

الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية  
République Algérienne démocratique et populaire

وزارة التعليم العالي و البحث العلمي  
Ministère de l'enseignement supérieur et de la recherche scientifique

جامعة سعد دحلب البليدة  
Université SAAD DAHLAB de BLIDA

كلية التكنولوجيا  
Faculté de Technologie

قسم الإلكترونيك  
Département d'Électronique



## Mémoire de Projet de Fin d'Études

présenté par :

Belhadji Rachida

&

Larabi Rima

pour l'obtention du diplôme de Master 2 en Électronique option Réseaux et  
Télécommunications

---

Thème

---

# Prédiction à l'aide du Filtre de Kalman des Symboles M-QAM dans une Transmission Mono Porteuse

---

Proposé par : Mr Bersali Mahdi

Année Universitaire 2014-2015

## Remerciements

---

*Au nom d'Allah le clément le miséricordieux*

*L'œuvre que nous venons de réaliser est dû essentiellement à la grâce et à la bénédiction de notre seigneur le clément et le miséricordieux,*

*Avant de développer ce travail de recherche, il apparaît opportun de commencer par des remerciements dédiés à ceux qui nous ont aidés au cours de ce rapport.*

*Nous tenons à exprimer notre profond remerciement à notre promoteur Mr Bersali Mahdi pour son appréciable aide et pour ses précieux conseils qu'il nous a prodigués tout au long de notre cursus.*

*Nous tenons également à remercier les membres du jury pour avoir accepté d'examiner notre travail et enfin tous les enseignants qui étaient derrière notre formation.*

*Belhadji Rachida*

*&*

*Larabi Rima*

---

## ملخص:

ويتناول تقرير بحثي السيطرة على مشكلة التنبؤ بقيم سلسلة من المتغيرات العشوائية على أساس كالماتن تصفية. النموذج الرئيسي لهذا النوع من التصفية هو ان من العودية الأقل خوارزمية مربع حيث متجه لتقدير يتطور في عملية عشوائية الخطية. التطبيق في هذه الحالة هو الراديو الرقمي للتنبؤ M رموز QAM في حالة وجود مسار واحد أحادي نقل الناقل.

كلمات المفاتيح: RLS، مرشح كالماتن، M-QAM، SNR، SER.

---

## Résumé :

Ce rapport de master recherche traite du problème de la prédiction des valeurs d'une série de variables aléatoires en se basant sur le filtrage de Kalman. La forme principale de ce type de filtrage est celle de l'algorithme des moindres carrés récursif dans le cas où le vecteur à estimer évolue selon un processus linéaire aléatoire. L'application dans notre cas est en radio communication numérique pour la prédiction des symboles M QAM dans le cas d'une transmission mono porteuse mono trajet.

**Mots clés :** RLS, Filtre de Kalman, M-QAM, SNR, SER.

---

## Abstract :

This research report addresses the problem of prediction of a random variable serie, based on the Kalman filter. The mean form of this type of filtering is that of the recursive least square algorithm in the case where the vector to be estimated evolves as a linear random process. Our application is in the case of a digital radio communication for the prediction of M-QAM symbols in the case of single carrier single path transmission.

**Keywords :** RLS, Kalman filter , M-QAM, SNR, SER.

---

## Liste des acronymes

AWGN: Additive White Gaussian Noise

AR : Auto Régressif

Bc : Bande de cohérence

GSM: Global System of Mobile communication

GMSK: Gaussian Minimum Shift Keying

IFFT: Inverse Fast Fourier Transform

LMS: Least Mean Square

LOS: Line Of Sight

MA : Modèle a moyenne ajustée

MIMO: Multi Input Multi Output

MMSE: Minimum Mean Square Error

NF: Noise Factor

NLOS: None Line Of Sight

PIRE : Puissance Isotrope Rayonnée Effective

QAM : La modulation d'amplitude en quadrature

RMS: Root Mean Square

RIF : Filtre à réponse Impulsionnelle Finie

RII : Réponse Impulsionnelle Infinie (filtre à réponse impulsionnelle infinie)

RLS : Recursive Least Square

ARMA : Auto Regressive Moving Average

LS: Least square

BER: Bit error rate

SER: Symbole error rate

SNR : Signal noise ratio

## Liste des abréviations :

$P_k^+$  : La covariance prédit à l' instant k

$\tau_{RMS}$  : Ecart-type du retard

B: Bande passante

$T_X$  : Émetteur

$R_X$  : Récepteur

$T_c$  : Temps de cohérence

$\sigma$  : Écart-type

$\sigma^2$  : Variance

$\tau$  : Temps de retard

$X$  : Vecteur d'état augmenté

$\hat{X}$ : Prédiction/estimation du vecteur

$Y$  : Vecteur des mesures

k : Instant k

k/k : Estimation à l'instant k

k + 1/k :Prédiction à l'instant.k + 1

T : Transposé d'un matrice

m(n) : La moyenne

E : L'espérance

R : Matrice d'auto-corrélation

x(n) : Vecteur d'observation

$x^H(n)$  : Vecteur d'observation transposée et conjuguée

G(z) : La moyenne ajustée

A(z) : Fonction de transfert en Z

H(z) : Fonction de transfert

W(t) et V(t) : Bruits blancs gaussien

m (t<sub>0</sub>) : La moyenne

p (t<sub>0</sub>) : La covariance

x(t) : Signal aléatoire gaussien

G (S)<sub>p\*q</sub> : Matrice de transfert

$x_{k+1}$  : La valeur a l'instant k+1

$x_k$  : La valeur à l' instant k

$u_k$  : L'entrée de système

$A_k$  et  $C_k$  : Ce sont des matrices

$w_k$  : Bruit gaussien

$y_k$  : La sortie de système

$v_k$  : Bruit de mesure

$P_{k+1/K}$  : La prédiction a l'instant k+1 sachant la prédiction a l'instant k

$\hat{x}$  : La valeur estimée

$\Gamma$  : Matrice de covariance du bruit de mesure

$P$  : La covariance de l'estimateur

$\hat{x}_k^+$  : La valeur estimé et prédit à l' instant k

$Q$  : La matrice de covariance du bruit d'état

# Table des matières

Remerciements

Résumé

Listes des acronymes et abréviations

Tables des matières

Liste des figures

Liste des tableaux

Introduction Générale..... 01

## Chapitre 1: Généralités sur le canal de propagation sans fil

|   |    |
|---|----|
| 1.1. Introduction.....  | 04 |
| 1.2. Canal de propagation radio mobile .....                                  | 04 |
| 1.2.1. Définition .....   | 04 |
| 1.2.2. Propagation en espace libre .....                                      | 06 |
| a) Marge d'évanouissement .....   | 07 |
| b) Gain du système .....  | 08 |
| c) Signal minimal détectable .....  | 08 |
| 1.2.3. La propagation multi-trajets .....                                     | 08 |
| a) Les mécanismes de la propagation multi trajet .....                        | 09 |
| b) Les effets de la propagation multi trajet .....                            | 12 |
| <i>b</i> <sub>1</sub> ) L'évanouissement lents(ou à grande échelle).....      | 13 |
| i. Perte de chemin .....  | 14 |
| ii. L'atténuation .....   | 15 |
| iii. L'ombrage ou effet de masque (shadowing) .....                           | 15 |
| <i>b</i> <sub>2</sub> ) Les évanouissements rapides(ou à petite échelle)..... | 16 |
| i. Dispersion temporelle .....  | 17 |
| i.1. Ecart de retard .....  | 17 |

|                                    |    |
|------------------------------------|----|
| i.2. Bande de cohérence .....      | 20 |
| ii. Dispersion fréquentielle ..... | 21 |
| ii.1. La Dispersion Doppler .....  | 21 |
| c) Classification des canaux ..... | 27 |
| 1.3. Conclusion.....               | 29 |

## **Chapitre 2 : Algorithme des moindres carrés récursif et le filtre de kalman discret**

|  |    |
|--|----|
| 2.1. Introduction .....  | 30 |
| 2.2. Filtre Adaptatif .....  | 30 |
| 2.2.1. Définition générale du filtrage .....                                   | 30 |
| 2.2.2. Applications .....  | 32 |
| 2.2.3. Rappels sur les processus stochastiques .....                           | 33 |
| a) Caractérisation partielle d'un processus stochastique à temps discret. .... | 33 |
| i. La moyenne .....  | 34 |
| ii. La fonction d'autocorrélation .....  | 34 |
| iii. La fonction d'auto covariance (moment d'ordre 2) .....                    | 34 |
| iv. La stationnarité .....   | 34 |
| v. L'ergodicité .....  | 35 |
| b) Modèles stochastiques .....   | 37 |
| i. Le modèle à moyenne ajustée .....   | 38 |
| ii. Le modèle autorégressif .....  | 39 |
| iii. Le modèle ARMA .....  | 40 |
| 2.3. Bruit blanc .....   | 40 |
| 2.4. Le filtre de kalman .....   | 41 |
| 2.4.1. Historique.....   | 41 |
| 2.4.2. Principe.....   | 42 |
| 2.4.3. Les limites .....   | 44 |
| 2.4.4. Les estimateurs déterministes .....                                     | 45 |
| 2.5. Erreurs quadratique moyenne .....   | 46 |
| 2.6. L'estimation optimale .....   | 46 |
| 2.6.1. La méthode des moindres carrés .....                                    | 47 |
| 2.6.2. La méthode des moindres carrés récursive .....                          | 50 |



|  |    |
|--|----|
| 2.7. Liaison avec les formules du filtre de kalman discret .....                       | 52 |
| 2.8. Covariance de l'erreur d'estimation dans le cas de moindres carrés récursifs..... | 52 |
| 2.9. Evolution des paramètres dans le temps .....                                      | 53 |
| a) Evolution aléatoire dans le temps .....   | 54 |
| 2.10. Points forts .....   | 55 |
| 2.11. Le fonctionnement .....  | 56 |
| 2.12. Application du filtre de kalman .....  | 57 |
| 2.10. Conclusion .....   | 57 |

### **Chapitre 3 : Simulation et interprétations**

|   |    |
|---|----|
| 3.1. Introduction .....   | 60 |
| 3.2. Chaîne de transmission mono porteuse avec algorithme de prédiction ..... | 61 |
| 3.3. Organigrammes des programmes .....                                       | 62 |
| 3.4. Résultats des simulations .....  | 64 |
| 3.4.1. Cas où le vecteur varie linéairement .....                             | 64 |
| a) Résultats.....   | 65 |
| b) Interprétation .....   | 65 |
| 3.4.2. Cas où le vecteur varie linéairement mais de manière aléatoire .....   | 66 |
| a) Résultats.....   | 67 |
| b) Interprétation .....   | 67 |
| 3.4.3. Comparaison des deux cas de figure .....                               | 68 |
| a) Résultats.....   | 68 |
| b) Interprétation .....   | 68 |
| 3.5. Conclusion .....   | 69 |
| Conclusion générale .....   | 70 |

# Liste des figures

## Chapitre 1: Généralités sur le canal de propagation sans fil

|   |    |
|---|----|
| Figure1.1 : Le canal de propagation et le canal de transmission .....               | 05 |
| Figure1.2 : Propagation multi-trajets NLOS.....                                     | 09 |
| Figure1.3 : propagation multi-trajets LOS .....                                     | 09 |
| Figure1.4 : Les principaux mécanismes de propagation.....                           | 10 |
| Figure 1.5 : Mécanismes de réflexions spéculaire et diffuse .....                   | 10 |
| Figure1.6:Mécanisme de réfraction ou de transmission.....                           | 11 |
| Figure1.7: Mécanisme de diffraction.....  | 12 |
| Figure 1.8 : Mécanisme de diffusion .....   | 12 |
| Figure 1.9 : Principaux paramètres caractérisant le canal .....                     | 18 |
| Figure1.10 : L'effet Doppler.....   | 22 |
| Figure1.1 : Représentation de l'effet Doppler .....                                 | 24 |
| Figure1.12 : Fluctuations à petite et à grande échelle de la réponse du canal ..... | 25 |
| Figure 1.13 : Représentation d'un réponse impulsionnelle du canal .....             | 26 |
| Figure 1.14 : Réponse impulsionnelle d'un canal .....                               | 27 |
| Figure 1.15 : La TF d'une réponse impulsionnelle .....                              | 27 |

## Chapitre 2 : Algorithme des moindres carrés récursif et le filtre de kalman discret

|   |    |
|---|----|
| Figure 2.1 : Principe d'un filtre adaptatif .....           | 31 |
| Figure 2.2 : Principe de la prédiction .....                | 33 |
| Figure 2.3 : Génération d'un signal aléatoire corrélé ..... | 38 |

|  |    |
|--|----|
| Figure 2.4 : Fonction d'autocorrélation d'un bruit blanc dans les domaines temporel (à gauche) et fréquentiel (à droite) ..... | 41 |
|--|----|

### **Chapitre 3 : Simulations et Interprétations**

|  |    |
|--|----|
| Figure 3.1 : Schéma de principe d'une transmission mono porteuse mono trajet.....  | 61 |
| Figure 3.2 : organigramme de nos simulations .....   | 63 |
| Figure 3.3 : comparaison entre les algorithmes LS, RLS et RLS avec prédiction linéaire (variation linéaire ordre : 1 :4) .....                     | 65 |
| Figure 3.4 : comparaison entre les algorithmes LS, RLS et RLS avec prédiction linéaire aléatoire (variation linéaire aléatoire ordre : 1 :4) ..... | 67 |
| Figure 3.5 : comparaison entre les deux cas de figure .....  | 68 |

### **Liste des tableaux**

#### **Chapitre 1: Généralités sur le canal de propagation sans fil**

|  |    |
|--|----|
| Tableau 1.1: Marge d'évanouissement.....                         | 07 |
| Tableau1.2 : les valeurs moyennes de l'étalement du retard.....  | 22 |
| Tableau1.3 : les paramètres d'un canal à trajets multiples ..... | 26 |
| Tableau 1.4: Classification des canaux.....                      | 31 |



# Introduction Générale

---

Une série temporelle, ou série chronologique est une suite de valeurs numériques représentant l'évolution d'une quantité spécifique au cours du temps tel un phénomène électrique, biologique, climatologique...etc. L'indice temps peut être selon le cas : la minute, l'heure, le jour, l'année...etc. Une telle suite de variables aléatoires peut être exprimé mathématiquement afin d'analyser le comportement, généralement pour comprendre son évolution passée et pour prévoir le comportement futur [1].

L'étude des séries temporelles (souvent appelés processus stochastique ou aléatoire) correspond à l'analyse statistique d'observations régulièrement espacées dans le temps. Dans le passé, elles ont été utilisées en astronomie (« *on the periodicity of sun spots* », 1906), en météorologie (« *time-series regression of sea level on weather* », 1968), en théorie du signal (« *Noise in FM receivers* », 1963), en biologie (« *the auto correlation curves of schiophre nicbrain waves and the power spectrum* », 1960) , en économie (« *time-series analysis of imports, exports and other economic variables* », 1971) ...etc.[2].

L'étude des séries temporelles remonte à la fin du 2ème conflit mondial et n'a cessé de s'intensifier depuis (la révolution informatique a même donné un sérieux coup d'accélérateur pour tout ce qui relève des applications pratiques). Le nombre de techniques d'études et de modèles est maintenant colossal [3].

La publication de l'ouvrage de Box et Jenkins en 1970 a été décisive de la théorie des séries temporelles. En effet, dans l'ouvrage les deux auteurs développent le très populaire modèle ARMA (*Auto Regressive Moving Average*) qui, en exploitant les propriétés statistique (moyenne, variance...etc) d'une série temporelle, permet de connaître les valeurs futurs de cette série. Ce modèle permet de traiter que les séries dites stationnaires (des moments du premier ordre qui sont invariants au cours du temps).

De nos jours les séries temporelles se rencontrent naturellement dans une grande variété de domaines. On peut citer : l'économie (taux de chômage, produit national brut ...), la finance (cours d'action, taux d'intérêt, ...etc. ), l'écologie (pollution à l'ozone, au mono oxyde de carbone, ...etc. ), le transport (avec l'exemple célèbre du trafic aérien international), la démographie...etc.

En général, l'analyse d'une série temporelle se fait en deux phases : l'apprentissage et la prévision. L'apprentissage permet d'élaborer un modèle du processus et ce en comprenant l'évolution de la série (intervalles de temps entre les échantillons, la moyenne, de la variance ...etc.). La prévision qui est sans doute le but le plus fréquent. Il s'agit de prévoir les valeurs futures d'une variable grâce aux valeurs observées dans le présent et le passé de cette même variable. [3], [4].

Dans ce travail de recherche c'est la prédiction d'une série temporelle qui nous intéresse. Les séries temporelles en question sont ce que nous allons appeler les variables complexes dans une transmission numérique et qui sont la réponse impulsionnelle instantanée du canal radiofréquence notée  $h_k$  et les symboles d'une constellation M-QAM notées  $x_k$ . Ces deux variables varient avec le temps et se présentent sous forme de séries temporelles. Faute de temps, notre travail s'est limité uniquement à la prédiction des symboles M-QAM et ce dans le cas simple d'une transmission mono porteuse avec un seul trajet, Nous allons donc étudier Dans le premier chapitre de ce document le canal de propagation et ses caractéristiques.

Dans le deuxième chapitre nous introduirons l'aspect stochastique de la notion d'observateurs, deux points de vue peuvent être utilisés pour aborder cette question : celui de Wiener qui utilise une approche fréquentielle et celui de Kalman qui utilise une approche temporelle qui est notre but.

L'Algorithme de prédiction utilisé dans ce projet est celui du filtrage discret de Kalman (filtre RII : à Réponse Impulsionnelle Infinie) qui est une méthode visant à estimer des paramètres d'un système évoluant dans le temps à partir de mesures bruitées. On retrouve ce filtre dans bon nombre de domaines relatifs au traitement du signal, radar, traitement d'images etc.

