{\beta}_{\mu\nu} - \frac{1}{2}\left[\nabla_{\mu}{}^{(1)}\Gamma^{\beta}_{(\nu\beta)} + \nabla_{\nu}{}^{(1)}\Gamma^{\beta}_{(\mu\beta)}\right] \quad (\text{IV.24})$$

avec (voir annexe A)

$${}^{(E)}G_{\mu\nu}(W) = {}^{(E)}R_{\mu\nu}(\Gamma) - \frac{1}{2}{}^{(E)}g_{\mu\nu}{}^{(E)}R(\Gamma) \quad (\text{IV.17a,b})$$

$${}^{(E)}G^{\sigma\nu}(W) = {}^{(E)}g^{\mu\sigma}{}^{(E)}G_{\mu\nu}(W) = {}^{(E)}R^{\sigma\nu}(\Gamma) - \frac{1}{2}\delta^{\sigma\nu}{}^{(E)}R(\Gamma)$$

et

$${}^{(1)}G_{\mu\nu}(W) = -\frac{1}{2}{}^{(1)}R_{\mu\nu}(\Gamma) + \frac{2}{3}W_{[\mu,\nu]} \quad (\text{IV.18a,b})$$

$${}^{(1)}G^{\sigma\nu}(W) = {}^{(E)}g^{\mu\sigma}{}^{(1)}G_{\mu\nu}(W) + {}^{(1)}g^{\mu\sigma}{}^{(E)}G_{\mu\nu}(W)$$

et où les tenseurs topologiques, non perturbé et perturbé, sont donnés par :

$${}^{(E)}C^{\mu\nu}(W) = {}^{(E)}\bar{\epsilon}^{\mu\alpha\beta}\nabla_{\alpha}{}^{(E)}\tilde{R}_{\beta\nu}(\Gamma) \quad (\text{IV.19})$$

$${}^{(1)}C^{\mu\nu}(W) = {}^{(E)}\bar{\epsilon}^{\mu\alpha\beta}D_{\alpha}{}^{(1)}\tilde{R}_{\beta\nu}(W) - \frac{1}{2}{}^{(1)}g^{(E)}C^{\mu\nu}(W) \quad (\text{IV.20})$$

avec

$$D_{\alpha}{}^{(1)}\tilde{R}_{\beta\nu}(W) = D_{\alpha}{}^{(1)}\tilde{R}_{\beta\nu}(\Gamma) + \frac{2}{3}\nabla_{\alpha}\omega_{\beta\nu} \quad (\text{IV.21})$$

$$D_{\alpha}{}^{(1)}\tilde{R}_{\beta\nu}(\Gamma) = \nabla_{\alpha}{}^{(1)}\tilde{R}_{\beta\nu}(\Gamma) - {}^{(1)}\Gamma^{\rho}_{\beta\alpha}{}^{(E)}\tilde{R}_{\rho\nu}(\Gamma) - {}^{(1)}\Gamma^{\rho}_{\nu\alpha}{}^{(E)}\tilde{R}_{\beta\rho}(\Gamma) \quad (\text{IV.22})$$

Les tenseurs courbure prennent la forme:

$${}^{(E)}R_{\mu\nu}(\Gamma) = {}^{(E)}\Gamma^{\beta}_{\mu\nu,\beta} - {}^{(E)}\Gamma^{\beta}_{\mu\beta,\nu} - {}^{(E)}\Gamma^{\beta}_{\alpha\nu}{}^{(E)}\Gamma^{\alpha}_{\mu\beta} + {}^{(E)}\Gamma^{\beta}_{\alpha\beta}{}^{(E)}\Gamma^{\alpha}_{\mu\nu} \quad (\text{IV.23})$$

$${}^{(1)}R_{\mu\nu}(\Gamma) = \nabla_{\beta}{}^{(1)}\Gamma^{\beta}_{\mu\nu} - \frac{1}{2}\left[\nabla_{\mu}{}^{(1)}\Gamma^{\beta}_{(\nu\beta)} + \nabla_{\nu}{}^{(1)}\Gamma^{\beta}_{(\mu\beta)}\right] \quad (\text{IV.24})$$

avec (voir annexe A)

$${}^{(E)}\tilde{R}_{\beta\nu}(\Gamma) = {}^{(E)}R_{\mu\nu}(\Gamma) - \frac{1}{4}{}^{(E)}g_{\mu\nu}{}^{(E)}R(\Gamma) \quad (\text{IV.25})$$

$${}^{(1)}\tilde{R}_{\mu\nu}(\Gamma) = \frac{1}{4}{}^{(1)}R_{\mu\nu}(\Gamma) \quad (\text{IV.26})$$

$$\omega_{\beta\nu} = W_{[\beta,\nu]} = \frac{1}{2}(W_{\beta,\nu} - W_{\nu,\beta}) \quad (\text{IV.27})$$

$${}^{(E)}\tilde{\varepsilon}^{\mu\alpha\beta} = \varepsilon^{\mu\alpha\beta} / \sqrt{{}^{(E)}g} \quad (\text{IV.28})$$

Etant donné que les équations (IV.17) et (IV.19) ne sont fonction que de Γ , on peut écrire :

$${}^{(E)}G_{\mu\nu}(W) = {}^{(E)}G_{\mu\nu}(\Gamma) \quad \text{et} \quad {}^{(E)}C_{\mu\nu}(W) = {}^{(E)}C_{\mu\nu}(\Gamma) \quad (\text{IV.29})$$

En vertu de l'équation (III.8), on aura :

$${}^{(E)}G^{\mu}_{\nu}(\Gamma) + \frac{1}{m}{}^{(E)}C^{\mu}_{\nu}(\Gamma) = 0 \quad (\text{IV.30})$$

l'équation (IV.16) conduit donc à :

$${}^{(1)}G^{\mu}_{\nu}(\Gamma) + \frac{1}{m}{}^{(1)}C^{\mu}_{\nu}(\Gamma) = 0 \quad (\text{IV.31})$$

Nous devons donc résoudre l'équation (IV.31) sans perdre de vue que celle-ci est étroitement liée à l'équation (IV.30).

4 - PARAMETRISATION DU PROBLEME :

Pour résoudre le système d'équations (IV.31,30) il nous faut développer toutes les quantités tensorielles du paragraphe 3; chose qui n'est pas facile sans une paramétrisation adéquate de la métrique. Puisque nous travaillons dans l'espace à trois dimensions, nous noterons:

$$(x^1, x^2, x^3) \equiv (r, \theta, t) \quad (IV.32)$$

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} a & b & c \\ b^* & e & f \\ c^* & f^* & d \end{pmatrix} \quad (IV.33)$$

Pour nous conformer à l'équation (IV.8), nous posons :

$$\begin{aligned} a &= a_0 + a_1 & b &= b_0 + b_1 & b^* &= b_0 - b_1 \\ e &= e_0 + e_1 & c &= c_0 + c_1 & c^* &= c_0 - c_1 \\ d &= d_0 + d_1 & f &= f_0 + f_1 & f^* &= f_0 - f_1 \end{aligned} \quad (IV.34)$$

où les éléments $a_i, d_i, e_i, b_i, c_i, f_i$ ($i=0,1$) sont tous fonction de r (x^1) seulement.

En remplaçant dans (IV.33) et en utilisant (IV.9), on obtient:

$${}^{(E)}g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} a_0 & b_0 & c_0 \\ b_0 & e_0 & f_0 \\ c_0 & f_0 & d_0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad {}^{(1)}\tilde{g}_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ -b_1 & c_1 & f_1 \\ -c_1 & -f_1 & d_1 \end{pmatrix} \quad (IV.35a)$$

avec

$${}^{(1)}\tilde{g}_{\mu\nu} = {}^{(1)}g_{\mu\nu} + {}^{(1)}\bar{g}_{\mu\nu} \quad (IV.35b)$$

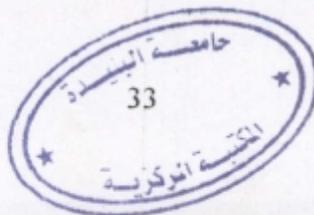
où

$${}^{(1)}g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & b_1 & c_1 \\ -b_1 & 0 & f_1 \\ -c_1 & -f_1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad {}^{(1)}\bar{g}_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} a_1 & 0 & 0 \\ 0 & c_1 & 0 \\ 0 & 0 & d_1 \end{pmatrix} \quad (IV.35c)$$

5 - DEVELOPPEMENT DE LA PARTIE EINSTEINIENNE:

A partir de l'équation (IV.35), le déterminant de ${}^{(E)}g_{\mu\alpha}$ prend la forme:

$$\det ({}^{(E)}g_{\mu\nu}) = {}^{(E)}g = a_0(e_0 d_0 - f_0^2) - b_0(b_0 d_0 - c_0 f_0) + c_0(b_0 f_0 - e_0 c_0) \quad (IV.36)$$



Puisque l'inverse du tenseur ${}^{(E)}g_{\mu\alpha}$ est donné par,

$${}^{(E)}g^{\mu\nu}{}^{(E)}g_{\mu\alpha} = \delta_{\alpha}^{\nu} \quad (\text{IV.37})$$

il aura donc pour expression :

$${}^{(E)}g^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} \alpha & \beta & \gamma \\ \beta & \theta & \rho \\ \gamma & \rho & \varepsilon \end{pmatrix} \quad (\text{IV.38})$$

avec

$$\begin{aligned} \alpha &= \frac{(e_0 d_0 - f_0^2)}{{}^{(E)}g} & \beta &= \frac{(f_0 c_0 - d_0 b_0)}{{}^{(E)}g} \\ \theta &= \frac{(a_0 d_0 - c_0^2)}{{}^{(E)}g} & \gamma &= \frac{(b_0 f_0 - e_0 c_0)}{{}^{(E)}g} \\ \varepsilon &= \frac{(a_0 e_0 - b_0^2)}{{}^{(E)}g} & \rho &= \frac{(b_0 c_0 - a_0 f_0)}{{}^{(E)}g} \end{aligned} \quad (\text{IV.39})$$

5-1- Calcul du tenseur d'Einstein ${}^{(E)}G^{\mu}_{\nu}(W)$:

A partir de (IV.35), (IV.38) et (IV.12), les christoffels auront pour expressions:

$${}^{(E)}\Gamma_{11}^1 = \frac{1}{2}(\alpha a'_0 + 2\beta b'_0 + 2\gamma c'_0) = \frac{A}{2} \quad {}^{(E)}\Gamma_{22}^1 = -\frac{1}{2}\alpha e'_0 = \frac{E}{2}$$

$${}^{(E)}\Gamma_{12}^1 = \frac{1}{2}(\beta e'_0 + \gamma f'_0) = \frac{L}{2} \quad {}^{(E)}\Gamma_{23}^1 = -\frac{1}{2}\alpha f'_0 = \frac{F}{2}$$

$${}^{(E)}\Gamma_{13}^1 = \frac{1}{2}(\beta f'_0 + \gamma d'_0) = \frac{H}{2} \quad {}^{(E)}\Gamma_{33}^1 = -\frac{1}{2}\alpha d'_0 = \frac{D}{2}$$

$${}^{(E)}\Gamma_{11}^2 = \frac{1}{2}(\beta a'_0 + 2\theta b'_0 + 2\rho c'_0) = \frac{Z}{2} \quad {}^{(E)}\Gamma_{22}^2 = -\frac{1}{2}\beta e'_0 = \frac{G}{2}$$

$${}^{(E)}\Gamma_{12}^2 = \frac{1}{2}(\theta e'_0 + \rho f'_0) = \frac{B}{2} \qquad {}^{(E)}\Gamma_{23}^2 = -\frac{1}{2}\beta f'_0 = \frac{K}{2}$$

(IV.40)

$${}^{(E)}\Gamma_{13}^2 = \frac{1}{2}(\theta f'_0 + \rho d'_0) = \frac{C}{2} \qquad {}^{(E)}\Gamma_{33}^2 = -\frac{1}{2}\beta d'_0 = \frac{T}{2}$$

$${}^{(E)}\Gamma_{11}^3 = \frac{1}{2}(\gamma a'_0 + 2\rho b'_0 + 2\epsilon c'_0) = \frac{P}{2} \qquad {}^{(E)}\Gamma_{22}^3 = -\frac{1}{2}\gamma e'_0 = \frac{Q}{2}$$

$${}^{(E)}\Gamma_{12}^3 = \frac{1}{2}(\rho e'_0 + \epsilon f'_0) = \frac{M}{2} \qquad {}^{(E)}\Gamma_{23}^3 = -\frac{1}{2}\gamma f'_0 = \frac{U}{2}$$

$${}^{(E)}\Gamma_{13}^3 = \frac{1}{2}(\rho f'_0 + \epsilon d'_0) = \frac{N}{2} \qquad {}^{(E)}\Gamma_{33}^3 = -\frac{1}{2}\gamma d'_0 = \frac{S}{2}$$

$$\text{avec,} \qquad -L=G+U \qquad \text{et} \qquad -H=K+S \qquad \text{(IV.41)}$$

Calculons les éléments du tenseur de courbure donné par (IV.23), on trouve en utilisant les relations (IV.40) :

$${}^{(E)}R_{11} = -\left(\frac{B+N}{2}\right)' - \frac{1}{4}[B(B-A) + N(N-A) + Z(L-G-U) + P(H-K-S) + 2CM]$$

$${}^{(E)}R_{22} = \frac{E'}{2} - \frac{1}{4}[L(L-G) + U(U-G) + E(B-A-N) + Q(K-H-S) + 2MF]$$

$${}^{(E)}R_{33} = \frac{D'}{2} - \frac{1}{4}[2FC + U(2T-K) + H(H-S) - D(A+B-N) - K(L+G+S-K)]$$

(IV.42)

$${}^{(E)}R_{12} = \frac{L'}{2} - \frac{1}{4}[EZ + QC + FP - MS + U(N-P) - L(N+B)]$$

$${}^{(E)}R_{13} = \frac{H'}{2} - \frac{1}{4}[FZ + DP + TM - CG + K(B-N) - H(B+N)]$$

$${}^{(E)}R_{23} = \frac{F'}{2} - \frac{1}{4} [H(L-U) - K(L+U) - FA + EC + DM + TQ]$$

La courbure scalaire devra être nulle,

$${}^{(E)}R = {}^{(E)}g^{\mu\nu} {}^{(E)}R_{\mu\nu} = \alpha {}^{(E)}R_{11} + \theta {}^{(E)}R_{22} + \varepsilon {}^{(E)}R_{33} = 0 \quad (\text{IV.43})$$

car en prenant la trace de la relation (IV.30) nous trouvons immédiatement ${}^{(E)}R = 0$.

