

UNIVERSITE SAAD DAHLAB DE BLIDA  
INSTITUT D'AERONAUTIQUE



MEMOIRE DE MAGISTERE  
EN  
AERONAUTIQUE

Présenté par :

**AISSANI Mouloud**

**Thème :**

**CALCUL DES PARAMETRES D'ECOULEMENT DANS  
LES CONDUITES DE SECTIONS COMPLEXES  
PAR LA METHODE DES ELEMENTS FINIS.**

Soutenu le : 03 / 07 / 2002.

**DEVANT LE JURY D'EXAMEN :**

Président :	Mr BOUKRAA Salah	Maître de Conférences à I.A.Blida
Rapporteurs :	Mr YOUBI ZINE Eddine	Maître de Conférences à I.A.Blida
	Mr ZEBBICHE Toufik	Chargé de cours à I.A.Blida
Examineurs :	Mr LARBI Salah	Maître de Conférences à E.N.P Alger
	Mr AMTOUT Lounis	Chargé de cours à I.A.Blida

Département d'Aéronautique, Faculté des Sciences, Université de BLIDA.

B.P. 270, Rue de Soumaa, Bld

Tél/ Fax : 025 43 36 36.

Email : aissani\_4216@yahoo.com

## RESUME

*Le présent travail a pour but de simuler numériquement l'écoulement laminaire incompressible dans les conduites de section complexe de forme mono et multi connexes par la méthode des éléments finis, dans le but de généraliser l'étude de l'écoulement de Poiseuille connue analytiquement que pour quelques sections simples (cercle, carré...) d'une part. D'autre part, de déterminer l'effet de changement de la géométrie d'une section de conduite sur l'évaluation du coefficient de perte de charge et la répartition des vitesses à travers la section ainsi que la contrainte de cisaillement et d'autres paramètres thermodynamique.*

*Pour cela, on a réalisé (après l'étude mathématique et numérique convenable), un programme traitant plusieurs sections complexes avec différents types d'éléments finis en résolvant des systèmes d'équations à grande dimension. La validation des résultats est faite avec quelques exemples typiques analytiques.*

## ABSTRACT

*The present work has objective to simulate numerically the incompressible laminar flow in driven them of complex type section for simply and multi-connexes by the finite elements method by developing several types of finite elements to the resolution. To, to generalize the study of the Poiseuille flow of analytically known, that for some simple sections (circle, square) on the one hand.*

*And on the other hand to determine the effect of change of the geometry of a section of conduct on the evaluation of the coefficient of cost loss and the speeds and pressure distribution through this section as well as the stress of shear and others dynamic parameters.*

*In order that, we have realized after the suitable numerical and mathematical study: A program processing several complex sections with different types of F.E.M by solving large equations system dimension. Such that, the validation of results is made with some analytic typical examples.*

## شكرا

### REMERCIEMENTS

إن العمل المُقدم، له هدف تمثيل بحسابات عددية تدفق الموائع الغير ضغوظة من صنف إنسيابي ( laminaire ) في أنابيب ذات مقطع عرضي معقد بشكل أحادي أو متعدد الفجوات، عن طريق استعمال طريقة العناصر المنتهية (F.E.M)، من أجل تعميم دراسة 'تدفق بوازي' 'Ecoulement de POISEUILLE'. المعروفة تحليليًا فقط لبعض المقاطع العرضية البسيطة الشكل -دائرة، مربع،...- من جهة. ومن جهة أخرى، تعيين تأثير تغير شكل مقطع الأنبوب: على حساب عامل فقد الحمولة وترتيب السرعات على سطح المقطع، وعلى حساب الإجهادات القصية ومعاملات أخرى ترموديناميكية.

وفي هذا السياق، قد قمنا بعد الدراسة الرياضية والرقمية المناسبة بإنجاز برنامج حسابي هام. حيث يقوم البرنامج بمعالجة عدة مقاطع عرضية للأنابيب بطرق مختلفة حسب أنواع العناصر المنتهية، بحل جمل معادلات ذات مجاهيل عديدة جدًا، وتم التحقق من صحة النتائج الرقمية بالمقارنة مع بعض النتائج التحليلية لأمثلة نموذجية.

Mes remerciements s'adressent également à Monsieur LALILI, Salah maître de conférences à l'ENP d'Alger et Chargé de cours, pour avoir accepté de faire partie de jury ainsi que pour ses remarques.

Jé remercie aussi Monsieur LAMIS chargé de cours à l'Institut Aéronautique qui a accepté de faire partie de jury et pour ses conseils appréciables.

Nous remercions finalement toute personne ayant participé de près ou de loin à la réalisation de ce travail.

Novo Email : [alimou\\_9116@yahoo.com](mailto:alimou_9116@yahoo.com)

Drout de Ce document : ENRICHET - [enrichet@yahoo.com](mailto:enrichet@yahoo.com)

## REMERCIEMENTS

*Je remercie Dieu tout puissant de m'avoir donné la force de mener à bien ce travail.*

*Je tiens à remercier particulièrement mon promoteur M<sup>r</sup> YOUBI Z.E. maître de conférences à l'université de BLIDA et actuellement son recteur pour ses orientations malgré ses divers engagements et surtout mon copromoteur M<sup>r</sup> ZEBBICHE Toufik, chargé de cours à l'institut d'Aéronautique pour son suivi continu et ses conseils précieux.*

*Mes remerciements vont aussi à monsieur BOUKRAA Salah maître de conférences à l'université de BLIDA et Chargé de cours pour avoir bien voulu d'examiner ce travail et participer comme président de jury de la thèse.*

*Mes remerciements s'adressent également à Monsieur LARBI Salah maître de conférences à l' E.N.P d'Alger et Chargé de cours, pour avoir accepté de faire partie de jury ainsi que pour ses remarques.*

*Je remercie aussi, Monsieur AMTOUT Lounis chargé de cours à l'institut Aéronautique qui a accepté de faire partie de jury et pour ses conseils appréciables.*

*Nous remercions finalement toute personne ayant participé de près ou de loin à la réalisation de ce travail.*

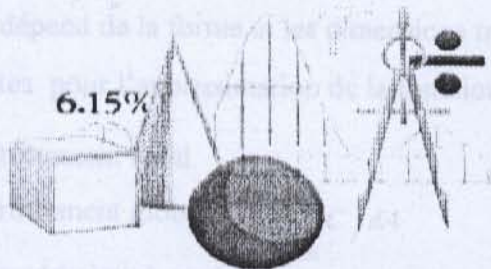
---

Notre email : aissani\_4216@yahoo.com

Email du Co-promoteur ZEBBICHE T. : toufikz@arabia.com

NOMENCLATURE DES SYMBOLES

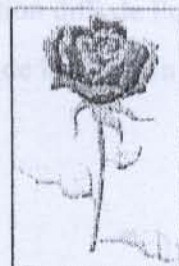
بِسْمِ اللَّهِ الرَّحْمَنِ الرَّحِيمِ



DEDICACES

Je dédie ce modeste travail à :

- Ma chère mère, mon père.
- Mes frères, et ma petite sœur.
- Ma famille et mes proches.
- Mes amis et mes collègues.



AISSANI Mouloud

NOMENCLATURE DES SYMBOLES

- $A, A^{(e)}$  : surface de la section d'une conduite, et la section d'un élément fini.  $m^2$
- $A, B, C, \dots, H$  : Points spécifiés sur la frontière du domaine.
- $a_0, b_0, a, b$  : Dimensions caractéristiques (cotes ou demi-cotes d'une géométrie). m.
- $a$  : Gradient de pression pour une longueur dz.
- $b$  : Largeur de la demi-bande de la matrice de rigidité.
- $B$  : Coefficient qui dépend de la forme et les dimensions transversales d'une conduite.
- $c_1, c_2, \dots, c_8$  : Constantes pour l'approximation de la fonction  $N(x, y)$ .
- $C_f$  : Coefficient de frottement local.
- $C_F$  : Coefficient de frottement global  $= \frac{1}{A} \int_A C_f dA$
- $d_1, d_2$  : Dimensions caractéristiques. m
- $D$  : Diamètre, dimension linéaire caractéristique, m.
- $D_H$  : Diamètre hydraulique.
- $E$  : Energie interne massique. Energie mécanique total.
- $E_c$  : Energie cinétique.
- $F, F_i^{(e)}$  : Force de frottement. Elément du vecteur de sollicitation d'un élément fini (e).
- $\bar{f}, f$  : Force de frottement volumique. Second membre de l'équation diff. de Poisson.
- $g$  : Accélération de la pesanteur,  $m/s^2$ . vecteur des polynômes de la fonction  $N_j$
- $H, h$  : Hauteur totale. Hauteur m. Type de maillage.
- $H_t$  : Charge totale.
- $\Delta H$  ou  $\Delta H_f$  : Perte de charge par frottement.
- $\Delta H_s$  : Perte de charge singulière.
- $I_{m,n}$  : Intégrales d'une fonction à deux variables où la puissance  $m$  pour la variable 'x' et de puissance  $n$  pour la variable 'y', dans un élément fini typique.
- $I_{00}$  : Aire de la surface d'un élément triangulaire ou quadrilatère ( $m = n = 0$ ).
- $K$  : Coefficient de perte de charge par frottement.
- $k$  : Conductivité thermique du fluide considéré.
- $K_{ij}, a_{ij}$  : Les éléments de la matrice de rigidité globale.
- $L, l$  : Longueur du tronçon de la conduite. Position d'une case dans un vecteur.
- $l_e$  : Distance mesurée depuis l'origine amont de la conduite d'un écoulement non établi.

- M** : Débit de quantité de mouvement.
- m, n** : Degré du polynôme de la fonction d'interpolation.
- N<sub>j</sub>, N** : Fonction d'interpolation d'un élément fini. Le rang de la matrice [K].
- N<sub>x</sub>, N<sub>y</sub>** : Nombre de nœuds suivants l'axes x et y respectivement.
- n,  $\vec{n}$**  : Nombre de termes de la fonction d'interpolation, vecteur unité.
- n<sub>x</sub>, n<sub>y</sub>** : Composantes du vecteur unité.
- p** : Pression statique, N/m<sup>2</sup>. Nombre de nœuds pour un élément fini.
- P<sub>g</sub>** : Pression motrice =  $p + \rho.g.h$ .
- P<sub>t</sub>** : Pression totale
- P<sub>m</sub>** : Périmètre, m.
- P<sub>0</sub>** : Nombre de *Poiseuille*
- P, Q** : Paramètres pour le contrôle des points de maillage.
- ΔP** : Perte de pression.
- Q** : Débit volumique m<sup>3</sup>/s.
- q<sub>n</sub>** : Flux de la variable secondaire.
- q<sub>s</sub>** : Source de chaleur (réaction chimiques, ... etc.)
- R, r** : Rayon de la conduite, m. Indice sur l'itération.
- R<sub>H</sub>** : Rayon hydraulique, m.
- Re, Rec** : Nombre de Reynolds, et Reynolds Critique.
- S** : Section droite d'une conduite, Aire, m<sup>2</sup>. Fonction de condensation (de *Robert*).
- T°** : Température, c°.
- t** : Temps, 's'.
- U, V, W** : Composantes de la vitesse en coordonnées cartésiennes.
- {Vk}, {VD1}...{VD4}** : Vecteurs remplaçant la matrice de rigidité [K] selon la méthode de stockage.
- W** : Vitesse axiale de l'écoulement m/s, (*solution de l'équation différentielle*).
- W<sub>moy</sub>, U** : Vitesse débitante ou vitesse moyenne d'un écoulement, m/s.
- W<sub>max</sub>** : Vitesse maximale.
- x, y, z** : Coordonnées cartésiennes. **r, θ, z** : Coordonnées cylindriques.
- Z** : Variable adimensionnelle [-1, +1] de la fonction 'F' de l'intégral de Gauss Legendre.
- (x<sub>j</sub>, y<sub>j</sub>)** : Coordonnées du nœud j.
- [K], [k<sup>e</sup>]** : Matrice de rigidité globale. Matrice de rigidité élémentaire.
- [F], [F<sup>e</sup>]** : Vecteur de sollicitation (ou force) globale. Vecteur de sollicitation élémentaire.

[H], [L] : Matrices triangulaires déterminées par la décomposition de la matrice de rigidité.

Matrices de système créant les fonctions d'interpolation  $N_j$ , tel que L est l'inverse de H.

[S<sup>i</sup>] : Matrices de base constitutives de la matrice de rigidité [K], (i, = 1 ou 2).

**SYMBOLES GREC :**

$\alpha, \beta, \gamma$  : Coefficients des fonctions d'interpolations d'un élément triangle à 3 nœuds.

$\theta$  : Coordonnée tangentielle. Angle d'un secteur, (en degré ° ou Rad).

$\delta_{ij}$  : Symbole de kronecker.

$\mu$  : Coefficient de viscosité dynamique (ou de cisaillement).

$\nu$  : Coefficient de viscosité cinématique.

$\lambda$  : Paramètre de rugosité.

$\rho$  : Masse volumique, Kg/m<sup>3</sup>.

$\tau_p$  : Contrainte tangentielle à la paroi.

$\psi$  : Fonction d'interpolation ou test.

$\omega$  : Facteur de sur-relaxation de l'algorithme de G-S-Accélééré. Facteur de relaxation utilisé dans l'algorithme de filtrage des nœuds,  $\in ]1,2[$ .

( $\Gamma$ ) : Frontière du domaine.

$\Omega, \Omega^e$  : Domaine global arbitraire d'étude. Domaine de l'élément fini.

$\xi, \eta$  : Système des coordonnées locales pour un rectangle.

$\xi$  : Coefficient de la rugosité relative.

$\eta^*$  : Variable normalisée.

**INDICES ET EXPOSANT**

$i, j$  : Compteur sur les nœuds ou les cases d'un vecteur.

T : Transposée d'un vecteur ou matrice.

m, n : Puissances des polynômes de x et y respectivement pour le calcul de l'intégral.

(e) : Indique l'élément fini 'e'.

**Pour les variables et symboles similaires aux celles du programme voir l'Annexe F2.**



LISTE DES FIGURES

	Page
Figure (I-1) : Conduite cylindrique avec la portion initiale et la zone établie $L_e$ .....	8
Figure (I-2 a,b) : Répartition des vitesses dans une section droite d'une conduite ('a' régime laminaire et 'b' turbulent ) dans la zone établie.....	8
Figure (I-3) : Développement de la couche limite et la partie de l'écoulement établit pour les différents régimes.....	9
Figure (I-4) : Variation du coefficient de la perte de charge d'un écoulement interne en fonction de $\mathcal{R}_e$ .....	11
Figure (I-5) : Application des sections circulaires et non circulaire pour les conduites de conditionnement d'air dans un avion typique [15] .....	13
Figure (I-6) : Application des sections non circulaires de conduites de distribution de l'air dans un système de l'avion <b>B7 27</b> . [33] .....	14
Figure (I-7 a,b) : Système anti-givrage pneumatique.....	15
Figure (II-1) : Une conduite cylindrique typique.....	18
Figure (II-2) : Conduite cylindrique de section circulaire.....	21
Figure (II-3) : Champ de vitesse de l'écoulement laminaire dans une conduite circulaire .....	21
Figure (II-4 a) : Evolution de la pression à travers la conduite (zone établit).....	22
Figure (II-4 b) : Evolution de la pression à travers la conduite (zone non établit).....	23
Figure (II-5) : Comparaison entre la théorie et l'expérimentale pour le coefficient de frottement $C_f$ d'écoulement d'air traversant un tube circulaire (small-bore tubes) [d'après Senecal & Rothfus (1953)] .....	24
Figure (II-6) : Conduite rectiligne de section couronne annulaire.....	26
Figure (II-7) : Variation du coefficient 'B' en fonction des dimensions transversales d'une... conduite de section couronne annulaire.....	27
Figure (II-8a) : Ecoulement dans une conduite de section quelconque.....	27
Figure (II-8b) : Lignes d'égale vitesses.....	27
Figure (II-9) : Comparaison du nombre de Poiseuille pour différentes géométries de la section d'une conduite. (Numerical data taken from Shah & London), Réf [27] ....	28
Figure (II-10) : Conduite cylindrique de section rectangulaire.....	29
Figure (II-11) : Valeur critique du nombre de Reynolds d'une conduite de section rectangulaire .....	29
Figure (II-12) : Conduite rectiligne de section elliptique.....	30
Figure (II-13) : Variation du coefficient 'B' en fonction des dimensions transversales d'une... conduite de section elliptique .....	31
Figure (III-1 a,b) : Discrétisation d'un domaine irrégulier en élément fini typique .....	35
Figure (III-2 a,b) : Equilibre interne entre les différents éléments du domaine.....	37
Figure (III-3 a,b,c,...,f ) : Éléments finis en bidimensionnelle de 3, 4, 5, 6 et 8 nœuds.....	39
Figure (III-4) : Représentation de la fonction continue $W(x, y)$ par une fonction d'interpolation linéaire pour un exemple de triangle à 3 nœuds .....	41
Figure (III-5 a,b) : Élément fini $\Omega^e$ de P nœuds .....	42
Figure (III-6) : Élément quadrilatère à 4 nœuds en décomposition.....	46
Figure (III-7) : Intégration le long du périmètre d'un triangle.....	51
Figure (III-8) : Assemblage de deux éléments triangulaire à 3 nds.....	54
Figure (III-9) : Assemblage de deux éléments quadrilatères de 8 nds.....	56
Figure (IV-1 a, b) : Connexité d'un domaine quelconque : (a) Domaine simplement connexe, (b) Domaine multi connexes.....	58
Figure (IV-2) : Transformation d'un domaine simplement connexe à un rectangle .....	59
Figure (IV-3) : Courbe d'une fonction multivoque .....	60
Figure (IV-4) : Discrétisation sur le coté AB .....	61

Figure (IV-5 a,b) : Discrétisation sur le coté AD.....	62
Figure (IV-6) : Génération des nœuds sur la frontière du domaine (10 x 6).....	63
Figure (IV-7 a,b) : Illustration de la procédure de détermination les abscisses.....	64
Figure (IV-8 a,b) : Illustration de la procédure de détermination les ordonnées.....	65
Figure (IV-9 a,b) : Discrétisation en éléments triangulaires et numérotation des nœuds /éléments	67
Figure (IV-10 a,b,...,f) : Connexion type 'H' .....	68
Figure (IV-11 a,b) : Discrétisation d'un maillage type 'C' .....	70
Figure (IV-12 a,b) : Illustration d'un maillage final type 'C' .....	70
Figure (IV-13 a,b) : Maillage typique 'C' d'un secteur .....	71
Figure (IV-14 a,b,c,) : Connexion type 'C' .....	71
Figure (IV-15) : Distribution des nœuds selon la relation (IV-15).....	73
Figure (IV-16) : Transformation d'une région doublement connexes à une région simplement connexe 'O' .....	74
Figure (IV-17 a,b) : Connexion pour un maillage type 'O' .....	75
Figure (IV-18) : Coupure et génération d'un maillage multi connexes.....	76
Figure (IV-19a,b,c) Les indices des formules de filtrage pour les nœuds internes des éléments Tr	78
Figure (IV-20a,b,c) Les indices des formules de filtrage pour les nœuds internes des éléments Q	79
Figure (V-1) : Illustration de stockage en colonne.....	81
Figure (V-2) : Illustration de stockage en diagonal.....	82
Figure (V-3) : Illustration de stockage en ligne. ....	83
Figure (V-4) : Illustration de stockage en serpent.....	84
Figure (V-5) : Illustration de stockage en escalier. ....	84
Figure (V-6) : Forme générale d'une matrice bande symétrique.....	87
Figure (V-7) : Éléments typiques à 4 nœuds.....	88
Figure (V-8) : Numérotation des éléments.....	89
Figure (V-9 a,b,c) : Discrétisation en éléments triangulaires.....	89
Figure (V-10 a,b,c) : Illustration d'une Matrice de rigidité [k] de rang 24x24.....	90
Figure (V-11) : Matrice symétrique à quatre diagonales .....	95
Figure (V-12) : Maillage typique subdivisé et numéroté. ....	96
Figure (V-13) : La matrice de rigidité après l'introduction des conditions aux limites.....	97
Figure (V-14a,b) : Stockage des diagonales de la matrice dans les vecteurs VD1..VD4.....	97
Figure (V-15 a,b) : Illustration des indices des matrices élémentaires et globale .....	100
Figure (V-16) : Exemple d'une matrice bande de l'équation (V-48).....	108
Figure (V-17) : Portion d'une conduite avec le gradient de pression appliqué 'a' .....	123
Figure (V-18) : Organigramme général du programme principal.....	125
Figure (VI-1a,b,c) : Maillage triangulaire gros dans un domaine circulaire Pour les éléments type T3N, T4N et T6N.....	135
Figure (VI-2) : Maillage quadrilatère gros dans un domaine circulaire (type Q4N, Q5N et Q8N).	136
Figure (VI-3) : Maillage triangulaire assez fin dans un domaine circulaire éléments type T3N.....	136
Figure (VI-4 a,b) : Effet de changement les positions des points de la frontière sur la forme du maillage pour une domaine circulaire .....	137
Figure (VI-5 a,b) : Maillage triangulaire et quadrilatère gros dans un domaine elliptique pour les éléments finis type T6N et Q8N.....	138
Figure (VI-6 a,b) : Maillage triangulaire filtré dans un domaine elliptique.....	138
Figure (VI-7 a,...,f) : Maillage triangulaire moyen dans un domaine rectangulaire pour les éléments type T3N, T4N et T6N et des quadrilatères type Q4N, Q5N et Q8N respectivement....	139
Figure (VI-8 a,b) : Maillage de type 'C' triangulaire d'un domaine : Demi-cercle et un quart de cercle (secteur). ....	140
Figure (VI-9a,b,c,d) Maillage d'un domaine secteur pour différents angles et différents éléments	140
Figure (VI-10) : Maillage d'un domaine représente un rectangle moins un cercle centré (au domaine) avec un élément fini triangulaire type T6N.....	141

LISTE DES TABLEAUX

Tableau N° II-1 : Les valeurs de $C_2$ en fonction de $a/b$ et $b/a$ .....	26
Tableau N° II-2 : a/ Les valeurs de $K$ en fonction de $Re$ .....	30
b/ Les valeurs de $C_1$ en fonction de $b_0/a_0$ .....	30
Tableau N° III-1 a,b : Remplissage de $X_{puisI}(NNPE, 3)$ , $Y_{puisI}(NNPE, 3)$ et $N_{term}(NNPE)$ .....	49
Tableau N° III-2 : Correspondances entre les nœuds globaux et les nœuds des éléments.....	55
Tableau N° IV-1 : Remplissage de la matrice $NNE(NEL,3)$ .....	68
Tableau N° V-1 : Pourcentage des cases gagnées pour $N=100$ .....	85
Tableau N° V-2 : Pourcentage des cases gagnées pour $N=5000$ .....	85
Tableau N° V-3 : Pourcentage des cases gagnées pour $N_y = 100$ en fonction de $N_x$ .....	86
Tableau N° V-4 : Pourcentage des cases gagnées pour $N_y = 500$ en fonction de $N_x$ .....	86
Tableau N° V-5 : Les coefficients diagonaux 'AD(m)' : Pour la numérotation de cas 2.....	104
Tableau N° V-6 : Les coefficients diagonaux 'AD(m)' : Numérotation de cas 3.....	104
Tableau N° V-7 : Les coefficients non diagonaux de 'AE(L)' et ses compléments de cas 2.....	104
Tableau N° V-8 : Les coefficients non diagonaux de 'AE(L)' et ses compléments de cas 3.....	105
Tableau N° V-9 : Nombre d'opérations effectuées par une itération ( $N_x = 10$ ).....	118
Tableau TVI-1 : Caractéristiques des maillages d'un domaine circulaire.....	130
Tableau TVI-2 : Caractéristiques des maillages d'un domaine elliptique.....	130
Tableau TVI-3 : Caractéristiques des maillages d'un domaine rectangulaire.....	131
Tableau TVI-4 : Caractéristiques des maillages d'un domaine secteur.....	131
Tableau TVI-5 : Caractéristiques des maillages du domaine rectangle moins un cercle au centre ou non au centre.....	132
Tableau TVI-6 : Caractéristiques des maillages du domaine grand cercle moins un petit cercle centré ou non centré.....	132
Tableau TVI-7 : Caractéristiques des maillages d'un domaine de forme profil d'aile.....	133
Tableau TVI-8 : Caractéristiques des maillages du domaine rectangle moins demi-cercle.....	133
Tableau TVI-9 : Caractéristiques des maillages du domaine demi-cercle creux au centre.....	133
Tableau TVI-10 : Caractéristiques des maillages d'un domaine complexe aux frontières.....	134
Tableau TVI-11 : Caractéristiques des maillages du domaine Hexagone.....	134
Tableau TVI-12 a,b,c : Effet de la discrétisation. Élément triangulaire (T3N).....	150
Tableau TVI-13 a,b,c : Effet de la discrétisation ; Élément quadrilatère (Q4N).....	151
Tableau TVI-14 : Cas de différentes discrétisations pour un même nombre de nœuds.....	151
Tableau TVI-15 a,b : Méthode de stockage économique avec la résolution par le schéma de Gauss Seidel Accélérée. a/ Élément triangulaire. b/ Élément quadrilatère.....	152
Tableau TVI-16 a,b : Effet de changement du type d'élément finis sur la vitesse d'écoulement.....	157
Tableau TVI-17 : Les valeurs montrées à la figure VI-40.....	159
Tableau TVI-18 : Effet de changement de la méthode de résolution de système d'équations.....	166
Tableau TVI-19 a,b : Quelques résultats du domaine : a/ de frontière complexe. b/ d'hexagone.....	179
Tableau TVI-20 : Géométrie cercle (NF= 1), $R=0.1$ m.....	183
Tableau TVI-21 : Géométrie Ellipse (NF=2), $a=0.3$ m, $b=0.05$ m.....	184
Tableau TVI-22 : Géométrie Rectangle (NF=3), $a=0.02$ m, $b=0.01$ m.....	185
Tableau TVI-23 : Géométrie Secteur « $\theta=180^\circ$ » (NF=5), $R=0.15$ m.....	186
Tableau TVI-24 : Géométrie Grand Cercle Creux Par Un Petit Cercle Centré (NF=13).....	187
Tableau TVI-25 : Géométrie De Grand Cercle Creux Par Un Petit Cercle Non-Centré (NF=14).....	188
Tableau TVI-26 : Géométrie Profil d'aile (NF=7), $C=1$ m, $t=12\%C$ .....	189
Tableau TVI-27 : Géométrie Hexagone (NF=8), $A=0.1$ m.....	190
Tableau TVI-28 : Géométrie Demi Cercle Creux Par Un Petit Demi Cercle (NF=9).....	191
Tableau TVI-29 : Géométrie Rectangle Creux Par Un Petit Cercle Non Centré (NF=10).....	192

	Page
RESUMEE .....	I
REMERCIEMENTS .....	II
DEDICACES .....	III
LISTE DES SYMBOLES .....	IV
LISTE DES FIGURES .....	VI
LISTE DES TABLEAUX .....	IX
TABLE DES MATIERES .....	X
<b>INTRODUCTION GENERALE .....</b>	<b>1</b>

## CHAPITRE I : SYNTHÈSE BIBLIOGRAPHIQUE ET APPLICATION AERONAUTIQUE

I- 1/ INTRODUCTION.....	4
I- 2/ ECOULEMENT DANS LES CONDUITES.....	4
I- 2- 1/ <i>CONDITIONS D'ECOULEMENT DANS LES CONDUITES</i> .....	5
I- 2- 2/ <i>MOUVEMENT DES FLUIDES DANS LES CONDUITES</i> .....	5
I- 3/ FORME ET REGIME D'ECOULEMENT.....	6
I- 3- 1/ <i>DEFINITIONS</i> .....	6
I- 3- 2/ <i>ECOULEMENT LAMINAIRE</i> .....	7
I- 3- 3/ <i>DISTRIBUTION DES VITESSES DANS UNE SECTION TRANSVERSALE</i> .....	8
I- 4/ PERTES DE CHARGE.....	9
I- 4- 1/ <i>INTRODUCTION</i> .....	9
I- 4- 2/ <i>ASPECTS DE PERTES DE CHARGE</i> .....	10
I- 4- 3/ <i>ETABLISSEMENT DE L'EXPRESSION DE LA PERTE DE CHARGE PAR FROTTEMENT</i> .....	10
I- 4- 4/ <i>INFLUENCE DE LA FORME DE LA SECTION SUR LE COEFFICIENT DE PERTE DE CHARGE</i> .....	12
I- 5/ APPLICATION AERONAUTIQUE ET INDUSTRIELLE.....	12
I- 5- 1/ <i>LES CONDUITES DES CIRCUITS D'AIR DANS LES AVIONS</i> .....	12
I- 5- 2/ <i>LES CONDUITES D'UN SYSTEME ANTI-GIVRAGE PNEUMATIQUE</i> .....	14

## CHAPITRE II : MODELISATION MATHEMATIQUE

II- 1/ INTRODUCTION.....	16
II- 2/ EQUATIONS GENERALES REGISSANT L'ECOULEMENT INTERNE TRAVERSANT LES CONDUITES .....	16
II- 2- 1/ <i>FORMULATION DES EQUATIONS DES BILANS</i> .....	16
II- 2- 2/ <i>CONDITIONS AUX LIMITES ET INITIALES</i> .....	17
II- 3/ HYPOTHESES FONDAMENTALES.....	17
II- 4/ FORMULATION MATHEMATIQUE DU PROBLEME.....	18
II- 4- 1/ <i>EQUATIONS FINALES REGISSANT L'ECOULEMENT</i> .....	18
II- 4- 2/ <i>CONDITIONS AUX LIMITES</i> .....	20
II- 5/ SOLUTIONS ANALYTIQUES POUR DES CONFIGURATIONS SIMPLES.....	20
II- 5- 1/ <i>CAS DES SECTIONS CIRCULAIRES</i> .....	20
II- 5- 1- A/ <i>Section cercle «écoulement de Poiseuille »</i> .....	20
II- 5- 1- B/ <i>Section couronne annulaire (2 cylindres coaxiaux)</i> .....	26
II- 5- 2/ <i>CAS DES SECTIONS NON-CIRCULAIRE</i> .....	27
II- 5- 2-a/ <i>Section rectangulaire</i> .....	29
II- 5- 2-b/ <i>Section elliptique</i> .....	30

## CHAPITRE III : FORMULATION ET ADAPTATION DE LA METHODE DES ELEMENTS FINIS

III- 1/ INTRODUCTION.....	32
III- 2/ BREF HISTORIQUE SUR LA METHODE D'ELEMENTS FINIS.....	32
III- 3/ DEMARCHES DE LA METHODE DES ELEMENTS FINIS.....	33
III- 4/ FORMULATION VARIATIONNELLE (INTEGRALE).....	34
III- 5/ FORMULATION EN ELEMENTS FINIS.....	36
III- 5- 1/ DERIVATION DU MODELE FORME GLOBALE.....	36
III- 5- 2/ DERIVATION DU MODELE FORME FAIBLE «WEAK FORM ».....	37
III- 6/ FONCTIONS D'INTERPOLATIONS.....	38
III- 6 -1/ SERIES POLYNOMIALES.....	38
III- 6 -2/ DIFFERENTS TYPES D'ELEMENTS FINIS ADAPTE.....	39
III- 6 -3/ FONCTIONS D'INTRPOLATIONS POUR UN ELEMENT TRIANGULAIRE A TROIS NŒUDS.....	40
III- 6 -4/ FONCTIONS D'INTRPOLATIONS POUR UN ELEMENT QUADRILATERE A QUATRE NŒUDS.....	41
III- 6 -5/ FONCTIONS D'INTRPOLATIONS POUR UN ELEMENT QUADRILATERE ET TRIANGULAIRE à $P$ NŒUDS : ( $P \geq 4$ ).....	42
III- 7/ CALCUL DES MATRICES D'ELEMENTS.....	44
III- 7 -1/ MATRICE D'ELEMENTS POUR UN ELEMENT TRIANGULAIRE LINEAIRE.....	45
III- 7 -2/ MATRICE DE RIGIDITE POUR UN ELEMENT QUADRILATERE LINEAIRE.....	46
III- 7 -3/ MATRICE DE RIGIDITE POUR UN ELEMENT QUADRILATERE OU TRIANGULAIRE à « $P$ » NŒUDS : ( $P \geq 4$ ).....	47
III- 8/ TRANSFORMATION DE L'INTEGRALE $I_{mn}$ POUR UN DOMAINE TRIANGULAIRE ET UN QUADRILATERE.....	50
III- 9/ ASSEMBLAGE DES MATRICES D'ELEMENTS.....	54

## CHAPITRE IV : GENERATION DU MAILLAGE

IV- 1/ INTRODUCTION.....	57
IV- 2/ ASPECTE DE LA GENERATION DE MAILLAGE.....	57
IV- 2- 1/ CONCEPTE DES DIFFERENT TYPES DES DOMAINES.....	57
IV- 2- 2/ CLASSIFICATION DES TECHNIQUES DE GENERATION DE MAILLAGE.....	58
IV- 3/ PROCEDURES DE GENERATION DE MAILLAGE.....	59
IV - 3- 1/ CONFIGURATION SIMPLEMENT CONNEXE.....	59
IV - 3- 1- 1/ GENERATION DES NŒUDS SUR LE CONTOUR DU DOMAINE.....	60
IV - 3- 1- 2/ GENERATION DES NŒUDS INTERNES POUR MAILLAGE TYPE 'H'.....	63
IV - 3- 1- 3/ CONNEXION DES ELEMENTS DU MAILLAGE TYPE 'H'.....	67
IV - 3- 1- 4/ GENERATION DES NŒUDS POUR UN MAILLAGE DE TYPE 'C'.....	70
IV - 3- 1- 5/ CONNEXION DES ELEMENTS DU MAILLAGE TYPE 'C'.....	71
IV - 3- 2/ FONCTION DE CONDENSATION UNIDIMENSIONNELLE.....	72
IV - 3- 3/ CONFIGURATION MULTI-CONNEXES.....	74
IV - 3- 3- 1/ GENERATION DES NŒUDS INTERNES POUR UN DOMAINE DOUBLEMENT CONNEXE DE TYPE 'O'.....	74
IV - 3- 3- 2/ CONNEXION DES ELEMENTS DU MAILLAGE TYPE 'O'.....	75
IV - 3- 3- 3/ APERÇU SUR LA GENERATION DES NŒUDS INTERNES POUR UN DOMAINE MULTICONNEXE QUELCONQUE.....	76
IV - 3- 3- 4/ CONNEXION DES ELEMENTS DU MAILLAGE OBTENU.....	76
IV - 3- 4/ FILTRAGE DES NŒUDS INTERNES.....	76