Le choix de ce filtre est dû à sa capacité de prédiction des paramètres et de rectification des erreurs, non seulement des capteurs, mais aussi du modèle lui-même. En effet, pour appliquer un filtre de Kalman, il faut avant tout modéliser le système pour lequel on veut estimer les paramètres, de manière linéaire. (des variantes du filtre de Kalman existent pour la prise en compte de modèles non linéaires).

Contrairement aux méthodes d'estimation classique (par exemple, la méthode des moindres carrés) où une simple erreur dans la modélisation du système entraîne inévitablement une erreur au niveau de l'estimation. La force du filtre de Kalman est d'intégrer un terme d'imprécision sur le modèle lui-même, ce qui lui permet de donner des estimations correctes malgré les erreurs de modélisation (pour peu que les erreurs restent raisonnables) [5].

Les limites de ce filtre sont dues au fait que certains systèmes sont difficilement modélisable et, encore moins linéairement.

Notons enfin que les équations du filtre de Kalman discret sont exactement les mêmes que celles des moindres carrés récursifs

Ce mémoire est organisé de la manière suivante :

Après une *introduction générale*, dans le *premier chapitre* nous passerons en revue les phénomènes liés à la propagation radio fréquence en espace libre.

Le *deuxième chapitre* sera consacré essentiellement à des rappels sur les processus stochastiques, à une introduction au filtre de Kalman et son rapport avec l'algorithme des moindres carrés récursif et, à une étude du principe de la prédiction linéaire des séries temporelles.

Les résultats et interprétations des simulations de la prédiction de symboles 4-QAM dans une liaison mono porteuse, affectés par un canal mono trajet et entachés d'un bruit gaussien seront regroupés dans le *troisième chapitre* 3.

Enfin nous clôturerons ce mémoire par une *conclusion générale*.



# Chapitre 1 : Généralités sur le canal de propagation

---

## 1.1. Introduction

Le canal de propagation est un milieu physique dans lequel se propage l'information sous forme d'une onde électromagnétique [6]. De ce fait, l'optimisation des performances d'un système de transmission nécessite la connaissance parfaite des caractéristiques du canal dans le cas de mobilité ou non. L'étude de ce dernier est une étape importante dans la définition et le dimensionnement des systèmes de communications sans fil, en effet, le canal de transmission peut être modélisé comme un filtre linéaire permettant de représenter la transformation d'un signal électrique d'entrée  $e(t)$  en un signal électrique de sortie  $s(t)$  par le biais des ondes électromagnétiques (figure 1.1). En d'autres termes, le canal de propagation correspond à l'environnement traversé par les ondes électromagnétiques lors d'une transmission d'informations entre un émetteur et un récepteur.

On prendra soin de différencier le canal de propagation, qui ne tient compte que des différentes interactions subies par les ondes électromagnétiques dans l'environnement, du canal de transmission qui ajoute en plus les caractéristiques des diagrammes de rayonnement des antennes d'émission et de réception [7].

## 1.2. Canal de propagation radio mobile

### 1.2.1. Définition

Un canal de propagation correspond au système qui associe au signal d'entrée  $e(t)$  le signal de sortie  $s(t)$  et qui tient compte des interactions entre les ondes

électromagnétiques et leur environnement [8]. Un canal de propagation peut être schématisé comme suit (figure 1.1) :

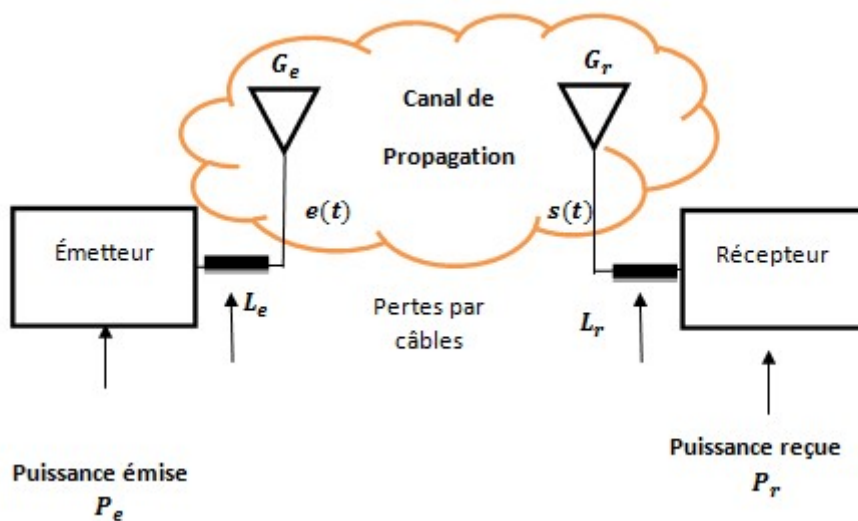


Figure 1.1 : Le canal de propagation et le canal de transmission [6].

Nous pouvons donc affirmer qu'un canal de transmission est la combinaison d'un canal de propagation et des antennes d'émission et de réception, où :

$P_r$  est la puissance au récepteur (dBm)

$P_e$  est la puissance à l'émetteur (dBm)

$G_T$  est le gain de l'antenne émettrice (dBi)

$G_r$  est le gain de l'antenne réceptrice (dBi)

$L_e$  et  $L_r$  (dB) sont les pertes du feeder (émetteur, récepteur)

### 1.2.2. Propagation en espace libre

On considère tout d'abord la propagation en espace libre, c'est-à-dire le cas idéal où il n'y a pas d'obstacle entre l'émetteur et le récepteur. En définissant  $G_T$  le gain de l'antenne d'émission et  $P_T$  la puissance de signal émis, on peut exprimer la densité de puissance  $W$  présente à une distance  $d$  par [7]:

$$W = \frac{G_T P_T}{4\pi d^2} \quad (1.1)$$

On peut relier la densité de puissance  $W$  à la puissance  $P_R$  du signal détecté aux bornes d'une antenne réceptrice de gain  $G_R$  :

$$P_R = W A_R = W \left( \frac{\lambda^2 G_R}{4\pi} \right) \quad (1.2)$$

avec :

$A_R$  : représentant l'aire effective de l'antenne de réception (surface effective) ( $m^2$ )

$\lambda$  : la longueur d'onde pour la fréquence de travail ( $m$ )

$w$  : la densité de puissance ( $watt/m^2$ )

En combinant les deux équations on exprime la formule de Fris, qui permet de calculer l'atténuation en espace libre d'un signal :

$$\frac{P_R}{P_T} = G_T G_R \left( \frac{c}{4\pi d f} \right)^2 \quad (1.3)$$

avec :

$d$  : distance entre l'émetteur et le récepteur en kilomètre (Km).

$f$  : fréquence en Méga Hertz (MHz).

a) Marge d'évanouissement :

La puissance reçue exprimée en dBm peut être donc déduite du bilan de puissance de la façon suivante:

$$P_r = P_t + G_1 + G_2 - L_s - L_p - F \quad (1.4)$$

$F$  : Marge d'évanouissement (*fade margin*) du système.

$L_p$  : Les pertes diverses.

Dans cette expression (1.4), le terme  $L_p$  représente les pertes diverses et  $F$  exprime la marge d'évanouissement (*fade margin*) du système. Cette dernière est le gain qu'il faut ajouter afin de pallier aux évanouissements aléatoires dans la liaison. Ces évanouissements aussi appelés (*fading*) seront étudiés ultérieurement de façon détaillée.

| Fiabilité en % | Marge en dB |
|----------------|-------------|
| 90             | 8           |
| 99             | 18          |
| 99,9           | 28          |
| 99,99          | 38          |
| 99,999         | 48          |

**Tableau 1.1:** Marge d'évanouissement

Le tableau 1.1 montre quelques valeurs de  $F$  pour une liaison sans diversité, tirées des statistiques cumulatives de Rayleigh.

b) Gain du système: l'expression du gain du système est donnée par:

$$G = P_t - P_r \quad (1.5)$$

c) Signal minimal détectable est donné par :

Le bruit thermique + le facteur de bruit +  $10 \log$  (bande passante de la détection)

D'une manière générale, le rapport signal à bruit au niveau de la réception dépend de la puissance reçue, de la bande passante  $B$  et du facteur de bruit du système  $NF$ :

$$S/N = P_r + 174 - 10 \log B - NF \quad (1.6)$$

Un récepteur idéal doit être capable de détecter un signal à  $-174\text{dBm/Hz}$  à température ambiante ( $290^\circ\text{K}$ ).

*Exemple* : pour le système GSM si la largeur de bande de modulation est de 271 kHz, le facteur de bruit du récepteur est de 10dB et le  $S/N$  de la démodulation numérique de la GMSK nécessaire est de 8dB, cela impose un signal minimal à la réception ou seuil de sensibilité de  $-102\text{dBm}$ .

### 1.2.3. La propagation multi-trajets

En présence d'obstacles (milieu urbain, rural, intérieur des bâtiments, etc...), l'onde émise subit des déviations qui dépendent de la nature des interactions onde/obstacles. Toutes les ondes que le récepteur reçoit lui parviennent donc par différents trajets provenant de l'interaction du signal émis avec les nombreux obstacles présents dans l'environnement, et s'il existe, grâce au trajet direct entre l'émetteur et le récepteur. Le signal reçu est donc la somme de nombreux échos (trajets multiples) du signal émis arrivant au récepteur avec une certaine atténuation, un certain déphasage et avec un certain retard lié à la longueur du trajet.

Lors de la propagation multi-trajets, deux situations de propagation sont généralement distinguées [9]:

La première est désignée par le terme NLOS où il n'y a pas de visibilité directe entre l'émetteur et le récepteur (voir figure 1.2). Dans ce cas, la densité de probabilité de l'amplitude d'évanouissement du signal total reçu suit la loi de Rayleigh.

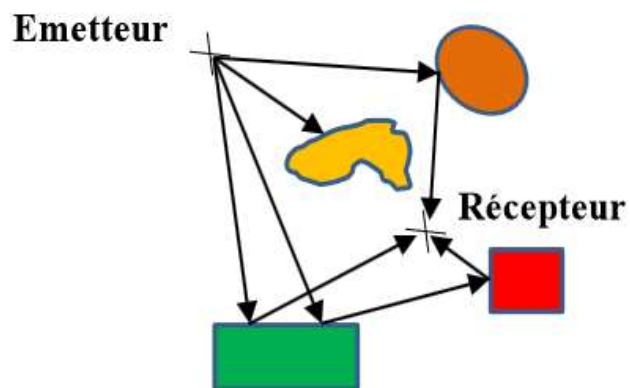


Figure 1.2 : Propagation multi-trajets NLOS [9].

Alors que, la deuxième situation aura lieu lorsqu'il existe un trajet direct prépondérant (LOS).

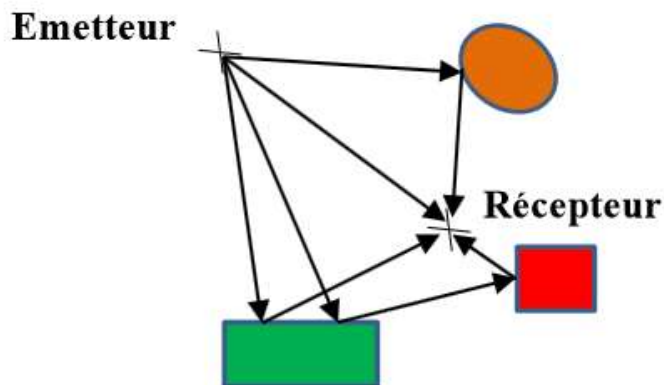


Figure 1.3: propagation multi-trajets LOS [9].

#### a) Les mécanismes de la propagation multi trajet

Nous distinguons quatre phénomènes régissant l'interaction de l'onde avec l'environnement : la réflexion, la réfraction, la diffraction et la diffusion. Ces phénomènes sont schématisés en figure 1.4.

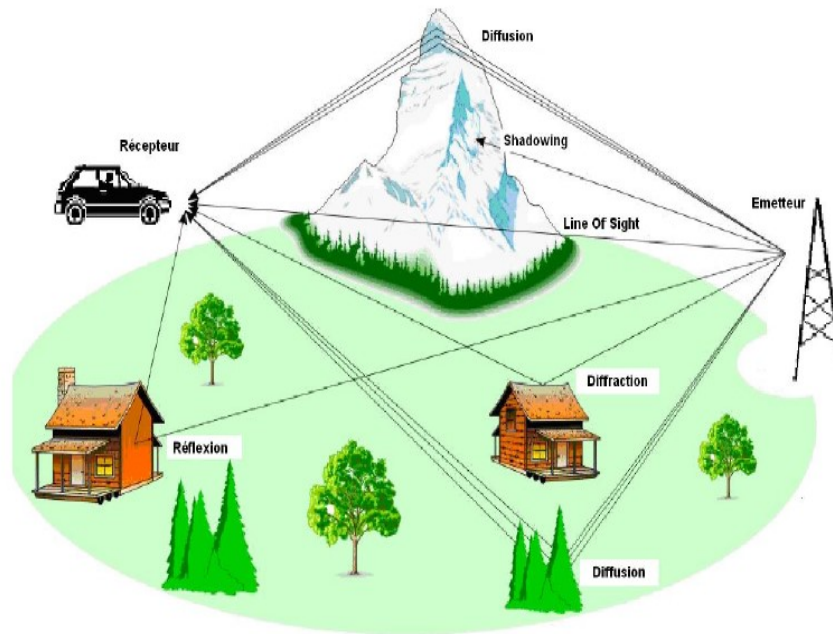


Figure 1.4 : Les principaux mécanismes de propagation [10]

Réflexion [11] : le phénomène de réflexion (voir figure 1-5) se produit lorsque l'onde rencontre un obstacle de grande dimension et qui présente des défauts de surface de petites tailles comparées à la longueur d'onde. L'amplitude et la direction du rayon réfléchis sont gouvernées par les lois de l'optique géométrique (*Snell-Descartes, Fresnel*). On distingue deux types de réflexion : la réflexion spéculaire et la réflexion diffuse.

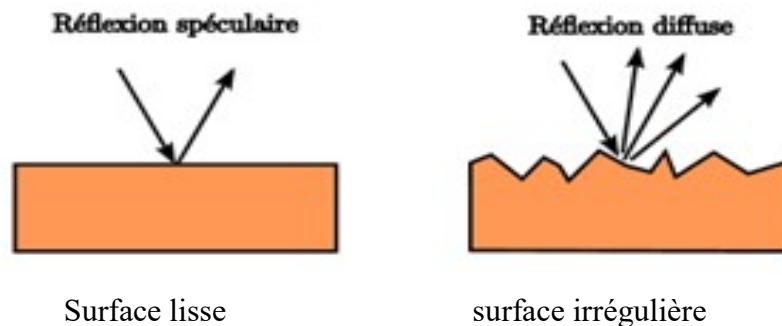


Figure 1.5 : Mécanismes de réflexions spéculaire et diffuse [7].

Réfraction ou transmission : la transmission est le phénomène associé à la traversée d'un obstacle par une onde électromagnétique (voir figure 1.6). Ce phénomène joue un rôle assez faible lors de la propagation en environnement externe aux bâtisses (*outdoor*). Par contre, sa contribution est peut-être prépondérante en environnement interne aux bâtisses (*indoor*). En effet, pour chaque élément traversé, l'onde subit une atténuation, directement liée aux caractéristiques électromagnétiques du matériau considéré, mais aussi liée à d'autres paramètres comme l'épaisseur de la paroi traversée et l'angle d'incidence.

La réfraction exprime un changement de direction de propagation causé par une variation spatiale de la constante diélectrique du milieu.

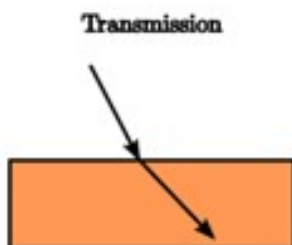
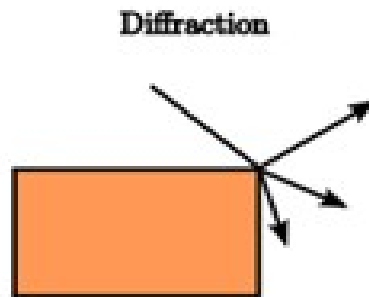


Figure 1.6 : Mécanisme de réfraction ou de transmission [7].

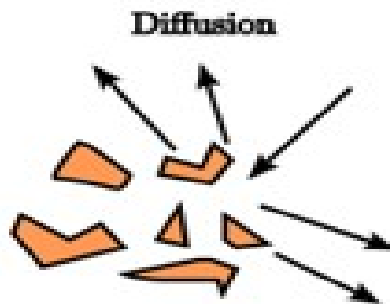
Diffraction: le phénomène de diffraction (voir figure 1.7), apparaît lorsque l'onde rencontre l'arête d'un obstacle dont les dimensions sont grandes par rapport  $\lambda$ . Le point de diffraction se comporte selon les principes de Huygens, comme une source secondaire qui propage l'onde de nouveau sous forme sphérique.





**Figure 1.7:** Mécanisme de diffraction [7].

Diffusion : La diffusion (voir figure 1.8) est un phénomène de type macroscopique tel que la diffraction (chaque irrégularité crée une onde diffractée). La diffusion apparaît en présence des objets dont les dimensions sont de même ordre de grandeur ou plus petites devant la longueur  $\lambda$ .



**Figure 1.8 :** Mécanisme de diffusion [7].

b) Effets de la propagation multi trajet

La propagation multi trajet assure une certaine continuité de la couverture radio en permettant la communication dans le cas où l'émetteur et le récepteur ne sont pas en vue directe (LOS). Néanmoins, cette multitude de trajets engendre des difficultés au niveau du récepteur. En fait, le signal reçu est une combinaison de plusieurs répliques du signal émis avec des amplitudes, des phases et des temps d'arrivées différents.

Principaux types de bruit sont [12]:

-Affaiblissement de parcours (*pathloss*) :c'est la diminution de la puissance du signal due à l'éloignement. Phénomène macroscopique. Modélise la diminution de l'amplitude du signal avec l'éloignement.

