

الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية
République Algérienne démocratique et populaire

وزارة التعليم العالي و البحث العلمي
Ministère de l'enseignement supérieur et de la recherche scientifique

جامعة سعد دحلب البليدة
Université SAAD DAHLAB de BLIDA

كلية التكنولوجيا
Faculté de Technologie

قسم الإلكترونيك
Département d'Électronique



Mémoire de Projet de Fin d'Études

présenté par

Khetib Mohamed Riadh

Ferdjani Abdelkader Zakaria

pour l'obtention du diplôme de Master en automatique et informatique industrielle

Synchronisation Chaotique Par Observateurs Interconnectés

Proposé par :

Mr Ferdjouni Abdellaziz

Année Universitaire 2018-2019

Dédicaces

Dédicace

Je dédie de travail

- *A mes très chers parents pour leur soutien moral.*
- *A mon frère, ma sœur, et toute famille*
- *A tous les enseignants qui ont contribué à ma formation*

Ferdjani Abdelkader Zakaria

Dédicaces

A mon père

A ma mère,

A mes sœurs Ryma et Hafsa

A mes cousins et cousines

À toute personne qui porte de l'estime pour moi.

Khetib Mohamed Riadh

Remerciements

Nous tenons à remercier en premier, Dieu "Allah" Miséricordieux qui nous a donné la force et la volonté d'achever ce modeste travail.

Nous tenons à exprimer notre profonde gratitude et nos remerciements à Monsieur Ferdjouni Abdellaziz, docteur à l'Université Saad Dahlab de Blida et promoteur de ce mémoire pour le temps qu'il nous a consacré, sans ses orientations et ses suggestions les plus inestimables, ce mémoire n'aurait jamais pu voir le jour.

Nous tenons aussi à remercier vivement l'ensemble des professeurs du département de GE de l'université de Blida qui ont contribué à notre formation et qui nous ont fait part de leur savoir.

Nous tenons aussi à remercier nos familles, nos amis et nos collègues qui ont pris une dimension toute particulière entrecoupant le travail, de moments de détente, de rigolade et de fête tous aussi inoubliables qui sont revitalisantes

Résumé :

Dans ce mémoire de Fin d'Etudes, une méthode de synchronisation des systèmes chaotiques est étudiée et développée. Elle est basée sur les observateurs interconnectés à entrées inconnues pour une classe des systèmes chaotiques présentant du bruit dans les signaux de sortie. La synthèse des observateurs se fait en utilisant la théorie de Lyapunov pour minimiser l'erreur d'estimation afin de reconstruire des états du système.

Mots clés : observateurs interconnectés, synchronisation, systèmes chaotiques, paramètres de convergence

Abstract

In this dissertation, a method of synchronization of chaotic systems is studied and developed. It is based on interconnected observers with unknown inputs for a class of chaotic systems with noise in the output signals. Observer synthesis is done using the Lyapunov theory to minimize the estimation error in order to reconstruct states of the system.

Keywords: interconnected observers, synchronization, chaotic systems, convergence parameters

ملخص

في هذه الرسالة من نهاية الدراسات، تتم دراسة وتطوير طريقة لمزامنة الأنظمة الفوضوية. إنه يعتمد على مراقبين مترابطين مع مدخلات غير معروفة لفئة من النظم الفوضوية مع الضوضاء في إشارات الإخراج. يتم تخليق المراقب باستخدام نظرية Lyapunov لتقليل الخطأ في التقدير من أجل إعادة بناء حالات النظام.

لكلمات المفتاحية: تزامن المراقبين المترابط، الأنظمة الفوضوية، معلمات التقارب

Listes des acronyme et abréviations

IGG : interconnecté à grand gain.

SDC : Système dynamique chaotique.

SDP : Symétriques définie positive.

TABLE DES MATIERES

Introduction générale	1
Chapitre 1 : Système dynamique chaotique de Qi	
1.1 Introduction.....	3
1.2 Les systèmes dynamiques non linéaire.....	3
1.3 Point fixe.....	4
1.3.1 Stabilité au sens de Lyapunov.....	5
1.3.2 Stabilité par méthode indirecte de Lyapunov	6
1.4 La théorie du chaos	7
1.4.1 Caractéristique d'un système chaotique	8
1.5 Espace de phase	8
1.6 Exposant de Lyapunov.....	9
1.6.1 Type d'attracteur en fonction de l'exposant de Lyapunov.....	9
1.7 Attracteur	10
1.8 Section de Poincaré.....	10
1.9 Bifurcation	11
1.9.1 Bifurcation nœud de col	12
1.9.2 Bifurcation Trans critique.....	13
1.9.3 Bifurcation pitchfork	14
1.9.4 Bifurcation de Hopf.....	15
1.10 Présentation du système de Qi	16
1.10.1 Calcul point fixe.....	16
1.11 Etude du système de Qi	17
1.11.1 Aspect aléatoire	18

1.11.2	Sensibilité au condition initiales	20
1.11.3	Plan de phase	21
1.12	Evolution des exposants de Lyapunov	23
1.13	Attracteur et section de Poincaré	24
1.14	Bifurcation du système.....	26
1.15	Conclusion	27

Chapitre 2 : L'observabilité et les observateurs

2.1	Introduction.....	28
2.2	Principe d'un observateur	29
2.2.1	Définition.....	29
2.2.2	Fonctionnement d'un observateur	29
2.3	Observabilité	31
2.3.1	Observabilité des systèmes linéaire	31
2.3.2	Observabilité des systèmes non linéaires.....	31
2.3.3	La dérivée de Lie et condition de rang.....	32
2.3.4	L'observabilité universelle	33
2.3.5	Problématique des entrées.....	34
2.4	Observabilité du système de Qi	34
2.5	Introduction à l'observateur grand gain	35
2.5.1	Avantages d'un observateur grand gain[monia]	36
2.5.2	Inconvénients d'un observateur grand gain	36
2.5.3	Principe de l'observateur grand gain	37
2.6	Conclusion	38

Chapitre 3 : Application à l'observateur à la synchronisation de deux systèmes

chaotique Q_i .

3.1	Introduction.....	39
3.2	transmissions de données sécurisées utilisant les systèmes chaotiques	39
3.3	Système de Q_i sous forme interconnectée	40
3.4	Synthèse de l'observateur IGG.....	43
3.4.1	Modèle et équations de l'observateur	43
3.4.2	Équation différentielle de Lyapunov et matrice de gain S_i	45
3.5	Analyse de convergence :.....	48
3.5.1	Calcul de l'erreur d'estimation	48
3.5.2	calcul de la fonction candidate	49
3.5.3	calcul de θ_1 et θ_2	53
3.6	Conclusion	55

Chapitre 4 : Simulation et interprétation des résultats

4.1	introduction.....	56
4.2	présentation du modèle Simulink:	56
4.2.1	Bloc du système de Q_i	58
4.2.2	Réalisation de des observateurs interconnectés :.....	61
4.3	Simulation et interprétation des Résultats	64
4.3.1	Interprétation des erreurs d'estimation et des plans de phase	65
4.3.2	Reconstruction des messages d'entrée	67
4.3.3	Comportement des gains.....	69

4.4	Implémentation sous DSPACE.....	71
4.4.1	Présentation de la carte DS1104	71
4.4.2	Résultats de simulation sous DSPACE.....	74
4.4.3	simulation des messages et leurs reconstructions	76
4.4.4	Conversion analogique des signaux et interprétation.....	77
4.5	Conclusion	80
	Conclusion générale.....	81
	Bibliographie.....	83

Liste des figures

Figures 1.1. Section de Poincaré	11
Figure1.2. Bifurcation nœud de col à $\mu = 0$	12
Figure1.3. Bifurcation trans critique à $\mu = 0$	13
Figure1.4. Bifurcations fourche à $\mu = 0$	14
Figure1.5. Bifurcations pour $\mu = 0$ un point fixe stable	15
Figure 1.6. Bifurcations pour $\mu = 0$ un point fixe instable	15
Figure1.7. Système Qi sous Matlab Simulink	18
Figure1.8. Evolution de x_1 en fonction du temps	18
Figure1.9. Evolution de x_2 en fonction du temps	19
Figure1.10. Evolution de x_3 en fonction du temps	19
Figure1.11. Evolution de x_4 en fonction du temps	19
Figure1.12. Evolution de l'ensemble des états en fonction du temps	20
Figure 1. 13. Evolution de x_1 et x'_1 en fonction du temps	20
Figure1.14. Evolution de x_2 avant et après le changement de x_1 en fonction du temps	21
Figure 1.15. Plan de phase avant et après le changement de variable x_1 initial	23
Figure1.16. Evolution des exposants de Lyapunov du système de Qi	23
Figure1.17. Attracteurs du système de Qi	24
Figure1.18. Plan de phase $x_1x_2x_3$ du système de Qi	25
Figure1.19. Hyperplan x_1	26
Figure1.20. Diagramme de bifurcation du système de Qi pour $b = [0-27]$	27
Figure 2.1. Structures d'un observateur	30
Figure 3.1. Système de transmission utilisant les systèmes chaotiques	40
Figure 3.2. Système Qi sous forme interconnectée étendue compacte	41
Figure 3.3. Observateur interconnecté a grand gain	44
Figure4.1 Modèle Simulink : simulation du système de Qi et son observateur	57

Figure 4.2. Bloc Simulink du système de Qi	58
Figure 4.3. Blocs des matrices inverses de S_1 et S_2 .	59
Figure 4.4. Intégration des éléments de la matrice \hat{S}_1	60
Figure 4.5. Intégration des éléments de la matrice \hat{S}_2	60
Figure 4.6. Partie observateur interconnecté du modèle Simulink	62
Figure 4.7.a états estimés du sous-système 1 (z_2 - z_{31} - z_5)	63
Figure 4.7.b états estimés du sous-système 2 (z_1 - z_{32} - z_4 - z_6)	63
Figure 4.8. Blocs $e_i * S_i^{-1} C_i$	64
Figure 4.9 a) plans de phase et b) erreur de l'état x_1 et son estimé z_1	65
Figure 4.10. plans de phase et erreur de l'état x_2 et son estimé z_2	66
Figure 4.11. Plans de phase et erreur de l'état x_3 et ses estimés z_{31} et z_{32}	66
Figure 4.12. Plans de phase et erreur de l'état x_4 et son estimé z_4	67
Figure 4.13. Représentation du message d'entrée m_1 (en rouge) et du message reconstruit (en bleu)	68
Figure 4.14. Représentation du message d'entrée m_2 (en rouge) et du message reconstruit (en bleu).	69
Figure 4.15. Valeur de $\det(S_1^{-1})$ en fonction de t	70
Figure 4.16. Influence du gain sur la reconstruction a $t = 70$	70
Figure 4.17. Architecture de la carte DS1104	72
Figure 4.18. La carte de contrôle DSPACE DS1104	72
Figure 4.19. Exemple de l'interface du logiciel control desk	73
Figure 4.20. Illustration du Panneau de contrôle CP1104	73
Figure 4.21 résultats de la représentation des états et leurs estimates sur DSPACE	74
Figure 4.22 résultats de la représentation des plans de phase des états et leurs estimates sur DSPACE	75
Figure 4.23 résultats de la représentation des plans de phase des états et leurs estimates sur DSPACE	76
Figure 4.24 simulation de l'entrée x_5 et sa reconstruction z_5 sous dSPACE	77

Figure 4.25 simulation de l'entrée x_6 et sa reconstruction z_6 sous dSPACE	77
Figure 4.26 Acquisition des états (en bleu) et des estimates (en vert) par bloc DAC	78
Figure 4.27 représentation des états x_1 et x_2 en fonction de t	78
Figure 4.28 représentation des estimates z_1 et z_2 en fonction de t	79
Figure 4.29 plans de phases oscilloscope	79
Figure 4.30 plan de phase x_1 x_2 sous oscilloscope	80

Liste des tableaux

Tableau 3.1 : tableaux des déterminants des matrices S_1 et S_2	46
---	-----------

Introduction générale

En automatique, lorsque l'état d'un système n'est pas mesurable, on conçoit un observateur qui permet de le reconstruire à partir de la mesure des signaux accessibles. Les observateurs sont donc utilisés pour remplacer des capteurs qui sont parfois trop coûteux ou difficiles à réaliser ou à implanter. Ce sont des algorithmes fondés sur un modèle du système et utilisant une l'information disponible de façon judicieuse. Ces capteurs logiciels délivrent en temps réel une estimation des variables d'état mesurées ou non du système.

Le principe de l'observateur est d'utiliser une copie du système qui est corrigée à l'aide de l'erreur d'estimation pour reconstruire le vecteur d'état. L'estimation de l'état se fait en prenant en comptes les entrées connues du système et également ses sorties (les mesures) afin de corriger les écarts éventuels.

Le problème d'estimation d'état et de synthèse d'observateurs pour les systèmes dynamiques est un domaine de recherche qui a été abordé depuis les années soixante et qui reste actuellement un domaine très actif. En effet, le besoin d'estimation d'Etat est motivé par de nombreuses applications telles que la détection de défauts, la commande, l'identification, la synchronisation des systèmes chaotiques, etc [1].

La synchronisation des systèmes dynamiques a trouvé ses applications en théorie et en pratique et plusieurs types de synchronisation ont été distingués tels que l'auto-synchronisation qui se manifeste par les interactions internes entre les systèmes considérés et la synchronisation commandée qui nécessite une intervention externe pour forcer deux ou plusieurs systèmes dynamiques à se synchroniser. La synchronisation maître-esclave appartient à la catégorie de la synchronisation commandée, pour laquelle on dispose d'un système dominant (le système maître) qui impose son rythme à un second système (le

système esclave). Pendant les deux dernières décennies, la configuration maître-esclave a été appliquée avec succès, dans les systèmes de communication sécurisée basés sur la synchronisation des systèmes chaotiques où un émetteur chaotique (le système maître) génère un signal d'information chiffré transmis dans le canal de communication vers un système récepteur (le système esclave) qui a pour objectif de synchroniser avec l'émetteur et de restaurer le signal d'information. L'utilisation du chaos dans les applications de communication sécurisée est motivée par les propriétés des systèmes chaotiques qui sont des systèmes à aspects déterministes, à comportement complexe et qui sont caractérisés par une forte sensibilité aux conditions initiales et aux variations paramétriques. Le premier travail de recherche ayant suggéré une réponse à la question de synchronisation des systèmes chaotiques a été réalisé en 1990 par les chercheurs Pecora et Carroll [3] [4] qui ont réussi à synchroniser deux systèmes chaotiques maître et esclave en utilisant la méthode de décomposition en sous-systèmes [5]. Leurs travaux ont permis de suggérer que les systèmes chaotiques pourraient être utilisés dans la communication, où leur nature semblable aux bruits améliorerait la sécurité et le rejet des perturbations. En effet, une fois la synchronisation entre l'émetteur et le récepteur atteinte, il est possible de récupérer un message masqué par l'émetteur chaotique [6]

La théorie du chaos est une véritable théorie scientifique. Elle repose sur la représentation des solutions des équations différentielles dans l'espace des phases associé : représenter les solutions sous forme de trajectoire dans l'espace plutôt que l'une des variables en fonction du temps permet de révéler la structure sous-jacente : c'est ce qui conduit à affirmer que la théorie du chaos contribue à «trouver de l'ordre caché sous un désordre apparent.

Le travail présenté dans ce mémoire consiste à faire une étude détaillée d'un système chaotique de dimension 4 (Système de Qi). Ensuite, la synthèse d'un observateur interconnecté à grand gain adaptatif est effectuée permettant de reconstruire le vecteur d'état. Une analyse de la convergence de cet observateur utilisant la théorie de Lyapunov est détaillée. Les résultats de simulation sous Matlab/Simulink sont présentés. Finalement, une implémentation sur carte dSPACE est réalisée dans le but de confirmer les précédents résultats.

Ce mémoire se compose de quatre chapitres.

Chapitre 1 Système dynamique chaotique de Qi

1.1 Introduction

Introduit pour la première fois par le mathématicien Henri Poincaré, le modèle dynamique chaotique fut le sujet principal de son étude du phénomène des trois corps (deux planètes et une étoile), un comportement chaotique des orbites donna l'idée que ses comportements peuvent se produire à travers des conditions initiales.

Dans ce premier chapitre, nous allons d'abord introduire des notions permettant de mieux cerner les caractéristiques d'un système dynamique chaotique.

- Point fixe
- Exposant de Lyapunov
- Attracteur
- Section de Poincaré
- Diagramme de bifurcation

Puis nous présenterons une analyse du système hyper chaotique de Qi à l'aide des notions présentées auparavant.

1.2 Les systèmes dynamiques non linéaires

Un système dynamique consiste en un ensemble d'états possibles qui changent avec le temps. Une loi va déterminer de façon unique l'état présent du système en fonction de ses états passés. Aucun élément aléatoire n'est admis dans un système dynamique déterministe.

Dans les systèmes dynamiques non linéaires, l'évolution de chacun des états dépend de celle de plusieurs autres états et paramètres, et ce de façon non proportionnelle ou additive.

Les systèmes dynamiques non linéaires se caractérisent par le système d'équations différentielles suivant [7] :

$$\begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = f_1(x_1, x_2, \dots, x_n, u, P, t) \\ \frac{dx_2}{dt} = f_2(x_1, x_2, \dots, x_n, u, P, t) \\ \vdots \\ \frac{dx_n}{dt} = f_n(x_1, x_2, \dots, x_n, u, P, t) \end{cases} \quad (1.1)$$

Où : x représente le vecteur d'état de dimension n avec $x \in \mathbf{R}^n$ et P représente le vecteur paramètre du système où $\in \mathbf{R}^S$, et u représente le vecteur d'entrée $u \in \mathbf{R}^m$.

L'équation différentielle du système (1.1) est associée à un vecteur de sortie :

$$\begin{cases} \frac{dy_1}{dt} = g_1(x_1, x_2, \dots, x_n, u, P, t) \\ \frac{dy_2}{dt} = g_2(x_1, x_2, \dots, x_n, u, P, t) \\ \vdots \\ \frac{dy_n}{dt} = g_n(x_1, x_2, \dots, x_n, u, P, t) \end{cases} \quad (1.2)$$

Si le système dynamique ne dépend pas du temps de façon explicite on peut dire qu'il est autonome et s'écrit sous la forme :

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x, u) \\ \dot{y} = g(y, u) \end{cases} \quad (1.3)$$

Pour un système autonome, tout état à n'importe quel instant $t, x(t)$ peut être considéré comme état initial.

1.3 Point fixe

Le point fixe x_0 , aussi appelé le point d'équilibre, est défini par :

$$\left(\frac{dx}{dt}\right)_{x_0} = 0 \quad (1.4)$$

Il représente la position d'équilibre du système dynamique, ce qui veut dire que le système n'évolue pas dans le temps en ce point [7]

1.3.1 Stabilité au sens de Lyapunov

L'étude de la stabilité des points d'équilibre sert à l'étude locale des solutions sans avoir à résoudre les équations différentielles.

Soit le système suivant :

$$\dot{x}(t) = f(x(t)), \text{ pour } t \geq 0, f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n \quad (1.5)$$

f est une fonction supposé k -lipchitzienne et la solution de (1.4) $x(t_0) = x_0$ est définie sur un intervalle non borné et $x \in \mathbb{R}^n$.

$$\text{On suppose que : } f(\beta) = 0 \quad (1.6)$$

On se limitera au cas où f ne dépend pas du temps (autonome), on dit que β est stable si :

$$\forall \epsilon > 0, \exists \theta > 0 \text{ telque: } \|x(0) - \beta\| \leq \theta \rightarrow \|x(t) - \beta\| \leq \epsilon, \forall t \geq 0 \quad (1.7)$$

On dit que le point fixe est stable si toutes ses solutions voisines restent proches du point fixe lui-même.

Le point fixe est dit instable s'il ne vérifie pas la stabilité au sens de Lyapunov.

On dit que le point d'équilibre est asymptotiquement stable s'il est stable et si :

$$\exists \mu > 0 \text{ telque: } \|x(0) - \beta\| < \mu \rightarrow \lim_{t \rightarrow \infty} (x(t)) = \beta \quad (1.8)$$

La stabilité asymptotique nous permet de déterminer un voisinage de point fixe ainsi que toute trajectoire $x(0)$ appartenant à un voisinage de β tend vers β quand t tend vers l'infini.

Cependant, les définitions précédentes ont un inconvénient concernant les orbites proches de point d'équilibre. Pour cela, Lyapunov nous propose la méthode indirecte pour résoudre ce problème.

1.3.2 Stabilité par méthode indirecte de Lyapunov

Cette méthode consiste à qualifier la stabilité d'un point d'équilibre d'un système non-linéaire à travers les propriétés du système linéarisé autour de ce point d'équilibre.

En supposant que, par changement de coordonnées, le point fixe se ramené à l'origine :

$f(0) = 0$, et le développement de série de Taylor de f aux alentours du point $x = 0$ s'exprime par :

$$f(x) = Df(0)x - \frac{1}{2!} D^2 f(0)(x, x) + \frac{1}{3!} D^3 f(0)(x, x, x) - \dots + \frac{1}{n!} D^n f(0)(x, x, \dots, x_n) \quad (1.9)$$

Où $Df(x)$ est la matrice Jacobienne de $f(x)$ autour du point fixe $x=0$ et s'écrit sous la forme :

$$Df(x) = \left(\frac{df_i(x)}{dx_j} \right) \quad (1.10)$$

Afin de pouvoir étudier la stabilité autour d'un point d'équilibre, la méthode indirecte de Lyapunov consiste à étudier le système linéaire suivant :

$$\dot{x} = Df(0)x \quad (1.11)$$

Ou :

$$Df(0) = \begin{bmatrix} \frac{df_1}{dx_1} & \dots & \frac{df_1}{dx_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{df_n}{dx_1} & \dots & \frac{df_n}{dx_n} \end{bmatrix}_{x=0} \quad (1.12)$$

Dans le cas où la matrice possède n valeur propres ($\lambda_i, i = 1, 2, 3, \dots, n$) et la solution de (1.12) s'exprime par :

$$x = \sum_{i=1}^n c_i a^{(i)} \exp(\lambda_i t) \quad (1.13)$$

Ou $a^{(i)}$ est me vecteur propre correspondant à la valeur propre λ_i et les $c_i, i = 1, 2, 3, \dots, n$, sont des constantes (déterminées par les conditions initiales).

Selon les valeurs propres $\lambda_i, i = 1, 2, 3 \dots n$, on peut déduire la stabilité du point d'équilibre $x=0$ ce qui suit :

1. Si toutes les valeurs propres λ_i ont leur partie réelle négative, le point fixe est asymptotiquement stable.
2. Si une ou plusieurs valeurs propres sont des imaginaires pures, les autres valeurs propres ayant leur partie négative, le point fixe est un centre ou un point elliptique (stable mais pas asymptotiquement stable).
3. Si l'une des valeurs propres a sa partie réelle positive, le point fixe est instable.
4. Si $Df(0)$ n'a pas de valeur propre nulle ou purement imaginaire, le point fixe est un point hyperbolique, dans le cas contraire il est non hyperbolique.
5. S'il existe i et j tel que : $\Re(\lambda_i) < 0$ et $\Re(\lambda_j) > 0$, le point fixe est un point selle.

Si toutes les valeurs propres de $Df(0)$ sont réelles et de même signe, le point fixe est un nœud. Un nœud stable est un puits. Un nœud instable est une source.

1.4 La théorie du chaos

La théorie du chaos est l'étude qualitative du comportement aperiodique instable d'un système dynamique non linéaire déterministe [8]. Bien que la plupart des sciences traditionnelles traitent de phénomènes supposés prévisibles tels que la gravité, l'électricité ou des réactions chimiques, la théorie du chaos traite de choses non linéaires qu'il est effectivement impossible de prévoir ou de contrôler, comme la turbulence, la météo, le marché boursier, nos états cérébraux, etc. Ces phénomènes sont souvent décrits par les mathématiques fractales, qui capturent l'infinie complexité de la nature. De nombreux objets naturels présentent des propriétés fractales, y compris des paysages, les nuages, les arbres, les organes, les rivières, etc., et bon nombre des systèmes dans lesquels nous vivons présentent un comportement complexe et chaotique. Reconnaître la nature chaotique et fractale de notre monde peut nous donner une nouvelle vision, un nouveau pouvoir. Par exemple, en comprenant la dynamique complexe et chaotique de l'atmosphère, un pilote de ballon peut « diriger » un ballon vers l'endroit souhaité. En comprenant que nos écosystèmes, nos systèmes sociaux et nos systèmes économiques sont interconnectés, nous pouvons espérer éviter des actions qui pourraient nuire à notre bien-être à long terme.

1.4.1 Caractéristiques d'un système chaotique

Dû à la complexité et l'imprévisibilité des systèmes chaotiques, ils donnent l'impression de n'être fondés sur aucune loi, mais tous les systèmes chaotiques ont des caractéristiques en commun qui nous permettent de mieux les comprendre, et donc de mieux les contrôler.

- Un système chaotique est forcément non linéaire déterministe, et donc non aléatoire.
- Un système chaotique a un comportement apériodique, ce qui justifie son aspect aléatoire.
- Un système chaotique est très sensible aux conditions initiales [9], et donc impossibles de prédire à long terme.
- Un système chaotique possède obligatoirement un attracteur étrange.

1.5 Espace de phase

On définit le système autonome suivant :

$$\frac{dx}{dt} = f(x(t)), x \in R^n, \text{ pour } t \geq 0 \quad f \in R^n. \quad (1.14)$$

Définition : soit $x(x_0, t), x_0 \in R^n$, une solution de (1.14) avec comme condition initiale $x(0) = x_0$, on définit le flot de (1.14) par :

$$\varphi_t(t) = x(x_0, t) \quad (1.15)$$

L'espace de phase se définit comme étant l'espace des degrés de liberté où la trajectoire est tracée, cet espace se caractérise par n dimensions $(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n)$.

Le but de tracer la trajectoire dans l'espace de phase est de représenter graphiquement l'évolution du système étudié en éliminant le temps.

1.6 Exposant de Lyapunov

C'est le mathématicien Alexander Lyapunov qui s'est intéressé au cas de certains systèmes dynamiques, pour qui une variation très faible de leur condition initiale pouvait prendre d'énormes proportions. Lyapunov a introduit un outil de mesure de la vitesse à laquelle ces petites variations peuvent s'amplifier, cet outil porte son nom « exposant de Lyapunov »

$$|z_2| = e^{\lambda \Delta t} |z_1| \quad (1.16)$$

Où Z représente le taux de divergence, et Δt le temps entre z_2 et z_1 .

Un système sensible à de très petites variations des conditions initiales aura une quantité λ positive, générant ainsi le régime chaotique.

A l'inverse, la quantité λ sera négative si de petites variations des conditions initiales n'ont aucun effet à long terme sur le système.

1.6.1 Type d'attracteur en fonction de l'exposant de Lyapunov

Les exposants de Lyapunov nous permettent de trouver le type d'attracteur généré par le système :

Pour : $\lambda_n < \dots < \lambda_2 < \lambda_1 < 0$: point fixe.

Pour : $\lambda_1 = 0, \lambda_n < \dots < \lambda_2 < 0$: l'attracteur est une orbite fermée.

Pour : $\lambda_1 = \lambda_2 = 0, \lambda_n < \dots < \lambda_3 < 0$: l'attracteur est quasi-périodique avec 2 fréquences.

Pour : $\lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_k, \lambda_n < \dots < \lambda_{k+1} < 0$: l'attracteur est quasi-périodique avec k fréquences.

Pour : $\lambda_1 > 0, \sum_{i=1}^n \lambda_i < 0$: l'attracteur est chaotique.

Pour : $\lambda_1 > \lambda_2 > \dots > \lambda_k > 0, \sum_{i=1}^n \lambda_i < 0$: l'attracteur est hyper chaotique.

1.7 Attracteur

Un attracteur est un espace vers lequel l'état d'un système va converger en l'absence de perturbations.

On dit que Ω est un attracteur si : Pour tout voisinage U de Ω , il existe un voisinage V de Ω tel que toute solution $x(x_0, t)$ restera dans U si $x_0 \in V$. [7]

Il existe deux attracteurs différents :

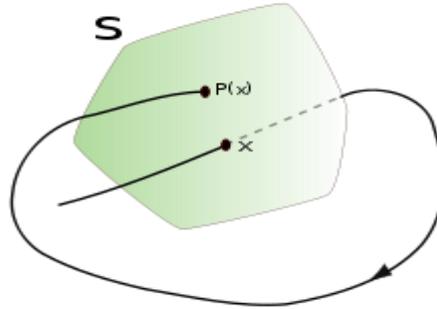
- **Attracteur régulier** est un attracteur non chaotique, c.-à-d. que toutes les trajectoires initialement proches resteront proches dans l'espace de phase (point fixe, cycle limite périodique, cycle limite pseudopériodique).
- **Attracteur étrange**, géométriquement peut être décrit comme le résultat d'opérations d'étirement et de repliement d'un cycle de l'espace des phases, répété un nombre infini de fois. La "longueur" de l'attracteur est infinie, bien qu'il soit contenu dans un espace fini. Il est associé aux systèmes chaotiques. Il est caractérisé par :
 - La dimension d de l'attracteur est fractal (non-entière) avec $0 < d < n$, où n est la dimension de l'espace des phases.
 - L'attracteur est de volume nul dans l'espace des phases
 - Deux trajectoires de l'attracteur initialement voisines finissent par s'écartier exponentiellement.