## CHAPITRE V : RESOLUTION NUMERIQUE ET PROGRAMMATION

V - 1/ INTRODUCTION.....	80
V - 2/ METHODES DE STOCKAGE DES MATRICES SOUS FORME DE VECTEUR....	81
V - 2 - 1/ STOCKAGE EN COLONNE.....	81
V - 2 - 2/ STOCKAGE EN DIAGONAL.....	82
V - 2 - 3/ STOCKAGE EN LIGNE.....	83
V - 2 - 4/ STOCKAGE EN LIGNE DE SERPENT.....	83
V - 2 - 5/ STOCKAGE EN ESCALIER.....	84
V - 2 - 6/ GAIN EN ESPACE MEMOIRE PAR LA METHODE DE STOCKAGE BANDE.....	85
V - 3/ INFLUENCE DE LA NUMEROTATION DES NŒUDS SUR LA FORME DE LA MATRICE DE RIGIDITE.....	86
V - 3 - 1/ EVALUATION DE LA DEMI-BANDE D'UNE MATRICE (BANDE).....	87
V - 3 - 2/ EXEMPLE ILLUSTRANT L'INFLUENCE DE LA NUMEROTATION DES NŒUDS.....	89
V - 4/ METHODE DE STOCKAGE D'UNE MATRICE A DIAGONALES SEPARÉES ....	95
V - 5/ STOCKAGE COMPLEXE D'UNE MATRICE SYMETRIQUE CREUSE.....	99
V - 5- 1/ PROCEDURE DE CHARGEMENT DE 'AD' ET LE VECTEUR FORCE GLOBAL VF.....	99
V - 5- 2/ PROCEDURE ET ORGANIGRAMME DE CHARGEMENT DE AE , IL et IC.....	100
V - 6/ METHODES DE RESOLUTION D'UN SYSTEME D'EQUATIONS LINEAIRE....	106
V - 6- 1/ METHODES DIRECTES.....	106
V - 6- 1- A/ Méthode de décomposition de KHALETSKY.....	106
V - 6- 1- B/ Méthode de décomposition de CHOLEVSKI.....	108
V - 6- 1- C/ Ordre de grandeur du nombre d'opérations par la $M^{td}$ de KHALETSKY.....	109
V - 6- 2/ METHODES ITÉRATIVES.....	113
V - 6- 2- A/ Méthode de GAUSS SEIDEL.....	113
V - 6- 2- B/ Méthode de GAUSS SEIDEL ACCELEREE (G.S.A).....	113
V - 6- 2- C/ Ordre de grandeur du nombre d'opérations par la $M^{td}$ de G.S.A.....	117
V - 6- 2- D/ Condition nécessaire et suffisante pour la convergence du processus de Gauss Seidel Accélérée (G.S.A).....	118
V - 7/ CALCUL NUMERIQUE DES PARAMETRES DE L'ÉCOULEMENT.....	119
V - 8/ PROCEDURE DE CALCUL (description de l'organigramme).....	123

## CHAPITRE VI : RESULTATS ET DISCUSSIONS

VI - 1/ INTRODUCTION.....	128
VI - 2/ DONNEES DU PROGRAMME.....	129
VI - 3/ RESULTATS DES SORTIES GRAPHIQUE DES MAILLAGES.....	129
VI - 4/ EXPLOITATION DES RESULTATS NUMERIQUES DES SOLUTIONS.....	149
VI - 4- 1/ RESULTATS DU DOMAINE CIRCULAIRE.....	149
VI - 4- 1- 1/ EFFET DE LA DISCRETISATION SUR LA CONVERGENCE.....	149
VI - 4- 1- 2/ REPARTITION DES VITESSES.....	154
VI - 4- 1- 3/ EVOLUTION DE QUELQUES PARAMETRES IMPORTANTS.....	155
VI - 4- 2/ RESULTATS DU DOMAINE RECTANGULAIRE.....	160
VI - 4- 2- 1/ REPARTITION DES VITESSES.....	160
VI - 4- 2- 2/ EVOLUTION DE QUELQUES PARAMETRES IMPORTANTS.....	160
VI - 4- 3/ RESULTATS DU DOMAINE ELLIPTIQUE.....	162
VI - 4- 3- 1/ CALCUL DES VITESSES.....	162
VI - 4- 3- 2/ EVOLUTION DE QUELQUES PARAMETRES IMPORTANTS.....	163
VI - 4- 4/ RESULTATS DU DOMAINE SECTEUR.....	163
VI - 4- 4- 1/ REPARTITION DES VITESSES.....	163
VI - 4- 4- 2/ EVOLUTION DE QUELQUES PARAMETRES IMPORTANTS.....	164

VI - 4- 5/ RESULTATS DU DOMAINE LIMITE ENTRE DEUX CYLINDRES COAXIAUX.....	170
VI - 4- 5- 1/ REPARTITION DES VITESSES.....	170
VI - 4- 5- 2/ EVOLUTION DE QUELQUES PARAMETRES.....	171
VI - 4- 6/ RESULTATS DU DOMAINE LIMITE ENTRE DEUX CYLINDRES EXCENTRES.....	171
VI - 4- 6- 1/ REPARTITION DES VITESSES.....	171
VI - 4- 6- 2/ EVOLUTION DE QUELQUES PARAMETRES.....	172
VI - 4- 7/ RESULTATS DU DOMAINE DE FORME D'UN PROFIL D'AILE.....	176
VI - 4- 7- 1/ REPARTITION DES VITESSES ET QUELQUES PARAMETRES.....	176
VI - 4- 8/ RESULTATS DES DIVERS DOMAINES.....	179
VI - 5/ TABLEAUX RECAPITULATIFS DE QUELQUES PARAMETRES IMPORTANTES.....	182
<b>CONCLUSION GENERALE ET PERSPECTIVES.....</b>	<b>193</b>
<b>ANNEXE A : QUELQUES ORGANIGRAMMES ET PROGRAMMES.</b>	
<b>ANNEXE B : DIMENSIONNEMENT DES CONDUITES ET NOTION DE PERTES DE CHARGE.</b>	
<b>ANNEXE C : CARACTERISTIQUES DES FLUIDES USUELLES.</b>	
<b>ANNEXE D : INTEGRATION NUMERIQUE PAR LA METHODE DE « GAUSS-LEGENDRE »</b>	
<b>ANNEXE E : MENUS DES CHOIX DES POSSIBILITES D'INPUT ET PRINCIPAUX SYMBOLES DU PROGRAMME PRINCIPAL.</b>	

## BIBLIOGRAPHIES



## INTRODUCTION GENERALE

L'étude des écoulements internes dans les conduites et les tuyauteries ainsi que les diffuseurs revêt une importance capitale dans l'industrie aéronautique et trouvent une large gamme d'utilisation.

En effet, la conception et la réalisation des organes et des machines aéronautiques tel que l'avion, les turbomachines, les souffleries... etc, nécessitent un élément vital pour la liaison entre les différents modules et organes, en assurant le bon fonctionnement de ces machines. C'est les conduites et les tuyauteries, qui doivent être adapter au cas voulu (longueur et sections).

De là, la compréhension de la nature physique de ces écoulements et par suite leur maîtrise permet de prédire et d'optimiser avec une grande précision les performances de ces machines, et par suite, un bon choix technique avec un bon dimensionnement de ces conduites en fonction des conditions d'écoulement des fluides transportées, qui résulte.

L'écoulement réel est tridimensionnel, visqueux, laminaire ou turbulent et même quelque cas instationnaire. La complexité de ce phénomène physique et l'absence de moyens de calcul puissants ont imposé dans le passé une méthodologie de développement et d'investigation essentiellement fondée sur une approche empirique débouchant sur des phases d'expérimentations particulièrement longues et onéreuses.

Cette situation a été radicalement modifiée ces dernières décennies par le développement considérable de l'outil informatique (software & hardware) et par les nouvelles approches appliquées à la dynamique des fluides.

Notre approche est basée sur l'analyse de l'écoulement interne de Poiseuille dans les conduites ayant des sections constantes et complexes (simplement ou multi-connexes), afin de ramener ainsi le problème bidimensionnelle. Donc de généraliser l'écoulement de Poiseuille étudié théoriquement par Hagen et Stocks [16] pour des sections circulaires et planes d'une part, et d'autre part en adoptant des hypothèses simplificatrices afin de rapporter les équations de Navier-Stocks non linéaires à l'équation différentielle elliptique de Poisson avec des conditions aux limites de type Dirichlet, notamment pour tenir compte de l'effet de la viscosité aux parois et les pertes de charge.

La présente étude consiste alors, à réaliser une simulation numérique de l'écoulement visqueux traversant les conduites à section complexe en se basant sur l'approche citée auparavant.

En effet, la complexité de ces sections induit que la solution analytique (exacte) du problème n'existe pas, et évidemment notre intérêt s'oriente vers la recherche de solutions numériques approchées. La méthode des éléments finis a été introduite et appliquée avec succès puisqu'elle s'adapte pour n'importe quelle frontière de la section choisie.



La modélisation et la discrétisation des équations gérant l'écoulement sont donc fondées sur la méthode des éléments finis (2D) dont le principal avantage est de permettre une bonne représentation des géométries complexes, mais relativement assez lourde en volume et en temps de calcul.

Cependant, deux difficultés principales se rencontrent, si la méthode des éléments finis est utilisée. La difficulté majeure est la manière optimale de génération de maillage ainsi que l'adaptation des équations au modèle mathématique de la résolution, l'autre difficulté est le choix de la méthode numérique adéquate à la résolution du système d'équations algébriques vu le nombre important de degrés de liberté alloués.

Pour cela, il faut subdiviser le domaine en petits sous domaines de géométries simples connues telle que la géométrie triangulaire et quadrilatère par l'intermédiaire des fonctions d'interpolations. Un nombre important d'éléments finis sera établi et appliqué pour le développement d'un code numérique afin d'avoir une convergence et rapidité d'exécution et faire une comparaison entre les résultats des différents types d'éléments finis choisis.

La résolution du système est faite par deux manières, l'une est basée sur la résolution directe du système en appliquant l'algorithme de Khaletski adapté pour des matrices bandes. Là, le problème de la numérotation optimale se pose au niveau du choix de la numérotation des nœuds afin d'obtenir une matrice bande de largeur minimale.

La deuxième méthode est basée sur la résolution du système avec un schéma itératif de « Gauss Seidel accéléré » appelé **S.O.R.** (Successive Over Relaxation), où, on a généré une technique de stockage de cases non nulles d'une matrice creuse complexe aléatoire dans un vecteur uni-colonne en gagnant l'espace mémoire. Pour avoir une convergence rapide du système, nous utilisons le vecteur solution, de la méthode de Khaletski, comme un vecteur initial du schéma itératif **S.O.R** et pour avoir la solution finale du système.

Une fois le code marche avec un type d'élément fini qui sera choisi au départ triangulaire à trois nœuds, on adapte d'autres éléments de type triangulaire à 4 et 6 nœuds ainsi que des éléments quadrilatères à 4, 5 et 8 nœuds ainsi leurs connections adéquatement pour les différentes géométries complexes optés. Et pour chaque type d'éléments, on teste la convergence, et l'efficacité.

La solution du problème traité représente la distribution du champ des vitesses axiales à travers la section complexe des conduites de l'écoulement des fluides. Le calcul des paramètres thermodynamiques et les caractéristiques dynamiques (tels que la pression, la vitesse maximale, le débit volumique, le coefficient de perte de charge, la force de frottement exercée sur la paroi, la contrainte de cisaillement...) est basé sur les résultats du champ de vitesse d'écoulement à travers ces sections des conduites.

Pour mener à bien cette étude, un plan de travail articulé sur six chapitres a été adopté :

Le premier chapitre faisant la synthèse bibliographique sur les écoulements internes et ces régimes et caractéristiques ainsi que les pertes de charge et puis un exemple d'application des conduites complexes au domaine Aéronautique et industriel.

Dans le deuxième chapitre, la modélisation mathématique de l'écoulement de Poiseuille ainsi que les hypothèses de base sont développées, ensuite quelques solutions analytiques pour des sections simples circulaire non circulaire sont exposées.

Nous présenterons, par la suite dans le troisième et quatrième chapitre le modèle numérique basé sur la méthode des éléments finis, avec les procédures de remplissage et d'assemblage des matrices élémentaires selon leur type ainsi que les techniques de discrétisation nécessaires des différents maillages des sections des conduites.

Puis, les différents procédés de stockages des matrices bandes dans des vecteurs unis-colonne et la résolution des systèmes d'équations (obtenues) par les méthodes numériques réalisées (directe et itérative) sont exposées, ensuite les démarches de calcul des paramètres avec la procédure de programmation est donnée dans le cinquième chapitre.

En fin dans le dernier chapitre, une étude comparative des résultats dans le but de validation du code développé a été menée avec les résultats analytiques disponibles pour quelques sections simples et avec celles de différents types d'éléments. Ainsi une discussion est faite sur les résultats obtenus par le calcul, tous en récapitulant les résultats pour être disponible, par exemple à un constructeur ayant le choix à une telle ou telle configuration de section des conduites, selon des critères adoptés à son cas.

En fin une conclusion générale clôturera notre étude.

Cette étude a été réalisée dans le cadre de la maîtrise en génie mécanique, sous la supervision de M. le Professeur Dr. Mohamed Elmaghrabi, à l'Université de Moncton, au Nouveau Brunswick, Canada.

Dans ce cadre et pour cette raison, nous nous sommes proposés comme objectif de réaliser cette thèse, à partir de génération de quelques résultats ainsi que le programme nécessaire et les mettre à la disposition d'un ingénieur ou ingénieur du bureau d'étude ou autres, montrant un ensemble de sections complètes des conduites et leur effet sur le calcul du coefficient de perte et ainsi que le champ des vitesses et d'autres paramètres, tout ce permettant un choix en fonction des besoins des concepteurs pour ces réalisations.

Dans certains cas, ce sont des conduites droites de très grande longueur (conduites de pétrole, de gaz, d'eau, de vapeur, d'air, dispositifs de ventilation de grandes dimensions etc.)

Dans d'autres cas, ce sont des conduites de dimensions relativement faibles mais ayant un grand nombre de parties incurvées de toutes formes, et même avec des sections relativement complexes en regardant aux exigences d'utilisation de ces conduites (dispositifs de régulation, conduites d'air dans les avions ou dans les installations de ventilation familiales, conduites d'eau et d'huile pour les avions, conduites de gaz des usines métallurgique, chimique, etc.) [26].

Dans tous les cas, il est nécessaire d'étudier l'influence de la forme des conduites sur le comportement de l'écoulement en fonction des fluides véhiculés et sur les différents paramètres de cet écoulement.

Dans ce cadre et pour cette raison, nous nous sommes proposés comme objectif de réaliser cette thèse, à partir de génération de quelques résultats ainsi que le programme nécessaire et les mettre à la disposition d'un ingénieur ou ingénieur du bureau d'étude ou autres, montrant un ensemble de sections complètes des conduites et leur effet sur le calcul du coefficient de perte et ainsi que le champ des vitesses et d'autres paramètres, tout ce permettant un choix en fonction des besoins des concepteurs pour ces réalisations.

## 1-2/ ÉCOULEMENT DANS LES CONDUITES

En mécanique, on étudie le mouvement relatif d'un fluide et d'un solide, et on s'intéresse à une manière générale que le domaine d'écoulement du fluide peut s'étendre à l'infini, ou à une forme finie, ou à une forme courbe, ou à une forme complexe, ou à une forme simple, ou à une forme quelconque.

## CHAPITRE I

### SYNTHESE BIBLIOGRAPHIQUE ET APPLICATION AERONAUTIQUE

#### I-1/ INTRODUCTION

La complexité de l'écoulement interne à travers les conduites et les tuyauteries ainsi que les diffuseurs, et les turbomachines en général, fait que les progrès enregistrés dans l'étude et l'analyse de cet écoulement dans ces organes et machines sont intimement liés aux prodigieuses avancées dans le domaine des outils de calcul ainsi que les développements théorique apparus.

Le développement ultérieur de l'étude des écoulements des fluides (aéraulique, hydraulique...) repose essentiellement sur l'amélioration des outils mathématiques et sur des notions de mécanique qui prirent un très large essor au 17<sup>ème</sup> siècle.

Or, l'absence de moyens de calcul puissants a imposé dans le passé une méthodologie de développement et d'investigation essentiellement fondée sur une approche empirique débouchant sur des phases d'expérimentations particulièrement longues et onéreuses[12].

Cette situation a été radicalement modifiée ces dernières décennies par le développement considérable de l'outil informatique et par les progrès importants réalisés dans la conception des codes de calcul destinés à l'analyse des écoulements internes, et leur utilisation industrielle ont permis d'améliorer partiellement les performances des machines ayant ces organes.

Dans ce stade, on a constaté qu'il y a plusieurs branches techniques qui s'intéressent aux problèmes du déplacement des liquides et des gaz, par des écoulements à travers les conduites.

Dans certains cas, ce sont des conduites droites de très grande longueur (conduites de pétrole, de gaz, d'eau, de vapeur, d'air, dispositifs de ventilation de grosses dimensions etc.)

Dans d'autre cas, ce sont des conduites de dimensions relativement faibles mais ayant un grand nombre de parties façonnées de toutes formes, et même avec des sections relativement complexes en répondant aux exigences d'utilisation de ces conduites: (dispositifs de régulation, conduites d'air dans les avions ou dans les installations de ventilation ramifiées; conduites d'essence et d'huile pour les avions, conduite de gaz des usines métallurgique, chimique, etc.) [26].

Dans tous les cas, il est nécessaire d'étudier l'influence de la forme des conduites sur le comportement de l'écoulement en fonction des fluides véhiculées et sur les différents paramètres de cet écoulement.

Dans ce cadre et pour cette raison, nous nous sommes proposés comme objectifs de minimiser cette lacune, à partir de génération de quelques résultats ainsi que le programme nécessaire et les mettre à la disposition d'un motoriste ou ingénieur du bureau d'étude ou autres, montrant un ensemble de sections complexes des conduites et leur effet sur le calcul du coefficient de perte de charge ainsi que le champ des vitesses et d'autres paramètres, tous en permettant un choix en fonction des besoins des concepteurs pour ces canalisations.

#### I-2/ ECOULEMENT DANS LES CONDUITES

En aérodynamique, on considère le mouvement relatif d'un fluide et d'un solide, et on admet d'une manière générale que le domaine d'écoulement du fluide peut s'étendre à l'infini, loin des parois solides (*écoulement externe*). Or en aéraulique et en hydraulique au contraire,

pour ces domaines le fluide s'écoule à l'intérieur des surfaces solides, qui limitent ses directions, à distance finie. Donc, il reste toujours confiné en leur voisinage (*écoulement interne*) [6], [22].

En effet, tous les écoulements dans les tuyaux, les conduites, les tuyères et les canaux fermés sont des écoulements internes. Leurs problèmes couvrent un très grand domaine de recherche.

### I-2-1/ CONDITIONS D'ÉCOULEMENT DANS LES CONDUITES

L'écoulement des fluides dans les conduites avec ou sans échange de chaleur dépendent toute à la fois des paramètres géométriques et dynamiques (dimensions et formes des conduites, pression, température, viscosité...etc). Parmi ces paramètres, il y a ceux qui concernent l'écoulement comme la viscosité, masse volumique..., d'autres qui interviennent dans les transferts de chaleur.

Les lois d'écoulement dans les conduites sont fonctions des propriétés des fluides véhiculés. L'écoulement lui-même, engendre des pertes de charges qui ont une influence primordiale sur la conception des conduites. Une conception correcte exige aussi une bonne connaissance aux températures d'utilisation, des propriétés mécaniques des matériaux. Pour plus d'information voir Annexe B et la référence [22].

### I-2-2/ MOUVEMENT DES FLUIDES DANS LES CONDUITES

#### a/ Mouvement permanent et transitoire

Le mouvement d'un fluide est permanent quand en un point quelconque de la masse en mouvement, les particules fluide qui se succèdent en ce point animé de la même vitesse, sont soumises à la même pression, et ont la même masse volumique. Si par contre, les paramètres  $V$ ,  $\rho$  et  $P$  varient en un point en fonction du temps, le régime est dit «transitoire».

#### b/ Débit et vitesse moyenne

On appelle débit d'un fluide, la quantité qui s'écoule à travers une section transversale donnée de la conduite par unité de temps. Sous une forme générale (pour une forme quelconque de la répartition des vitesses dans la section) le débit volumique s'exprime par la formule : [27]

$$Q_v = \int_A dQ_v = \int_A W dA \quad (I-1)$$

Avec  $W$  : Vitesse en un point donnée de la section  $A$  de la conduite considérée.

La répartition des vitesses dans une section de la conduite n'est presque jamais uniforme. Pour simplifier la résolution des problèmes pratiques, on introduit une vitesse moyenne fictive :

$$W_{moy} = \frac{1}{A} \int_A W dA = \frac{Q_v}{A} \quad \text{d'où :} \quad Q_v = W_{moy} A \quad (I-2)$$

#### c/ Charge totale

Dans tout domaine d'écoulement où la pression motrice  $P_g = P + \rho g h$  et la vitesse  $V$  restent constantes le long des lignes de courant, on peut définir la pression totale  $P_t$  ou charge totale  $H_t$  du fluide dans ce domaine. Cette notion peut se généraliser aisément, au cas où la vitesse se répartirait d'une manière quelconque en grandeur et en direction dans la section, par l'expression suivante : [6]

$$P_t = \rho g H \quad (I-3)$$

Tel que  $H$  dans la section  $A$  (dite la hauteur totale) : est le quotient du débit d'énergie mécanique total  $E$  par le débit en poids, soit :

$$H = \frac{E}{\rho g Q_v} \quad (I-4)$$

**d/ Viscosité des fluides**

La viscosité est propre à tous les fluides réels et se manifeste dans le mouvement sous forme de frottement interne. Pratiquement, les fluides naturels sont constitués par des molécules présentant quelque adhérence entre elles, ce qui tend à gêner leurs mouvements relatifs, c'est ce qui constitue la viscosité.

En effet, à une température et à une pression données, il y a proportionnalité de la tension visqueuse à la vitesse de déformation pure, suivant une même direction. Le facteur de proportionnalité est appelé *coefficient de viscosité* [16].

La viscosité provoque une dissipation de l'énergie cinétique de la masse fluide en mouvement. Cette énergie est transformée en chaleur.

Il faut noter que, les fluides sont supposés pratiquement incompressible mais pas d'une façon absolue. Par exemple pour l'étude du coup de pilier dans les canalisations d'eau, où il faut intervenir sa compressibilité ou bien l'effet de l'air lorsque sa vitesse égale ou supérieure à 0.3 Mach dans ses conduites.

Ce concept implique que, en présence de compressibilité, les variables isotropes de volume n'introduisent pas de glissement relatif, la précédente notion de comportement peut alors être étendue au gaz. La plus grande partie des fluides obéissent à ce principe, ils sont qualifiés de newtoniens [27]. Voir Annexe C pour plus de détail sur les autres types de fluide, et sur les appareils de mesure de la viscosité.

**I-3/ FORME ET REGIME D'ÉCOULEMENT :**

Tous les écoulements dans les conduites, les tuyaux et les canaux fermés sont des écoulements internes. Ces écoulements rencontrés sont dans la plupart des cas visqueux avec des régimes laminaires et turbulents. L'écoulement peut être par ailleurs mono ou biphasique.

Par conséquent cette classe de problèmes couvre un très grand domaine de développement et de recherche.

**I-3-1/ DEFINITIONS :**

La nature (régime) du mouvement d'un fluide peut être laminaire ou turbulente. Le premier régime se caractérise par la stabilité de l'écoulement. Dans ce régime les filets de courant sont parallèles, ne se mélange pas et contournant de manière continue tous les obstacles qu'ils rencontrent sur leur chemin. Le deuxième régime se caractérise par le déplacement désordonné de masses finies du fluide et se mélangeant fortement entre elles.

Dans une conduite cylindrique de section quelconque, l'obtention d'un régime d'écoulement dépend de l'importance des forces de viscosité (frottement interne) par rapport aux forces d'inertie. Ce rapport de forces est caractérisé par un nombre sans dimensions appelé nombre de *Reynolds* :

$$\mathfrak{R}_e = \frac{UD}{\nu} \quad (I-5)$$

avec:  $U$  : Vitesse caractéristique de l'écoulement (souvent la vitesse moyenne dans la section),

$D$  : Dimension caractéristique de la section transversale ( $D_H$ ).

$\nu$  : Coefficient de viscosité cinématique.

On compare  $\mathfrak{R}_e$  à une constante expérimentale le nombre de *Reynolds* critique  $\mathfrak{R}_{ec}$  de l'organe, pouvant servir à caractériser le régime d'écoulement. Certes, le point de passage d'un régime à un autre est assez imprécis et correspond à un nombre voisin de **2300** (En admettant **2000**) pour les liquides dans le cas d'une conduite circulaire. La limite supérieure de  $\mathfrak{R}_{ec}$  dépend des conditions

d'entrée dans la conduite, de l'état superficiel des parois, et d'autres causes. On aura les deux cas suivants :

- si  $Re > Re_c$  l'écoulement est turbulent,
- si  $Re < Re_c$  l'écoulement est laminaire.

Les solutions laminaires représentent bien certains écoulements réellement observés. Mais pour une configuration géométrique donnée des parois solides limitent l'espace occupé par le fluide en mouvement, cet écoulement laminaire n'est stable que si les vitesses d'écoulement ne sont pas trop grandes. Pour des vitesses trop élevées des perturbations apparaissent en s'amplifiant au cours du mouvement, et envahissent tout l'écoulement aval qui devient complètement turbulent.

La turbulence n'affecte pas seulement les éléments fluides eux-mêmes, mais les propriétés que ces éléments comportent, par exemple : si le fluide est chauffé, la turbulence provoquera un transport latéral de chaleur. [1]

Puisque nous avons pour objectif l'étude de l'écoulement d'un fluide visqueux dans les conduites des différents cas usuels, le régime auquel nous aurons affaire sera donc le régime laminaire.

### I-3-2/ ECOULEMENT LAMINAIRE

Dans un écoulement laminaire d'un fluide visqueux dans une conduite, les particules fluides voisines progressent avec des vecteurs vitesses parallèles ; Du fait de la viscosité du fluide, chaque filet tend à freiner ceux des filets voisins qui sont plus rapides. Les lignes de courants « confondues avec les trajectoires » sont des courbes fixes dans l'espace et ne se mélangent pas au cours du mouvement en régime permanent. Les forces de frottement développées dans ce régime seront proportionnelles au coefficient de viscosité et au gradient de vitesse. Ce régime présente surtout un intérêt dans le domaine industriel : en particulier dans la lubrification.

Exemple :

La condition requise pour le régime laminaire des liquides peut s'écrire :

$$U \leq \frac{2000 \nu}{D} \quad (I-6)$$

Elle représente la vitesse critique inférieure.

Pour l'eau à 20°C, on a  $\nu = 10^{-6} \text{ m}^2 \cdot \text{s}^{-1}$ , voir Annexe C pour plus de valeurs de  $\nu$  et d'autres paramètres importants. Il faudrait pour avoir un régime laminaire stable :

$$U \leq \frac{0.002}{D}$$

Soit dans une conduite circulaire de 0.10 m de diamètre :

$$U \leq 0.02 \text{ m/s}$$

Cette vitesse est importante devant la dimension du diamètre de la conduite, pour cela il faut une différence de pression importante pour l'obtenir. Mais plus le diamètre est important, plus la turbulence est facile à atteindre.

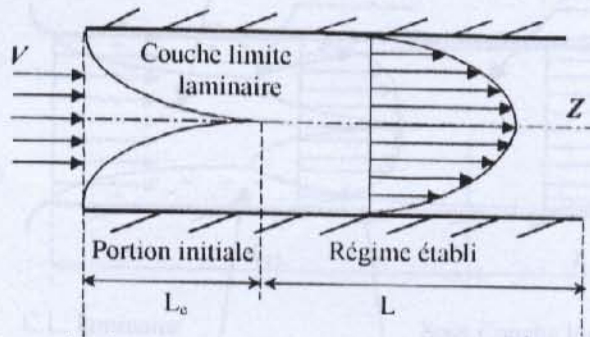
Ce résultat (la vitesse) est obtenu à une distance  $L$  suffisamment grande de l'entrée de la conduite, c'est à dire  $L > L_e$ . Tel que la distance  $L_e$  mesurée depuis l'origine amont de la conduite à partir de laquelle l'écoulement stationnaire est établi, elle est donnée approximativement pour un écoulement laminaire par la formule suivante : [27]

$$L_e = 0.02 \frac{D^2 U}{\nu} \quad (I-7)$$

La distance  $L_e$  mesurée depuis l'origine amont de la conduite à partir de laquelle l'écoulement est établi pour un régime turbulent est donnée par la formule approximative : [27]

$$L_e = 1.5 D \sqrt[4]{Re} \tag{I-8}$$

On tout point de la conduite, l'écoulement dans ce régime est permanent mais le long de  $L_e$  on dit qu'il n'est pas établi dans la portion initiale. Cette portion est caractérisée par le fait que la somme des épaisseurs de la couche limite pour une station dans une coupe est inférieur au diamètre maximal de la conduite avec une partie d'écoulement à une vitesse uniforme. Dans le prochain paragraphe, on donne plus de définition de cette portion avec la notion de la couche limite. (Voir Figures I-1 et I-3).



**Fig. I-1 :** Conduite cylindrique avec la portion initiale et la zone établie  $L_e$

**1-3-3/ DISTRIBUTION DES VITESSES DANS UNE SECTION TRANSVERSALE**

Dans le mouvement d'un fluide visqueux, la couche se trouvant immédiatement au voisinage de la paroi solide y adhère. Il en résulte que, dans la région à proximité de la surface solide, il s'établit une vitesse variable transversalement croissante depuis '0' sur cette surface (paroi) jusqu'à la vitesse  $V$  de l'écoulement non perturbé. Cette zone de vitesse dans la section est appelée *couche limite*, voir Figure (I-2 et I-3)

Pour la distribution des vitesses, on a en régime laminaire dans une conduite de section circulaire, le profil stabilisé des vitesses s'établit suivant une loi parabolique Fig.(I-2a), et en régime turbulent à peu près suivant une quasi-exponentielle Fig.(I-2b), [27]. On trouvera des développements sur ce profil dans le chapitre II.

Rappelant aussi que dans le mouvement d'un fluide dans les conduites, on distingue la portion initiale d'écoulement et la portion d'écoulement stabiliser. Par portion initiale, on entend la partie de la conduite dans la quelle le profil des vitesses est uniforme, est se transforme graduellement en profil normal correspondant à l'écoulement stabilisé jusqu'à la distance  $L_e$  à partir d'entrée (défini dans le paragraphe précédent), voir Figure (I-3).



**Figure (I-2 a, b) :** Répartition des vitesses dans une section droite d'une conduite (régime laminaire 'a' et turbulent 'b') dans la zone établie

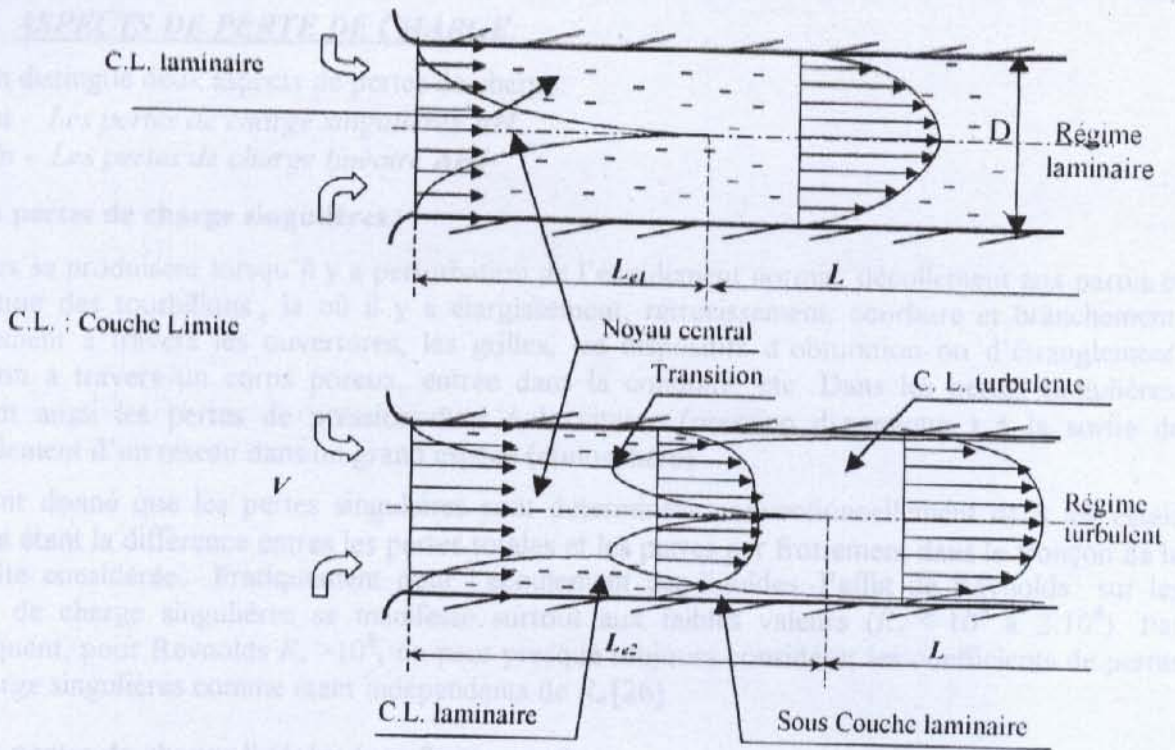


Fig. 1-3 : Développement de la couche limite et la partie de l'écoulement établi pour les différents régimes

## 1-4/ PERTE DE CHARGE

### 1-4-1/ INTRODUCTION

L'optimisation de la perte de charge linéaire est un problème fondamental, en matière énergétique qui s'est posé depuis longtemps et qui se pose toujours dans les domaines industriels et aéronautiques. Divers chercheurs, tel que : Poiseuille, Prandtl, Nikuradse... et beaucoup d'autres, ont contribué efficacement à l'étude des pertes de charge des fluides homogènes dans les conduites à petite ou grande échelle. De nos jours, leurs travaux demeurent une base fondamentale dans l'étude de perte de charge en conduite des écoulements des fluides.