-Effet de masque (*shadowing*) :c'est un phénomène plus local, aléatoire dû aux atténuations successives. Phénomène sur quelques centaines de  $\lambda$ . C'est la variation de la puissance due à de gros obstacles. Phénomène aléatoire (car obstacles sont aléatoires).

-Evanouissement ( *fast fading ou smallscale*): ce sont des variations rapides de l'amplitude du signal (addition constructive ou destructive des ondes). Phénomène très local : il se produit dès que le mobile se déplace d'une faible distance (*smallscale*). Il ya nécessité d'une étude statistique. Ces variations sont le plus souvent destructrices pour le signal (problème majeur en télécom).

Les évanouissements d'un canal multi trajet sont classés en deux types :

Les évanouissements lents (*slow fading*) et les évanouissements rapides (*fast fading*).

b.1. Les évanouissements lents (ou grande échelle) : comme l'atténuation et l'effet d'ombrage (*shadowing*), ils traduisent l'atténuation de la puissance du signal due à la distance entre l'émetteur et le récepteur ou à cause des obstacles rencontrés.

L'effet d'ombrage : il subit des variations plus rapides que celles de l'atténuation pouvant atteindre 20 dB environ pour une distance de centaines de mètres. Il est causé par des obstacles entre l'émetteur et le récepteur tels que de hauts bâtiments ou une végétation dense.

Les pertes à grande échelle correspondent aux évanouissements de la puissance moyenne mesurée par un déplacement de plusieurs dizaines de longueurs d'onde. La puissance moyenne obtenue pour des variations à grande échelle sont les effets de

masquage et les pertes en fonction de la distance ( $d$ ) entre les antennes émettrices et les antennes réceptrices.

Les pertes moyennes de puissance  $L$  en  $dB$  sont exprimées par le rapport entre la puissance du signal émis  $P_{Tx}$  et la puissance du signal reçu  $P_{Rx}$  [13].

$$PL_F(d) = 10 \log\left(\frac{P_{Tx}}{P_{Rx}}\right) = 20 \log\left(\frac{4\pi d}{\lambda}\right) \quad (1.7)$$

Généralement, dans la plupart des cas des canaux radio-mobile réel, il existe de nombreux obstacles qui conduisent à une propagation multi-trajets. En raison des différentes interactions des ondes radioélectriques avec leur milieu de propagation, la puissance du signal reçu décroît non plus avec le carré de la distance ( $d$ ) mais avec cette même distance élevée à l'ordre de deux à cinq selon le milieu de propagation. Cette variable peut être obtenue à partir de campagnes de mesures. De nombreux modèles empiriques permettent de caractériser les pertes de puissances moyennes en fonction du type d'environnement et de la distance entre l'émetteur et le récepteur par exemple les modèles *d'Okumura-Hata* [13].

i. Les pertes de chemin : les pertes de propagations sont définies comme le rapport entre la puissance du signal reçue et celle transmise, ce qui décrit l'atténuation de la puissance moyenne en fonction de la distance. En fait, une forme plus généralisé du modèle de perte de trajet peuvent être construites par modification de l'espace libre affaiblissement sur le trajet avec l'affaiblissement de trajet que l'exposant  $n$  varie avec les environnements. Ceci est connu comme le modèle d'affaiblissement de trajet des identifiants à distance, dans lequel la perte de trajet à la distance  $d$  est donnée par [10] :

$$PL(dB) = \overline{PL}(d_0) + 10 n \log\left(\frac{d}{d_0}\right) \quad (1.8)$$

Avec  $PL$  la perte du trajet,  $d$  est la distance qui sépare l'émetteur du récepteur et  $d_0$  est la distance de référence déterminée par des mesures près de l'émetteur et  $n$  un facteur qui varie selon l'environnement [8] :

ii. L'atténuation : L'atténuation est exprimée par le rapport entre la puissance reçue par le récepteur et celle émise par l'émetteur. Les paramètres relatifs à l'environnement peuvent inclure des informations sur la type de connexion (LOS/NLOS), la région (urbaine, rurale, indoor...etc.), la hauteur moyenne des bâtiments, la végétation (densité des arbres, été, hiver...etc.). Le modèle empirique le plus simple pour représenter l'atténuation est le modèle (log-distance) défini par l'équation suivante :

$$L \text{ (dB)} = 10 \log_{10} (P_r/P_t) = L(d_0) + 10n \log_{10} (d/d_0) \quad (1.9)$$

$n$  est égal à 2 en espace libre et varie entre 1,6 et 6 dans d'autres environnements.

La distance de référence  $d_0$  est une distance de coupure. Elle représente généralement la distance la plus loin de l'émetteur dont la propagation de l'émetteur vers ce point s'effectue en espace libre. Généralement, elle est de 1m pour les applications indoor et varie jusqu'à 100 m pour des environnements *outdoor* [10].

iii. L'ombrage ou effet de masque (*shadowing*) : l'ombrage signifie la puissance moyenne du signal reçu sur une grande surface (environ des dizaines de longueurs d'onde) due à l'évolution dynamique des trajets de propagation par laquelle les nouveaux trajets apparaissent et les anciens disparaissent. À cause de la variation de l'environnement, la puissance reçue est différente de la puissance moyenne pour une distance donnée qui affecte de façon globale les pertes de propagations [10]. Les mesures ont démontré que pour n'importe quelle valeur  $d$ , la perte du trajet est une variable aléatoire avec une distribution log-normale donnée par:

$$PL(dB) = \overline{PL(d_0)} + 10 n \log \frac{d}{d_0} + X_\sigma \quad (1.10)$$

Avec  $X_\sigma$  étant une variable aléatoire gaussienne de moyenne zéro, avec un écart type  $\sigma$ .

L'effet de masque est représenté par une variable aléatoire qui suit généralement une distribution log-normale. Ce phénomène se produit sur un nombre élevé de points de mesure ayant la même distance séparant l'émetteur du récepteur. En pratique, les valeurs de  $n$  et  $\sigma$  sont déterminées par des données de mesures.

b.2. Les évanouissements rapides (ou à petite échelle) : ils présentent des variations d'amplitude sur une échelle égale à une demi-longueur d'onde et pouvant atteindre jusqu'à 40 dB. Il en résulte des interférences constructives et destructives entre les ondes des trajets multiples atteignant le récepteur [10].

L'évanouissement à petite échelle concerne la variation rapide du niveau du signal. La variation rapide est due aux interférences constructives et destructives des multi-trajets lorsque le mobile se déplace sur une courte distance. Les évanouissements à petite échelle sont observés sur un déplacement suffisamment petit pour que les fluctuations à grande échelle puissent être négligées. Dans les environnements radio-mobiles cellulaires ou les réseaux locaux sans fil, l'origine de ces pertes à petite échelle est la présence d'obstacles dans la région de propagation qui atténuent, réfléchissent, diffractent ou diffusent les ondes électromagnétiques. La superposition constructive ou destructive d'un nombre d'ondes arrivant au niveau des antennes de réception influence des variations de phase et d'amplitude du signal résultant. Les variations en amplitude sont alors appelées évanouissement à petite échelle qui dépend du milieu de propagation, du mouvement du récepteur et du mouvement des obstacles ainsi que de la dispersion temporelle du signal liée au retard temporel des répliques du signal transmis.

La quantité du décalage Doppler  $f_d$  est en fonction de la vitesse du récepteur. Il a un impact sur la nature temporelle du canal qui peut être à évanouissement lent (*Slow Fading*) ou à évanouissement rapide (*Fast Fading*) selon une valeur qu'on appelle

temps de cohérence  $T_c \approx 1/f_d$  [10]. Et l'équation de la réponse impulsionnelle d'un canal variant dans le temps à trajet multiple  $h(\tau, t)$  est donnée par [8]:

$$h(t, \tau) = \sum_{l=0}^{L(t)-1} \alpha_l(t) e^{-j\phi_l(t)} \delta(t - \tau_l(t)) \quad (1.11)$$

Caractérisation des évanouissements à petite échelle : pour comparer différents canaux multi trajets et pour développer des directives générales pour les systèmes sans fil, on utilise des paramètres qui quantifient grossièrement le canal à trajets multiples.

Les phénomènes de propagation peuvent engendrer des dispersions temporelles et fréquentielles [8].

i. Dispersion temporelle : les dispersion temporelles sont engendrées ou causées par l'écart des retards multi trajets. Ces dispersions sont caractérisées par deux paramètres : l'écart de retard et la bande de cohérence.

i.1. Écart de retard : généralement un canal de transmission est caractérisé par sa réponse impulsionnelle car elle met en évidence :

- Le nombre de trajets
- Leurs retards
- Leurs phases et amplitudes

Les paramètres du canal qui peuvent être déterminés à partir de la réponse impulsionnelles sont :

- Profil de puissance de la RI (*Power Delay Profile*) c'est la puissance de la RI en fonction de  $\tau$ .

$$P(t, \tau) = \sum_{l=0}^{L(t)-1} |\alpha_l(t)|^2 \delta(\tau - \tau_l(t)) \quad (1.12)$$

➤ Maximum Excess Delay

C'est le retard entre le premier trajet et le dernier d'amplitude non négligeable. Cette grandeur est notée  $\tau_m$ .

➤ Mean Excess Delay (Retard moyen) qui est la moyenne des délais pondérée par les puissances [12], C'est le retard relatif moyen de tous les trajets. Cette grandeur est notée  $\bar{\tau}$  et calculée selon l'équation :

$$\bar{\tau}(t) = \frac{\sum_{l=0}^{L(t)-1} |\alpha_l(t)|^2 \tau_l(t)}{\sum_{l=0}^{L(t)-1} |\alpha_l(t)|^2} = \frac{1}{P_T(t)} \sum_{l=0}^{L(t)-1} P_l(t) \tau_l(t) \quad (1.13)$$

avec :

$$P_l(t) = E \left[ |h(t, \tau_l(t))|^2 \right] \quad (1.14)$$

➤ RMS Delay Spread (Ecart-type du retard): écart-type pondéré par les puissances (dispersion des retards autour de la moyenne). Etalement temporel [12], C'est la racine carrée du moment d'ordre 2 centré des retards, cette grandeur, notée  $\tau_{RMS}$ .

$$\tau_{RMS} = \sqrt{\frac{1}{P_T(t)} \sum_{l=0}^{L-1} P_l(t) ((\tau_l(t) - \bar{\tau}(t))^2)} \quad (1.15)$$

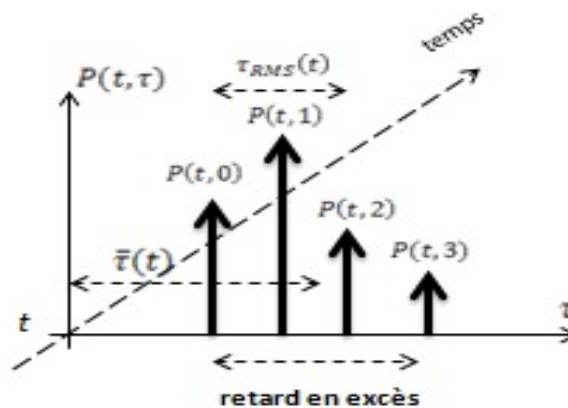


Figure 1.9 : Principaux paramètres caractérisant le canal [12].

Remarque: Ces paramètres sont moyennés par rapport au temps et /ou l'espace. Ils caractérisent un environnement de propagation d'un autre.

Les propriétés dispersives dans le temps d'un canal multi trajets large bande sont quantifiées par l'excès de retard moyen ( $\bar{\tau}$ ) et la valeur efficace de l'écart de retard  $\tau_{RMS}$  qui est la racine de la moyenne du carré de l'écart de retard. Ces retards sont mesurés par rapport au premier signal détecté arrivant au récepteur à l'instant  $\tau_{RMS} = 0$ . Les valeurs typiques  $\tau_{RMS}$ , sont de l'ordre de la microseconde dans les canaux radio mobile extérieurs et de l'ordre de la nanoseconde, pour les canaux radio interne "indoor"[8].

➤ Étalement du retard

Cette caractéristique décrit la durée de l'activité des trajets multiples. Elle correspond au temps que prend le signal avant de s'évanouir après l'arrivée du premier écho dans le cas de l'émission d'une impulsion. Pratiquement, il est représenté le moment d'ordre 2 du profil de puissance. Sa valeur quadratique souvent utilisée dans la comparaison des environnements est:

$$\sigma = \sqrt{(\tau^2) - (\bar{\tau})^2} \quad (1.16)$$

La relation entre le débit binaire toléré et l'étalement du retard (valeur quadratique) est donnée par :

$T_s = 5\sigma$  avec  $T_s$  étant la durée d'un symbole binaire.

Des valeurs moyennes quadratiques de l'étalement du retard mesurées dans différents environnements sont listées dans le tableau suivant:



| Environnements      | $\sigma$    |
|---------------------|-------------|
| Zone urbaine        | 1-3 $\mu$ s |
| Espace dégagé       | 0.1 $\mu$ s |
| Zone résidentielle  | 300-420ns   |
| Intérieure bâtiment | 400ns       |

**Tableau 1.2** : les valeurs moyennes de l'étalement du retard.

i.2. Bande de cohérence :

L'écart de délai est un paramètre caractérisant le canal dans le domaine du temps. Pour caractériser le canal dans le domaine fréquentiel, on utilise la bande de cohérence. La bande de cohérence et l'écart de délai RMS sont inversement proportionnels l'un par rapport à l'autre, la relation exacte entre eux est une fonction de la structure multi trajets.

L'écart de délai est un phénomène naturel causé par les trajets de propagation réfléchis et dispersés dans le canal radio, tandis que la bande de cohérence  $B_c$  est une relation dérivée de l'écart de retard RMS. La bande de cohérence est une mesure statistique de bande de fréquence dans laquelle le canal peut être considéré comme plat (c'est-à-dire) un canal qui fait passer toutes les composantes spectrales avec un gain approximativement égal et une phase linéaire. Si la bande de cohérence est définie comme la largeur de bande dans laquelle la fonction de corrélation fréquentielle est supérieure à 0.9, alors la bande de cohérence est approximativement :

$$B_c = \frac{1}{50} \sigma_\tau \quad (1.18)$$

Si cette définition est relaxée pour une fonction de corrélation fréquentielle de plus de 0.5, alors la bande de cohérence est approximativement [8] :

$$B_c = \frac{1}{5} \sigma_\tau \quad (1.19)$$

Il est important de signaler qu'il n'existe pas une relation exacte entre la bande de cohérence et l'écart de délai RMS.

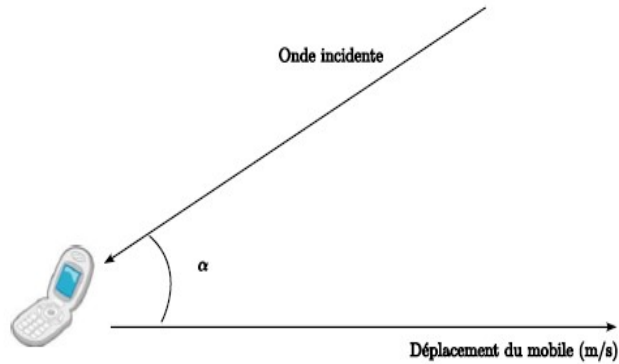
## ii. Dispersion fréquentielle

C'est le changement de la fréquence et de la phase sur la largeur de bande de l'onde radio. Les causes principales sont l'effet Doppler (mouvement relatif), ou dispersivité du milieu de propagation (ayant l'indice de réfraction variable avec la fréquence). Les dispersions fréquentielles sont causées par le mouvement de mobile et elles sont caractérisées par l'étalement Doppler et le temps de cohérence [8].

### ii.1. La dispersion Doppler

La dispersion Doppler  $B_D$  mesure la largeur du spectre affecté par l'effet Doppler dû au mouvement du récepteur et/ou de l'émetteur et/ou la variation du canal de propagation. Si une sinusoïde de fréquence  $f_c$  est émise, le spectre du signal reçu, appelé le spectre Doppler, aura des composantes dans la bande  $[f_c - f_d; f_c + f_d]$ ,  $f_d$  étant le décalage Doppler. La dispersion Doppler dépend du décalage Doppler qui est fonction du mouvement relatif du récepteur et de l'angle  $\theta$  entre la direction du mouvement du mobile et celles d'arrivée des ondes.

L'effet Doppler : dans la majorité des configurations le point d'émission ou le point de réception sont en mouvement l'un par rapport à l'autre. Cette mobilité dans le canal de propagation se traduit par un décalage entre la fréquence du signal émis et la fréquence du signal reçu. Prenons l'exemple le plus simple d'une onde plane arrivant avec un angle  $\alpha$  au niveau d'un récepteur en mouvement ayant une vitesse  $v$  constante (voir figure 1.10).



**Figure 1.10:** L'effet Doppler [7].

Le décalage Doppler observé (le déplacement maximal de Doppler) est égal à :

$$f_d = f \left( \frac{v}{c} \right) \cos(\alpha) = \frac{v}{\lambda} \cos(\alpha) \quad (1.20)$$

avec :

$f$  : Fréquence de l'onde émise

$f_d$  : Déplacement à la réception de la fréquence  $f$  dû à l'effet Doppler

$\alpha$  : Angle entre le vecteur de vitesse du mobile et le vecteur de l'onde émise

$v$  : vitesse du mobile.

$c$  : vitesse de l'onde.

L'onde arrive alors au niveau du récepteur avec une fréquence égale à  $f_0 + \mu$ , ( $\mu$  : décalage Doppler).