1.8 Section de Poincaré

Pour observer les trajectoires d'un attracteur, il est parfois utile de réduire la dimension n de l'espace de phase, la section de Poincaré est l'interaction d'une trajectoire dans l'espace d'au moins trois dimensions avec un hyperplan Σ d'une dimension inférieure $n-1$. On passe alors d'un système à temps continu à un système à temps discret.

Soit $T : \mathbb{R}^{n-1} \rightarrow \mathbb{R}^{n-1}$ l'application continue transformant un point en son suivant sur la section de Poincaré. On a, pour une trajectoire quelconque, la relation de récurrence suivante :

$$P_k = T(P_{k-1}) \quad (1.17)$$



Figures 1.1. Section de Poincaré

Où P représente les points d'interaction avec l'hyperplan Σ , on passe alors d'un système à temps continu à un système à temps discret.

Le résultat est interprété comme suit :

- Un seul point : le système est périodique
- Un nombre limité de point : le système est périodique
- Une courbe fermée : le système est quasi-périodique
- Un grand nombre de point (nuage) : le système est chaotique

1.9 Bifurcation

Le comportement des systèmes non-linéaires dépend crucialement de leurs paramètres de contrôle. Avant de devenir chaotique, ces systèmes présentent des changements brutaux de comportement. On dit alors qu'une bifurcation se produit à chaque changement [10].

Soit les équations différentielles d'un système :

$$\dot{x}(t) = f(x(t), \mu) \quad (1.18)$$

Le système (1.18) a une bifurcation à la valeur $\mu = \mu_c$, s'il y a un changement de la structure de la trajectoire tel que le paramètre μ dépasse la valeur μ_c . En d'autres termes, il y a un changement dans le nombre et/ou la stabilité des points fixes du système à la valeur de bifurcation μ_c .

1.9.1 Bifurcation nœud de col

$$\dot{x} = \mu - x^2 \quad (1.19)$$

Pour $\mu > 0$, le système possède deux points fixes, le premier stable $Df(-\sqrt{\mu}, \mu) = -2\sqrt{\mu} < 0$, et le deuxième instable $Df(\sqrt{\mu}, \mu) = 2\sqrt{\mu} > 0$.

Pour $\mu < 0$, le système n'a pas de point fixe

Pour $\mu = 0$, $Df(0, 0) = 0$ un point fixe non hyperbolique

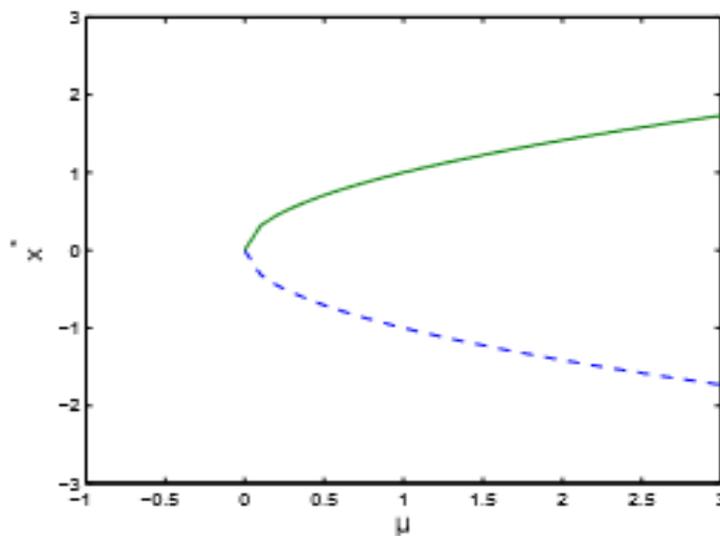


Figure1.2. Bifurcation nœud de col à $\mu = 0$

1.9.2 Bifurcation Trans critique

$$\dot{x} = \mu x - x^2 \quad (1.20)$$

L'équation possède deux point fixes : $x^* = 0$ et $x^* = \mu$.

A $x^* = 0$ on a $Df(0, \mu) = \mu$, ce qui veut dire que le point fixe est stable pour $\mu < 0$ et instable pour $\mu > 0$

A $x^* = \mu$. On a $Df(\mu, \mu) = -\mu$, ce qui implique que le point fixe est stable pour $\mu > 0$ et instable pour $\mu < 0$.

Alors que pour $\mu = 0$ le système n'a qu'un seul point fixe, $x^* = 0$.

Dans ce système on va parler de bifurcation trans-critique a $\mu = 0$, puisqu'au passage de ce point, les points fixe vont échanger leur stabilité.

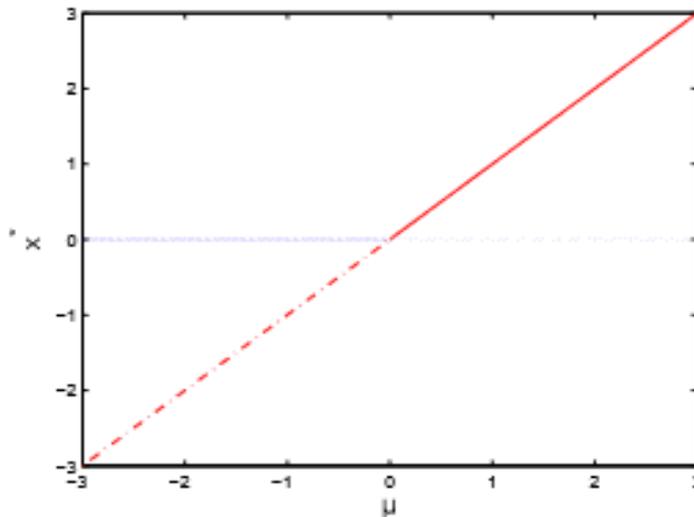


Figure1.3. Bifurcation trans critique à $\mu = 0$

1.9.3 Bifurcation pitchfork

$$\dot{x} = \mu x - x^3 \quad (1.21)$$

Si $\mu > 0$ l'équation possède trois point fixe $\begin{cases} x^* = 0 \\ x^* = \sqrt{\mu} \\ x^* = -\sqrt{\mu} \end{cases}$

Nous avons $Df(x, \mu) = \mu - 3x^2$, donc : $\begin{cases} Df(0, \mu) = \mu \text{ est instable} \\ Df(\pm\sqrt{\mu}, \mu) = -2\sqrt{\mu} \text{ sont stable} \end{cases}$

Si $\mu < 0$, le système n'a qu'un seul point fixe $x^* = 0$ et il est stable $Df(0, \mu) = \mu < 0$.

Si $\mu = 0$, le système n'a encore une fois qu'un seul point fixe mais c'est un point fixe non hyperbolique $Df(0, 0) = 0$.

On constate que dans ce cas le système est stable et subit une bifurcation fourche à $\mu = 0$.

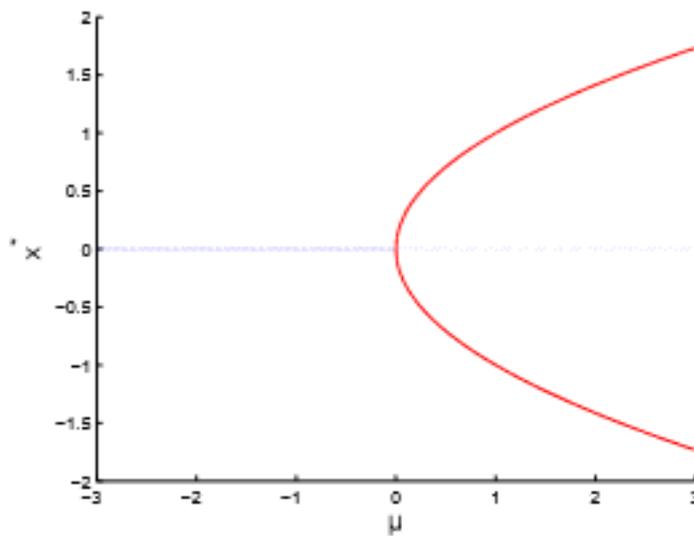


Figure1.4. Bifurcations fourche à $\mu = 0$

1.9.4 Bifurcation de Hopf

Une bifurcation de Hopf se produit lorsqu'une solution périodique ou un cycle limite entourant un point d'équilibre apparaît ou disparaît lorsqu'un paramètre μ varie. Lorsqu'un cycle limite stable entoure un point d'équilibre instable, la bifurcation est appelée une bifurcation de Hopf supercritique. Si le cycle limite est instable et entoure un point d'équilibre stable, la bifurcation est appelée une bifurcation de Hopf sous-critique.

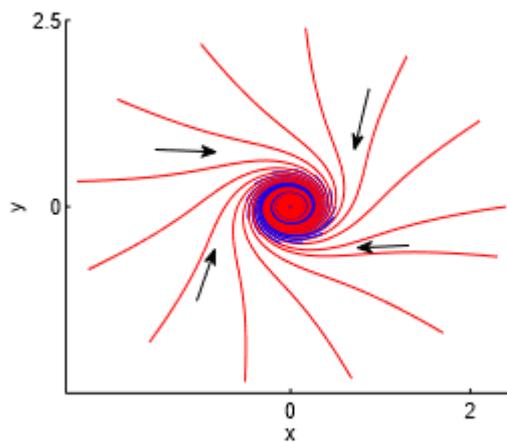


Figure 1.5. Bifurcations pour $\mu = 0$ un point fixe stable

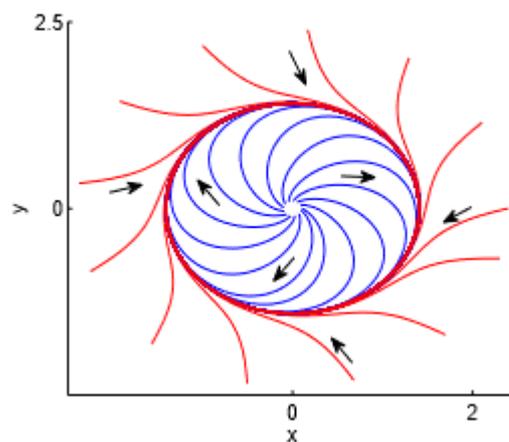


Figure 1.6. Bifurcations pour $\mu = 0$ un point fixe instable

1.10 Présentation du système de Qi

Le modèle suivant représente le système dynamique non linéaire de Qi [2] :

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = a(x_2 - x_1) + x_2 x_3 \\ \dot{x}_2 = b(x_1 + x_2) - x_1 x_3 \\ \dot{x}_3 = -c x_3 - e x_4 + x_1 x_2 \\ \dot{x}_4 = f x_3 - d x_4 + x_1 x_3 \end{cases} \quad (1.22)$$

Ou $x_i \in \mathbb{R}$ pour $i = 1, 2, 3, 4$ représente les variables d'états, et a, b, c, d, e et f sont des paramètres positifs constants du système.

Pour que ce système montre un comportement hyper chaotique les paramètres sont choisis comme :

$$a=42.5, b=24, c=13, d=20, e=50, f=40.$$

1.10.1 Calcul point fixe

Pour cela il faut résoudre le système suivant :

$$\frac{dx}{dt} = 0$$

C'est-à-dire :

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = a(x_2 - x_1) + x_2 x_3 = 0 \\ \dot{x}_2 = b(x_1 + x_2) - x_1 x_3 = 0 \\ \dot{x}_3 = -c x_3 - e x_4 + x_1 x_2 = 0 \\ \dot{x}_4 = f x_3 - d x_4 + x_1 x_3 = 0 \end{cases} \quad (1.23)$$

La solution $x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = 0$ détermine un point d'équilibre à l'origine.

Pour étudier la stabilité de notre point fixe, on doit résoudre l'équation caractéristique :

$$\det(Df(0\ 0\ 0\ 0) - \lambda I) = 0 \quad (2.24)$$

Ou Df représente la matrice jacobéenne a l'origine

$$Df = \begin{bmatrix} -a & a & 0 & 0 \\ b & b & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -c & -e \\ 0 & 0 & f & -d \end{bmatrix}$$

Et λI représente la matrice carrée

$$\lambda I = \begin{bmatrix} \lambda & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda \end{bmatrix}$$

Avec I la matrice identité

L'équation (2.24) peut s'écrire sous la forme :

$$[(-a - \lambda)(b - \lambda) - ba][(c + \lambda)(d + \lambda) + fe] = 0$$

La résolution de l'équation caractéristique nous donne les valeurs propres suivantes :

$$\lambda_1 = -55.3538, \lambda_2 = 36.8538, \lambda_3 = -16.5000 - i44.5842, \lambda_4 = -16.5000 + i44.5842.$$

Pour quatre valeurs propre, trois sont à parties réelles négatives et un seul a partie réelle positive. Ce qui veut dire que nous avons un point d'équilibre instable.

1.11 Etude du système de Qi

Dans cette partie nous avons utilisé Matlab Simulink pour pouvoir simuler son comportement et visualiser les états x_i , les plans de phase et l'attracteur du système hyper chaotique de Qi, et ainsi vérifier les différentes propriétés d'un système chaotique.

Nous commençons d'abord par réaliser le système

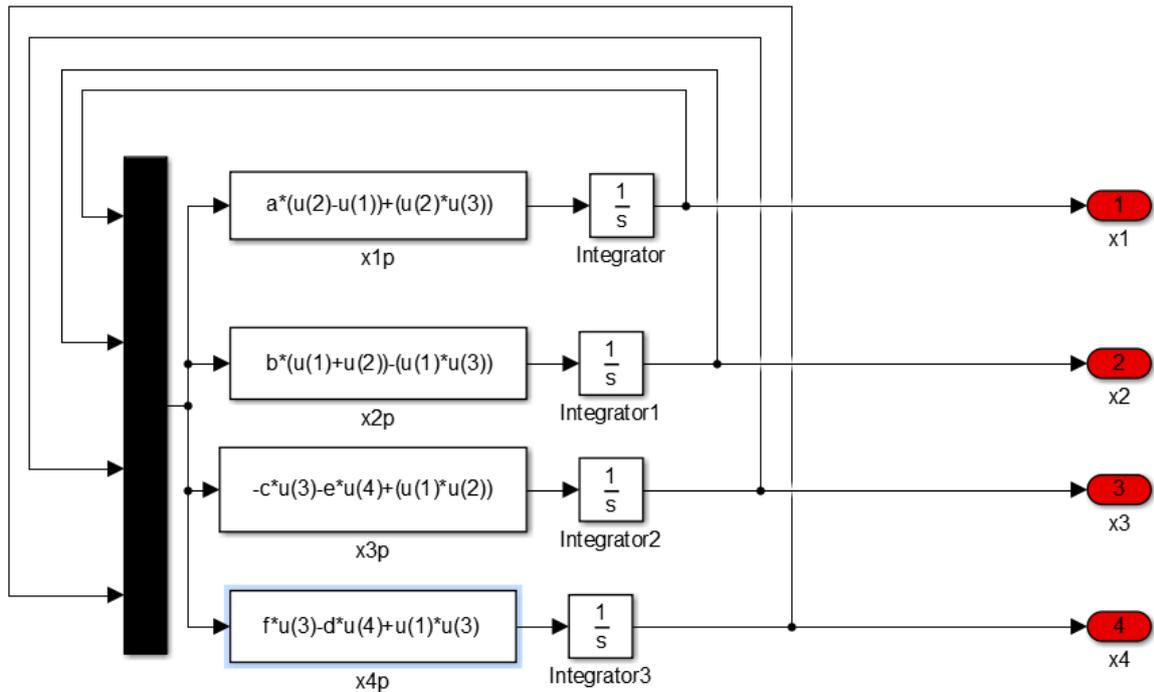


Figure1.7. Système Qi sous Matlab Simulink

1.11.1 Aspect aléatoire

On remarque que le système de Qi montre une évolution complexe, non périodique et imprévisible pour tous ces états, c'est l'aspect aléatoire des système chaotiques.

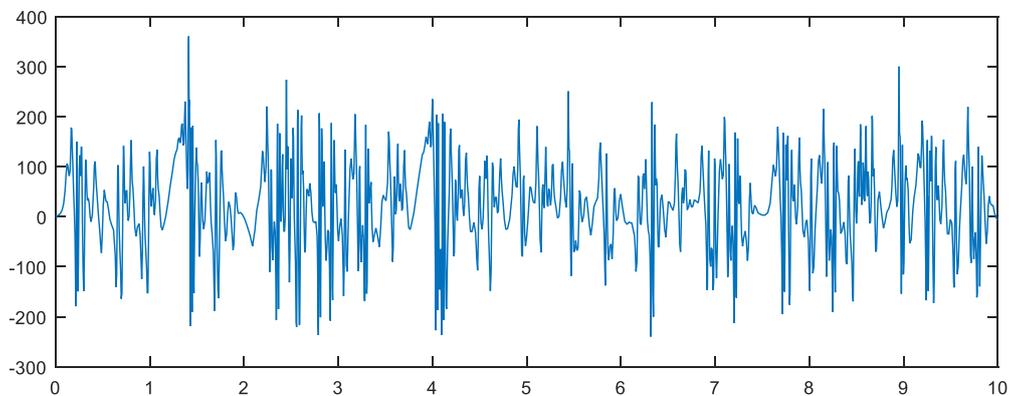


Figure1.8. Evolution de x_1 en fonction du temps

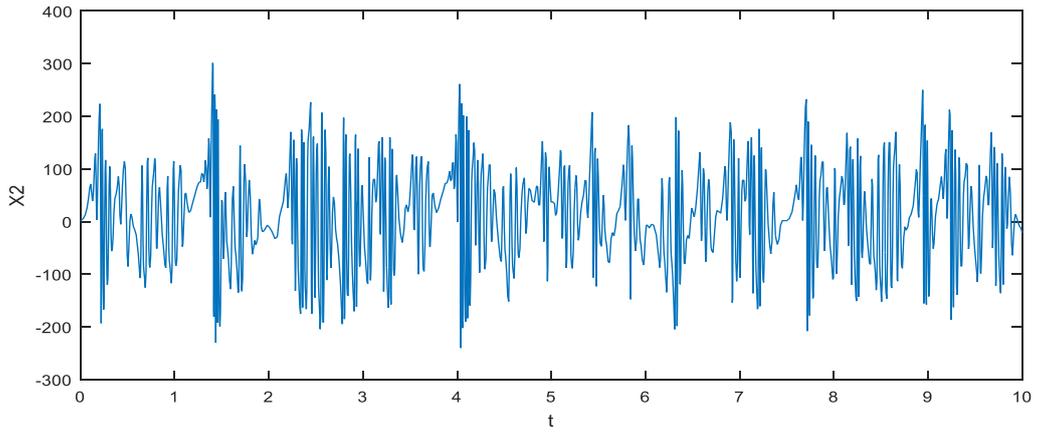


Figure1.9. Evolution de x_2 en fonction du temps

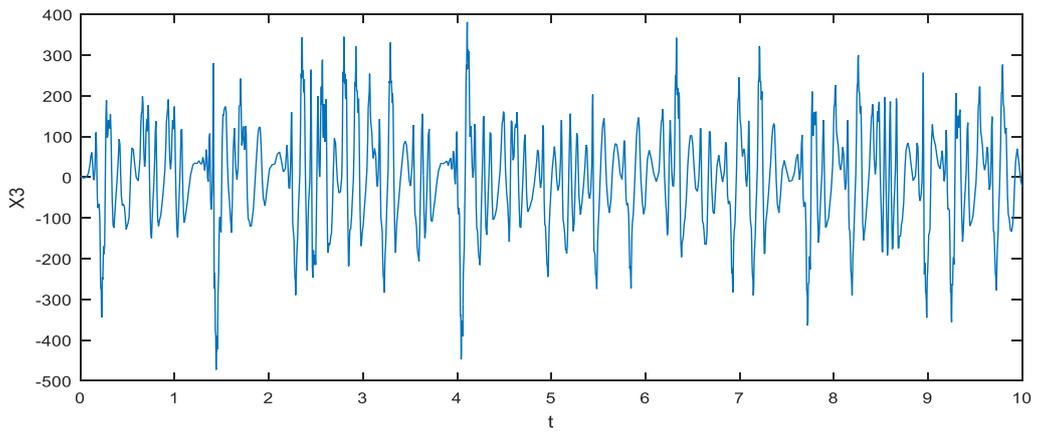


Figure1.10. Evolution de x_3 en fonction du temps

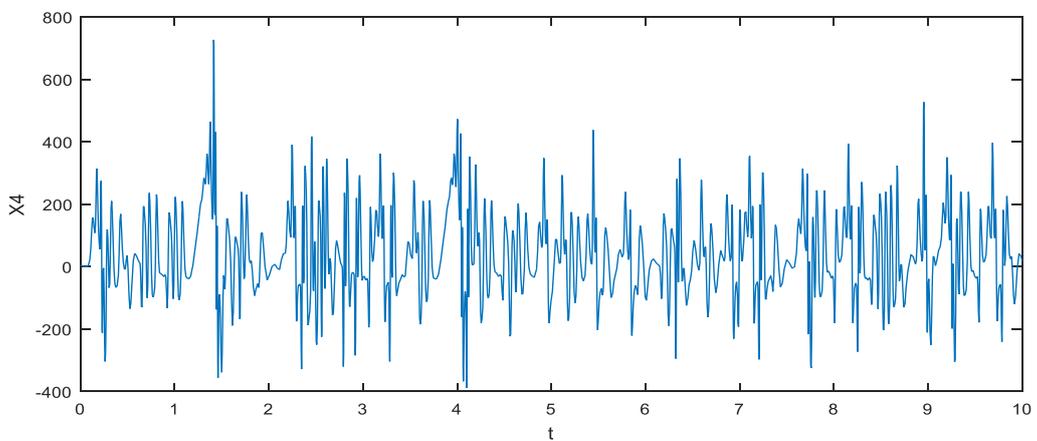


Figure1.11. Evolution de x_4 en fonction du temps

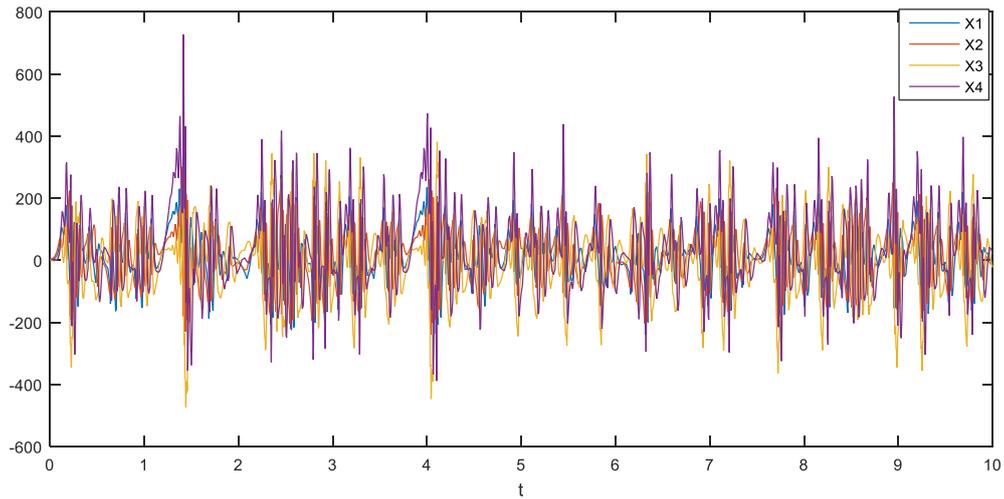


Figure 1.12. Evolution de l'ensemble des états en fonction du temps

1.11.2 Sensibilité aux conditions initiales

Pour vérifier cette propriété nous avons modifié la variable initiale de x_1 pour $x'_1(t_0) = 1.01$ (anciennement 1), tout en gardant les mêmes paramètres.

On remarque qu'après un temps très faible toutes les variables d'états divergent, et que cette divergence devient plus importante avec le temps.

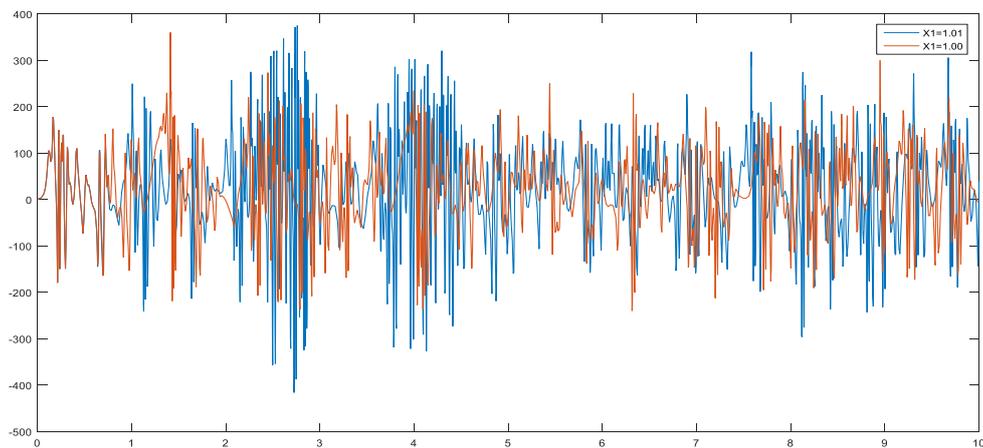


Figure 1. 13. Evolution de x_1 et x'_1 en fonction du temps

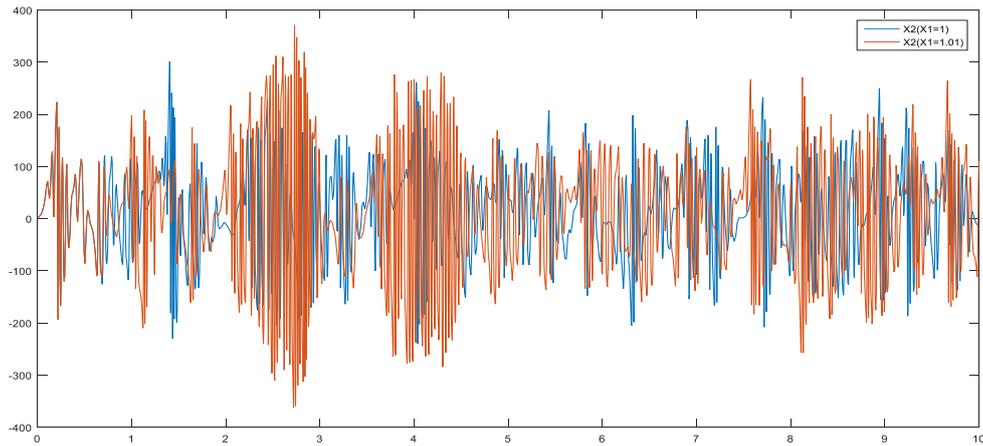
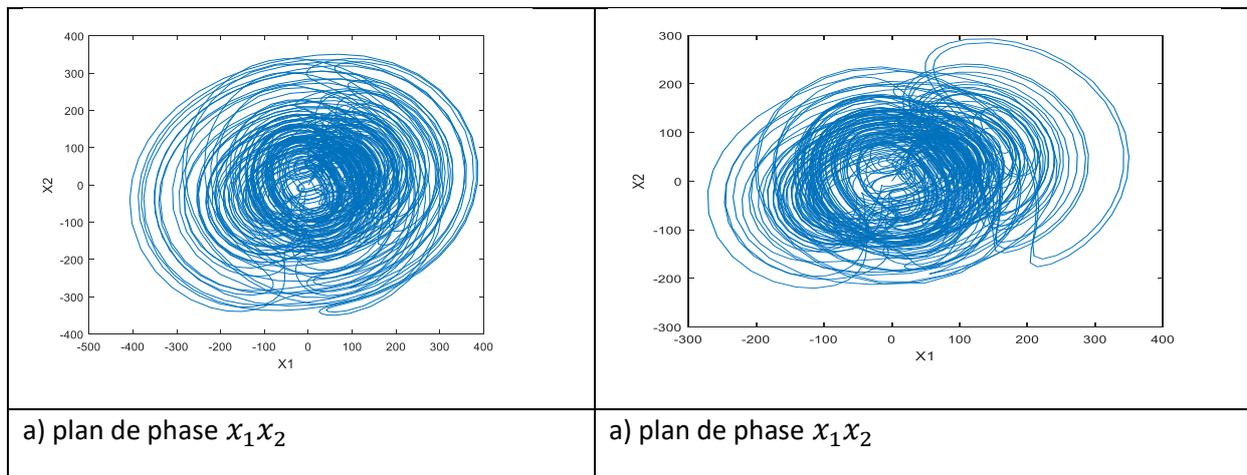
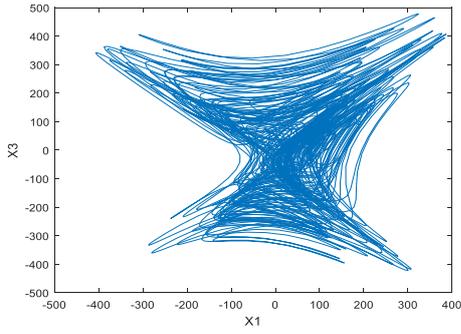


Figure 1.14. Evolution de x_2 avant et après le changement de x_1 en fonction du temps

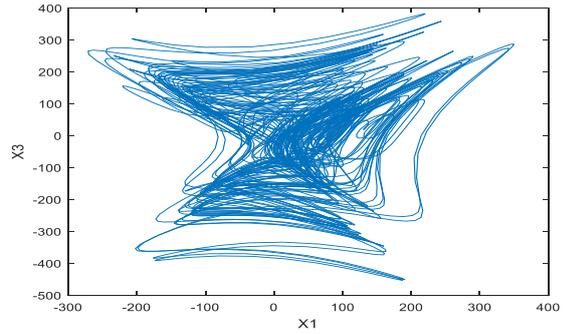
1.11.3 Plan de phase

Les figures ci-dessous représentent le plan de phase des états du système de Qi, avec à gauche $x_1(0) = 1$ et à droite $x_1(0) = 1.01$, on aperçoit ici que le changement est très marqué malgré, un très faible changement de x_1 initial, ce changement sera tout aussi important si on modifie très légèrement un paramètre statique comme b.