La perte de charge donc, dans un mouvement d'un fluide dans les conduites rectilignes non singulières en régime laminaire, est déterminée par les forces de frottement interne (viscosité), apparaissant quand une couche du fluide se déplace par rapport à une autre. Les forces de viscosités sont directement proportionnelles à la vitesse de l'écoulement.

Pratiquement, les conduites et les canaux peuvent être à parois lisses ou rugueuses. De la, les pertes de charge dépendent non seulement des paramètres de l'écoulement  $Re$  mais de l'état de surfaces (lisse ou rugueux) de la paroi. On qualifie cet état par une seule dimension géométrique  $\lambda$  qui est d'un ordre de grandeur comparable à la hauteur géométrique moyenne des aspérités de cette paroi, connue par le nom paramètre de rugosité.

Si ce dernier est divisé par le diamètre hydraulique  $D_H$  (voir paragraphe II-5-2), on obtient le coefficient de la rugosité relative  $\xi$  :

$$\xi = \lambda / D_H \quad (I-9)$$

Grâce à la prépondérance en régime laminaire des forces de viscosités, même l'écoulement autour des aspérités d'une surface rugueuse se produit d'une façon continue, pour cette raison, si elle n'est pas très grande, la rugosité des parois n'a aucun effet sur la grandeur de la perte de charge, et le coefficient de perte de charge par frottement dans ce régime dépend toujours du nombre de Reynolds seul [26].



**I-4-2/ ASPECTS DE PERTE DE CHARGE:**

On distingue deux aspects de pertes de charge:

a - Les pertes de charge singulières  $\Delta H_s$ ,

b - Les pertes de charge linéaire  $\Delta H_f$

**a - Les pertes de charge singulières :**

Elles se produisent lorsqu'il y a perturbation de l'écoulement normal, décollement aux parois et formation des tourbillons ; la où il y a élargissement, rétrécissement, courbure et branchement, écoulement à travers les ouvertures, les grilles, les dispositifs d'obturation ou d'étranglement, filtration à travers un corps poreux, entrée dans la conduite, etc. Dans les pertes singulières, figurent aussi les pertes de pression dues à la vitesse (pression dynamique ) à la sortie de l'écoulement d'un réseau dans un grand espace (atmosphère).

Etant donné que les pertes singulières sont déterminées conventionnellement dans les essais comme étant la différence entre les pertes totales et les pertes par frottement dans le tronçon de la conduite considérée. Pratiquement pour l'écoulement des liquides, l'effet de Reynolds sur les pertes de charge singulières se manifeste surtout aux faibles valeurs ( $R_e < 10^5$  à  $2.10^5$ ). Par conséquent, pour Reynolds  $R_e > 10^5$ , on peut presque toujours considérer les coefficients de pertes de charge singulières comme étant indépendants de  $R_e$  [26].

**b - Les pertes de charge linéaire (par frottement) :**

Elles sont provoquées par la viscosité et prennent naissance lorsqu'il y a un mouvement, et résultent d'un échange de quantité de mouvement entre les molécules des couches voisines qui se déplacent avec des vitesses différentes. Ces pertes ont lieu sur toute la longueur de la conduite, et sont appelées aussi pertes continues.

**REMARQUE :**

L'influence de la rugosité, qui commence pratiquement à se manifester seulement aux nombres de Reynolds de l'ordre de  $R_e > 4.10^4$  pour les liquides, peut être prise en considération de manière approchée en multipliant le coefficient de perte de charges par un facteur de l'ordre 1.1 à 1.2 (et davantage quand la rugosité est plus grande) [26].

Voir Annexe B pour savoir brièvement sur l'influence de la rugosité.

**I-4-3/ ETABLISSEMENT DE L'EXPRESSION DE LA PERTE DE CHARGE PAR FROTTEMENT DANS UNE CONDUITE**

L'analyse dimensionnelle constitue une application remarquable dans la recherche de l'expression générale de la perte de charge. Elle permet précisément de déterminer la forme la plus simple que peut revêtir une loi reliant un certain nombre de grandeur physique.

Considérons un écoulement en régime permanent de débit volumique  $Q_v$  dans une conduite rectiligne de section transversale constante. La dimension caractéristique de cette section est représentée par  $D$ . la valeur de  $\Delta H$  correspondant à la perte de charge d'un écoulement sur la distance  $L$  qui représente la longueur du tronçon rectiligne de la conduite considérée. Les grandeurs physiques donc, qui interviennent dans l'expression sont :

$\Delta P$  : perte de pression (cas d'une conduite en charge) dont l'équation aux dimensions est  $ML^{-1}T^{-2}$ .

$L$  : longueur du tronçon d'écoulement considéré dont l'équation aux dimensions est  $L$ .

$D$  : dimension caractérisant la section transversale de l'écoulement dont l'équation aux dimensions est  $L$ .

$W_{moy}$  : vitesse moyenne du fluide dont l'équation aux dimensions est  $LT^{-1}$ .

$\rho$  : masse volumique du fluide dont l'équation aux dimensions est  $ML^{-3}$ .

$\mu$  : viscosité cinématique dont l'équation aux dimensions est  $L^2 T^{-1}$ .

La relation peut donc s'écrire [6] :

$$\Delta P = \frac{KL}{D} \cdot \frac{W_{\text{moy}}^2}{2} \tag{I-10}$$

Si on mesure  $\Delta P$  en hauteur de fluide, c'est à dire :  $\Delta P = \rho g \Delta H$ , la perte de charge serait :

$$\Delta H = \frac{KL}{D} \frac{W_{\text{moy}}^2}{2g} \tag{I-11}$$

avec  $K$  coefficient de perte de charge par frottement qui est fonction de nombre de *Reynolds* et la rugosité relative en générale :

$$K = f\left(\mathcal{R}_e, \frac{\lambda}{D}\right) \tag{I-12}$$

les démarches de l'obtention de ces formules est donnée dans l'Annexe B.

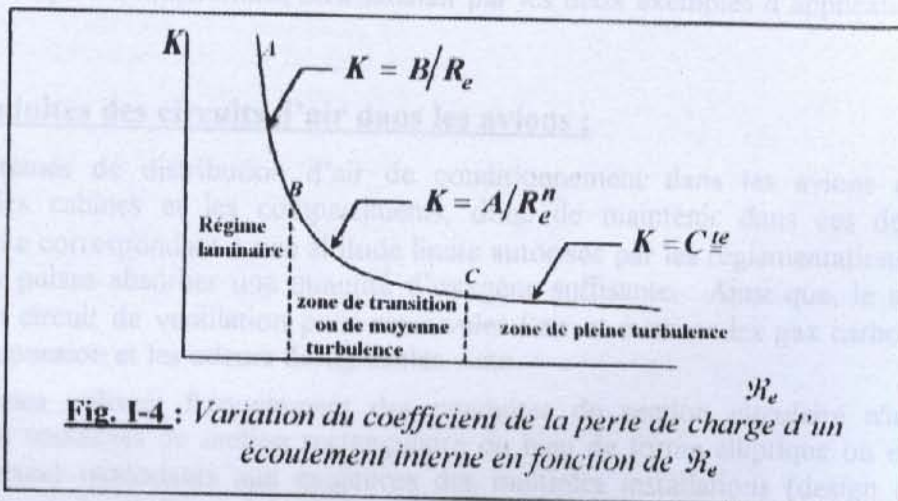
L'expérience montre que l'allure générale de la variation de  $K$  en fonction de  $\mathcal{R}_e$  est donnée par la courbe représentée dans la Figure (I-4), étant entendu que la forme exacte de cette courbe dépend de la forme du système considéré et de la grandeur de  $\lambda$  c'est à dire de la rugosité des parois du dispositif solide qui guide la masse fluide. On peut distinguer trois zones particulières dans l'étendue de la variation totale de  $K$ .

- 1- Pour les faibles valeurs de  $\mathcal{R}_e$  c'est à dire en régime laminaire, la relation est de la forme représentée par une droite dans un système d'axes à graduations bi-logarithmique.

$$K = \frac{B}{\mathcal{R}_e} \tag{I-13}$$

- 2- Pour des valeurs de  $\mathcal{R}_e$  supérieurs au nombre de *Reynolds* critique  $\mathcal{R}_{ec}$  mais toutefois suffisamment faibles pour que la turbulence du régime à l'intérieur du système n'atteigne pas un degré extrême, le coefficient  $K$  est de la forme :

$$K = \frac{A}{\mathcal{R}_e^n} \tag{I-14}$$



**Fig. I-4 :** Variation du coefficient de la perte de charge d'un écoulement interne en fonction de  $\mathcal{R}_e$

Autrement dit, dans cette zone intermédiaire  $BC$  qu'on pourrait appeler zone de transition ou zone de moyenne turbulence, la turbulence n'est pas suffisamment importante pour qu'on puisse négliger les forces de viscosités et ces deux causes interviennent pour provoquer la

perte de charge qui varie donc comme une puissance de la vitesse comprise entre '1' (régime laminaire  $n = 1$ ) et '2' (régime complètement turbulent  $n = 0$ ).

- 3- En fin, pour des valeurs supérieures au nombre de *Reynolds critique* la turbulence devient telle que les forces de viscosité sont négligeables par rapport aux effets de la turbulence. Ce que l'on appelle par saturation du régime turbulent, où  $K$  devient constant.

#### **I-4-4/ INFLUENCE DE LA FORME DE LA SECTION SUR LE COEFFICIENT DE PERTE DE CHARGE**

Le coefficient de perte de charge est fonction du régime d'écoulement et de la rugosité relative  $\xi$  des parois. Pour les écoulements laminaires ( $\mathcal{R}_e < 2000$  à  $2500$ ), le coefficient de perte de charge  $K$  pour une section circulaire dépend seulement du nombre de *Reynolds*  $\mathcal{R}_e$  (formule de *Hagen-Poiseuille*).

$$K = \frac{64}{\mathcal{R}_e} \quad (I-15)$$

En écoulement laminaire dans des conduites de sections non-circulaires le coefficient numérique  $B$  de l'équation (I-13) n'est plus égal à 64 ; sa valeur dépend de la forme de la section ; dans quelques cas simples on peut calculer la valeur de ce coefficient on donne des exemples où il peut varier de 47 à 96, (voir Annexe B et Réf.[30])

#### **I-5/ APPLICATION AERONAUTIQUE ET INDUSTRIELLE**

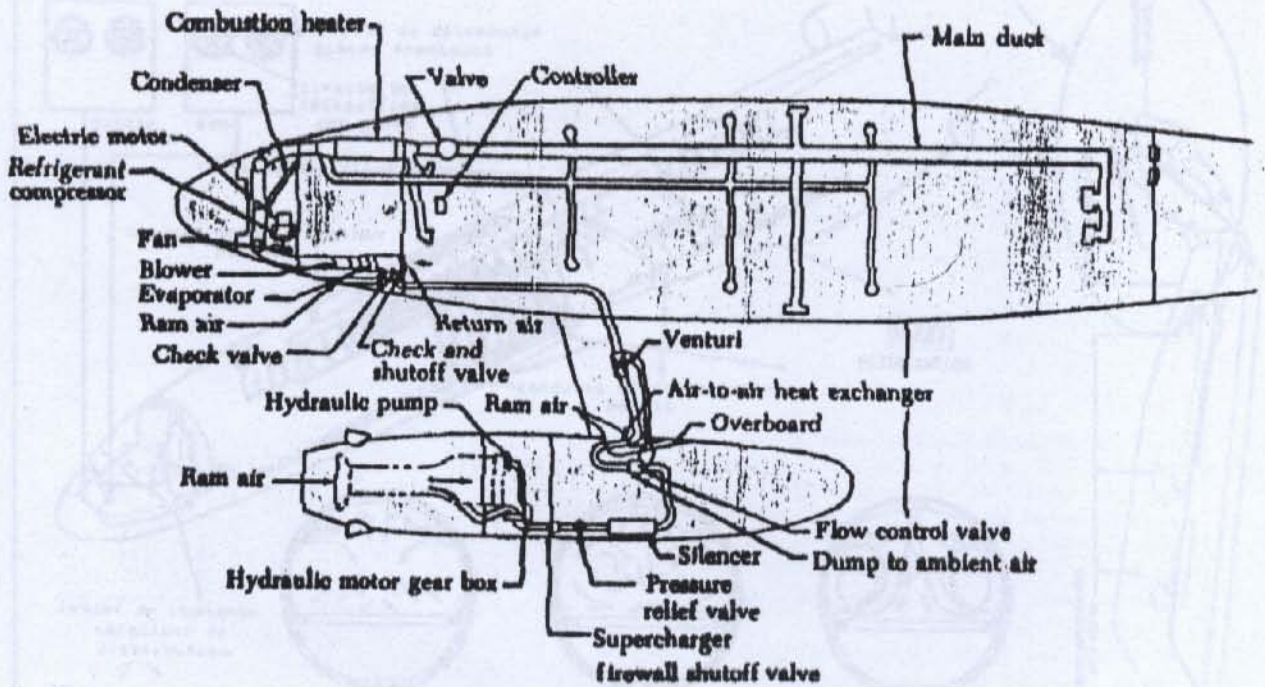
Il existe plusieurs applications utiles des conduites de section circulaire ou non comme les conduites d'aération des compartiments et des cabines dans un avion par l'air chaud ou froid, ou autres applications dans les moteurs pour véhiculer une espèce de fluide de genre d'huile ou carburant, etc. Aussi bien dans l'industrie, on trouve ces conduites à différentes dimensions et sections comme les dispositifs de ventilation de grandes dimensions, conduite de gaz des usines métallurgique, chimique... ainsi que les échangeurs de chaleur, tunnels aérodynamiques, appareils de purification de l'air ou du gaz, appareils chimiques, etc.) [26], [15], [33].

Comme exemples d'illustrations, on a satisfait par les deux exemples d'application suivants dans les avions.

##### **I-5-1/ Les conduites des circuits d'air dans les avions :**

Les systèmes de distribution d'air de conditionnement dans les avions assurent la pressurisation des cabines et les compartiments, donc de maintenir dans ces derniers une pression constante correspondant à une altitude limite autorisée par les réglementations, pour que le corps humain puisse absorber une quantité d'oxygène suffisante. Ainsi que, le système est complété par un circuit de ventilation pour renouveler l'air et évacuer les gaz carboniques, les poussières en suspension et les odeurs désagréables... etc.

Ces systèmes utilisent fréquemment des conduites de section circulaire n'importe où possible. Or, Les conduites de section rectangulaire ou bien de forme elliptique ou encore plus spéciale (complexes) répondants aux exigences des multiples installations (design d'intérieur, limitation d'espace, etc) voir figure I-5, [15] et la figure I-6, [33].

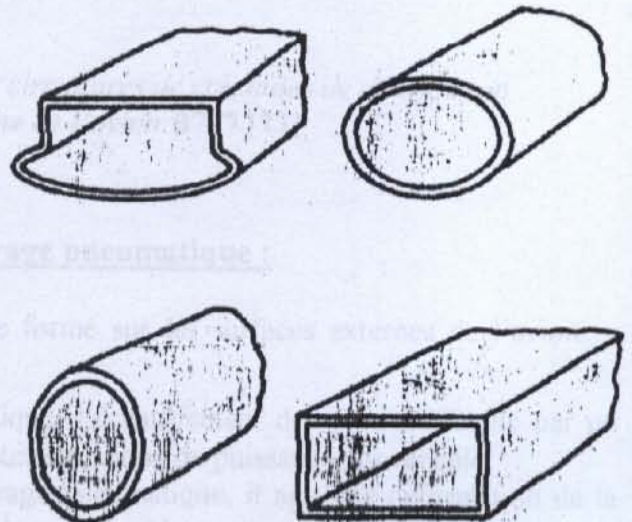


FIGURES 14-16. Typical air distribution system.

**Air Ducts**

Ducts having circular or rectangular cross sections are most frequently used in air distribution systems. Circular ducts are used wherever possible. Rectangular ducts are generally used where circular ducts cannot be used because of installation or space limitations. Rectangular ducts may be used in the cabin where a more pleasing appearance is desired.

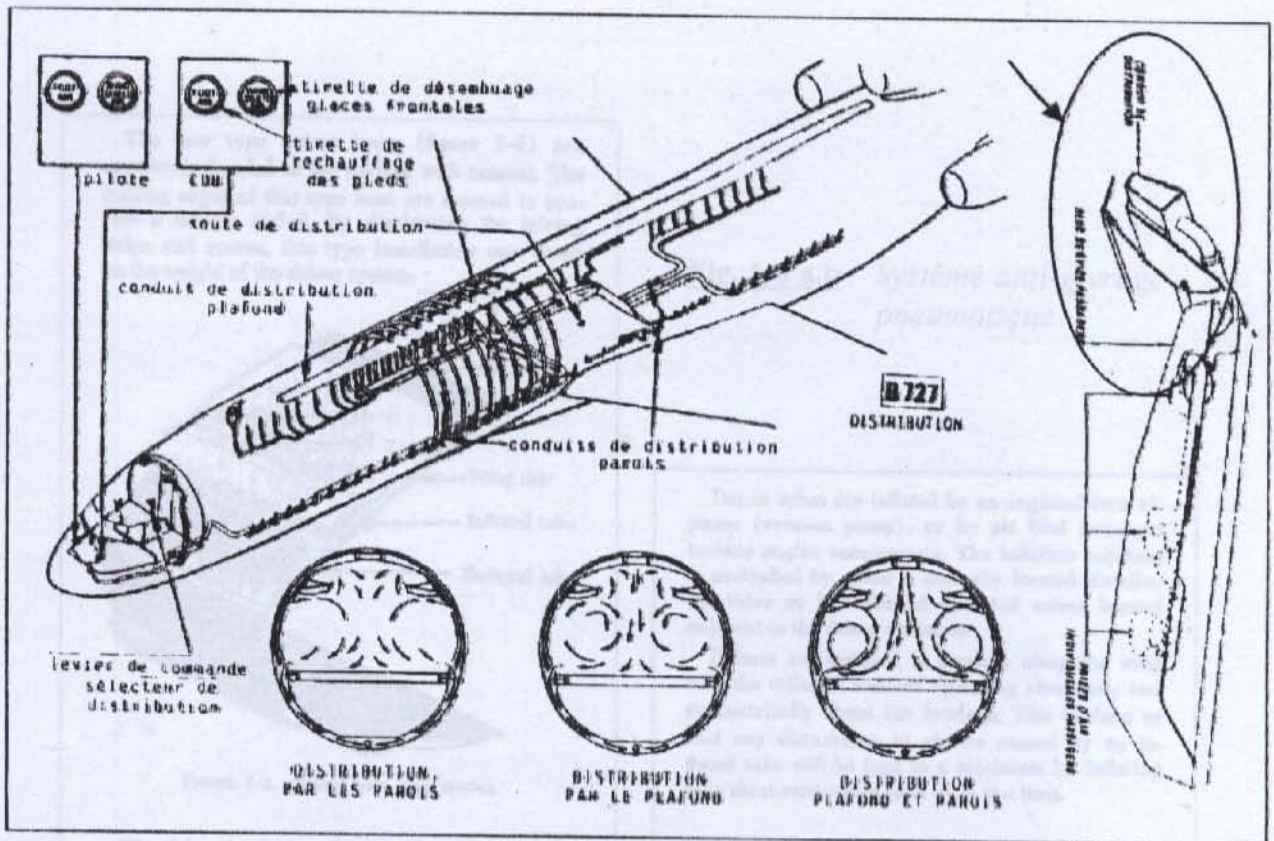
Distribution ducts for various cabin zones, individual air outlets for passengers, and window demisters can have various shapes. Examples of circular, rectangular, elliptical and profiled ducts are illustrated in figure 14-17.



FIGURES 14-17. Cross sections of air distribution ducts.

Fig. 1-5 : Application des sections circulaires et non circulaire pour les conduites de conditionnement d'air dans un avion typique [15].

Nous remarquons bien dans cette figure, qu'il y a des applications utiles pour l'aération des compartiments ou des chambres dans un avion par l'air chaud ou froid, ainsi d'autre application pour véhiculer une espèce de fluide de genre carburant, d'huile ou autre.



**Fig. I-6 :** Application des sections non circulaires de conduites de distribution de l'air dans un système de l'avion B727.[33]

**I-5-2/ Les conduites d'un système anti-givrage pneumatique :**

Les méthodes utilisées pour éliminer le givre formé sur les surfaces externes de l'avion varient avec le modèle et la source disposée.

On peut citer par exemple le modèle thermique, l'échauffement des parois effectuée par un prélèvement d'un fluide chaud ou bien par un circuit électrique de puissance convenable. Ainsi que le modèle mécanique : c'est le dégivrage pneumatique, il agit par déformation de la surface à dégivrer. Il est utilisé uniquement pour la voilure et les empennages (bord d'attaque).

Il est réalisé par des bandes à cellules tubulaires ou avec une section non circulaire (voir Figure I-6a) collées sur les surfaces à dégivrer pour conserver leur lissage (Smooth airfoil), dans lesquelles on envoie successivement de l'air comprimé et de l'air déprimé. Alors les conduites sont gonflées alternativement comme le montre la figure I-6b, d'où le débit est en fonction du temps pour cette application.

En fin, finissons ce chapitre avec cet exemple, puis entamons le chapitre II de la modélisation mathématique

CHAPITRE II

MODELISATION MATHEMATIQUE

The new type deicer boots (figure 7-3) are completely bonded to the surface with cement. The trailing edges of this type boot are tapered to provide a smooth airfoil. By eliminating the fairing strips and screws, this type installation cuts down on the weight of the deicer system.

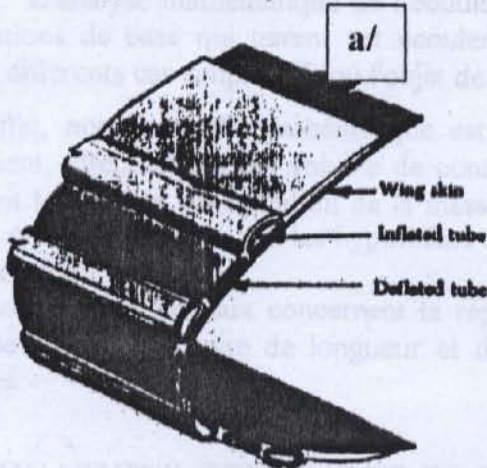
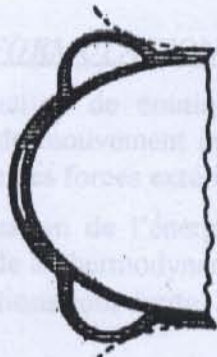


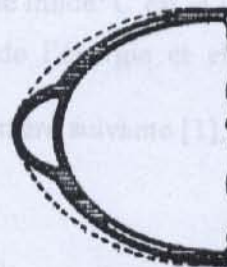
FIGURE 7-3. Deicer boot cross section.

The deicer boot air cells are connected to system pressure and vacuum lines by nonkinking flexible hose.



When center cell deflates, outer cells inflate. This raises cracked ice causing it to be blown off by air stream.

b/



After deicer system has been put into operation, center cell inflates, cracking ice.

FIGURE 7-2. Deicer boot inflation cycle.

Fig. 1-6 a,b : Système anti-givrage pneumatique

Deicer tubes are inflated by an engine-driven air pump (vacuum pump), or by air bled from gas turbine engine compressors. The inflation sequence is controlled by either a centrally located distributor valve or by solenoid operated valves located adjacent to the deicer air inlets.

Deicers are installed in sections along the wing with the different sections operating alternately and symmetrically about the fuselage. This is done so that any disturbance to airflow caused by an inflated tube will be kept to a minimum by inflating only short sections on each wing at a time.



Deicing system not operating. Cells lie close to airfoil section. Ice is permitted to form.

Flexible hose

## CHAPITRE II

### MODELISATION MATHEMATIQUE

#### II-1/ INTRODUCTION

L'analyse mathématique de l'écoulement d'un fluide Newtonien nous permet d'établir les équations de base qui gèrent cet écoulement, ainsi que les solutions analytiques possibles pour les différents cas simples. D'où l'objet de ce chapitre.

En effet, notre modèle mathématique est obtenu à partir du bilan massique et quantité de mouvement, effectués sur un volume de contrôle élémentaire du fluide considéré. Les équations exprimant les lois de conservation de la masse, de la quantité de mouvement et de l'énergie sont données par la suite, ainsi que les hypothèses de calcul qui permettront de simplifier et résoudre le problème posé.

Les résultats principaux concernent la répartition des vitesses dans une section droite et les pertes de charge par unité de longueur et d'autres paramètres, pour différentes géométries de conduites.

#### II-2/ EQUATIONS GENERALES REGISSANT LES ECOULEMENTS DANS LES CONDUITES

Les équations de continuité, de quantité de mouvement et de l'énergie, sont les lois mathématiques qui décrivent l'écoulement. Ces équations sont obtenues en faisant les bilans sur les quantités précédentes.

##### II-2-1/ FORMULATION DES EQUATIONS DES BILANS

L'équation de continuité exprime la conservation de la masse, tandis que l'équation de quantité de mouvement indique que le taux de variation de la quantité de mouvement égale à la résultante des forces extérieures appliquée à la particule fluide. C'est la deuxième loi de Newton.

L'équation de l'énergie traduit la conservation de l'énergie et elle est déduite du premier principe de la thermodynamique.

Ces équations sont écrites dans le cas général de la manière suivante [1], [12] :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot \rho \vec{v} = 0 \quad (II-1)$$

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \nabla) \vec{v} = -\frac{1}{\rho} \nabla p + \frac{1}{\rho} \nabla \cdot \vec{\tau} + \vec{f} \quad (II-2)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} (\rho E) + \nabla \cdot [\rho E \vec{v} - k \nabla T + \rho \vec{v} \cdot \vec{\tau}] = \rho \vec{f} \cdot \vec{v} + q_h \quad (II-3)$$

Avec  $\vec{f}$  : Forces de volume.

$\vec{\tau}$  : Tenseur des contraintes tangentielles (de viscosité).

$E$  : Energie interne massique.

$\rho \vec{f}\vec{v}$  : Travail par unité du temps (puissance).

$q_h$  : Source de chaleur ( réaction chimiques,... etc.)

$k$  : Conductivité thermique du fluide considéré.

Pour compléter ce système d'équations, on ajoute l'équation d'état spécifique de la thermodynamique, qui donne une relation entre les variables d'états du fluide considéré :

$$p = F_r(\rho, T) \quad (\text{II-4})$$

Avec  $r$  : indique un fluide réel visqueux.

## II-2-2/ CONDITIONS INITIALES ET AUX LIMITES

La définition des conditions aux limites appropriées est essentielle pour la prise en charge de la nature physique de l'écoulement.

S'il n'y a pas d'injection (transpiration), une condition de non glissement est imposée sur la vitesse pour les équations de Navier-Stokes sur les parois solides. Pour les écoulements non visqueux, les vecteurs vitesse sont parallèles à la paroi solide (condition de glissement).

La température est spécifiée soit à la température pariétale soit à partir du gradient normal de température. Lorsque la paroi est considérée non adiabatique, il s'avère nécessaire d'entreprendre une étude de transfert de chaleur afin de déterminer la température pariétale [12].

Pour les écoulements non visqueux adiabatiques, la pression et les vitesses sont reliées par les équations de l'énergie. Par conséquent, la pression peut être calculée à la frontière à partir de la vitesse prescrite ou calculée pour les équations de Navier-Stokes. En particulier, le gradient de pression est soit supposé nul, soit calculé à partir de l'équation de quantité de mouvement normale à la surface.

La détermination des conditions aux limites de l'écoulement entrant et sortant est l'une des tâches les plus importantes et dépend essentiellement du type d'écoulement (subsonique ou supersonique) et de la nature des équations.

Pour les phases transitoires, il faut connaître ou imposer la répartition des vitesses et de la pression initiale sur le domaine du calcul ou bien les accélérations du l'écoulement au départ ( $t=0$ ) et aussi bien les températures initiales ou les flux thermiques aux frontières.

Ces équations, que nous avons récapitulées avec ces conditions aux limites appropriées, nous servent de base pour la modélisation mathématique, utilisée dans la suite de notre étude.

## II-3/ HYPOTHESES PRINCIPALES

La complexité des équations citées auparavant, dans le cas général, nous impose de passer par des hypothèses simplificatrices, afin d'aboutir une forme d'équations différentielles qu'on puisse les résoudre par des approches numériques, qui traduit un certain degré d'approximation. La solution numérique de ces équations de mouvement est soumise à deux types d'approximations :

- Des approximations sur la base de la nature physique de l'écoulement.
- Des approximations provenant des techniques et de la discrétisation mise en œuvre pour la résolution.

De là, on considère les hypothèses de base suivantes :

- ① Le fluide est considéré Newtonien et homogène (pour d'autre type de viscosité voir Annexe C).

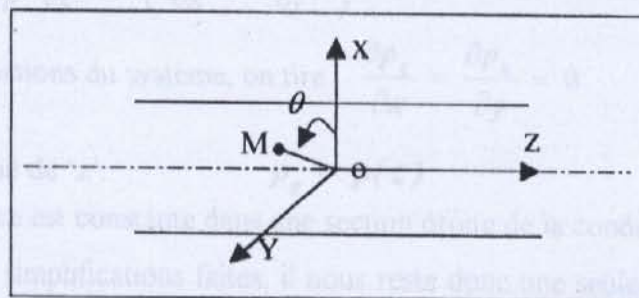


- ② Ecoulement isentropique et le fluide est calorifiquement parfait, justifiée par le fait qu'on néglige les pertes thermiques.
- ③ Ecoulement laminaire et établi, car on s'intéresse à généraliser l'étude de Poiseuille.
- ④ Ecoulement stationnaire.
- ⑤ Ecoulement incompressible. Vu que la majorité des cas étudiés et rencontrés dans la pratique de ce domaine, sont des liquides ou des gaz à faible vitesse.
- ⑥ Section supposée quelconque : simplement ou multi-connexes et constante le long de la conduite traversée (tronçon rectiligne).
- ⑦ Gradient de pression constant dans la direction axiale.
- ⑧ Ecoulement dominant dans la direction axiale de la conduite (sans asymétrie).
- ⑨ On conserve les forces à distance (forces de volume) pour les gaz (air...) et les liquides (comme l'eau, huile... etc.)
- ⑩ On considère aussi que la conduite a des parois hydrauliquement lisses, et seul les pertes de charge linéaire sont prises en considération.

## II-4/ FORMULATION MATHÉMATIQUE DU PROBLÈME

### II-4-1/ EQUATIONS FINALES REGISSANT L'ÉCOULEMENT

Notant que, l'étude de l'écoulement se fait dans le plan transversale (x,y) de la conduite, tel que cette dernière est un cylindre de section quelconque, d'envergure fini dont les génératrices sont parallèle à (OZ), voir la figure (II-1).



**Fig. II-1 :** Une conduite cylindrique typique

Compte tenant les hypothèses précédentes, on a : L'écoulement étant laminaire, axial et complètement développé (zone établi) c.à.d 'Z > L<sub>e</sub>' (voir le paragraphe § I-3). Les lignes de courants sont parallèles à OZ, donc les composantes U et V de la vitesse sont nulles.

$$U = V = 0 \quad (II-5)$$

D'après la quatrième hypothèse, l'écoulement permanent obtenu après la période de mise en régime stationnaire, impose que les dérivées partielles par rapport au temps ' $\partial/\partial t$ ' sont identiquement nulles. Les variations des différentes grandeurs sont comptées le long des lignes de courants.

Quant à l'équation de continuité, l'hypothèse d'incompressibilité permet de la simplifier et elle prend la forme :

$$\text{div}(\vec{V}) = \vec{0} \quad \text{avec} \quad \rho = \text{constante} \tag{II-6}$$

En utilisant les équations (II-5), l'équation (II-6) se réduit à :

$$\frac{\partial W}{\partial z} = 0 \tag{II-7}$$

L'équation (II-2) de NAVIER-STOCKS est réécrite de la manière suivante :

$$\begin{cases} \frac{\partial U}{\partial t} + U \frac{\partial U}{\partial x} + V \frac{\partial U}{\partial y} + W \frac{\partial U}{\partial z} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \Delta U + f_x \\ \frac{\partial V}{\partial t} + U \frac{\partial V}{\partial x} + V \frac{\partial V}{\partial y} + W \frac{\partial V}{\partial z} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} + \nu \Delta V + f_y \\ \frac{\partial W}{\partial t} + U \frac{\partial W}{\partial x} + V \frac{\partial W}{\partial y} + W \frac{\partial W}{\partial z} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} + \nu \Delta W + f_z \end{cases} \tag{II-8}$$

Avec  $\nu = \mu/\rho$  : viscosité cinématique.

Compte tenu des hypothèses citées précédemment, ce système d'équations se réduit à la forme suivante, tel qu'on note :

$$p_g = p + \rho gh$$

Où  $p_g$  est la pression motrice, et  $h$  est une hauteur. Ainsi :

$$\begin{cases} 0 = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p_g}{\partial x} \\ 0 = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p_g}{\partial y} \\ 0 = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p_g}{\partial z} + \nu \left( \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 W}{\partial y^2} \right) \end{cases}$$

Des deux premières équations du système, on tire :  $\frac{\partial p_g}{\partial x} = \frac{\partial p_g}{\partial y} = 0$

Soit donc,  $p_g$  dépend que de 'z'.  $p_g = p(z)$  (II-8)

Alors, la pression motrice est constante dans une section droite de la conduite.