Le temps de cohérence  $T_c$  est la représentation, dans le domaine temporel, de l'écart Doppler. Il est utilisé pour caractériser la nature de variation de dispersion fréquentielle du canal dans le domaine du temps. L'écart Doppler et le temps de cohérence sont inversement proportionnels l'un par rapport à l'autre.

$$T_c \cong \frac{1}{f_d} \quad (1.21)$$

La définition du temps de cohérence implique que deux signaux arrivant avec un temps de séparation supérieur à  $T_c$  sont affectés différemment par le canal. Le tableau 1.3 résume les différents paramètres d'un canal radio mobile à trajets multiples [8].

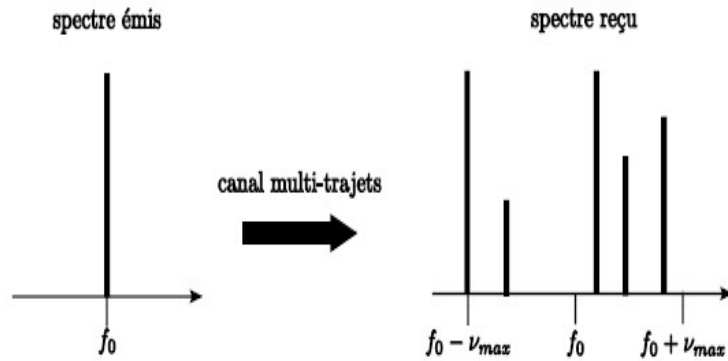
| Canal à trajets multiples | Paramètres  | Symbole                               |
|---------------------------|---|---------------------------------------|
| Domaine temporel          | Réponse impulsionnelle du canal                   | $h(\tau, t)$                          |
|                           | Retard moyen (Mean excess delay )                 | $\bar{\tau}$                          |
|                           | Étalement des retards ( <i>RMS delay spread</i> ) | $\sigma_\tau$                         |
|                           | Retard maximum ( <i>Excess delay spread</i> )     | $\tau_m$                              |
| Domaine fréquentiel       | Réponse en fréquence du canal                     | $H(f)$                                |
|                           | Bande de cohérence (90%)                          | $B_c \approx \frac{1}{50\sigma_\tau}$ |
|                           | Bande de cohérence (50%)                          | $B_c \approx \frac{1}{5\sigma_\tau}$  |
| L'étalement Doppler       | Décalage Doppler                                  | $f_d$                                 |
|                           | Temps de cohérence (50%)                          | $T_c \approx \frac{9}{16\pi f_d}$     |

**Tableau 1.3:** les paramètres d'un canal à trajets multiples [6].

Dans le cas de la propagation multi-trajets, un effet Doppler affecte chaque trajet. Le spectre du signal se retrouve donc étalé dans la bande  $[-f_d^{max}; f_d^{max}]$  comme le montre la figure 1.11 à condition de travailler à une fréquence fixe.

On peut ajouter que le spectre Doppler possède une forme caractéristique. Cette répartition est une loi de probabilité. Elle signifie que lorsqu'un signal est transmis à une certaine fréquence  $f_0$ , il sera plus probablement reçu autour de  $f_0 - \mu$  ou  $f_0 + \mu$  que de  $f_0$  [7].

avec :  $\mu = v_{max}$



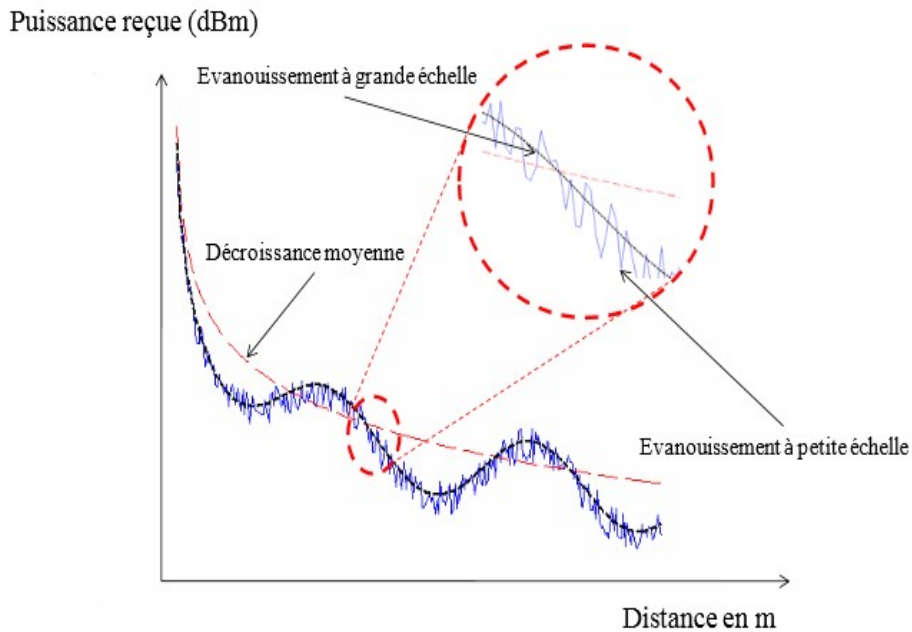
**Figure. 1.11** : Représentation de l'effet Doppler [7].

ii.2 Le temps de cohérence :

Le temps de cohérence  $T_c$  est l'équivalent dans le domaine temporel de la dispersion Doppler. Il caractérise la nature variante dans le temps de la dispersion en fréquence du canal. Si deux signaux arrivent séparés d'un temps plus grand que  $T_c$ , ils seront traités différemment par le canal. La dispersion Doppler et le temps de cohérence sont inversement proportionnels et par suite ils seront approximés par :

$$T_c \approx \frac{1}{BD} \quad (1.22)$$

Au récepteur, la puissance des ondes émises par l'antenne émettrice fluctue en fonction du déplacement et de la durée d'observation ainsi que de la caractéristique de l'environnement. On peut alors distinguer deux formes d'évanouissement présentés sur la figure (1.12).



**Figure 1.12** : Fluctuations à petite et à grande échelle de la réponse du canal [9].

Cause de l'évanouissement (fading) :

Multi trajets (multi path): des copies du signal émis arrivent en réception affectées par divers phénomènes physiques aléatoires : réflexion (surfaces lisses), réfraction (milieux translucides), dispersion (milieux rugueux) et diffraction (angles, pointes) [12].

Le signal émis:

$$S(t) = R(u(t)e^{j2\pi f_c t}) \quad (1.23)$$

avec :

$u(t)$  le signal en bande de base et  $f_c$  la fréquence porteuse.

Le signal reçu :

Le signal reçu est une somme de plusieurs signaux. Chacun de ces signaux est atténué, retardé et décalé en phase. Cette sommation peut être constructive ou destructive.

$$r(t) = R\left\{\sum_{l=0}^{L(t)-1} \alpha_l(t)u(t - \tau_l(t))e^{j(2\pi f_c(t - \tau_l(t)) + \Phi_{Dl})}\right\} \quad (1.24)$$

$L(t)$  le nombre de trajets

Chaque trajet a une amplitude  $\alpha_l(t)$ , un retard  $\tau_l(t)$  et une phase égale à

$2\pi f_c(t - \tau_l(t))$ ,  $\Phi_{Dl}$  est le déphasage dû à l'effet Doppler. La réponse impulsionnelle du canal est donnée par [12]:

$$h(t, \tau) = \sum_{l=0}^{L(t)-1} \alpha_l(t)e^{-j\Phi_l(t)}\delta(t - \tau_l(t)) \quad (1.25)$$

$$\Phi_l(t) = 2\pi f_c\tau_l(t) - \Phi_{Dl}(t) \quad (1.26)$$

$$\Phi_{Dl} = 2\pi f_{Dl} = 2\pi \frac{v}{\lambda} \cos \theta_l \quad (1.27)$$

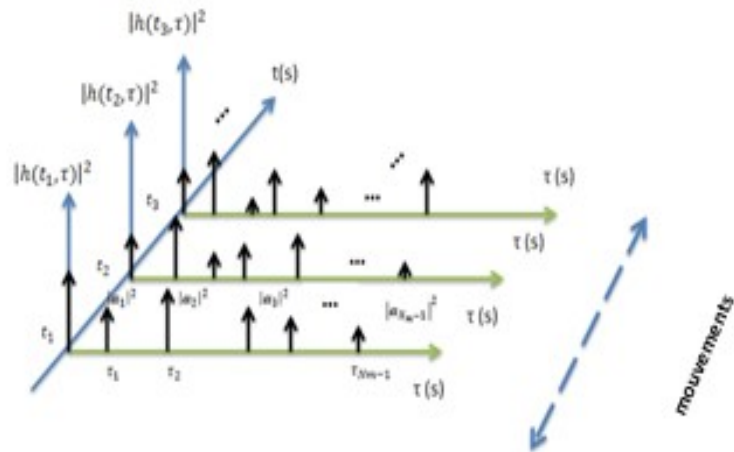


Figure 1.13 : Représentation d'une réponse impulsionnelle du canal [12].

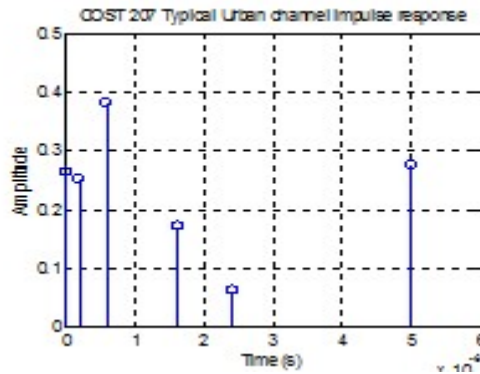


Figure 1.14 : Réponse impulsionnelle d'un canal [12].

En fait la transformé de Fourier (1.28) de cette réponse impulsionnelle et en présent la figure suivant(Figure1.15) :

$$H(f, t) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(t, \tau) e^{-j2\pi f\tau} d\tau \quad (1.28)$$

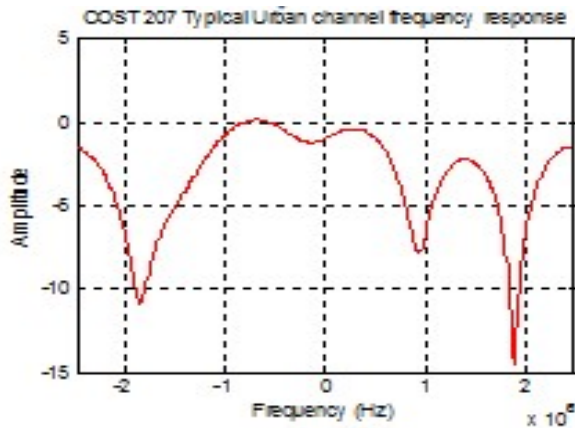


Figure 1.15 : La TF d'une réponse impulsionnelle[12].

### c) Classification des canaux de propagation :

On peut classer les canaux selon le type d'évanouissement et la nature des variations du canal en temps et en fréquence, et les différentes classifications pour le canal de propagation sont récapitulées dans le tableau 1.4.



|                                    |   | <b>Domaine fréquentiel ou retard</b>   |  |
|------------------------------------|---|--|--|
|                                    |   | Canal non sélectif en fréquence (canal à bande étroite)<br>$B \ll B_c$   | Canal sélectif en fréquence (canal à large bande)<br>$B \gg B_c$       |
| <b>Domaine temporel ou Doppler</b> | Canal à évanouissements lents (canal non sélectif dans le temps)<br>$T_s \ll T_c$ | - Canal non dispersif ou canal à évanouissement plat<br>-En réception, il n'est pas nécessaire de mettre en place un égaliseur | - Canal dispersif en fréquence ou canal à évanouissement temporel plat |
|                                    | Canal à évanouissements rapides (canal sélectif dans le temps)<br>$T_s \gg T_c$   | - Canal dispersif en temps ou canal à évanouissement fréquentiel plat  | - Canal dispersif en temps et en fréquence                             |

**Tableau 1.4:** Classification des canaux [7].

Cette classification dépend des différents paramètres larges bandes définis précédemment [7] et qui sont :

$B$  : La bande passante (Hz)

$B_c$  : La bande de cohérence (Hz)

$T_s$  : Temps symbole (s)

$T_c$  : La cohérence temporelle (s), qui est le paramètre dual de l'étalement Doppler dans le domaine temporel.

### **1.3. Conclusion**

L'étude des mécanismes de propagation concerne l'unification de certaines caractéristiques l'environnement. Celle-ci présente des facteurs essentiels pour le développement d'un modèle mathématique des liaisons via le canal mobile.

Les modèles sont basés sur le profil émetteur-récepteur dont les phénomènes de réflexion et de diffraction sont très peu représentés dans ce type de modèle. L'effet de la fréquence est indirectement inclus dans les coefficients du modèle qui reposent essentiellement sur les phénomènes de transmission.

# Chapitre 2 :                    Algorithme des moindres carres récursif et filtre de Kalman discret

---

## 2.1. Introduction

Cette partie est une introduction au filtre optimal de Kalman appliqué aux systèmes linéaires. Pour bien mener ce travail, la théorie des asservissements linéaires et du filtrage fréquentiel (continu et discret) sont supposées connues, ainsi que les notions d'états pour représenter les systèmes dynamiques linéaires [14].

Le problème du filtrage consiste à déterminer des estimateurs de variables du système lorsque l'environnement présente des perturbations aléatoires. Dans tous les cas pour déterminer un système (le filtre) optimal au sens de la minimisation de la variance d'erreur entre la variable réelle et son estimation on pose deux points de vue: celui de Wiener qui utilise une approche fréquentielle et celui de Kalman qui utilise l'approche temporelle. Nous ne regarderons ici que la deuxième approche. En effet, un filtre de Wiener est un cas particulier de filtre de Kalman et cette dernière approche permet d'appréhender directement le cas d'un système non stationnaire multi variable [15].

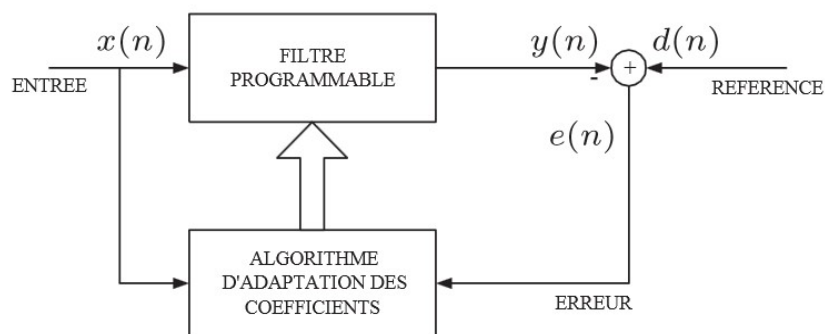
## 2.2. Filtrage adaptatif

### 2.2.1. Définition générale du filtrage

Le filtrage est une opération qui consiste à estimer l'état d'un système dynamique à partir d'observations partielles et bruitées.

Un filtrage est rendu adaptatif si ses paramètres (les coefficients) sont modifiés selon un critère donné, dès qu'une nouvelle valeur du signal devient disponible (voir figure 2.1). Ces modifications doivent suivre l'évolution des systèmes dans leur environnement

aussi rapidement que possible. Le filtrage adaptatif est généralement associé avec un fonctionnement en temps réel [16].



**Figure 2.1** : Principe d'un filtre adaptatif [16]

Les filtres adaptatifs peuvent être classés en fonction des choix qui sont faits sur les points suivants:

- le critère d'optimisation.
- l'algorithme de mise à jour des coefficients.
- la structure du filtre programmable.
- le type de signal traité, mono ou multidimensionnel.

Il existe deux classes importantes de filtres linéaires optimaux :

- Filtrage de Wiener : où les signaux considérés  $d(n)$  et  $x(n)$  sont stationnaires.
- Filtrage de Kalman : qui est une généralisation du filtre de Wiener valable aussi dans le cas de processus(ou de signaux) non stationnaires.

### 2.2.2. Applications [13]

Le filtrage adaptatif est un outil puissant en traitement du signal, en communications numériques, et en contrôle automatique. Les applications sont diverses mais présentent les caractéristiques suivantes: on dispose d'une entrée  $x(n)$  ainsi que de la réponse désirée (référence)  $d(n)$  et l'erreur  $e(n)$  qui est la différence entre  $d(n)$  et la sortie du filtre  $y(n)$  et sert à contrôler (adapter) les valeurs des coefficients du filtre (voir figure 2.1). Ce qui différencie essentiellement les applications provient d'une façon pour définir la réponse désirée  $d(n)$ .

On peut distinguer quatre grandes classes d'applications du filtrage adaptatif:

- l'identification de systèmes.
- la prédiction.
- la modélisation inverse.
- l'annulation d'interférences.

L'application qui nous intéresse est la prédiction et qui nous servira par la suite d'essayer de prédire ce que nous avons appelé les variables complexes dans une transmission numérique et qui sont la réponse impulsionnelle instantanée du canal radiofréquence notée  $h$  et les symboles d'une constellation M-QAM notées. Nous nous limiterons à la prédiction de ces derniers.

Dans le cas de la prédiction,  $d(n)$  de la figure 2.1 est le signal à l'instant  $n$  et  $y(n)$  le signal prédit à partir du signal aux instants précédents  $[d(n-1), d(n-2), \dots]$ . Ce principe peut être schématisé comme suit (figure 2.2) :

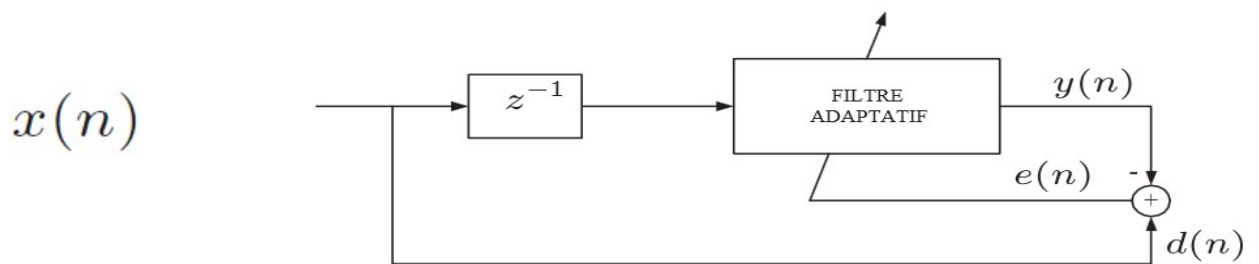


Figure2.2 : principe de la prédiction

### 2.2.3. Rappels sur les processus stochastiques [16], [17]:

On parle de processus stochastique ou processus aléatoire pour décrire l'évolution au cours du temps d'un phénomène statistique selon des lois de probabilités. Due à l'incertitude, il n'est pas possible de décrire exactement comment le processus va évoluer dans le temps avant de conduire l'expérience.