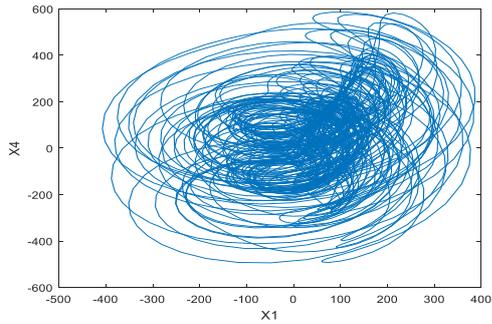




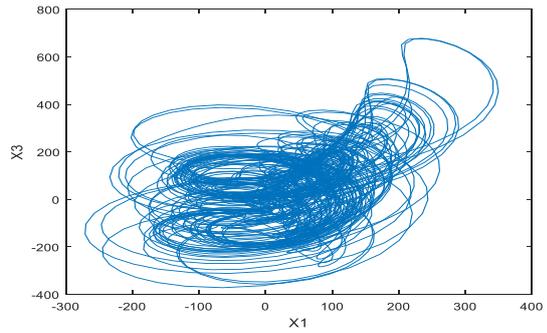
a) plan de phase x_1x_3



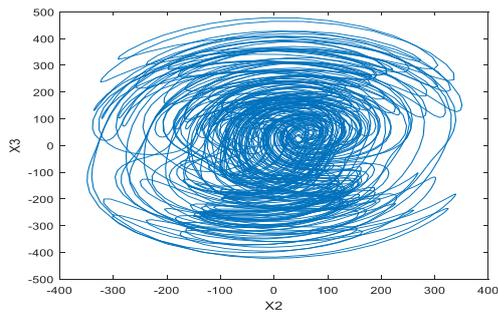
a) plan de phase x_1x_3



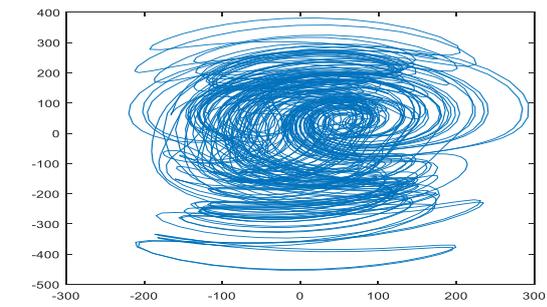
a) plan de phase x_1x_4



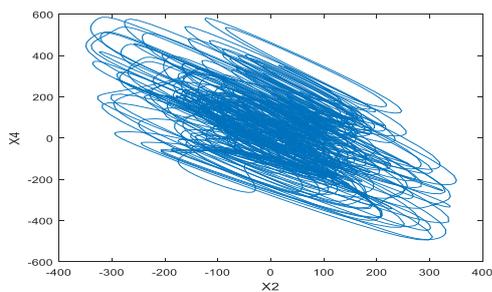
a) plan de phase x_1x_4



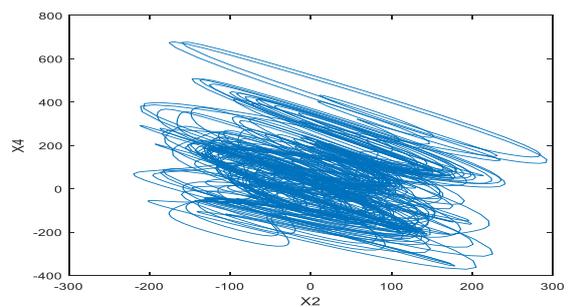
a) plan de phase x_2x_3



a) plan de phase x_2x_3



a) plan de phase x_2x_4



a) plan de phase x_2x_4

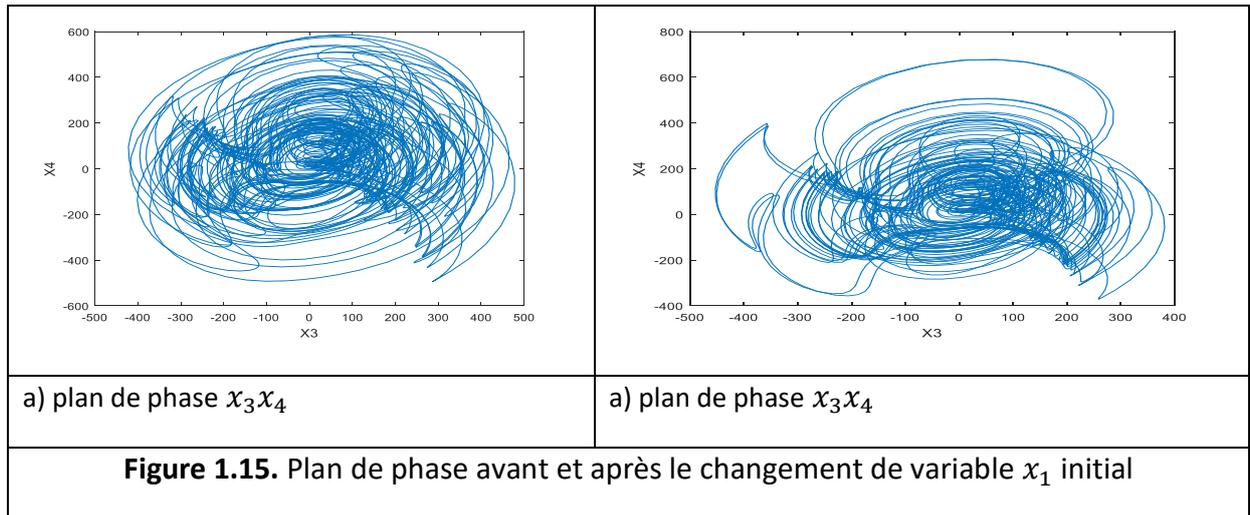


Figure 1.15. Plan de phase avant et après le changement de variable x_1 initial

1.12 Evolution des exposants de Lyapunov

Avec l'aide de Matds, outil de MATLAB pour l'étude des systèmes dynamiques, on va visualiser les exposants de Lyapunov de notre système. Pour $x_1 = 1$ et $x_2 = x_3 = x_4 = 0$ comme condition initiale.

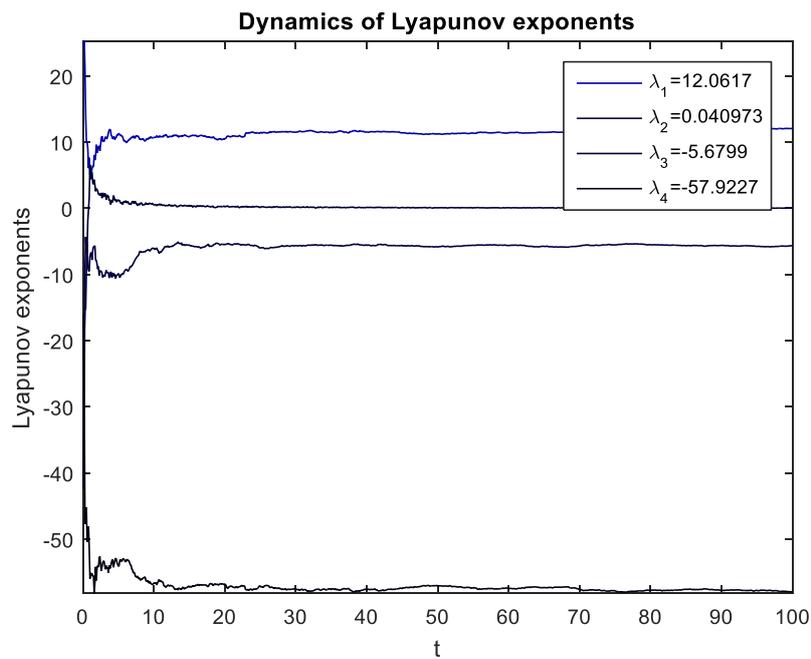


Figure1.16. Evolution des exposants de Lyapunov du système de Qi

On remarque quatre exposants, ce qui correspond aux quatre équations différentielles qui composent notre système, deux sont positifs.

Pour qu'un système soit considéré hyper chaotique il faut qu'au moins deux exposants soient positifs, et que la somme de tous les exposants de Lyapunov soit négative.

$$\sum_1^4 \lambda_i = -51.499927$$

Donc notre système remplit les conditions d'un système hyper chaotique (attracteur hyper chaotique).

1.13 Attracteur et section de Poincaré

Les figures ci-dessous représentent l'attracteur du système hyper chaotique de Qi .

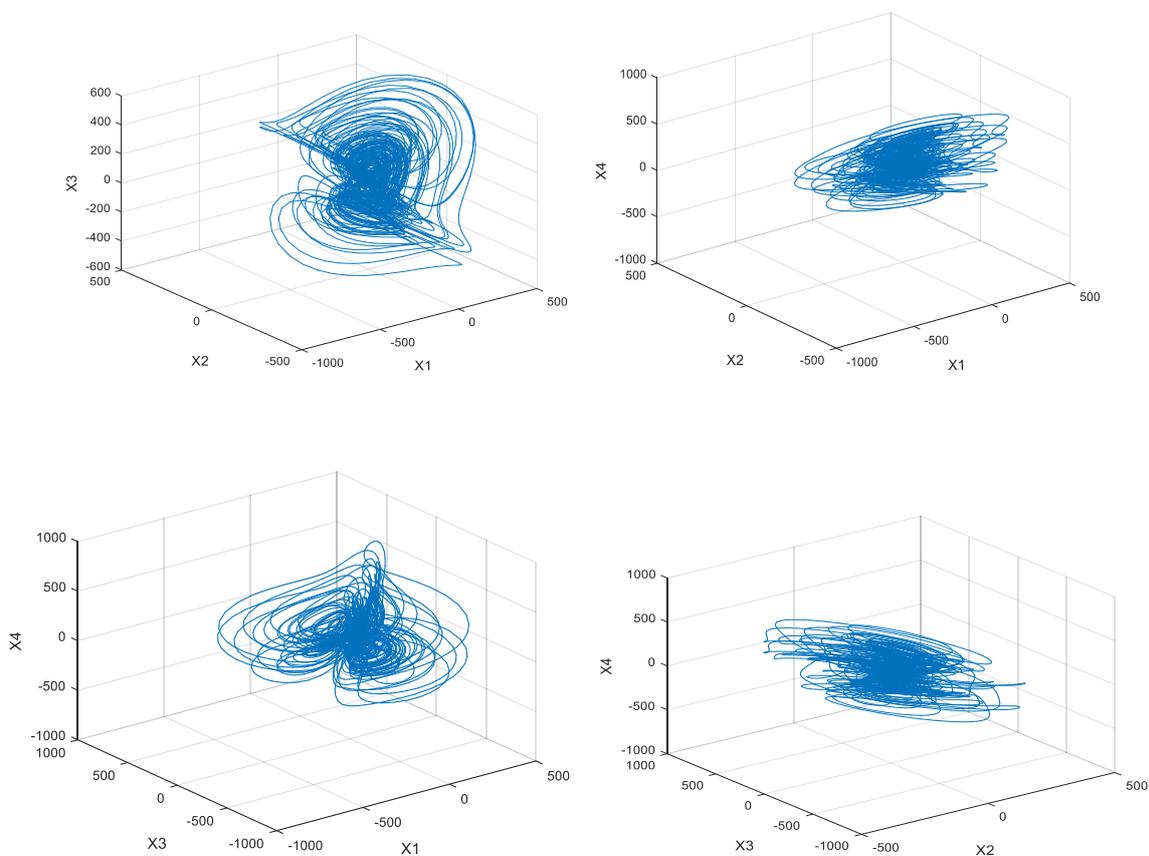


Figure1.17. Attracteurs du système de Qi

La Figure (1.18) est un attracteur du système, on a appliqué une section de Poincaré avec x_1 comme hyperplan pour arrive à la Figure (1.19).

Sur la Figure (1.19) on remarque un nombre de points important ce qui montre encore une fois que le système a un comportement chaotique.

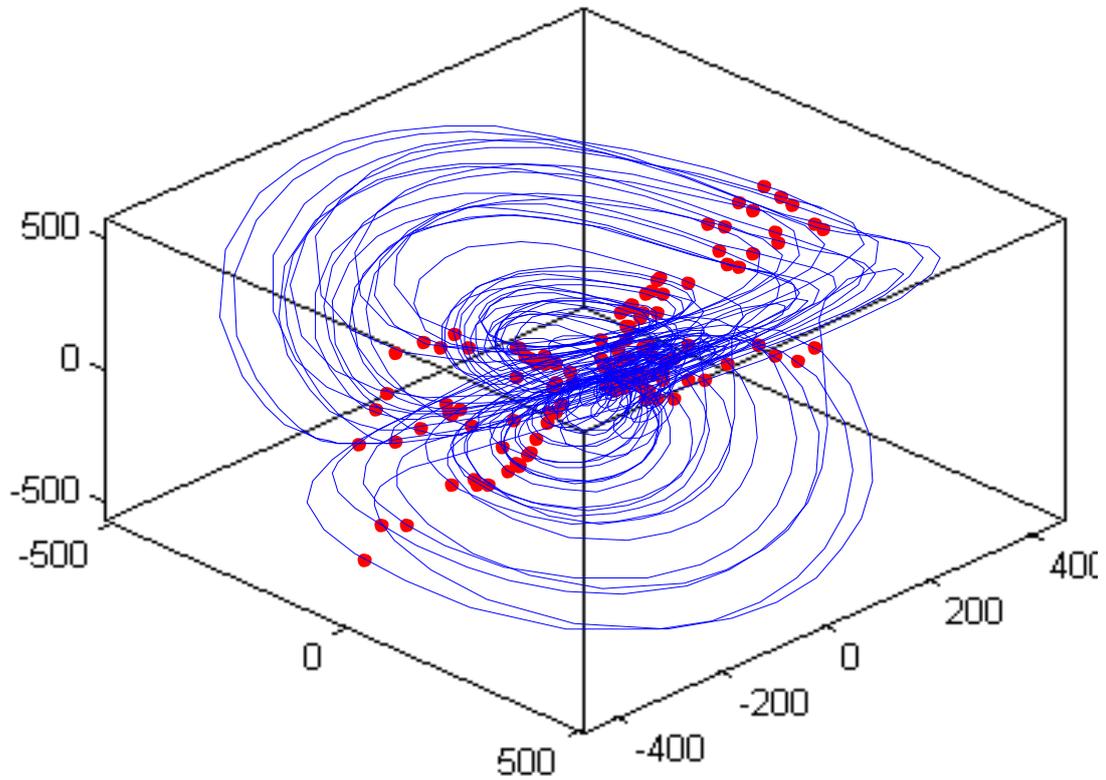


Figure1.18. Plan de phase $x_1x_2x_3$ du système de Qi

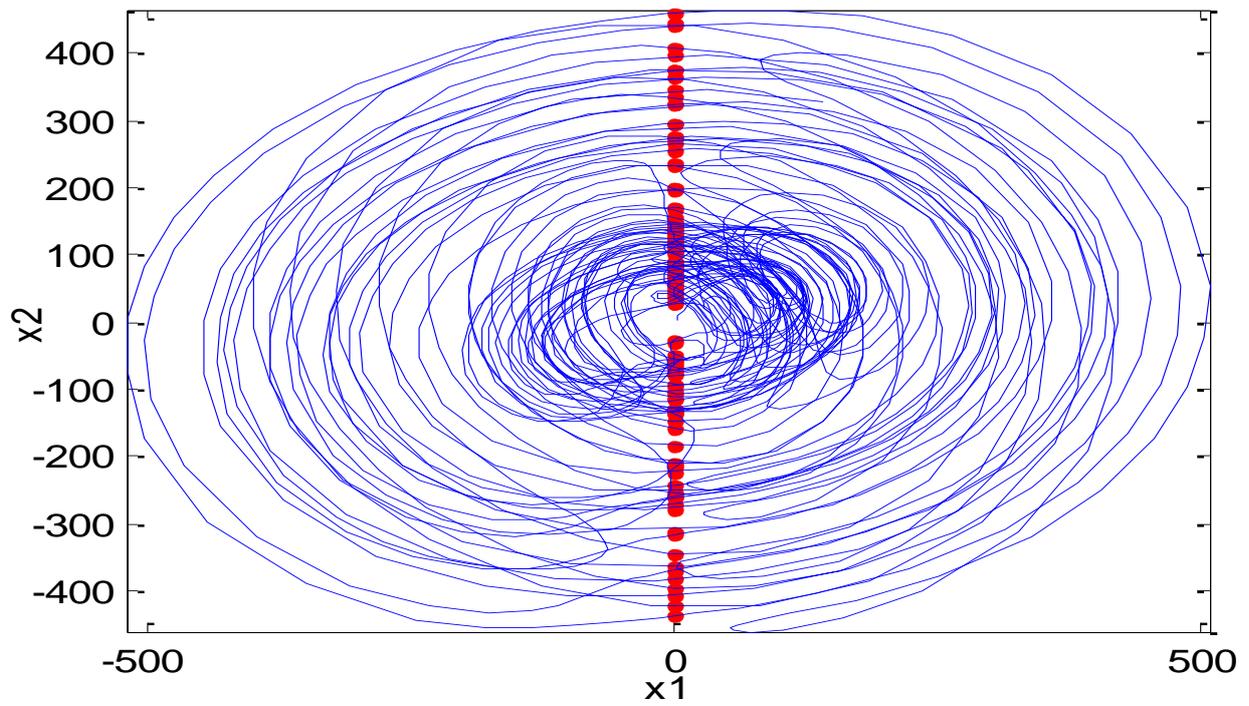


Figure1.19. Hyperplan x_1

1.14 Bifurcation du système

Pour notre tracé du diagramme de bifurcation on a choisi la variable b , le résultat est montré sur la Figure (1.20).

Pour $0 \leq b < 4$ le système possède un seul point fixe

Pour $b = 4$ le point fixe se déstabilise et une deuxième période (cycle d'ordre 2) apparait.

Pour $b > 10$ le système devient chaotique.

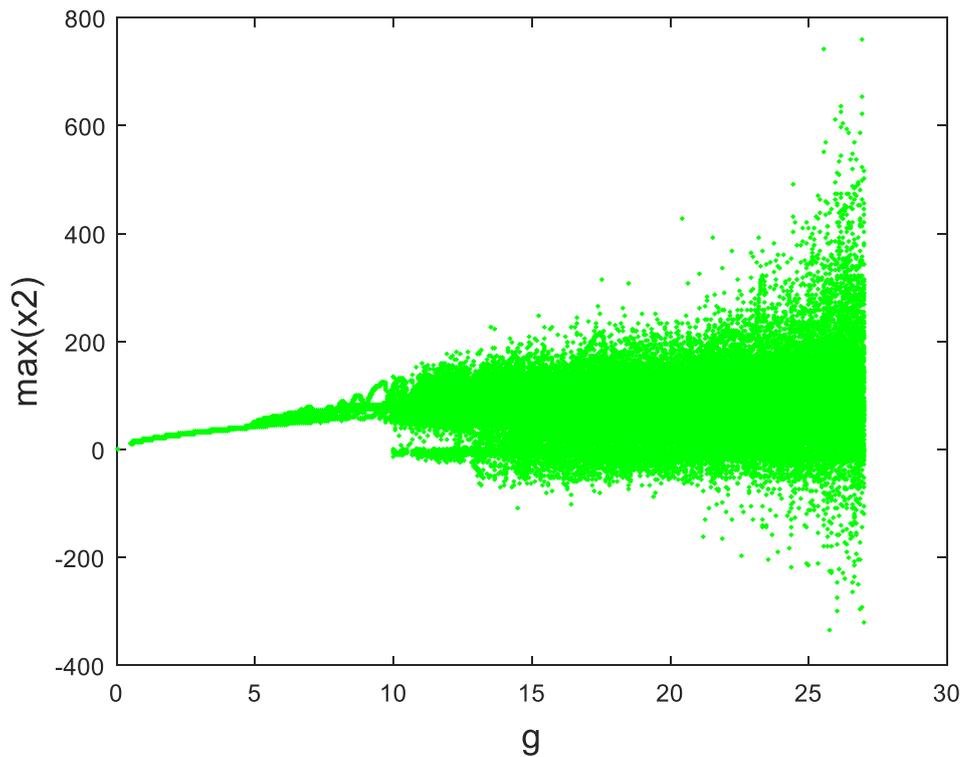


Figure 1.20. Diagramme de bifurcation du système de Q_i pour $b = [0-27]$

1.15 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons défini ce qu'est la théorie du chaos, les principales caractéristiques d'un système chaotique et les outils permettant d'étudier celle-ci, puis nous avons présenté le système de Q_i utilisé dans notre projet, et réalisé une analyse du système en appliquant les outils présentés auparavant, c.-à-d. : plan de phase, point fixe, bifurcation, exposant de Lyapunov.

Dans le chapitre suivant, on va définir le principe d'un observateur, et les conditions nécessaires à son observabilité.

Chapitre 2 L'observabilité et les observateurs

2.1 Introduction

En général, pour des raisons techniques et économiques, l'état du système n'est pas complètement accessible. En effet, la complexité de la réalisabilité technique ainsi que des coûts prohibitifs pour l'implantation de plusieurs capteurs peuvent réduire considérablement le nombre d'états mesurés. On peut alors considérer que, pour la grande majorité des systèmes, la dimension du vecteur d'état est supérieure à celle du vecteur de sortie. Par conséquent, il est important de développer des méthodes pour obtenir des estimations fiables des autres variables d'états, à partir de mesures d'une seule sortie. Alternativement, dans une perspective différente, détermine d'autres variables d'état, non mesurables, des variables d'état, voire des fonctions de variables d'état que nous pourrions être intéressés à estimer. C'est un problème très concret qui, bien sûr, a déjà été abordé. Le problème de l'observateur est en fait une branche bien développée de la théorie du contrôle, pour laquelle une solution complète existe pour les systèmes linéaires [11], alors que les résultats ne sont que partiels pour les systèmes non linéaires [12].

Dans ce chapitre nous allons présenter des notions d'observabilité pour système linéaire et non linéaire, pour ensuite l'appliquer à notre système, enfin nous introduirons une approche d'estimateurs d'état, l'observateur grand gain.

2.2 Principe d'un observateur

2.2.1 Définition

Un observateur d'état est un capteur logiciel qui permet de retrouver des variables d'état d'un système à partir des entrées et des sorties mesurées du système réel [13].

2.2.2 Fonctionnement d'un observateur

Pour un système de la forme :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) = Cx(t) \end{cases} \quad (2.1)$$

Où $x \in \mathbb{R}^n$, $u(t) \in \mathbb{R}^m$, et $y(t) \in \mathbb{R}^p$.

L'observateur en boucle ouverte appelé estimateur est une copie identique au système :

$$\dot{\hat{x}}(t) = A\hat{x}(t) + Bu(t) \quad (2.2)$$

A partir de la condition initiale $\tilde{x}(0) = x(0) - \hat{x}(0)$, l'évolution de l'erreur d'estimation est telle que :

$$\tilde{x}(t) = A(x(0) - \hat{x}(0)) \quad (2.3)$$

On remarque que cette estimation dépend des valeurs propres de A et ne peut être modifiée, ceci n'est pas idéal pour nous, c'est pourquoi nous devons introduire un correcteur à l'équation de notre estimation. Alors l'équation de l'observateur devient :

$$\dot{\hat{x}}(t) = A\hat{x}(t) + Bu(t) + L(y(t) - C\hat{x}(t)) \quad (2.4)$$

Où $L \in \mathbb{R}^{n \times p}$ représente le gain de l'observateur

La structure de l'observateur du système (2.1) peut être présentée comme dans la figure (2.1).

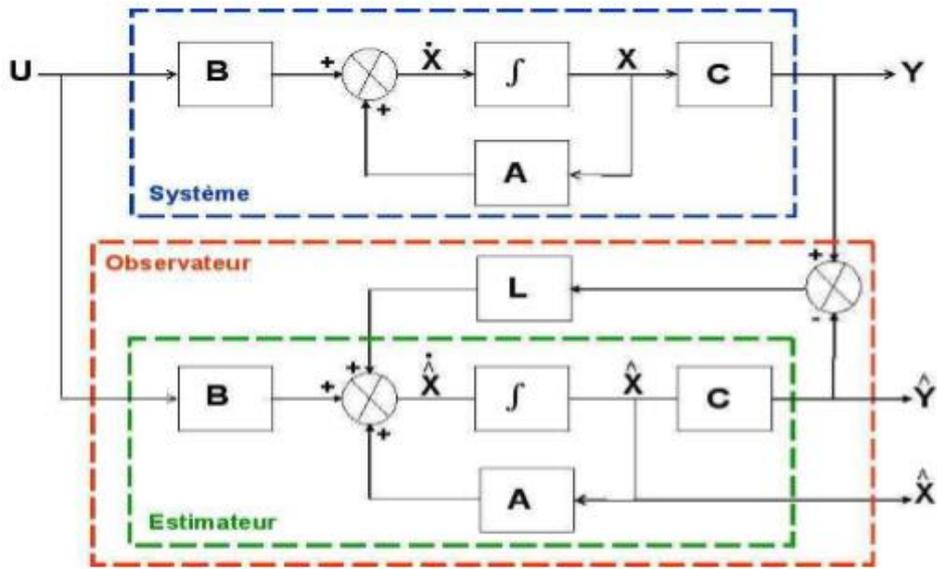


Figure.2.1. Structures d'un observateur

Le vecteur U représente l'entrée du système et de l'observateur, Y représente la sortie du système et X représente le vecteur d'état.

La structure montre un estimateur identique au système, l'introduction du vecteur L (ou matrice dans le cas multivariable) à l'entrée de l'estimateur, multipliée par la différence des sorties de l'estimateur et du système, va influencer les états estimés et ainsi nous donner l'observateur de type Luenberger [17].

$$\dot{\hat{x}} = A\hat{x} + Bu + L(y - C\hat{x}) \quad (2.5)$$

Avec l'erreur d'observation $e = x - \hat{x}$,

On obtient l'équation de la dynamique de l'erreur suivante :

$$\dot{e} = \dot{x} - \dot{\hat{x}} = (A - LC)e \quad (2.6)$$

Le choix du vecteur L doit être fait tel que les valeurs propres de $(A - LC)$ soient à parties réelles strictement négatives, puisque c'est lui qui va faire converger l'erreur vers zéro plus ou moins rapidement.

2.3 Observabilité

L'observabilité correspond au fait de pouvoir reconstruire de façon unique l'état x du système quel que soit l'entrée $u(t)$ avec la connaissance des entrées et sorties du système sur tout l'intervalle.

2.3.1 Observabilité des systèmes linéaire

On dit qu'un système est observable si on peut avec la connaissance de l'état initial $x(t_0)$, retrouver tous les états du système $x(t) \forall t$. Cette notion s'appelle la reconstructibilité [14].

Définition de la Reconstructibilité. Un état x_1 est dit reconstructible à l'instant t_1 si, quel que soit $u(t)$, il existe $t_0 \leq t_1$ tel que la connaissance de $u(t)$ et de $y(t)$ avec $t \in [t_0, t_1]$, permettent de déterminer $x_1 = x(t_1)$. Si tout état est reconstructible à l'instant t_1 , le système est dit complètement reconstructible.

Pour s'assurer de l'observabilité du système, on peut appliquer le test de rang de la

matrice d'observation, et si le rang de $\theta = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{bmatrix} = n$, le système est observable.

2.3.2 Observabilité des systèmes non linéaires

Considérons les équations du système non linéaire suivantes :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = f(x(t)) \\ y(t) = h(x(t)) \end{cases} \quad (2.7)$$

Avec $x \in \mathbb{R}^n, u(t) \in \mathbb{R}^m, y(t) \in \mathbb{R}^p$ et f et h sont des fonctions analytiques.

Pour les observateurs non linéaires, l'observabilité se complique, celle-ci est définie à partir de la notion d'indistinguabilité.

Définition indistinguabilité [15] Deux états initiaux $x(t_0) = x_1$ et $x(t_0) = x_2$ sont dit indistinguabilité pour le système (2.7) si $\forall t \in [t_0, t_1]$, les sorties correspondantes y_1 et y_2 sont identiques quelle que soit l'entrée admissible $u(t)$ du système.

Donc le système non linéaire (2.7) est dit observable s'il n'admet pas de cas d'indistinguabilité, C'est-à-dire que tous les états initiaux sont discernables à partir de l'examen de la sortie du système.