Finalement après les simplifications faites, il nous reste donc une seule équation du mouvement. L'équation donnée par :

$$0 = -\frac{1}{\rho} \frac{dp_g}{dz} + \nu \left( \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 W}{\partial y^2} \right)$$

Ou bien :  $\frac{\partial^2 W}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 W}{\partial y^2} = \frac{1}{\mu} \frac{d(p + \rho gh)}{dz} = \frac{1}{\mu} \frac{dp_g}{dz}$  (II-9)

Sous la forme compacte :  $\Delta W = f$  (II-10)

Avec :  $f = \frac{1}{\mu} \frac{d(p + \rho gh)}{dz} = \frac{1}{\mu} \frac{dp_g}{dz}$

Cette équation finale est une équation différentielle elliptique dite de Poisson avec second membre constant. Pour résoudre cette équation, on ajoute les conditions aux limites à satisfaire comme suit.

#### II-4-2/ CONDITIONS AUX LIMITES

La présence de la viscosité de l'écoulement et les forces de frottement aux parois induit que la condition de non glissement est imposée sur la vitesse aux parois.

Cette condition donc de type DIRICHLET est donnée par l'équation générale suivante :

$$\vec{W}_{\text{paroi}} = \vec{0} \quad \text{sur la frontière '}\Gamma\text{'}. \quad (\text{II-11})$$

Dans la suite, on entame la résolution du problème pour les configurations simples du domaine (section cercle, carré...), par une méthode analytique, afin de permettre de valider les programmes du calcul et de procéder à la résolution des configurations complexes par suite, par la méthode des éléments finis. Et en fin, on procède aux calculs des champs des paramètres thermodynamiques et dynamiques à travers ces sections.

#### II-5/ SOLUTIONS ANALYTIQUES POUR QUELQUES CONFIGURATIONS SIMPLLES :

Afin de déterminer les champs des paramètres thermodynamiques et dynamiques à travers les sections des conduites ou canalisations, la solution analytique de l'équation de Poisson existe que pour quelques cas de sections simples. Nous présentons ces solutions comme suit :

##### Remarques :

\* Pour ces sections simples, Berker (1963) a rassemblé les solutions analytiques de cet écoulement. Et la solution à travers de cylindres non coaxiaux est donnée par 'Piercy Et al' (1933) tel qu'il a utilisé la méthode de variables complexes pour transformer cette géométrie à section de 2 cylindres coaxiaux où la solution de cette dernière est connue analytiquement.

\* En 1978, Shah et London ont tracé des diagrammes et des tableaux pour les coefficients du frottement (R. laminaire) et les paramètres de transfert thermique caractérisant ces différentes formes des sections (celles admettant des solutions analytiques) traversé par l'écoulement [16].

#### II-5-1/ CAS DES SECTIONS CIRCULAIRES

##### II-5-1-A / SECTION CERCLE « Ecoulement de Poiseuille » réf.[6]

Nous commençons par étudier le cas d'un écoulement du fluide visqueux en régime laminaire dans une conduite cylindrique de section circulaire, et mettant en évidence le modèle d'écoulement de Poiseuille qui fournit les solutions exactes des équations de NAVIER-STOCKES simplifiées.

Pour ce cas circulaire, on exprime le Laplacien  $\Delta W$  en coordonner cylindrique  $(r, \theta, z)$ . La vitesse  $W$  ainsi que  $\Delta W$  ne dépendront pas de  $\theta$ . On obtient alors :

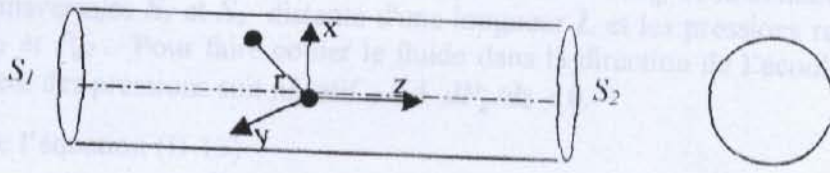
$$\Delta W = \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 W}{\partial y^2}; \quad \Delta W = \frac{d^2 W}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dW}{dr} = \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left( r \frac{dW}{dr} \right)$$

Remplaçant  $\Delta W$  dans l'équation (II-10) on aura :

$$\frac{dp_g}{dz} = \frac{\mu}{r} \frac{d}{dr} \left( r \frac{dW}{dr} \right) \quad (\text{II-12})$$

Or  $P_g$  ne dépend que de  $z$ , et  $W$  ne dépende que de  $r$ .

L'égalité précédente n'est vérifiée qu'à la condition que chaque membre soit égal à une constante.



**Fig. II-2 :** Conduite cylindrique de section circulaire

**a - Répartition des vitesses**

La répartition des vitesses peut s'obtenir de la manière suivante :

En posant : 
$$\frac{dp_g}{dz} = -a \quad , \quad a > 0 \tag{II-13}$$

On aura l'équation à résoudre :

$$\frac{d}{dr} \left( r \frac{dW}{dr} \right) = -a \frac{r}{\mu} \tag{II-14}$$

Par intégration successive de l'équation (II-14) par rapport à  $r$ , on obtient :

$$W = -\frac{a}{4\mu} r^2 + b \cdot \log(r) + c \tag{II-15}$$

Où  $b$  et  $c$  sont des constantes d'intégration définie par les conditions aux limites suivantes pour :

$r = 0$ , La vitesse doit être finie, alors il faut que :  $b = 0$ .

$r = R$ , La vitesse s'annule sur les parois,  $W(R) = 0$ , où il y a adhérence du fluide à la paroi.

Donc, on aura : 
$$c = \frac{a R^2}{4\mu}$$

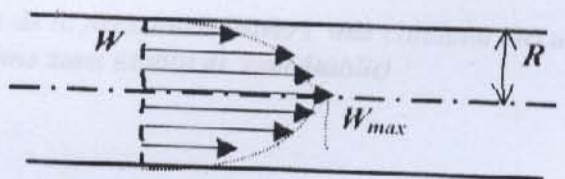
Par suite, la répartition des vitesses à l'intérieur de la conduite est donnée par l'expression suivante :

$$W(r) = \frac{a}{4\mu} R^2 \left[ 1 - \frac{r^2}{R^2} \right] \tag{II-16}$$

Avec :  $R$  le rayon de la conduite.

L'expression (II-16) représente un profil parabololoïde de révolution, ayant son sommet sur l'axe de la conduite, donc la vitesse varie suivant une loi parabolique.

La répartition des vitesses est la même tout le long de la conduite pour un régime établi, voir figure (II-3).



**Fig. II-3 :** Champ de vitesse de l'écoulement laminaire dans une conduite circulaire.

**b - Répartition des pressions**

De même, on peut déterminer la répartition des pressions le long de la conduite en considérant deux sections transversales  $S_1$  et  $S_2$  distante d'une longueur  $L$  et les pressions respectives sur ces sections sont  $P_{g1}$  et  $P_{g2}$ . Pour faire couler le fluide dans la direction de l'écoulement positive, il faut que le gradient des pressions soit négatif c.à.d  $dP_g/dz < 0$ .

Nous avons de l'équation (II-13) :

$$\frac{dp_g}{dz} = -a \quad \Rightarrow \quad p_g(z) = -az + d \quad \text{avec } a > 0 \quad (II-17)$$

$d$  : étant une constante d'intégration.

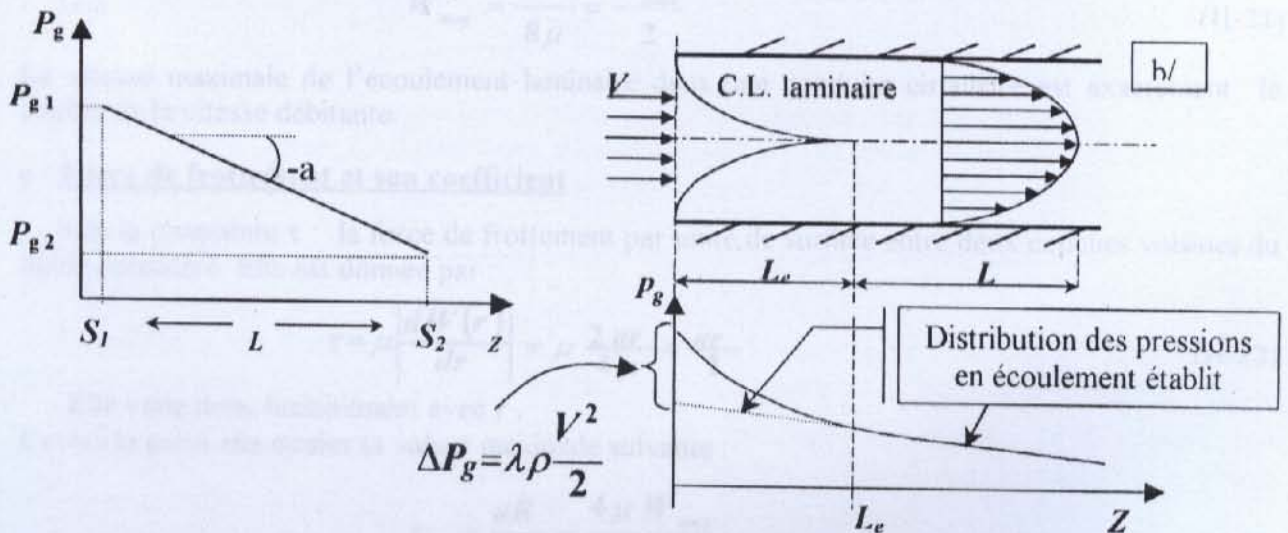
Pour une longueur  $L$  sur laquelle la pression varie linéairement, on écrit :

$$P_{g1} - P_{g2} = a.L = \Delta p_g \quad (II-18)$$

Comme  $a > 0$ , la pression motrice  $P_g$  décroît linéairement dans la direction de l'écoulement suivant la loi (II-17) le long de la conduite tout en restant constante dans une section droite entre les deux sections  $S_1$  et  $S_2$  de la conduite, aux extrémités duquel s'exerce la différence de pression, voir la figure (II-4). La diminution de la pression est due au frottement à la paroi de la conduite.

Pour l'évolution de la pression dans la zone d'entrée d'une conduite, où le régime est non établi et les couches limites ne sont pas encore en interaction c.à.d  $z < L_e$  (voir le paragraphe § I-3 pour la définition de la longueur  $L_e$ ). On a une évolution de pression non linéaire et une perte de charge singulière, dont son calcul ne fait pas l'objet de ce travail. Voir la figure (II-4 b).

En admettant que le régime établi existe dès l'origine de la conduite, on a une perte de charge supplémentaire de type singulière.



**Fig. II-4 a,b :** Evolution de la pression à travers une conduite circulaire (avec une zone établit et non établit)

### c - Calcul du débit volumique

Le débit volumique  $Q_v$  traversant la section droite  $S$  est le flux du vecteur vitesse à travers  $S$ . Il est donné par l'intégrale :

$$Q_v = \int_0^R 2\pi r W dr = \frac{2\pi a}{4\mu} \int_0^R r(R^2 - r^2) dr = \frac{\pi a R^4}{8\mu} = \frac{\pi a D^4}{128\mu}$$

Remplaçons 'a' par sa valeur  $\frac{\Delta P_g}{L}$ , il devient :

$$Q_v = \frac{\pi R^4}{8\mu L} \Delta P_g = \frac{\pi D^4}{128\mu L} \Delta P_g \quad (11-19)$$

Cette dernière formule s'appelle *formule de Poiseuille*, traduit l'expression du débit volumique. Il est proportionnel à la différence des pressions motrices appliquées aux extrémités de la conduite et à la puissance 4 de son diamètre. Donc dans ces conditions, le débit est le même pour toutes les sections transversales de la conduite.

### d - Vitesse maximum et Vitesse moyenne de l'écoulement

La vitesse maximale est atteinte au centre de la conduite pour  $r = 0$ , elle a pour valeur :

$$W_{max} = \frac{a}{4\mu} R^2 \quad (11-20)$$

La vitesse débitante est par définition la vitesse moyenne calculée sur la section droite, c'est donc

$$W_{moy} = \frac{Q_v}{S} = \frac{1}{\pi R^2} \frac{\pi a R^4}{8\mu}$$

$$\text{Soit : } W_{moy} = \frac{a R^2}{8\mu} = \frac{W_{max}}{2} \quad (11-21)$$

La vitesse maximale de l'écoulement laminaire dans une conduite circulaire est exactement le double de la vitesse débitante.

### e - Force de frottement et son coefficient

Soit la contrainte  $\tau$  : la force de frottement par unité de surface entre deux couches voisines du fluide considéré. Elle est donnée par :

$$\tau = \mu \left| \frac{dW(r)}{dr} \right| = \mu \frac{2ar}{4\mu} = \frac{ar}{2} \quad (11-22)$$

Elle varie donc linéairement avec  $r$ .

Contre la paroi elle atteint sa valeur maximale suivante :

$$\tau_p = \frac{aR}{2} = \frac{4\mu W_{moy}}{R} \quad (11-23)$$

La force de frottement visqueuse exercée par le fluide sur toute la paroi intérieure de la portion 'L' de la conduite est donc :

$$F = \tau_p 2\pi RL = \frac{aR}{2} 2\pi RL = a\pi R^2 L = \frac{\Delta P_g}{L} \pi R^2 L \quad (11-24)$$

$$\text{d'où : } F = \pi R^2 \Delta P_g \quad (11-25)$$

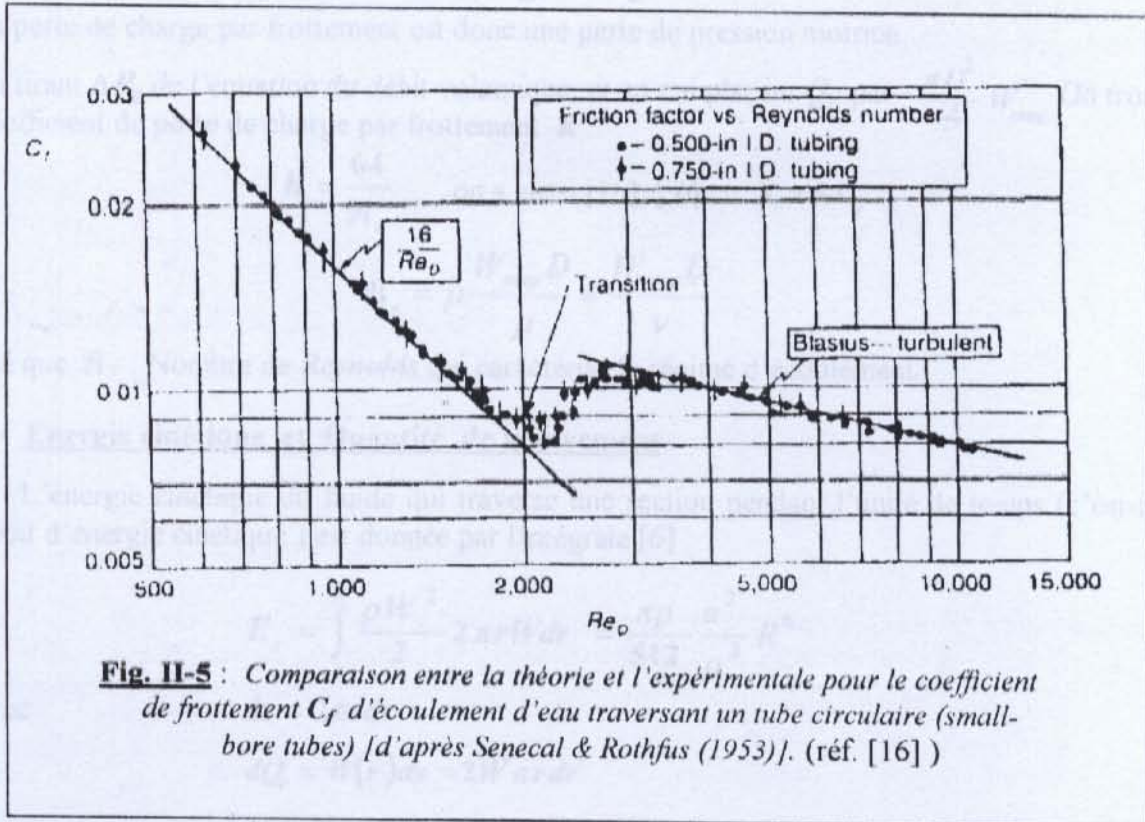
Cette force de frottement est égale au produit de la section  $S$  de la conduite par la différence de pression  $\Delta P_g$  exercée entre les deux extrémités.

On peut lui associer le coefficient de frottement local  $C_f$  :

$$C_f = \frac{\tau_p}{\frac{1}{2} \rho W_{moy}^2} = \frac{8\mu}{\rho R W_{moy}} = \frac{16}{Re_D} \quad (II-26)$$

Le coefficient de frottement moyenne  $C_F$  sur une surface  $S$  est donnée par :

$$C_F = \frac{1}{S} \int C_f dS \quad (II-27)$$



**Fig. II-5 :** Comparaison entre la théorie et l'expérimentale pour le coefficient de frottement  $C_f$  d'écoulement d'eau traversant un tube circulaire (small-bore tubes) [d'après Senecal & Rothfus (1953)]. (réf. [16])

Le calcul de  $C_f$  pour la partie laminaire, montre une bonne concordance avec l'expérimentale, comme l'indique la figure (II-5) d'après les résultats expérimentaux de Senecal & Rothfus (1953).

L'écoulement utilisé subit une transition vers la turbulence au Nombre de Reynolds égale approximativement  $Re_D \approx 2000$ . A partir de  $Re_D \approx 3000$ , l'écoulement dans le tube est pleinement turbulent (voir Fig. II-5).

La courbe appelée « Blasius » est une courbe compatible aux résultats de l'écoulement turbulent, tel que H. Blasius (Etudiant de Prandtl) a donné la formule suivante (en 1913), [16] :

$$C_f = \frac{0.0791}{\sqrt[4]{Re_d}}$$

### f - Calcul des pertes de charge par frottement et leur coefficient, réf. [16] et [16] :

Pour un fluide réel, il y aura une perte d'énergie due au frottement visqueux. Cette perte d'énergie se traduira par une perte de charge que nous devons estimer entre deux sections. Par les critères de l'analyse dimensionnelle, la perte de charge s'écrit :

$$\Delta H = K \frac{L}{D} \frac{W_{moy}^2}{2g} \quad (II-28)$$

Où :

$$\Delta H = \frac{\Delta P_g}{\rho g} \quad (II-29)$$

donc :

$$\Delta P_g = K \frac{L}{D} \rho \frac{W_{moy}^2}{2} \quad (II-30)$$

La perte de charge par frottement est donc une perte de pression motrice.

En tirant  $\Delta P_g$  de l'équation du débit volumique, et en remplaçant  $Q_v$  par  $\frac{\pi D^2}{4} W_{moy}$ . On trouve le coefficient de perte de charge par frottement  $K$  :

$$K = \frac{64}{\mathfrak{R}_e}, \quad \text{on a aussi [16], [6] : } K = 4.C_f \quad (II-31)$$

Et :

$$\mathfrak{R}_e = \rho \frac{W_{moy} D}{\mu} = \frac{W_{moy} D}{\nu} \quad (II-32)$$

Tel que  $\mathfrak{R}_e$  : Nombre de *Reynolds* qui caractérise le régime d'écoulement.

### g - Energie cinétique et Quantité de mouvement

L'énergie cinétique du fluide qui traverse une section pendant l'unité de temps (c'est-à-dire le débit d'énergie cinétique) est donnée par l'intégrale [6] :

$$E_c = \int_0^R \frac{\rho W^2}{2} 2\pi r W dr = \frac{\pi \rho}{512} \frac{a^3}{\mu^3} R^8 \quad (II-33)$$

avec :

$$ds = 2\pi r dr$$

et

$$dQ_v = W(r) ds = 2W \pi r dr$$

En introduisant la vitesse débitante  $W_{moy}$ , d'après l'équation (II-21) et le débit volumique  $Q_v$ , on trouve :

$$E_c = \rho \pi R^2 W_{moy}^3 = \rho Q_v W_{moy}^2 \quad (II-34)$$

De la même façon, on peut calculer le débit de quantité de mouvement traversant une section droite. Il est donné par l'intégrale suivante :

$$M = \int_s W \rho dQ_v = \int_0^R 2\pi r dr \rho W^2 = \frac{4}{3} \rho Q_v W_{moy} \quad (II-35)$$

Ces expressions de  $E_c$  et de  $M$  se conservent tout le long de la conduite, tant que la répartition des vitesses reste parabolique. Ces calculs nous montrent que cette répartition a une énergie cinétique transportée 2 fois plus grande, et une quantité de mouvement multipliée par 4/3.



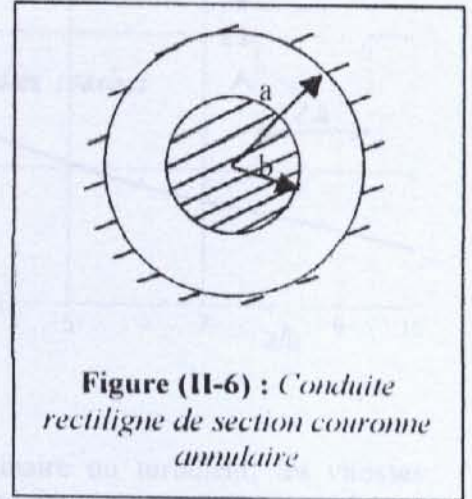
**II-5-1-B / SECTION COURONNE ANNULAIRE (2 cylindres coaxiaux) Réf.[6] :**

Pour une section couronne annulaire, on note le rayon du grand cercle 'a' et le rayon de cercle interne par 'b'.

Donc :  $a \geq r \geq b$ .

Le diamètre hydraulique a pour expression :

$$D_H = \frac{4\pi(a^2 - b^2)}{2\pi a + 2\pi b} = 2(a - b)$$



**Figure (II-6) :** Conduite rectiligne de section couronne annulaire

**a - Expression de la vitesse et son maximum**

Nous avons d'après l'équation (II-15) et nos conditions aux limites :

$$W(r) = \frac{1}{4\mu} \left( \frac{dp_g}{dz} \right) \left[ a^2 - r^2 + (a^2 - b^2) \frac{\ln(a/r)}{\ln(b/a)} \right] \tag{II-36}$$

$$W_{max} = \frac{1}{4\mu} \left( \frac{dp_g}{dz} \right) \left[ \frac{3a^2 - b^2}{4} - \frac{ab}{2} + (a^2 - b^2) \frac{\ln(2a/(a+b))}{\ln(b/a)} \right] \tag{II-37}$$

**b - Expression du débit volumique**

L'expression du débit volumique est donnée par [6] :

$$Q_v = \frac{\pi}{8\mu} \left( \frac{dp_g}{dz} \right) \left[ a^4 - b^4 - \frac{(a^2 - b^2)^2}{\ln(a/b)} \right] \tag{II-38}$$

**c - Coefficient des pertes de charge linéaire**

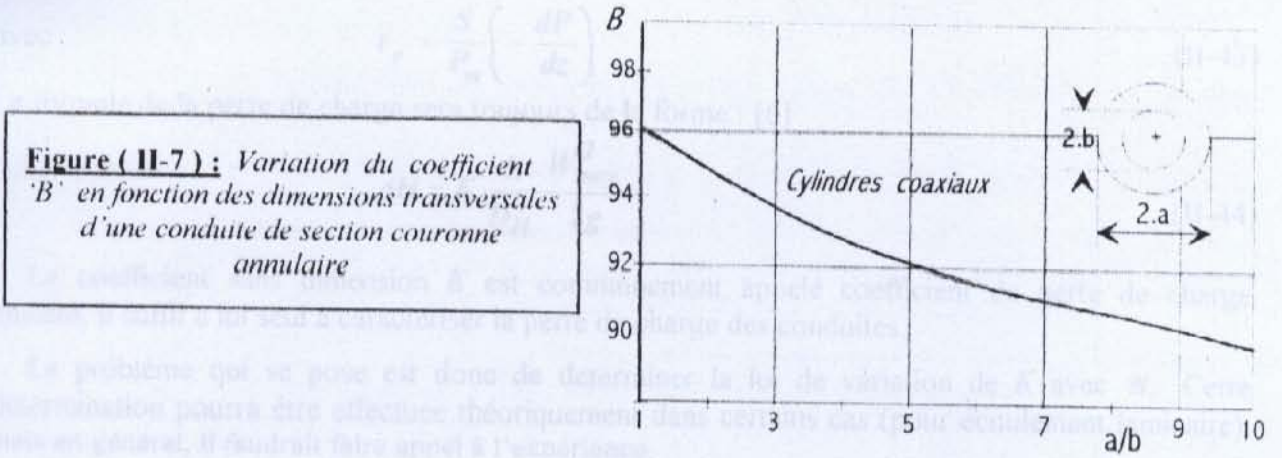
La formule du coefficient de perte de charge par frottement  $K_{ann}$  est de la forme d'équation (I-13). La variation du coefficient  $B$  pour cette section est illustrée dans la figure (II-7) suivante, en fonction de ses dimensions transversales  $a/b$  compris entre 1 et 10. On a :

$$K_{ann} = C_2 K = \frac{B}{Re} \implies B = C_2 \cdot 64 \tag{II-39}$$

- Où :  $K_{ann}$ : Coefficient de perte de charge par frottement pour des conduites à section annulaire.
- $K$  : Coefficient de perte de charge par frottement pour des conduites à section circulaire.
- $B$  : Paramètre géométrique de la section considérée.
- $C_2$  : Coefficient tenant compte du rapport des cotés  $a/b$  de la couronne annulaire où ses valeurs sont données expérimentalement dans le tableau suivant pour  $Re \leq 2000$ .

**Tableau (II-2) :** Les valeurs de  $C_2$  en fonction de  $a/b$  et  $b/a$  :

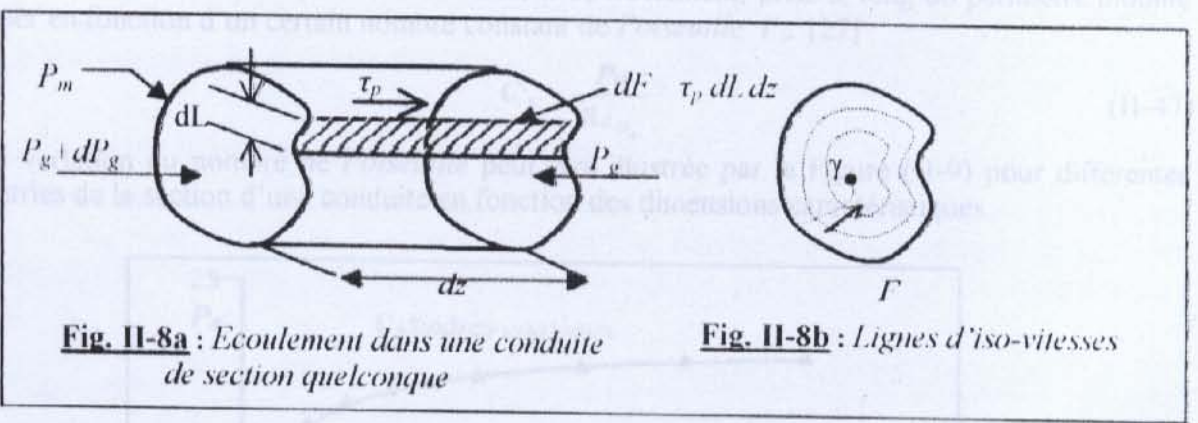
b/a	1.0	0.8	0.6	0.5	0.4	0.3	0.2	0.1
a/b	1.0	1.25	1.66	2.00	2.50	3.33	5.00	10
$C_2$	1.50	1.497	1.49	1.486	1.48	1.47	1.45	1.40



**II-5-2/ CAS DES SECTIONS NON - CIRCULAIRES**

Pour une conduite cylindrique quelconque, en régime laminaire ou turbulent, les vitesses moyennes sont à peu près parallèles aux génératrices de la conduite. Les courants secondaires, s'ils existent, n'introduisent que de faibles inclinaisons sur les vitesses moyennes, et par conséquent leur influence est sûrement négligeable [16] et [6].

Dans une section droite la pression  $P_g$  est donc pratiquement constante, est le gradient longitudinal  $dP_g/dz$  est constant entre deux sections.



Dans une section droite, on peut tracer les courbes d'iso-vitesses figure (II-8b) si l'on compte la distance à partir de la périphérie  $\Gamma$  en suivant les courbes  $\gamma$  qui leur sont orthogonales. Nous obtenons la répartition des vitesses (champ) d'une conduite non-circulaire.

La dimension transversale utilisée est le diamètre hydraulique  $D_H$  qui égale à quatre fois le rayon hydraulique  $R_H$ , lui-même quotient de l'aire  $S$  de la section par son périmètre  $P_m$

$$D_H = 4R_H = 4 \frac{S}{P_m} \tag{II-40}$$

Le nombre de Reynolds de l'écoulement doit être défini à partir du diamètre hydraulique  $D_H$

$$\Re_e = \frac{\rho W_{moy} D_H}{\mu} \tag{II-41}$$

La force de frottement  $F$  sera de la forme :

$$F = \tau_p P_m L \tag{II-42}$$

avec : 
$$\tau_p = \frac{S}{P_m} \left( -\frac{dP}{dz} \right) \tag{II-43}$$

La formule de la perte de charge sera toujours de la forme : [6]

$$\Delta H = K \frac{L}{D_H} \frac{W_{moy}^2}{2g} \tag{II-44}$$

Le coefficient sans dimension  $K$  est communément appelé coefficient de perte de charge linéaire, il suffit à lui seul à caractériser la perte de charge des conduites.

Le problème qui se pose est donc de déterminer la loi de variation de  $K$  avec  $\mathcal{R}_e$ . Cette détermination pourra être effectuée théoriquement dans certains cas (pour écoulement laminaire), mais en général, il faudrait faire appel à l'expérience.

En écoulement laminaire, on a toujours une relation du coefficient de perte de charge sous la forme :

$$K = \frac{B}{\mathcal{R}_e} \tag{II-45}$$

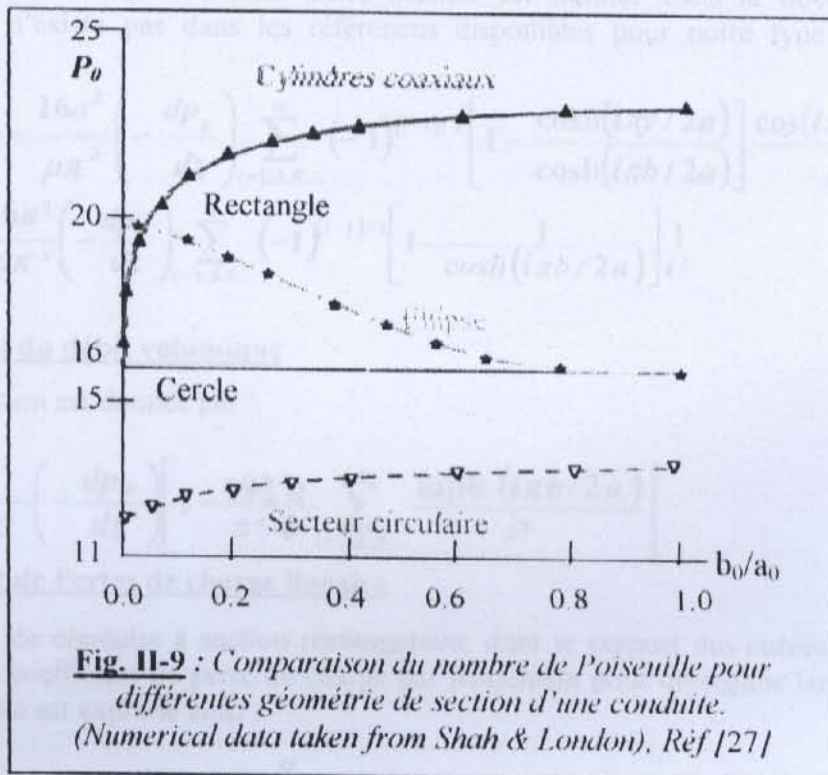
$B$  : coefficient qui dépend de la forme et des dimensions transversales de la conduite. Dans quelques cas simples, on peut calculer sa valeur. Ou bien, on utilisant la formule suivante :

$$K = 4C_f \tag{II-46}$$

$C_f$  : est alors la valeur moyenne du coefficient de frottement, prise le long du périmètre mouillé exprimer en fonction d'un certain nombre constant de Poiseuille  $P_0$  [27] :

$$C_f = \frac{P_0}{\mathcal{R}_e D_h} \tag{II-47}$$

La variation du nombre de Poiseuille peut être illustrée par la Figure (II-9) pour différentes géométries de la section d'une conduite.

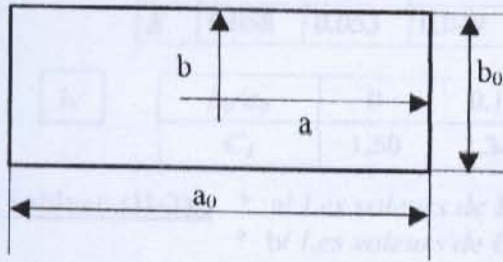


**II-5-2-a/ Section rectangulaire [16]**

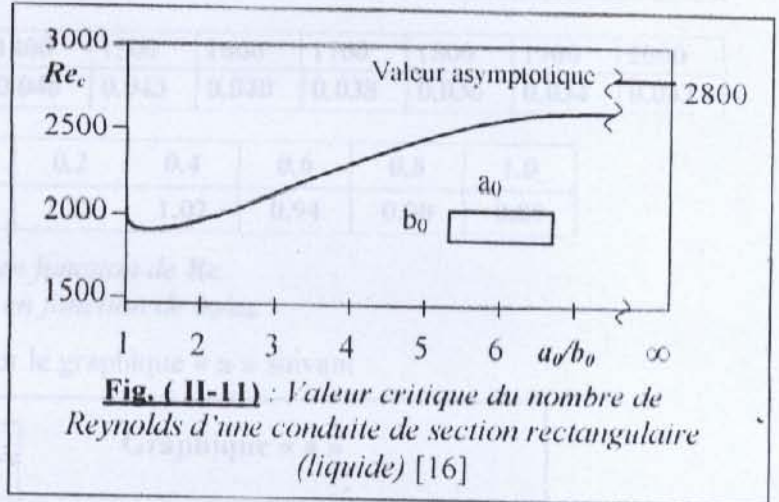
Appelant  $a_0$  et  $b_0$  les cotées du rectangle, on peut supposer que l'écoulement est du type plan, loin des extrémités amont et aval du conduit.