Comme exemples de processus aléatoires on peut citer le signal de parole, le signal radar, le bruit...etc. Un cas particulier est le processus déterministe qui est un processus stochastique qui réagit toujours de la même façon à un événement et donc son évolution est toujours la même [17]. Dans ce cas précis, il existe une formule pour le définir exactement.

Une réalisation particulière d'un processus stochastique à temps discret est appelée une suite temporelle. Par exemple, la séquence  $x(n), x(n - 1), \dots, x(n - L + 1)$  représente une suite temporelle qui consiste d'une observation au présent  $x(n)$  et de  $L - 1$  observations du passées.

#### a) Caractérisation partielle d'un processus stochastique à temps discret

Soit un processus stochastique à temps discret  $\{x(n)\}$ . On définit :

- i. La moyenne (moment d'ordre 1) comme suit:

$$m(n) = E\{x(n)\} \quad (2.1)$$

Où  $E$  dénote la moyenne d'ensemble ou l'espérance mathématique.

- ii. La fonction d'auto corrélation (moment d'ordre 2) est :

$$r(n, n - k) = E\{x(n), x^*(n - k)\} \quad (2.2)$$

Où  $(.)^*$  est le conjugué du nombre complexe.

- iii. La fonction d'auto covariance (moment d'ordre 2) est:

$$c(n, n - k) = E\{[x(n) - m(n)][x(n - k) - m(n - k)]^*\} \quad (2.3)$$

qui peut encore s'écrire :

$$c(n, n - k) = r(n, n - k) - m(n)m^*(n - k) \quad (2.4)$$

- iv. La stationnarité : elle peut se limiter aux moments du premier et du second ordre. Dans ce cas, le signal est dit stationnaire au sens large, et il se caractérise par les relations suivantes:

$$m(n) = m, \forall n, \quad (2.5)$$

$$r(n, n - k) = r(k) \quad (2.6)$$

$$c(n, n - k) = c(k), \quad (2.7)$$

pour  $k = 0$  :

$$c(0) = E\{|x(n) - m|^2\} = r(0) - |m|^2 = \sigma_x^2 \quad (2.8)$$

- v. L'ergodicité : c'est une propriété importante qui lie les moyennes statistiques et les moyennes temporelles. Un processus aléatoire est ergodique au sens strict, si tous les moments statistiques sont égaux aux moments temporels. Un processus aléatoire est ergodique au sens large (ou du second ordre), si il y a égalité des moyennes statistiques et temporelles ainsi que des fonctions d'autocorrélation.

On peut donc affirmer que pour un processus soit ergodique, il doit nécessairement être stationnaire.

Soit le vecteur d'observation à éléments suivant :

$$\mathbf{x}(n) = [x(n) \quad x(n-1) \cdots x(n-L+1)]^T \quad (2.11)$$

Matrice d'autocorrélation: la matrice d'autocorrélation d'un processus stochastique stationnaire à temps discret est :

$$\mathbf{R} = E \{x(n)x^H(n)\} = \begin{bmatrix} r(0) & r(1) & \dots & r(L-1) \\ r(-1) & r(0) & \dots & r(L-2) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ r(-L+1) & r(-L+2) & \dots & r(0) \end{bmatrix} \quad (2.12)$$

Où  $(.)^H$  dénote la transposition et la conjugaison complexe. L'élément  $r(0)$  sur la principale diagonale est toujours réel et positive.

Propriétés de la matrice d'autocorrélation :

$pI$  : la matrice d'autocorrélation est hermitienne. C'est-à-dire que :

$$\mathbf{R} = \mathbf{R}^H \quad (2.13)$$



On a donc  $r(-l) = r(l)$  et la matrice d'autocorrélation peut s'écrire :

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} r(0) & r(1) & \dots & r(L-1) \\ r^*(1) & r(0) & \dots & r(L-2) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ r^*(L-1) & r^*(L-2) & \dots & r(0) \end{bmatrix} \quad (2.14)$$

*p2* : la matrice d'autocorrélation est de Toeplitz. Une telle matrice (d'après Otto Toeplitz) ou matrice à diagonales constantes est une matrice dont les coefficients sur une diagonale descendant de gauche à droite sont les mêmes [18].

*p3* : la matrice d'autocorrélation d'un processus stochastique stationnaire à temps discret est toujours définie non négative, c'est-à-dire :

$$z^H \mathbf{R} z \geq 0, \forall z. \quad (2.15)$$

*p4* : La matrice d'autocorrélation d'un processus stochastique stationnaire à temps discret est en général inversible (ou définie positive) en raison du bruit.

*p5* : soit le vecteur suivant :

$$\mathbf{x}_b(n) = [x(n-L+1) \quad x(n-L+2) \quad \dots \quad x(n)]^T \quad (2.16)$$

on montre que :

$$E\{x_b(n) \cdot x_b^H(n)\} = \mathbf{R}^T = \begin{bmatrix} r(0) & r^*(1) & \dots & r^*(l-1) \\ r(1) & r(0) & \dots & r^*(l-2) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ r(L-1) & r(L-2) & \dots & r(0) \end{bmatrix} \quad (2.17)$$

*p6* : Les matrices d'autocorrélation  $\mathbf{R}_L$  et  $\mathbf{R}_{L+1}$  pour des vecteurs d'observations de longueur  $L$  et  $L + 1$  respectivement, sont reliées:

$$\begin{aligned} \mathbf{R}_{L+1} &= \begin{bmatrix} r(0) & r(1) & \dots & r(L) \\ r^*(1) & r(0) & \dots & r(L-1) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ r^*(L) & r^*(L-1) & \dots & r(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r(0) & \mathbf{r}^T \\ \mathbf{r}^* & \mathbf{R}_L \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \mathbf{R}_L & \mathbf{r}_b \\ \mathbf{r}_b^H & r(0) \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (2.18)$$

où :

$$\mathbf{r} = [r(1) \ r(2) \ \dots \ r(L)]^T \quad (2.19)$$

est un vecteur d'auto corrélation de  $L$  éléments et

$$\mathbf{r}_b = [r(L) \ r(L-1) \ \dots \ r(1)]^T \quad (2.20)$$

#### a) Modèles stochastiques

Un signal est souvent modélisé comme la réponse d'un système à un autre signal de caractéristiques plus simples (voir figure 2.3). L'idée essentielle est qu'une suite temporelle  $x(n)$  dont les observations sont très corrélées peut être générée à la sortie d'un filtre linéaire qui a pour entrée une suite de nombres statistiquement indépendants. L'entrée du filtre est souvent supposée être un bruit blanc gaussien de moyenne nulle avec une variance  $\sigma_u^2$  constante:

$$E\{u(n)\} = 0 \quad (2.21)$$

$$E\{u(n)u^*(n-k)\} = \begin{cases} \sigma_u^2, & k = 0 \\ 0, & k \neq 0 \end{cases} \quad (2.22)$$



**Figure 2.3:** Génération d'un signal aléatoire corrélé [16].

Le filtre linéaire peut avoir différentes structures qui correspondent à différents modèles pour le signal de sortie. Il existe trois modèles linéaires stochastiques classiques:

- modèle dit à moyenne ajustée (MA).
- modèle autorégressif (AR).
- modèle autorégressifs et moyenne mobile (ARMA).

- i. Le modèle à moyenne ajustée (MA): Le type de filtre le plus simple est le filtre à réponse impulsionnelle finie (FRI), associé au modèle dit à moyenne ajustée (MA), et défini par:

$$G(z) = \sum_{l=0}^{Lg} g_l^* z^{-l} \quad (2.23)$$

Ou encore dans le domaine temporel par:

$$x(n) = \sum_{l=0}^{Lg} g_l^* u(n-l) \quad (2.24)$$

La fonction d'autocorrélation d'un tel filtre est donnée par :

$$r(k) = \begin{cases} \sigma_u^2 \sum_{l=0}^{Lg-k} g_l g_{l+k}^*, & |k| \leq Lg \\ 0, & k \geq Lg \end{cases} \quad (2.25)$$

Comme la réponse du filtre, la fonction d'autocorrélation a une longueur finie.

- ii. Le modèle autorégressif (AR) : à un filtre à réponse impulsionnelle infinie (RII) correspond un model autorégressif(AR). La fonction de transfert en  $z$  s'écrit :

$$A(z) = \frac{1}{1 - \sum_{l=1}^{L_a} a_l^* z^{-l}} = \sum_{l=0}^{\infty} g_l^* z^{-l} \quad (2.26)$$

et dans le domaine temporel l'équation de récurrence associée:

$$x(n) = u(n) + \sum_{l=0}^{L_a} a_l^* x(nl) \quad (2.27)$$

La fonction d'auto- corrélation qui est une suite infinie est:

$$r(k) = \sigma_u^2 \sum_{l=0}^{\infty} g_l g_{l+k}^* \quad (2.28)$$

qui est une suite finie.

Il existe une relation directe entre les coefficients du filtre  $a_l$  et la fonction d'autocorrélation. En multipliant les deux membres de l'équation de récurrence  $x(n)$  par  $x^*(n - k)$  et en prenant l'espérance, on obtient:

$$r(0) = \sigma_x^2 + \sigma_u^2 \sum_{l=1}^{L_a} g_l^* r^*(l) \quad (2.29)$$

$$r(k) = \sum_{l=1}^{L_a} a_l^* (k - l) ; k \geq 1 \quad (2.30)$$

Sous forme matricielle :

$$\begin{bmatrix} r(0) & \dots & r(L_a - 1) \\ r^*(1) & \dots & r(L_a - 2) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ r^*(L_a - 1) & \dots & r(0) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_{L_a} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r^*(1) \\ r^*(2) \\ \vdots \\ r^*(L_a) \end{bmatrix} \quad (2.31)$$

C'est l'équation de Yule-Walker, qui peut s'écrire sous une forme plus compacte:

$$\mathbf{R}\mathbf{a} = \mathbf{r}^* \quad (2.32)$$

- iii. Le modèle ARMA : un signal ARMA est obtenu à l'aide d'un filtre de fonction de transfert:

$$\mathbf{H}(z) = \frac{\sum_{l=0}^{Lg} g_l^* z^{-l}}{1 - \sum_{l=0}^{La} a_l^* z^{-l}} = \mathbf{G}(z) \mathbf{A}(z) \quad (2.33)$$

Dans le domaine temporel :

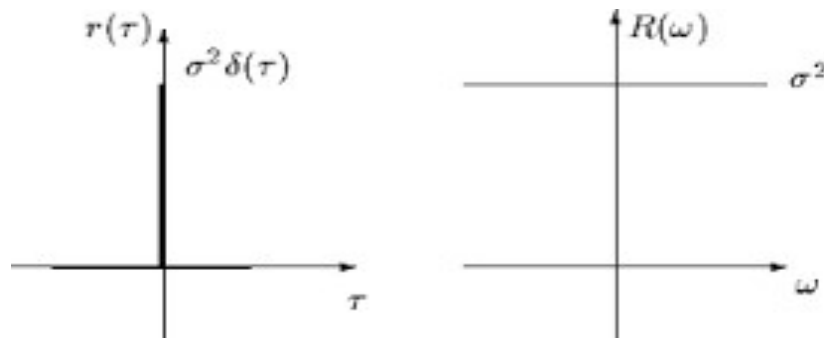
$$x(n) = \sum_{l=0}^{Lg} g_l^* u(n-l) + \sum_{l=1}^{La} a_l^* u(n-l) \quad (2.34)$$

Une relation directe entre la fonction d'autocorrélation et les coefficients est obtenue en multipliant les deux membres de l'équation précédente par  $x^*(n-k)$  et en prenant l'espérance:

$$r(k) = \sum_{l=0}^{Lg} g_l^* E\{u(n-l)x^*(n-k)\} + \sum_{l=1}^{La} a_l^* r(k-l) \quad (2.35)$$

### 2.3. Bruit blanc

Un bruit blanc est un signal aléatoire de variance infinie dont la fonction d'autocorrélation est proportionnelle à un Dirac (c'est-à-dire un spectre complexe constant sur toute la plage des fréquences). Cela traduit que les valeurs du signal pris à deux instants, même très proches, ne sont pas du tout corrélées [14].



**Figure2. 4 :** fonction d'autocorrélation d'un bruit blanc dans les domaines temporel (à gauche) et fréquentiel (à droite)

## 2.4. Le filtre de Kalman

Le filtre de Kalman est un filtre à réponse impulsionnelle infinie qui estime les états d'un système dynamique à partir d'une série de mesures incomplètes ou bruitées [19]. C'est un ensemble d'équations mathématiques qui permet une meilleure estimation de l'état futur d'un système malgré l'imprécision des mesures et de la modélisation [20]. Le filtre de Kalman est un reconstituteur d'état dans un environnement stochastique. Lorsque les variances des bruits sont connues, c'est un estimateur linéaire minimisant la variance de l'erreur d'estimation. Les algorithmes donnant la solution de ce problème ont été déterminés initialement par Kalman dans le cas discret et Kalman, Bucy dans le cas continu. [15].

### 2.4.1. Historique [21]

Ce filtre a été proposé par Rudolf Kalman en 1960 pour résoudre un problème de poursuite de trajectoire. Rudolf Kalman est né à Budapest en Hongrie le 19 mai 1930. Il vit aujourd'hui en Suisse.

### 2.4.2. Principe [21]

Le principe du filtre de Kalman discret utilise une prédiction qui s'appuie sur le modèle déterministe et un recalage qui s'appuie sur l'innovation (différence entre la mesure et la sortie prédite) mais en discret on distinguera :

- une équation d'état (2.36), qui détermine l'évolution des paramètres inconnus.
- une équation d'observation (2.37) qui exprime le lien entre les observations et les états.

Soit alors:

$$x_{k+1} = \mathbf{A}_k x_k + \mathbf{w}_k \quad (2.36)$$

$$y_k = \mathbf{C}_k x_k + \mathbf{v}_k \quad (2.37)$$

avec :

$\mathbf{A}_k$  : est la matrice transition d'état

$\mathbf{C}_k$  : est une matrice de mesures

$\mathbf{w}_k$  : est le vecteur processus bruit

$\mathbf{v}_k$  : est un vecteur du bruit mesuré

Le problème d'estimation optimale est celui de l'obtention récursive d'une estimée des états à partir des observations. On peut considérer trois cas différents :

- Filtrage : on veut estimer l'état à l'instant  $k, x_k$ , à partir des observations jusqu'à cet instant notées  $y_{1:k}$ .
- Lissage: on veut estimer l'état à l'instant  $k, x_k$ , à partir d'observations passées et futures,  $y_{1:K}$ , avec  $K > k$

- Prédiction : on veut prédire l'état à l'instant  $k + L$ , avec  $L > 0$ ,  $x_{k+L}$  à partir des observations jusqu'à l'instant  $k$ ,  $y_{1:k}$ .

Le filtre de Kalman donne la solution optimale pour estimer les états d'une façon récursive qui est la prédiction des états et correction à partir de la dernière observation obtenue. Le filtre de Kalman sera utilisé dans la suite.

L'état prédit : à l'instant  $k + 1$  connaissant toutes les mesures jusqu'à l'instant  $k$  que l'on note  $\hat{X}_{k/k+1}$  et auquel on associe la matrice de covariance de l'erreur de prédiction notée:

$$P_{k+1/k} = E [(\mathbf{X}_{k+1} - (\hat{\mathbf{X}}_{k+1/k} \mathbf{X}_{k+1}) - \hat{\mathbf{X}}_{k+1/k})^T] \quad (2.38)$$

L'état estimé : connaissant la mesure à l'instant  $k + 1$  (après le recalage) que l'on note  $\hat{X}_{k+1/k+1}$  auquel on associe la matrice de covariance de l'erreur d'estimation notée:

$$P_{k+1/k+1} = E[(\mathbf{X}_{k+1} - \hat{\mathbf{X}}_{k+1/k})(\mathbf{X}_{k+1} - \hat{\mathbf{X}}_{k+1/k+1})^T] \quad (2.39)$$

Le fonctionnement du filtre de Kalman peut se diviser en deux étapes [19]

- Une première étape de prédiction de l'estimation selon le modèle du système. Pour ce faire, le filtre de Kalman reprend l'estimation précédente des paramètres et de l'erreur et prédit les nouveaux paramètres et la nouvelle erreur en fonction de la modélisation du système.
- La seconde étape va faire la mise à jour de cette prédiction grâce aux nouvelles mesures. Ces mesures (par définition bruités) vont permettre d'obtenir une estimation des paramètres et de l'erreur à partir de la prédiction faite. Si jamais le modèle comporte des erreurs, cette étape de mise à jour permettra de les rectifier.



### 2.4.3. Les limites

Le filtre de Kalman est donc une méthode d'estimation et de prédiction puissante prenant en compte les modélisations du système. Néanmoins, ce filtre n'est pas forcément l'outil à appliquer dans tous les cas. En effet, le développeur a besoin de modéliser le système assez précisément afin de désigner un filtre efficace. Le problème est que certains systèmes sont difficilement modélisables et, encore moins linéairement.