2.3.3 La dérivée de Lie et condition de rang

Une deuxième condition est nécessaire pour l'observabilité des systèmes non linéaires.

On considère les entrées et la sortie du système (2.7) connues, avec $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ et $h : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$

L'expression de $y(t)$, au voisinage de t_0 , est obtenue comme [13] :

$$y(t) = \sum_{k=0}^{+\infty} y^{(k)}(t) \frac{(t-t_0)^k}{k!} \quad (2.8)$$

D'après (2.8) :

$$y^{(1)}(t) = \frac{dh(x(t))}{dt} = \frac{\partial h(x(t))}{\partial x} \cdot \frac{dx(t)}{dt} = \frac{\partial h(x(t))}{\partial x} \cdot f(x(t)) = L_f^1 h(x(t)) \quad (2.9)$$

Avec L_f est le dérivé de Lie en fonction de h par rapport à la fonction f à l'ordre 1,

On peut alors déduire pour l'ordre n :

$$y^{(n)}(t) = L_f^n h(x(t)) \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad (2.10)$$

Alors l'expression (2.8) peut s'écrire sous la forme :

$$y(t) = \sum_{k=0}^{+\infty} L_f^k h(x(t)) \frac{(t-t_0)^k}{k!} \quad (2.11)$$

En considérant, maintenant, deux sorties $y_1(t)$ et $y_2(t)$ avec $y_1(t) \neq y_2(t)$, le fait que (2.7) est observable et d'après l'équation (2.11), si on considère x_{01} et x_{02} , les états initiaux relatives aux sorties y_1 et y_2 respectivement, alors il existe un rang i où on a :

$$L_f^i h(x_{01}(t)) \neq L_f^i h(x_{02}(t)) \quad (2.12)$$

Alors on peut formuler la deuxième condition comme :

Condition : Le système (2.7) est dit observable si pour tout point $x \in \mathbb{R}^n$, les n vecteurs

$\mathcal{O} = \{L_f^{j-1}(h) : j = 1, \dots, n\}$ Sont linéairement indépendants et constitue une base de

l'espace d'observation Ω c'est à dire :

$$\dim(\mathcal{O}) = n \quad (2.13)$$

Où n est la dimension de l'espace d'observation.

Définition Espace d'observabilité [15] Soit le système (2.7). L'espace d'observabilité, noté \mathcal{O} , est le plus petit sous-espace vectoriel de fonction de \mathbb{R}^n à valeur dans l'espace de sortie, contenant les sorties h_1, h_2, \dots, h_p et qui soit fermé sous l'opération de la dérivation de Lie par rapport au champ de vecteur $f(x, u)$, u étant fixé.

2.3.4 L'observabilité universelle

Contrairement au cas linéaire, l'observabilité dans les systèmes non linéaires peut dépendre de l'entrée appliquée, c.-à-d. que le système peut être observable et accepter une entrée non observable. Si le système est observable pour une entrée $u(t) \forall t \in [t_0, t_1]$, l'entrée est dite universelle.

Définition Entrée universelle Une entrée u est dite universelle sur $[0, t]$ si pour tout couple d'états initiaux distincts $x_0 \neq \bar{x}_0$, il existe $\tau \in [0, t]$ tel que les sorties correspondantes $y(\tau, x_0)$ et $y(\tau, \bar{x}_0)$ soient différentes.

Une entrée qui n'est pas universelle est dite singulière, et si le système ne possède pas d'entrées singulières, il est appelé système uniformément observable.

2.3.5 Problématique des entrées

Dans certain cas, il peut y avoir des entrées pour lesquelles des états ne sont pas discernables.

Un exemple de ce cas a été présenté dans [14].

Pour un système :

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = ux_2 \\ \dot{x}_2 = -x_2 \\ y = x_1 \end{cases} \quad (2.14)$$

Le système n'est pas observable pour l'entrée u nul et constante. En effet, si $u = \dot{u} = 0$, seul x_1 pourra être reconstruite à partir de y .

Par contre si $u=0$ mais n'est pas constante, x_2 pourra être déduite à partir de la dérivée d'ordre 2 de y .

$$y^{(2)} = \dot{u}x_2 \neq 0 \quad (2.15)$$

Pour $u = 0$ et $\dot{u} \neq 0$

On peut alors exprimer en fonction de y

C'est la notion d'entrée régulièrement persistante.

Définition Entrées Régulièrement Persistantes [16] Une entrée admissible (mesurable et bornée) u est dite régulièrement persistante pour le système (2.1) s'il existe $T > 0, \alpha > 0$, et tels que la plus petite valeur propre du grammien d'observabilité $Y(t, T, u) \geq \alpha$ pour $t \geq t_0$.

2.4 Observabilité du système de Qi

Un moyen suffisant d'étudier l'observabilité d'un système est de résoudre l'équation jacobienne :

$$\frac{\partial(y, \dots, y^{n-n})}{\partial(x, \dots, x_n)} \quad (2.16)$$

Pour x_1 et x_2 les sorties du système,

$$O = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \ddot{x}_2 \\ \ddot{x}_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ (x_2x_3 - a(x_1 - x_2))(b - x_3) + b(b(x_1 + x_2) - x_1x_3) + x_1(cx_3 + ex_4 - x_1x_3) \\ (a + x_3)(b(x_1 + x_2) - x_1x_3) - a(x_2x_3 - a(x_1 - x_2)) - x_2(cx_3 + ex_4 - x_1x_3) \end{bmatrix}$$

$$\frac{\partial O}{\partial (x_1, x_2, x_3, x_4)} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33} & \alpha_{34} \\ \alpha_{41} & \alpha_{42} & \alpha_{43} & \alpha_{44} \end{bmatrix} \quad (2.17)$$

$$\alpha_{31} = cx_3 + ex_4 - 2x_1x_3 - a(b - x_3) + b(b - x_3)$$

$$\alpha_{32} = (a + x_3) * (b - x_3) + b^2$$

$$\alpha_{33} = a(x_1 - x_2) - x_2x_3 - bx_1 + (b - x_3) + x_1(c - x_1)$$

$$\alpha_{34} = ex_4$$

$$\alpha_{41} = (a+x_3)(b-x_3) + x_2x_3 + a^2$$

$$\alpha_{41} = x_1x_3 - ex_4 - cx_3 - a(a + x_3) + b(a + x_3)$$

$$\alpha_{41} = b(x_1 + x_2) - x_1(a + x_3) - ax_2 - x_1x_3 - x_2(c - x_1)$$

$$\alpha_{41} = -ex_2$$

Le déterminant de la jacobien (2.17) est donné par Matlab.

$$\text{Det}\left(\frac{\partial O}{\partial (x_1, x_2, x_3, x_4)}\right) = 2ex_1^2x_3 + 2ex_2^2x_3 + aex_1^2 + aex_2^2 - bex_1^2 - bex_2^2 \quad (2.18)$$

Pour que le déterminant (2.18) soit nul, il faut que $x_1 = x_2 = 0$.

Donc le système de Qi est observable pour x_1 ou x_2 différents de zéro en même temps.

2.5 Introduction à l'observateur grand gain

L'observateur à grand gain est un estimateur d'état pour des systèmes non linéaire observables, sa conception est relativement simple. Le gain de l'observateur est

déterminé sur la base d'une constante positive qui doit être choisie la plus petite possible pour avoir une très rapide estimation des états.

Il a été introduit au début par Doyle and Stein [18] dans le but de concevoir un outil de robustesse pour un retour bouclé linéaire, il faudra attendre la fin des années 1980 pour que les premiers observateurs à grand gain pour les systèmes non linéaires apparaissent [19]. L'année 1992 représente encore un nouveau bond pour l'observateur, puisque c'est le début de deux écoles de recherche sur l'observateur grand gain, la première originaire du travail de Estfandiari et Khalil [20], et la deuxième du travail de Ghautier, Hammouri et Othman [21]. Dans notre travail c'est le dernier qui va nous intéresser.

2.5.1 Avantages d'un observateur grand gain [13]

- La conception de l'observateur ne passe pas par la résolution d'équation complexe.
- L'avantage majeur de l'observateur grand gain est sa robustesse contre les grande perturbations et incertitudes.
- L'observateur grand gain est très rapide

2.5.2 Inconvénients d'un observateur grand gain

- Dans la conception du grand gain, on peut régler la bande passante d'un observateur pour obtenir les propriétés de stabilité et robustesse voulues. Par contre, celle-ci vient au prix d'important pic, ce dernier peut causer une instabilité pour certains systèmes.
- Très grande sensibilité au bruit de mesure.

2.5.3 Principe de l'observateur grand gain

On considère le système non linéaire suivant observable pour toute entrée u :

$$\bar{w}: \begin{cases} \dot{x} = f(x) + g(x)u \\ y = h(x) \end{cases} \quad (2.19)$$

La forme éclatée de (2.19) est donnée par le système

$$(\bar{w}): \begin{cases} \dot{x} = \begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \vdots \\ \dot{x}_{n-1} \\ \dot{x}_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \\ \vdots \\ \dot{x}_n \\ \varphi(x) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} g(x_1) \\ g(x_1, x_2) \\ \vdots \\ g(x_1, x_2, \dots, x_n) \end{pmatrix} u = F'(x) + G'(x)u \\ y = x_1 = Cx \end{cases} \quad (2.20)$$

L'observateur du système s'écrit sous la forme :

$$\hat{\dot{x}} = \dot{x} - S_\infty^{-1}C'(C\hat{x} - y) \quad (2.21)$$

En remplaçant \dot{x} par son expression la relation (2.21) on obtient :

$$\hat{\dot{x}} = F'(\hat{x}) + G'(\hat{x})u - S_\infty^{-1}C'(C\hat{x} - y) \quad (2.22)$$

Avec,

C : la matrice d'observation

$$C = [1 \quad 0 \quad \dots \quad 0]$$

A : Représente la matrice anti décalage.

$$A = \begin{bmatrix} 0 & I_p & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & I_p & \ddots & \vdots \\ 0 & & & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & & & I_p \\ 0 & & & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

S_∞ Est la solution de l'équation de Lyapunov :

$$0 = -\vartheta S_\infty - A'S_\infty - S_\infty A + C'C \quad (2.23)$$

Gauthier a démontré que pour les hypothèses suivantes [21] :

Hypothèse 1 : l'entrée u est bornée pour $u(t) \in U$ pour $t \geq 0$ avec $U \subset \mathbb{R}^m$

Hypothèse 2 : $g(x)$ est globalement lipchitzienne par rapport à $x(t)$.

Le système est observable pour un ϑ suffisamment grand :

$$\|\hat{x}(t) - x(t)\| \leq k(\vartheta) \exp\left(-\frac{\vartheta t}{3}\right) \|\hat{x}_0 - x_0\| \quad (2.24)$$

2.6 Conclusion

Dans ce chapitre nous avons défini l'objectif d'un observateur, expliqué son principe de fonctionnement, puis nous avons montré la complexité de l'observabilité d'un système non linéaire par rapport au système linéaire. Enfin nous avons donné une brève définition d'un grand gain, et donné ses avantages et inconvénients, celui-ci va être plus développé dans la conception de notre observateur dans le chapitre suivant.

Chapitre 3 Application de l'observateur à la synchronisation de deux systèmes chaotiques Qi

3.1 Introduction

Un système de transmission se compose d'un émetteur, d'un canal de transmission et d'un récepteur. Au niveau de ce dernier, l'observateur à grand gain dont le rôle est la reconstruction des variables d'état et du message transmis par exploitation de signaux mesurés.

Ce chapitre introduit le système de Qi adéquat sous une forme interconnectée pour effectuer la synthèse d'un observateur à grand gain interconnecté. Par la suite, une analyse de la convergence est exposée.

Mais avant cela, on introduit rapidement une notion sur les transmissions de données sécurisées utilisant les systèmes chaotiques

3.2 transmissions de données sécurisées utilisant les systèmes chaotiques

Le chaos déterministe peut générer des comportements dynamiques d'apparences aléatoires. Il serait donc intéressant d'utiliser ces derniers comme porteuses d'informations en télécommunication.

Le diagramme général de la communication sécurisée par le chaos est montré dans la figure (3.1). Le principe est de masquer une information par des signaux chaotiques et de l'envoyer vers le récepteur sur un canal public. L'information est récupérée au niveau du récepteur. [22]

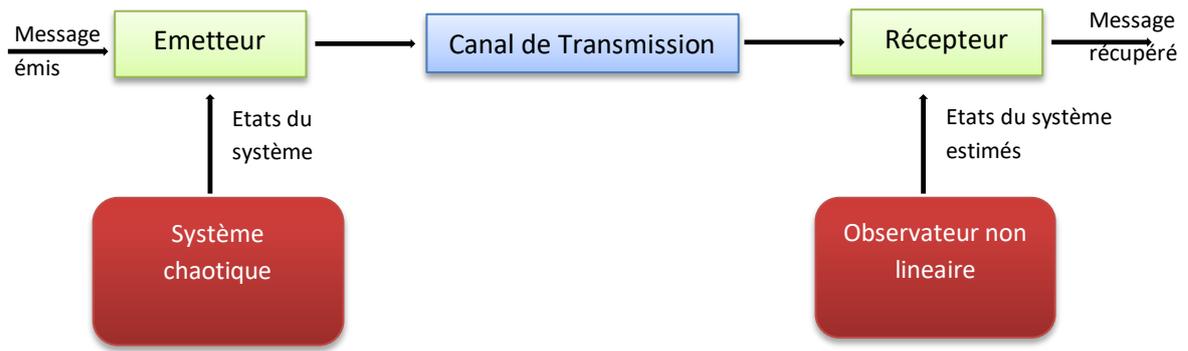


Figure 3.1. système de transmission utilisant les systèmes chaotiques

La clé du système de transmission est l'ensemble des paramètres des deux générateurs chaotiques à l'émission et à la réception qui doivent être synchronisés, c'est à dire les états du système estimés au niveau du récepteur doivent être identiques à ceux de l'émetteur.

Le concept de synchronisation repose sur le constat qu'un système chaotique est déterministe et possède un ou plusieurs exposants de Lyapunov positifs et qu'il est localement instable. Il est donc possible de construire une réplique identique à ce système et d'essayer de synchroniser de façon que les deux signaux chaotiques issus des deux exemplaires soient identiques [22]. Il est alors nécessaire de déterminer les signaux de contrôle adéquats pour asservir l'esclave au maître.

3.3 Système de Qi sous forme interconnectée

Soit le système chaotique de Qi défini précédemment (chapitre 1), auquel on introduit en entrée deux messages m_1 et m_2 pour obtenir le modèle du système de Qi ci-dessous :

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = a(x_2 - x_1) + x_2x_2 + m_1 \\ \dot{x}_2 = b(x_1+x_2) - x_1x_3 \\ \dot{x}_3 = -cx_2 - ex_4 + x_1x_2 + m_1 \\ \dot{x}_4 = fx_3 - dx_4 + x_1x_3 + m_2 \\ y_1 = x_1 \\ y_2 = x_2 \end{cases} \quad (3.1)$$

- $x_i \in \mathbb{R}$ ($i=1, 2, 3,4$) représente le vecteur d'état du système,
- y_1 et y_2 sont les sorties du système,
- m_1 et m_2 sont les messages.

Le système (3.1) ne facilitant pas la construction d'un observateur capable d'estimer les états de ce dernier (par conséquence des messages), nous mène à fractionner et étendre les équations de ce système en deux sous-systèmes compactes interconnectés.

Pour ce faire, on définit d'abord le système de Qi interconnecté, puis, un observateur IGG est proposé. La preuve de la convergence de cet observateur repose sur le principe de la résolution d'une équation différentielle de Lyapunov.

Le système de Qi modifié sous sa forme interconnectée étendue et compacte est présenté dans le schéma synoptique de la figure 3.2.

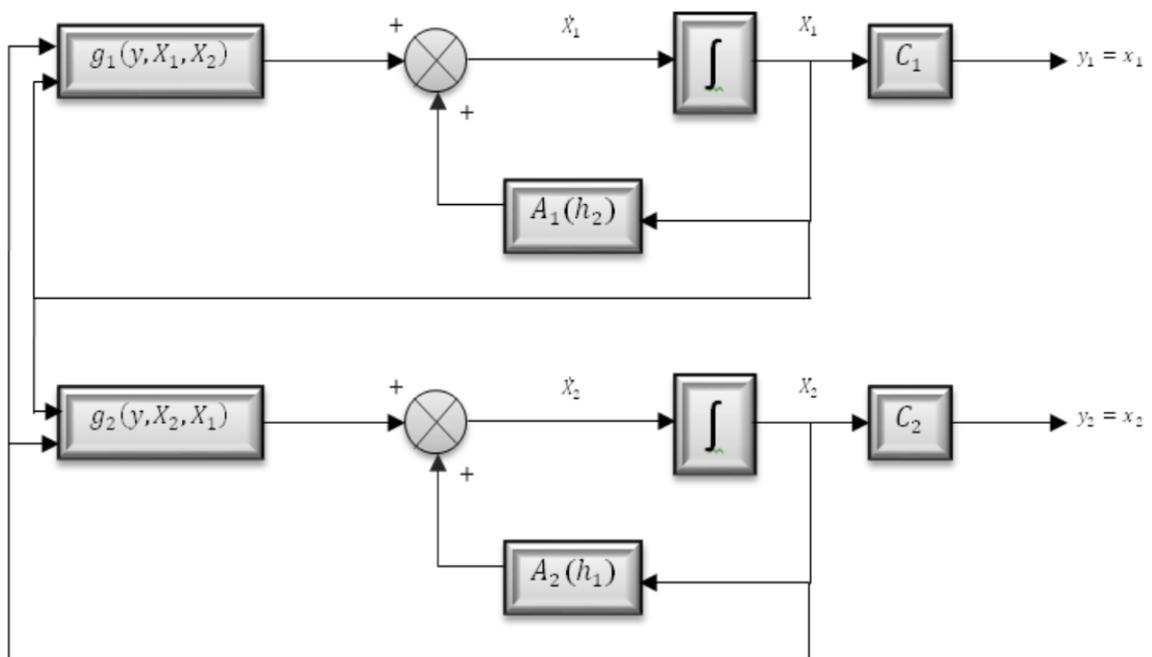


Figure 3.2. Système Qi sous forme interconnectée étendue compacte

Il se compose de deux sous-systèmes sous la forme éclatée (3.2) et (3.3):

Avec :

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{X}_1 = \begin{pmatrix} 0 & -h_2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_2 \\ x_3 \\ x_5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b(h_1 + h_2) \\ -cx_3 - ex_4 + h_1h_2 \\ 0 \end{pmatrix} \\ y_1 = [1 \ 0 \ 0] \begin{pmatrix} x_2 \\ x_3 \\ x_5 \end{pmatrix} = h_1 = x_2 \end{array} \right. \quad (3.2)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{X}_2 = \begin{pmatrix} 0 & h_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -e & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a(h_1 - h_2) + x_5 \\ -cx_3 + x_5 + h_1h_2 \\ -fx_3 - dx_5 + h_2x_3 \\ 0 \end{pmatrix} \\ y_2 = [1 \ 0 \ 0 \ 0] \begin{pmatrix} x_1 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_6 \end{pmatrix} = h_2 = x_1 \end{array} \right. \quad (3.3)$$

Les formes compactes de ces deux sous-systèmes sont données par (3.4) et (3.5):

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{X}_1 = A_1(h_2)X_1 + g_1(y, X_1, X_2) \\ y_1 = C_1X_1 = h_1 = x_2 \end{array} \right. \quad (3.4)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{X}_2 = A_2(h_1)X_2 + g_2(y, X_2, X_1) \\ y_2 = C_2X_2 = h_2 = x_1 \end{array} \right. \quad (3.5)$$

$X_1 = \begin{pmatrix} x_2 \\ x_3 \\ x_5 \end{pmatrix}$; $X_2 = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_6 \end{pmatrix}$ vecteurs d'état des sous-systèmes (3.2) respectivement (3.3)

$x_5 = m_1$, $x_6 = m_2$,

$$A_1(h_2) = \begin{pmatrix} 0 & -h_2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et}$$

$$A_2(h_1) = \begin{pmatrix} 0 & h_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -e & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$g_1(y, X_1, X_2) = \begin{pmatrix} b(h_1+h_2) \\ -cx_3 - ex_4 + h_1h_2 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ et}$$

$$g_2(y, X_2, X_1) = \begin{pmatrix} a(h_1-h_2)+x_5 \\ -cx_3+x_5+h_1h_2 \\ -fx_3-dx_5+h_2x_3 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$C_1 = [1 \ 0 \ 0], C_2 = [1 \ 0 \ 0 \ 0]$$

Les deux signaux y_1 et y_2 sont supposés régulièrement persistants [23],

Cela veut dire que :

- Ils peuvent être représentés à n'importe quel instant t avec $t \geq 0$,
- Ils ont une fréquence variable.

A partir de ce modèle du système de Qi interconnecté (figure 3.6), la synthèse de l'observateur à grand gain peut se faire, cette partie va être entamée dans le paragraphe suivant.

3.4 Synthèse de l'observateur interconnecté à grand gain (IGG)

La synthèse de l'observateur interconnecté à grand gain passe par la présentation des différents étages constituant le modèle IGG ainsi que les équations de deux sous-systèmes correspondants, parmi lesquelles les équations de Lyapunov sont exposées. Une analyse de convergence doit être réalisée, cette dernière est développée dans le paragraphe 3.5

3.4.1 Modèle et équations de l'observateur

Le modèle de l'observateur interconnecté à grand gain est synthétisé à partir du modèle du Qi interconnecté donné par les sous-systèmes (3.4) et (3.5).

Dans ce modèle IGG (figure 3.3) on trouve que chaque sous-système se compose :

- D'une équation d'état \dot{Z}_i ($i = 1,2$) Z_i ($i=1,2$),

- D'une équation différentielle de Lyapunov \dot{S}_i ($i = 1,2$) : elle va permettre le calcul des valeurs de la matrice de gain S_i a chaque instant t ,
- D'une sortie estimée \hat{y}_i ($i = 1,2$).

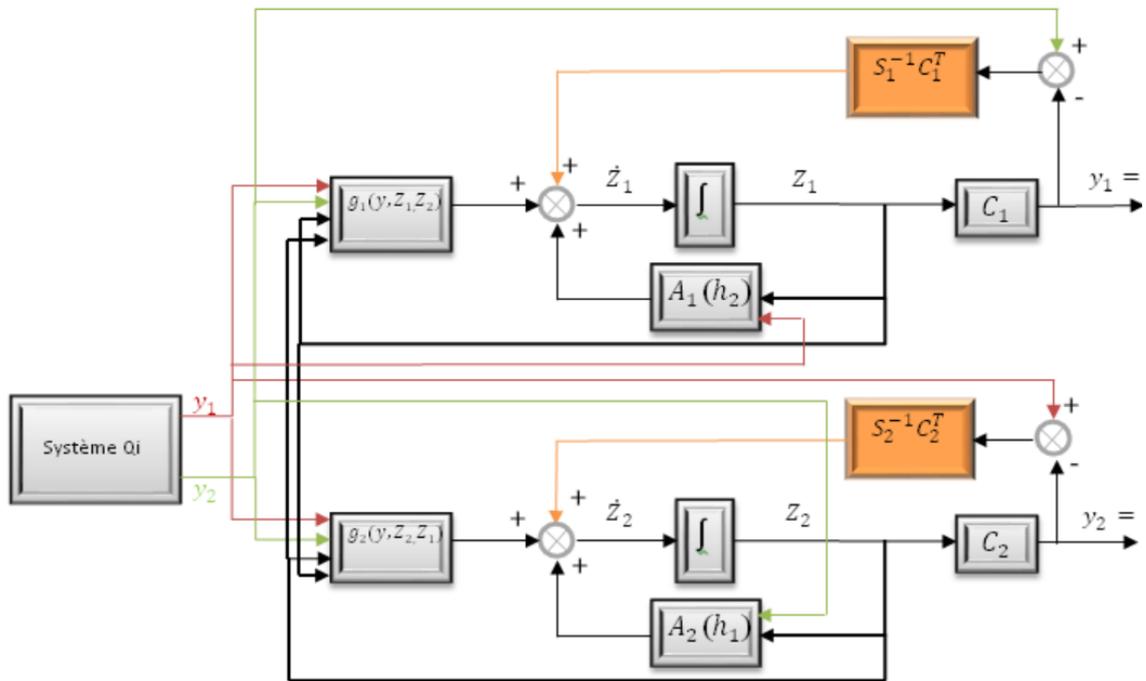


Figure 3.3. Observateur interconnecté a grand gain

Le modèle est donné sous forme de deux observateurs interconnectés :

$$\begin{cases} \dot{Z}_1 = A_1(h_2) \cdot Z_1 + g_1(y, X_1, X_2) + S_1^{-1} \cdot C_1^T \cdot (y_1 - \hat{y}_1) \\ \dot{S}_1 = -\theta_1 \cdot S_1 - A_1^T(h_2) \cdot S_1 \cdot A_1(h_2) + C_1^T \cdot C_1 \\ \hat{y}_1 = C_1 \cdot Z_1 = z_2 \end{cases} \quad (3.6)$$

$$\begin{cases} \dot{Z}_2 = A_2(h_1) \cdot Z_2 + g_2(y, X_2, X_1) + S_2^{-1} \cdot C_2^T \cdot (y_2 - \hat{y}_2) \\ \dot{S}_2 = -\theta_2 \cdot S_2 - A_2^T(h_1) \cdot S_2 \cdot A_2(h_1) + C_2^T \cdot C_2 \\ \hat{y}_2 = C_2 \cdot Z_2 = z_1 \end{cases} \quad (3.7)$$

Avec,

$\dot{Z}_1 = (\hat{x}_2; \hat{x}_3; \hat{x}_5)^T$, $\dot{Z}_2 = (\hat{x}_1; \hat{x}_3; \hat{x}_4; \hat{x}_6)^T$ représentent les vecteurs estimés par les observateurs interconnectés

$\theta_i > 0$, ($i = 1; 2$) sont les paramètres de convergence.

S_i ($i = 1; 2$.) Représentent les solutions de des équations différentielles de Lyapunov

$S_1^{-1} \cdot C_1^T$ et $S_2^{-1} \cdot C_2^T$ Sont les gains respectifs des sous sous-systèmes (3.6) et (3.7) [23].

3.4.2 Équation différentielle de Lyapunov et matrice de gain S_i

Les Équations différentielles de Lyapunov sont utilisées pour calculer les matrices de gain dynamiques adaptatives afin de corriger les erreurs d'estimation et réaliser ainsi la synchronisation des états avec leurs estimés.