On considère les dimensions suivante du rectangle -  $a \leq x \leq a$  , -  $b \leq y \leq b$ , voir la figure II-10.

Le domaine d'existence du régime laminaire se limite aux valeurs de  $Re_c$  inférieures à la valeur critique  $Re_c$  qui dépend de la forme de la section droite et certain facteurs. La figure (II-11) donne des résultats de  $Re_c$  qui correspondent à une section rectangulaire à différentes dimensions.



**Fig. (II-10) :** Conduite cylindrique de section rectangulaire



**Fig. (II-11) :** Valeur critique du nombre de Reynolds d'une conduite de section rectangulaire (liquide) [16]

Le diamètre hydraulique a pour expression :

$$D_H = 2 \frac{a_0 b_0}{a_0 + b_0}$$

**a - Expression de la vitesse et de la vitesse maximale**

La démonstration de la résolution de l'équation différentielle elliptique (II-9) avec les conditions aux limites (II-11) pour cette section est donnée dans le document [24] (cette démonstration n'existe pas dans les références disponibles pour notre type de condition aux limites).

$$W(x, y) = \frac{16a^2}{\mu\pi^3} \left( -\frac{dp_g}{dz} \right) \sum_{i=1,3,5,\dots}^{\infty} (-1)^{(i-1)/2} \left[ 1 - \frac{\cosh(i\pi y / 2a)}{\cosh(i\pi b / 2a)} \right] \frac{\cos(i\pi x / 2a)}{i^3} \quad (II-48)$$

$$W_{max} = \frac{16a^2}{\mu\pi^3} \left( -\frac{dp_g}{dz} \right) \sum_{i=1,3,5,\dots}^{\infty} (-1)^{(i-1)/2} \left[ 1 - \frac{1}{\cosh(i\pi b / 2a)} \right] \frac{1}{i^3} \quad (II-49)$$

**b - Expression du débit volumique**

L'expression est donnée par :

$$Q_v = \frac{ba^3}{6\mu} \left( -\frac{dp_g}{dz} \right) \left[ 1 - \frac{192a}{\pi^5 b} \sum_{i=1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{\tanh(i\pi b / 2a)}{i^5} \right] \quad (II-50)$$

**c - Coefficient de Pertes de charge linéaire**

Dans le cas de conduite à section rectangulaire, dont le rapport des cotées  $a_0/b_0$  est compris entre 0 et 1, le coefficient de perte de charge par frottement pour un régime laminaire et de degré de rugosité faible est exprimé ainsi :

$$K_{rect} = C_1 K = \frac{B}{Re} \implies B = 64.C_1 \quad (II-51)$$

Où :  $K_{rect}$  : Coefficient de perte de charge par frottement pour des conduites à section rectangulaire.  
 $K$  : Coefficient de perte de charge par frottement pour des conduites à section circulaire.  
 $C_1$  : Coefficient tenant compte du rapport des cotés  $a_0/b_0$  du rectangle.  
 $B$  : Coefficient sans dimension qui dépend de la forme géométrique de la section.

Expérimentalement on a les résultats suivants : [16]

a/	$Re$	100	200	300	400	500	600	700	800	900	1000
	$K$	0.640	0.320	0.213	0.160	0.128	0.107	0.092	0.080	0.071	0.064

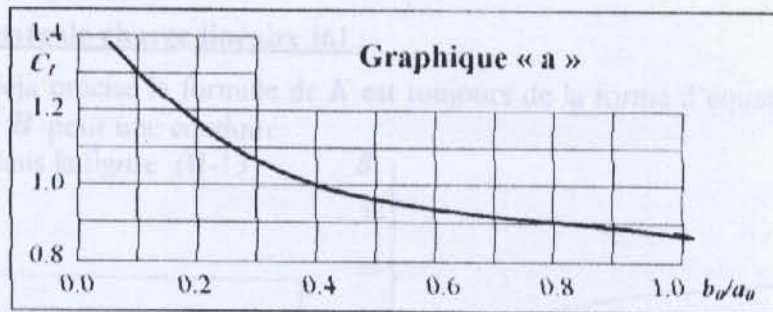
$Re$	1100	1200	1300	1400	1500	1600	1700	1800	1900	2000
$K$	0.058	0.053	0.049	0.046	0.043	0.040	0.038	0.036	0.034	0.032

b/	$b_0/a_0$	0	0.1	0.2	0.4	0.6	0.8	1.0
	$C_1$	1.50	1.34	1.20	1.02	0.94	0.90	0.89

**Tableau (II-2) :** \* a/ Les valeurs de  $K$  en fonction de  $Re$ .  
 \* b/ Les valeurs de  $C_1$  en fonction de  $b_0/a_0$ .

Où  $C_1$  est exprimé en fonction de  $b_0/a_0$  sur le graphique « a » suivant :



Après avoir calculer le coefficient de perte de charge expérimentalement on peut calculer la perte de charge ainsi que d'autres paramètres comme le coefficient de frottement, la force de cisaillement... etc.

D'une autre manière plus explicite, d'après la référence [6], on peut déterminer le coefficient sans dimension  $B'$  qui dépend de la forme géométrique de la section en fonction du rapport des côtes du rectangle. Tel que :

$$n = b_0 / a_0$$

On a : 
$$B' = \frac{12}{n^3(1-n.S)} \tag{II-52}$$

Avec : 
$$S = \frac{192}{\pi^5} \cdot \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{(2m+1)} \cdot \operatorname{tgh} \left( \frac{(2m+1)\pi}{2n} \right) \tag{II-53}$$

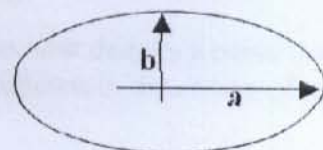
Et  $B = B' \cdot \frac{\pi}{2}$ , où  $B$  est montré dans l'équation (II-51)

Si  $n=1$  la section est carrée et on a les résultats suivants :

$$B' = 28.441 \quad \text{et} \quad S = 0.57807$$

**II-5-2-b/ Section elliptique réf [16]**

Pour une section elliptique nous avons (figure II-12) :  
 $x^2/a^2 + y^2/b^2 \leq 1$ .



**Fig. (II-12) :** Conduite rectiligne de section elliptique

Le diamètre hydraulique a pour expression : 
$$D_h = \frac{4ab}{1,5(a+b) - \sqrt{ab}} \quad (II-54)$$

On a remarqué que cette relation est moins précise lorsque le rapport des côtes d'ellipse est loin d'unité. D'où un calcul numérique plus précis de la surface et du périmètre pour avoir ce diamètre hydraulique est indispensable pour nos résultats. Voir le paragraphe V-6 pour les parties correspondantes développés du programme.

a - **Expression de la vitesse et la vitesse maximum** D'après la référence [16] on a :

$$W(x, y) = \frac{1}{2\mu} \left( -\frac{dp_g}{dz} \right) \frac{a^2 b^2}{a^2 + b^2} \left( 1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} \right) \quad (II-55)$$

$$W_{max}(x, y) = \frac{1}{2\mu} \left( \frac{dp_g}{dz} \right) \frac{a^2 b^2}{a^2 + b^2} \quad (II-56)$$

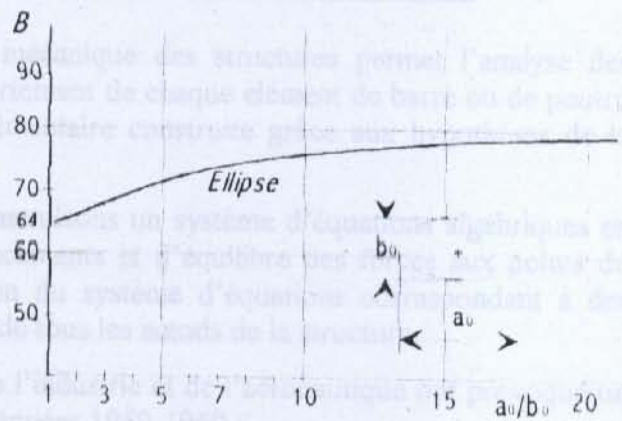
b - **Expression du débit volumique**

On a : 
$$Q_v = \frac{\pi}{4\mu} \left( -\frac{dp_g}{dz} \right) \frac{a^3 b^3}{a^2 + b^2} \quad (II-57)$$

c - **Coefficient des pertes de charge linéaire [6] :**

Comme en l'avait déjà précisé la formule de  $K$  est toujours de la forme d'équation (II-45). La variation du coefficient  $B$  pour une conduite elliptique est illustrée dans la figure (II-13).

**Figure (II-13) :** Variation du coefficient  $B$  en fonction des dimensions transversales d'une conduite de section elliptique



D'une autre manière plus explicite comme le cas du rectangle, et d'après la référence [6], on peut déterminer le coefficient sans dimension intermédiaire  $B'$  qui dépend de la forme géométrique de la section en fonction du rapport des côtes d'ellipse. Tel que :

$$n = b_0 / a_0$$

Alors on a : 
$$B' = \frac{64(1+n^2)}{\pi.n^3} \quad (II-58)$$

Et  $B = B' \frac{\pi}{2}$ , où  $B$  est montré dans l'équation (II-45).

Si  $n=1$ , la section est circulaire et on trouve la formule de *Poiseuille*.

Les résultats empiriques obtenus pour les sections non circulaires sont déduits à partir des expériences effectuées pour le régime laminaire ainsi que pour les différentes dimensions des conduites.

Afin de généraliser la résolution des équations d'un écoulement visqueux (newtonien) à travers des conduites de section quelconque, le recourt à des méthodes de résolutions numériques plus précises est indispensable, ce qui fait l'objet des prochains chapitres.

## CHAPITRE III :

### **FORMULATION ET ADAPTATION DE LA METHODE DES ELEMENTS FINIS**

#### **III-1/ INTRODUCTION**

Les techniques de calcul des écoulements interne et externe ont connu un développement très considérable dans ces dernières décennies, depuis l'évolution de l'aérodynamique et l'outil informatique ainsi que par les nouvelles approches numériques appliquées à la dynamique des fluides.

Parmi ces approches, nous optons la technique des éléments finis pour la résolution de notre problème vu à son principal avantage qui permet une bonne représentation des géométries complexes mais relativement assez lourde en volume et en temps de calcul.

Dans la suite, on entame la formulation de cette technique (la méthode) en traitant plusieurs types d'éléments finis, afin de valider les résultats d'une part et d'autre part en compare avec celle des résultats analytiques pour les géométries simples disponibles, tous en passant par un bref historique et la théorie de cette méthode.

#### **III-2/ BREF HISTORIQUE DE LA METHODE DES ELEMENTS FINIS**

Depuis une cinquantaine d'années, la mécanique des structures permet l'analyse des assemblages de barres et poutres [7]. Le comportement de chaque élément de barre ou de poutre est représentée par une matrice de rigidité élémentaire construite grâce aux hypothèses de la résistance des matériaux.

A partir des matrices élémentaires, nous construisons un système d'équations algébriques en utilisant des conditions de continuité des déplacements et d'équilibre des forces aux points de jonction des éléments ou nœuds. La résolution du système d'équations correspondant à des sollicitations données conduit aux déplacements de tous les nœuds de la structure.

L'apparition des ordinateurs et les besoins de l'industrie et de l'aéronautique ont provoqué un développement rapide de la mécanique entre les années 1950-1960 :

TURNER, CLOUGH, MARTIN ET TOPP [9] introduisent en 1956 le concept d'élément fini. Ils représentent un milieu continu élastique à deux dimensions par un assemblage de panneaux triangulaires sur lesquels les déplacements sont supposés varier linéairement, à partir de ce concept, la technique classique de la mécanique des structures conduit à la solution, c.à.d aux déplacements en tout point du milieu continu [13].

Dès 1960 la méthode des éléments finis est réputée un développement rapide dans plusieurs directions :

- La méthode est reformulée, à partir des considérations énergétiques et variationnelles, sous la forme générale des résidus pondérés [2], [21].
- De nombreux auteurs créent des éléments de haute précision et des éléments à côtés curvilignes ou iso-paramétriques [25].
- La méthode des éléments finis est reconnue un outil général de résolution d'équations aux dérivées partielles. Elle est donc utilisée pour résoudre des problèmes non linéaires et non stationnaires dans le domaine des structures ainsi que dans d'autres domaines : *mécanique des fluides, nucléaire, thermique, etc.* [10], [18].

- Une base mathématique de la méthode des éléments finis est construite à partir de l'analyse fonctionnelle [14].

A partir de 1967, de nombreux livres sont publiés sur la méthode des éléments finis [21, 23 et 28]. Elle est maintenant très répandue dans les industries, en particulier en construction aéronautique, aérospatiale, navale et nucléaire.

Elle se développe en ce moment dans les applications de la mécanique des fluides, étude des phénomènes de pollution thermique ou chimique, des interactions fluide-structure.

Dans la suite, nous citons les principales démarches de cette méthode.

### **III-3/ DEMARCHES DE LA METHODE DES ELEMENTS FINIS**

Les démarches suivies dans l'analyse d'élément fini pour un problème typique sont :

- 1/- Discrétisation (ou représentation) du domaine donné dans une collection en choisissant l'E.F.
  - a) Construire la maille d'élément fini en choisissant l'élément (voir Fig. III-1a).
  - b) Numéroter les nœuds et les éléments.
  - c) Engendrer les propriétés de la géométrie (coordonnées, l'aire de la section, ...) d'avoir besoin pour le calcul du problème.
- 2/- Dérivation de l'équation d'élément pour tous les éléments de la maille.
  - a) Construire la formulation variationnelle de l'équation différentielle donnée sur l'élément typique.
  - b) Supposer que la variable dépendant typique ( $W$ ) est de la forme :
 
$$W = \sum_{j=1}^n W_j \cdot \Psi_j$$
 Tel que  $n$  est le nombre de nœuds du domaine.  
 En lui substituant dans la démarche (2a), on obtient l'équation d'élément (e) sous la forme :
 
$$[K^e] \cdot W^e = F^e$$
  - c) Dériver les fonctions d'interpolations  $\Psi_j$  de l'élément et calculer les matrices d'élément
- 3/- Assembler les équations pour obtenir le système équations entière du problème.
  - a) Identifier les conditions de continuité de l'inter élément parmi les variables principales (parenté entre les degrés de liberté locaux et les degrés de libertés globaux).
  - b) Assembler les équations d'éléments en utilisant (3a) et la propriété de superposition.
- 4/- Imposer les conditions aux limites du problème.
  - a) Identifier les spécifiques degrés de liberté principale globale.
  - b) Identifier les spécifiques degrés de liberté secondaires globale.
- 5/- Solution de l'équation d'assemblage (le système algébrique) et autres paramètres.
  - a) Résoudre le système d'équations pour la variable dépendant inconnu ( $W$ ).
  - b) Calculer le gradient de la solution ou autres quantités désirées à partir de degrés de liberté principaux ( $W$ ) calculé à la démarche (5a).

#### **Remarque :**

Dans les problèmes à deux dimensions, nous ne cherchons pas seulement une solution approximative du système d'équations différentielles partielles mais, nous avons aussi des approximations sur le domaine donné par un maillage approprié d'élément fini. Par conséquent, nous aurons des erreurs dues à l'approximation de la solution et aussi les erreurs de discrétisation dues à l'approximation du domaine par des éléments finis (2D).



La maille des éléments finis est constituée par des simples éléments à deux dimensions tel qu'un triangle, rectangle et quadrilatérale... etc., qui sont collectés les uns aux autres par des nœuds sur leurs périphériques (voir figure III-1a).

Labilité de représenter le domaine de forme irrégulière, par collection d'éléments finis fait de la méthode un outil pratique très valable pour la résolution des problèmes de conditions aux limites de valeur limitée, qui sont rencontrés dans plusieurs domaines de l'ingénieur.

Maintenant, dans la suite nous traitons le concept de la méthode d'éléments finis par ces formulations théoriques.

### III-4/ FORMULATION VARIATIONNELLE (INTEGRALE)

Le problème que nous allons considérer, dans cette formulation après l'étude mathématique effectuée, c'est la résolution d'une équation différentielle partielle de second ordre de type elliptique, connue sous le nom de l'équation de **POISSON**, associée avec des conditions aux limites du 1<sup>er</sup> type dites de **DIRICHLET** dans un domaine arbitraire plan  $\Omega(x, y)$  de frontière quelconque ( $\Gamma$ ).

Alors, le problème est comme suit :

$$\frac{\partial^2 W}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 W}{\partial y^2} = \frac{1}{\mu} \frac{d(p + \rho gh)}{dz} \tag{III-1}$$

Ou sous la forme compacte :  $\Delta W = f$  avec :  $f = \frac{1}{\mu} \frac{d(p + \rho gh)}{dz} = \frac{1}{\mu} \frac{dp_s}{dz}$

Avec :  $W = 0$  sur ( $\Gamma$ ) (III-2)

Tel que «  $f$  » dont le second membre de l'équation différentielle caractérise le type de fluide et d'écoulement étudié.

Pour les problèmes à deux dimensions, il y a plusieurs formes géométriques qui peuvent être utilisées comme élément fini (voir Fig.III-3).

On développe la forme variationnelle de l'équation (III-1) pour un élément typique en multipliant cette équation par une fonction test  $\Psi(x, y)$ , dont en supposant dérivable une fois par rapport à  $x$  et  $y$ , et puis on intègre dans le domaine de l'élément ( $\Omega^e$ ) :

$$\iint_{\Omega^e} \Psi \left[ \frac{\partial(F_1)}{\partial x} + \frac{\partial(F_2)}{\partial y} - f \right] dx \cdot dy = 0 \tag{III-3}$$

Avec  $F_1 = \frac{\partial W}{\partial x}$  ,  $F_2 = \frac{\partial W}{\partial y}$

Dans l'ordre de distribuer la différentiation pour  $\Psi$  et  $W$ , nous intégrons les deux premiers termes de l'équation (III-3) par partie.

Premièrement on note les identités :

$$\begin{aligned} \Psi \frac{\partial(F_1)}{\partial x} &= \frac{\partial}{\partial x} (\Psi F_1) - \frac{\partial \Psi}{\partial x} \cdot F_1 \\ \Psi \frac{\partial(F_2)}{\partial y} &= \frac{\partial}{\partial y} (\Psi F_2) - \frac{\partial \Psi}{\partial y} \cdot F_2 \end{aligned} \tag{III-4}$$

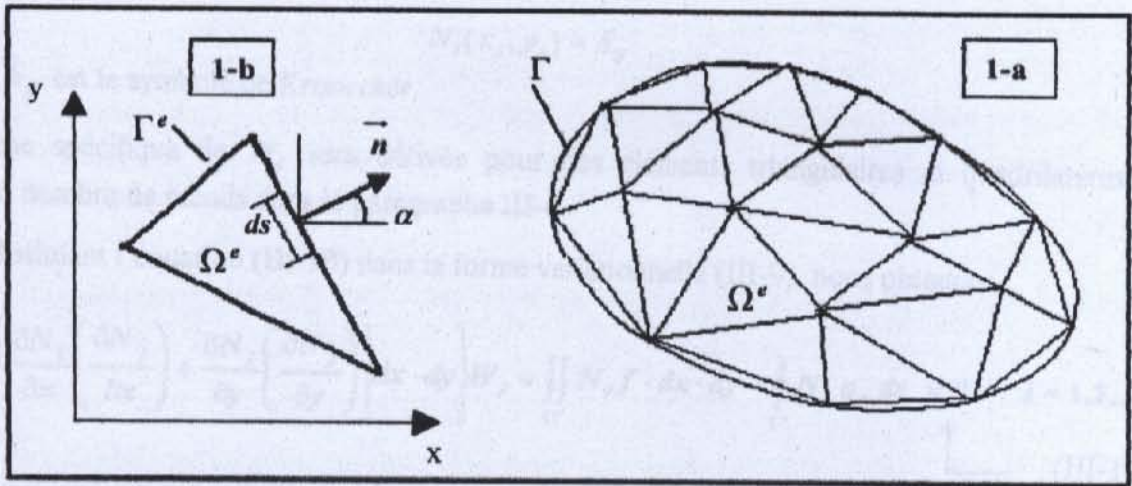
Puis nous rappelons la forme des composantes de l'opérateur gradient (ou divergence) pour un contour fermé avec le théorème de « **GREEN** » :

$$\iint_{\Omega^e} \frac{\partial}{\partial x} (\Psi F_1) dx \cdot dy = \oint_{\Gamma^e} \Psi F_1 \cdot n_x ds \tag{III-5a}$$

$$\iint_{\Omega^e} \frac{\partial}{\partial y} (\Psi F_2) dx \cdot dy = \oint_{\Gamma^e} \Psi F_2 \cdot n_y ds \tag{III-5b}$$

Tel que : «  $ds$  » est la longueur d'arc infinitésimale de l'élément le long de son contour  $\Gamma^e$ , et  $n_x, n_y$  sont les composantes du vecteur unité normale  $\vec{n}$  sur la frontière  $\Gamma^e$  (voir Fig.III-1b).

$$\vec{n} = n_x \vec{i} + n_y \vec{j} = \cos(\alpha) \vec{i} + \sin(\alpha) \vec{j} \tag{III-6}$$



**Fig. III-1.a, b :** Discretisation d'un domaine irrégulier en élément fini typique.

En suite, en substituant l'équation (III-4) et (III-5) dans l'équation (III-3) on obtient :

$$\iint_{\Omega^e} \left[ \frac{\partial \Psi}{\partial x} \left( \frac{\partial W}{\partial x} \right) + \frac{\partial \Psi}{\partial y} \left( \frac{\partial W}{\partial y} \right) + f \Psi \right] dx \cdot dy - \oint_{\Gamma^e} \Psi \left[ n_x \left( \frac{\partial W}{\partial x} \right) + n_y \left( \frac{\partial W}{\partial y} \right) \right] ds = 0 \tag{III-7}$$

A partir d'une inspection du terme de la frontière de cette équation, nous montrons que la spécification de ( $W$ ) constitue la condition essentielle aux limites (d'où  $W$  est la variable principale), et la spécification de  $q_n$  constitue la condition au limite naturelle de la formulation (d'où  $q_n$  est la variable secondaire) [10] :

$$q_n = n_x \frac{\partial W}{\partial x} + n_y \frac{\partial W}{\partial y} \tag{III-8}$$

La forme variationnelle devient :

$$\iint_{\Omega^e} \left[ \frac{\partial \Psi}{\partial x} \left( \frac{\partial W}{\partial x} \right) + \frac{\partial \Psi}{\partial y} \left( \frac{\partial W}{\partial y} \right) + f \Psi \right] dx \cdot dy - \oint_{\Gamma^e} \Psi q_n \cdot ds = 0 \tag{III-9}$$

Cette équation variationnelle (intégrale) forme la base du modèle de l'élément fini de l'équation (III-1).

**III-5/ FORMULATION EN ELEMENT FINI**

**III-5-a/ DERIVATION DU MODELE FORME GLOBALE**

La forme variationnelle donnée par l'équation (III-9) montre que l'approximation choisie de  $(W)$  doit être au moins bilinéaire dans  $x$  et  $y$  d'une manière que les deux premiers termes de l'équation (III-9) et  $q_n$  dans l'équation (III-8) sont non nuls [10].

Supposant que  $(W)$  est approximée par l'expression :

$$W = \sum_{j=1}^n W_j \cdot N_j \tag{III-10}$$

où  $W_j$  sont les valeurs de  $(W)$  au point  $(x_j, y_j)$  et  $N_j$  est la fonction d'interpolation avec la propriété :

$$N_i(x_j, y_j) = \delta_{ij}$$

Avec :  $\delta_{ij}$  est le symbole de Kronecker.

La forme spécifique de  $N_i$  sera dérivée pour des éléments triangulaires et quadrilatères à différent nombre de nœuds dans le paragraphe III-6.

Substituant l'équation (III-10) dans la forme variationnelle (III-9), nous obtenons :

$$\sum_{j=1}^n \left\{ \iint_{\Omega'} \left[ \frac{\partial N_i}{\partial x} \left( \frac{\partial N_j}{\partial x} \right) + \frac{\partial N_i}{\partial y} \left( \frac{\partial N_j}{\partial y} \right) \right] dx \cdot dy \right\} W_j + \iint_{\Omega'} N_i f \cdot dx \cdot dy - \oint_{\Gamma'} N_i q_n ds = 0 \quad i = 1, 2, \dots, n \tag{III-11}$$

Autrement :

$$\sum_{j=1}^n K_{ij}^{(e)} W_j^{(e)} = F_i^{(e)}$$

Tel que :

$$\begin{cases} K_{ij}^{(e)} = \iint_{\Omega'} \left[ \frac{\partial N_i}{\partial x} \left( \frac{\partial N_j}{\partial x} \right) + \frac{\partial N_i}{\partial y} \left( \frac{\partial N_j}{\partial y} \right) \right] dx \cdot dy \\ F_i^{(e)} = - \iint_{\Omega'} N_i f \cdot dx \cdot dy + \oint_{\Gamma'} N_i q_n ds \end{cases} \tag{III-12}$$

On note que  $K_{ij}^{(e)} = K_{ji}^{(e)}$  (c.à.d  $[K]$  est symétrique).

**Remarque :**

On peut montrer dans la suite que la matrice  $[K]$  est symétrique et défini positive.

Soit  $\bar{B}$  un vecteur quelconque, avec  $b_j$  est sa  $j^{ème}$  valeur et  $\bar{B}^T$  son vecteur transposé.

Si  $\bar{B} \neq \bar{0}$ , alors :

$$\bar{B}^T K \bar{B} = \iint_{\Omega} \left\{ \left( \sum_{j=1}^n b_j \cdot \frac{\partial N_j}{\partial x} \right)^2 + \left( \sum_{j=1}^n b_j \cdot \frac{\partial N_j}{\partial y} \right)^2 \right\} dx \cdot dy > 0$$

On a le deuxième terme de cette équation est positif. De la,  $[K]$  est défini positive et symétrique, [14]. Donc le système d'équations (III-1) et (III-2) de notre problème a une solution unique.

III-5-b/ DERIVATION DU MODELE FORME FAIBLE « WEAK FORM » [14]

Le second terme de  $F_i^{(e)}$  dans l'équation (III-13) qui représente l'intégrale sur la frontière  $\Gamma^{(e)}$ , peut être écrit sous différentes formes en utilisant la dérivation directionnelle (Fig.III-1b) :

$$\begin{aligned} \oint_{\Gamma^{(e)}} q_n N_i \cdot ds &= \oint_{\Gamma^{(e)}} \left( \frac{\partial W}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial n} + \frac{\partial W}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial n} \right) N_i ds \\ &= \oint_{\Gamma^{(e)}} (\bar{\nabla} W \cdot \bar{n}) N_i ds \\ &= \oint_{\Gamma^{(e)}} \frac{\partial W}{\partial n} N_i ds \end{aligned}$$

Tel que  $\partial/\partial n$  représente la différentiation dans la direction normale sortante à la frontière  $\Gamma^{(e)}$ . De la, si une portion de  $\Gamma^{(e)}$  se trouve à l'intérieur du domaine global  $\Omega$  (voir Fig.III-2a, 2b), alors la quantité  $q_n^{(e)}$  de l'élément (e) s'annule avec  $q_n^{(f)}$  de l'élément (f) qui se coïncide sur la même portion  $\Gamma^{(e)}$  de cet élément (e). Ceci peut être vu comme étant un équilibre interne entre les différents éléments du domaine (forces internes).

Si une autre portion de  $\Gamma^{(e)}$  se coïncide avec la frontière globale  $\Gamma$  du domaine, alors l'évaluation de l'intégrale de frontière est basée sur le calcul de  $q_n$  et de la valeur de la fonction d'interpolation  $N_i$  sur cette frontière.

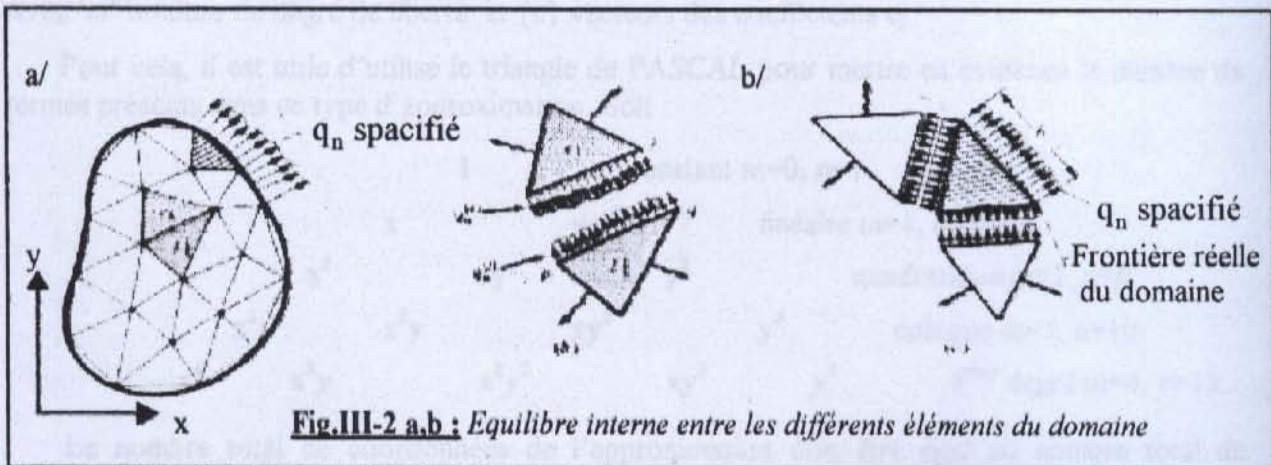


Fig.III-2 a,b : Equilibre interne entre les différents éléments du domaine

Cependant, dans notre formulation les fonctions d'interpolations vérifient la propriété suivante :

$$N_i(x, y) = 0 \quad \text{si } (x, y) \in (\Gamma)$$

Implicitement, vérifier donc la condition aux limites  $W = 0$  sur  $(\Gamma)$ .

Ainsi, le système (III-12) devient :

$$\begin{cases} K_{ij}^{(e)} = \iint_{\Omega'} \left[ \frac{\partial N_i}{\partial x} \left( \frac{\partial N_j}{\partial x} \right) + \frac{\partial N_i}{\partial y} \left( \frac{\partial N_j}{\partial y} \right) \right] dx \cdot dy \\ F_i^{(e)} = - \iint_{\Omega'} N_i f \cdot dx \cdot dy \end{cases} \quad (III-13)$$

Substituant cette équation dans celle de (III-11), on obtient la forme dite : « *Weak form* » dans l'équation suivante :

$$\sum_{j=1}^n \left\{ \iint_{\Omega'} \left[ \frac{\partial N_i}{\partial x} \left( \frac{\partial N_j}{\partial x} \right) + \frac{\partial N_i}{\partial y} \left( \frac{\partial N_j}{\partial y} \right) \right] dx \cdot dy \right\} W_j = - \iint_{\Omega'} N_i f dx \cdot dy \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (III-14)$$

Finalement l'équation (III-14) représente le modèle de l'élément fini de l'équation (III-1). Dans la suite, nous traitons la dérivation des fonctions d'interpolations.

### III-6/ FONCTIONS D'INTERPOLATION

#### III-6-1/ SERIES POLYNOMIALES

Le comportement de la variable dépendante (*W*) dans un élément est décrit par l'approche la plus simple, cela consiste à approximer son champ de variation par des séries de polynôme dont les coefficients *c<sub>j</sub>* sont les coordonnées généralisées de l'approximation (Réf. [10]).

Dans le cas bi-dimensionnel, pour chaque variable dépendante on a :

$$W_i(x, y) = \sum_{j=1}^n c_j x_i^p y_i^q \quad i = 1, 2, 3 \dots m \quad (III-15)$$

Ceci permet d'écrire l'approximation sous la forme matricielle suivante :

$$W_i(x, y) = [H_m(x, y)] \cdot \{c\}$$

Avec '*m*' nombre de degré de liberté et {*c*} vecteurs des coefficients *c<sub>j</sub>*.

Pour cela, il est utile d'utilisé le triangle de PASCAL pour mettre en évidence le nombre de termes présents dans ce type d'approximation. Soit :

		1		constant m=0, n=1	
		x	y		linéaire m=1, n=3
	x <sup>2</sup>	xy	y <sup>2</sup>		quadratique m=2, n=6
x <sup>3</sup>	x <sup>2</sup> y	xy <sup>2</sup>	y <sup>3</sup>		cubique m=3, n=10
x <sup>4</sup>	x <sup>3</sup> y	x <sup>2</sup> y <sup>2</sup>	xy <sup>3</sup>	y <sup>4</sup>	4 <sup>ème</sup> degré m=4, n=15

Le nombre total de coordonnées de l'approximation doit être égal au nombre total de variables nodaux de l'élément.

Si on choisit une approximation d'ordre élevé, on est donc amené à adopter des nœuds supplémentaires qui correspond aux termes supplémentaires d'approximation. Ainsi, on définit des nœuds additionnels soit aux interfaces, soit à l'intérieur de l'élément.

Dans notre problème, l'examen de l'équation formant le modèle de l'élément fini (III-14) et les matrices d'éléments finis (III-13), montre que *N<sub>j</sub>* doit être au moins une fonction bilinéaire en *x* et *y*.

Comme cité auparavant, il y a une correspondance entre le nombre des nœuds et le nombre des termes utilisés dans l'approximation polynomiale d'une variable dépendante dans l'élément.

Alors, dans le problème unidimensionnel avec une équation différentielle de 2<sup>ème</sup> degré, le nombre de nœuds (*n*) dans un élément a défini uniquement le degré (*r*) du polynôme, tel que la correspondance entre (*n*) et (*r*) étant (*n = r+1*).

Tandis que dans les problèmes à deux dimensions, la correspondance entre le nombre de nœuds (qui est égale au nombre de termes d'approximations polynomiales) et le degré de polynôme n'est pas unique. Par exemple, le polynôme :

$$W(x, y) = c_1 + c_2x + c_3y \tag{III-16}$$

contient trois termes (linéairement indépendants) et il est linéaire dans x et y, d'un autre côté le polynôme :

$$W(x, y) = c_1 + c_2x + c_3y + c_4xy \tag{III-17}$$

contient quatre termes (linéairement indépendants) est également linéaire dans x et y.