Dans le cas où la modélisation est trop approximative, le filtre n'est pas assez performant et l'erreur des estimations ne convergera pas assez rapidement, elle restera grande. Pour pallier à ce problème de modélisation linéaire du système, un filtre de Kalman étendu a été développé et permet de prendre en compte une modélisation non linéaire. Néanmoins, cette technique a quelques défauts. En premier lieu, la covariance de l'erreur (la précision des estimations) ne converge pas obligatoirement (comme c'était le cas avec une modélisation linéaire). Le second défaut est son coût calculatoire plus important. En effet, de nouvelles matrices coûteuses entrent en jeu (les matrices des dérivés partielles des équations d'états et de mesures modélisant le système), ce qui peut être une limite à son utilisation, surtout dans des systèmes embarqués très restreints au niveau de la puissance de calcul.

Une autre limite importante d'une telle méthode est que le filtre de Kalman permet de prendre en compte uniquement un modèle de bruit Gaussien. Le bruit peut en général être modélisé de façon Gaussienne, mais dans certains cas, un autre type de bruit est requis (notamment en traitement d'images où l'on utilise fréquemment des bruits de Poisson). Cette restriction limite donc l'utilisation du filtre de Kalman. Le filtre de Kalman est donc une méthode d'estimation intéressante, mais qui n'est utilisable que lorsque l'on peut décrire assez précisément notre système. S'il est impossible de trouver une modélisation correcte du système, il est alors préférable de se tourner vers d'autres

méthodes (comme la méthode de *Monté-Carlo* par exemple qui est une méthode statistique, mais qui requiert une importante puissance de calcul).

#### 2.4.4 . Les estimateurs déterministes [22]

Tout d'abord, un point important dans la philosophie des estimateurs déterministes est que le vecteur à estimer est justement déterministe. C'est-à-dire que l'on suppose que ce vecteur possède des valeurs non aléatoires, même si celles-ci sont inaccessibles. Ce que l'on cherche à trouver, c'est un estimateur qui estime au mieux ce vecteur. Pour cela, il faut que l'estimateur soit sans biais et de variance minimale (pour minimiser l'erreur d'estimation).

**Le biais :** un estimateur sans biais signifie que l'espérance de l'estimation doit être égale au vecteur à estimer. En gros, ça veut donc dire que l'estimateur, en moyenne, ne commet pas d'erreur. Dit encore autrement, si l'on fait la moyenne des estimations, on trouve la valeur réelle du paramètre. Bien sûr, le biais n'est pas calculable en réalité, car on ignore la valeur réelle du paramètre ou du vecteur à estimer. Par contre, il est très utile pour caractériser nos estimateurs.

**La variance :** la variance peut être assimilée à l'erreur. Un estimateur est dit à variance minimal lorsque l'on a réussi à minimiser les variations entre le vecteur d'état et l'estimation. On a donc minimisé l'erreur.

Il faut bien faire attention, car ces deux notions sont bien distinctes. Un estimateur peut très bien avoir un biais nul, mais si sa variance est forte, cet estimateur ne sera pas performant.

Exemple : pour cet exemple, nous allons qualifier en termes de biais et de variance différents estimateurs. Le paramètre à estimer sera une tension constante de 230 volts. Tout d'abord, commençons par un estimateur sans biais, mais à forte variance. Les

valeurs estimées pourraient être les suivantes : 200, 260, 300, 220, 240, 160. Vous remarquerez que la moyenne fait bien 230. Donc notre estimateur est bien sans biais. Par contre, la variance est gigantesque. Notre estimateur n'est donc pas performant.

Voyons maintenant ce que donnerait un estimateur à faible variance, mais avec un biais de 11 par exemple. Les estimations fournies par cet estimateur pourraient être : 240, 241, 242, 241, 241, 242, 240. Ici, les valeurs sont très rapprochées. La variance est donc très faible, par contre, on constate une erreur de 11 volts entre la valeur moyenne de l'estimation et la valeur du paramètre. Le biais fausse donc le résultat.

Enfin, voici un exemple d'estimation que l'on pourrait obtenir avec un estimateur sans biais et à variance minimale : 229, 230, 231, 231, 230, 230, 229. Ici, la moyenne fait 230, donc le biais est bien nul. Et la variance est très faible car toutes les valeurs sont comprises dans une bande de 2 volts de large.

Cet exemple illustre donc l'intérêt d'avoir un estimateur avec un biais nul et une variance très faible [22].

## **2.5. Erreur quadratique moyenne**

Pour calculer l'erreur quadratique moyenne RMS, les erreurs individuelles sont tout d'abord élevées au carré, puis additionnées les une aux autres. On divise ensuite le résultat obtenu par le nombre total d'erreurs individuelles, puis on en prend la racine carrée. Cette erreur nous donne une mesure synthétique de l'erreur globale dans une seule valeur.

## **2.6. L'estimateur optimal**

Dans la littérature, vous trouverez qu'un estimateur dont le biais est nul aura une variance toujours supérieure ou égale à ce que l'on appelle la "borne de Cramer-Rao". Finalement, c'est assez logique. On ne peut pas obtenir une variance nulle et donc, on ne peut pas connaître exactement la valeur du vecteur d'état. On aura toujours une

incertitude égale à la borne de Cramer-Rao pour l'estimateur optimal. Si la variance est nulle, alors ce n'est plus un problème d'estimation, car ça voudrait dire que l'on connaît la valeur à estimer dès le départ.

Il se trouve que dans certains cas particuliers, il existe un estimateur sans biais à variance minimale calculable. Mais pour cela, il faut que le système respecte quelques contraintes :

- Le bruit doit être Gaussien
- Le système doit être linéaire

Cet estimateur est appelé "Estimateur sans biais à variance minimale linéaire gaussien", ou encore "Estimateur optimal linéaire gaussien" ou tout simplement "Méthode des moindres carrés"[22].

### 2.6.1. La méthode des moindres carrés

La première chose pour trouver cet estimateur est de modéliser le système de façon linéaire grâce à une équation d'état de ce type :

$$\mathbf{Y} = \mathbf{H} \cdot \mathbf{X} + \mathbf{w} \tag{2.40}$$

avec :

- $\mathbf{Y}$  : le vecteur de mesure (obtenue grâce aux capteurs)
- $\mathbf{X}$  : le vecteur des paramètres à estimer
- $\mathbf{w}$  : le vecteur du bruit de mesure (bruit gaussien engendré par les capteurs)
- $\mathbf{H}$  : la matrice reliant l'état à la mesure (appelé matrice d'observation)

Il faut donc avant toute chose déterminer ces quatre matrices. Les matrices  $\mathbf{Y}$  et  $\mathbf{w}$  sont déterminés très facilement. En effet, ce sont les informations obtenues grâce aux capteurs ainsi que les bruits des différents capteurs. Le vecteur  $\mathbf{X}$  est le vecteur des

paramètres que vous voulez estimer. Enfin, la matrice  $\mathbf{H}$  est à déterminer pour pouvoir respecter l'égalité.

Une fois le modèle posé, on peut donc calculer l'estimateur optimal.

$$\hat{\mathbf{X}} = (\mathbf{H}^T \cdot \mathbf{R}^{-1} \cdot \mathbf{H})^{-1} \cdot \mathbf{H}^T \cdot \mathbf{R}^{-1} \cdot \mathbf{Y} \quad (2.42)$$

$\mathbf{R}$  est la matrice de covariance du bruit de mesure. Pour un bruit gaussien centré avec des capteurs décorrélés entre eux, cette matrice est diagonale et ses termes sont les écart-types des différents bruits gaussiens des capteurs.

$\hat{\mathbf{X}}$  est l'estimation de  $\mathbf{X}$

La variance de cet estimateur est la borne de *Cramer-Rao* :

$$\mathbf{P} = (\mathbf{H}^T \cdot \mathbf{R}^{-1} \cdot \mathbf{H})^{-1} \quad (2.43)$$

Voilà, nous avons notre estimateur optimal linéaire gaussien. Maintenant, imaginons que l'on  $k$  mesure indépendantes. Nous pouvons donc faire une estimation de notre vecteur d'état grâce à cet estimateur. Mais une fois notre estimation calculée, si une autre mesure nous arrive, il faudra redéfinir toutes les matrices et recommencer les calculs pour obtenir une nouvelle estimation. En réalité, ce genre de choses est infaisable, notamment lorsque l'on doit traiter un problème en temps réel (en effet, les matrices seront de plus en plus grandes et il y a des inversions matricielles à faire, ce qui prend énormément de temps).

Pour estimer  $x$  on constitue un système linéaire global regroupant  $k$  lots de mesures  $y_r$ , pour [23]:

$r= 1$  à  $k$ , sous la forme :

$$\mathbf{Y}_k = \mathbf{H}_k \cdot X + \mathbf{W}_k \quad (2.44)$$

$$\mathbf{Y}_k = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_k \end{pmatrix} \quad \mathbf{H}_k = \begin{pmatrix} h_1 \\ \vdots \\ h_k \end{pmatrix} \quad \mathbf{W}_k = \begin{pmatrix} w_1 \\ \vdots \\ w_k \end{pmatrix} \quad (2.45)$$

$$\dim(\mathbf{Y}_k) = \dim(\mathbf{W}_k) = m = \sum_{r=1}^k m_r \quad \text{et} \quad \dim(\mathbf{H}_k) = m * n$$

Nous supposons que le nombre total de mesures  $m$  de mesures scalaires est supérieur au nombre d'inconnues  $n$  et que  $m$  est assez grand avec suffisamment de lignes indépendantes dans les  $\mathbf{h}_i$  pour que  $\text{rang}(\mathbf{H}_K) = n$ .

Recherchons  $\hat{\mathbf{X}}_k$  qui minimise la forme quadratique suivante :

$$\mathbf{C}_k = \frac{1}{2} (\mathbf{Y}_k - \mathbf{H}_k \hat{\mathbf{X}}_k)^T \mathbf{R}_K^{-1} (\mathbf{Y}_k - \mathbf{H}_k \hat{\mathbf{X}}_k) \quad (2.46)$$

avec :

$\mathbf{R}_K^{-1}$  matrice de pondération symétrique définie positive. La solution des moindres carres s'écrit :

$$\hat{\mathbf{X}}_k = (\mathbf{H}_k^T \cdot \mathbf{R}_K^{-1} \cdot \mathbf{H}_k)^{-1} \cdot \mathbf{H}_k^T \cdot \mathbf{R}_K^{-1} \cdot \mathbf{Y}_k \quad (2.47)$$

en posant :

$$\mathbf{P}_k = (\mathbf{H}_k^T \cdot \mathbf{R}_K^{-1} \cdot \mathbf{H}_k)^{-1} \quad (2.48)$$

Le vecteur  $\hat{\mathbf{X}}_k$  solution du système linéaire symétrique s'écrit:

$$\hat{\mathbf{X}}_k = \mathbf{P}_k \mathbf{H}_k^T \cdot \mathbf{R}_K^{-1} \cdot \mathbf{Y}_k \quad (2.49)$$

### 2.6.2. La méthode des moindres carrés récursive

L'algorithmique des moindres carrés récursifs (en anglais, RLS) est un algorithme de filtre adaptatif utilisé en traitement numérique du signal. Il fournit une manière récursive pour calculer le filtre qui minimise une fonction d'erreur dite des moindres carrés [22].

avec  $k$  mesures, notre estimateur optimal s'écrit donc comme cela :

$$\mathbf{P}_k = (\mathbf{H}_k^T \mathbf{R}_k^{-1} \mathbf{H}_k)^{-1} \quad (2.50)$$

$$\hat{\mathbf{X}}_k = \mathbf{P}_k \mathbf{H}_k^T \mathbf{R}_k^{-1} \mathbf{Y}_k \quad (2.51)$$

Considérons un lot de mesures supplémentaires :

$$\mathbf{y}_{k+1} = \mathbf{h}_{k+1} \mathbf{X} + \mathbf{w}_{k+1} \quad (2.52)$$

Ce qui signifie que les matrices de pondération ont une forme bloc diagonale :

$$\mathbf{R}_{K+1}^{-1} = \begin{pmatrix} r_1^{-1} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & r_2^{-1} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & r_{K+1}^{-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{R}_K^{-1} & 0 \\ 0 & r_{K+1}^{-1} \end{pmatrix} \quad (2.55)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{P}_{k+1} &= (\mathbf{H}_{k+1}^T \mathbf{R}_{k+1}^{-1} \mathbf{H}_{k+1})^{-1} = \sum_r^{k+1} \mathbf{h}_{k+1} r_r^{-1} \mathbf{h}_r \\ &= \mathbf{H}_k^T \mathbf{R}_k^{-1} \mathbf{H}_k + \mathbf{h}_{k+1} r_{k+1}^{-1} \mathbf{h}_{k+1} \end{aligned} \quad (2.56)$$

$$\hat{\mathbf{X}}_{k+1} = \mathbf{P}_{k+1} \mathbf{H}_{k+1}^T \mathbf{R}_{k+1}^{-1} \mathbf{Y}_{k+1} \quad (2.57)$$

Ce que l'on cherche à faire, c'est d'écrire  $\hat{\mathbf{X}}_k$  en fonction de  $\hat{\mathbf{X}}_{k+1}$

On arrive donc à l'expression récursive :

$$\mathbf{K}_{k+1} \mathbf{P}_k \mathbf{h}_{k+1}^T = (\mathbf{R}_{k+1} + \mathbf{h}_{k+1} \cdot \mathbf{P}_k \cdot \mathbf{h}_{k+1}^T)^{-1} \quad (2.58)$$

$$\mathbf{P}_{k+1} = (\mathbf{I} - \mathbf{K}_{k+1} \cdot \mathbf{h}_{k+1}) \cdot \mathbf{P}_k \quad (2.59)$$

$$\hat{\mathbf{X}}_{k+1} = \hat{\mathbf{X}}_k + \mathbf{K}_{k+1} \cdot (\mathbf{y}_{k+1} - \mathbf{h}_{k+1} \cdot \hat{\mathbf{X}}_k) \quad (2.60)$$

ici, les notations ont un peu changé :

- $\hat{\mathbf{X}}_{k+1}$  : la prédiction à l'état  $k + 1$  (ça n'a pas changé)
- $\mathbf{P}_{k+1}$  : la covariance de l'erreur à l'instant  $k + 1$  (ça n'a pas changé)
- $\mathbf{h}_{k+1}$  : la matrice d'état non pas pour les  $k + 1$  mesures (matrice  $\mathbf{H}$ ), mais uniquement pour la mesure courante. (Dans le cas des moindres carrés ou de Kalman,  $\mathbf{h}_k = \mathbf{h}_{k+1}$ )
- $\mathbf{R}_{k+1}$  : la matrice de covariance du bruit de mesure, non plus pour

$k + 1$  mesures, mais pour une seule mesure uniquement. (Pour le filtre de Kalman, on a aussi  $\mathbf{R}_k = \mathbf{R}_{k+1}$ )

- $\mathbf{I}$ , la matrice identité
- $\mathbf{y}_{k+1}$ , la mesure à l'instant  $k + 1$

Pour alléger l'écriture, l'équation a été décomposée en trois parties, faisant apparaître  $\mathbf{K}_k$ , le gain de Kalman. Ces équations ont déjà une structure très proche d'un Kalman classique [9].



## 2.7. Liaison avec les formules du filtre de Kalman discret

Les équations du filtre de Kalman discret sont exactement les mêmes que celles des moindres carres récursifs. Le filtre de Kalman discret permet d'estimer un vecteur  $\mathbf{X}$  à partir de mesures:

$$\mathbf{y}_k = \mathbf{h}_k \cdot \mathbf{X} + \mathbf{w}_k \quad (2.61)$$

Ou  $\mathbf{w}_k$  est un bruit de mesure pseudo blanc gaussien de moyenne nulle, sans corrélation entre lots de mesures. Les matrices  $\mathbf{r}_k$  qui interviennent dans les équations du filtre de Kalman sont les matrices de covariance du bruit de mesure, telles que :

$$E(\mathbf{w}_k \mathbf{w}_j^T) = \mathbf{r}_k \delta_{kj} \quad \forall K, j \quad (2.62)$$

Dans le cas du filtre de Kalman, la matrice  $\mathbf{P}_k$  représente la matrice de covariance de l'erreur d'estimation, à savoir :

$$\mathbf{P}_k = E((\hat{\mathbf{X}}_k - \mathbf{X})^T (\hat{\mathbf{X}}_k - \mathbf{X})) \quad (2.63)$$

Dans le cas des moindres carres récursifs, la matrice  $\mathbf{r}_K^{-1}$  n'est qu'une matrice de pondération symétrique positive laissée au choix de l'utilisateur et la matrice  $\mathbf{P}_k$  est un intermédiaire de calcul. Examinons leurs significations pratiques a posteriori.

## 2.8. Covariance de l'erreur d'estimation dans le cas de moindres carres récursifs :

Dans le cas des moindres carres récursifs,  $\mathbf{w}_k$  est une erreur de mesure quelconque. Toutefois pour obtenir une bonne estimation  $\hat{\mathbf{X}}_k$  il y a intérêt à donner aux pondérations

$\mathbf{r}_k$  des valeurs qui sont en rapport avec la précision des mesures  $\mathbf{y}_k$ . Donnons à cette matrice la même signification que dans le cas du filtre de Kalman, à savoir, la covariance de l'erreur de mesure [23] :

$$E(\mathbf{w}_k \mathbf{w}_k^T) = \mathbf{r}_k \quad (2.64)$$

Éventuellement non diagonale (symétrique définie positive). Nous supposons donc que les erreurs démesurées sont à moyenne nulle :

$$E(\mathbf{w}_k) = 0 \quad (2.65)$$

Avec ces conditions, calculons l'erreur d'estimation  $\Delta_{Xk} = \hat{\mathbf{X}}_k - \mathbf{X}$  dans le cas de la méthode des moindres carrés. Il vient :

$$\Delta_{Xk} = (\mathbf{H}_k^T \cdot \mathbf{R}_k^{-1} \cdot \mathbf{H}_k)^{-1} \mathbf{H}_k^T \cdot \mathbf{R}_k^{-1} \cdot \mathbf{Y}_k - \mathbf{X} = (\mathbf{H}_k^T \cdot \mathbf{R}_k^{-1} \cdot \mathbf{H}_k)^{-1} \mathbf{H}_k^T \cdot \mathbf{R}_k^{-1} \cdot \mathbf{W}_k \quad (2.66)$$

## 2.9. Évolution des paramètres dans le temps

Précédemment, le vecteur d'état à estimer était constant. Maintenant, on suppose qu'il évolue dans le temps [22].