Finalement, en vertu de (IV.17a), le tenseur d'Einstein aura pour éléments:

$$\begin{aligned} {}^{(E)}G_{11}(W) &= {}^{(E)}R_{11} - \frac{a_0 {}^{(E)}R}{2} & {}^{(E)}G_{12}(W) &= {}^{(E)}R_{12} - \frac{b_0 {}^{(E)}R}{2} \\ {}^{(E)}G_{22}(W) &= {}^{(E)}R_{22} - \frac{e_0 {}^{(E)}R}{2} & {}^{(E)}G_{13}(W) &= {}^{(E)}R_{13} - \frac{c_0 {}^{(E)}R}{2} \\ {}^{(E)}G_{33}(W) &= {}^{(E)}R_{33} - \frac{d_0 {}^{(E)}R}{2} & {}^{(E)}G_{23}(W) &= {}^{(E)}R_{23} - \frac{f_0 {}^{(E)}R}{2} \end{aligned} \quad (\text{IV.44})$$

Nous n'écrivons pas les tenseurs d'Einstein mixtes, donnés par la relation (IV.17,b), car nous n'en aurons pas besoin.

5-2- Calcul du tenseur topologique ${}^{(E)}C^\mu{}_\nu(W)$:

En utilisant (IV.25) et (IV.42) on obtient :

$$\begin{aligned} {}^{(E)}\tilde{R}_{11}(W) &= {}^{(E)}R_{11} - \frac{a_0 {}^{(E)}R}{4} & {}^{(E)}\tilde{R}_{12}(W) &= {}^{(E)}R_{12} - \frac{b_0 {}^{(E)}R}{4} \\ {}^{(E)}\tilde{R}_{22}(W) &= {}^{(E)}R_{22} - \frac{e_0 {}^{(E)}R}{4} & {}^{(E)}\tilde{R}_{13}(W) &= {}^{(E)}R_{13} - \frac{c_0 {}^{(E)}R}{4} \end{aligned} \quad (\text{IV.45})$$

$${}^{(E)}\tilde{R}_{33}(W) = {}^{(E)}R_{33} - \frac{d_0^{(E)}}{4}R \quad {}^{(E)}\tilde{R}_{23}(W) = {}^{(E)}R_{23} - \frac{f_0^{(E)}}{4}R$$

A partir de (IV.19), nous obtenons les éléments du tenseur topologique:

$${}^{(E)}C^1_1 = \frac{1}{2\sqrt{{}^{(E)}g}} \left[C^{(E)}\tilde{R}_{22} - M^{(E)}\tilde{R}_{33} + H^{(E)}\tilde{R}_{12} - L^{(E)}\tilde{R}_{13} + (N - B)^{(E)}\tilde{R}_{23} \right]$$

$${}^{(E)}C^2_2 = \frac{1}{2\sqrt{{}^{(E)}g}} \left[-2^{(E)}\tilde{R}_{23,1} - F^{(E)}\tilde{R}_{11} + M^{(E)}\tilde{R}_{33} - K^{(E)}\tilde{R}_{12} + (L - U)^{(E)}\tilde{R}_{13} + B^{(E)}\tilde{R}_{23} \right]$$

$${}^{(E)}C^3_3 = \frac{1}{2\sqrt{{}^{(E)}g}} \left[2^{(E)}\tilde{R}_{23,1} + F^{(E)}\tilde{R}_{11} - C^{(E)}\tilde{R}_{22} + (K - H)^{(E)}\tilde{R}_{12} + U^{(E)}\tilde{R}_{13} - N^{(E)}\tilde{R}_{23} \right]$$

(IV.46)

$${}^{(E)}C^1_2 = \frac{1}{2\sqrt{{}^{(E)}g}} \left[K^{(E)}\tilde{R}_{22} - Q^{(E)}\tilde{R}_{33} + F^{(E)}\tilde{R}_{12} - E^{(E)}\tilde{R}_{13} + (U - G)^{(E)}\tilde{R}_{23} \right]$$

$${}^{(E)}C^1_3 = \frac{1}{2\sqrt{{}^{(E)}g}} \left[T^{(E)}\tilde{R}_{22} - U^{(E)}\tilde{R}_{33} + D^{(E)}\tilde{R}_{12} - F^{(E)}\tilde{R}_{13} + (S - K)^{(E)}\tilde{R}_{23} \right]$$

$${}^{(E)}C^2_3 = \frac{1}{2\sqrt{{}^{(E)}g}} \left[-2^{(E)}\tilde{R}_{33,1} - D^{(E)}\tilde{R}_{11} + N^{(E)}\tilde{R}_{33} - T^{(E)}\tilde{R}_{12} + (H - S)^{(E)}\tilde{R}_{13} + C^{(E)}\tilde{R}_{23} \right]$$

$${}^{(E)}C^2_1 = \frac{1}{2\sqrt{{}^{(E)}g}} \left[-2^{(E)}\tilde{R}_{13,1} - H^{(E)}\tilde{R}_{11} + P^{(E)}\tilde{R}_{33} - C^{(E)}\tilde{R}_{12} + (A - N)^{(E)}\tilde{R}_{13} + Z^{(E)}\tilde{R}_{23} \right]$$

$${}^{(E)}C^3_1 = \frac{1}{2\sqrt{{}^{(E)}g}} \left[2^{(E)}\tilde{R}_{12,1} + L^{(E)}\tilde{R}_{11} - Z^{(E)}\tilde{R}_{22} + (B - A)^{(E)}\tilde{R}_{12} + M^{(E)}\tilde{R}_{13} - P^{(E)}\tilde{R}_{23} \right]$$

$${}^{(E)}C^3_2 = \frac{1}{2\sqrt{{}^{(E)}g}} \left[2{}^{(E)}\tilde{R}_{22,1} - 2{}^{(E)}\tilde{R}_{12,1} + L{}^{(E)}\tilde{R}_{11} + (Z - 2B){}^{(E)}\tilde{R}_{22} \right. \\ \left. + (A + B - 2L){}^{(E)}\tilde{R}_{12} + M{}^{(E)}\tilde{R}_{13} + (P - 2M){}^{(E)}\tilde{R}_{23} \right]$$

Remarque 1: On vérifie bien que la trace du tenseur de Weyl est nulle ($C^\mu_\mu = 0$).

6 - DEVELOPPEMENT DE LA PARTIE PERTURBEE:

Par souci de simplification nous travaillerons par rapport à ${}^{(E)}\tilde{g}^{\mu\nu}$ et ${}^{(1)}g^{\mu\nu}$ au lieu de ${}^{(E)}g^{\mu\nu}$ et ${}^{(1)}\tilde{g}^{\mu\nu}$, avec :

$${}^{(E)}\tilde{g}_{\mu\nu} = {}^{(E)}g_{\mu\nu} + {}^{(1)}\tilde{g}_{\mu\nu} \quad (IV.47)$$

ce changement est possible car ${}^{(E)}\tilde{g}^{\mu\nu}$ possède toutes les caractéristiques d'une métrique Einsteinienne.

L'inverse de la métrique générale, obtenu grâce à la transformation de (IV.37) en annexe A, a pour expression :

$${}^{(1)}g^{\beta\nu} = -{}^{(E)}\tilde{g}^{\beta\alpha} {}^{(E)}\tilde{g}^{\mu\nu} {}^{(1)}g_{\mu\alpha} \quad (IV.48)$$

ce qui donne, en utilisant (IV.35) et (IV.47) ;

$${}^{(1)}g^{11} = {}^{(1)}g^{22} = {}^{(1)}g^{33} = 0 \\ {}^{(1)}g^{12} = (\bar{\alpha}\bar{\theta} - \bar{\beta}^2)b_1 + (\bar{\alpha}\bar{\rho} - \bar{\gamma}\bar{\beta})c_1 + (\bar{\beta}\bar{\rho} - \bar{\gamma}\bar{\theta})f_1 \\ {}^{(1)}g^{13} = (\bar{\alpha}\bar{\rho} - \bar{\beta}\bar{\gamma})b_1 + (\bar{\alpha}\bar{\varepsilon} - \bar{\gamma}^2)c_1 + (\bar{\beta}\bar{\varepsilon} - \bar{\gamma}\bar{\rho})f_1 \\ {}^{(1)}g^{23} = (\bar{\rho}\bar{\beta} - \bar{\gamma}\bar{\theta})b_1 + (\bar{\beta}\bar{\varepsilon} - \bar{\rho}\bar{\gamma})c_1 + (\bar{\theta}\bar{\varepsilon} - \bar{\rho}^2)f_1 \quad (IV.49)$$

avec

$${}^{(1)}g^{\mu\nu} = -{}^{(1)}g^{\nu\mu} \quad (\text{IV.50})$$

et

$$\bar{X} = X(a_0 \rightarrow a = a_0 + a_1, e_0 \rightarrow e = e_0 + e_1, d_0 \rightarrow d = d_0 + d_1) \quad (\text{IV.51})$$

Le déterminant perturbé est exprimé par (voir Annexe A) :

$${}^{(1)}g = {}^{(E)}\tilde{g}_{\alpha\mu} {}^{(1)}g^{\alpha\mu} \quad (\text{IV.52})$$

se réduit à :

$${}^{(1)}g = a^{(1)}g^{11} + e^{(1)}g^{22} + d^{(1)}g^{33} = 0 \quad (\text{IV.53})$$

6-1- Calcul du tenseur d'Einstein perturbé ${}^{(1)}G^\mu_\nu(\mathbf{W})$:

L'équation(IV.14) donne pour les Christoffels perturbés,

$${}^{(1)}\Gamma_{11}^1 = {}^{(1)}\Gamma_{22}^1 = {}^{(1)}\Gamma_{33}^1 = 0$$

$$\begin{aligned} {}^{(1)}\Gamma_{12}^1 &= \left(\bar{\alpha}b_1 - \frac{\bar{\gamma}}{2}f_1 \right) - \frac{1}{2}[\bar{\alpha}(\bar{A} + \bar{B}) + \bar{\beta}(\bar{L} + \bar{G}) + \bar{\gamma}(\bar{H} + \bar{K})]b_1 \\ &\quad - \frac{1}{2}(\bar{\alpha}\bar{M} + \bar{\beta}\bar{Q} + \bar{\gamma}\bar{U})c_1 + \frac{1}{2}(\bar{\alpha}\bar{P} + \bar{\beta}\bar{M} + \bar{\gamma}\bar{N})f_1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} {}^{(1)}\Gamma_{13}^1 &= \left(\bar{\alpha}c_1 + \frac{\bar{\beta}}{2}f_1 \right) - \frac{1}{2}(\bar{\alpha}\bar{C} + \bar{\gamma}\bar{T} + \bar{\beta}\bar{K})b_1 \\ &\quad - \frac{1}{2}[\bar{\alpha}(\bar{A} + \bar{N}) + \bar{\gamma}(\bar{H} + \bar{S}) + \bar{\beta}(\bar{L} + \bar{U})]c_1 - \frac{1}{2}(\bar{\alpha}\bar{Z} + \bar{\gamma}\bar{C} + \bar{\beta}\bar{B})f_1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} {}^{(1)}\Gamma_{23}^1 &= \frac{\bar{\alpha}}{2}f_1 + \frac{1}{2}(\bar{\beta}\bar{F} + \bar{\gamma}\bar{D} + \bar{\alpha}\bar{H})b_1 - \frac{1}{2}(\bar{\beta}\bar{E} + \bar{\gamma}\bar{F} + \bar{\alpha}\bar{L})c_1 \\ &\quad - \frac{1}{2}[\bar{\beta}(\bar{G} + \bar{U}) + \bar{\gamma}(\bar{K} + \bar{S}) + \bar{\alpha}(\bar{B} + \bar{N})]f_1 \end{aligned}$$

$${}^{(1)}\Gamma_{11}^2 = {}^{(1)}\Gamma_{22}^2 = {}^{(1)}\Gamma_{33}^2 = 0$$

$$\begin{aligned}
{}^{(1)}\Gamma_{12}^2 &= \left(\bar{\beta} b_i - \frac{\bar{\rho}}{2} f_i \right) - \frac{1}{2} [\bar{\beta}(\bar{A} + \bar{B}) + \bar{\theta}(\bar{L} + \bar{G}) + \bar{\rho}(\bar{H} + \bar{K})] b_i \\
&\quad - \frac{1}{2} (\bar{\beta} \bar{M} + \bar{\theta} \bar{Q} + \bar{\rho} \bar{U}) c_i + \frac{1}{2} (\bar{\beta} \bar{P} + \bar{\theta} \bar{M} + \bar{\rho} \bar{N}) f_i
\end{aligned}
\tag{IV.54}$$