La première forme nécessite un élément avec trois nœuds (avec un inconnu primaire par nœud). Or, la deuxième nécessite un élément avec quatre nœuds. Quand le nombre de nœuds égale à quatre, on peut choisir un triangle avec quatre nœuds et on met le quatrième nœud au centre de ce dernier, où on choisit un rectangle (quadrilatère) avec les nœuds à ses sommets. Le polynôme avec cinq constantes (voir l'équation III-18) est un polynôme quadratique (incomplet) :

$$W(x, y) = c_1 + c_2x + c_3y + c_4xy + c_5(x^2 + y^2) \tag{III-18}$$

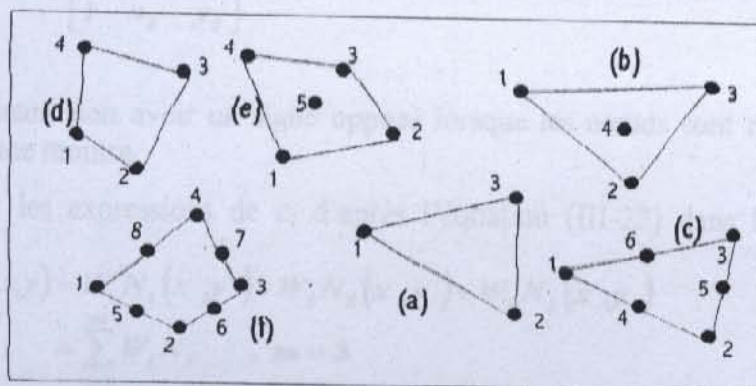
Le polynôme peut être utilisé pour construire un élément avec cinq nœuds (rectangle avec un nœud à chaque sommet et l'autre est situé au centre du rectangle). On fait la même chose avec six nœuds et sept nœuds, ... etc.

**III-6-2/ DIFFERENTS TYPES D'ELEMENT FINIS ADAPTE**

La discrétisation du domaine d'étude se fait par des éléments finis d'un seul type ou bien mixte. Dans l'analyse numérique abordée, on a opté à faire le calcul de maillage par les éléments suivants :

- Triangles ayant 3, 4 ou 6 nœuds (voir la figure III-3. a, b et c).
- Quadrilatères ayant 4, 5 ou 8 nœuds (voir la figure III-3. d, e et f).

Afin de mener à bien le calcul et pouvoir comparer les résultats avec une suffisance et avoir une discussion vaste, on a choisi et adapté ces éléments pour les différentes étapes du calcul de programme.



**Fig. III-3 (a, b, c, d, e et f) : Eléments finis en bidimensionnelle de 3, 4, 5, 6 et 8 nœuds.**

**III-6-3/ FONCTIONS D'INTRPOLATIONS POUR UN ELEMENT TRIANGULAIRE A TROIS NOEUDS :**

Nous considérons l'approximation linéaire (III-16). La donnée  $\{1,x,y\}$  est linéairement indépendante et aussi complète. Nous devons réécrire par suite l'approximation (III-16) tel qu'elle satisfait les conditions :

$$W(x_i, y_i) = W_i \quad i = 1,2,3 \tag{III-19}$$

Où  $(x_i, y_i)$  avec  $(i=1,2,3)$  sont les coordonnées des trois nœuds du triangle (voir figure III-3a.)

Autrement dit, nous déterminons les trois constants  $c_i$  dans l'équation (III-16) en fonction de  $W_i$  à partir de l'équation (III-19), donc :

$$\begin{aligned} W_1 &= W(x_1, y_1) = C_1 + C_2x_1 + C_3y_1 \\ W_2 &= W(x_2, y_2) = C_1 + C_2x_2 + C_3y_2 \\ W_3 &= W(x_3, y_3) = C_1 + C_2x_3 + C_3y_3 \end{aligned} \tag{III-20}$$

Sous la forme matricielle on aura :

$$\begin{Bmatrix} W_1 \\ W_2 \\ W_3 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \\ 1 & x_3 & y_3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} C_1 \\ C_2 \\ C_3 \end{Bmatrix} \tag{III-21}$$

Notons que les nœuds sont numérotés dans le sens anti-horaire, et en résolvant l'équation (III-20) par rapport à  $c_i$ , nous obtenons :

$$\begin{aligned} C_1 &= \frac{1}{2A} [W_1(x_2y_3 - x_3y_2) + W_2(x_3y_1 - x_1y_3) + W_3(x_1y_2 - x_2y_1)] \\ C_2 &= \frac{1}{2A} [W_1(y_2 - y_3) + W_2(y_3 - y_1) + W_3(y_1 - y_2)] \\ C_3 &= \frac{1}{2A} [W_1(x_3 - x_2) + W_2(x_1 - x_3) + W_3(x_2 - x_1)] \end{aligned} \tag{III-22}$$

Avec :  $A$  est l'aire du triangle, tel que :

$$2A = \begin{vmatrix} 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \\ 1 & x_3 & y_3 \end{vmatrix} = [(x_2y_3 - x_3y_2) + (x_3y_1 - x_1y_3) + (x_1y_2 - x_2y_1)] \tag{III-23}$$

**Remarque :**

Le déterminant doit avoir un signe opposé lorsque les nœuds sont numérotés dans le sens des aiguilles d'une montre.

Substituant les expressions de  $c_i$  d'après l'équation (III-22) dans l'équation (III-16), on obtient :

$$\begin{aligned} W(x,y) &= W_1N_1(x,y) + W_2N_2(x,y) + W_3N_3(x,y) \\ &= \sum_{i=1}^m W_iN_i, \quad m = 3 \end{aligned} \tag{III-24}$$

Où  $N_i$  sont les fonctions d'interpolations d'un élément triangulaire.

$$N_i = \frac{1}{2A} (\alpha_i + \beta_i x + \gamma_i y) \quad i=1,2,3 \tag{III-25a}$$

Avec  $\alpha_i, \beta_i$  et  $\gamma_i$  sont des constantes : Tel que  $i, j, k$  permute dans un ordre naturel.

$$\begin{aligned} \alpha_i &= x_j y_k - x_k y_j \\ \beta_i &= y_j - y_k \\ \gamma_i &= x_k - x_j \end{aligned} \quad i \neq j \neq k \quad (III-25b)$$

Par exemple,  $\alpha_2$  est donné en posant  $i=2, \rightarrow j=3$  et  $K=1$  dans l'équation (III-25b) :

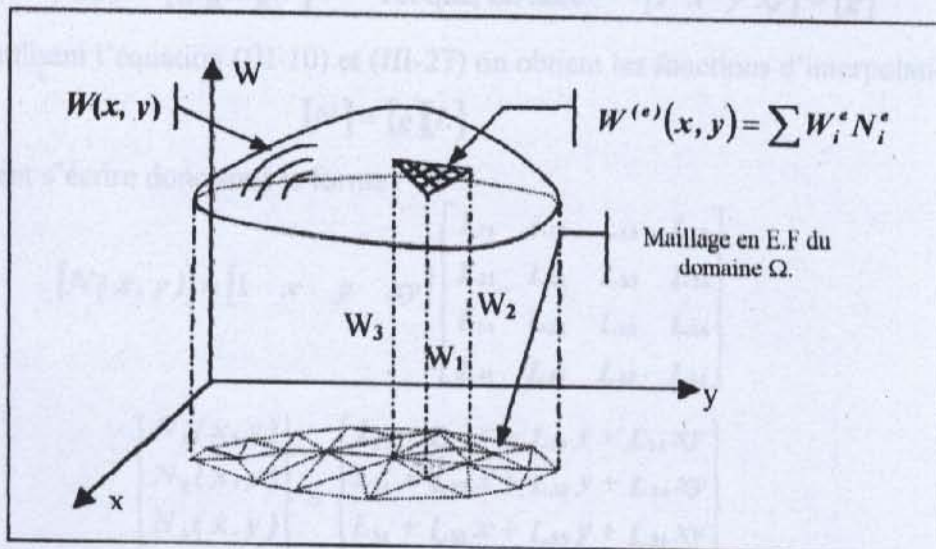
$$\alpha_2 = x_3 y_1 - x_1 y_3$$

Notons que les fonctions  $N_i$  ont les propriétés suivantes :

$$\begin{aligned} * \quad N_i(x_j, y_j) &= \delta_{ij} \quad i, j = 1, 2, 3 \\ * \quad \sum_{i=1}^3 N_i &= 1 \end{aligned} \quad (III-26)$$

Avec :  $\delta_{ij}$  est le symbole de *Kronecker*.

On note également que l'équation (III-24) détermine la surface plane actuelle à travers  $W_1, W_2, W_3$ . De la, l'utilisation de l'interpolation linéaire  $N_i$  résulte une approximation d'une surface courbée  $W(x, y)$  par une fonction plane (équation III-24), voir la figure III-4.



**Fig.III-4 :** Représentation de la fonction continue  $W(x, y)$  par une fonction d'interpolation linéaire pour un exemple de triangle à 3 nœuds

**III-6-4/ FONCTIONS D'INTRPOLATIONS POUR UN ELEMENT QUADRILATERE A QUATRE NŒUDS**

En utilisant l'approximation polynomiale bilinéaire (III-17) pour la variable  $W$ , on obtient le système suivant (III-27) pour un élément quadrilatère à quatre nœuds (figure III-3 d). Les fonctions d'interpolations de cet élément sont déduites à partir de ce système par la procédure suivante :

$$\text{On a } \begin{cases} W_1 = W(x_1, y_1) = C_1 + C_2 x_1 + C_3 y_1 + C_4 x_1 y_1 \\ W_2 = W(x_2, y_2) = C_1 + C_2 x_2 + C_3 y_2 + C_4 x_2 y_2 \\ W_3 = W(x_3, y_3) = C_1 + C_2 x_3 + C_3 y_3 + C_4 x_3 y_3 \\ W_4 = W(x_4, y_4) = C_1 + C_2 x_4 + C_3 y_4 + C_4 x_4 y_4 \end{cases} \quad (III-27)$$



En posant :

$$\{w\} = \begin{Bmatrix} W_1 \\ W_2 \\ W_3 \\ W_4 \end{Bmatrix} ; \{C\} = \begin{Bmatrix} C_1 \\ C_2 \\ C_3 \\ C_4 \end{Bmatrix} ; [H] = \begin{bmatrix} 1 & x_1 & y_1 & x_1 y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 & x_2 y_2 \\ 1 & x_3 & y_3 & x_3 y_3 \\ 1 & x_4 & y_4 & x_4 y_4 \end{bmatrix}$$

On aura :

$$\{w\} = [H]\{C\} \tag{III-28}$$

alors :

$$\{C\} = [H]^{-1}\{w\}$$

Ainsi qu'en posant :  $[L] = [H]^{-1}$ , tel que :

$$[L] = \begin{bmatrix} L_{11} & L_{12} & L_{13} & L_{14} \\ L_{21} & L_{22} & L_{23} & L_{24} \\ L_{31} & L_{32} & L_{33} & L_{34} \\ L_{41} & L_{42} & L_{43} & L_{44} \end{bmatrix}$$

On aura :

$$\{C\} = [L]\{w\}$$

Alors, l'équation (III-27) dans la forme générale (x, y) sera :

$$W(x, y) = [g][L]\{w\} \quad \text{Tel que, on note : } [1 \ x \ y \ xy]^t = [g] \tag{III-29}$$

De la, en utilisant l'équation (III-10) et (III-27) on obtient les fonctions d'interpolations  $N_i$  :

$$[N] = [g][L]$$

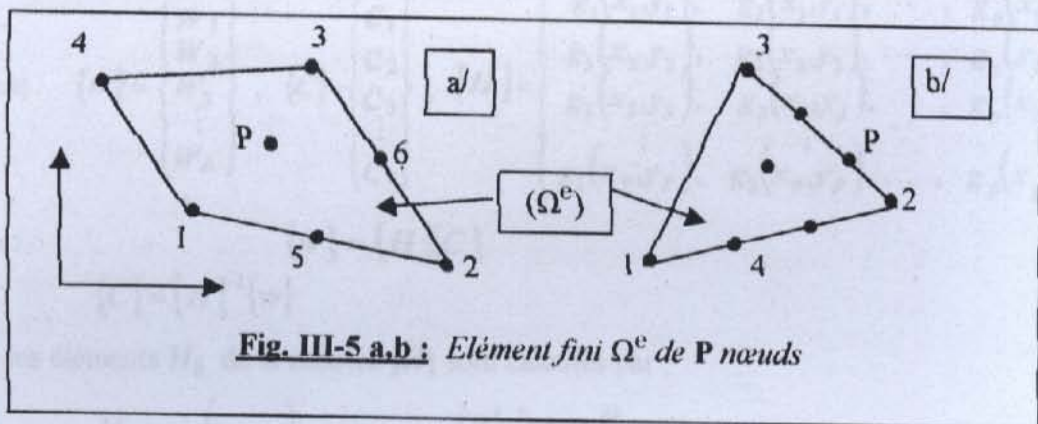
Elles peuvent s'écrire donc sous la forme :

$$[N(x, y)] = [1 \ x \ y \ xy] \begin{bmatrix} L_{11} & L_{12} & L_{13} & L_{14} \\ L_{21} & L_{22} & L_{23} & L_{24} \\ L_{31} & L_{32} & L_{33} & L_{34} \\ L_{41} & L_{42} & L_{43} & L_{44} \end{bmatrix} \tag{III-30}$$

Où :

$$\begin{Bmatrix} N_1(x, y) \\ N_2(x, y) \\ N_3(x, y) \\ N_4(x, y) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} L_{11} + L_{12}x + L_{13}y + L_{14}xy \\ L_{21} + L_{22}x + L_{23}y + L_{24}xy \\ L_{31} + L_{32}x + L_{33}y + L_{34}xy \\ L_{41} + L_{42}x + L_{43}y + L_{44}xy \end{Bmatrix} \tag{III-31}$$

**III-6-5/ FONCTIONS D'INTRPOLATIONS POUR UN ELEMENT QUADRILATERE OU TRIANGULAIRE à « P » NŒUDS : (P ≥ 4)**



**Fig. III-5 a,b :** Elément fini  $\Omega^e$  de P nœuds

L'élément fini ( $\Omega^e$ ) est un triangle de P nœuds (Fig. III-5a) ou quadrilatère à P nœuds (Fig. III-5b). Tel que, pour aborder le calcul des coefficients des fonctions  $N_i$ , on commence la numérotation des nœuds des sommets de l'élément fini dans le sens anti-horaire, en suite les nœuds des arêtes et puis dans la surface et le centre de l'élément.

Les coordonnées des nœuds  $(x_i, y_i) \quad i=1,2,\dots,P$  sont calculées comme suit :

- On calcul en premier lieu les  $(x_i, y_i) \quad i = 1,2,\dots,m$  des sommets à partir des soubrotines de génération de maillage du domaine étudié (Voir le chapitre IV), tel que  $m = 3$  pour un triangle et  $m = 4$  pour un quadrilatère.
- Puis on calcul les coordonnées des nœuds des arêtes à partir des coordonnées des sommets qui délimitent l'arête, par exemple :

$$x_{milieu} = \frac{x_{sommets1} + x_{sommets2}}{2} ; \quad y_{milieu} = \frac{y_{sommets1} + y_{sommets2}}{2}$$

- On choisi les coordonnées des nœuds de la surface et on calcul celles du centre de l'élément par les coordonnées des sommets (Voir le chapitre IV).

On approxime la fonction  $W(x, y)$  par :

$$W(x,y) = C_1 g_1(x,y) + C_2 g_2(x,y) + C_3 g_3(x,y) + \dots + C_i g_i(x,y) + \dots + C_p g_p(x,y)$$

$$= [g_1(x,y), g_2(x,y), g_3(x,y), \dots, g_p(x,y)] \begin{Bmatrix} C_1 \\ C_2 \\ \vdots \\ C_p \end{Bmatrix} = [G(x,y)] \cdot \{C\} \quad (III-32)$$

Les fonctions d'interpolations de l'élément sont déduites à partir du système (III-33) par la procédure suivante, On a :

$$W_i = W(x_i, y_i) = C_1 g_1(x_i, y_i) + C_2 g_2(x_i, y_i) + \dots + C_i g_i(x_i, y_i) + \dots + C_p g_p(x_i, y_i) \quad i=1,2,\dots,P$$

Sous la forme explicite et matricielle :

$$\begin{Bmatrix} W_1 \\ W_2 \\ W_3 \\ \vdots \\ W_P \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} g_1(x_1, y_1), & g_2(x_1, y_1), & \dots, & g_p(x_1, y_1) \\ g_1(x_2, y_2), & g_2(x_2, y_2), & \dots, & g_p(x_2, y_2) \\ g_1(x_3, y_3), & g_2(x_3, y_3), & \dots, & g_p(x_3, y_3) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ g_1(x_P, y_P), & g_2(x_P, y_P), & \dots, & g_p(x_P, y_P) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} C_1 \\ C_2 \\ C_3 \\ \vdots \\ C_p \end{Bmatrix} \quad (III-33)$$

$$\text{En posant : } \{w\} = \begin{Bmatrix} W_1 \\ W_2 \\ W_3 \\ \vdots \\ W_P \end{Bmatrix} ; \quad \{C\} = \begin{Bmatrix} C_1 \\ C_2 \\ C_3 \\ \vdots \\ C_p \end{Bmatrix} ; \quad [H] = \begin{bmatrix} g_1(x_1, y_1), & g_2(x_1, y_1), & \dots, & g_p(x_1, y_1) \\ g_1(x_2, y_2), & g_2(x_2, y_2), & \dots, & g_p(x_2, y_2) \\ g_1(x_3, y_3), & g_2(x_3, y_3), & \dots, & g_p(x_3, y_3) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ g_1(x_P, y_P), & g_2(x_P, y_P), & \dots, & g_p(x_P, y_P) \end{bmatrix}$$

$$\text{On aura : } \{w\} = [H] \{C\}$$

$$\text{Donc : } \{C\} = [H]^{-1} \{w\}$$

Tel que les éléments  $H_{ij}$  de la matrice  $[H]$  sont calculés par :

$$H_{ij} = g_j(x_i, y_i) \quad \text{et} \quad \begin{matrix} i=1,2,\dots,P \\ j=1,2,\dots,P \end{matrix}$$

Posant :  $[L] = [H]^{-1}$ , tel que :  $[L] = \begin{bmatrix} L_{11} & L_{12} & L_{13} & \dots & L_{1p} \\ L_{21} & L_{22} & L_{23} & \dots & L_{2p} \\ L_{31} & L_{32} & L_{33} & \dots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ L_{p1} & L_{p2} & L_{p3} & \dots & L_{pp} \end{bmatrix}$

On aura :  $\{C\} = [L]\{w\}$

Substituant cette équation (III-34) dans l'équation (III-32),  $W(x, y)$  sera :

$$W(x, y) = [g(x, y)][L]\{w\} \tag{III-34}$$

De la, en utilisant l'équation (III-10) et (III-34) on obtient les fonctions d'interpolations  $N_i$  :

$$[N(x, y)] = [g(x, y)][L]$$

Elles peuvent s'écrire donc sous la forme :

$$[N(x, y)] = \begin{bmatrix} 1 & x & y & xy & x^2 & \dots & x^m y^n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} L_{11} & L_{12} & L_{13} & \dots & L_{1p} \\ L_{21} & L_{22} & L_{23} & \dots & L_{2p} \\ L_{31} & L_{32} & L_{33} & \dots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ L_{p1} & L_{p2} & L_{p3} & \dots & L_{pp} \end{bmatrix}$$

D'où :

$$\begin{cases} N_1(x, y) \\ N_2(x, y) \\ N_3(x, y) \\ \vdots \\ N_i \\ \vdots \\ N_p(x, y) \end{cases} = \begin{cases} L_{11} + L_{12}x + L_{13}y + L_{14}xy + \dots + L_{1p}x^m y^n \\ L_{21} + L_{22}x + L_{23}y + L_{24}xy + \dots + L_{2p}x^m y^n \\ L_{31} + L_{32}x + L_{33}y + L_{34}xy + \dots + L_{3p}x^m y^n \\ \vdots \\ L_{p1} + L_{p2}x + L_{p3}y + L_{p4}xy + \dots + L_{pp}x^m y^n \end{cases} \tag{III-35}$$

Ou bien :  $N_i(x, y) = \sum_{j=1}^{j=p} L_{ji} g_j(x, y) \quad i = 1, 2, 3, \dots, p \tag{III-36}$

**Remarque :**

Il est parfois très utile d'utiliser les fonctions  $g_i(x, y)$  comme la somme de plusieurs termes, dont le but est de rendre l'approximation symétrique et complète. Où elles ont la forme :

$$g_i(x, y) = x^{S1} y^{R1} + x^{S2} y^{R2} + \dots + x^{Si} y^{Ri} \Rightarrow g_i(x, y) = \sum_{n=1}^{n=i} x^{Sn} y^{Rn}$$

**III-7/ CALCUL DES MATRICES D'ELEMENTS**

Le calcul de la matrice de rigidité de l'élément  $[k^{(e)}]$  et le vecteur force  $\{F^{(e)}\}$  dans l'équation (III-13) par la méthode conventionnelle (par l'intégration exacte) est en général difficile.

Cependant, dans notre problème et avec les hypothèses optées, la valeur de 'f' de l'équation (III-13) est constante. Donc, il est possible d'évaluer les intégrales de surface dans les expressions de  $[k^{(e)}]$  et  $\{F^{(e)}\}$ .

Pour une raison de simplicité, nous réécrivons  $[k^{(e)}]$  comme étant la somme de deux matrices de base. :  $[S^{11}]$  et  $[S^{22}]$

c.à.d :  $[K^{(e)}] = [S^{11}] + [S^{22}] \tag{III-37a}$

Avec :

$$\begin{cases} S_{ij}^{11} = \int_{\Omega'} \frac{\partial N_i}{\partial x} \frac{\partial N_j}{\partial x} dx \cdot dy \\ S_{ij}^{22} = \int_{\Omega'} \frac{\partial N_i}{\partial y} \frac{\partial N_j}{\partial y} dx \cdot dy \end{cases} \quad (III-37b)$$

Ainsi que, nous avons :

$$F_i^{(e)} = - \int_{\Omega'} f \cdot N_i \cdot dx \cdot dy \quad (III-38)$$

Maintenant, nous poursuivons le calcul des matrices dans les équations (III-37) et (III-38) en utilisant les fonctions d'interpolations développées dans la section précédente.

**III-7-1/ MATRICE D'ELEMENT POUR UN ELEMENT TRIANGULAIRE LINEAIRE [10]**

Pour un triangle quelconque, (voir la figure III-3a) les évaluations de la formule des intégrales exactes suivante :

$$I_{mn} = \int_{\Delta} x^m y^n dx \cdot dy \quad (III-39)$$

sont données après un calcul mathématique en utilisant la formule de Green (voir paragraphe III-8)

L'aire du triangle :  $I_{00} = A = \frac{1}{2} \{ (x_2 - x_1)(y_3 - y_1) - (y_2 - y_1)(x_3 - x_1) \}$

Les coordonnées moyennes :  $\bar{x} = \frac{1}{3} \sum_{i=1}^3 x_i, \bar{y} = \frac{1}{3} \sum_{i=1}^3 y_i$

Ainsi  $I_{10} = \int_{\Delta} x \cdot dx \cdot dy = A\bar{x}, \quad I_{01} = \int_{\Delta} y \cdot dx \cdot dy = A\bar{y}$

$$I_{11} = \int_{\Delta} xy \cdot dx \cdot dy = \frac{A}{12} \left( \sum_{i=1}^3 x_i y_i + 9\bar{x} \cdot \bar{y} \right)$$

$$I_{20} = \int_{\Delta} x^2 \cdot dx \cdot dy = \frac{A}{12} \left( \sum_{i=1}^3 x_i^2 + 9\bar{x}^2 \right) \quad (III-40)$$

$$I_{02} = \int_{\Delta} y^2 \cdot dx \cdot dy = \frac{A}{12} \left( \sum_{i=1}^3 y_i^2 + 9\bar{y}^2 \right)$$

En utilisant les fonctions d'interpolations (III-25) dans les équations (III-37b) et (III-38) et notant que :

$$\frac{\partial N_i}{\partial x} = \frac{\beta_i}{2A}, \quad \frac{\partial N_i}{\partial y} = \frac{\gamma_i}{2A}$$

Nous obtenons :

$$\begin{cases} S_{ij}^{11} = \frac{1}{4A} \beta_i \beta_j \\ S_{ij}^{22} = \frac{1}{4A} \gamma_i \gamma_j \end{cases} \quad (III-41a)$$

$$\Rightarrow K_{ij}^{(e)} = \frac{1}{4A} (\beta_i \beta_j + \gamma_i \gamma_j) \quad i, j = 1, 2, 3 \quad (III-41b)$$

Ainsi que, vu l'identité  $\alpha_i + \beta_i \bar{x} + \gamma_i \bar{y} = 2A/3$  [à partir des équations (III-25), (III-38) et (III-40)], nous avons :

$$F_i^{(e)} = - \iint_{\Delta'} f \cdot N_i \cdot dx \cdot dy = - \frac{f}{2} (\alpha_i + \beta_i \bar{x} + \gamma_i \bar{y}) = -f \frac{A}{3} \quad (III-42)$$

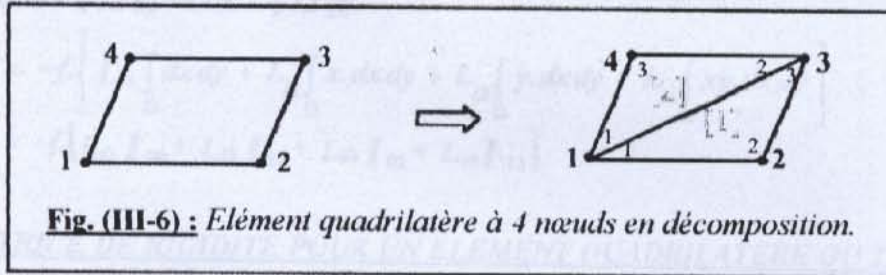
Et pour ce type de fonction d'interpolation  $N_i$  de trois termes, on a la relation mathématique suivante [30] :

$$\int_A N_i^a N_j^b = \frac{a! \cdot b!}{(a+b+2)!} \cdot 2A$$

Une fois les coordonnées des nœuds de l'élément sont connues, on peut calculer  $\alpha_i$ ,  $\beta_i$  et  $\gamma_i$  par l'équation (III-25b) et les substituer dans les équations (III-41b) et (III-42), pour obtenir les matrices et les vecteurs d'éléments

**III-7-2/ MATRICE DE RIGIDITE POUR UN ELEMENT QUADRILATERE BILINEAIRE**

L'élément quadrilatère à quatre nœuds est divisé en deux éléments triangulaires comme l'indique la figure ci-dessous. [Figure (III-6)]



**Fig. (III-6) :** Élément quadrilatère à 4 nœuds en décomposition.

A l'aide de l'équation (III-39) et les formules (III-40) on peut calculer les intégrales concernant l'élément quadrilatère comme suit :

$$\begin{aligned}
 I_{00} &= \int_{\Omega} dx dy = A_{123} + A_{134} \\
 I_{10} &= \int_{\Omega} x dx dy = A_{123} \bar{x}_{123} + A_{134} \bar{x}_{134} \\
 I_{01} &= \int_{\Omega} y dx dy = A_{123} \bar{y}_{123} + A_{134} \bar{y}_{134} \\
 I_{20} &= \int_{\Omega} x^2 dx dy = \frac{A_{123}}{12} (x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + 9 \bar{x}_{123}^2) + \frac{A_{134}}{12} (x_1^2 + x_3^2 + x_4^2 + 9 \bar{x}_{134}^2) \\
 I_{02} &= \int_{\Omega} y^2 dx dy = \frac{A_{123}}{12} (y_1^2 + y_2^2 + y_3^2 + 9 \bar{y}_{123}^2) + \frac{A_{134}}{12} (y_1^2 + y_3^2 + y_4^2 + 9 \bar{y}_{134}^2) \\
 I_{11} &= \int_{\Omega} xy dx dy = \frac{A_{123}}{12} (x_1 y_1 + x_2 y_2 + x_3 y_3 + 9 \bar{x}_{123} \bar{y}_{123}) + \frac{A_{134}}{12} (x_1 y_1 + x_3 y_3 + x_4 y_4 + 9 \bar{x}_{134} \bar{y}_{134})
 \end{aligned}
 \tag{III-43}$$

Tel que :

\*  $\bar{x}_{123}$ ,  $\bar{y}_{123}$  : Cordonnées du entre de gravité du triangle 123.

$$\bar{x}_{123} = \frac{1}{3} \sum_{i=1}^3 x_i, \quad \bar{y}_{123} = \frac{1}{3} \sum_{i=1}^3 y_i$$

\*  $\bar{x}_{134}$ ,  $\bar{y}_{134}$  : Cordonnées du entre de gravité du triangle 134.

$$\bar{x}_{134} = \frac{1}{3} (x_1 + x_3 + x_4), \quad \bar{y}_{134} = \frac{1}{3} (y_1 + y_3 + y_4)$$

\*  $A_{123}$ ,  $A_{134}$  : Aires de la surface des triangles limités respectivement par les nœuds 1, 2, 3 et 1,3, 4.

$$A_{123} = \frac{1}{2} \{ (x_2 - x_1)(y_3 - y_1) - (y_2 - y_1)(x_3 - x_1) \}$$

$$A_{134} = \frac{1}{2} \{ (x_3 - x_1)(y_4 - y_1) - (y_3 - y_1)(x_4 - x_1) \}$$

\*  $\Omega$  : surface limité par un quadrilatère.

En appliquant toujours les équations (III-37), (III-38), avec les fonctions d'interpolation (III-31); on obtient:

$$\begin{cases} S_{ij}^{11} = L_{2i} L_{2j} \int_{\Omega} dx dy + (L_{2i} L_{4j} + L_{2j} L_{4i}) \int_{\Omega} y dx dy + L_{4i} L_{4j} \int_{\Omega} y^2 dx dy \\ S_{ij}^{22} = L_{3i} L_{3j} \int_{\Omega} dx dy + (L_{3i} L_{4j} + L_{3j} L_{4i}) \int_{\Omega} x dx dy + L_{4i} L_{4j} \int_{\Omega} x^2 dx dy \end{cases} \quad (III-44a)$$

Sachant que :  $[K^{(e)}] = [S^{11}] + [S^{22}]$

Donc :

$$K_{ij} = (L_{2i} L_{2j} + L_{3i} L_{3j}) I_{00} + (L_{2i} L_{4j} + L_{2j} L_{4i}) I_{01} + (L_{3i} L_{4j} + L_{4i} L_{3j}) I_{10} + (L_{4i} L_{4j}) I_{02} + (L_{4i} L_{4j}) I_{20} \quad (III-44b)$$

et :

$$F_i^{(e)} = -f \cdot \left[ L_{i1} \int_{\Omega} dx dy + L_{i2} \int_{\Omega} x dx dy + L_{i3} \int_{\Omega} y dx dy + L_{i4} \int_{\Omega} xy dx dy \right]$$

$$= -f \cdot [L_{i1} I_{00} + L_{i2} I_{10} + L_{i3} I_{01} + L_{i4} I_{11}] \quad (III-44c)$$

**III-7-3/ MATRICE DE RIGIDITE POUR UN ELEMENT QUADRILATERE OU TRIANGULAIRE à « P » NŒUDS : (P ≥ 4)**

A partir des formules des matrices de rigidité [les équations (III-37) et (III-38)] en utilisant les fonctions d'interpolation (III-36) développées dans la section précédente, on détermine leurs termes comme suit [24] :

- Détermination de la matrice de rigidité [K]

A partir de la relation (III-36), on a :

$$\left[ \frac{\partial N}{\partial x} \right] = \left[ \frac{\partial N_1}{\partial x}, \frac{\partial N_2}{\partial x}, \frac{\partial N_3}{\partial x}, \dots, \frac{\partial N_p}{\partial x} \right]$$

Avec  $\frac{\partial N_i}{\partial x} = L_{i1} \frac{\partial g_1}{\partial x} + L_{i2} \frac{\partial g_2}{\partial x} + L_{i3} \frac{\partial g_3}{\partial x} + \dots + L_{ij} \frac{\partial g_j}{\partial x} + \dots + L_{ip} \frac{\partial g_p}{\partial x} \quad i=1,2,3,\dots, p$

Donc :  $\frac{\partial N_i}{\partial x} = \sum_{j=1}^{j=p} L_{ji} \frac{\partial g_j(x,y)}{\partial x} \quad i=1,2,3,\dots, p \quad (III-45)$

De même  $\left[ \frac{\partial N}{\partial y} \right] = \left[ \frac{\partial N_1}{\partial y}, \frac{\partial N_2}{\partial y}, \frac{\partial N_3}{\partial y}, \dots, \frac{\partial N_p}{\partial y} \right]$

$$\frac{\partial N_i}{\partial y} = \sum_{j=1}^{j=p} L_{ji} \frac{\partial g_j(x,y)}{\partial y} \quad i=1,2,3,\dots, p \quad (III-46)$$

Alors :  $K_{ij}^{(e)} = \iint_{\Omega} \left[ \frac{\partial N_i}{\partial x} \left( \frac{\partial N_j}{\partial x} \right) + \frac{\partial N_i}{\partial y} \left( \frac{\partial N_j}{\partial y} \right) \right] dx \cdot dy$

Utilisant les relations (III-45 et 46) dans la matrice [K] pour les termes en 'i' et 'j', on trouve :

$$K_{ij}^{(e)} = \iint_{\Omega} \left[ \sum_{k=1}^{k=p} L_{ki} \frac{\partial g_k(x,y)}{\partial x} \cdot \sum_{m=1}^{m=p} L_{mj} \frac{\partial g_m(x,y)}{\partial x} + \sum_{k=1}^{k=p} L_{ki} \frac{\partial g_k(x,y)}{\partial y} \cdot \sum_{m=1}^{m=p} L_{mj} \frac{\partial g_m(x,y)}{\partial y} \right] dx \cdot dy$$

$$\Rightarrow K_{ij}^{(e)} = \iint_{\Omega^e} \left\{ L_{1i} \sum_{m=1}^{m=p} L_{mj} \frac{\partial g_1(x,y)}{\partial x} \cdot \frac{\partial g_m(x,y)}{\partial x} + L_{2i} \sum_{m=1}^{m=p} L_{mj} \frac{\partial g_2(x,y)}{\partial x} \cdot \frac{\partial g_m(x,y)}{\partial x} + \dots + \dots + L_{pi} \sum_{m=1}^{m=p} L_{mj} \frac{\partial g_p(x,y)}{\partial x} \cdot \frac{\partial g_m(x,y)}{\partial x} \right\} + \left\{ L_{1i} \sum_{m=1}^{m=p} L_{mj} \frac{\partial g_1(x,y)}{\partial y} \cdot \frac{\partial g_m(x,y)}{\partial y} + \dots + \dots + L_{p-1,i} \sum_{m=1}^{m=p} L_{mj} \frac{\partial g_{p-1}(x,y)}{\partial y} \cdot \frac{\partial g_m(x,y)}{\partial y} + L_{pi} \sum_{m=1}^{m=p} L_{mj} \frac{\partial g_p(x,y)}{\partial y} \cdot \frac{\partial g_m(x,y)}{\partial y} \right\} dx dy$$

Sous la forme compacte, la matrice de rigidité  $[K_{ij}]$  sera :

$$K_{ij}^{(e)} = \iint_{\Omega^e} \left\{ \sum_{k=1}^p L_{ki} \left( \sum_{m=1}^{m=p} L_{mj} \frac{\partial g_k}{\partial x} \cdot \frac{\partial g_m}{\partial x} \right) \right\} + \left\{ \sum_{k=1}^{k=p} L_{ki} \left( \sum_{m=1}^{m=p} L_{mj} \frac{\partial g_k}{\partial y} \cdot \frac{\partial g_m}{\partial y} \right) \right\} dx \cdot dy$$

Après un réarrangement et un calcul mathématique, cette forme devient :

$$K_{ij}^{(e)} = \sum_{k=1}^{k=p} \sum_{m=1}^{m=p} L_{ki} L_{mj} \left\{ \iint_{\Omega^e} \left( \frac{\partial g_k(x,y)}{\partial x} \cdot \frac{\partial g_m(x,y)}{\partial x} + \frac{\partial g_k(x,y)}{\partial y} \cdot \frac{\partial g_m(x,y)}{\partial y} \right) dx \cdot dy \right\} \quad (III-47)$$

• Détermination du vecteur force F

Substituant l'équation (III-36) dans la relation (III-38), On aura :

$$F_i^{(e)} = - \iint_{\Omega^e} \left[ \sum_{m=1}^{m=p} L_{mi} g_m(x,y) \right] f \cdot dx \cdot dy \quad (III-48)$$

Considérons la fonction  $g_m(x, y)$  sous la forme indiquée à la fin du paragraphe III-6-5 comme suit:

$$g_m(x, y) = x^{S1} y^{R1} + x^{S2} y^{R2} + \dots + x^{Sm} y^{Rm} \Rightarrow g_m(x, y) = \sum_{n=1}^{n=m} x^{Sn} y^{Rn} \quad (III-49)$$

D'où les termes de dérivation deviennent :

$$\frac{\partial g_m(x, y)}{\partial x} = \sum_{n=1}^{n=m} S_n \cdot x^{Sn-1} y^{Rn}, \quad \frac{\partial g_m(x, y)}{\partial y} = \sum_{n=1}^{n=m} R_n \cdot x^{Sn} y^{Rn-1} \quad (III-50)$$

Afin de faciliter la compréhension de la procédure développée pour la programmation de cette partie de nos calculs, on donne deux exemples d'applications avec la forme finale des matrices de rigidités.