Dans cette partie, on suppose que ce vecteur évolue selon un processus linéaire déterministe supposé connu. On est donc obligé de faire une prédiction de l'estimation courante ( $\hat{\mathbf{X}}_k^+$ ) à partir de l'estimation précédente ( $\hat{\mathbf{X}}_k$ ) suivant le processus linéaire avant d'appliquer les formules de la méthode des moindres carrés récursives, vue précédemment pour calculer l'estimation suivante ( $\hat{\mathbf{X}}_{k+1}$ ). On a donc :

$$\hat{\mathbf{X}}_k^+ = \mathbf{A} \cdot \hat{\mathbf{X}}_k \quad (2.67)$$

La matrice  $\mathbf{A}$  relie l'état précédent à l'état suivant. Pour déterminer cette matrice, posez les équations reliant les deux états, puis déterminer la forme matricielle.

De même, il faut prédire la matrice de covariance de l'erreur ( $\mathbf{P}_k^+$ ) :

$$\mathbf{P}_k^+ = \mathbf{A} \cdot \mathbf{P}_k \cdot \mathbf{A}^T \quad (2.68)$$

Maintenant que l'on a nos prédictions, il faut mettre à jour afin de prendre en compte la nouvelle mesure effectuée. On peut donc appliquer notre méthode des moindres carrés récursive et ainsi prendre en compte la nouvelle mesure :

$$\mathbf{K}_{k+1} = \mathbf{P}_k^+ \cdot \mathbf{h}_{k+1}^T \cdot (\mathbf{R}_{k+1} + \mathbf{h}_{k+1} \cdot \mathbf{P}_k^+ \cdot \mathbf{h}_{k+1}^T)^{-1} \quad (2.69)$$

$$\mathbf{P}_{k+1} = (\mathbf{I} - \mathbf{K}_{k+1} \cdot \mathbf{h}_{k+1}) \cdot \mathbf{P}_k^+ \quad (2.70)$$

$$\hat{\mathbf{X}}_{k+1} = \hat{\mathbf{X}}_k^+ + \mathbf{K}_{k+1} \cdot (\mathbf{y}_{k+1} - \mathbf{h}_{k+1} \cdot \hat{\mathbf{X}}_k^+) \quad (2.71)$$

Ceci est presque la forme finale du filtre de Kalman. Nous avons bien la phase de prédiction (les deux premières équations) et la phase de mise à jour (les trois suivantes).

### a) Évolution aléatoire dans le temps

Pour finir, le vecteur à estimer évolue selon un processus linéaire, mais cette fois-ci aléatoire. Il suffit donc de rajouter un bruit d'état lors de la prédiction de la covariance de l'erreur. Ce qui signifie que l'on connaît la forme de l'évolution, mais que l'on autorise au système de se tromper.

$$\mathbf{P}_k^+ = \mathbf{A} \cdot \mathbf{P}_k \cdot \mathbf{A}^T + \mathbf{Q} \quad (2.72)$$

$\mathbf{Q}$  est la matrice de covariance du bruit d'état

Nous avons fini par retomber sur la forme finale du filtre de Kalman :

La phase de prédiction

$$\hat{\mathbf{X}}_k^+ = \mathbf{A} \cdot \hat{\mathbf{X}}_k \quad (2.73)$$

$$\mathbf{P}_k^+ = \mathbf{A} \cdot \mathbf{P}_k \cdot \mathbf{A}^T + \mathbf{Q} \quad (2.74)$$

La phase de mise à jour

$$\mathbf{K}_{k+1} = \mathbf{P}_k^+ \cdot \mathbf{h}_{k+1}^T \cdot (\mathbf{R}_{k+1} + \mathbf{h}_{k+1} \cdot \mathbf{P}_k^+ \cdot \mathbf{h}_{k+1}^T)^{-1} \quad (2.75)$$

$$\mathbf{P}_{k+1} = (\mathbf{I} - \mathbf{K}_{k+1} \cdot \mathbf{h}_{k+1}) \cdot \mathbf{P}_k^+ \quad (2.76)$$

$$\hat{\mathbf{X}}_{k+1} = \hat{\mathbf{X}}_k^+ + \mathbf{K}_{k+1} \cdot (\mathbf{y}_{k+1} - \mathbf{h}_{k+1} \cdot \hat{\mathbf{X}}_k^+) \quad (2.77)$$

## 2.10. Points forts [24]

- Le filtre de Kalman est une méthode visant à estimer des paramètres d'un système évoluant dans le temps à partir de mesures bruitées.
- On retrouve ce filtre dans bon nombre de domaines relatifs au traitement du signal, radar, traitement d'images etc....
- La force de ce filtre est sa capacité de prédiction des paramètres et de rectification des erreurs, non seulement des capteurs, mais aussi du modèle lui-même.
- La force du filtre de Kalman est d'intégrer un terme d'imprécision sur le modèle lui-même, ce qui lui permet de donner des estimations correctes malgré les erreurs de la modélisation (pour peu que les erreurs restent raisonnables).

- Un autre point fort du filtre de Kalman (mais que l'on retrouve aussi dans la méthode des moindres carrés par exemple) est sa capacité à déterminer l'erreur moyenne de son estimation.
- En effet, l'outil Kalman fournit un vecteur contenant les paramètres estimés, mais aussi une matrice de covariance de l'erreur. Cette matrice nous renseigne donc sur la précision de l'estimation, ce qui peut être utile dans de nombreuses applications. Un autre atout du filtre de Kalman est que la convergence de cette erreur est garantie.

## 2.11. Le fonctionnement [24]

Le fonctionnement du filtre de Kalman peut se diviser en deux étapes :

- Une première étape de prédiction : l'estimation selon le modèle du système. Pour ce faire le filtre de Kalman reprend l'estimation précédente des paramètres et de l'erreur et prédit les nouveaux paramètres et la nouvelle erreur en fonction de la modélisation du système.
- La seconde étape va faire la mise à jour de cette prédiction grâce aux nouvelles mesures. Ces mesures (par définition bruitées) vont permettre d'obtenir une estimation des paramètres et de l'erreur à partir de la prédiction faite. Si jamais le modèle comporte des erreurs, cette étape de mise à jour permettra de les rectifier.

## 2.12. Applications du Filtre de Kalman

Le filtre de Kalman est utilisé dans une large gamme de domaines technologiques (radar, vision électronique, communication ...). Un thème majeur de l'automatique et du traitement du signal. Un exemple d'utilisation peut être la mise à disposition, en continu, d'informations telles que la Position ou la vitesse d'un objet à partir d'une série d'observations relative à sa position, incluant éventuellement des erreurs de mesures.

Par exemple, pour le cas des radars où l'on désire suivre une cible, des données sur sa position, sa vitesse et son accélération sont mesurées à chaque instant mais avec énormément de perturbations dues au bruit ou aux erreurs de mesure. Le filtre de Kalman fait appel à la dynamique de la cible qui définit son évolution dans le temps pour obtenir de meilleures données, éliminant ainsi l'effet du bruit. Ces données peuvent être calculées pour l'instant présent (filtrage en météorologie), dans le passé (lissage), ou sur un horizon futur (prédiction).

Le filtrage de Kalman est aussi de plus en plus utilisé en dehors du domaine du traitement du signal, par exemple et en océanographie, pour l'assimilation de données dans un modèle numérique, en finance ou en navigation et il est même utilisé dans l'estimation des états de trafic routier dans le cas de commande par rampe d'accès où le nombre de boucles magnétiques sur la route est insuffisant [17].

### **2.13. Conclusion**

Le filtre de Kalman est donc une méthode d'estimation très puissante. Mais elle possède plusieurs faiblesses. Tout d'abord, le modèle doit être linéaire. Heureusement, il existe une variante de ce filtre, appelé le filtre de Kalman étendu qui permet de résoudre des problèmes non linéaire, bien que la stabilité de l'estimateur ne soit plus assurée. Une autre méthode qui, dans certains cas, est plus puissante que le filtre de Kalman est le filtre particulaire.

Le filtre de Kalman est donc un ensemble d'équations très efficace pour obtenir la solution optimale d'un problème dont on n'a qu'une connaissance partielle.

# Chapitre 3 : Simulations et Interprétations

---

## 3.1. Introduction :

Cette partie de notre mémoire concerne les simulations que nous avons pu réaliser. Elles concernent l'implémentation par matlab de d'une chaine de transmission mono porteuse mono trajet avec un algorithme de prédiction des symboles M QAM avec  $M=4$ .

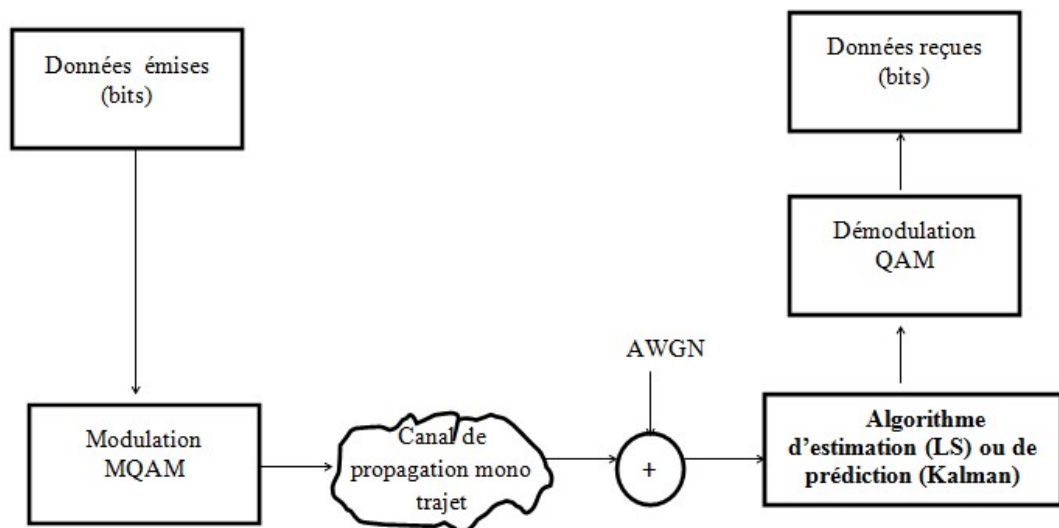
L'algorithme en question est :

1. moindres carrés: dans ce cas le vecteur des symboles M-QAM sont estimés à l'aide de l'algorithme des moindres carrés.
2. forme 1 de l'algorithme des moindres carrés récursif: dans ce cas le vecteur de symboles M-QAM est supposé invariant dans le temps (constant) et ses composantes sont estimés (prédits) à l'aide de cet algorithme. Nous allons appeler cet algorithme : forme quasi définitive 1 du filtre de Kalman (notée qf1Kalm).
3. forme 2 de l'algorithme des moindres carrés récursif : dans cette partie, on suppose que le vecteur des symboles M-QAM évolue selon un processus linéaire déterministe supposé connu .Une prédiction de l'estimation courante à partir de l'estimation précédente s'impose donc. A cet effet nous allons utiliser une prédiction linéaire. Nous allons appeler cet algorithme : forme quasi définitive 2 du filtre de Kalman (notée qf2Kal).
4. forme 3 de l'algorithme des moindres carrés récursif : dans cette partie, on suppose que le vecteur des symboles M-QAM évolue selon un processus linéaire (prédiction linéaire) mais cette fois-ci aléatoire .Un bruit d'état est alors ajouté lors de la prédiction de la covariance de l'erreur. Nous allons appeler cet algorithme : forme définitive du filtre de Kalman (notée fdKal).



### 3.2. Chaîne de transmission mono porteuse avec algorithmes de prédiction :

La figure qui suit (figure 3.1) schématise une transmission simple mono porteuse mono trajet avec un algorithme d'estimation ou de prédiction selon le cas.



**Figure 3.1** : Schéma de principe d'une transmission mono porteuse mono trajet

Dans ce type de transmission simple, des bits de données sont regroupés de bloc de  $m$  avec  $M = 2^m$ , dans notre cas  $m=2$  et  $M=4$ .

Les symboles 4 QAM, qui sont des nombres complexes et qui se présentent sous forme d'une série de variables aléatoires, sont transmis à l'aide d'une antenne d'émission (non représentée sur la figure) vers un canal radio fréquence mono trajet. Après réception via une antenne de réception (non représenté également), ces symboles sont mélangés avec un bruit additif gaussien.

Ces symboles affectés par le canal et entachés par le bruit gaussien vont être corrigés grâce à un algorithme de d'estimation (LS) ou d'estimation/prédiction (RLS ou Kalman).

Enfin, Les symboles corrigés seront démodulés (démodulation QAM) pour retrouver des bits.

### 3.3. Organigrammes des programmes

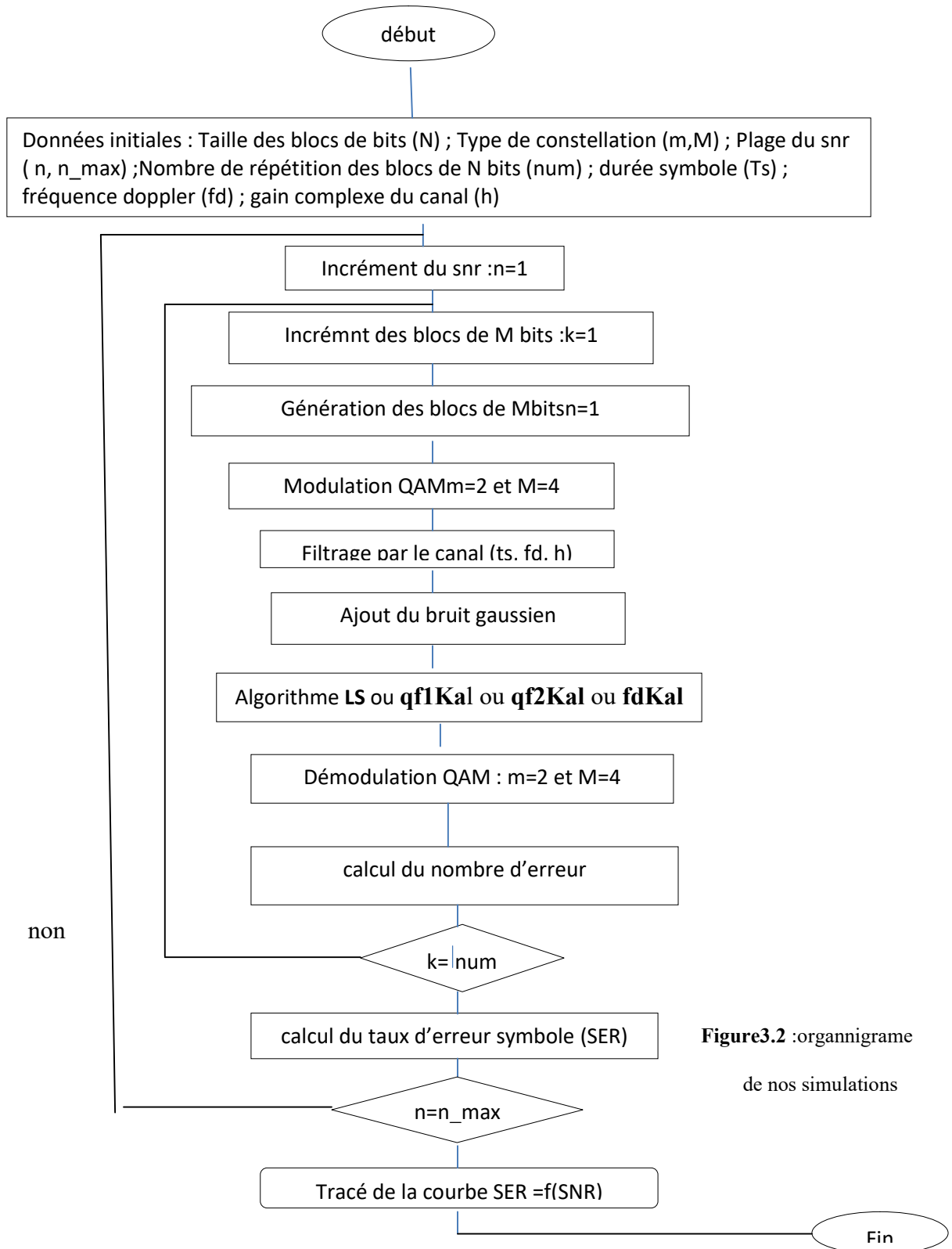


Figure3.2 :organnigrame de nos simulations

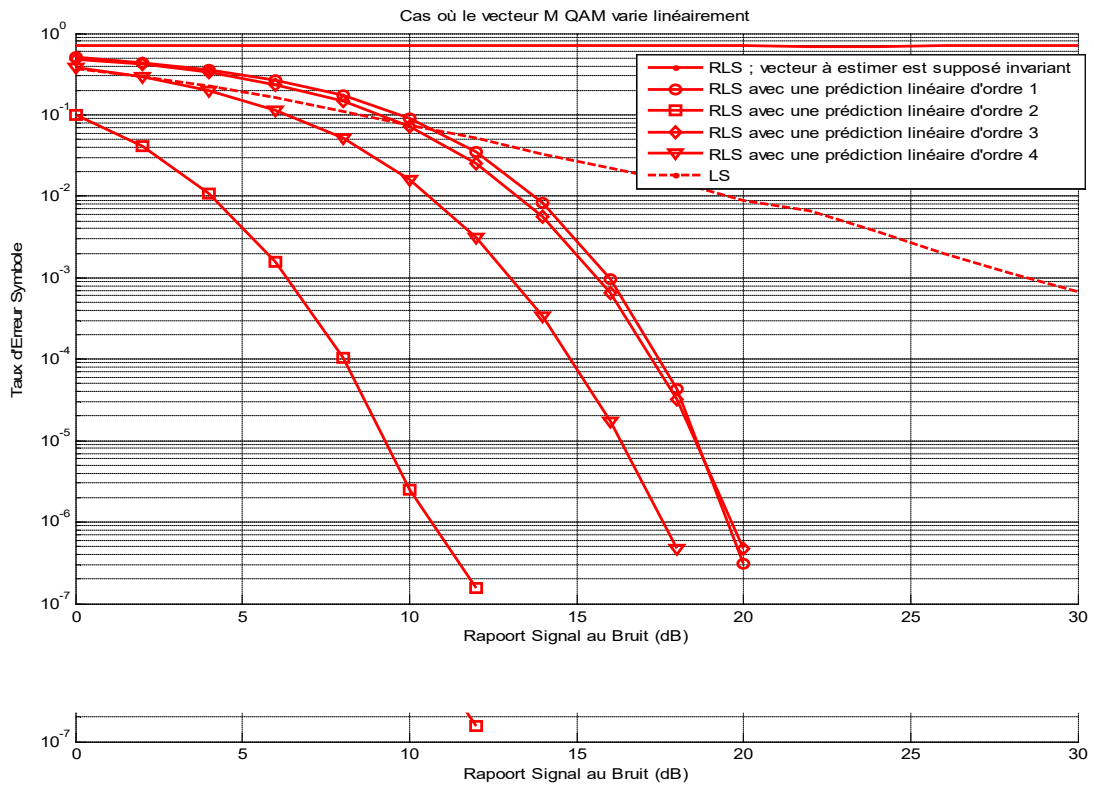
### 3.4. Résultats des simulations :