$$\begin{aligned}
{}^{(1)}\Gamma_{13}^2 &= \left(\bar{\beta} c_i + \frac{\bar{\theta}}{2} f_i \right) - \frac{1}{2} (\bar{\beta} \bar{C} + \bar{\rho} \bar{T} + \bar{\theta} \bar{K}) b_i \\
&\quad - \frac{1}{2} [\bar{\beta}(\bar{A} + \bar{N}) + \bar{\rho}(\bar{H} + \bar{S}) + \bar{\theta}(\bar{L} + \bar{U})] c_i - \frac{1}{2} (\bar{\beta} \bar{Z} + \bar{\rho} \bar{C} + \bar{\theta} \bar{B}) f_i
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
{}^{(1)}\Gamma_{23}^2 &= \frac{\bar{\beta}}{2} f_i + \frac{1}{2} (\bar{\theta} \bar{F} + \bar{\rho} \bar{D} + \bar{\beta} \bar{H}) b_i - \frac{1}{2} (\bar{\theta} \bar{E} + \bar{\rho} \bar{F} + \bar{\beta} \bar{L}) c_i \\
&\quad - \frac{1}{2} [\bar{\theta}(\bar{G} + \bar{U}) + \bar{\rho}(\bar{K} + \bar{S}) + \bar{\beta}(\bar{B} + \bar{N})] f_i
\end{aligned}$$

$${}^{(1)}\Gamma_{11}^3 = {}^{(1)}\Gamma_{22}^3 = {}^{(1)}\Gamma_{33}^3 = 0$$

$$\begin{aligned}
{}^{(1)}\Gamma_{12}^3 &= \left(\bar{\gamma} b_i - \frac{\bar{\varepsilon}}{2} f_i \right) - \frac{1}{2} [\bar{\gamma}(\bar{A} + \bar{B}) + \bar{\rho}(\bar{L} + \bar{G}) + \bar{\varepsilon}(\bar{H} + \bar{K})] b_i \\
&\quad - \frac{1}{2} (\bar{\gamma} \bar{M} + \bar{\rho} \bar{Q} + \bar{\varepsilon} \bar{U}) c_i + \frac{1}{2} (\bar{\gamma} \bar{P} + \bar{\rho} \bar{M} + \bar{\varepsilon} \bar{N}) f_i
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
{}^{(1)}\Gamma_{13}^3 &= \left(\bar{\gamma} c_i + \frac{\bar{\rho}}{2} f_i \right) - \frac{1}{2} (\bar{\gamma} \bar{C} + \bar{\varepsilon} \bar{T} + \bar{\rho} \bar{K}) b_i \\
&\quad - \frac{1}{2} [\bar{\gamma}(\bar{A} + \bar{N}) + \bar{\varepsilon}(\bar{H} + \bar{S}) + \bar{\rho}(\bar{L} + \bar{U})] c_i - \frac{1}{2} (\bar{\gamma} \bar{Z} + \bar{\varepsilon} \bar{C} + \bar{\rho} \bar{B}) f_i
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
{}^{(1)}\Gamma_{23}^3 &= \frac{\bar{\gamma}}{2} f_i + \frac{1}{2} (\bar{\rho} \bar{F} + \bar{\varepsilon} \bar{D} + \bar{\gamma} \bar{H}) b_i - \frac{1}{2} (\bar{\rho} \bar{E} + \bar{\varepsilon} \bar{F} + \bar{\gamma} \bar{L}) c_i \\
&\quad - \frac{1}{2} [\bar{\rho}(\bar{G} + \bar{U}) + \bar{\varepsilon}(\bar{K} + \bar{S}) + \bar{\gamma}(\bar{B} + \bar{N})] f_i
\end{aligned}$$

avec

$${}^{(1)}\Gamma_{\mu\nu}^\sigma = -{}^{(1)}\Gamma_{\nu\mu}^\sigma \tag{IV.55}$$

En vertu de (IV.54-55), l'expression de la courbure perturbée donnée par (IV.24) se simplifie pour devenir :

$${}^{(1)}R_{\mu\nu}(\Gamma) = \nabla_\beta {}^{(1)}\Gamma_{\mu\nu}^\beta \tag{IV.56}$$

ce qui donne pour les éléments de courbure,

$${}^{(1)}R_{11} = {}^{(1)}R_{22} = {}^{(1)}R_{33} = 0$$

$${}^{(1)}R_{12} = {}^{(1)}\Gamma_{12,1}^1 - \left(\frac{\bar{A} + \bar{B}}{2}\right) {}^{(1)}\Gamma_{12}^1 + \frac{\bar{P}}{2} {}^{(1)}\Gamma_{23}^1 + \frac{\bar{M}}{2} ({}^{(1)}\Gamma_{23}^2 - {}^{(1)}\Gamma_{13}^1) \\ + \frac{\bar{U}}{2} ({}^{(1)}\Gamma_{12}^2 - {}^{(1)}\Gamma_{23}^3) - \frac{\bar{Q}}{2} {}^{(1)}\Gamma_{13}^2 + \frac{\bar{S}}{2} {}^{(1)}\Gamma_{12}^3 + \frac{\bar{N}}{2} {}^{(1)}\Gamma_{23}^3$$

$${}^{(1)}R_{13} = {}^{(1)}\Gamma_{13,1}^1 - \frac{\bar{C}}{2} ({}^{(1)}\Gamma_{23}^3 + {}^{(1)}\Gamma_{12}^1) - \left(\frac{\bar{A} + \bar{N}}{2}\right) {}^{(1)}\Gamma_{13}^1 - \frac{\bar{Z}}{2} {}^{(1)}\Gamma_{23}^1 \\ + \frac{\bar{K}}{2} ({}^{(1)}\Gamma_{13}^3 - {}^{(1)}\Gamma_{12}^2) + \frac{\bar{G}}{2} {}^{(1)}\Gamma_{13}^2 - \frac{\bar{B}}{2} {}^{(1)}\Gamma_{23}^2 - \frac{\bar{T}}{2} {}^{(1)}\Gamma_{12}^3$$

(IV.57)

$${}^{(1)}R_{23} = {}^{(1)}\Gamma_{23,1}^1 - \left(\frac{\bar{K} + \bar{S}}{2}\right) ({}^{(1)}\Gamma_{12}^1 + {}^{(1)}\Gamma_{23}^3) + \left(\frac{\bar{G} + \bar{U}}{2}\right) ({}^{(1)}\Gamma_{13}^1 - {}^{(1)}\Gamma_{23}^2) \\ - \left(\frac{\bar{B} + \bar{N}}{2}\right) {}^{(1)}\Gamma_{23}^1 - \frac{\bar{F}}{2} ({}^{(1)}\Gamma_{13}^3 - {}^{(1)}\Gamma_{12}^2) - \frac{\bar{E}}{2} {}^{(1)}\Gamma_{13}^2 + \frac{\bar{D}}{2} {}^{(1)}\Gamma_{12}^3$$

avec

$${}^{(1)}R_{\mu\nu}(\Gamma) = -{}^{(1)}R_{\nu\mu}(\Gamma) \quad (IV.58)$$

Remarque: Le tenseur de torsion exprimé par (IV.28) devient, après simplifications:

$$\omega_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & \omega_{12} & \omega_{13} \\ -\omega_{12} & 0 & 0 \\ -\omega_{13} & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (IV.59)$$

où

$$\omega_{12} = -\frac{1}{2}W_{2,1} \quad \text{et} \quad \omega_{13} = -\frac{1}{2}W_{3,1} \quad (IV.60)$$

les éléments nuls, non diagonaux, existent car on ne peut dériver que par rapport à r . Un calcul plus explicite donne (voir annexe A):

$$\omega_{12} = \frac{3}{2} \left({}^{(1)}\Gamma_{12}^1 - {}^{(1)}\Gamma_{23}^3 \right)_{,1} \quad \text{et} \quad \omega_{13} = \frac{3}{2} \left({}^{(1)}\Gamma_{13}^1 - {}^{(1)}\Gamma_{23}^3 \right)_{,1} \quad (\text{IV.61})$$

6-2- Calcul du tenseur topologique perturbé ${}^{(1)}C_{\mu\nu}(W)$:

D'après la relation (IV.26), le tenseur ${}^{(1)}\tilde{R}_{\mu\nu}(\Gamma)$ devient:

$${}^{(1)}\tilde{R}_{\mu\nu}(\Gamma) = \frac{1}{4} {}^{(1)}R_{\mu\nu}(\Gamma) \quad (\text{où } {}^{(1)}\tilde{R}_{\mu\nu}(\Gamma) = -{}^{(1)}\tilde{R}_{\nu\mu}(\Gamma)) \quad (\text{IV.62})$$

En vertu de (IV.53), l'équation (IV.20) se réduit à:

$${}^{(1)}C^{\mu}{}_{\nu}(W) = {}^{(E)}\bar{\epsilon}^{\mu\alpha\beta} D_{\alpha} {}^{(1)}\tilde{R}_{\beta\nu}(W) \quad (\text{IV.63})$$

Les éléments du tenseur topologique perturbé seront exprimés par :

$$\begin{aligned} {}^{(1)}C^1{}_1 = & \left(1/\sqrt{{}^{(E)}\bar{g}} \right) \left\{ \left(\frac{\bar{K} + \bar{S}}{2} \right) {}^{(1)}\tilde{R}_{12} - \left(\frac{\bar{U} + \bar{G}}{2} \right) {}^{(1)}\tilde{R}_{13} + \left(\frac{\bar{B} + \bar{N}}{2} \right) {}^{(1)}\tilde{R}_{23} \right. \\ & + \left({}^{(1)}\Gamma_{13}^1 + {}^{(1)}\Gamma_{23}^2 \right) {}^{(E)}\tilde{R}_{12} + \left(2{}^{(1)}\Gamma_{23}^3 - {}^{(1)}\Gamma_{12}^1 \right) {}^{(E)}\tilde{R}_{13} + \left({}^{(1)}\Gamma_{13}^3 - {}^{(1)}\Gamma_{12}^2 \right) {}^{(E)}\tilde{R}_{23} \\ & \left. + 2{}^{(1)}\Gamma_{23}^1 {}^{(E)}\tilde{R}_{11} + {}^{(1)}\Gamma_{13}^2 {}^{(E)}\tilde{R}_{22} - {}^{(1)}\Gamma_{12}^3 {}^{(E)}\tilde{R}_{33} + \frac{2}{3} \left[\left(\frac{\bar{K} + \bar{S}}{2} \right) \omega_{12} - \left(\frac{\bar{U} + \bar{G}}{2} \right) \omega_{13} \right] \right\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} {}^{(1)}C^2{}_2 = & \left(1/\sqrt{{}^{(E)}\bar{g}} \right) \left\{ {}^{(1)}\tilde{R}_{23,1} - \frac{\bar{K}}{2} {}^{(1)}\tilde{R}_{12} - \left(\frac{\bar{L} + \bar{U}}{2} \right) {}^{(1)}\tilde{R}_{13} - \frac{\bar{B}}{2} {}^{(1)}\tilde{R}_{23} - \left(2{}^{(1)}\Gamma_{13}^1 + {}^{(1)}\Gamma_{23}^2 \right) {}^{(E)}\tilde{R}_{12} \right. \\ & \left. - \left({}^{(1)}\Gamma_{12}^1 + {}^{(1)}\Gamma_{23}^3 \right) {}^{(E)}\tilde{R}_{13} - {}^{(1)}\Gamma_{23}^1 {}^{(E)}\tilde{R}_{11} - 2{}^{(1)}\Gamma_{13}^2 {}^{(E)}\tilde{R}_{22} - {}^{(1)}\Gamma_{12}^3 {}^{(E)}\tilde{R}_{33} + \frac{2}{3} \left[-\frac{\bar{K}}{2} \omega_{12} + \frac{\bar{G}}{2} \omega_{13} \right] \right\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} {}^{(1)}C^3{}_3 = & \left(1/\sqrt{{}^{(E)}\bar{g}} \right) \left\{ {}^{(1)}\tilde{R}_{23,1} - \frac{\bar{S}}{2} {}^{(1)}\tilde{R}_{12} + \frac{\bar{U}}{2} {}^{(1)}\tilde{R}_{13} - \frac{\bar{N}}{2} {}^{(1)}\tilde{R}_{23} + \left({}^{(1)}\Gamma_{13}^1 - {}^{(1)}\Gamma_{23}^2 \right) {}^{(E)}\tilde{R}_{12} \right. \\ & + \left(2{}^{(1)}\Gamma_{12}^1 - {}^{(1)}\Gamma_{23}^3 \right) {}^{(E)}\tilde{R}_{13} + \left(2{}^{(1)}\Gamma_{12}^2 + {}^{(1)}\Gamma_{13}^3 \right) {}^{(E)}\tilde{R}_{23} - {}^{(1)}\Gamma_{23}^1 {}^{(E)}\tilde{R}_{11} + {}^{(1)}\Gamma_{13}^2 {}^{(E)}\tilde{R}_{22} \\ & \left. + 2{}^{(1)}\Gamma_{12}^3 {}^{(E)}\tilde{R}_{33} + \frac{2}{3} \left[-\frac{\bar{S}}{2} \omega_{12} + \frac{\bar{U}}{2} \omega_{13} \right] \right\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
{}^{(1)}C^1_2 &= \left(1/\sqrt{g^{(E)}}\right) \left\{ -\frac{\bar{F}}{2} {}^{(1)}\tilde{R}_{12} + \frac{\bar{E}}{2} {}^{(1)}\tilde{R}_{13} + \left(\frac{\bar{U} + \bar{G}}{2}\right) {}^{(1)}\tilde{R}_{23} \right. \\
&\quad \left. + 3\left({}^{(1)}\Gamma_{23}^1 {}^{(E)}\tilde{R}_{12} + {}^{(1)}\Gamma_{23}^2 {}^{(E)}\tilde{R}_{23} + {}^{(1)}\Gamma_{23}^3 {}^{(E)}\tilde{R}_{22}\right) - \frac{2}{3} \left(\frac{\bar{F}}{2} \omega_{12} - \frac{\bar{E}}{2} \omega_{13}\right) \right\}
\end{aligned}$$