Soit donc l'équation différentielle de Lyapunov \dot{S}_i :

$$\dot{S}_i = -\theta_i \cdot S_i - A_i^T(h_j) \cdot S_i - S_i \cdot A_i(h_j) + C_i^T \cdot C_i \quad \text{avec } i = 1,2 \quad \text{et } j = 2,1. \quad (3.8)$$

Sachant que S_1 et S_2 sont des matrices symétriques définies positives :

$$\text{avec : } S_1 = \begin{pmatrix} S_{11} & S_{12} & S_{13} \\ S_{12} & S_{22} & S_{23} \\ S_{13} & S_{23} & S_{33} \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad S_2 = \begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} & B_{13} & B_{14} \\ B_{12} & B_{22} & B_{23} & B_{24} \\ B_{13} & B_{23} & B_{33} & B_{34} \\ B_{14} & B_{24} & B_{34} & B_{44} \end{pmatrix}$$

Pour S_1

Pour S_2

$S_{11} > 0$	$B_{11} > 0$	$\det \begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{12} & B_{22} \end{pmatrix} > 0$
--------------	--------------	---

$\det \begin{pmatrix} S_{11} & S_{12} \\ S_{12} & S_{22} \end{pmatrix} > 0$	$\det \begin{pmatrix} B_{12} & B_{13} \\ B_{22} & B_{23} \end{pmatrix} > 0$	$\det \begin{pmatrix} B_{13} & B_{14} \\ B_{23} & B_{22} \end{pmatrix} > 0$
$\det \begin{pmatrix} S_{12} & S_{22} \\ S_{13} & S_{23} \end{pmatrix} > 0$	$\det \begin{pmatrix} B_{12} & B_{22} \\ B_{13} & B_{23} \end{pmatrix} > 0$	$\det \begin{pmatrix} B_{22} & B_{23} \\ B_{23} & B_{33} \end{pmatrix} > 0$
$\det \begin{pmatrix} S_{12} & S_{13} \\ S_{22} & S_{23} \end{pmatrix} > 0$	$\det \begin{pmatrix} B_{23} & B_{24} \\ B_{33} & B_{34} \end{pmatrix} > 0$	$\det \begin{pmatrix} B_{13} & B_{23} \\ B_{14} & B_{24} \end{pmatrix} > 0$
$\det \begin{pmatrix} S_{22} & S_{13} \\ S_{13} & S_{33} \end{pmatrix} > 0$	$\det \begin{pmatrix} B_{23} & B_{33} \\ B_{24} & B_{34} \end{pmatrix} > 0$	$\det \begin{pmatrix} B_{33} & B_{34} \\ B_{34} & B_{44} \end{pmatrix} > 0$
$\det \begin{pmatrix} S_{11} & S_{12} & S_{13} \\ S_{12} & S_{22} & S_{23} \\ S_{13} & S_{23} & S_{33} \end{pmatrix} > 0$	$\det \begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} & B_{13} \\ B_{12} & B_{22} & B_{23} \\ B_{13} & B_{23} & B_{33} \end{pmatrix} > 0$	$\det \begin{pmatrix} B_{12} & B_{22} & B_{23} \\ B_{13} & B_{23} & B_{33} \\ B_{14} & B_{24} & B_{34} \end{pmatrix} > 0$
	$\det \begin{pmatrix} B_{12} & B_{13} & B_{14} \\ B_{22} & B_{23} & B_{24} \\ B_{23} & B_{33} & B_{34} \end{pmatrix} > 0$	$\det \begin{pmatrix} B_{22} & B_{23} & B_{24} \\ B_{23} & B_{33} & B_{34} \\ B_{24} & B_{34} & B_{44} \end{pmatrix} > 0$
	$\det \begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} & B_{13} & B_{14} \\ B_{12} & B_{22} & B_{23} & B_{24} \\ B_{13} & B_{23} & B_{33} & B_{34} \\ B_{14} & B_{24} & B_{34} & B_{44} \end{pmatrix} > 0$	
Tableau 3.1 Tableau 3.1 : tableaux des déterminants des matrices S_1 et S_2		

et la propriété : $S_1^T = S_1$ et $S_2^T = S_2$

det : exprime le déterminant

les équations de Lyapunov sous la forme éclatée sont données par (3.7) et (3.8)

$$\begin{aligned} \dot{S}_1 = & -\theta_1 \cdot \begin{pmatrix} S_{11} & S_{12} & S_{13} \\ S_{12} & S_{22} & S_{23} \\ S_{13} & S_{23} & S_{33} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -h_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} S_{11} & S_{12} & S_{13} \\ S_{12} & S_{22} & S_{23} \\ S_{13} & S_{23} & S_{33} \end{pmatrix} \\ & - \begin{pmatrix} S_{11} & S_{12} & S_{13} \\ S_{12} & S_{22} & S_{23} \\ S_{13} & S_{23} & S_{33} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & -h_2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (3.9)$$

$$\begin{aligned} \dot{S}_2 = & -\theta_2 \begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} & B_{13} & B_{14} \\ B_{12} & B_{22} & B_{23} & B_{24} \\ B_{13} & B_{23} & B_{33} & B_{34} \\ B_{14} & B_{24} & B_{34} & B_{44} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ h_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & e & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} & B_{13} & B_{14} \\ B_{12} & B_{22} & B_{23} & B_{24} \\ B_{13} & B_{23} & B_{33} & B_{34} \\ B_{14} & B_{24} & B_{34} & B_{44} \end{pmatrix} - \\ & \begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} & B_{13} & B_{14} \\ B_{12} & B_{22} & B_{23} & B_{24} \\ B_{13} & B_{23} & B_{33} & B_{34} \\ B_{14} & B_{24} & B_{34} & B_{44} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & h_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -e & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (3.10)$$

Pratiquement les matrices solutions S_1 et S_2 s'obtiennent par intégration des éléments \dot{S}_{ij} :

Pour \dot{S}_1

$$\left[\begin{array}{l} \dot{S}_{11} = 1 - \theta_1 \cdot S_{11} \\ \dot{S}_{12} = S_{11} \cdot x_1 - \theta_1 \cdot S_{12} \\ \dot{S}_{13} = -S_{11} - \theta_1 \cdot S_{13} \\ \dot{S}_{22} = 2 \cdot S_{12} \cdot x_1 - \theta_1 \cdot S_{22} \\ \dot{S}_{23} = S_{13} \cdot x_1 - \theta_1 \cdot S_{23} - S_{22} \\ \dot{S}_{33} = -2 \cdot S_{23} - \theta_1 \cdot S_{33} \end{array} \right. \quad (3.11)$$

Pour \dot{S}_2

$$\left[\begin{array}{l} \dot{B}_{11} = 1 - \theta_2 \cdot B_{11} \\ \dot{B}_{12} = B_{11} \cdot x_2 - \theta_2 \cdot B_{12} \\ \dot{B}_{13} = -50 \cdot B_{12} - \theta_2 \cdot B_{13} \\ \dot{B}_{14} = -B_{13} \cdot x_1 - \theta_2 \cdot B_{14} \\ \dot{B}_{22} = -2 \cdot B_{12} \cdot x_2 - \theta_2 \cdot B_{22} \\ \dot{B}_{23} = 50 \cdot B_{22} - B_{13} \cdot x_2 - \theta_2 \cdot B_{23} \\ \dot{B}_{24} = -B_{23} - B_{14} \cdot x_2 - \theta_2 \cdot B_{24} \\ \dot{B}_{33} = 100 \cdot B_{23} - \theta_2 \cdot B_{33} \\ \dot{B}_{34} = 50 \cdot B_{24} - B_{33} - \theta_2 \cdot B_{34} \\ \dot{B}_{44} = -2 \cdot B_{34} - \theta_2 \cdot B_{44} \end{array} \right. \quad (3.12)$$

La section suivante aborde le deuxième problème dans la synthèse des observateurs, à savoir l'analyse de convergence.

3.5 Analyse de convergence :

L'analyse de convergence permet de trouver les paramètres de réglage des observateurs θ_1 et θ_2 , ces derniers sont déterminés pour que l'erreur de l'estimation des états tende vers zéro dans le régime permanent.

Cette analyse se fait par une série de majorations des fonctions lipchitziennes obtenues à partir de la forme quadratique de l'erreur d'estimation aussi appelée fonction candidate de Lyapunov. Dans cette partie, on présente les points suivants :

- Le Calcul de l'erreur d'estimation.
- Le Développement de la fonction candidate de Lyapunov et son utilisation pour montrer la stabilité de l'observateur.
- Le Calcul des paramètres de réglage de l'observateur θ_1 .et θ_2

3.5.1 Calcul de l'erreur d'estimation

Soit e_1 et e_2 les erreurs d'estimation sont définies à partir des états mesurés et de leurs estimés tels que :

$$e_1 = \begin{pmatrix} x_2 - \hat{x}_2 \\ x_3 - \hat{x}_3 \\ x_5 - \hat{x}_5 \end{pmatrix} = X_1 - Z_1 \quad (3.13)$$

et

$$e_2 = \begin{pmatrix} x_1 - \hat{x}_1 \\ x_3 - \hat{x}_3 \\ x_4 - \hat{x}_4 \\ x_6 - \hat{x}_6 \end{pmatrix} = X_2 - Z_2 \quad (3.14)$$

Ces deux vecteurs sont indicateurs de la convergence du système, en effet, si e_1 et e_2 tendent vers zéro alors on peut dire qu'on a une bonne convergence.

La forme dynamique des deux erreurs d'estimation e_1 et e_2 est donnée par :

$$\dot{e}_1 = \dot{X}_1 - \dot{Z}_1 \quad (3.15)$$

$$\dot{e}_2 = \dot{X}_2 - \dot{Z}_2 \quad (3.16)$$

En remplaçant les expressions de $\dot{X}_1, \dot{Z}_1, \dot{X}_2, \dot{Z}_2$, on obtient les formes développées de \dot{e}_1 et \dot{e}_2 :

$$\dot{e}_1 = A_1(h_2)X_1 + g_1(y, X_1, X_2) - A_1(h_2) \cdot Z_1 - g_1(y, X_1, X_2) - S_1^{-1} \cdot C_1^T \cdot (y_1 - \hat{y}_1) \quad (3.17)$$

$$\dot{e}_2 = A_2(h_1)X_2 + g_2(y, X_2, X_1) - A_2(h_1) \cdot Z_2 + g_2(y, X_2, X_1) + S_2^{-1} \cdot C_2^T \cdot (y_2 - \hat{y}_2) \quad (3.18)$$

Ou encore :

$$\dot{e}_1 = A_1(h_2)X_1 - A_1(h_2) \cdot Z_1 - S_1^{-1} \cdot C_1^T \cdot (y_1 - \hat{y}_1) + g_1(y, X_1, X_2) - g_1(y, X_1, X_2) \quad (3.19)$$

$$\dot{e}_2 = A_2(h_1)X_2 - A_2(h_1) \cdot Z_2 - S_2^{-1} \cdot C_2^T \cdot (y_2 - \hat{y}_2) + g_2(y, X_2, X_1) - g_2(y, X_2, X_1) \quad (3.20)$$

Les expressions $y_1 - \hat{y}_1$ ainsi que $y_2 - \hat{y}_2$ sont données par :

$$y_1 - \hat{y}_1 = x_2 - \hat{x}_2 = C_1 e_1 \quad (3.21)$$

Et

$$y_2 - \hat{y}_2 = x_1 - \hat{x}_1 = C_2 e_2 \quad (3.22)$$

Les expressions dynamiques finales des deux erreurs d'estimation deviennent

$$\dot{e}_1 = [A_1(h_2) - S_1^{-1} C_1^T C_1] e_1 + g_1(y, X_1, X_2) - g_1(y, Z_2, Z_1) \quad (3.23)$$

$$\dot{e}_2 = [A_2(h_1) - S_2^{-1} C_2^T C_2] e_2 + g_2(y, X_1, X_2) - g_2(y, Z_2, Z_1) \quad (3.24)$$

3.5.2 Calcul de la fonction candidate

La théorie de Lyapunov est utilisée pour faire une analyse de convergence du système, on introduit donc la fonction candidate de Lyapunov V_0 telle que :

$$V_0 = V_1 + V_2 \quad (3.25)$$

Avec $V_1 = e_1^T S_1 e_1$ et $V_2 = e_2^T S_2 e_2$

Où V_1 et V_2 sont des fonctions de Lyapunov candidates

La condition de convergence du système est assurée si et seulement si :

$$\begin{cases} V_0 > 0 \\ \text{et} \\ \dot{V}_0 < 0 \end{cases} \quad (3.26)$$

Cette dernière va entrainer une évolution en exponentielle de l'erreur d'estimation vers zéro lorsque t augmente

Le calcul de la dérivée de V_0 est donnée par la somme de \dot{V}_1 et \dot{V}_2 telle que :

$$\dot{V}_0 = \dot{V}_1 + \dot{V}_2 \quad (3.27)$$

Cette relation exprimée d'une façon éclatée devient :

$$\begin{aligned} \dot{V}_1 = & \\ & -\theta e_1^T S_1 e_1 - e_1^T C_1^T C_1 e_1 + (g_1(y, X_1, X_2) - g_1(y, Z_1, Z_2))^T S_1 e_1 + e_1^T S_1 (g_1 y(X_1, X_2) - \\ & g_1(y, Z_1, Z_2)) \end{aligned} \quad (3.28)$$

Et

$$\begin{aligned} \dot{V}_2 = & \\ & -\theta e_2^T S_2 e_2 - e_2^T C_2^T C_2 e_2 + (g_2(y, X_2, X_1) - g_2(y, Z_2, Z_1))^T S_2 e_2 + e_2^T S_2 (g_2 y(X_2, X_1) - \\ & g_2(y, Z_2, Z_1)) \end{aligned} \quad (3.29)$$

Le calcul des dérivées n'est autre qu'une somme de termes où :

- Certains de ces termes sont négatifs, il s'agit de :

$-e_1^T C_1^T C_1 e_1$ dans \dot{V}_1 (3.26) et $-e_2^T C_2^T C_2 e_2$ dans \dot{V}_2 (3.27), en effet, sous forme éclatée on a :

$$-e_1^T C_1^T C_1 e_1 = - \begin{pmatrix} x_2 - \hat{x}_2 \\ x_3 - \hat{x}_3 \\ x_5 - \hat{x}_5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_2 - \hat{x}_2 \\ x_3 - \hat{x}_3 \\ x_5 - \hat{x}_5 \end{pmatrix} = -e_1^2 < 0$$

et ,

$$-e_2^T C_2^T C_2 e_2 = - \begin{pmatrix} x_1 - \hat{x}_1 \\ x_3 - \hat{x}_3 \\ x_4 - \hat{x}_4 \\ x_6 - \hat{x}_6 \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 - \hat{x}_1 \\ x_3 - \hat{x}_3 \\ x_4 - \hat{x}_4 \\ x_6 - \hat{x}_6 \end{pmatrix} = -e_2^2 < 0$$

- D'autres termes de (3.10) et (3.11) vont être majorés à partir de leurs normes comme suit :

❖ Pour \dot{V}_1 :

$$(g_1(y, X_1, X_2) - g_1(y, Z_1, Z_2))^T S_1 e_1 \leq \| \{ (g_1(y, X_1, X_2) - g_1(y, Z_1, Z_2)) \} \| \cdot \| S_1 \| \cdot \| e_1 \| \quad (3.30)$$

et

$$e_1^T S_1 (g_1(y, X_1, X_2) - g_1(y, Z_1, Z_2)) \leq \| \{ (g_1(y, X_1, X_2) - g_1(y, Z_1, Z_2)) \} \| \cdot \| S_1 \| \cdot \| e_1 \| \quad (3.31)$$

❖ Pour \dot{V}_2 :

$$(g_2(y, X_2, X_1) - g_2(y, Z_2, Z_1))^T S_2 e_2 \leq \| \{ (g_2(y, X_2, X_1) - g_2(y, Z_2, Z_1)) \} \| \cdot \| S_2 \| \cdot \| e_2 \| \quad (3.32)$$

et

$$e_2^T S_2 (g_2(y, X_2, X_1) - g_2(y, Z_2, Z_1)) \leq \| \{ (g_2(y, X_2, X_1) - g_2(y, Z_2, Z_1)) \} \| \cdot \| S_2 \| \cdot \| e_2 \| \quad (3.33)$$

Sachant que :

- ✚ En raison du comportement chaotique, les vecteurs d'état des systèmes (3.4) (3.5) sont définis dans un domaine ouvert borné $D \subset \mathbb{R}^n$.
- ✚ g_1 et g_2 sont Lipchitziennes dans le domaine D par rapport aux variables X_1 et X_2 , leurs constantes de Lipchitz k_1, k_2 (pour g_1) k_3, k_4 (pour g_2) sont calculées de la manière suivante :

$$\| \{ g_1(y, X_1, X_2) - g_1(y, Z_1, Z_2) \} \| = \left\| \begin{pmatrix} 0 \\ -c(x_3 - \hat{x}_3) - e(x_4 - \hat{x}_4) \\ 0 \end{pmatrix} \right\| \quad (3.34)$$

$$\| \{g_2(y, X_2, X_1) - g_2(y, Z_2, Z_1)\} \| = \left\| \begin{pmatrix} x_5 - \hat{x}_5 \\ -c(x_3 - \hat{x}_3) + x_5 - \hat{x}_5 \\ (f + \bar{x}_1)(x_3 - \hat{x}_3) - d(x_4 - \hat{x}_4) \\ 0 \end{pmatrix} \right\| \quad (3.35)$$

La majoration de ces termes nous donne les résultats suivants :

$$\| \{g_1(y, X_1, X_2) - g_1(y, Z_1, Z_2)\} \| \leq \left\| \begin{pmatrix} 0 \\ -c(x_3 - \hat{x}_3) \\ 0 \end{pmatrix} \right\| + \left\| \begin{pmatrix} 0 \\ -e(x_4 - \hat{x}_4) \\ 0 \end{pmatrix} \right\| \quad (3.36)$$

$$\| \{g_2(y, X_2, X_1) - g_2(y, Z_2, Z_1)\} \| \leq \left\| \begin{pmatrix} x_5 - \hat{x}_5 \\ (x_5 - \hat{x}_5) \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\| + \left\| \begin{pmatrix} 0 \\ -c(x_3 - \hat{x}_3) \\ (f + x_1)(x_3 - \hat{x}_3) - d(x_4 - \hat{x}_4) \\ 0 \end{pmatrix} \right\| \quad (3.37)$$

Les termes précédents sont développés de la manière suivante :

$$\left\| \begin{pmatrix} 0 \\ -c(x_3 - \hat{x}_3) \\ 0 \end{pmatrix} \right\| = \left\| \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -c & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \right\| \|e_1\| = K_1 \cdot \|e_1\| \quad (3.38)$$

$$\left\| \begin{pmatrix} 0 \\ -e(x_4 - \hat{x}_4) \\ 0 \end{pmatrix} \right\| = \left\| \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -e & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \right\| \|e_2\| = K_2 \|e_2\| \quad (3.39)$$

$$\left\| \begin{pmatrix} x_5 - \hat{x}_5 \\ (x_5 - \hat{x}_5) \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\| = \left\| \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \right\| \|e_1\| = K_3 \cdot \|e_1\| \quad (3.40)$$

$$\left\| \begin{pmatrix} 0 \\ -c(x_3 - \hat{x}_3) \\ (f + \bar{x}_1)(x_3 - \hat{x}_3) - d(x_4 - \hat{x}_4) \\ 0 \end{pmatrix} \right\| = \left\| \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -c & 0 & 0 \\ 0 & (f + \bar{x}_1) & -d & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \right\| \|e_2\| = K_4 \cdot \|e_2\| \quad (3.41)$$

Il est à noter que la condition pour que k_4 soit constante et positive nous oblige à rendre le terme $(f + x_1)$ constant aussi, ce qui nous conduit à majorer x_1

Désormais, on peut écrire les inégalités (3.18) et (3.19) comme suit :

$$\| \{g_1(y, X_1, X_2) - g_1(y, Z_1, Z_2)\} \| \leq k_1 \|e_1\| + k_2 \|e_2\| \quad (3.42)$$

$$\| \{g_2(y, X_2, X_1) - g_2(y, Z_2, Z_1)\} \| \leq k_3 \|e_1\| + k_4 \|e_2\| \quad (3.43)$$

En remplaçant par (3.40) et (3.41) dans (3.26) et (3.27) et après majoration on obtient:

$$\dot{V}_1 \leq -\theta_1 e_1^T S_1 e_1 + 2k_5 k_1 \|e_1\| \|e_1\| + 2k_5 k_2 \|e_1\| \|e_2\| \quad (3.44)$$

$$\dot{V}_2 \leq -\theta_2 e_2^T S_2 e_2 + 2k_6 k_3 \|e_1\| \|e_2\| + 2k_6 k_4 \|e_2\| \|e_2\| \quad (3.45)$$

On note la condition suivante concernant S_1 et S_2 mentionnée dans [23]:

$$0 < \|S_1\| \leq k_5 \text{ et } 0 < \|S_2\| \leq k_6 \quad (3.46)$$

Cette condition impose θ_1 et θ_2 suffisamment grands, due à la persistance des entrées de l'observateur.

A partir des inégalités (3.42) et (3.43) la relation de majoration de \dot{V}_0 devient :

$$\dot{V}_0 \leq -\theta_1 e_1^T S_1 e_1 + 2k_5 k_1 \|e_1\| \|e_1\| + 2k_5 k_2 \|e_1\| \|e_2\| - \theta_2 e_2^T S_2 e_2 + 2k_6 k_3 \|e_1\| \|e_2\| + 2k_6 k_4 \|e_2\| \|e_2\| \quad (3.47)$$

3.5.3 Calcul de θ_1 et θ_2

La majoration (3.45) est faite dans un but de calculer les paramètres de convergence θ_1 et θ_2 pour que $\dot{V}_0 < 0$. D'autre part, on doit satisfaire l'inégalité suivante [14]:

$$\lambda_{\min}(S_i) \cdot \|e_i\|^2 \leq e_i^T S_i e_i \leq \lambda_{\max}(S_i) \cdot \|e_i\|^2 \quad (3.48)$$

Avec :

$$e_i^T S_i e_i = V_i, \text{ donc } \|e_i\|^2 \leq \frac{V_i}{\lambda_{\min}(S_i)}; \quad (3.49)$$

Ceci implique que :

$$\|e_i\| \leq \frac{\sqrt{V_i}}{\sqrt{\lambda_{\min}(S_i)}} \text{ , } i = 1, 2 \quad (3.50)$$

$\lambda_{\min}(S_i)$ et $\lambda_{\max}(S_i)$ avec $i = 1, 2$, sont les valeurs propres minimales et maximales de S_i

La relation (3.48) va permettre de faire une nouvelle majoration des inégalités (3.42) et (3.43), on obtient :

$$\dot{V}_1 \leq \left(-\theta_1 + \frac{2k_5k_1}{\lambda_{\min}(S_1)}\right) \cdot V_1 + \left(\frac{2k_5k_2}{\sqrt{\lambda_{\min}(S_1)}\sqrt{\lambda_{\min}(S_2)}}\right) \cdot \sqrt{V_1}\sqrt{V_2} \quad (3.51)$$

$$\dot{V}_2 \leq \left(-\theta_1 + \frac{2k_5k_4}{\lambda_{\min}(S_2)}\right) \cdot V_2 + \left(\frac{2k_6k_3}{\sqrt{\lambda_{\min}(S_1)}\sqrt{\lambda_{\min}(S_2)}}\right) \cdot \sqrt{V_1}\sqrt{V_2} \quad (3.52)$$

En additionnant (3.49) et (3.27) on obtient :

$$\dot{V}_0 \leq \left(-\theta_1 + \frac{2k_5k_1}{\lambda_{\min}(S_1)}\right) \cdot V_1 + \left(-\theta_1 + \frac{2k_5k_4}{\lambda_{\min}(S_2)}\right) \cdot V_2 + \left(\frac{2 \cdot \sqrt{V_1}\sqrt{V_2} \cdot (k_5k_2 + k_6k_3)}{\sqrt{\lambda_{\min}(S_1)}\sqrt{\lambda_{\min}(S_2)}}\right) \quad (3.53)$$

En utilisant l'approximation suivante :

$$\sqrt{V_1}\sqrt{V_2} \leq \frac{N}{2}V_1 + \frac{1}{2N}V_2, \text{ Avec } N \in]0,1[\quad (3.54)$$

L'inégalité (3.51) peut s'exprimer comme suit :

$$\begin{aligned} \dot{V}_0 \leq & -\left(\theta_1 - \left(\frac{2k_5k_1}{\lambda_{\min}(S_1)} + \left(\frac{N \cdot (k_5k_2 + k_6k_3)}{\sqrt{\lambda_{\min}(S_1)}\sqrt{\lambda_{\min}(S_2)}}\right)\right)\right) \cdot V_1 \\ & -\left(\theta_2 - \left(\frac{2k_6k_4}{\lambda_{\min}(S_2)} + \left(\frac{1}{N} \cdot \frac{(k_5k_2 + k_6k_3)}{\sqrt{\lambda_{\min}(S_1)}\sqrt{\lambda_{\min}(S_2)}}\right)\right)\right) \cdot V_2 \end{aligned} \quad (3.55)$$

On pose

$$\begin{cases} \delta_1 = \theta_1 - \left(\frac{2k_5k_1}{\lambda_{\min}(S_1)} + \left(\frac{N \cdot (k_5k_2 + k_6k_3)}{\sqrt{\lambda_{\min}(S_1)}\sqrt{\lambda_{\min}(S_2)}}\right)\right) > 0 \\ \text{et} \\ \delta_2 = \theta_2 - \left(\frac{2k_6k_4}{\lambda_{\min}(S_2)} + \left(\frac{1}{N} \cdot \frac{(k_5k_2 + k_6k_3)}{\sqrt{\lambda_{\min}(S_1)}\sqrt{\lambda_{\min}(S_2)}}\right)\right) > 0 \end{cases} \quad (3.56)$$

A partir de là, on peut revenir à la condition de convergence donnée par (3.24) qui peut s'écrire autrement de la façon suivante :

$$\dot{V}_0 \leq -\delta \cdot V_0 \quad (3.57)$$

avec $\delta = \min(\delta_1, \delta_2)$

L'analyse de convergence permet donc de trouver les paramètres θ_1 et θ_2 vérifiant la relation (3.30) pour lesquels l'erreur d'estimation converge vers zéro lorsque t tend vers l'infini (régime permanent) en satisfaisant la condition (3.55)

3.6 Conclusion

Ce chapitre expose l'introduction par addition des messages dans un système de Qi, ainsi que la forme interconnectée du système de Qi, à partir de laquelle une technique de synthèse des deux observateurs à grand gain interconnectés est développée.

Cette technique d'observation permet de reconstruire les variables d'états du système de Qi (x_1, x_2, x_3, x_4) en utilisant comme seule information provenant du système de Qi les états x_1, x_2 .

La synthèse des observateurs interconnectés passe par deux étapes, la première consiste à présenter les équations des deux sous-systèmes des observateurs interconnectés ainsi que les équations de Lyapunov correspondants. La seconde est l'analyse de convergence, dans cette partie, les paramètres de réglage des observateurs θ_1 et θ_2 sont déterminés pour que l'erreur de l'estimation des états tende vers zéro dans le régime permanent. Cette analyse se fait par une série de majorations des fonctions lipchitziennes obtenues à partir de la forme quadratique de l'erreur d'estimation aussi appelée fonction candidate de Lyapunov.

Les résultats de la simulation des observateurs interconnectés sont exposés dans le chapitre suivant.

Chapitre 4 Simulation et interprétation des résultats

4.1 Introduction

Cette partie du mémoire présente les différentes parties réalisées. En effet, dans une première étape, le modèle Simulink ainsi que le contenu de tous les blocs et leurs connexions sont donnés, puis, une seconde étape présente l'exécution du modèle, celle-ci comporte :

- L'évolution de la dynamique des états et leurs estimés dans le temps.
- Une analyse des plans de phase des états de l'observateur et du système est faite pour évaluer leur synchronisation.
- Résultats de la reconstruction des messages.
- Le Comportement des gains.

4.2 Présentation du modèle Simulink :

Le modèle du système de Qi et les observateurs interconnectés correspondants sont réalisés sous Simulink (figure 4.1) :

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = a(x_2 - x_1) + x_2x_2 + m_1 \\ \dot{x}_2 = b(x_1+x_2) - x_1x_3 \\ \dot{x}_3 = -cx_2 - ex_4 + x_1x_2 + m_1 \\ \dot{x}_4 = fx_3 - dx_4 + x_1x_3 + m_2 \\ y_1 = x_1 \\ y_2 = x_2 \end{cases} \quad (4.1)$$

Les paramètres utilisés sont : $a = 42.5, b = 24, c = 13, d = 20, e = 50, f = 40$, ainsi que les conditions initiales suivantes : $x_1(0) = 1, x_2(0) = 2, x_3(0) = 3, x_4(0) = 4$,

4.2.1 Bloc du système de Qi

Le système de Qi (figure 4.2) est le système chaotique auquel vont être ajoutés les messages $m_1(t)$ et $m_2(t)$. Ce dernier possède quatre états.

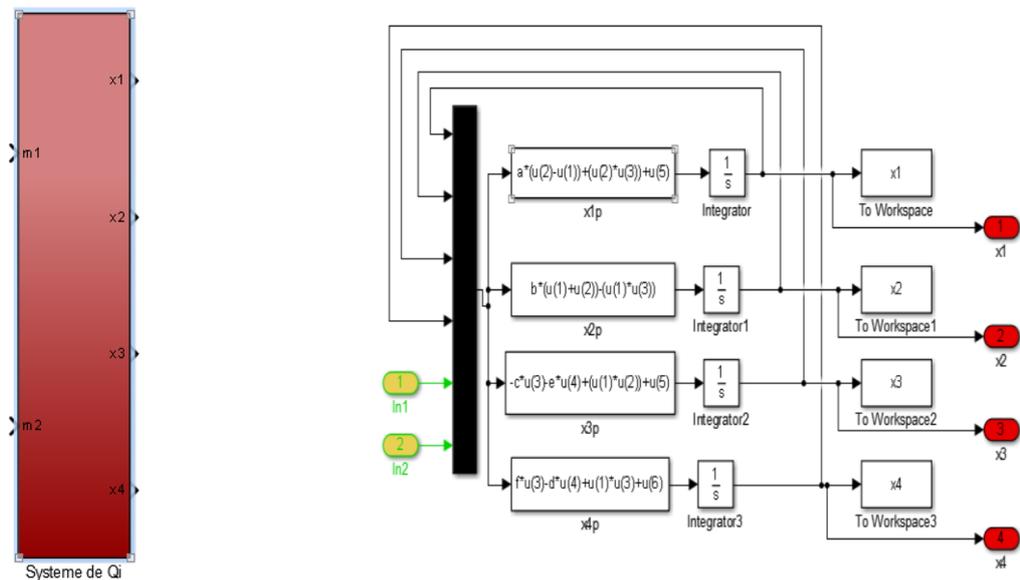


Figure 4.2. Bloc Simulink du système de Qi

Le circuit réalisé sous Simulink (figure 4.2) est composé de blocs de fonctions mathématiques, permettant l'implémentation des équations différentielles du système (3.1), blocs des matrices inverses de S_1 et S_2 :

Pour la résolution des équations de Lyapunov des sous-systèmes (3.4) et (3.5) l'inversion de leurs solutions S_1 et S_2 respectivement, il est nécessaire de concevoir les circuits qui permettent leurs inversion (Figure 4.3).