Donc pour cela, on déclare deux sous matrices et un vecteur, tel qu'ils sont nommés par :

- $XpuisI$  (NNPE,3),  $YpuisI$  (NNPE,3) :

Où elles représentent  $S_m$  et  $R_m$  respectivement, qui sont les puissances de 'x' et 'y' de la fonction d'interpolation de l'équation (III-49). Tel qu'on a posé 3 colonnes comme Max suivant le nombre Max de sous termes dans chaque partie de cette fonction d'interpolation.

- $Nterm$  (NNPE) : c'est le Nombre de termes existants dans chaque partie de la fonction d'interpolation. Généralement  $Nterm=1$ , mais il existe des cas où  $Nterm=2$  ou 3.

Avec NNPE : Représente le Nombre de Nœuds Par Élément, qui implique le nombre de termes d'interpolation, vu qu'on a un degré de liberté par nœud.

**Exemple 1 :** Pour un élément à quatre nœuds, on peut parmi les plusieurs approximations de la fonction  $W$  de considérer la suivante :

$$W(x,y) = C_1 + C_2(x+y) + C_3 \cdot xy + C_4(x^2 + y^2)$$

On a donc :  $NNPE = 4 \Rightarrow$  un triangle a '4 nœuds' ou un quadrilatère a '4 nœuds'.  
Alors, on procède au remplissage des sous-matrices  $XpuisI(4,3)$ ,  $YpuisI(4,3)$  et  $Nterm(4)$  comme suit :

XpuisI(NNPE, 3)			
1	0	-	-
2	1	0	-
3	1	-	-
4	2	0	-

YpuisI(NNPE, 3)		
0	-	-
0	1	-
1	-	-
0	2	-

Nterm(NNPE)
1
2
1
2

**Exemple 2 :** Pour la fonction  $W$  suivante :

$$W(x,y) = C_1 + C_2 \cdot x + C_3 \cdot y + C_4 \cdot xy + C_5 \cdot x^2 + C_6 \cdot y^2 + C_7(x^3 + y^3) + C_8(x^2y + xy^2)$$

On a donc dans ce cas:  $NNPE = 8 \Rightarrow$  un quadrilatère a '8 nœuds'.  
Alors, on procède au remplissage des tableaux comme suit :

XpuisI(NNPE, 3)			
1	0	-	-
2	1	-	-
3	0	-	-
4	1	-	-
5	2	-	-
6	0	-	-
7	3	0	-
8	2	1	-

YpuisI(NNPE, 3)		
0	-	-
0	-	-
1	-	-
1	-	-
0	-	-
2	-	-
0	3	-
1	2	-

Nterm(NNPE)
1
1
1
1
1
1
2
2

De la, en utilisant les vecteurs précédemment développés et l'équation (III-49), la relation (III-48) devient :

$$F_i^{(e)} = - \iint_{\Omega^e} \left[ \sum_{m=1}^{m=NNPE} L_{m,i} \cdot \sum_{n=1}^{n=Nterm(m)} x^{XpuisI(m,n)} y^{YpuisI(m,n)} \right] f \cdot dx \cdot dy$$

Après un réarrangement mathématique, ce vecteur devient finalement :

$$F_i^{(e)} = - f \sum_{m=1}^{m=NNPE} L_{m,i} \sum_{n=1}^{n=Nterm(m)} \left[ \iint_{\Omega^e} x^{XpuisI(m,n)} y^{YpuisI(m,n)} dx \cdot dy \right]$$

$$\Rightarrow F_i^{(e)} = - f \sum_{m=1}^{m=NNPE} L_{m,i} \sum_{n=1}^{n=Nterm(m)} \left[ I_{XpuisI(m,n)} YpuisI(m,n) \right] \tag{III-51}$$

Tel que le calcul de l'intégrale ' $I_{m,n}$ ' de l'équation (III-51) sur un domaine quadrilatère ou triangle de 'NNPE' nœuds est donnée et bien montrée dans la prochaine section.

De même pour la relation (III-47), en utilisant l'équation (III-50), elle devient :



$$\begin{aligned}
 K_{ij}^{(e)} = & \sum_{k=1}^{NNPE} \sum_{m=1}^{NNPE} L_{k,i} L_{m,j} \left[ \iint_{\Omega'} \left\{ \sum_{n=1}^{Nterm} X_{puisI}(k,n) \cdot x^{X_{puisI}(k,n)-1} y^{Y_{puisI}(k,n)} \right\} \times \right. \\
 & \times \left. \left\{ \sum_{l=1}^{Nterm} X_{puisI}(m,l) \cdot x^{X_{puisI}(m,l)-1} y^{Y_{puisI}(m,l)} \right\} + \left\{ \sum_{n=1}^{Nterm} Y_{puisI}(k,n) \cdot x^{X_{puisI}(k,n)} y^{Y_{puisI}(k,n)-1} \right\} \times \right. \\
 & \left. \times \left. \left\{ \sum_{l=1}^{Nterm} Y_{puisI}(m,l) \cdot x^{X_{puisI}(m,l)} y^{Y_{puisI}(m,l)-1} \right\} \right] dx dy \quad (III-52)
 \end{aligned}$$

Connaissons bien la relation suivante, avec  $a_i$  et  $b_j$  deux vecteurs quelconques [10] :

$$\sum_{i=1}^{i=n} \sum_{j=1}^{j=n} (a_i \cdot b_j) = \left( \sum_{i=1}^{i=n} a_i \right) \cdot \left( \sum_{j=1}^{j=n} b_j \right)$$

Alors l'équation (III-52) après un réarrangement mathématique en utilisant l'idée de l'équation précédente, elle devient finalement :

$$\begin{aligned}
 K_{ij}^{(e)} = & \sum_{k=1}^{NNPE} \sum_{m=1}^{NNPE} L_{k,i} L_{m,j} \left[ \sum_{n=1}^{Nterm(k)} \sum_{l=1}^{Nterm(m)} \left\{ \iint_{\Omega'} X_{puisI}(k,n) X_{puisI}(m,l) x^{SPX-2} y^{SPY} dx dy \right\} + \right. \\
 & \left. + \sum_{n=1}^{n=Nterm(k)} \sum_{l=1}^{l=Nterm(m)} \left\{ \iint_{\Omega'} Y_{puisI}(k,n) Y_{puisI}(m,l) x^{SPX} y^{SPY-2} dx dy \right\} \right] \quad (III-53)
 \end{aligned}$$

Avec :  $SPX = X_{puisI}(K,n) + X_{puisI}(m,L)$  et  $SPY = Y_{puisI}(K,n) + Y_{puisI}(m,L)$

Ce sont les Sommes des Puissances du terme 'x' pour SPX et du terme 'y' pour SPY. Le calcul des intégrales de l'équation (III-53) sur un domaine quadrilatère ou triangle de 'NNPE' nœuds est donnée et montrée aussi dans la prochaine section.

### III-8/ TRANSFORMATION DE L'INTEGRALE $I_{mn}$ POUR UN TRIANGLE ET UN QUADRILATERE

Soit : 
$$I_{mn} = \iint_{\Delta} x^m y^n \cdot dx dy \quad (III-54)$$

La transformation de GREEN nous permet de transformer une intégrale double de surface à une intégrale simple curviligne le long de la frontière de l'élément considéré. Elle est donnée par [10], [34] :

$$\iint_{surface} \left( \frac{\partial G}{\partial x} - \frac{\partial F}{\partial y} \right) dx dy = \oint_L (F \cdot dx + G \cdot dy) \quad (III-55)$$

Pour qu'on puisse transformer l'intégrale (III-54) pour un triangle en premier lieu, on peut considérer (voir Figure III-7), [24] :

$$G = 0 \quad \Rightarrow \quad - \frac{\partial F}{\partial y} = x^m y^n \quad \rightarrow \quad F(x, y) = \frac{-x^m y^{n+1}}{n+1}$$

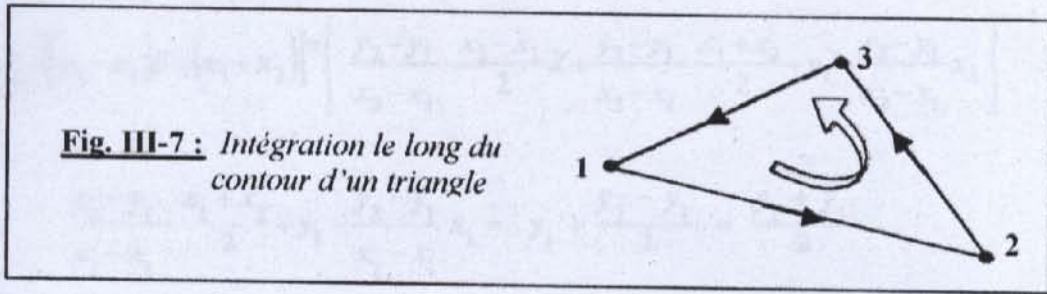
Alors : 
$$I_{mn} = \oint_L \frac{-1}{n+1} x^m y^{n+1} \cdot dx$$

$$I_{mn} = \frac{-1}{n+1} \oint_L x^m y^{n+1} \cdot dx = \frac{-1}{n+1} \left\{ \int_{12} x^m y^{n+1} \cdot dx + \int_{23} x^m y^{n+1} \cdot dx + \int_{31} x^m y^{n+1} \cdot dx + \dots \right\} \quad (III-56)$$

Sur le coté 12 (Figure III-7) Son équation est donnée par :  $y = \alpha x + \beta$

On a pour deux points :

$$x = x_1 \rightarrow y = y_1 \text{ et } x = x_2 \rightarrow y = y_2$$



$$\begin{aligned} \text{Alors : } y &= \left( \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \right) (x - x_1) + y_1 \\ \Rightarrow y &= \left( \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \right) x + y_1 - \left( \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \right) \cdot x_1 \quad \Rightarrow y = \alpha_{12}x + \beta_{12} \end{aligned} \quad \text{(III-57a)}$$

Sur le coté 23 De la même manière, on obtient :

$$\Rightarrow y = \left( \frac{y_3 - y_2}{x_3 - x_2} \right) x + y_2 - \left( \frac{y_3 - y_2}{x_3 - x_2} \right) \cdot x_2 \quad \Rightarrow y = \alpha_{23}x + \beta_{23} \quad \text{(III-57b)}$$

Sur le coté 31

$$\Rightarrow y = \left( \frac{y_1 - y_3}{x_1 - x_3} \right) x + y_3 - \left( \frac{y_1 - y_3}{x_1 - x_3} \right) \cdot x_3 \quad \Rightarrow y = \alpha_{31}x + \beta_{31} \quad \text{(III-57c)}$$

En substituant les trois équations précédentes dans les 'y' de l'équation (III-56), alors on obtient :

$$I_{mn} = \frac{-1}{n+1} \left\{ \int_{x_1}^{x_2} x^m (\alpha_{12}x + \beta_{12})^{n+1} dx + \int_{x_2}^{x_3} x^m (\alpha_{23}x + \beta_{23})^{n+1} dx + \int_{x_3}^{x_1} x^m (\alpha_{31}x + \beta_{31})^{n+1} dx \right\} \quad \text{(III-58a)}$$

$$\text{Tel que : } \alpha_{12} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} ; \beta_{12} = y_1 - \alpha_{12}x_1 ; \alpha_{23} = \frac{y_3 - y_2}{x_3 - x_2} ; \beta_{23} = y_2 - \alpha_{23}x_2$$

$$\alpha_{31} = \frac{y_1 - y_3}{x_1 - x_3} ; \beta_{31} = y_3 - \alpha_{31}x_3 \quad \text{(III-58b)}$$

Afin de permettre de calculer l'intégrale par la méthode la plus convenable et efficace qui est celle de GAUSS-LEGENDRE, on transforme la relation (III-58) dans l'intervalle [-1, +1].

On a pour l'équation :  $x = a.Z + b$

- $Z = -1 ; x = x_1$   
 $Z = +1 ; x = x_2$ 
 $\Rightarrow x = \frac{x_2 - x_1}{2} Z + \frac{x_1 + x_2}{2}$
- $Z = -1 ; x = x_2$   
 $Z = +1 ; x = x_3$ 
 $\Rightarrow x = \frac{x_3 - x_2}{2} Z + \frac{x_2 + x_3}{2}$
- $Z = -1 ; x = x_3$   
 $Z = +1 ; x = x_1$ 
 $\Rightarrow x = \frac{x_1 - x_3}{2} Z + \frac{x_1 + x_3}{2}$

Alors :

$$\int_{x_1}^{x_2} x^m (\alpha_{12}x + \beta_{12})^{n+1} dx = \int_{-1}^{+1} \left[ \frac{x_2 - x_1}{2} Z + \frac{x_1 + x_2}{2} \right]^m \left[ \alpha_{12} \left( \frac{x_2 - x_1}{2} Z + \frac{x_1 + x_2}{2} \right) + \beta_{12} \right]^{n+1} \cdot \left( \frac{x_2 - x_1}{2} \right) dZ$$

$$= \int_{-1}^{+1} \frac{1}{2^m} \left[ (x_2 - x_1) Z + (x_1 + x_2) \right]^m \left[ \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \cdot \frac{x_2 - x_1}{2} Z + \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \cdot \frac{x_1 + x_2}{2} + y_1 - \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} x_1 \right]^{n+1} \cdot \left( \frac{x_2 - x_1}{2} \right) dZ$$

Notant :

$$\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \cdot \frac{x_1 + x_2}{2} + y_1 - \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} x_1 = y_1 + \frac{y_2 - y_1}{2} = \frac{y_2 + y_1}{2}$$

Donc, en substituant cette relation dans l'équation précédente, on aura :

$$\int_{x_1}^{x_2} x^m (\alpha_{12}x + \beta_{12})^{n+1} dx = \frac{(x_2 - x_1)}{2^{m+n+2}} \cdot \int_{-1}^{+1} \left[ (x_2 - x_1) Z + (x_1 + x_2) \right]^m \cdot \left[ (y_2 - y_1) Z + (y_1 + y_2) \right]^{n+1} \cdot dZ \quad (III-59)$$

De même pour les autres termes :

$$\int_{x_2}^{x_3} x^m (\alpha_{23}x + \beta_{23})^{n+1} dx = \frac{(x_3 - x_2)}{2^{m+n+2}} \cdot \int_{-1}^{+1} \left[ (x_3 - x_2) Z + (x_2 + x_3) \right]^m \cdot \left[ (y_3 - y_2) Z + (y_2 + y_3) \right]^{n+1} \cdot dZ \quad (III-60)$$

$$\int_{x_3}^{x_1} x^m (\alpha_{31}x + \beta_{31})^{n+1} dx = \frac{(x_1 - x_3)}{2^{m+n+2}} \cdot \int_{-1}^{+1} \left[ (x_1 - x_3) Z + (x_3 + x_1) \right]^m \cdot \left[ (y_1 - y_3) Z + (y_3 + y_1) \right]^{n+1} \cdot dZ \quad (III-61)$$

En remplaçant les relations (III-59), (III-60) et (III-61) dans l'équation (III-58) on obtient :

$$I_{mn} = \frac{-1}{n+1} \frac{1}{2^{m+n+2}} \left\{ (x_2 - x_1) \int_{-1}^{+1} \left[ (x_2 - x_1) Z + (x_1 + x_2) \right]^m \cdot \left[ (y_2 - y_1) Z + (y_1 + y_2) \right]^{n+1} dZ + \right.$$

$$+ (x_3 - x_2) \int_{-1}^{+1} \left[ (x_3 - x_2) Z + (x_2 + x_3) \right]^m \cdot \left[ (y_3 - y_2) Z + (y_2 + y_3) \right]^{n+1} \cdot dZ +$$

$$\left. + (x_1 - x_3) \int_{-1}^{+1} \left[ (x_1 - x_3) Z + (x_3 + x_1) \right]^m \cdot \left[ (y_1 - y_3) Z + (y_3 + y_1) \right]^{n+1} \cdot dZ \right\}$$

Finalement l'intégrale sera pour un triangle quelconque :

$$I_{mn}^{(A)} = \frac{1}{2^{m+n+2} (n+1)} \left\{ (x_1 - x_2) \int_{-1}^{+1} \left[ -(x_2 - x_1) Z + (x_1 + x_2) \right]^m \cdot \left[ (y_2 - y_1) Z + (y_1 + y_2) \right]^{n+1} dZ + \right.$$

$$+ (x_2 - x_3) \int_{-1}^{+1} \left[ -(x_2 - x_3) Z + (x_2 + x_3) \right]^m \cdot \left[ -(y_2 - y_3) Z + (y_2 + y_3) \right]^{n+1} \cdot dZ +$$

$$\left. + (x_3 - x_1) \int_{-1}^{+1} \left[ -(x_3 - x_1) Z + (x_3 + x_1) \right]^m \cdot \left[ -(y_3 - y_1) Z + (y_3 + y_1) \right]^{n+1} \cdot dZ \right\} \quad (III-62)$$

On peut démontrer la relation suivante pour un quadrilatère. Pour plus de détails voir [24] :

$$I_{mn}^{(2)} = \frac{1}{(n+1)} \int_{-1}^{+1} \left\{ \frac{(x_1 - x_2)}{2} \left[ \frac{-(x_1 - x_2)}{2} Z + \frac{(x_1 + x_2)}{2} \right]^m \left[ \frac{-(y_1 - y_2)}{2} Z + \frac{(y_1 + y_2)}{2} \right]^{n+1} + \right. \\ \left. + \frac{(x_2 - x_3)}{2} \left[ \frac{-(x_2 - x_3)}{2} Z + \frac{(x_2 + x_3)}{2} \right]^m \left[ \frac{-(y_2 - y_3)}{2} Z + \frac{(y_2 + y_3)}{2} \right]^{n+1} + \right. \\ \left. + \frac{(x_3 - x_4)}{2} \left[ \frac{-(x_3 - x_4)}{2} Z + \frac{(x_3 + x_4)}{2} \right]^m \left[ \frac{-(y_3 - y_4)}{2} Z + \frac{(y_3 + y_4)}{2} \right]^{n+1} + \right. \\ \left. + \frac{(x_4 - x_1)}{2} \left[ \frac{-(x_4 - x_1)}{2} Z + \frac{(x_4 + x_1)}{2} \right]^m \left[ \frac{-(y_4 - y_1)}{2} Z + \frac{(y_4 + y_1)}{2} \right]^{n+1} \right\} \cdot dZ \quad (III-63)$$

Sous forme compacte : 
$$I_{mn}^{(ITYPE)} = \frac{1}{n+1} \int_{-1}^{+1} F(Z) \cdot dZ \quad (III-63^*)$$

Dans le but de généraliser les deux relations précédentes de  $I_{mn}$  (III-62 et 63), on définit 4 vecteurs « XDIF(i), XSOM(i), YDIF(i) et YSOM(i) », afin de parvenir les sommations et les soustractions des coefficients de la fonction F(Z) pour les abscisses 'x' et 'y'.

Ainsi qu'on déclare un exposant 'ITYPE' égale à '1' pour l'élément fini triangle ou égale à '2' pour l'élément fini quadrilatère. Alors on a :

- Pour un triangle (ITYPE=1) :

$$\begin{aligned} XDIF(1) &= (x_1 - x_2) / 2 & XSOM(1) &= (x_1 + x_2) / 2 \\ XDIF(2) &= (x_2 - x_3) / 2 & XSOM(2) &= (x_2 + x_3) / 2 \\ XDIF(3) &= (x_3 - x_1) / 2 & XSOM(3) &= (x_3 + x_1) / 2 \end{aligned}$$

Et :

$$\begin{aligned} YDIF(1) &= (y_1 - y_2) / 2 & YSOM(1) &= (y_1 + y_2) / 2 \\ YDIF(2) &= (y_2 - y_3) / 2 & YSOM(2) &= (y_2 + y_3) / 2 \\ YDIF(3) &= (y_3 - y_1) / 2 & YSOM(3) &= (y_3 + y_1) / 2 \end{aligned}$$

- Pour un quadrilatère (ITYPE=2) :

C'est les mêmes vecteurs et expressions sauf qu'on modifie les dernières par :

$$\begin{aligned} XDIF(3) &= (x_3 - x_4) / 2 & XSOM(3) &= (x_3 + x_4) / 2 \\ YDIF(3) &= (y_3 - y_4) / 2 & YSOM(3) &= (y_3 + y_4) / 2 \end{aligned}$$

Et on ajoute les expressions (pour i=4) :

$$\begin{aligned} XDIF(4) &= (x_4 - x_1) / 2 & XSOM(4) &= (x_4 + x_1) / 2 \\ YDIF(4) &= (y_4 - y_1) / 2 & YSOM(4) &= (y_4 + y_1) / 2 \end{aligned}$$

Alors, on peut les expliciter par une boucle de programme qui englobe toutes ces expressions. Pour la mise en clarté de cette idée, on expose sa partie du programme suivante. Tel que 'xx' et 'yy' sont les coordonnées locales des sommets de nombre '2+ITYPE' d'un élément fini quelconque :

C \*\*\*\*\* REMPLISSAGE DES VECTEURS DE LA FONCTION F

```

DO 240 i = 1, 2+ITYPE
  j = i+1
  IF (j .GT. 2+ITYPE) j = 1
  XDIF(i) = (xx(i)-xx(j))/2.
  XSOM(i) = (xx(i)+xx(j))/2.
  XDIF(i) = (yy(i)-yy(j))/2.
  YSOM(i) = (yy(i)+yy(j))/2.

```

240 CONTINUE

En fin, la forme générale des équations (III-62 et III-63) s'écrit :

$$I_{mn} = \frac{1}{(n+1)} \int_{-1}^{+1} \left\{ \sum_{i=1}^{i=ITYPE+2} XDIF(i) [-XDIF(i)Z + XSOM(i)]^m \cdot [-YDIF(i)Z + YSOM(i)]^{n+1} \right\} dZ \quad (III-64)$$

D'où, la fonction F à intégrer de l'équation (III-63\*) a la forme :

$$F(Z) = \sum_{i=1}^{i=ITYPE+2} XDIF(i) [-XDIF(i)Z + XSOM(i)]^m \cdot [-YDIF(i)Z + YSOM(i)]^{n+1} \quad (III-65)$$

Pour le détail sur la méthode de GAUSS-LEGENDRE et la procédure d'intégration de l'équation (III-63\*) tel que la fonction 'F' est donnée par l'équation (III-65) voir Annexe D.

**III-9/ ASSEMBLAGE DES MATRICES D'ELEMENTS**

L'assemblage est l'opération qui consiste à construire la matrice globale [K] et le vecteur global {F} à partir des matrices élémentaires [K<sup>(e)</sup>] et des vecteurs élémentaires {F<sup>(e)</sup>} des éléments finis du domaine complet.

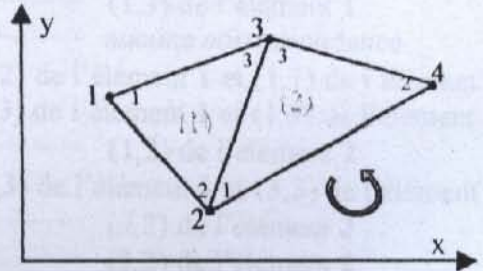
Pour représenter l'assemblage des matrices d'éléments finis, nous illustrons la procédure en considérant que le maillage est construis par deux éléments triangulaires.

Soient K<sub>ij</sub><sup>(1)</sup> et K<sub>ij</sub><sup>(2)</sup> (i, j = 1,2,3) les coefficients des matrices de rigidité correspondant à ces éléments. Le maillage d'éléments finis est présenté dans la figure III-8.

A partir de ce maillage, nous notons la correspondance entre les valeurs globales et les valeurs nodales d'éléments.

$$\begin{aligned}
 W_1 &= W_1^{(1)}, & W_2 &= W_2^{(1)} = W_1^{(2)} \\
 W_3 &= W_3^{(1)} = W_3^{(2)}, & W_4 &= W_2^{(2)}.
 \end{aligned} \quad (III-66)$$

**Fig. III-8 : Assemblage de deux éléments triangulaires à 3 nœuds**



Pour l'élément (1)

$$[K^{(1)}] = \begin{bmatrix} k_{11}^{(1)} & k_{12}^{(1)} & k_{13}^{(1)} \\ k_{21}^{(1)} & k_{22}^{(1)} & k_{23}^{(1)} \\ k_{31}^{(1)} & k_{32}^{(1)} & k_{33}^{(1)} \end{bmatrix},$$

Pour l'élément (2)

$$[K^{(2)}] = \begin{bmatrix} k_{11}^{(2)} & k_{12}^{(2)} & k_{13}^{(2)} \\ k_{21}^{(2)} & k_{22}^{(2)} & k_{23}^{(2)} \\ k_{31}^{(2)} & k_{32}^{(2)} & k_{33}^{(2)} \end{bmatrix}$$

La matrice assemblée sera :

$$[K] = \begin{bmatrix} k_{11}^1 & k_{12}^1 & k_{13}^1 & 0 \\ k_{21}^1 & k_{22}^1 + k_{11}^2 & k_{23}^1 + k_{13}^2 & k_{12}^2 \\ k_{31}^1 & k_{32}^1 + k_{21}^2 & k_{33}^1 + k_{23}^2 & k_{32}^2 \\ 0 & k_{21}^2 & k_{23}^2 & k_{22}^2 \end{bmatrix}$$

En suite, nous utilisons les conditions de continuité d'inter éléments (III-66) pour assembler les équations d'éléments finis.

$$\begin{aligned} 0 &= \sum_{e=1}^2 \{ \delta W^{(e)} \}^T \left( [K^{(e)}] \{ W^{(e)} \} - \{ F^{(e)} \} \right) \\ &= \sum_{e=1}^2 \sum_{i=1}^{n_e} \delta W_i^{(e)} \left[ \sum_{j=1}^{n_e} K_{ij}^{(e)} W_j^{(e)} - F_i^{(e)} \right] \quad n_1 = 3, n_2 = 3 \end{aligned} \tag{III-67}$$

Collectant les coefficients de  $\delta W_i^{(e)}$  ( $i=1,2,3,4$ ), séparément et mettant eux en zéros, nous obtenons après un réarrangement le système sous forme matricielle suivant :

$$\begin{bmatrix} k_{11}^1 & k_{12}^1 & k_{13}^1 & 0 \\ k_{21}^1 & k_{22}^1 + k_{11}^2 & k_{23}^1 + k_{13}^2 & k_{12}^2 \\ k_{31}^1 & k_{32}^1 + k_{21}^2 & k_{33}^1 + k_{23}^2 & k_{32}^2 \\ 0 & k_{21}^2 & k_{23}^2 & k_{22}^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} W_1 \\ W_2 \\ W_3 \\ W_4 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_1^{(1)} \\ F_2^{(1)} + F_1^{(2)} \\ F_3^{(1)} + F_3^{(2)} \\ F_2^{(2)} \end{Bmatrix} \tag{III-68}$$

La procédure d'assemblage décrit précédemment, peut nous permet d'éviter l'équation algébrique très lente (III-67), en se rendant directement après l'assemblage donc à l'équation (68).

Un examen final du maillage des éléments finis de la figure (III-8) montre les correspondances suivantes entre les nœuds globaux pairs et les nœuds des éléments pairs.

Numérotation globale	Les nœuds globaux	Les nœuds de l'élément
1	(1, 1)	(1,1) de l'élément 1
.	(1, 2)	(1,2) de l'élément 1
.	(1, 3)	(1,3) de l'élément 1
.	(1, 4)	aucune correspondance
2	(2, 2)	(2,2) de l'élément 1 et (1,1) de l'élément 2
.	(2, 3)	(2,3) de l'élément 1 et (1,3) de l'élément 2
.	(2, 4)	(1,2) de l'élément 2
3	(3, 3)	(3,3) de l'élément 1 et (3,3) de l'élément 2
.	(3, 4)	(3,2) de l'élément 2
4	(4, 4)	(2,2) de l'élément 2

**Tableau III-2 :** Correspondances entre les nœuds globaux et les nœuds des éléments.

Cette correspondance nous donne un chemin facile d'assemblage des matrices des éléments finis pour obtenir les coefficients de la matrice globale avec des entiers convenables.

Par exemple, l'emplacement du coefficients (1,2) de la matrice globale contient  $K_{12}^{(1)}$ , l'emplacement du (1,4) de la matrice globale ne contient aucune correspondance, et l'emplacement (3,3) contient  $K_{33}^{(1)} + K_{33}^{(2)}$  ... etc.

Alors, la correspondance entre les nœuds globaux et les nœuds d'éléments, nous fournit finalement une méthode d'assemblage des matrices de rigidités adéquate pour obtenir les coefficients globaux de la matrice de rigidité globale (du domaine approprié).

Finalement, La figure ci-contre (III-9) montre un maillage d'assemblage de deux éléments quadrilatères typique ayant '8' nœuds : sur les sommets et au milieu des arêtes, de chaque élément.

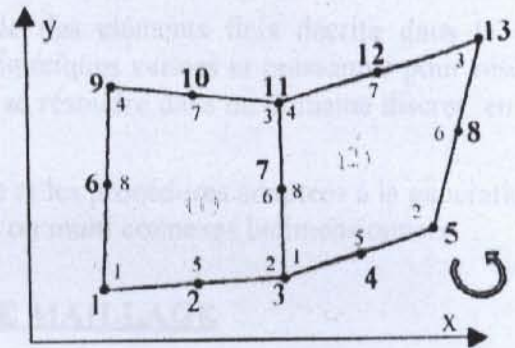


Fig. III-9 : Assemblage de deux éléments quadrilatères à 8 nœuds.