(IV.64)

$$\begin{aligned}
{}^{(1)}C^1_3 &= \left(1/\sqrt{g^{(E)}}\right) \left\{ -\frac{\bar{D}}{2} {}^{(1)}\tilde{R}_{12} + \frac{\bar{F}}{2} {}^{(1)}\tilde{R}_{13} + \left(\frac{\bar{K} + \bar{S}}{2}\right) {}^{(1)}\tilde{R}_{23} \right. \\
&\quad \left. + 3\left({}^{(1)}\Gamma_{23}^1 {}^{(E)}\tilde{R}_{13} + {}^{(1)}\Gamma_{23}^2 {}^{(E)}\tilde{R}_{23} + {}^{(1)}\Gamma_{23}^3 {}^{(E)}\tilde{R}_{33}\right) - \frac{2}{3} \left(\frac{\bar{D}}{2} \omega_{12} - \frac{\bar{F}}{2} \omega_{13}\right) \right\}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
{}^{(1)}C^2_3 &= \left(1/\sqrt{g^{(E)}}\right) \left\{ -\frac{\bar{T}}{2} {}^{(1)}\tilde{R}_{12} - \left(\frac{\bar{H} + \bar{S}}{2}\right) {}^{(1)}\tilde{R}_{13} - \frac{\bar{C}}{2} {}^{(1)}\tilde{R}_{23} \right. \\
&\quad \left. - 3\left({}^{(1)}\Gamma_{13}^1 {}^{(E)}\tilde{R}_{13} + {}^{(1)}\Gamma_{13}^2 {}^{(E)}\tilde{R}_{23} + {}^{(1)}\Gamma_{13}^3 {}^{(E)}\tilde{R}_{33}\right) + \frac{2}{3} \left(-\frac{\bar{T}}{2} \omega_{12} - \frac{\bar{K}}{2} \omega_{13}\right) \right\}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
{}^{(1)}C^2_1 &= \left(1/\sqrt{g^{(E)}}\right) \left\{ {}^{(1)}\tilde{R}_{13,1} - \frac{\bar{C}}{2} {}^{(1)}\tilde{R}_{12} - \left(\frac{\bar{A} + \bar{B}}{2}\right) {}^{(1)}\tilde{R}_{13} - \frac{\bar{Z}}{2} {}^{(1)}\tilde{R}_{23} \right. \\
&\quad \left. - 3\left({}^{(1)}\Gamma_{13}^1 {}^{(E)}\tilde{R}_{11} + {}^{(1)}\Gamma_{13}^2 {}^{(E)}\tilde{R}_{12} + {}^{(1)}\Gamma_{13}^3 {}^{(E)}\tilde{R}_{13}\right) + \frac{2}{3} \left[\omega_{13,1} - \frac{\bar{C}}{2} \omega_{12} - \left(\frac{\bar{A} + \bar{N}}{2}\right) \omega_{13}\right] \right\}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
{}^{(1)}C^3_1 &= \left(1/\sqrt{g^{(E)}}\right) \left\{ -{}^{(1)}\tilde{R}_{12,1} + \left(\frac{\bar{A} + \bar{B}}{2}\right) {}^{(1)}\tilde{R}_{12} + \frac{\bar{M}}{2} {}^{(1)}\tilde{R}_{13} - \frac{\bar{P}}{2} {}^{(1)}\tilde{R}_{23} \right. \\
&\quad \left. + 3\left({}^{(1)}\Gamma_{12}^1 {}^{(E)}\tilde{R}_{11} + {}^{(1)}\Gamma_{12}^2 {}^{(E)}\tilde{R}_{12} + {}^{(1)}\Gamma_{12}^3 {}^{(E)}\tilde{R}_{13}\right) - \frac{2}{3} \left[\omega_{12,1} - \left(\frac{\bar{A} + \bar{B}}{2}\right) \omega_{12} - \frac{\bar{M}}{2} \omega_{13}\right] \right\}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
{}^{(1)}C^3_2 &= \left(1/\sqrt{g^{(E)}}\right) \left\{ \left(\frac{\bar{L} + \bar{G}}{2}\right) {}^{(1)}\tilde{R}_{12} + \frac{\bar{Q}}{2} {}^{(1)}\tilde{R}_{13} - \frac{\bar{M}}{2} {}^{(1)}\tilde{R}_{23} \right. \\
&\quad \left. + 3\left({}^{(1)}\Gamma_{12}^1 {}^{(E)}\tilde{R}_{12} + {}^{(1)}\Gamma_{12}^2 {}^{(E)}\tilde{R}_{22} + {}^{(1)}\Gamma_{12}^3 {}^{(E)}\tilde{R}_{23}\right) - \frac{2}{3} \left(\frac{\bar{U}}{3} \omega_{112} - \frac{\bar{Q}}{3} \omega_{13}\right) \right\}
\end{aligned}$$

Remarque: Pour simplifier notre notation nous poserons :

$${}^{(1)}\tilde{R}_{23} = k. \quad (\text{ou } {}^{(1)}R_{23} = 4k, \quad k \neq \text{cte}) \quad (\text{IV.65})$$

6-3- Développement de l'équation du champ (IV.15):

La métrique générale étant dépendante de r seulement, l'équation (IV.15) donne :

$$\left(\sqrt{{}^{(E)}\tilde{g}^{(1)}} g^{\mu 1} \right)_{,1} = 0. \quad (IV.66)$$

soit,

$$\left(\sqrt{{}^{(E)}\tilde{g}^{(1)}} g^{21} \right)_{,1} = 0. \quad \text{et} \quad \left(\sqrt{{}^{(E)}\tilde{g}^{(1)}} g^{31} \right)_{,1} = 0. \quad (IV.67a,b)$$

7 - CHOIX DE LA METRIQUE ${}^{(E)}g_{\mu\nu}$ (LIEN AVEC TMG) :

Comme nous l'avons déjà fait remarqué, la résolution de l'équation de champ perturbée dépend étroitement de la forme donnée à la partie Einsteinienne de la métrique. Il est par conséquent naturel d'utiliser la paramétrisation de TMG puisque d'une part il n'existe pas, à notre connaissance, d'autre théorie topologique de la gravitation et que d'autre part, toute autre choix aurait pour conséquences l'établissement d'un nouveau modèle topologique de la Relativité Générale, ce qui serait un dépassement du cadre de cette thèse.

Faisons donc le lien entre notre métrique Einsteinienne générale et celle de TMG en écrivant (III.10) sous la forme:

$$ds^2 = {}^{(E)}g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu \quad \mu, \nu = 0,1,2 \quad (IV.68)$$

Exprimons ${}^{(E)}g_{\mu\nu}$ dans la base $(r, \theta, t) \equiv (x^1, x^2, x^0)$, on trouve :

$${}^{(E)}g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} g_{rr} & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_{22} & \lambda_{20} \\ 0 & \lambda_{02} & \lambda_{00} \end{pmatrix} \quad (IV.69)$$

où $g_{rr} = -1$ et $\lambda_{02} = \lambda_{20}$

En identifiant avec (IV.35a), on trouve :

$$\begin{aligned} a_0 &= -1 & b_0 &= 0 \\ e_0 &= \lambda_{22} & c_0 &= 0 \\ d_0 &= \lambda_{00} & f_0 &= \lambda_{02} \end{aligned} \quad (\text{IV.70})$$

ce qui donne par rapport à (III.13);

$$\begin{aligned} a_0 &= -1 & b_0 &= 0 \\ e_0 &= \frac{\sigma}{y}(\omega^2 - y^2) & c_0 &= 0 \\ d_0 &= \frac{\sigma}{y} & f_0 &= -\omega \frac{\sigma}{y} \end{aligned} \quad (\text{IV.71})$$

A partir de (IV.36) et en utilisant (IV.71), le déterminant de la métrique d'Einstein se réduit à:

$${}^{(E)}g = a_0(e_0 d_0 - f_0^2) \quad (\text{IV.72})$$

on aura donc ${}^{(E)}g > 0$ seulement si :

$$e_0 d_0 - f_0^2 > 0 \quad (\text{IV.73})$$

en remplaçant par (IV.71), l'équation (IV.72) devient :

$$e_0 d_0 - f_0^2 = -\sigma^2 < 0 \quad (\text{IV.74})$$

ce qui vérifie bien la condition (IV.73).

Ainsi qu'il a été expliqué au chapitre précédent, nous devons exploiter un graphique comportant trois courbes $\sigma(r)$, $y(r)$, et $\omega(r)$ [13] afin d'obtenir, explicitement, les fonctions $e_0(r)$, $d_0(r)$, et $f_0(r)$.

7-1- Simplification de ${}^{(E)}g_{\mu\nu}$:

En adoptant les relations (IV.73), les équations (IV.39) deviennent :

$$\begin{aligned} \alpha &= -1 & \beta &= 0 \\ \theta &= -d_0 / {}^{(E)}g & \gamma &= 0 \\ \varepsilon &= -e_0 / {}^{(E)}g & \rho &= f_0 / {}^{(E)}g \end{aligned} \quad (\text{IV.75})$$

et le déterminant prend donc la forme:

$${}^{(E)}g = \sigma^2. \quad (\text{IV.76})$$

7-1-A- Calcul de ${}^{(E)}G^\mu{}_\nu(W)$:

Les Christoffels non perturbés deviennent:

$$\begin{aligned} A=L=H=Z=G=K=T=P=Q=U=S=0; \quad E=e'_0; \quad F=f'_0; \quad D=d'_0; \\ B=\theta e'_0 + \rho f'_0; \quad C=\theta f'_0 + \rho d'_0; \quad M=\rho e'_0 + \varepsilon f'_0; \quad N=\varepsilon d'_0 + \rho f'_0 \end{aligned} \quad (\text{IV.77})$$

Les éléments non nuls de la courbure non perturbée se réduisent à:

$$\begin{aligned} {}^{(E)}R_{11} &= -\left(\frac{B+N}{2}\right)' - \frac{1}{4}[B^2 + N^2 + 2CM] \\ {}^{(E)}R_{22} &= \frac{E'}{2} - \frac{1}{4}[E(B-N) + 2MF] \\ {}^{(E)}R_{33} &= \frac{D'}{2} - \frac{1}{4}[2FC - D(B-N)] \\ {}^{(E)}R_{23} &= \frac{F'}{2} - \frac{1}{4}[EC + DM] \end{aligned} \quad (\text{IV.78})$$

Le tenseur d'Einstein devient, en vertu de (IV.43):

$$\begin{aligned} {}^{(E)}G_{11} &= {}^{(E)}R_{11} & {}^{(E)}G_{12} &= 0 \\ {}^{(E)}G_{22} &= {}^{(E)}R_{22} & {}^{(E)}G_{13} &= 0 \\ {}^{(E)}G_{33} &= {}^{(E)}R_{33} & {}^{(E)}G_{23} &= {}^{(E)}R_{23} \end{aligned} \quad (\text{IV.79})$$

7-1-B- Calcul de ${}^{(E)}C^\mu{}_\nu(W)$:

Nous n'écrivons pas les éléments du tenseur topologique car nous en aurons pas besoin pour la suite.