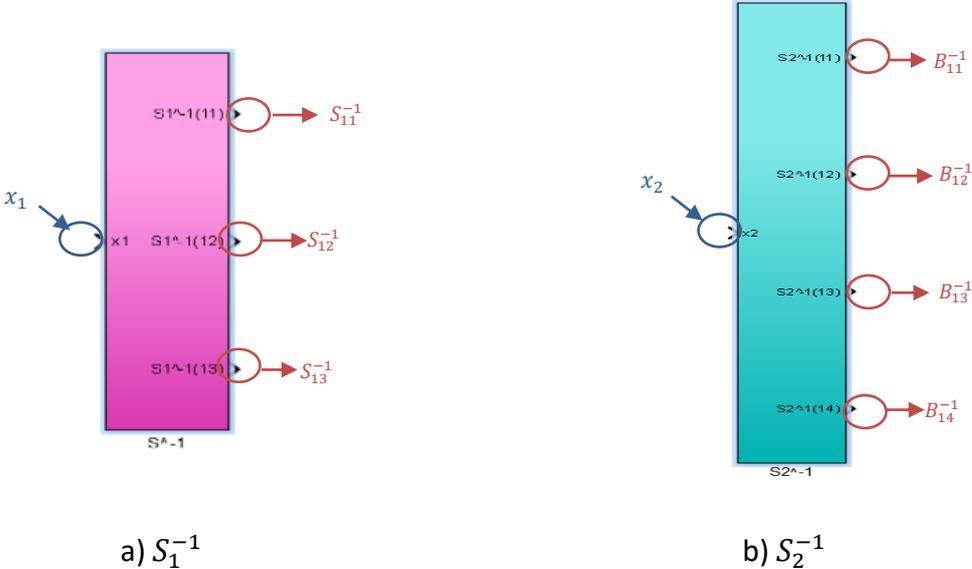


Figure 4.3. Blocs des matrices inverses de S_1 et S_2 .

Ils admettent en entrée l'état x_1 respectivement x_2 , et, en sortie l'inverse des matrices S_1 respectivement S_2 ,

Les blocs de matrices inverses sont eux même composés de deux étages de circuits, le premier réalise l'intégration des matrices \hat{S}_i $i = 1,2$, le second est un inverseur de matrice (3x3) pour S_1 et (4x4) pour S_2 .

Les circuits éclatés qui génèrent les matrices S_1 et S_2 à partir de la relation de Lyapunov (3.6) sont présentés dans la figure (4.4).

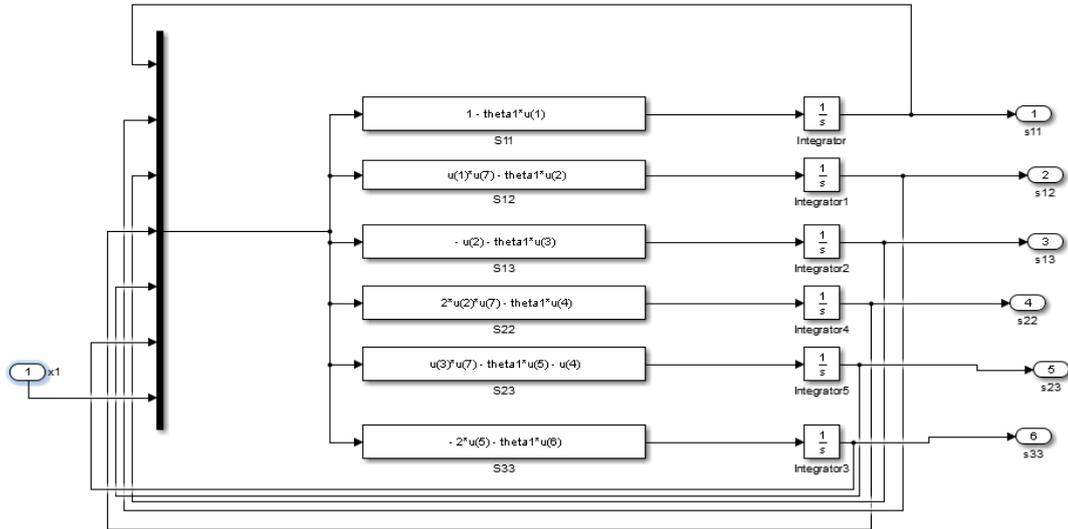


Figure 4.4. intégration des éléments de la matrice \hat{S}_1

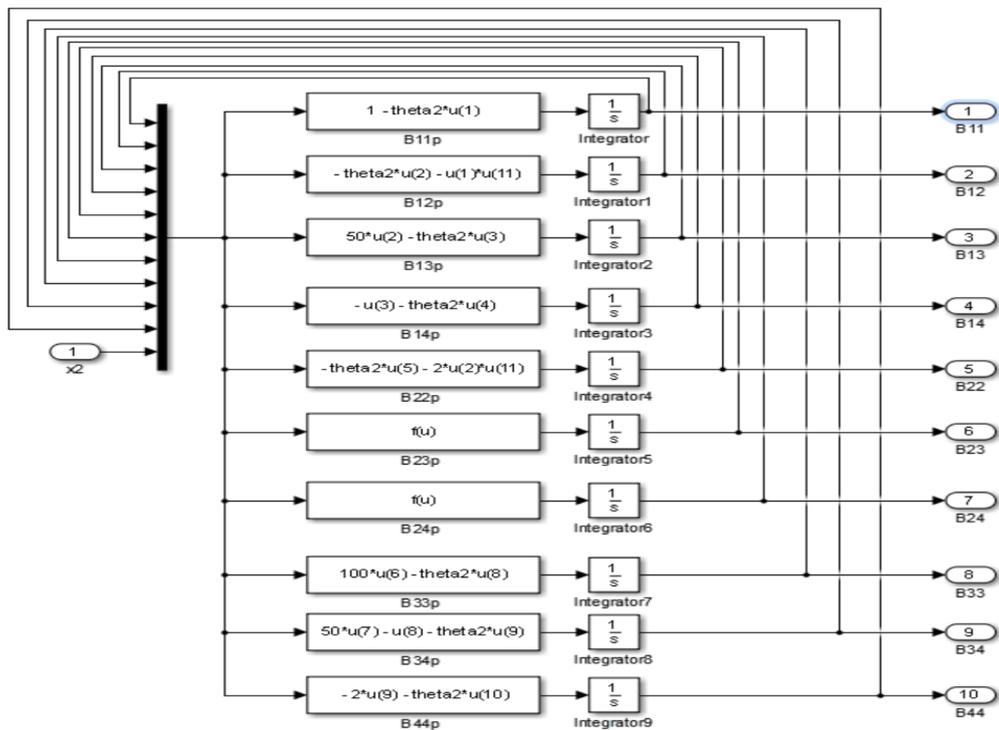


Figure 4.5. intégration des éléments de la matrice \hat{S}_2

On rappelle les équations différentielles (3.9) et (3.10) pour les éléments des matrices \hat{S}_i mentionné précédemment :

Pour $i=1$:

$$\left[\begin{array}{l} \dot{S}_{11} = 1 - \theta_1 \cdot S_{11} \\ \dot{S}_{12} = S_{11} \cdot x_1 - \theta_1 \cdot S_{12} \\ \dot{S}_{13} = -S_{11} - \theta_1 \cdot S_{13} \\ \dot{S}_{22} = 2 \cdot S_{12} \cdot x_1 - \theta_1 \cdot S_{22} \\ \dot{S}_{23} = S_{13} \cdot x_1 - \theta_1 \cdot S_{23} - S_{22} \\ \dot{S}_{33} = -2 \cdot S_{23} - \theta_1 \cdot S_{33} \end{array} \right.$$

Pour $i=2$:

$$\left[\begin{array}{l} \dot{B}_{11} = 1 - \theta_2 \cdot B_{11} \\ \dot{B}_{12} = B_{11} \cdot x_2 - \theta_2 \cdot B_{12} \\ \dot{B}_{13} = -50 \cdot B_{12} - \theta_2 \cdot B_{13} \\ \dot{B}_{14} = -B_{13} \cdot x_1 - \theta_2 \cdot B_{14} \\ \dot{B}_{22} = -2 \cdot B_{12} \cdot x_2 - \theta_2 \cdot B_{22} \\ \dot{B}_{23} = 50 \cdot B_{22} - B_{13} \cdot x_2 - \theta_2 \cdot B_{23} \\ \dot{B}_{24} = -B_{23} - B_{14} \cdot x_2 - \theta_2 \cdot B_{24} \\ \dot{B}_{33} = 100 \cdot B_{23} - \theta_2 \cdot B_{33} \\ \dot{B}_{34} = 50 \cdot B_{24} - B_{33} - \theta_2 \cdot B_{34} \\ \dot{B}_{44} = -2 \cdot B_{34} - \theta_2 \cdot B_{44} \end{array} \right.$$

4.2.2 Réalisation de des observateurs interconnectés :

Les observateurs interconnectés (figure 4.6) se composent essentiellement de :

- Un étage de multiplication de gain avec l'erreur d'estimation.
- Un étage qui réalise l'estimation des états (z_2, z_3, z_5) pour le premier sous-système (3.4) et (z_1, z_3, z_4, z_6) pour le second (3.5)

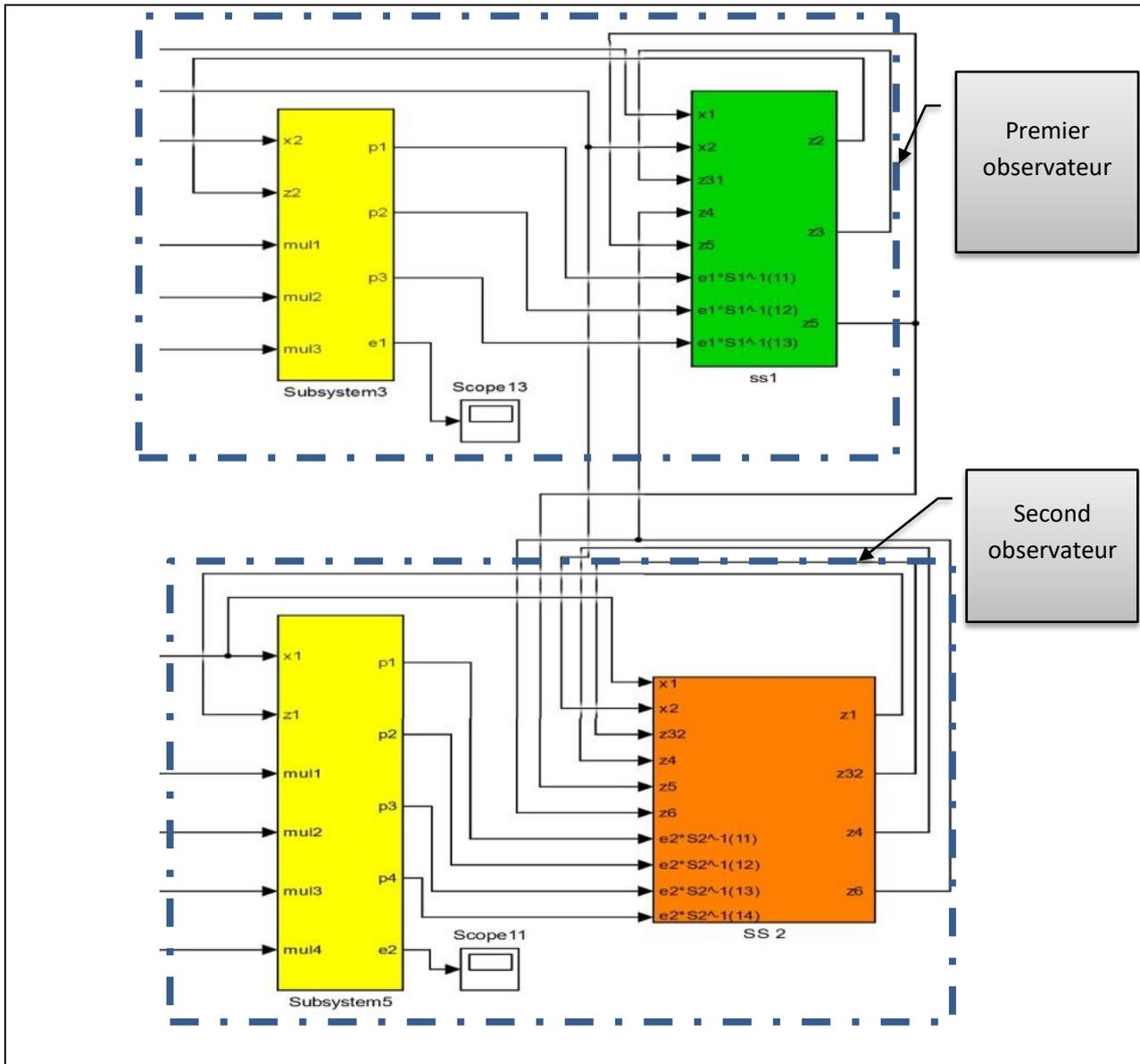


Figure 4.6. partie observateur interconnecté du modèle Simulink

Le second étage est donné sous sa forme éclatée pour les deux observateurs (figures 4.7.a et 4.7.b), leurs implémentations sont tirées à partir des sous-systèmes (3.4) et (3.5).

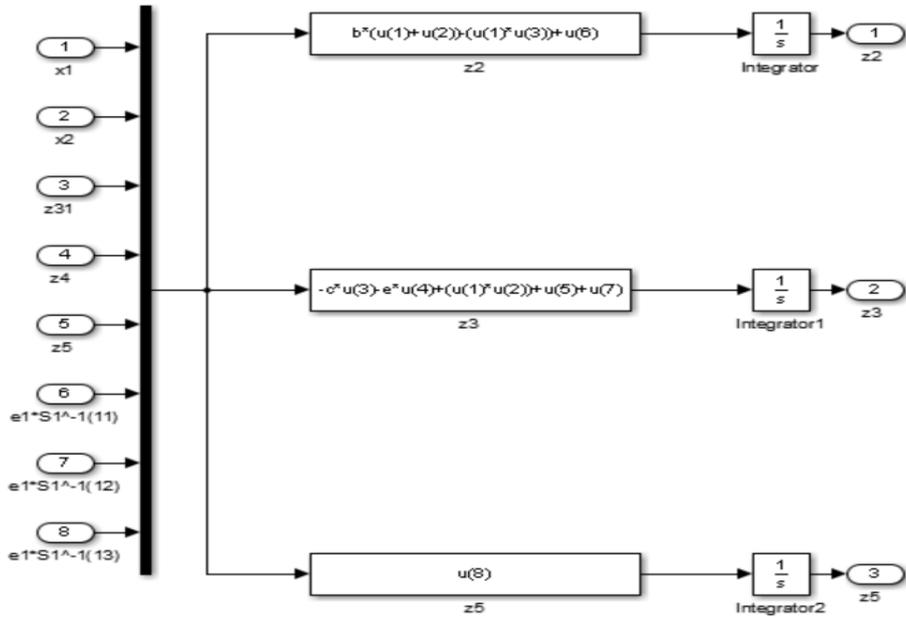


Figure 4.7.a états estimés du sous-système 1 (z_2 - z_{31} - z_5)

Ce sous-système admet en entrée les états calculés x_1 et x_2 ainsi que les états estimés z_{31} , z_4, z_5 et les gains issus du calcul $S_1^{-1} \cdot C_1^T \cdot (x_2 - \hat{x}_2)$, et donne en sortie les états estimés z_2, z_{31}, z_5 .

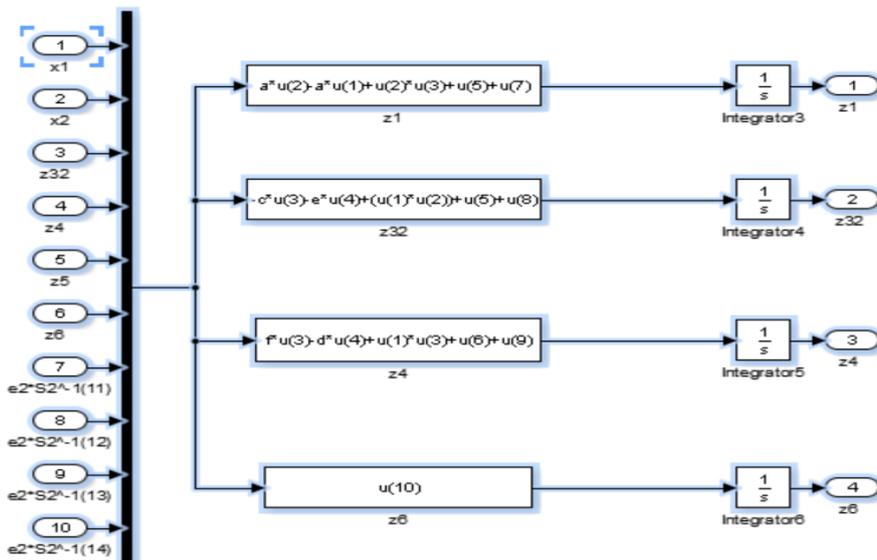
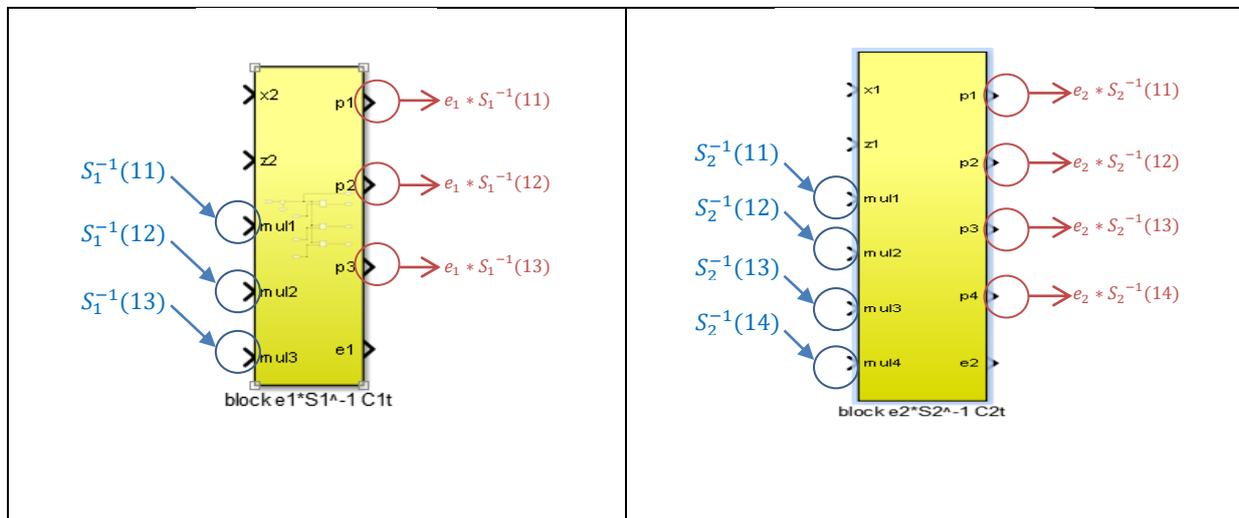


Figure 4.7.b états estimés du sous-système 2 (z_1 - z_{32} - z_4 - z_6)

Ce sous-système admet en entrée les états calculés x_1 et x_2 ainsi que les états estimés z_3, z_4, z_5, z_6 ainsi que les gains issus du calcul $S_2^{-1} \cdot C_2^T \cdot (x_1 - \hat{x}_1)$, et donne en sortie les états estimés z_2, z_{31}, z_5 .

Les étages de multiplication (Figure 4.8) réalisent les multiplications des gains $S_1^{-1}C_1$ et $S_2^{-1}C_2$ par les erreurs d'estimations de sorties $e_1 = x_1 - z_1$ et $e_2 = x_2 - z_2$ respectivement.



a) bloc $e_1 * S_1^{-1}C_1$

b) bloc $e_2 * S_2^{-1}C_2$

Figure 4.8. Blocs $e_i * S_i^{-1}C_i$

- Les entres du bloc $e_1 * S_1^{-1}C_1$ sont respectivement les éléments S_{11}, S_{12}, S_{13} de la matrice S_1^{-1} .
- Les entres du bloc $e_2 * S_2^{-1}C_2$ sont respectivement les éléments $B_{11}, B_{12}, B_{13}, B_{14}$ de la matrice S_2^{-1} .
- Les sorties du bloc $e_1 * S_1^{-1}C_1$ sont respectivement les produits $e_1 \cdot S_{11}, e_1 \cdot S_{12}, e_1 \cdot S_{13}$.
- Les sorties du bloc $e_2 * S_2^{-1}C_2$ sont respectivement les produits $e_2 \cdot B_{11}, e_2 \cdot B_{12}, e_2 \cdot B_{13}, e_2 \cdot B_{14}$.

4.3 Simulation et interprétation des Résultats

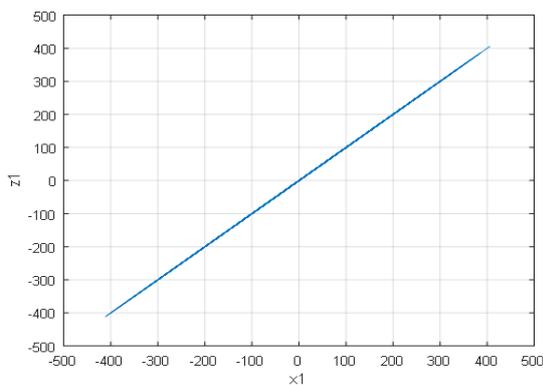
Après l'exécution du modèle Simulink, différents types de résultats doivent être interprétés afin de pouvoir :

- Déterminer la synchronisation des états du système avec leurs estimées.
- Représenter les messages reconstruits.
- Analyser du comportement du gain.
- Faire une représentation DSPACE pour confirmer les résultats obtenus sous Simulink.

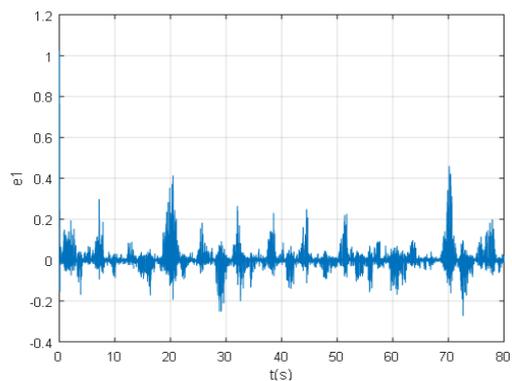
4.3.1 Interprétation des erreurs d'estimation et des plans de phase

L'intérêt d'interpréter les erreurs d'estimation ainsi que les plans de phase est de déterminer la synchronisation du système avec les observateurs interconnectés, cette synchronisation est essentielle pour avoir une bonne reconstruction des entrées.

Après la simulation du modèle Simulink, les résultats suivants sont obtenus :

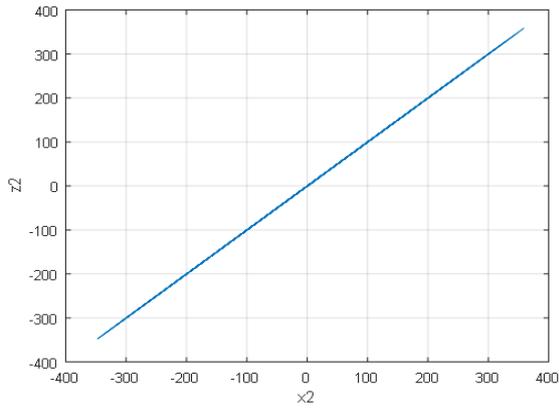


a) Plan de phase x_1-z_1

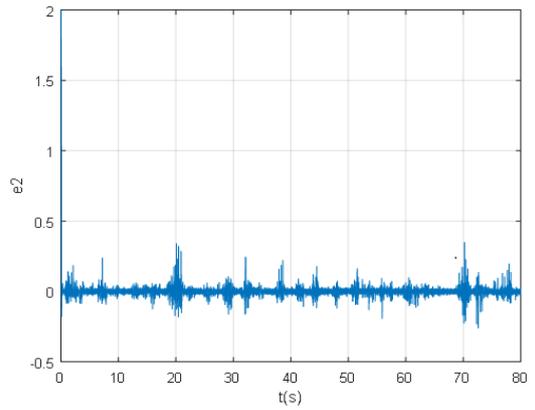


b) Evolution de l'erreur d'estimation $x_1 - \hat{x}_1$ en fonction de t

Figure 4.9 a) plans de phase et **b)** erreur de l'état x_1 et son estimé z_1

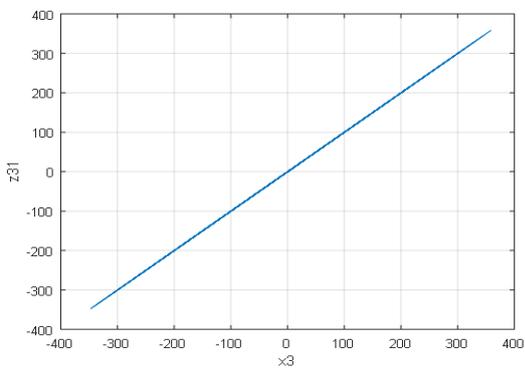


a) Plan de phase $x_2 - z_2$

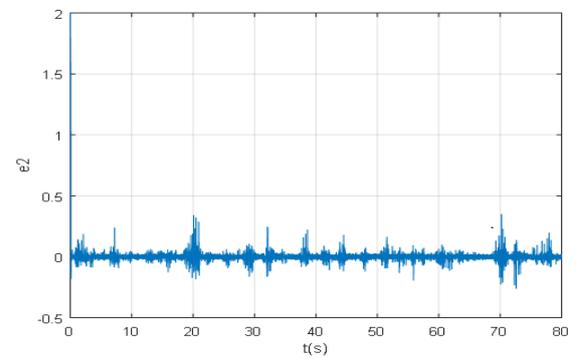


b) Evolution de l'erreur d'estimation $x_2 - z_2$ en fonction de t

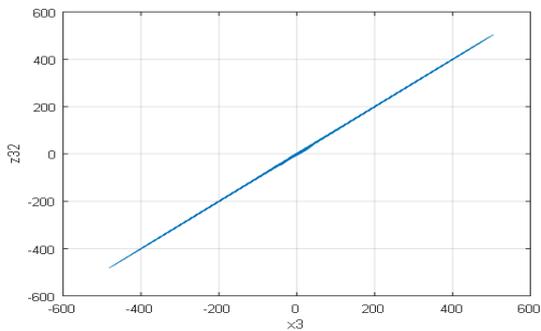
Figure 4.10. plans de phase et erreur de l'état x_2 et son estimé z_2



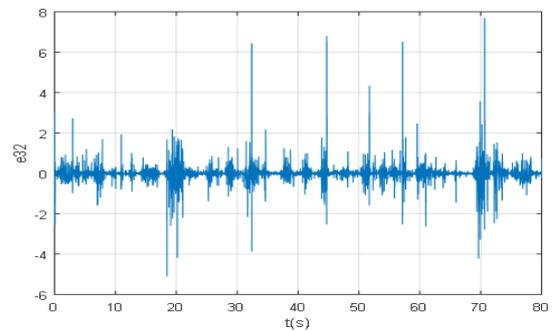
a) Plan de phase $x_3 - z_{31}$



b) Evolution de l'erreur d'estimation $x_3 - z_{31}$ en fonction de t

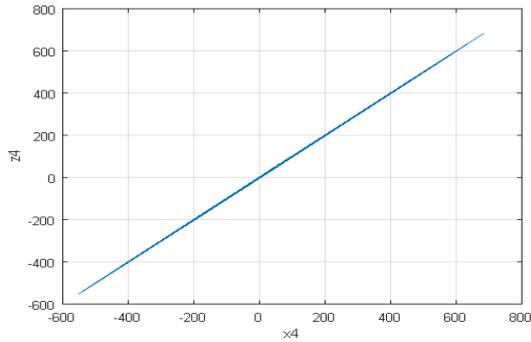


c) Plan de phase $x_3 - z_{32}$

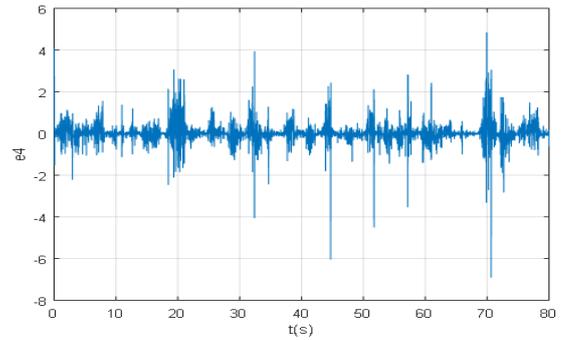


d) Evolution de l'erreur d'estimation $x_3 - z_{32}$ en fonction de t

Figure 4.11. plans de phase et erreur de l'état x_3 et ses estimés z_{31} et z_{32}



a) Plan de phase x_4-z_4



b) Evolution de l'erreur d'estimation $x_4 - z_4$ en fonction de t

Figure 4.12. plans de phase et erreur de l'état x_4 et son estimé z_4

Dans tous les plans de phases obtenus ci-dessus, la relation entre chaque état et son estimé est une relation linéaire soit $z_i = x_i$, et les erreurs d'estimation sont très petites par rapport aux amplitudes des états (entre 400 et 600) ceci montre que l'observateur est bien synchronisé avec le système de Qi. Cette synchronisation va aider à reconstruire les signaux d'entrée. Après l'analyse des plans de phases ainsi que les erreurs d'estimation, on conclut que l'on obtient une bonne estimation des états.