#### 3.4.1. Cas où le vecteur varie linéairement :

Dans la figure 3.3 sont regroupées les courbes du SER en fonction du SNR pour les cas d'estimation à l'aide des algorithmes suivants :

- moindres carrés (LS ou *Least Square* en anglais)
- moindres carré récursif (RLS : *Recursive Least Square* en anglais) où le vecteur d'état (symboles M QAM) est supposé constant (invariant dans le temps).
- moindres carré récursif (RLS) où le vecteur d'état (symboles M QAM) est supposé variant de manière linéaire. Une prédiction linéaire des symboles et de la sont insérée dans l'algorithme RLS. Des prédictions linéaires jusqu'à l'ordre 4 ont été simulées.

a) résultats : cette figure présente le cas où le vecteur M QAM varie linéairement :



**Figure 3.3** : comparaison entre les algorithmes LS, RLS et RLS avec prédiction linéaire (variation linéaire ordre : 1 :4)

b) Interprétation :

Etant donné que nous n'avons pas assez de bagages sur les statistiques des séries de symboles M QAM ( $M=4$ ) ; nous pouvons d'après les courbes de la figure 3.3 affirmer que le vecteur des symboles 4 QAM ne peut être considéré comme un vecteur constant puisque le SER (symbole error rate) en fonction du SNR diverge.

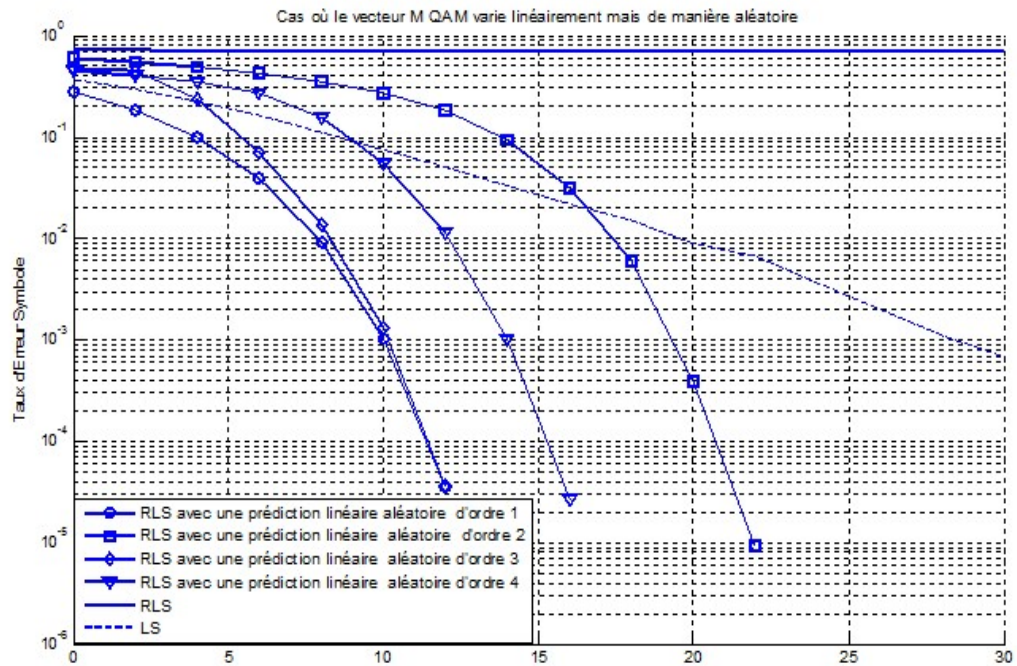
La meilleure courbe est celle où ce vecteur est considéré comme variant dans le temps de manière linéaire. Le cas de la prédiction linéaire d'ordre 2 donne de meilleurs résultats.

3.4.2. Cas où le vecteur varie linéairement mais de manière aléatoire :

Dans la figure 3.4 sont regroupées les courbes du SER en fonction du SNR pour les cas d'estimation à l'aide des algorithmes suivants :

- moindres carrés (LS ou *Least Square* en anglais)
- moindres carré récursif (RLS : *Recursive Least Square* en anglais) où le vecteur d'état (symboles M QAM) est supposé constant (invariant dans le temps).
- moindres carré récursif (RLS) où le vecteur d'état (symboles M QAM) est supposé variant de manière linéaire mais aléatoire. Une prédiction linéaire des symboles et de la sont insérée dans l'algorithme RLS. Des prédictions linéaires jusqu'à l'ordre 4 ont été simulées.

a) résultats : cette figure présente le cas où le vecteur M QAM varie linéairement mais de manière aléatoire :



**Figure 3.4** : comparaison entre les algorithmes LS, RLS et RLS avec prédiction linéaire aléatoire (variation linéaire aléatoire ordre : 1 :4)

b) Interprétation :

Même chose, nous pouvons d'après les courbes de la figure 3.4 affirmer que le vecteur des symboles 4 QAM ne peut être considéré comme un vecteur constant puisque le SER (symbole error rate) en fonction du SNR diverge. Il peut être considéré comme variant linéairement mais de manière aléatoire.

Le cas de la prédiction linéaire aléatoire d'ordre 1 donne de meilleurs résultats.

3.4.3. Comparaison des deux cas de figure :

a) résultats : cette figure présente la comparaison entre le vecteur M QAM varie linéairement de manière aléatoire et non aléatoire :

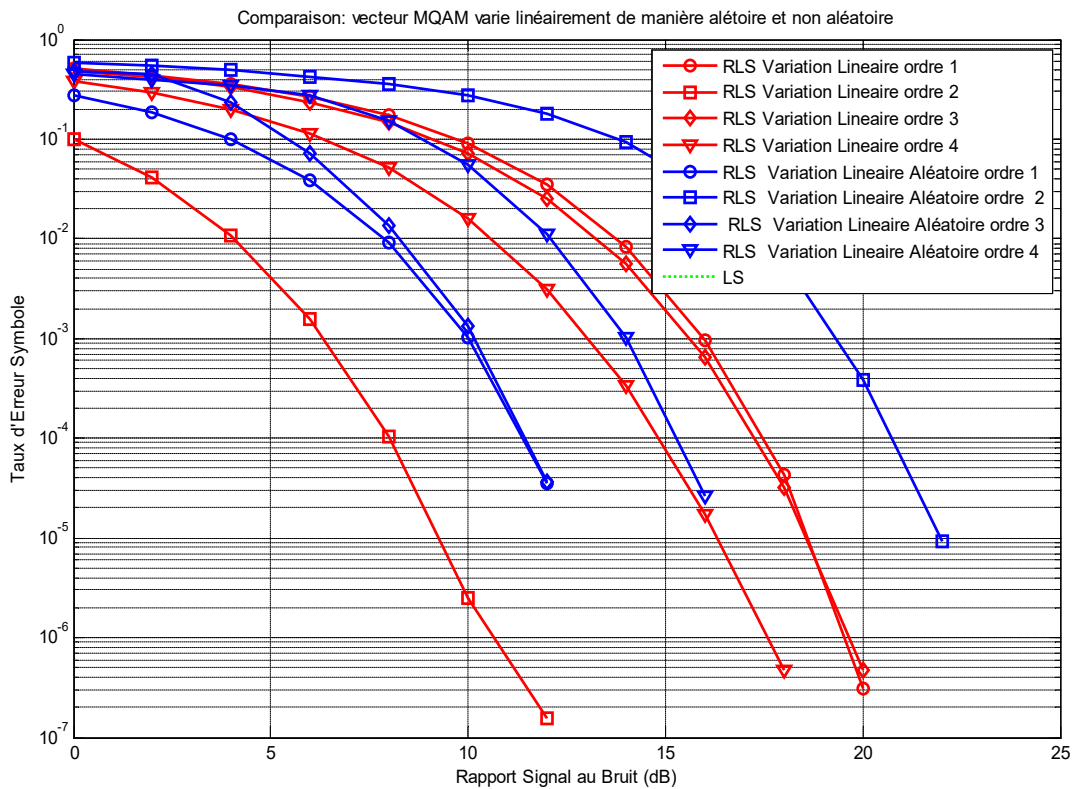


Figure 3.5 : comparaison entre les deux cas de figure

b) Interprétation :

La meilleure courbe est celle où ce vecteur est considéré comme variant dans le temps de manière linéaire. Le cas de la prédiction linéaire d'ordre 2 donne de meilleurs résultats.



Finale­ment, si les programmes ont bien été structurés (sans erreur), nous pouvons affirmer que la série temporelle constituée de symboles 4 QAM de nature complexe peut être considérée comme un vecteur variant dans le temps de manière linéaire.

### **3.5. Conclusion :**

Dans cette partie qui est la simulation des différents algorithmes, nous avons mis tous nos efforts pour essayer d'aboutir à des résultats logiques et convaincants. Faute de temps nous ne pouvons aller plus loin. Nous espérons que d'autres étudiants confirmeront ou corrigeront ces résultats.

# Conclusion Générale

---

Le but de ce travail de recherche était d'implémenter l'algorithme du filtrage de Kalman pour la prédiction des éléments de la suite chronologique des symboles MQAM dans le cas d'une transmission mono porteuse mono trajet.

Pour arriver à cet objectif, il fallait revoir essentiellement les notions relatives à la propagation radio fréquence, aux processus stochastiques, faire une étude sur le filtrage adaptatif et sur celui de Kalman et, le rapport de ce type de filtre avec l'algorithme RLS.

Ce travail théorique nous a pris beaucoup de temps et en a laissé peu pour réfléchir sur des scénarios de simulation. Nous nous sommes donc limités au cas simple d'un schéma de constellation 4 QAM dans le cas d'une transmission mono porteuse mono trajet, pour cela on a travaillé avec un canal de transmission Rayleigh à un seul trajet et avec un signal aléatoire (bruit gaussien) .donc on a utilisé la méthode des moindres carrés qui permet de trouver la modélisation mathématique linéaire qui décrit le mieux ces données. La méthode classique des moindres carrés faire les calculs d'un seul coup en utilisant tous les points. Ces calculs nécessitent la manipulation de matrice de la taille du nombre de points de mesure. Il n'est donc pas possible de l'utiliser dans un système embarqué puisque que la complexité des calculs augmenterait constamment avec le temps et le nombre de mesures.

On utilise donc la méthode récursive des moindres carrés qui permet de mettre à jour le modèle à chaque arrivée d'une nouvelle mesure. Les calculs se font alors avec une complexité constante au cours du temps .on a trouvé des meilleurs résultats avec la prédiction.

Le manque d'informations (documentations) sur les statistiques des symboles MQAM nous a lésés en ce qui concerne l'interprétation des résultats.

Comme suite à ce travail nous proposons de le compléter et ce comblant les lacunes théoriques citées plus haut. Il serait intéressant de réviser ce travail et de le

## Conclusion Générale

---

généraliser pour les cas  $M > 4$  (16 QAM et 64 QAM) en transmissions mono et multi trajets.

Ce travail de recherche nous a permis de développer d'avantages nos connaissances scientifiques aussi bien théoriques que pratiques (simulations). En effet, les notions sur filtrage adaptatif, le processus stochastique et l'algorithme RLS, entre autres, étaient des sujets peu connus voire méconnus pour nous. La programmation intensive à l'aide de matlab nous a permis de nous familiariser les codes et messages d'erreur de ce langage de programmation et donc d'aller plus vite.

Enfin, nous espérons que le contenu de ce mémoire sera à la hauteur des attentes des lecteurs.

## Bibliographie

---

- [1] : lien internet : [fr.m.wikipedia.org/wiki/Série temporelle](http://fr.m.wikipedia.org/wiki/S%C3%A9rie_temporelle).
- [2] : Fichier PDF : Artur Chatpentier. « *Introduction à la théorie des processus en temps discret Modèles ARIMA et méthode Box & Jenkins* ». Université Paris Dauphine.
- [3] : Fichier PDF : « *Axe méthodes statistiques et applications* ». O. Roustant. Novembre 2008
- [4] : Fichier PDF. : « *Introduction aux séries temporelles* ». ISMA 2012
- [5] : lien internet : <http://www.ferdinandpiette.com/blog/2011/04/le-filtre-de-kalman-interets-et-limites/>
- [6] Abdelmalek Fatma & Katmir Fatma-Zohra: « *Etude et simulation d'un modèle de canal de propagation sans fil dans un environnement Indoor* », Mémoire de Projet de Fin d'Études, Université de Blida 1 .Blida, Année Universitaire 2013-2014.
- [7] Tesserault Guillaume : « *Modélisation multi-fréquences du canal de propagation* », Thèse Docteur, l'Université de Poitiers, Décembre 2008.
- [8] O.Akhdar : « *Conception d'une méthode de déconvolution pour l'estimation des angles d'arrivée sur une antenne. Application au sondage spatio-temporel du canal de propagation* », Thèse de PHD, Université de Limoges. France, octobre 2009.
- [9] Alaa Choumane : « *Synthèse d'un canal de propagation par système multi-antennes pour la caractérisation de terminaux mobiles à diversité* », Thèse Docteur, Université de Limoges. France, Juin 2011.
- [10] Edgard Haddad : « *Apport de la modélisation déterministe 3d indoor pour l'ingénierie des systèmes radio avancés* », Thèse de Doctorat, Ecole Doctorale SICMA, Bretagne. France, Novembre 2011.

[11] Pascal Pagani : « *Caractérisation et modélisation du canal de propagation radio en contexte Ultra Large Bande* », Thèse de Docteur, Other. INSA de Rennes. France novembre 2005.

[12] Mahdi Bersali : « *Exposé à l'IEMN-DOAE* », Valenciennes France .Janvier 2012.

## Bibliographie

---

[13] N. Prayongpun : « *Modélisation et étude de la capacité du canal pour un système multi-antennes avancé exploitant la diversité de polarisation* », Thèse PHD, Université Joseph Fourier – Grenoble 1.France, avril 2009,

[14] D.Alazard : « *Introduction au Filtre de Kalman* », Livre , institut supérieur de l'Aéronautique et de l'Espace, Mai 2011 - version 0.3.

[HTTP://OATAO.UNIV-TOULOUSE.FR/2248/1/ALAZARD\\_2248.PDF](http://oatao.univ-toulouse.fr/2248/1/ALAZARD_2248.PDF)

[15] Frédéric Rotella : « *Filtrage Optimal* », Livre , Ecole Nationale d'Ingénieurs de Tarbes. rotella@enit.fr.

<http://www.clubeea.org/documents/mediatheque/filtrekalman.pdf>

[16] Jacob Benesty : « *Traitement des signaux numériques – II – Filtrage adaptatif et analyse spectrale* ».

<http://www.modulad.fr/archives/numero-14/Monrocq-14/Selectiondemodeles.pdf>

[17]: [https://www.google.fr/?gws\\_rd=ssl#q=+exemple+de+processus+deterministe](https://www.google.fr/?gws_rd=ssl#q=+exemple+de+processus+deterministe)

[18] :[https://fr.wikipedia.org/wiki/Matrice\\_de\\_Toeplitz](https://fr.wikipedia.org/wiki/Matrice_de_Toeplitz)

[19] <http://www.aquaportail.com/definition-5274-filtre-de-kalman.html>

[20] <http://users.polytech.unice.fr/~leroux/moindrescarresbis/node14.html>

[21] Florent Lafarge : « *Introduction au filtrage de Kalman* ». Thèse sur la Théorie du filtre de Kalman discret & applications.(principe).

[http://oatao.univ-toulouse.fr/2248/1/Alazard\\_2248.pdf](http://oatao.univ-toulouse.fr/2248/1/Alazard_2248.pdf)

[22] <http://www.ferdinandpiette.com/blog/2011/04/le-filtre-de-kalman-de-lestimateur-optimal-au-filtre-de-kalman/>

[23] Inria Rennes et Irmir : « *Introduction au Filtrage en Temps Discret Filtrage de Kalman et Modèles de Markov Cachés* », Thés de Master, Université de Rennes 1, Année 2014 -2015.

<http://www.irisa.fr/aspi/legland/>

[24] [http:// /F:lefilter de kalmanintérets et limites << sciences et techniques.htm](http://F:lefilter%20de%20kalmanint%C3%A9rets%20et%20limites%20%3C%3C%20sciences%20et%20techniques.htm)