7-2- Simplification de ${}^{(1)}g_{\mu\nu}$:

Il est à noter que les simplifications $b_0=0$ et $c_0=0$ conduisent, obligatoirement, à $b_1=0$ et $c_1=0$ puisque, dans l'hypothèse du calcul perturbatif, nous devons avoir $|b_1| \ll |b_0|$ et $|c_1| \ll |c_0|$. L'inverse de la métrique perturbée se réduit à:

$${}^{(1)}g^{23} = -{}^{(1)}g^{32} = (\bar{\theta}\bar{\varepsilon} - \bar{\rho}^2)f_1 \quad (\text{IV.80})$$

7-2-A- Calcul de ${}^{(1)}G^\mu{}_\nu(W)$:

Les éléments non nuls des Christoffels perturbés sont:

$$\begin{aligned} {}^{(1)}\Gamma_{23}^1 &= -\frac{1}{2}[f_1' - (\bar{B} - \bar{N})f_1] \\ {}^{(1)}\Gamma_{12}^2 &= -\frac{1}{2}[\bar{\rho}f_1' - (\bar{\theta}\bar{M} + \bar{\rho}\bar{N})f_1] & {}^{(1)}\Gamma_{13}^2 &= \frac{1}{2}[\bar{\theta}f_1' - (\bar{\rho}\bar{C} + \bar{\theta}\bar{B})f_1] \\ {}^{(1)}\Gamma_{12}^3 &= -\frac{1}{2}[\bar{\varepsilon}f_1' - (\bar{\rho}\bar{M} + \bar{\varepsilon}\bar{N})f_1] & {}^{(1)}\Gamma_{13}^3 &= \frac{1}{2}[\bar{\rho}f_1' - (\bar{\varepsilon}\bar{C} + \bar{\rho}\bar{B})f_1] \end{aligned} \quad (\text{IV.81})$$

avec ;

$${}^{(1)}\Gamma_{12}^2 = -{}^{(1)}\Gamma_{13}^3, \text{ car } \bar{\theta}\bar{M} + \bar{\rho}\bar{N} = \bar{\varepsilon}\bar{C} + \bar{\rho}\bar{B}. \quad (\text{IV.82})$$

Quand à la courbure perturbée, le seul élément non nul est:

$${}^{(1)}R_{23} = {}^{(1)}\Gamma^1_{23,1} - \left(\frac{\bar{B} + \bar{N}}{2}\right) {}^{(1)}\Gamma^1_{23} + \frac{\bar{F}}{2} ({}^{(1)}\Gamma^2_{12} - {}^{(1)}\Gamma^3_{13}) - \frac{\bar{E}}{2} {}^{(1)}\Gamma^2_{13} + \frac{\bar{D}}{2} {}^{(1)}\Gamma^3_{12} \quad (\text{IV.83})$$

Les éléments du tenseur d'Einstein perturbé deviennent :

$$\begin{aligned} {}^{(1)}G^1_1 &= {}^{(1)}G^1_2 = {}^{(1)}G^1_3 = {}^{(1)}G^2_1 = {}^{(1)}G^3_1 = 0. \\ {}^{(1)}G^2_2 &= \frac{\bar{\rho}}{2} {}^{(1)}R_{23} - (\bar{\theta}\bar{\varepsilon} - \bar{\rho}^2) {}^{(E)}R_{23} f_1 \\ {}^{(1)}G^2_3 &= -\frac{\bar{\theta}}{2} {}^{(1)}R_{23} - (\bar{\theta}\bar{\varepsilon} - \bar{\rho}^2) {}^{(E)}R_{33} f_1 \\ {}^{(1)}G^3_2 &= \frac{\bar{\varepsilon}}{2} {}^{(1)}R_{23} + (\bar{\theta}\bar{\varepsilon} - \bar{\rho}^2) {}^{(E)}R_{22} f_1 \end{aligned} \quad (\text{IV.84a})$$

avec,

$${}^{(1)}C^3_3 = -{}^{(1)}C^2_2 \quad (\text{IV.84b})$$

7-2-B- Calcul de ${}^{(1)}C_{\mu\nu}(W)$:

Le tenseur ${}^{(E)}\tilde{R}_{\mu\nu}$ se réduit donc à :

$$\begin{aligned} {}^{(E)}\tilde{R}_{11} &= {}^{(E)}R_{11} & {}^{(E)}\tilde{R}_{12} &= 0 \\ {}^{(E)}\tilde{R}_{22} &= {}^{(E)}R_{22} & {}^{(E)}\tilde{R}_{23} &= {}^{(E)}R_{23} \\ {}^{(E)}\tilde{R}_{33} &= {}^{(E)}R_{33} \end{aligned} \quad (\text{IV.85})$$

car la courbure scalaire R est nulle (IV.43).

Les éléments du tenseur topologique perturbés se réduisent à :

$${}^{(1)}C^1_1 = \left(1/\sqrt{{}^{(E)}\bar{g}}\right) \left\{ \left(\frac{\bar{B} + \bar{N}}{2}\right) {}^{(1)}\tilde{R}_{23} + 2{}^{(1)}\Gamma^1_{23} {}^{(E)}\tilde{R}_{11} + {}^{(1)}\Gamma^2_{13} {}^{(E)}\tilde{R}_{22} - {}^{(1)}\Gamma^3_{12} {}^{(E)}\tilde{R}_{33} \right\}$$

$${}^{(1)}C^2_2 = \left(1/\sqrt{{}^{(E)}\bar{g}}\right) \left\{ -\frac{\bar{B}}{2} {}^{(1)}\tilde{R}_{23} - {}^{(1)}\Gamma_{23}^{(E)} \tilde{R}_{11} - 2 {}^{(1)}\Gamma_{13}^{(E)} \tilde{R}_{22} - {}^{(1)}\Gamma_{12}^{(E)} \tilde{R}_{33} \right\}$$

$${}^{(1)}C^3_3 = \left(1/\sqrt{{}^{(E)}\bar{g}}\right) \left\{ -\frac{\bar{N}}{2} {}^{(1)}\tilde{R}_{23} - {}^{(1)}\Gamma_{23}^{(E)} \tilde{R}_{11} + {}^{(1)}\Gamma_{13}^{(E)} \tilde{R}_{22} + 2 {}^{(1)}\Gamma_{12}^{(E)} \tilde{R}_{33} \right\}$$

$${}^{(1)}C^1_2 = \left(1/\sqrt{{}^{(E)}\bar{g}}\right) \left\{ \frac{\bar{E}}{3} \omega_{13} \right\}$$

$${}^{(1)}C^1_3 = \left(1/\sqrt{{}^{(E)}\bar{g}}\right) \left\{ -\frac{\bar{D}}{3} \omega_{12} \right\}$$

(IV.86)

$${}^{(1)}C^2_3 = \left(1/\sqrt{{}^{(E)}\bar{g}}\right) \left\{ -3 {}^{(1)}\Gamma_{13}^{(E)} \tilde{R}_{33} \right\}$$

$${}^{(1)}C^2_1 = \left(1/\sqrt{{}^{(E)}\bar{g}}\right) \frac{2}{3} \left\{ \omega_{13,1} - \frac{\bar{N}}{2} \omega_{13} \right\}$$

$${}^{(1)}C^3_1 = \left(1/\sqrt{{}^{(E)}\bar{g}}\right) \frac{2}{3} \left\{ \omega_{12,1} - \frac{\bar{B}}{2} \omega_{12} \right\}$$

$${}^{(1)}C^3_2 = \left(1/\sqrt{{}^{(E)}\bar{g}}\right) \left\{ 3 {}^{(1)}\Gamma_{12}^{(E)} \tilde{R}_{22} \right\}$$

Puisque, en vertu de (IV.81), ω_{12} et ω_{13} sont nuls, nous obtenons a partir de (IV.31) et (IV.84b) :

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & {}^{(1)}G^2_2 & {}^{(1)}G^2_3 \\ 0 & {}^{(1)}G^3_2 & -{}^{(1)}G^2_2 \end{pmatrix} + \frac{1}{m} \begin{pmatrix} {}^{(1)}C^1_1 & 0 & 0 \\ 0 & {}^{(1)}C^2_2 & {}^{(1)}C^2_3 \\ 0 & {}^{(1)}C^3_2 & {}^{(1)}C^3_3 \end{pmatrix} = 0 \quad \text{(IV.87)}$$

ce qui donne,

$$\begin{aligned} \frac{1}{m} {}^{(1)}C_1^1 &= 0, \\ {}^{(1)}G_2^2 + \frac{1}{m} {}^{(1)}C_2^2 &= 0, \\ {}^{(1)}G_3^3 + \frac{1}{m} {}^{(1)}C_3^3 &= 0. \end{aligned} \tag{IV.88a,b,c}$$

$$\begin{aligned} {}^{(1)}G_3^2 + \frac{1}{m} {}^{(1)}C_2^3 &= 0 \\ {}^{(1)}G_2^3 + \frac{1}{m} {}^{(1)}C_3^2 &= 0 \end{aligned} \tag{IV.89a,b}$$

Des calculs détaillés montrent l'existence d'une équation redondante (superflue) parmi les trois premières équations. Nous choisissons de ne garder que (IV.88,a,b)

Les équations (IV.88,a,b) et (IV.89,a,b) deviennent respectivement,

$$\begin{aligned} \psi_1(r)f_1' + \psi_2(r)f_1 + \psi_3(r) &= 0 \\ \varphi_1(r)f_1' + \varphi_2(r)f_1 + \varphi_3(r) &= 0 \\ \varpi_1(r)f_1' + \varpi_2(r)f_1 + \varpi_3(r) &= 0 \\ \chi_1(r)f_1' + \chi_2(r)f_1 + \chi_3(r) &= 0 \end{aligned} \tag{IV.90}$$

plus l'équation(IV.83) qui, en tenant compte de (IV.65), est réécrite sous la forme;

$$-f_1'' + \Omega_1(r)f_1' + \Omega_2(r)f_1 + \Omega_3(r) = 0 \tag{IV.91}$$

avec,

$$\begin{aligned} \psi_1(r) &= -2R_{11} + \bar{\theta}R_{22} + \bar{\varepsilon}R_{33} \\ \psi_2(r) &= 2(\bar{B} + \bar{N})R_{11} - (\bar{\rho}\bar{C} + \bar{\theta}\bar{B})R_{22} - (\bar{\rho}\bar{M} + \bar{\varepsilon}\bar{N})R_{33} \\ \psi_3(r) &= (\bar{B} + \bar{N})k \end{aligned} \tag{IV.92}$$

$$\begin{aligned} \varphi_1(r) &= R_{11} - 2\bar{\theta}R_{22} + \bar{\varepsilon}R_{33} \\ \varphi_2(r) &= -(\bar{B} - \bar{N})R_{11} + 2(\bar{\rho}\bar{C} + \bar{\theta}\bar{B})R_{22} - (\bar{\rho}\bar{M} + \bar{\varepsilon}\bar{N})R_{33} + 2m\bar{\sigma}(\bar{\theta}\bar{\varepsilon} - \bar{\rho}^2)R_{23} \end{aligned} \tag{IV.93}$$

$$\varphi_3(r) = (4m\bar{\sigma}\bar{\rho} - \bar{B})k$$

$$\varpi_1(r) = 3\bar{\rho}R_{33}$$

$$\varpi_2(r) = [2m\bar{\sigma}(\bar{\theta}\bar{\varepsilon} - \bar{\rho}^2) - 3(\bar{\varepsilon}\bar{C} + \bar{\rho}\bar{B})]R_{33} \quad (IV.94)$$

$$\varpi_3(r) = 4m\bar{\sigma}\bar{\theta}k$$

$$\chi_1(r) = -3\bar{\rho}R_{22}$$

$$\chi_2(r) = [2m\bar{\sigma}(\bar{\theta}\bar{\varepsilon} - \bar{\rho}^2) + 3(\bar{\theta}\bar{M} + \bar{\rho}\bar{N})]R_{22} \quad (IV.95)$$

$$\chi_3(r) = 4m\bar{\sigma}\bar{\varepsilon}k$$

$$\Omega_1(r) = \frac{1}{2}[3(\bar{B} + \bar{N}) - 2\bar{F}\bar{\rho} - \bar{E}\bar{\theta} - \bar{D}\bar{\varepsilon}] \quad (IV.96)$$

$$\Omega_2(r) = \frac{1}{2}\left[2(\bar{B} + \bar{N})' - (\bar{B} + \bar{N})^2 + 2\bar{F}(\bar{C}\bar{\varepsilon} + \bar{B}\bar{\rho}) + \bar{E}(\bar{C}\bar{\rho} + \bar{B}\bar{\theta}) + \bar{D}(\bar{M}\bar{\rho} + \bar{N}\bar{\varepsilon})\right]$$

$$\Omega_3(r) = -8k$$

et où, $\bar{\sigma} = \sqrt{{}^{(E)}\bar{g}}$ et ${}^{(E)}\bar{g} = {}^{(E)}\tilde{g} = \det({}^{(E)}\tilde{g})$.

les fonctions $\psi(r)$, $\varphi(r)$, $\varpi(r)$, $\chi(r)$, et $\Omega(r)$ sont, en fait, des fonctions de (a_1, a'_1, a''_1) , de (e_1, e'_1, e''_1) et de (d_1, d'_1, d''_1) . En utilisant (IV.91) et en éliminant k des équations (IV.90) nous obtenons le système suivant:

$$-f_1'' + \left(\Omega_1 + \frac{8\psi_1}{\bar{B} + \bar{N}}\right)f_1' + \left(\Omega_2 + \frac{8\psi_2}{\bar{B} + \bar{N}}\right)f_1 = 0$$

$$-f_1'' + \left(\Omega_1 + \frac{2\varphi_1}{4m\bar{\sigma}\bar{\rho} - \bar{B}}\right)f_1' + \left(\Omega_2 + \frac{2\varphi_2}{4m\bar{\sigma}\bar{\rho} - \bar{B}}\right)f_1 = 0$$

$$-f_1'' + \left(\Omega_1 + \frac{2\varpi_1}{m\bar{\sigma}\bar{\theta}}\right)f_1' + \left(\Omega_2 + \frac{2\varpi_2}{m\bar{\sigma}\bar{\theta}}\right)f_1 = 0 \quad (IV.97)$$

$$-f_1'' + \left(\Omega_1 + \frac{2\chi_1}{m\bar{\sigma}\bar{\varepsilon}}\right)f_1' + \left(\Omega_2 + \frac{2\chi_2}{m\bar{\sigma}\bar{\varepsilon}}\right)f_1 = 0$$

7-3 - Discussion des solutions :

Nous obtenons, finalement un system de quatre équations différentielles, du second ordre, non linéaires, à quatre inconnues a_i, e_i, d_i, f_i . Puisque l'écriture de notre système d'équations en fonction de ses quatre variables ne présente aucun intérêt pratique, nous avons préféré le laisser sous la forme donnée par l'équation (IV.97).

Pour résoudre ce genre de systèmes d'équations différentielles, notre choix s'est porté sur la méthode de Monté-Carlo. Cette méthode est, sans conteste, l'une des méthodes numériques les plus utilisées, car elle réalise, pour des systèmes comme le notre, un équilibre entre la précision du calcul et le temps machine nécessaire pour le faire.