4.3.2 Reconstruction des messages d'entrée

La reconstruction des messages d'entrée se fait par intégration, vu que les messages reconstruits sont considérés comme étant des états appartenant aux deux sous-systèmes de l'observateur. Les paramètres de l'observateur θ_1 et θ_2 ont été choisis pour avoir une bonne reconstruction, les valeurs utilisées sont :

$$\theta_1 = 75 ; \theta_2 = 100$$

Pour exécuter la simulation des observateurs interconnectés, les messages m_1 et m_2 sont choisis comme suit :

$$m_1(t) = 20 \cdot \sin(t/6)$$

Et

$$m_2(t) = 5.\sin(3t) + 20\sin(t)$$

Remarque : le choix de la dynamique des entrées est établi en sorte qu'elle soit plus lente que celle du système de Qi, cela justifie pourquoi les entrées $m_1(t)$ et $m_2(t)$ ont été choisis de la sorte. Après simulation on obtient les résultats suivants :

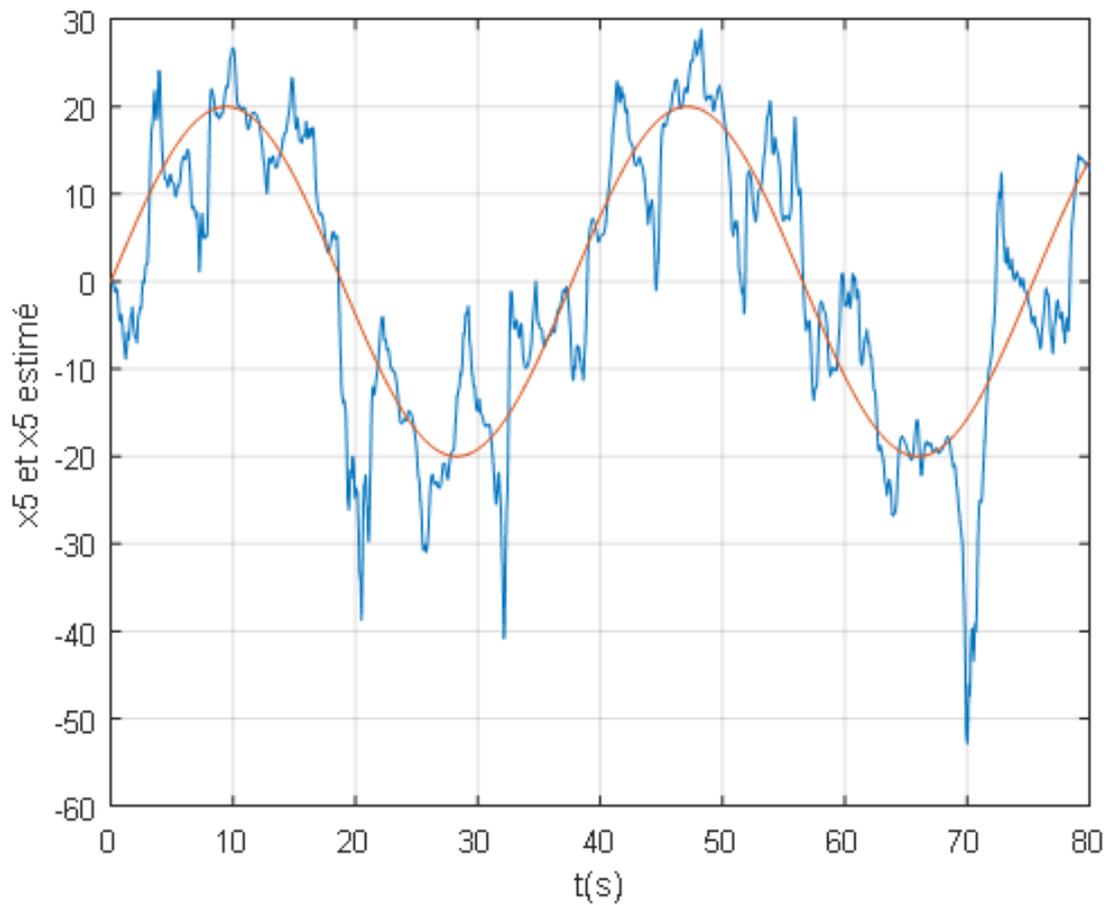


Figure 4.13. Représentation du message d'entrée m_1 (en rouge) et du message reconstruit (en bleu)

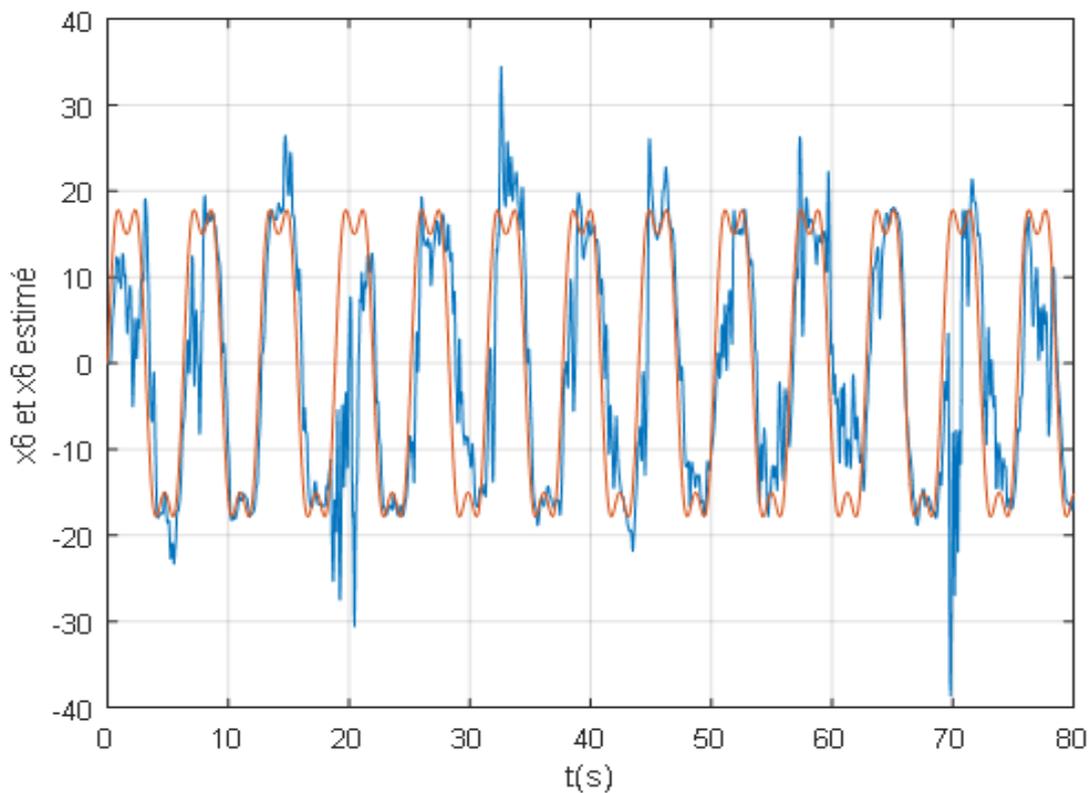


Figure 4.14. Représentation du message d'entrée m_2 (en rouge) et du message reconstruit (en bleu).

D'après les figures précédentes on peut dire que la reconstruction des entrées $m_1(t)$ et $m_2(t)$ est obtenue avec succès, car on arrive à distinguer que le signal reconstruit suit le signal original. On peut donc conclure que les observateurs interconnectés à grand gain recopient parfaitement (ou efficacement) le système de Qi.

4.3.3 Comportement des gains

On constate néanmoins que des instants de non observabilité se présentent sous forme de pics, cela est causé par les éléments des matrices S_1 et S_2 qui tendent vers zéro, en calculant leurs déterminants on trouve que leurs valeurs tendent vers zéro aussi, par conséquent S_i^{-1} devient grand ce qui explique les pics obtenus, exemple : $t = 70$. On présente un exemple ci-dessous dans les figures 4.15 et 4.16, la première expose la valeur du déterminant $\det(S_1^{-1})$ en $t = 70$, la seconde, montre le pic causé par cette valeur :

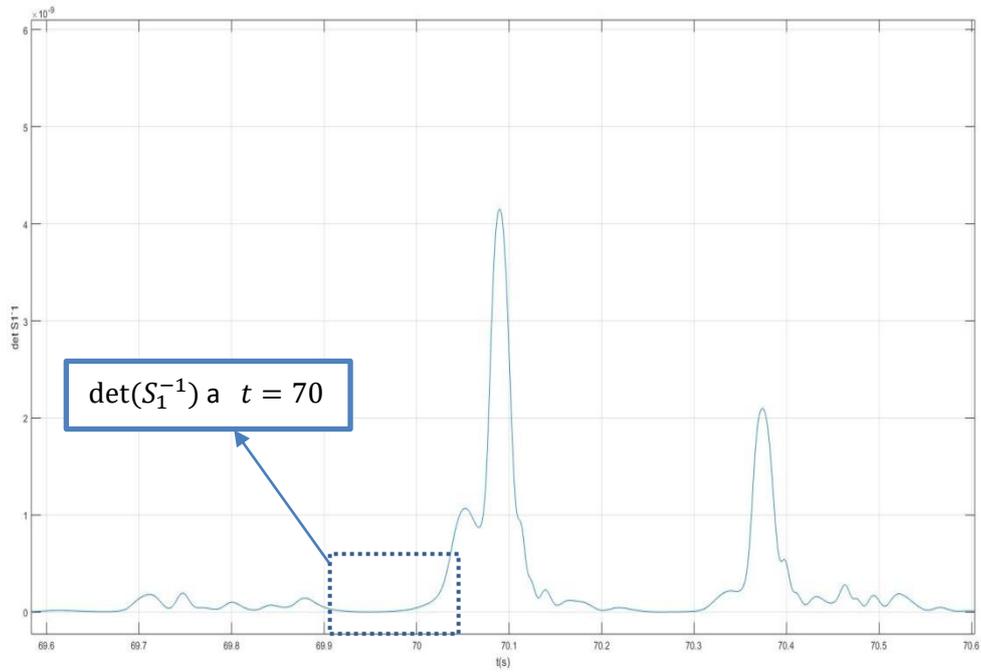


Figure 4.15 valeur de $\det(S_1^{-1})$ en fonction de t

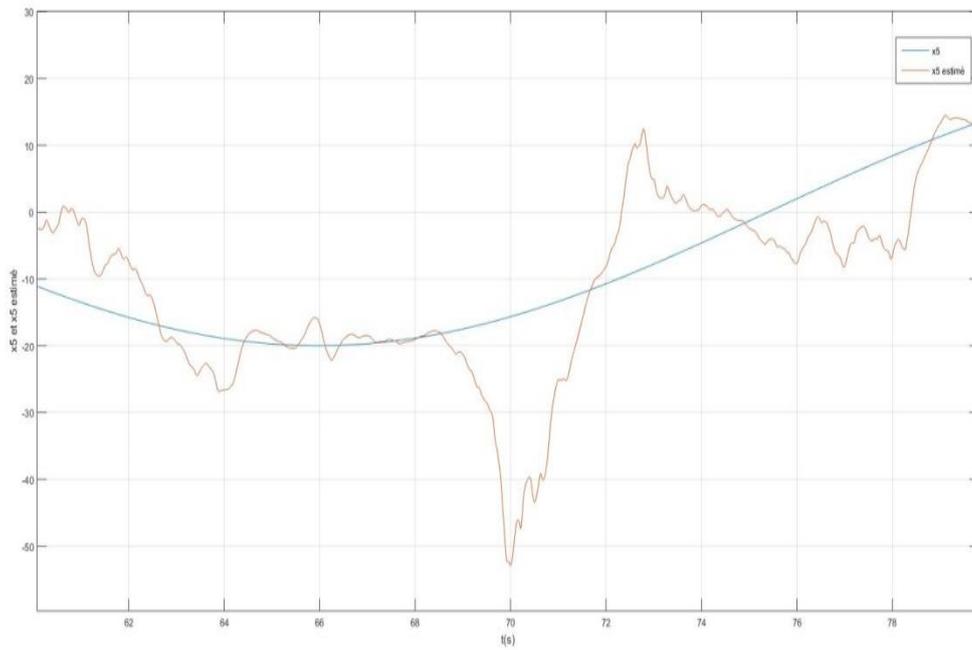


Figure 4.16 influence du gain sur la reconstruction à $t = 70$

Après analyse des deux figures on remarque qu'à $t = 70$ on est dans un cas de non observabilité, ce dernier va influencer sur la qualité de la reconstruction figure (4.16).

4.4 Implémentation sous DSPACE

Dans cette dernière partie, notre simulation faite sous Simulink va être implémentée sur la carte DS1104. Tout en passant par l'interface de visualisation en temps réel CONTROL DESK, elle va permettre de visualiser les signaux obtenus sous Simulink à partir du schéma Simulink/DSPACE.

4.4.1 Présentation de la carte DS1104

Le pilotage en temps réel des systèmes continus se fait à l'aide d'un PC connecté à la carte DSPACE DS1104 [24]. La programmation se fait à l'aide de l'outil de modélisation SIMULINK, qui aide à poser le problème d'une manière graphique en utilisant les blocs interconnectés. En fait, beaucoup de systèmes de développement en temps réel à base de DSP viennent maintenant avec une interface à Simulink par laquelle ils peuvent convertir les blocs de Simulink en un code machine qui peut être exécuté sur un système à base de DSP. Ceci réduit considérablement le temps de développement et de prototypage pour le contrôle des systèmes. Le prototypage passe alors par trois étapes :

- 1. Construction du système de commande en utilisant les blocs de Simulink
- 2. Simulation du système pour voir les résultats dans différents scénarios.
- 3. Exécution du modèle en temps réel à travers la carte DS1104.

La configuration minimale requise pour utiliser le système DSPACE est :

Processeur : Pentium 4 à 2 GHz (ou équivalent)

Mémoire vive : 2 GB RAM

Espace disque : 5.5 GB

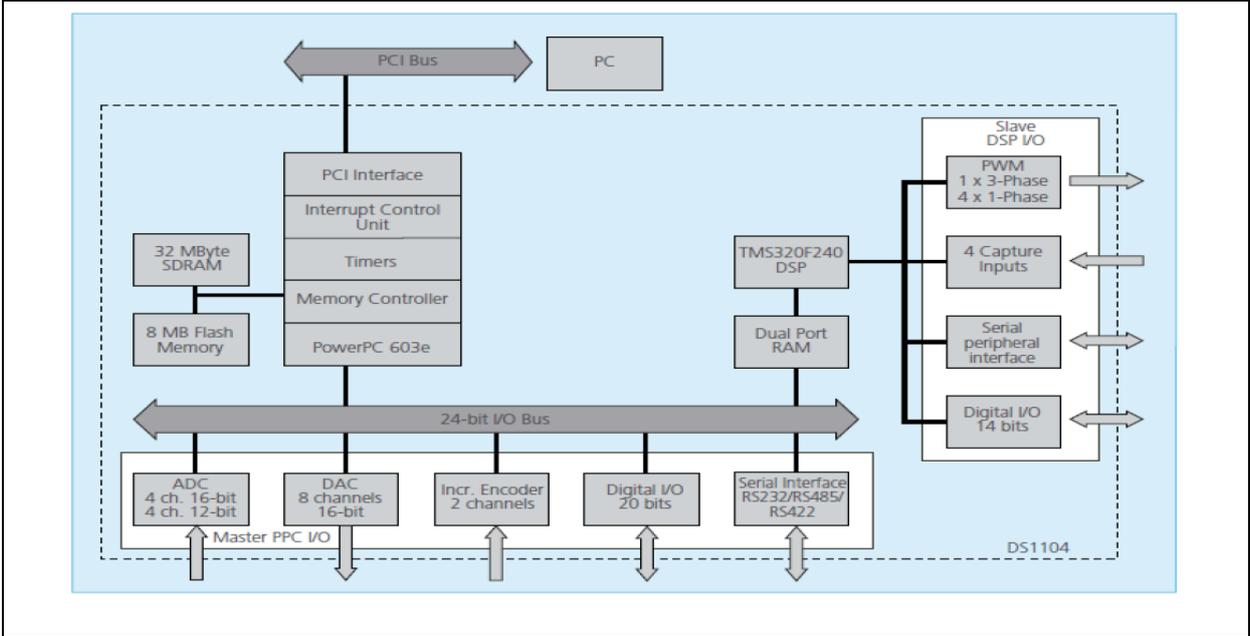


Figure 4.17. Architecture de la carte DS1104

Pour implémenter la commande temps réel en utilisant la carte « DSPACE DS1104 R&D Controller Board » et le logiciel MATLAB, on a besoin de :

a) La carte de contrôle DSPACE DS1104 :



Figure 4.18. La carte de contrôle DSPACE DS1104

b) contrôle desk :

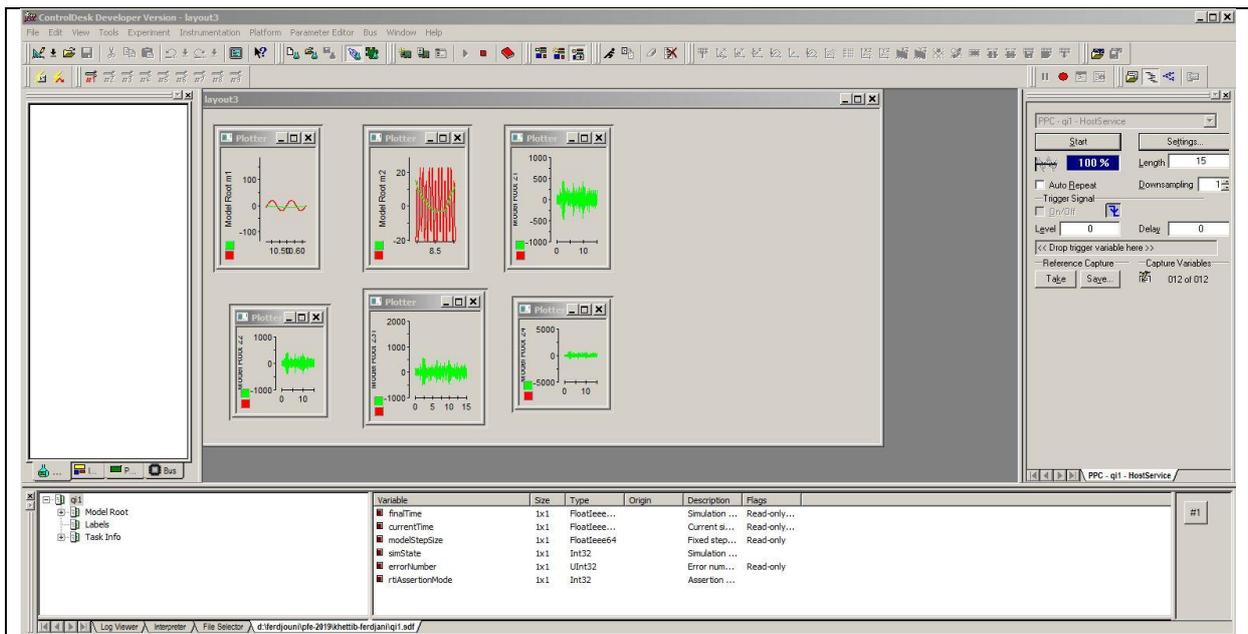


Figure 4.19 exemple de l'interface du logiciel control desk

Control Desk est une interface qui permet de visualiser en temps réel différentes variables du programme développé sous Simulink et de modifier également des paramètres définissant le mode de fonctionnement des blocs constituant le schéma Simulink.

c) Panneau de connexion CP1104 :

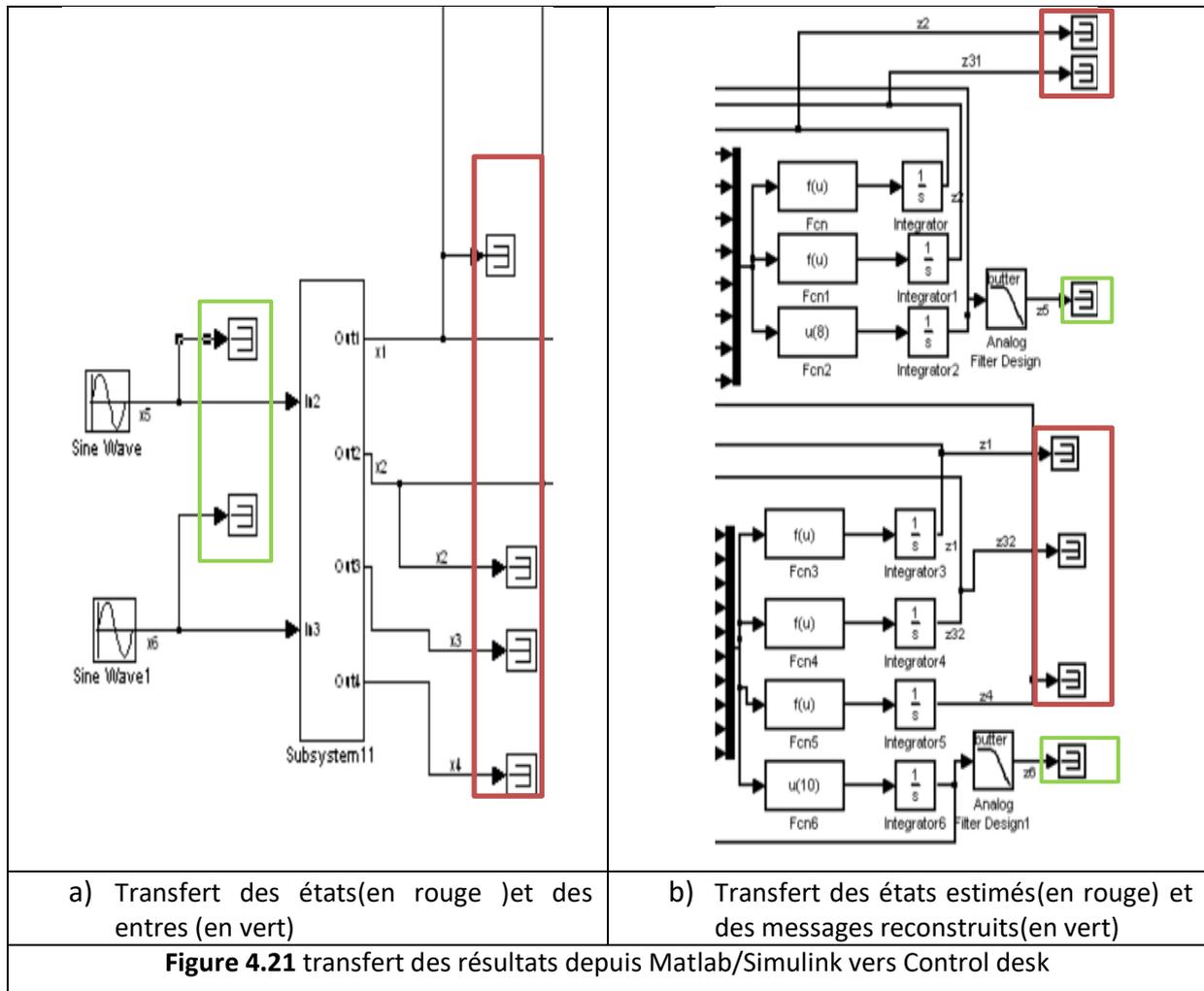


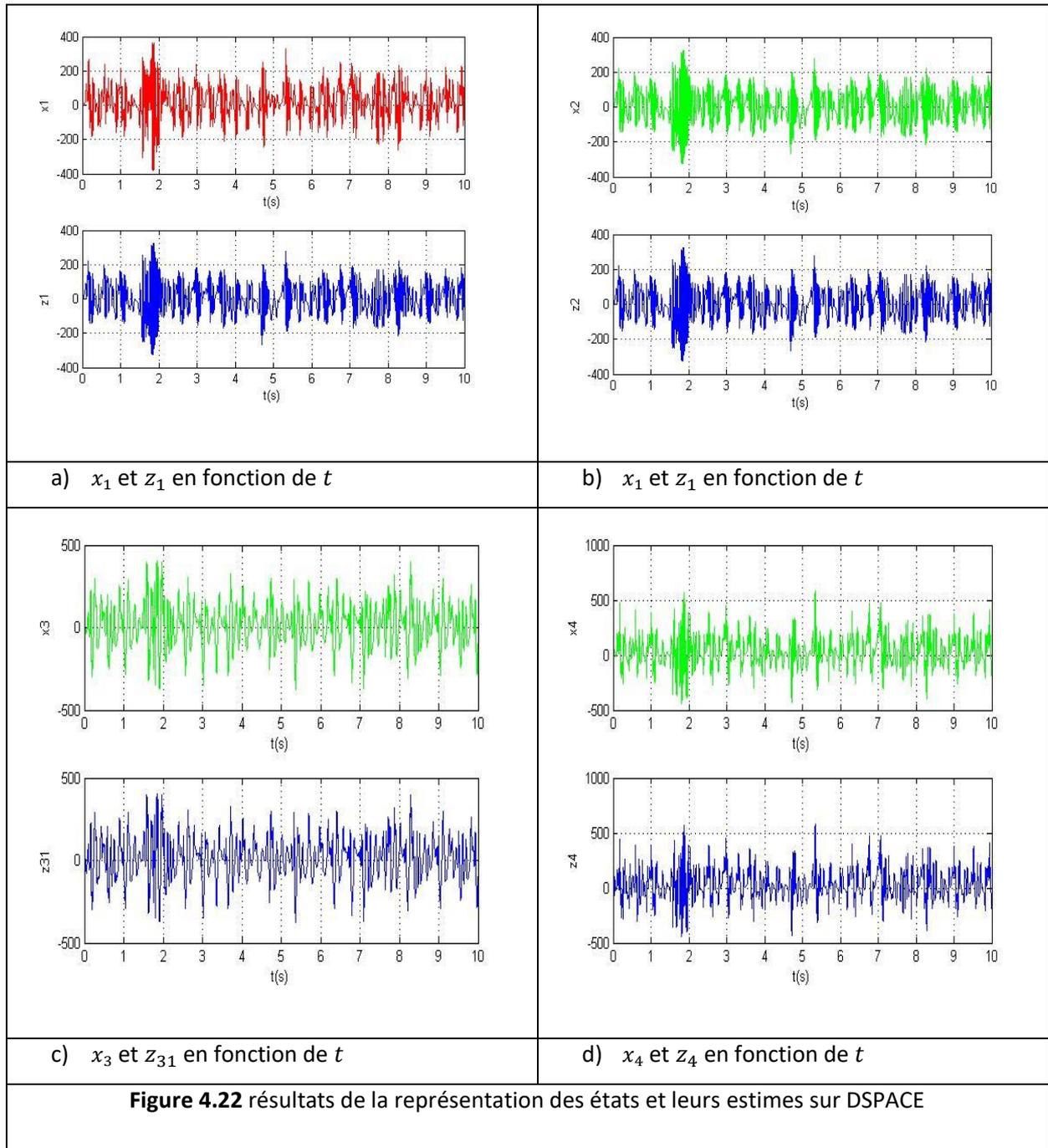
Figure 4.20 Illustration du Panneau de contrôle CP1104

Ce dernier représente l'interface entre le programme Simulink et l'environnement externe.

4.4.2 Résultats de simulation sous DSPACE

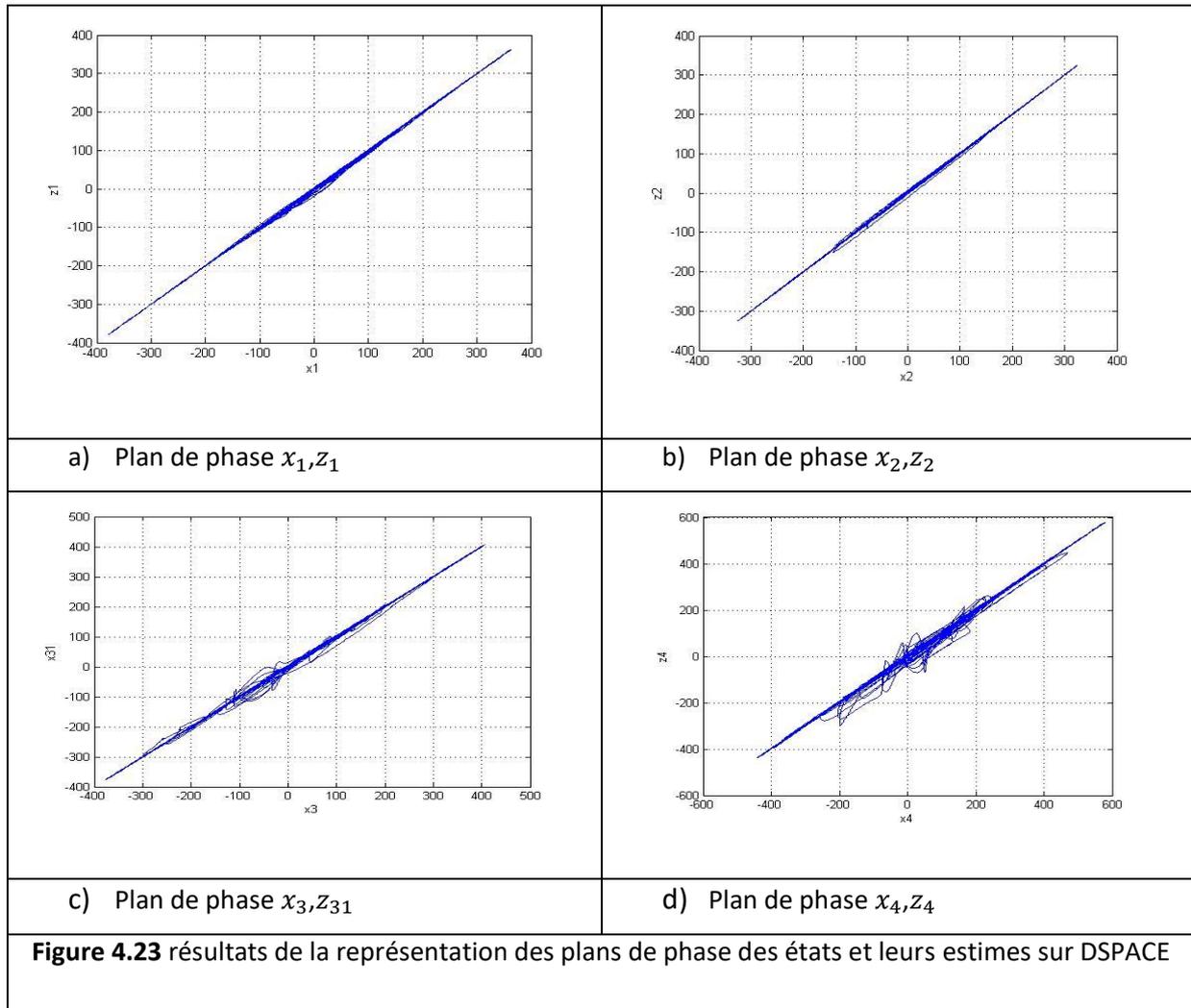
en envoyant les résultats du modèle Simulink vers le logiciel CONTROL DESK (figure 4.21), on a pu implémenter les signaux suivant sur DSPACE : x_1 et son estimé z_1 , x_2 et son estimé z_2 , x_3 et son estimé z_{31} , x_4 et son estimé z_4 , ainsi que leur plans des phases, comme le montre les figures ci-dessous :





L'analyse visuelle de la figure 4.22 montre que l'évolution des états ainsi que leur estimé dans le temps sont presque similaire.

les plans de phase des états et leurs estimée sont simulé sous dSPACE, leurs tracés sont données dans la figure 4.23:



Les plans de phase implémentée dans d SPACE nous montrent que l'estimation est acceptable, car il y'a une forme de linéarité entre chaque état et son estimé.

4.4.3 Simulation des messages et leurs reconstructions

Comme le montre la figure 4.21, les messages d'entrée et les messages reconstruits ont été transféré vers dSPACE pour les simuler, le premier message est un signal a a une amplitude de $A = 20$, et une fréquence de $f = 50\text{hz}$, le deuxième message est une somme de deux sinusoïdes, la première a une amplitude de $A = 20$, et d'une fréquence de $f = 5\text{hz}$, et la deuxième a une amplitude de $A = 5$, et d'une fréquence de $f = 150\text{hz}$

Le résultat de la simulation des messages d'entre ainsi que leur reconstruction sont donnés dans les figures (4.24) et (4.25):

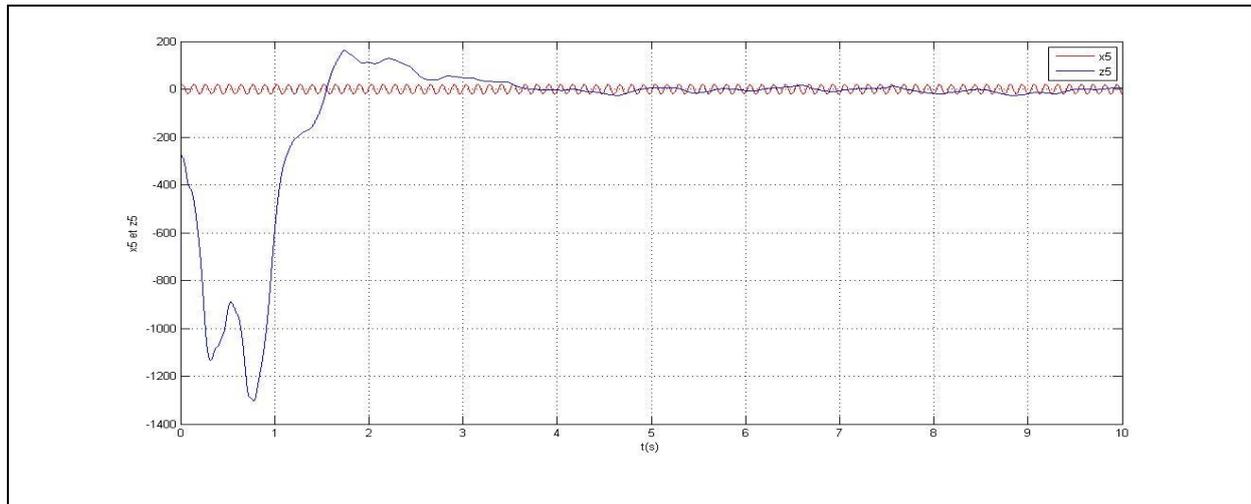


Figure 4.24 simulation de l'entrée x_5 et sa reconstruction z_5 sous dSPACE

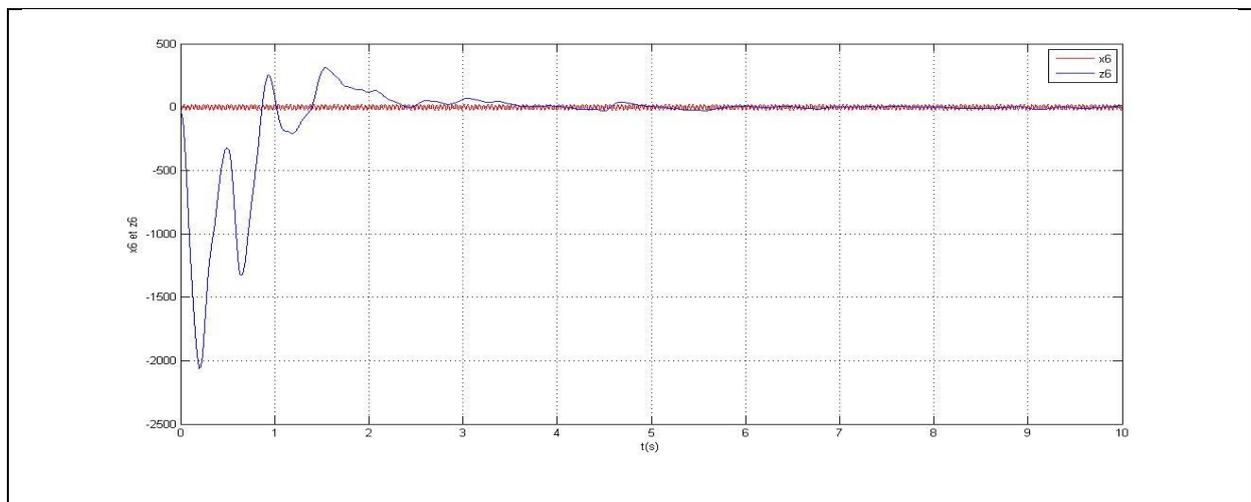


Figure 4.25 simulation de l'entrée x_6 et sa reconstruction z_6 sous dSPACE

Les résultats précédents montrent que le système réussi a reconstruire l'amplitude des messages d'entrée d'une manière efficace.

4.4.4 Conversion analogique des signaux et interprétation par oscilloscope

Dans cette partie, on va établir une convention digitale-analogique des signaux et des états et des estimées, cette convention se fait à l'aide des blocs DAC (Digital Analog Converter) sous Matlab/Simulink comme le montre la figure 4.26 :

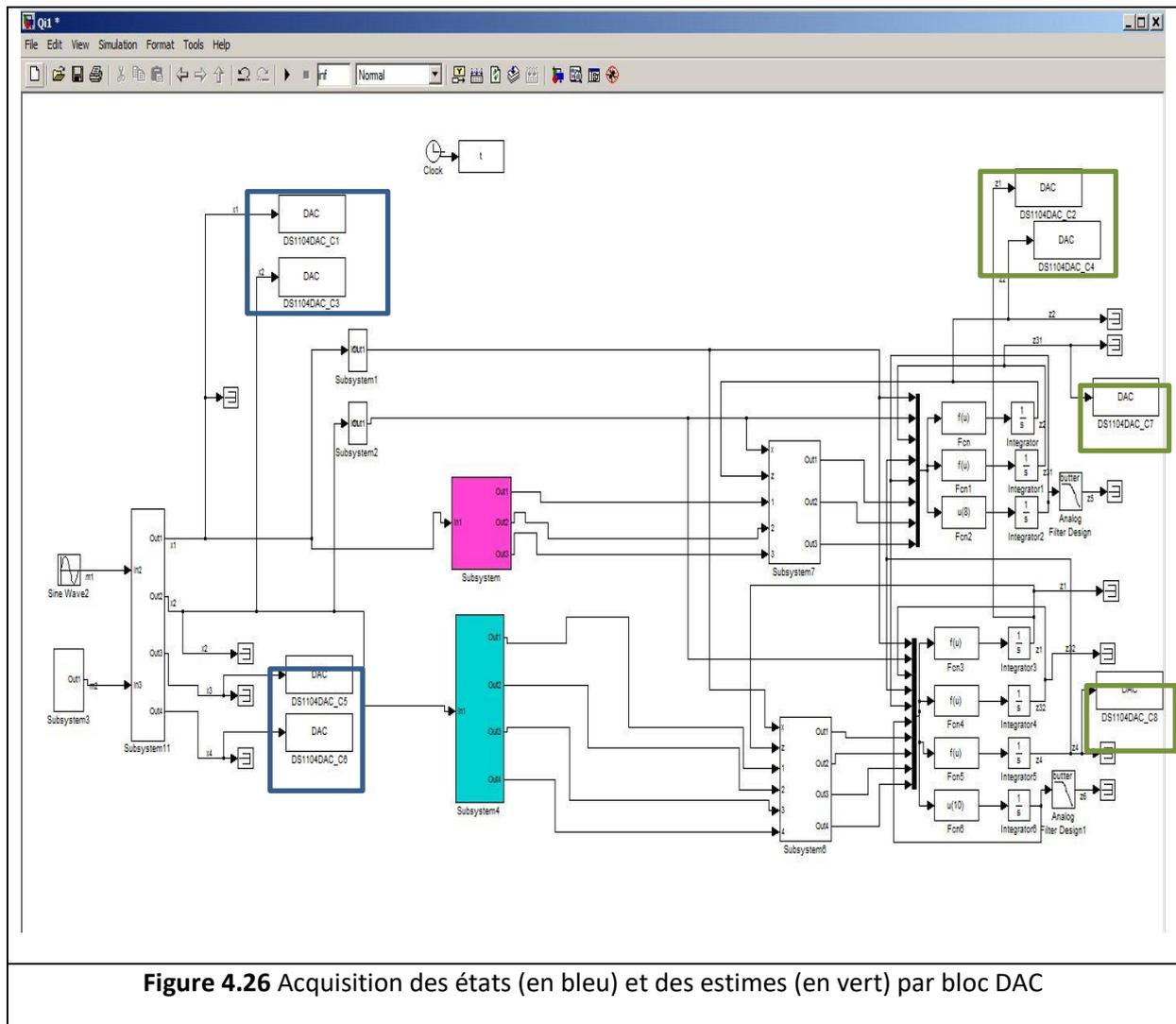
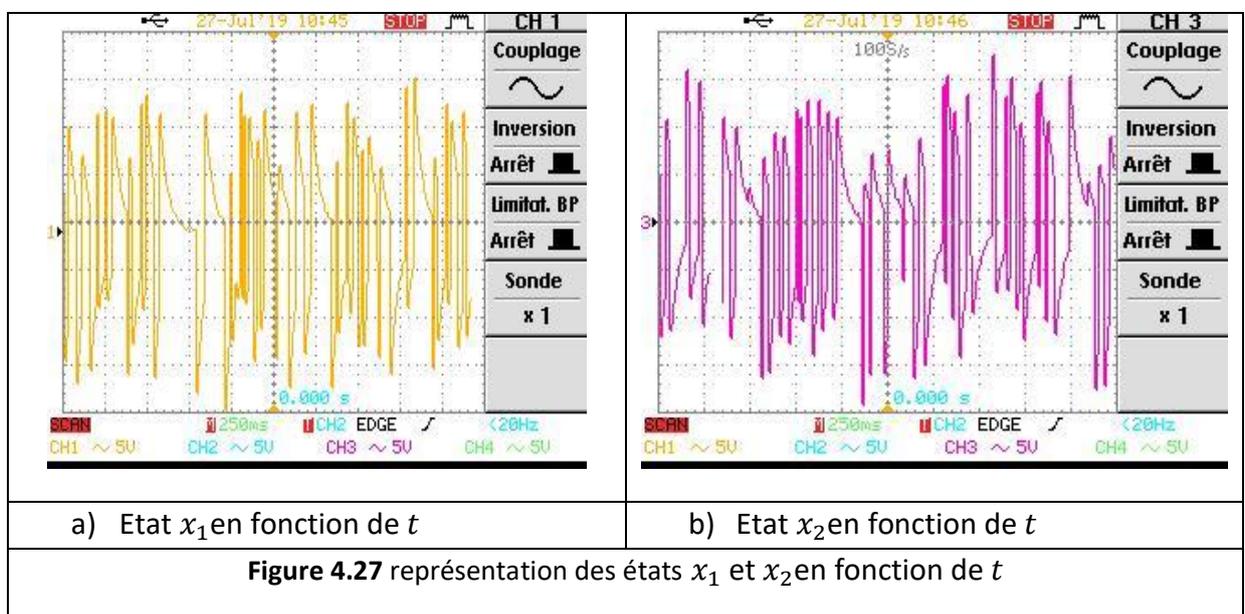


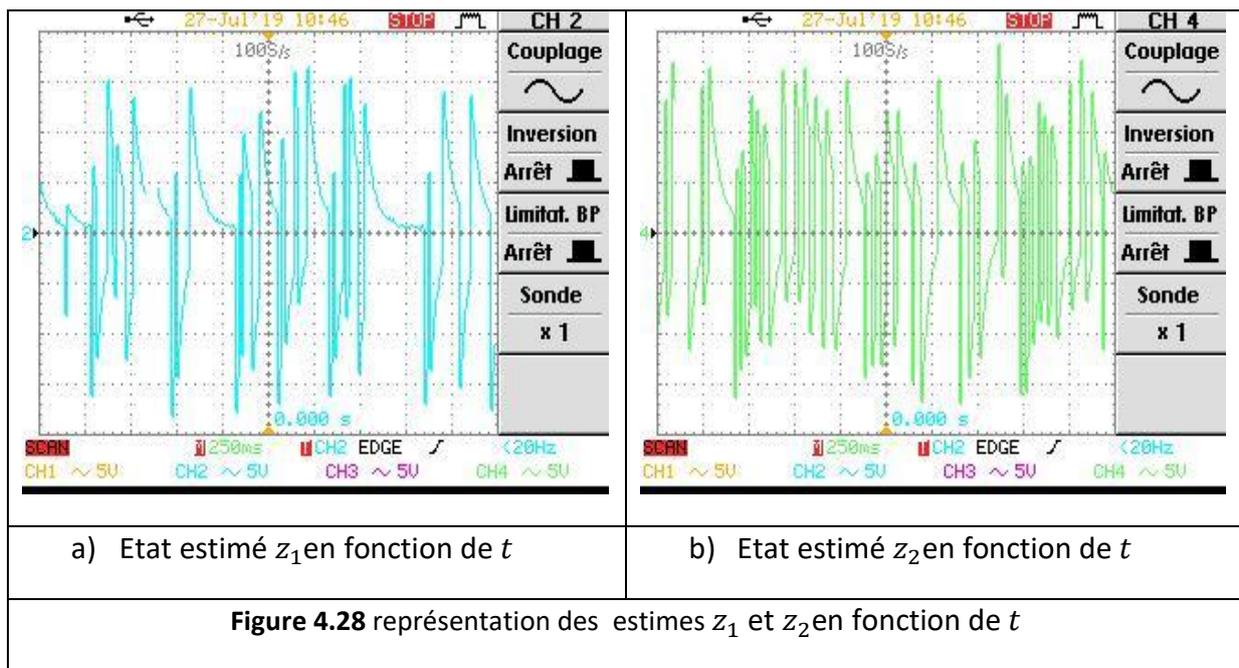
Figure 4.26 Acquisition des états (en bleu) et des estimates (en vert) par bloc DAC



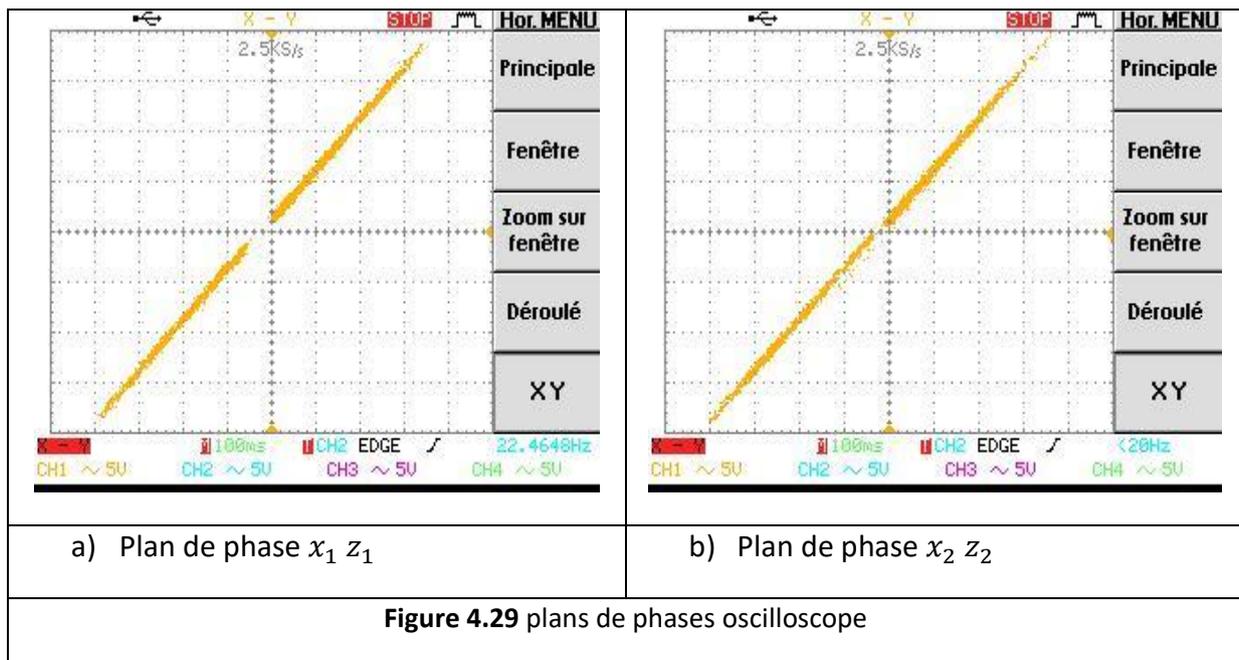
a) Etat x_1 en fonction de t

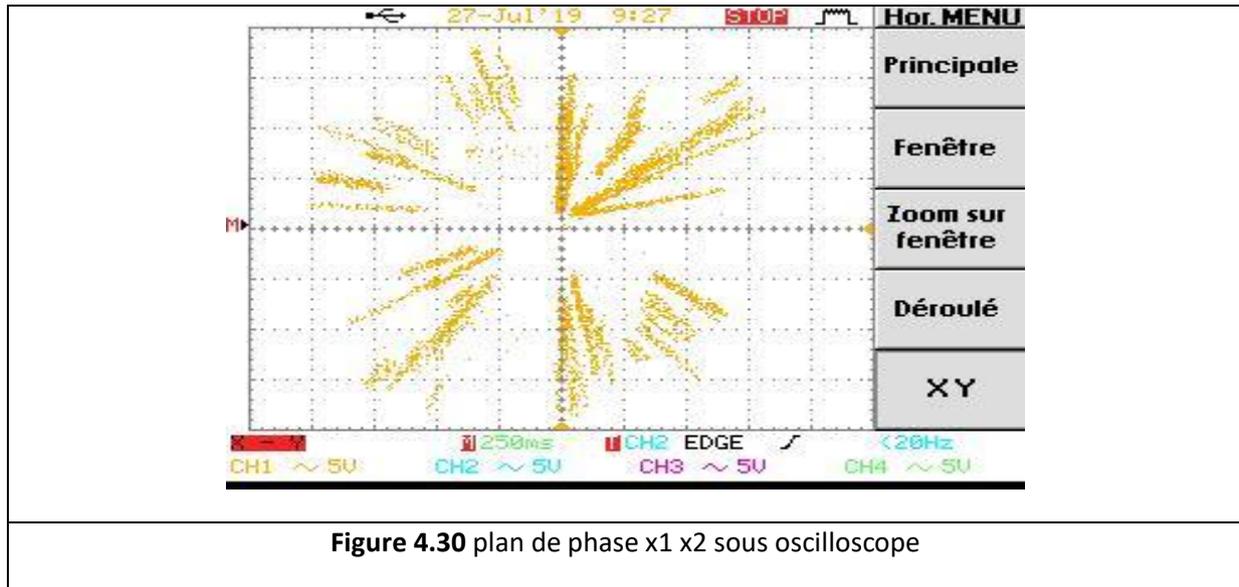
b) Etat x_2 en fonction de t

Figure 4.27 représentation des états x_1 et x_2 en fonction de t



On va maintenant représenter les plans de phase des résultats obtenu dans les figures 4.27 et 4.28 :





On déduit à partir des résultats de la figure (4.29) que la synchronisation obtenue à partir de l'implémentation dSPACE est satisfaisante.

La figure (4.30) montre l'attracteur formé par le plan de phase entre x_1 et x_2

4.5 Conclusion

Ce chapitre se veut être pauvre en textes, mais riche en images, ce qui est en quelque sorte logique puisqu'il présente les systèmes réalisés et montre les résultats obtenus

Après avoir fait une étude détaillée des systèmes chaotiques et les observateurs interconnectés à grand gain durant les chapitres précédents, Nous avons fait la simulation sous Simulink de deux observateurs interconnectés à grand gain et nous avons pu reconstruire les états du système de Qi à partir des états mesurés avec succès.

Une implémentation sous dspace a consolidé notre travail

Conclusion générale

Le travail réalisé dans ce mémoire était de synthétiser deux observateurs interconnectés à grand gain pour le système de Qi mis sous forme interconnectée, analyser leur convergence et effectuer leur simulation sous Matlab / Simulink, et enfin sous dSPACE.

Une étude détaillée des systèmes chaotiques et les observateurs interconnectés a grand gain a été faite, en effet :

- Dans le chapitre 1 nous avons présenté des généralités concernant les systèmes dynamiques chaotique (leurs caractéristiques, leurs points fixes, leur espaces de phase, les exposants de Lyapunov correspondants ,la section de point carré, le diagramme de bifurcation) à partir desquelles nous avons étudié le système de Qi, et, réaliser la simulation de ce dernier afin de visualiser et tracer les courbes des plans de phases de ce dernier , sa section de Pointcarré ,son diagramme de bifurcations, ses exposants de Lyapunov, ainsi que le calcul de ses points fixes.
- Dans le chapitre 2, nous avons présenté dans un premier temps, le principe de l'observateur ainsi que son fonctionnement, dans une deuxième étape, nous avons donné une définition de l'observabilité linéaire et non linéaire, et les conditions d'observabilité ainsi que les problématiques d'observation, enfin, on a introduit l'observateur a grand gain .

- Dans le chapitre 3, on a introduit par addition des messages dans un système de Qi, nous avons mis ce dernier sous une forme interconnectée, à partir de laquelle une technique de synthèse de deux observateurs interconnectés à grand gain est développée, elle consiste dans un premier temps, à introduire les équations dynamiques de Lyapunov dans les deux sous-systèmes des observateurs interconnectés, puis dans un second temps, à faire une analyse de convergence, dans cette partie, les paramètres de réglage des observateurs sont déterminés pour que l'erreur de l'estimation des états tende vers zéro dans le régime permanent .
- Dans le chapitre 4, Nous avons présenté le modèle Simulink de deux observateurs interconnectés à grand gain et nous avons pu reconstruire les états du système de Qi à partir des états mesurés avec succès. Une implémentation sous dspace a consolidé notre travail.

Les résultats obtenus sont satisfaisants étant donné que les l'estimation des erreurs nous a permis de reconstruire fidèlement les états désirés.

Ce travail est cependant loin d'être terminé, en effet, il peut constituer une plateforme pour d'autres sujets de fin d'études, tels que une étude comparative avec d'autres types d'observateurs dédiés aux systèmes chaotiques pour la transmission sécurisée des données afin de faire une réelle validation de cette méthode, ou bien une implémentation hard sur FPGA des blocs constituant les deux observateurs interconnectés à grand gain réalisés, cette implémentation sur circuit va permettre de gagner en rapidité, etc.

Bibliographies

- [1] Y. Derdour. Comparaison des Outils de Diagnostic par l'Analyse structurelle et la Theorie des Observateurs. Mémoire de Magister. Univ Oran. 2010.
- [2] G.Y. Qi,G.R. Chen,Y .Zhang , 2006, 'On a new asymmetric chaotic system', Chaos, Solutions and Fractals 37 (2008) 409–423.
- [3] L. M. Pecoraand T.L. Carroll, Synchronization in Chaotic Systems, Physicals Review and Letters, pp. 821–824, 1990.
- [4] L. M. Pecora and T.L. Carroll, Synchronized Chaotic signal and systems, Proceeding IEEE International conference of Acoustics, Speech, and Signal ICASSP' 92, Minneapolis, MN, USA, pp. 137–140, 1992
- [5] H. Dimassi, Synchronisation des systèmes chaotiques par observateurs et applications à la transmission d'informations. Université Paris Sud - Paris XI ; Université de Tunis El Manar, 2012.
- [6] H. Hamiche, Inversion à Gauche des Systèmes Dynamiques Hybrides Chaotiques. Application à la Transmission Sécurisée de Données, Thèse, Univ. Mouloud Mammeri de Tizi-Ouzou. Faculté de génie électrique et informatique. Département automatique, 2011.
- [7] H. Dang-vu, C. Delcarte: bifurcations et chaos une introduction à la dynamique contemporaine avec des programmes en Pascal, Ellipses Fortran et Mathematica,2000.
- [8] S. H. Kellert, In the Wake of Chaos: Unpredictable Order in Dynamical Systems, University of Chicago Press 1993
- [9] E. N. Lorenz: The essence of chaos, University of Washington Press: The jessie and john Danz Lecture Series, 1993
- [10] R. Muñoz-Alicea: Introduction to Bifurcations and The Hopf Bifurcation Theorem for Planar Systems, Colorado State University, 2011.

- [11] T. Kailath : 'Linear Systems', Prentice Hall, Englewood Cliffs, 1980.
- [12] H. Nijmeijer, A. van der Schaft: 'Nonlinear Dynamical Control Systems', Springer,1990.
- [13] M. Oueder. Synthèse des observateurs pour les systèmes non linéaires. Automatique. Université de Caen, 2012. Français. <tel-01061799>
- [14] M. Ghanes : 'Observation et commande de la machine asynchrone sans capteur mécanique'.2005
- [15] R. Hermann, et A.J. Krener: "Nonlinear controllability and observability", IEEE Trans. on Automatic Control, vol. 22, pp. 728-740, 1977.
- [16] H. Hammouri et J. DeLeon, "Observer synthesis for state-affine systems", Proc 29th IEEE Conference on Decision and Control, Honolulu, Hawaii, pp. 784-785, 1990.
- [17] B. Larroque : Observateurs de systèmes linéaires Application à la détection et localisation de fautes, Université de Toulouse, p17-20, 2008.
- [18] Doyle JC, Stein G. Robustness with observers. IEEE Transactions on Automatic Control 1979; AC-24(4):607–611.
- [19] Esfandiari F, Khalil HK. Observer-based design of uncertain systems: recovering state feedback robustness under matching conditions. Proceedings of American Nuclear Society Conference, Monticello, IL, September 1987; 97–106.
- [20] Esfandiari F, Khalil HK. Output feedback stabilization of fully linearizable systems. International Journal of Control 1992; 56:1007–1037.
- [21] Gauthier JP, Hammouri H, Othman S. A simple observer for nonlinear systems application to bioreactors. IEEE Transactions on Automatic Control 1992, 37(6):875–880.
- [22] MEGHERBI OUERDIA. Etude et réalisation d'un système sécurisé à base de systèmes chaotiques. Mémoire de magister. Université mouloud Mammeri Tizi-Ouzou. 2013
- [23] F. J. Bejarano, M. Ghanes , J. P. Barbot, L. Second order sliding mode and adaptive observers for a chaotic system: a comparative study. IFAC World Congress, Jul 2008,Seoul,North Korea.
- [24] A. Darkawi. Initiation au système dSPACE, de l'interface RTI dans Simulink et de ControlDesk Next Génération 5.4. École d'ingénieur. France. 2016, pp.17