En contre partie, le point d'équilibre, que prétend réaliser cette méthode, demande dans la grande majorité des cas, la disponibilité d'un ordinateur de grande puissance.

Bien que notre travail reste tributaire des résultats de l'investigation numérique, il est néanmoins possible de prévoir qu'il aura des solutions de type trou de ver, tout comme dans le cas de la théorie symétrique de la gravitation (TMG), dont la forme explicite ne pourra être obtenue que par le biais des calculs numériques.

Conclusion Générale

Conclusion

A travers ce travail de recherche, nous avons construit une théorie de la gravitation non symétrique topologique à trois dimensions, et obtenu les équations du champ appropriées en utilisant une perturbation de la métrique générale au voisinage d'une métrique Einsteinienne arbitraire.

Puisque les équations différentielles (IV.97) sont du même ordre que celles de la relativité générale, et puisque on a développé une perturbation autour de la solution de RG, on s'attend à ce que les solutions de NGT aient le même comportement asymptotique que celles de RG.

Notons que, pour résoudre numériquement les équations différentielles compliquées (IV.97), on a utilisé la méthode de Monté-Carlo, mais vu la non disponibilité d'un ordinateur, où une grande mémoire et un temps d'exécution rapide sont nécessaires, on a préféré discuter les types de solutions qu'on pourra obtenir et laisser le calcul numérique pour un travail ultérieur.

En effet, pour les solutions qui sont topologiquement Euclidiennes la solution numérique des équations différentielles dépend étroitement du choix approprié des conditions initiales. En d'autres termes, les solutions dépendent du domaine de variation de la coordonnée r selon que le domaine est topologiquement une sphère (surface de genre 0) ou un tore (surface de genre 1).

Si le domaine est non compact, on aboutit à la topologie d'un plan ou d'un cylindre etc... . Concernant le domaine compact avec le genre 0, les cercles à $t=\text{cte}$, $r=\text{cte}$ peuvent être contractés à un point pour une certaine valeur de r . Si on choisit $r=0$, la métrique développe une singularité.

Notons que, vu la forme des équations (IV.97), le comportement singulier possible au voisinage de $r=0$ est proportionnel à $r^{-\alpha}$ ($\alpha > 0$).

En outre, la forme des équations différentielles (IV.97) suggère que, comme dans le cas de la RG, des solutions du type Wormhole, qui sont régulières avec deux points à l'infini ($r \rightarrow \pm\infty$), peuvent exister. Plus de détails sont à l'étude.

Annexes

Annexe A:**Etapes de linéarisation**

Le développement de notre métrique au voisinage d'une métrique Einsteinienne arbitraire revient à l'écrire sous la forme:

$$g^{\mu\nu} = {}^{(E)}g^{\mu\nu} + {}^{(1)}g^{\mu\nu} + {}^{(2)}g^{\mu\nu} + \dots \quad (\text{A.1})$$

Comme il a déjà été mentionné, nous nous restreindrons au premier ordre seulement. La conséquence directe du développement (A.1) sera que tout tenseur $T_{\mu\nu}$ pourra se mettre sous la forme suivante:

$$T_{\mu\nu} = {}^{(E)}T_{\mu\nu} + {}^{(1)}T_{\mu\nu} + \dots \quad (\text{A.2})$$

A- L'inverse de la métrique est obtenu grâce à la relation d'orthogonalité :

$$g_{\mu\alpha} g^{\beta\alpha} = \delta_{\mu}^{\beta} \quad (\text{A.3})$$

où

$$g_{\mu\alpha} = {}^{(E)}g_{\mu\alpha} + {}^{(1)}g_{\mu\alpha} + \dots \quad (\text{A.4})$$

En injectant (A.1) et (A.4) dans (A.3), on obtient :

$${}^{(E)}g_{\mu\alpha} {}^{(E)}g^{\beta\alpha} + {}^{(E)}g_{\mu\alpha} {}^{(1)}g^{\beta\alpha} + {}^{(1)}g_{\mu\alpha} {}^{(E)}g^{\beta\alpha} = \delta_{\mu}^{\beta} \quad (\text{A.5})$$

or, dans le cadre de la théorie de la Relativité Générale, nous avons aussi la relation :

$${}^{(E)}g_{\mu\alpha} {}^{(E)}g^{\beta\alpha} = \delta_{\mu}^{\beta} \quad (\text{A.6})$$

l'équation (A.7) se réduit donc à :

$${}^{(E)}g_{\mu\alpha} {}^{(1)}g^{\beta\alpha} = -{}^{(1)}g_{\mu\alpha} {}^{(E)}g^{\beta\alpha} \quad (\text{A.7})$$

En multiplions (A.7) par le terme ${}^{(E)}g^{\mu\nu}$, nous obtenons finalement :

$${}^{(1)}g^{\beta\nu} = -{}^{(E)}g^{\beta\alpha} {}^{(E)}g^{\mu\nu} {}^{(1)}g_{\mu\alpha} \quad (\text{A.8})$$

La relation (A.8) représente la métrique contravariante perturbée. Le déterminant étant une quantité scalaire nous l'écrivons sous la forme [14]:

$$g = {}^{(E)}g + {}^{(E)}g^{(1)}g + {}^{(E)}g^{(2)}g + \dots \quad (\text{A.9})$$

où

$${}^{(1)}g = {}^{(E)}g_{\alpha\mu} {}^{(1)}g^{\alpha\mu} \quad (\text{A.10})$$

cette relation est facilement vérifiable en utilisant (A.8).

B- Le développement de $\bar{\varepsilon}^{\alpha\beta\mu}$ donne :

$$\bar{\varepsilon}^{\alpha\beta\mu} = \varepsilon^{\alpha\beta\mu} / \sqrt{g} = \varepsilon^{\alpha\beta\mu} / \sqrt{{}^{(E)}g} \left(1 - \frac{1}{2} {}^{(1)}g + \dots \right) \quad (\text{A.11})$$

avec,

$${}^{(E)}\bar{\varepsilon}^{\alpha\beta\mu} = \varepsilon^{\alpha\beta\mu} / \sqrt{{}^{(E)}g}$$

et

$${}^{(1)}\bar{\varepsilon}^{\alpha\beta\mu} = -\frac{1}{2} {}^{(E)}\bar{\varepsilon}^{\alpha\beta\mu} {}^{(1)}g \quad (\text{A.12a,b})$$

C- La condition de compatibilité (IV.1), donnée par :

$$g_{\mu\nu,\sigma} - \Gamma_{\mu\sigma}^{\lambda} g_{\lambda\nu} - \Gamma_{\nu\sigma}^{\lambda} g_{\mu\lambda} = 0 \quad (\text{A.13})$$

devient, en écrivant les Christoffels selon l'équation (A.2) et en utilisant (A.1,4):

$$\nabla_{\sigma}^{(E)} g_{\mu\nu} + \nabla_{\sigma}^{(1)} g_{\mu\nu} - {}^{(1)}\Gamma_{\mu\sigma}^{\lambda} g_{\lambda\nu} - {}^{(1)}\Gamma_{\nu\sigma}^{\lambda} g_{\mu\lambda} = 0 \quad (\text{A.14})$$

avec

$$\nabla_{\sigma} T_{\mu\nu} = \partial_{\sigma} T_{\mu\nu} - {}^{(E)}\Gamma_{\mu\sigma}^{\lambda} T_{\lambda\nu} - {}^{(E)}\Gamma_{\nu\sigma}^{\lambda} T_{\mu\lambda} \quad (\text{A.15})$$

Le premier terme de (A.12) est nul [1] et conduit grâce à l'équation (A.15) à :

$${}^{(E)}\Gamma_{\lambda\eta}^{\sigma} = \frac{1}{2} {}^{(E)}g^{\sigma\zeta} \left[{}^{(E)}g_{\lambda\zeta,\eta} + {}^{(E)}g_{\zeta\eta,\lambda} - {}^{(E)}g_{\eta\lambda,\zeta} \right] \quad (\text{A.16})$$

l'équation (A.12) se réduit donc à :

$$\nabla_{\sigma}^{(1)} g_{\mu\nu} - {}^{(1)}\Gamma_{\mu\sigma}^{\lambda} g_{\lambda\nu} - {}^{(1)}\Gamma_{\nu\sigma}^{\lambda} g_{\mu\lambda} = 0 \quad (\text{A.17})$$

Une transformation analogue à celle décrite par Landau[1] pour trouver (A.16), donne :

$${}^{(1)}\Gamma_{\lambda\eta}^{\sigma} = \frac{1}{2} {}^{(E)}g^{\sigma\zeta} \left[\nabla_{\eta}^{(1)} g_{\lambda\zeta} + \nabla_{\lambda}^{(1)} g_{\zeta\eta} - \nabla_{\zeta}^{(1)} g_{\eta\lambda} \right] \quad (\text{A.18})$$

D- Le tenseur de Ricci de NGT est exprimé par :

$$R_{\mu\nu}(W) = R_{\mu\nu}(\Gamma) + \frac{2}{3} W_{[\mu,\nu]} \quad (\text{A.19})$$

En utilisant (A.14) et (A.16), l'expression de $R_{\mu\nu}(\Gamma)$ donnée par (I.16) se réduit à :

$$R_{\mu\nu}(\Gamma) = {}^{(E)}R_{\mu\nu}(\Gamma) + {}^{(1)}R_{\mu\nu}(\Gamma) \quad (\text{A.20})$$

où ${}^{(E)}R_{\mu\nu}(\Gamma)$ est exprimé par [1]:

$${}^{(E)}R_{\mu\nu}(\Gamma) = {}^{(E)}\Gamma_{\mu\nu,\beta}^{\beta} - {}^{(E)}\Gamma_{\mu\beta,\nu}^{\beta} - {}^{(E)}\Gamma_{\alpha\nu}^{\beta} {}^{(E)}\Gamma_{\mu\beta}^{\alpha} + {}^{(E)}\Gamma_{\alpha\beta}^{\beta} {}^{(E)}\Gamma_{\mu\nu}^{\alpha} \quad (\text{A.21})$$

et où [14]:

$${}^{(1)}R_{\mu\nu}(\Gamma) = \nabla_{\beta} {}^{(1)}\Gamma_{\mu\nu}^{\beta} - \delta_{(\nu}^{\sigma} \delta_{\mu)}^{\rho} \nabla_{\sigma} {}^{(1)}\Gamma_{(\rho\beta)}^{\beta} \quad (\text{A.22})$$

avec ;

$$\delta_{(\nu}^{\sigma} \delta_{\mu)}^{\rho} \nabla_{\sigma} {}^{(1)}\Gamma_{(\rho\beta)}^{\beta} = \frac{1}{2} \left[\nabla_{\mu} {}^{(1)}\Gamma_{(\nu\beta)}^{\beta} + \nabla_{\nu} {}^{(1)}\Gamma_{(\mu\beta)}^{\beta} \right] \quad (\text{A.23})$$

Nous aurons donc :

$$R_{\mu\nu}(W) = {}^{(E)}R_{\mu\nu}(\Gamma) + {}^{(1)}R_{\mu\nu}(\Gamma) + \frac{2}{3} W_{[\mu,\nu]} \quad (\text{A.24})$$

ce qui permet l'identification :

$${}^{(E)}R_{\mu\nu}(W) = {}^{(E)}R_{\mu\nu}(\Gamma) \quad (\text{A.25})$$

$${}^{(1)}R_{\mu\nu}(W) = {}^{(1)}R_{\mu\nu}(\Gamma) + \frac{2}{3} W_{[\mu,\nu]} \quad (\text{A.26})$$

E- La courbure scalaire étant donnée par :

$$R(W) = g^{\mu\nu} R_{\mu\nu}(W) \quad (\text{A.27})$$

Les relations (A.1), (A.23) et (A.24) conduisent à:

$${}^{(E)}R(W) = {}^{(E)}R(\Gamma) = {}^{(E)}g^{\mu\nu} {}^{(E)}R_{\mu\nu}(\Gamma)$$

(A.28a,b)

$${}^{(1)}R(W) = {}^{(E)}g^{\mu\nu} {}^{(1)}R_{\mu\nu}(W) + {}^{(1)}g^{\mu\nu} {}^{(E)}R_{\mu\nu}(\Gamma)$$

en utilisant (A.24), on trouve :

$${}^{(1)}R(W) = {}^{(E)}g^{\mu\nu} {}^{(1)}R_{\mu\nu}(\Gamma) + {}^{(1)}g^{\mu\nu} {}^{(E)}R_{\mu\nu}(\Gamma) \quad (\text{A.29})$$

puisque

$${}^{(E)}g^{\mu\nu} W_{[\mu,\nu]} = {}^{(E)}g^{\mu\nu} (W_{\mu,\nu} - W_{\nu,\mu}) = W^{\nu}{}_{,\nu} - W^{\mu}{}_{,\mu} = 0 \quad \mu, \nu = 1, 2, 3 \quad (\text{A.30})$$

F- De la même manière que précédemment, on aura pour ;

$$\tilde{R}_{\mu\nu}(W) = R_{\mu\nu}(W) - \frac{1}{4} g_{\mu\nu} R(W) \quad (\text{A.31})$$

les relations:

$${}^{(E)}\tilde{R}_{\mu\nu}(W) = {}^{(E)}R_{\mu\nu}(\Gamma) - \frac{1}{4} {}^{(E)}g_{\mu\nu} {}^{(E)}R(\Gamma) \quad (\text{A.32a,b})$$

$${}^{(1)}\tilde{R}_{\mu\nu}(W) = {}^{(1)}R_{\mu\nu}(W) - \frac{1}{4} \left[{}^{(E)}g_{\mu\nu} {}^{(1)}R(W) + {}^{(1)}g_{\mu\nu} {}^{(E)}R(W) \right]$$

En utilisant (A.7) et (A.30), on trouve que :

$${}^{(E)}g_{\mu\nu} {}^{(1)}R(W) = 3 {}^{(1)}R_{\mu\nu}(\Gamma) - {}^{(1)}g_{\mu\nu} {}^{(E)}R(\Gamma) \quad (\text{A.33})$$

La relation (A.32b) se réduit donc à :

$${}^{(1)}\tilde{R}_{\mu\nu}(W) = {}^{(1)}R_{\mu\nu}(W) - \frac{3}{4} {}^{(1)}R_{\mu\nu}(\Gamma) \quad (\text{A.34})$$

Nous aurons finalement, en vertu de (A.24),

$${}^{(1)}\tilde{R}_{\mu\nu}(W) = {}^{(1)}\tilde{R}_{\mu\nu}(\Gamma) + \frac{2}{3}W_{[\mu,\nu]} \quad (\text{A.35})$$

avec

$${}^{(1)}\tilde{R}_{\mu\nu}(\Gamma) = \frac{1}{4}{}^{(1)}R_{\mu\nu}(\Gamma) \quad (\text{A.36})$$

G- Sachant que le tenseur d'Einstein est donné par :

$$G_{\mu\nu}(W) = R_{\mu\nu}(W) - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R(W) \quad (\text{A.38})$$

une décomposition de la forme (A.2) donnera:

$$G_{\mu\nu}(W) = {}^{(E)}G_{\mu\nu}(W) + {}^{(1)}G_{\mu\nu}(W) \quad (\text{A.39})$$

avec, en utilisant (A.33),

$${}^{(E)}G_{\mu\nu}(W) = {}^{(E)}R_{\mu\nu}(\Gamma) - \frac{1}{2}{}^{(E)}g_{\mu\nu}{}^{(E)}R(\Gamma) \quad (\text{A.40a,b})$$

$${}^{(1)}G_{\mu\nu}(W) = -\frac{1}{2}{}^{(1)}R_{\mu\nu}(\Gamma) + \frac{2}{3}W_{[\mu,\nu]}$$

Le terme $W_{[\mu,\nu]}$ est absent du second membre de (A.40a) car ${}^{(E)}W_{\mu}$ n'existe pas. Il faut se rappeler qu'en RG l'espace est considéré sans torsion.

Démonstration: Les relations (1.9) et (1.10) permettent d'exprimer le tenseur W_{μ} sous la forme:

$$W_{\mu} = \frac{3}{2}(\Gamma_{\mu\lambda}^{\lambda} - \Gamma_{\lambda\mu}^{\lambda}) \quad (\text{A.41})$$

en explicitant en fonction de (A.2) et (A.41), on trouve:

$${}^{(E)}W_\mu + {}^{(1)}W_\mu + {}^{(2)}W_\mu + \dots = \frac{3}{2} \left[\left({}^{(E)}\Gamma_{\mu\lambda}^\lambda + {}^{(1)}\Gamma_{\mu\lambda}^\lambda + {}^{(2)}\Gamma_{\mu\lambda}^\lambda + \dots \right) - \left({}^{(E)}\Gamma_{\lambda\mu}^\lambda + {}^{(1)}\Gamma_{\lambda\mu}^\lambda + {}^{(2)}\Gamma_{\lambda\mu}^\lambda + \dots \right) \right] \quad (\text{A.42})$$

et en notant que ${}^{(E)}\Gamma_{\mu\lambda}^\lambda = {}^{(E)}\Gamma_{\lambda\mu}^\lambda$ et que ${}^{(1)}\Gamma_{\mu\lambda}^\lambda = -{}^{(1)}\Gamma_{\lambda\mu}^\lambda$, on obtient finalement :

$${}^{(E)}W_\mu = \frac{3}{2} \left({}^{(E)}\Gamma_{\mu\lambda}^\lambda - {}^{(E)}\Gamma_{\lambda\mu}^\lambda \right) = 0 \quad (\text{A.43a,b})$$

$${}^{(1)}W_\mu = \frac{3}{2} \left({}^{(1)}\Gamma_{\mu\lambda}^\lambda - {}^{(1)}\Gamma_{\lambda\mu}^\lambda \right) = 3 {}^{(1)}\Gamma_{\mu\lambda}^\lambda$$

H- Soit la relation,

$$D_\alpha \tilde{R}_{\beta\nu}(W) = \tilde{R}_{\beta\nu,\alpha}(W) - \Gamma^\rho_{\beta\alpha} \tilde{R}_{\rho\nu}(W) - \Gamma^\rho_{\nu\alpha} \tilde{R}_{\beta\rho}(W) \quad (\text{A.44})$$

qui devient par transformation analogue à celles vues en haut :

$$D_\alpha \tilde{R}_{\beta\nu}(W) = \nabla_\alpha {}^{(E)}\tilde{R}_{\beta\nu}(W) + \nabla_\alpha {}^{(1)}\tilde{R}_{\beta\nu}(W) - {}^{(1)}\Gamma^\rho_{\beta\alpha} {}^{(E)}\tilde{R}_{\rho\nu}(W) - {}^{(1)}\Gamma^\rho_{\nu\alpha} {}^{(E)}\tilde{R}_{\beta\rho}(W) \quad (\text{A.45})$$

l'équation (A-45) aura donc la forme:

$$D_\alpha \tilde{R}_{\beta\nu}(W) - {}^{(E)}(D_\alpha \tilde{R}_{\beta\nu}(W)) + {}^{(1)}(D_\alpha \tilde{R}_{\beta\nu}(W)) \quad (\text{A.46})$$

où

$${}^{(E)}(D_\alpha \tilde{R}_{\beta\nu}(W)) = \nabla_\alpha {}^{(E)}\tilde{R}_{\beta\nu}(W) \quad (\text{A.47a,b})$$

$${}^{(1)}(D_\alpha \tilde{R}_{\beta\nu}(W)) = \nabla_\alpha {}^{(1)}\tilde{R}_{\beta\nu}(W) - {}^{(1)}\Gamma^\rho_{\beta\alpha} {}^{(E)}\tilde{R}_{\rho\nu}(W) - {}^{(1)}\Gamma^\rho_{\nu\alpha} {}^{(E)}\tilde{R}_{\beta\rho}(W)$$

I- Le tenseur topologique,

$$C^{\mu}_{\nu}(W) = \bar{\varepsilon}^{\mu\alpha\beta} D_{\alpha} \tilde{R}_{\beta\nu}(W) \quad (\text{A.48})$$

devient, en vertu de (A.12) et (A.47),

$$C^{\mu}_{\nu}(W) = {}^{(E)}\bar{\varepsilon}^{\mu\alpha\beta} {}^{(E)}(D_{\alpha} \tilde{R}_{\beta\nu}(W)) + {}^{(E)}\bar{\varepsilon}^{\mu\alpha\beta} {}^{(1)}(D_{\alpha} \tilde{R}_{\beta\nu}(W)) + {}^{(1)}\bar{\varepsilon}^{\mu\alpha\beta} {}^{(E)}(D_{\alpha} \tilde{R}_{\beta\nu}(W)) \quad (\text{A.49})$$

et se met sous la forme :

$$C^{\mu}_{\nu}(W) = {}^{(E)}C^{\mu}_{\nu}(W) + {}^{(1)}C^{\mu}_{\nu}(W) \quad (\text{A.50})$$

où, d'après (A.12a,b) et (A.45b),

$${}^{(E)}C^{\mu}_{\nu}(W) = {}^{(E)}\bar{\varepsilon}^{\mu\alpha\beta} \nabla_{\alpha} {}^{(E)}\tilde{R}_{\beta\nu}(\Gamma) \quad (\text{A.51a,b})$$

$${}^{(1)}C^{\mu}_{\nu}(W) = {}^{(E)}\bar{\varepsilon}^{\mu\alpha\beta} D_{\alpha} {}^{(1)}\tilde{R}_{\beta\nu}(W) - \frac{1}{2} {}^{(1)}g^{(E)} C^{\mu}_{\nu}(W)$$

Annexe B :**1.Considérations Mathématiques.**

Le tenseur de courbure est défini tel que pour un vecteur arbitraire V^k ;

$$[D_m, D_n]V^k + \tau^l{}_{mn}D_l V^k = R^k{}_{mnl}V^l \quad (\text{B.1})$$

où $\tau^l{}_{mn}$ est le tenseur de contorsion définissant la torsion de l'hyperespace.

Dans le cas de la Relativité Générale, qui est une théorie symétrique de la gravitation, on suppose que l'espace est sans torsion, ce qui donne ;

$$[\nabla_m, \nabla_n]V^k = R^k{}_{mnl}(\Gamma)V^l. \quad (\text{B.2})$$

avec

$$\nabla_m V^k = -\Gamma^k{}_{mn}e^n. \quad (\text{B.3})$$

où ∇_m et ∇_n sont définis par rapport à $\Gamma^k{}_{mn}$ (symétrique).

Dans le cas de NGT, le tenseur de contorsion n'est pas nul et sera exprimé implicitement à travers une nouvelle connexion, dite libre, donnée par :

$$W^k{}_{mn} = \Gamma^k{}_{mn} - \frac{2}{3}\delta^k{}_m W_n. \quad (\text{B.4})$$

L'équation (B.1) devient ;

$$[D_m, D_n]V^k = R^k{}_{mnl}(W)V^l \quad (\text{B.5})$$

avec

$$D_m V^k = -W^k_{mn} e^n. \quad (\text{B.6})$$

où ∇_m et ∇_n sont définis par rapport à W^k_{mn} et Γ^k_{mn} (non symétriques).

Grâce à l'équation (B.4), nous nous retrouvons donc dans une situation parfaitement analogue au premier cas. Cette similitude, dans la forme seulement, des relations donnant le tenseur de courbure persistera aussi pour les différentes autres quantités tensorielles et scalaires importantes. Les lagrangiens, par exemple, auront la forme:

$$L_{GR} = \sqrt{g} R(\Gamma) = \sqrt{g} g^{\mu\nu} R_{\mu\nu}(\Gamma) \quad (\text{B.7a,b})$$

$$L_{NGT} = \sqrt{g} R(W) = \sqrt{g} g^{\mu\nu} R_{\mu\nu}(W)$$

Les équations du champ seront exprimées par ;

$$G_{\mu\nu}(\Gamma) = R_{\mu\nu}(\Gamma) - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R(\Gamma) = 8\pi T_{\mu\nu} \quad (\text{B.8a,b})$$

$$G_{\mu\nu}(W) = R_{\mu\nu}(W) - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R(W) = 8\pi T_{\mu\nu}$$

Dans ce petit exposé nous avons essayer de dire que, dans la forme, les formalismes mathématiques, et même topologiques (Voir B2), de GR et de NGT présentent beaucoup de similitudes ; ce qui a pour effet de simplifier considérablement les calculs.

2. Notions de Topologie [18].

La topologie est la spécialité mathématique où l'on ne prend en compte que les propriétés d'objets géométriques conservés lors de transformations continues. Elle ne permet pas de résoudre des équations et se contente de fournir un vocabulaire permettant de décrire les propriétés générales d'un ensemble de solutions, sans qu'il soit nécessaire de les connaître explicitement.

Considérons, par exemple, une représentation simple des solutions d'une équation à deux variables, par un ensemble de points dans un plan. Cet ensemble de points est généralement une courbe ou un ensemble de courbes, c'est-à-dire une variété à une dimension. De la même façon on peut considérer que l'ensemble des solutions d'une équation à trois variables est une surface (Variété à deux dimensions) dans un espace à trois dimensions.

Ainsi, bien que la variété formée des points associés aux solutions d'une équation ait une forme bien précise, les propriétés topologiques de la variété ne sont pas liées aux caractéristiques de cette forme. Au contraire, les propriétés topologiques ne varient pas quand on déforme de façon arbitraire la variété, à condition toutefois de ne pas la couper, la déchirer ou la percer.

On peut par exemple transformer un tore en une tasse à café en enfonçant la surface de celui-ci, puis en élargissant le creux ainsi produit en même temps que l'on rétrécit le reste du tore.

Au XIX^{ème} siècle, les mathématiciens avaient découvert que l'on peut représenter les variétés à deux dimensions comme des polygones dont on colle entre eux les côtés, c'est-à-dire dont on identifie d'une façon précise les côtés entre eux. En effet, il est assez facile de coller vraiment les bords opposés d'un carré: en réunissant tout d'abord les bords supérieur et inférieur du carré, on réalise un cylindre ouvert aux deux extrémités; puis en recollant ces extrémités, on obtient un tore. Ainsi, une tasse à café et

le carré dont on a convenablement identifié les côtés correspondent à la même variété topologique: le tore.

Il ne faudrait pas, cependant, penser que la topologie ne s'applique pas au monde réel, bien au contraire: comme d'autres branches des mathématiques, la topologie a des liens importants, mais indirects, avec le monde. En fait, à tout système mathématique correspond un système physique réel; cependant; le système physique est généralement beaucoup plus complexe que le modèle théorique correspondant et ne lui ressemble parfois que très peu. Il est donc quelque fois nécessaire de simplifier le problème en définissant un espace de configuration; dans la plupart des cas, cet espace est une variété topologique.

Tous les espaces de configuration sont des polygones où des polyèdres aux côtés ou aux faces collés de façon abstraite, sans déformation. Il serait néanmoins plus satisfaisant de réaliser effectivement les collages et de représenter ces variétés comme des surfaces fermées dans l'espace usuel. Lorsqu'une variété satisfait à une condition technique que l'on appelle orientabilité, cette représentation est toujours possible.

On a démontré au milieu du XIXème siècle que toute variété orientable à deux dimensions est topologiquement équivalente à la surface d'un tore percé d'un certain nombre de trous; ce nombre de trous est le genre de la surface. Une sphère, par exemple, est une surface à genre nul; le genre d'un beignet ou d'une tasse à café avec une seule anse est égal à un, le genre d'un bretzel est trois.

Pour toute surface divisée en faces polygonales de forme arbitraire, le nombre de faces polygonales moins le nombre de côtés plus le nombre de sommets est une constante qui ne dépend que de la surface et pas de la décomposition en faces polygonales. On appelle caractéristique d'Euler-Poincaré cette constante (χ_E).

La caractéristique d'Euler-Poincaré d'une surface de genre n est égale à $2-2n$. Comme la surface est incurvée dans l'espace, les polygones ne sont pas nécessairement plans et leurs côtés sont des portions de courbes. Par exemple on peut découper une sphère en huit triangles sphériques. Notons aussi que l'octaèdre régulier, qui est topologiquement équivalent à la sphère, possède le même nombre de faces, de sommets

et d'arêtes.

$$\chi_E = \sum \text{faces} - \sum \text{côtés} + \sum \text{sommets} = 2(1-n)$$

Le tore est intéressant pour représenter visuellement l'espace des configurations, mais ses propriétés géométriques varient d'un point à l'autre de la surface; les propriétés de la surface au voisinage de la partie extérieure sont notamment très différentes de celles au voisinage du trou. Or, quand on étudie une variété; on ne s'intéresse qu'aux propriétés géométriques intrinsèques; on détermine ces propriétés intrinsèques de la surface en effectuant des mesures sur la surface elle-même, sans se référer à l'espace environnant où se trouve cette dernière.

Les propriétés intrinsèques sont différentes des propriétés extrinsèques de la surface, qui résultent de la manière dont la surface est tordue dans l'espace. Par exemple, quand on courbe une feuille de papier afin de former un cylindre ou un cône, ces derniers ont la même géométrie intrinsèque que la feuille de papier initiale, mais des propriétés extrinsèques très différentes.

Les variations apparentes de courbure d'une surface, quand on observe cette dernière de l'extérieur, ne constituent pas des informations pertinentes pour la connaissance des propriétés intrinsèques entre les régions extérieure et intérieure de la surface du tore. En effet, si l'on découpe un petit morceau dans la partie extérieure (convexe) du tore; si l'on essaie de l'aplatir sur une table, la surface se fondera comme le ferait la peau d'une orange. Quand on refait la même expérience avec un morceau de la surface découpé dans la partie centrale du tore alors la surface se plisse et certaines parties se recouvrent.

Comme nous l'avons remarqué, un tore à un trou et un carré dont on a identifié les côtés opposés ont les mêmes propriétés topologiques; en revanche, les propriétés géométriques intrinsèques du carré sont beaucoup plus simples que celles du tore à un trou pour tout voisinage d'un point du carré, les propriétés géométriques intrinsèques sont identiques à celle de tout voisinage d'un point du plan. Une variété dont les propriétés géométriques intrinsèques sont aussi régulières est localement homogène.

Généralement, une variété ne peut avoir qu'un seul type d'homogénéité locale, mais dans le cas de variétés à deux dimensions, on a démontré que l'on peut produire toute surface de telle façon que ses propriétés géométriques soient localement homogènes

Pour les surfaces, il existe trois types de géométries intrinsèques présentant la propriété d'homogénéité locale. Le premier type est la géométrie Euclidienne du plan (Σ angles d'un triangle = 180° et $R_{\text{Gauss}} = 0$), le second type est celui de la sphère appelée aussi géométrie elliptique (Σ angles d'un triangle $> 180^\circ$ et $R_{\text{Gauss}} = \text{cte} > 0$) et le troisième type c'est celui de la géométrie hyperbolique (Σ angles d'un triangle $< 180^\circ$ et $R_{\text{Gauss}} = \text{cte} < 0$).

La courbure de l'espace ainsi que la courbure de l'espace-temps qui lui est intimement associé, jouent un rôle important Astrophysique et en cosmologie, car la théorie de la Relativité Générale d'Einstein est fondée sur le concept de courbure de l'espace-temps. Cependant, la détermination de la courbure ne suffit pas pour décrire ce que l'on appelle, de façon imprécise, la forme de l'Univers. On peut, néanmoins, penser que la structure quadri-dimensionnelle de l'espace-temps est déterminée par la seule structure de l'espace à trois dimensions. Ainsi pour étudier correctement la structure globale de l'Univers, il faut commencer par décrire toutes les structures tridimensionnelles qui peuvent expliquer l'Univers tel qu'on l'observe. On appelle ses structures des Variétés à trois dimensions et leurs classification reste un problème non résolu en raison de leurs formes très complexes.

Annexe C:**Investigations Numériques.**

Nous avons commencé par utiliser les courbes de la figure 2 de [13], ces courbes étant issues d'un calcul numérique elles ne sont donc pas représentées par des expressions analytiques. Notre première tâche sera de les approximer au mieux, pour cela nous choisissons de les approximer par des polynômes en r d'ordre 9, qui, à notre sens, reproduisent les courbes numériques assez fidèlement.

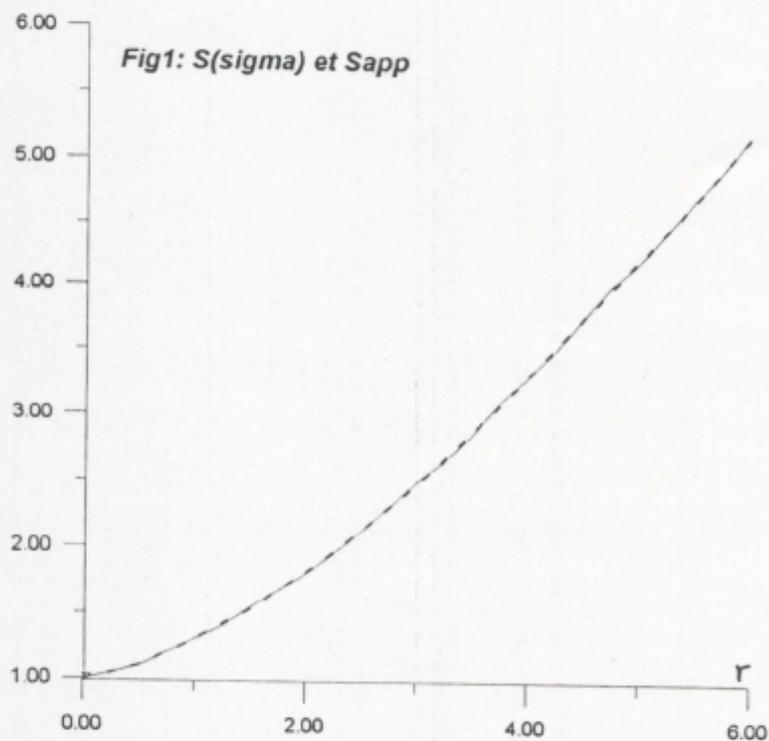


Fig2: a- Y, b- Yapp.
c- Yapp corrigée.

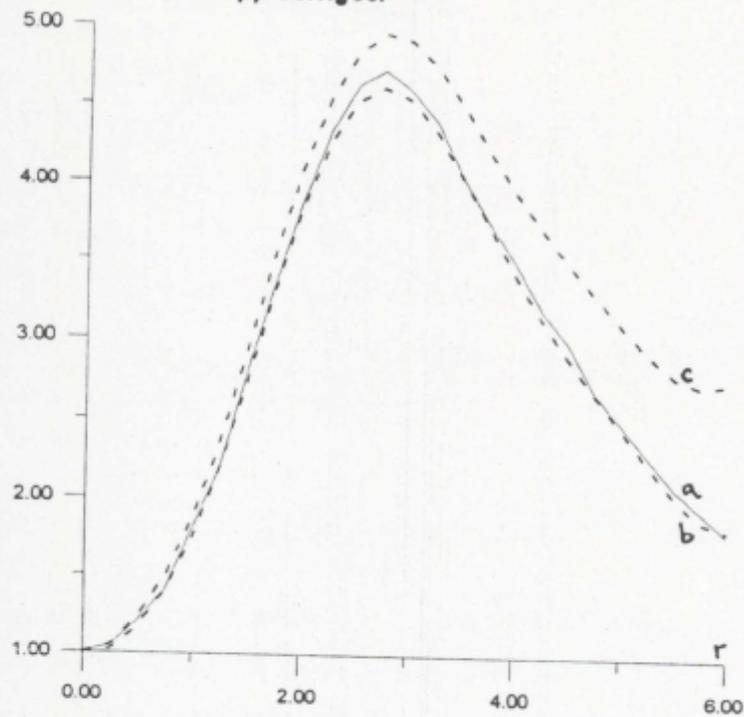
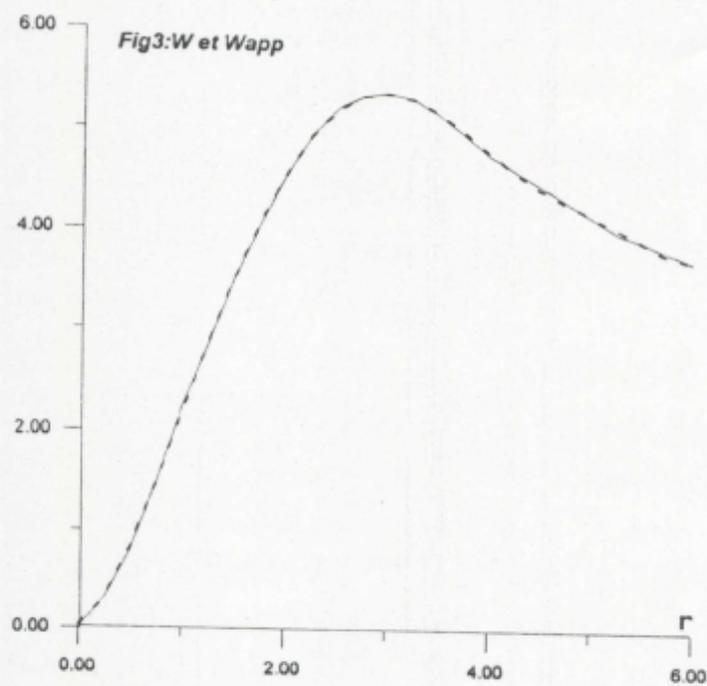


Fig3: W et Wapp



En effet, les figures 1 et 3, qui retracent respectivement les fonctions $S(\sigma)$, $W(\omega)$ et leurs approximations, témoignent de l'efficacité de notre approximation polynomiale. Par contre la figure 2, qui elle exprime la fonction $Y(y)$, présente une certaine difficulté à être approximée au voisinage de zéro. Pour remédier à cette situation

nous avons procédé à une première correction, représentée par la courbe b de Fig.2, puis à une seconde correction, similaire à la première et représentée par la courbe c de Fig.2, pour tenter une amélioration supplémentaire relative à Y'.

Il est clair que la seconde correction est peu représentative de notre fonction, donc non acceptable, et que la première correction représente la meilleure approximation que l'on puisse obtenir à l'aide d'une technique d'approximation linéaire polynomiale.

La seconde étape de notre investigation sera de mettre au point un programme qui calculera toutes les quantités Einsteiniennes.

Pour l'étape suivante il faudra intégrer les équations différentielles (IV.97) à l'aide de méthodes numériques, dites robustes, telle que la méthode de Monté-Carlo, très efficace dans le cas d'équations différentielles non linéaires complexes.

Références.

- [1] - The Classical Theory of Fields, L.Landau & E.Lifchitz, Mir Editions(1979).
- [2] - La Cosmologie Moderne, H. Andrillat, Edition Masson (1988).
- [3] - J.W.Moffat . Phys.Rev **D 19**,3554 (1979).
- [4] - J.W.Moffat . J.Math.Phys **21**,1798 (1980).
- [5] - J.W.Moffat . UTPT 94-28, Canada (1994).
- [6] - R.B.Mann . Class.Quantum Grav **1**,561-572. (1984).
- [7] - J.W.Moffat . J.Math.Phys **27**,1655 (1988).
- [8] - K.Ait moussa & N.Mebarki. Acta.Physica.Polonica n°12
Vol 23 ,1195 (1992).
- [9] - B.Silakhal. Magister Thesis (USTB,December 1995).
- [10] - D.N. Pant .IL Nuovo Cimento. **vol 25**, N° 1,175 (1975).
- [11] - S.Deser,R.Jackiw & S.Templeton . Ann.Phys, NY **140** (1982),372.
- [12] - G. Clément. Class.Quantum Grav **9**(1992),35-39.
- [13] - G. Clément. Class.Quantum Grav **9**(1992),2615-2633.
- [14] - J. Legaré & J.W. Moffat , Preprint UTPT-94-36 ,1995.
- [15] - SUPERSTRING & GRAND UNIFICATION, Proceedings of Winter School
on High Energy Physics (1988), World Scientific Editions.
- [16] - I. Vurio, Phys. Lett, **163B**(1985)91.
- [17] - T.Eguchi, P.B.Gilkey, and A.J.Hanson, Phys. Rep. **66C** (1980) 312.
- [18] - W.P. Thurston ; Bulletin of the American Mathematical Society
Vol. 6 , N°3 (1982) 357-381.