De la même manière que le maillage à deux triangles, le système final déterminé après l'assemblage de ces deux éléments quadrilatères à 8 nœuds est le suivant :

$$\begin{bmatrix}
 k_{11}^1 & k_{15}^1 & k_{12}^1 & 0 & 0 & k_{18}^1 & k_{16}^1 & 0 & k_{14}^1 & k_{17}^1 & k_{13}^1 & 0 & 0 & W_1 \\
 k_{55}^1 & k_{52}^1 & 0 & 0 & k_{58}^1 & k_{56}^1 & 0 & k_{54}^1 & k_{57}^1 & k_{53}^1 & 0 & 0 & W_2 \\
 k_{22}^1 + k_{11}^2 & k_{15}^2 & k_{12}^2 & k_{28}^1 & k_{26}^1 + k_{18}^2 & k_{16}^2 & k_{24}^1 & k_{27}^1 & k_{23}^1 + k_{14}^2 & k_{17}^2 & k_{13}^2 & W_3 \\
 k_{55}^2 & k_{52}^2 & k_{22}^2 & 0 & k_{58}^2 & k_{56}^2 & 0 & 0 & k_{54}^2 & k_{57}^2 & k_{53}^2 & W_4 \\
 k_{22}^2 & 0 & k_{28}^2 & k_{26}^2 & 0 & 0 & 0 & 0 & k_{24}^2 & k_{27}^2 & k_{23}^2 & W_5 \\
 k_{88}^1 & k_{86}^1 & 0 & k_{84}^1 & k_{87}^1 & k_{83}^1 & 0 & 0 & k_{81}^1 & k_{82}^1 & k_{83}^1 & W_6 \\
 k_{66}^1 + k_{88}^2 & k_{86}^2 & k_{86}^2 & k_{64}^1 & k_{67}^1 & k_{63}^1 + k_{84}^2 & k_{87}^2 & k_{83}^2 & k_{67}^2 & k_{63}^2 & W_7 \\
 k_{44}^1 & 0 & 0 & k_{44}^1 & k_{47}^1 & k_{43}^1 & 0 & 0 & k_{47}^1 & k_{43}^1 & W_8 \\
 k_{77}^1 & k_{73}^1 & 0 & 0 & k_{77}^1 & k_{73}^1 & 0 & 0 & k_{77}^1 & k_{73}^1 & W_9 \\
 k_{33}^1 + k_{44}^2 & k_{47}^2 & k_{43}^2 & k_{33}^2 & k_{47}^2 & k_{43}^2 & k_{77}^2 & k_{73}^2 & k_{77}^2 & k_{73}^2 & W_{10} \\
 k_{33}^2 & 0 & 0 & k_{33}^2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & W_{11} \\
 & & & & & & & & & & W_{12} \\
 & & & & & & & & & & W_{13}
 \end{bmatrix}
 \begin{Bmatrix}
 W_1 \\
 W_2 \\
 W_3 \\
 W_4 \\
 W_5 \\
 W_6 \\
 W_7 \\
 W_8 \\
 W_9 \\
 W_{10} \\
 W_{11} \\
 W_{12} \\
 W_{13}
 \end{Bmatrix}
 =
 \begin{Bmatrix}
 F_1^1 \\
 F_5^1 \\
 F_2^1 + F_1^2 \\
 F_5^2 \\
 F_2^2 \\
 F_8^1 \\
 F_6^1 + F_8^2 \\
 F_6^2 \\
 F_4^1 \\
 F_7^1 \\
 F_3^1 + F_4^2 \\
 F_7^2 \\
 F_3^2
 \end{Bmatrix}$$

symétrie

Dans la suite, on va entamer le chapitre quatre de la génération des maillages, pour la mise en lumière de toutes les méthodes et les procédures suivies afin d'avoir les résultats nécessaires montrés au chapitre six par la suite.

## CHAPITRE IV

### *GENERATION DU MAILLAGE*

#### IV-1/ INTRODUCTION

La mise en œuvre effective de la méthode des éléments finis décrite dans le chapitre précédent, nécessite l'utilisation des méthodes numériques variées et puissantes pour résoudre le système algébrique qui en résulte. Ces équations se résolvent dans un domaine discret, en passant d'un milieu continu à un milieu discrétisé.

Ce chapitre donne la description de la méthode et les procédures adaptées à la génération de maillage sur les domaines étudiés soit simplement ou multi connexes bidimensionnels.

#### IV-2/ ASPECT DE LA GENERATION DE MAILLAGE

La génération de maillage est une partie importante de la modélisation des problèmes d'écoulement par la méthode des éléments finis. Pour cela, le développement des méthodes numériques rapides et efficaces est l'objectif principal de cette procédure.

Alors, il existe plusieurs types de domaine selon la forme de sa frontière, ainsi qu'il existe plusieurs méthodes ou techniques de génération de maillage, selon le degré de complexité du même domaine, mais le maillage doit toujours vérifier les conditions suivantes [24] :

- Une adaptation aux frontières, et aux conditions aux limites.
- Une adaptation aux propriétés des différentes régions du domaine physique.
- Une bonne régularité.

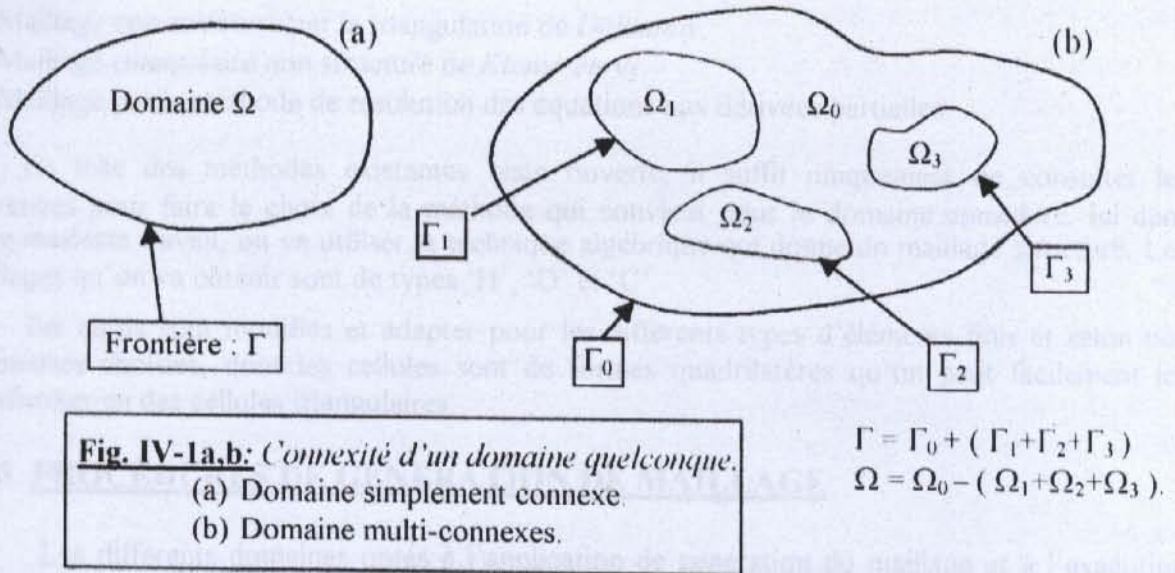
Le but de cette partie donc, est de donner un rappel sur ces types de domaines et les techniques de génération de maillage.

##### IV-2-1/ CONCEPTE DES DIFFERENTS TYPES DES DOMAINES

Le domaine est une collection de points dans une région de l'espace avec la propriété que si  $P$  est un point dans le domaine, alors tous les points qui sont suffisamment près de  $P$  appartiennent au domaine. La propriété implique que le domaine se constitue uniquement des points intérieurs. Si deux points quelconques du domaine peuvent être reliés par une ligne entièrement étendue à l'intérieur du domaine, alors le domaine se dit d'être convexe (courbé) et *simplement connexe*. La limite du domaine est un ensemble de points tel que dans n'importe quel voisinage de chacun de ces points il y a des points qui appartiennent au domaine aussi bien que d'autres points ne le sont pas [2].

Notons de la définition du domaine que les points dans la frontière n'appartiennent pas au domaine. Dans notre étude, on doit prendre en considération les domaines qui sont connectés par multiplication [voir figure IV-1]. On doit utiliser le symbole ( $\Omega$ ) pour dénoter un domaine arbitraire et ( $\Gamma$ ) pour dénoter sa frontière.





**IV-2-1-A/ Région simplement connexe**

Une région de l'espace est dite simplement connexe si toutes les courbes relient deux points quelconques sont conciliables (ou réductible) par variation continue. Ou bien en d'autre terme, si tout contour fermé dans cette région peut être réduit à un point par déformation continue sans jamais quitter la région (voir Fig.IV-1 a)

**IV-2-1-B/ Région doublement et multi connexes**

Une région de l'espace est dite doublement connexe s'il n'existe que deux chemins non conciliables pour relier deux points quelconques ou bien que toutes les courbes reliant deux points quelconques puissent être classées en deux familles [32]. Dans cette région, il n'existe alors qu'un seul contour fermé irréductible.

On peut facilement généraliser ces concepts pour définir des régions multi-connexes en terme du nombre de contours irréductibles (voir Fig.IV-1b).

**IV-2-2/ CLASSIFICATION DES TECHNIQUES DE GENERATION DE MAILLAGE**

Il existe plusieurs méthodes et techniques de génération de maillage que se soit triangulaires ou quadrilatères. Rappelons que ces méthodes peuvent se classer en deux catégories. La première consiste à générer une grille de nœuds dans le domaine et sa frontière, en discrétisant la géométrie physique continue vers le domaine discret, tout en conservant sa forme et ses frontières. Or l'autre consiste à transformer le domaine discret (la grille de nœuds compliquée) vers un domaine computational (de calcul), caractérisé par un maillage simple dans sa forme et les pas de discrétisation. Citons à titre exemple les méthodes suivantes qu'on peut les trouver dans la littérature et les références indiquées.

Notre but ici, ce n'est pas de faire une synthèse sur les méthodes existantes, mais pour fixée les idées nous donnons uniquement le nom de la méthode.

- Maillage algébrique par interpolation linéaire entre deux parois [31].
- Maillage structuré par résolution de l'équation de Laplace [31].
- Maillage structuré de type 'O', 'C' et autres par coupure [31].
- Maillage structuré par la technique des transformations conformes [32].
- Maillage structuré par la méthode de variable complexe.
- Maillage structuré par la méthode de Gilding [32] et [31].
- Maillage structuré par technique de multi surface.

- Maillage non structuré par la triangulation de *Delaunay*.
- Maillage triangulaire non structuré de *Klenstreuer*.
- Maillage par la méthode de résolution des équations aux dérivées partielles.

La liste des méthodes existantes reste ouverte, il suffit uniquement de consulter les références pour faire le choix de la méthode qui convient pour le domaine considéré. Ici dans notre modeste travail, on va utiliser la technique algébrique qui donne un maillage structuré. Les maillages qu'on va obtenir sont de types 'H', 'O' et 'C'.

Tel qu'ils sont modifiés et adapter pour les différents types d'éléments finis et selon nos géométries choisies, dont les cellules sont de formes quadrilatères qu'on peut facilement les transformer en des cellules triangulaires.

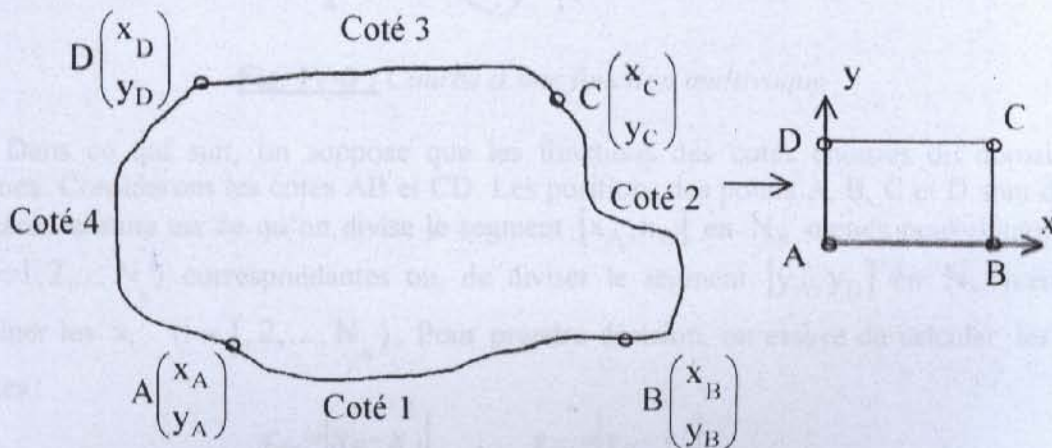
### IV-3 PROCEDURES DE GENERATION DE MAILLAGE

Les différents domaines optés à l'application de génération du maillage et à l'exécution de leurs sous-routines réalisées dans notre programme principal, sont donnés en détail dans le chapitre VI des résultats. Tel que, la liste reste ouverte pour d'autres géométries à adapter selon le besoin du constructeur des conduites.

Vu cette diversité de géométries, on a jugé opportuns de décrire la procédure de génération des maillages suivant la démarche citée au paragraphe précédent, c.à.d simplement connexe et multi connexes.

#### IV-3-1/ CONFIGURATION SIMPLEMENT CONNEXE

Pour faire la génération de maillage d'un domaine simplement connexe dont la forme générale est donnée par la figure (IV-2), et parmi les plusieurs méthodes et techniques existantes et suivant la méthode de résolution du système algébrique ainsi que la manière de considération de la forme de la matrice de rigidité, il est très intéressant d'appliquer l'idée de génération de maillage dans les régions rectangulaires.



**Fig. IV-2 :** Transformation d'un domaine simplement connexe à un rectangle.

On obtient par conséquent quatre cotés qui sont respectivement AD, AB, BC et CD. Si on fait des transformations continues à chaque cotés, on peut les rendre des lignes de droites comme le montre la figure précédente. Alors le coté AB du domaine joue le rôle de la partie basse du rectangle. Le coté CD est celui de la partie haute du rectangle. Les cotés AD et BC sont ceux de la partie gauche et droite du rectangle.

Pour ce rectangle, considérons la subdivision par  $N_x$  et  $N_y$  nœuds sur l'axe horizontal des  $x$  et vertical des  $y$  respectivement. Par analogie, les cotés AB et CD du domaine seront subdivisés en  $N_x$  nœuds et les cotés AD et BC seront subdivisés en  $N_y$  nœuds. Pour cela, on procède à la génération suivant deux étapes principales. La première étape c'est la génération des nœuds de frontière de chaque cotés puis l'étape de génération des nœuds internes.

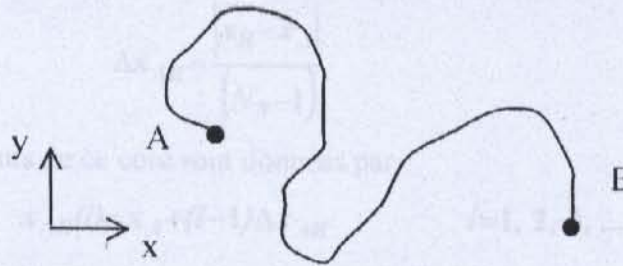
**IV-3-1-1/ GENERATION DES NŒUDS SUR LE CONTOUR DU DOMAINE**

Plusieurs procédures peuvent être considérées et cela suivant la disposition de la courbure de chaque cotés. Dans le cas général, il n'est pas facile de procéder à une méthode universelle qui sera applicable pour n'importe quelles courbes, mais on essaye d'adapter pour chaque forme complexe une procédure convenable, sans oublier de dire que le choix des points A, B, C et D influe sur la forme des quatre cotés du domaine.

Parmi les critères de choix des positions des points A, B, C et D est que les fonctions sur les cotés AB, BC, CD et DA doivent être univoque en  $x$  ou  $y$ , c'est-à-dire, pour chaque valeur de 'x' il y a une image sur les cotés AB et CD. En ce qui concerne les fonctions qui passent par les points AD et BC, elles doivent être aussi univoques mais en  $y$ .

Par exemple, la courbe suivante (Fig.IV-3) est multivoque en  $x$  et  $y$ . Dans ce cas, pour rendre les cotés univoques, il faut faire soit :

- Changer les positions des points A, et B.
- Subdiviser le domaine en quelques blocs de tel sorte que les cotés soient univoques. Ici, il faut respecter la continuité de passage des nœuds entre les blocs.



**Fig. IV-3 :** Courbe d'une fonction multivoque

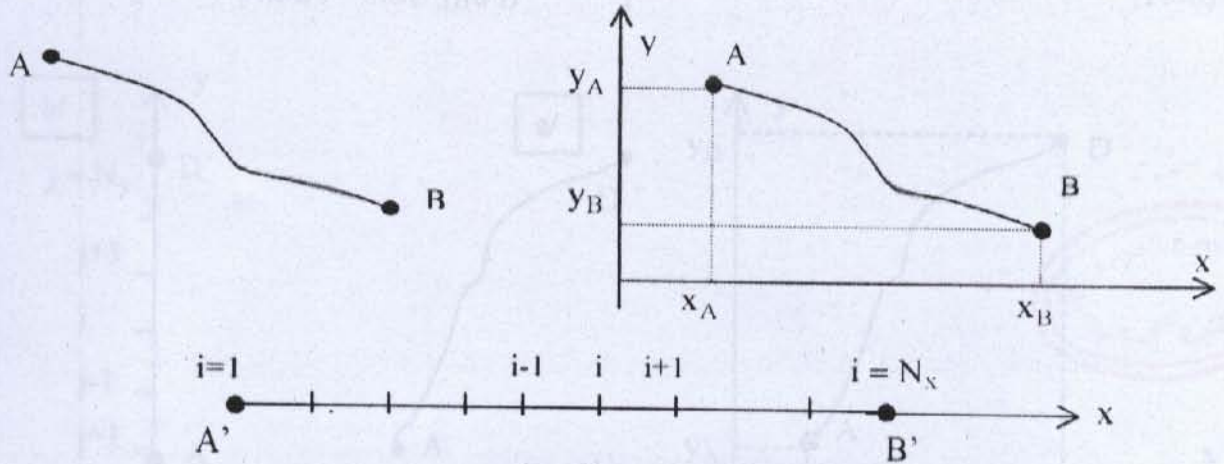
Dans ce qui suit, on suppose que les fonctions des cotés choisies du domaine sont univoques. Considérons les cotés AB et CD. Les positions des points A, B, C et D sont données. On regarde ensuite ce qu'on divise le segment  $[x_A, x_B]$  en  $N_x$  nœuds pour déterminer les  $y_i$  ( $i=1,2,\dots, N_x$ ) correspondantes ou, de diviser le segment  $[y_A, y_B]$  en  $N_x$  nœuds puis déterminer les  $x_i$  ( $i=1,2,\dots, N_x$ ). Pour prendre décision, on essaye de calculer les valeurs suivantes :

$$x_{dis} = |x_B - x_A| \quad ; \quad y_{dis} = |y_B - y_A| \tag{IV-1}$$

On calcul la valeur maximale entre  $x_{dis}$  et  $y_{dis}$  par :  $d_{max} = \text{Max}(x_{dis}, y_{dis})$  (IV-2)

Si  $d_{max} = x_{dis}$  : on propose les valeurs des  $x_i$  ( $i=1, 2, 3, \dots, N_x$ ) ensuite on détermine les  $y_i$  en utilisant la fonction qui passe par les points A et B du coté AB. Dans certain cas, pour prendre décision, il est mieux de voir encore si la fonction est donnée par  $y = f_{AB}(x)$  ou  $x = g_{AB}(y)$  pour ne pas calculer la fonction inverse.

On suppose qu'on a fait le choix des  $x_i$  ensuite calculer les  $y_i$ , alors, on divise le segment  $[x_A, x_B]$  en  $N_x$  nœuds dont les points A et B sont inclus.



**Fig. IV-4 :** Discretisation sur le côté AB.

Avec : A' et B' projections des points A et B respectivement sur l'axe horizontal des x.

Pour simplifier, on choisit un pas constant de subdivision et si le côté est courbé au voisinage du point A ou B ou n'importe quelle région, il est recommandé d'utiliser une procédure de *condensation des nœuds*, dont on propose sa procédure dans un prochain paragraphe. On obtient, par conséquent  $(N_x - 1)$  sous intervalles. La longueur de chaque intervalle est donnée par :

$$\Delta x_{AB} = \frac{|x_B - x_A|}{(N_x - 1)} \tag{IV-3}$$

Les abscisses des points de ce côté sont données par :

$$x_{AB}(i) = x_A + (i-1)\Delta x_{AB} \quad i=1, 2, 3, \dots, N_x \tag{IV-4}$$

avec :

$$\begin{aligned} i=1 & \quad ; \quad x_{AB}(i=1) = x_A \\ i=N_x & \quad ; \quad x_{AB}(i=N_x) = x_B \end{aligned}$$

Les ordonnées des points sont données par :

$$y_{AB}(i) = F_{AB}(x_{AB}(i)) \quad i=1, 2, 3, \dots, N_x \tag{IV-5}$$

Où  $f_{AB}(x)$  : La fonction du côté AB supposée donner en coordonnées cartésiennes.

Concernons maintenant le côté CD et par analogie avec le côté AB, on aura le suivant en changeons uniquement A par D, B par C et  $f_{AB}(x)$  par  $f_{DC}(x)$ .

La génération des nœuds sur les contours AD et BC se fait de la même démarche que celle des côtés AB et DC. Ici suivant la disposition de ces côtés. Si  $x_A \neq x_D$  et  $x_D \neq x_C$  en plus les deux fonctions sont univoques, on peut suivre exactement la démarche précédente pour les côtés AB et DC. On aura :

$$\Delta x_{AD} = \frac{|x_D - x_A|}{(N_y - 1)}$$

$$\left. \begin{aligned} x_{AD}(j) &= x_A + (j-1)\Delta x_{AD} \\ y_{AD}(j) &= F_{AD}(x_{AD}(j)) \end{aligned} \right\} \quad j=1, 2, 3, \dots, N_y \quad (IV-6)$$

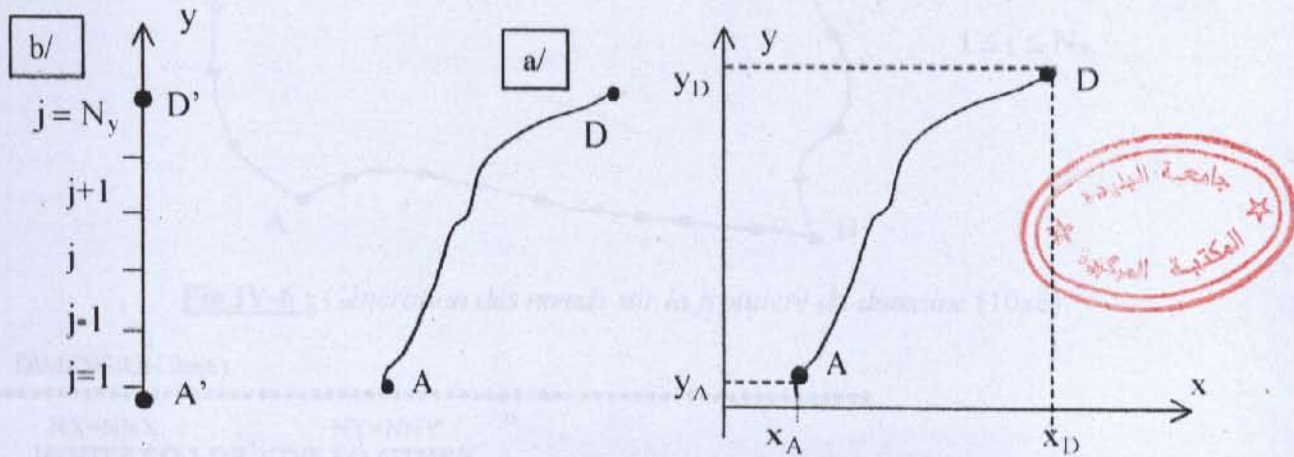


Fig. IV-5 a,b : Discretisation sur le coté AD

Mais si  $x_A = x_D$ , l'algorithme (IV-6) ne marche plus et on procede comme suit.

On divise le segment  $[y_A, y_D]$  en  $N_y$  nœuds dont les points A et D sont inclus comme le montre la figure IV-5b. Avec:  $A'$  et  $D'$  sont projections des points A et D sur l'axe des ordonnées.

Alors: 
$$\Delta y_{AD} = \frac{|y_D - y_A|}{(N_y - 1)} \quad (IV-7)$$

Les coordonnées des points de ce coté sont données par :

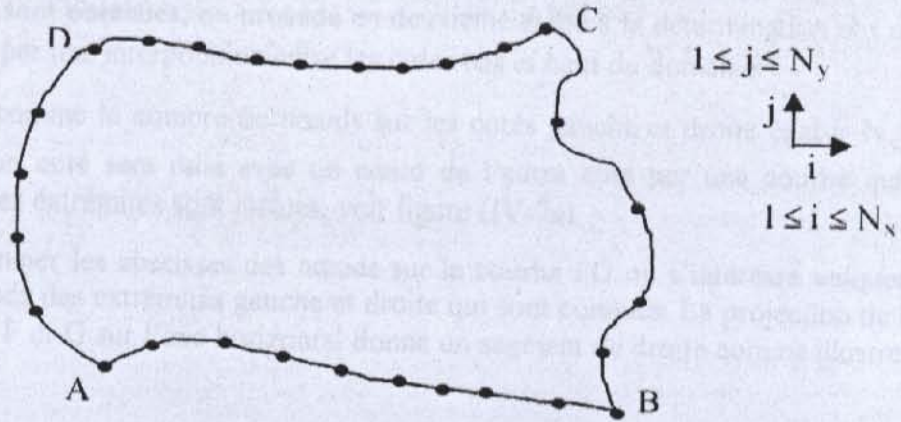
$$\left. \begin{aligned} y_{AD}(j) &= y_A + (j-1)\Delta y_{AD} \\ x_{AD}(j) &= F_{AD}^{-1}(y_{AD}(j)) \end{aligned} \right\} \quad j=1, 2, 3, \dots, N_y \quad (IV-8)$$

avec :  $f_{AD}^{-1}(y)$ : la fonction inverse du coté AD.

Pour déterminer la racine de la fonction inverse si  $f_{AD}(y)$  est implicite on utilise l'algorithme de Dichotomie par exemple (ou de Newton).

Après qu'on génère les nœuds sur la frontière on obtient le schéma de la figure (IV-6). On note ici que, entre chaque deux nœuds successifs sur un coté on assimile la courbure de la frontière à un segment de droite. L'exemple suivant sur cette figure est pour  $N_x = 10$  et  $N_y = 6$ .

Finalement, Il est à noter aussi qu'on a fait le stockage des positions des nœuds de frontière dans les vecteurs uni-colonnes  $X(NNT)$  et  $Y(NNT)$  par la position 'L' et non des matrices à deux colonnes, tel que l'algorithme déterminant ces positions en fonction des vecteurs de quatre cotés est présenté comme suivant :



**Fig.IV-6 :** Génération des nœuds sur la frontière du domaine (10x6)

```

DIMENSION nn(6)
C *****
  NX=NNX      ;      NY=NNY
  IF(NTEF.EQ.3.OR.NTEF.EQ.6)THEN
    NX=2*NNX-1 ;      NY=2*NNY-1
  ENDIF
  nn(1)=NX                ;      nn(2)=(3*NX)-2
  nn(3)=(NX)              ;      nn(4)=(NX)
  nn(5)=(2*NX)-1         ;      nn(6)=(NX)
  lpas=1
  IF(NTEF.EQ.3.OR.NTEF.EQ.6) lpas=2 ! le pas de la boucle
C *****
C  REMPLISSAGES DES POSITIONS DES COTES DANS LES VECTEURS X ET Y.
C  LES COTES BASSES ET HAUTES DANS LES COTE1 ET COTE3
DO 123 I=1, NX
  X(I)=XCOTE1(I) ;      Y(I)=YCOTE1(I)
  ICL(I)=1
  L=(NY-1)*nn(NTEF)+1
  IF(NTEF.EQ.6) L=(NY-1)*nn(NTEF)-NEL+I
  ICL(L)=1
  X(L)=XCOTE3(I) ;      Y(L)=YCOTE3(I)
123 CONTINUE
C  LES COTES GAUCHE ET DROITE DANS COTE2 ET COTE4
DO 124 J=2, NY-1
  L=(J-1)*nn(NTEF)+1
  IF(NTEF.EQ.6) L=(j-1)*nn(NTEF)+1-((NNX-1)*((j+1)/2-1))
  X(L)=XCOTE4(J) ;      Y(L)=YCOTE4(J)
  ICL(L)=1
  L=(J-1)*nn(NTEF)+NX
  IF(NTEF.EQ.6) L=(j)*nn(NTEF)-((NNX-1)*((j+2)/2-1))
  X(L)=XCOTE2(J) ;      Y(L)=YCOTE2(J)
  ICL(L)=1
124 CONTINUE

```

**IV-3-1-2 GENERATION DES NŒUDS INTERNES POUR MAILLAGE DE TYPE 'H'**

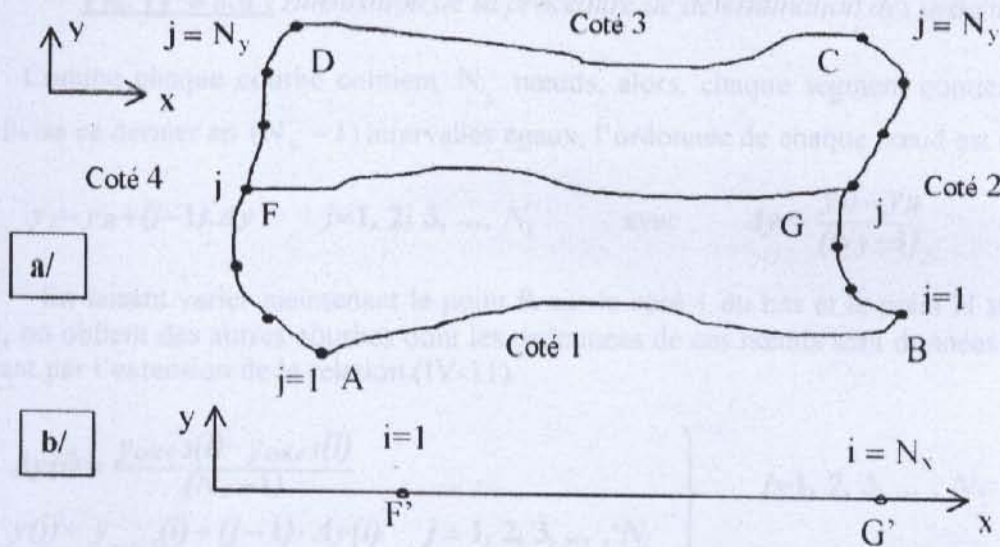
Après qu'on a déterminé les positions des nœuds de la frontière du domaine, on procède maintenant à la présentation de la méthode développée pour la génération des nœuds internes. Le maillage obtenu pour cette partie est de type 'H'.

On obtient des petites cellules ou domaines de formes quadrilatères. Chaque nœud est caractérisé par deux valeurs (x, y) qui permet de déterminer sa position dans le domaine. La procédure qu'on présente, est divisée en deux étapes. La première consiste à déterminer les abscisses  $x_i$  de tous les points, et cela par une interpolation entre les cotés gauche et droite. Une

fois les abscisses sont obtenues, on procède en deuxième étape à la détermination des ordonnées  $y_i$  de ces nœuds par une interpolation entre les cotés bas et haut du domaine.

En effet, comme le nombre de nœuds sur les cotés gauche et droite égal à  $N_y$ , alors, à chaque nœud d'un côté sera relié avec un nœud de l'autre côté par une courbe qui contient  $N_x$  nœuds, dont les extrémités sont incluses, voir figure (IV-7a)

Pour déterminer les abscisses des nœuds sur la courbe FG on s'intéresse uniquement aux abscisses des nœuds des extrémités gauche et droite qui sont connues. La projection de la courbe reliant les points F et G sur l'axe horizontal donne un segment de droite comme illustre la figure suivante (IV-7b) :



**Fig. IV-7 a,b :** Illustration de la procédure de détermination des abscisses

Où :  $F'$  et  $G'$  sont les projections respectivement des points F et G.

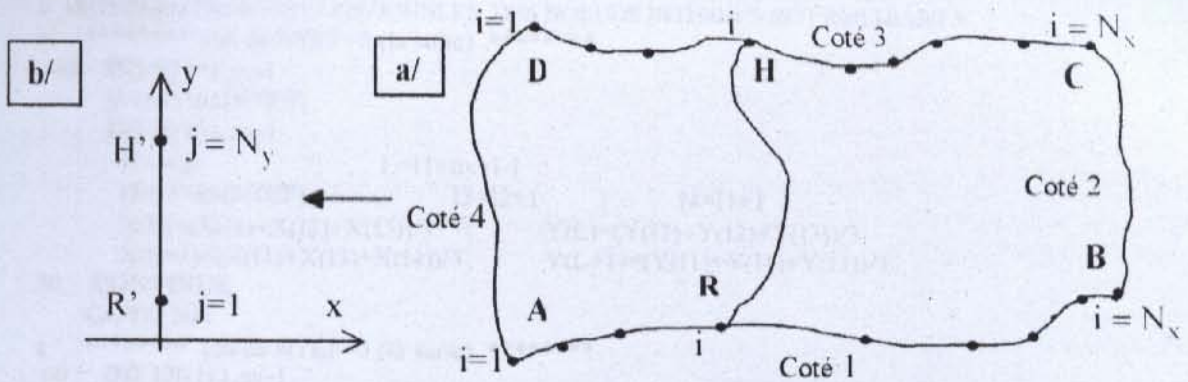
En divisant le segment  $F'G'$  en  $N_x$  points dont ceux des extrémités sont inclus, on obtient par conséquent  $(N_x - 1)$  intervalles égaux. L'abscisse de chaque point sur cet intervalle ( et par suite sur la courbe FG ) est obtenue par :

$$x_i = x_F + (i - 1) \cdot \Delta x \quad i = 1, 2, 3, \dots, N_x \quad \text{avec :} \quad \Delta x = \frac{x_G - x_F}{(N_x - 1)} \quad (IV-9)$$

En faisant varier le point F sur le côté gauche de point A jusqu'au point D et de même pour le point G du côté droite, on passe du point B jusqu'au point C, on obtient les abscisses des nœuds d'autres courbes en faisant l'extension de la relation (IV-9) par :

$$\left. \begin{aligned} \Delta x(j) &= \frac{x_{\text{coté } 2}(j) - x_{\text{coté } 4}(j)}{(N_x - 1)} \\ x(i) &= x_{\text{coté } 4}(j) + (i - 1) \cdot \Delta x(j) \quad i = 1, 2, 3, \dots, N_x \end{aligned} \right\} \quad j = 1, 2, 3, \dots, N_y \quad (IV-10)$$

La deuxième étape consiste à déterminer les ordonnées des nœuds internes en utilisant par conséquent l'interpolation linéaire entre le côté 3 du haut et le côté 1 du bas (voir figure IV-8a). La projection de la courbe reliant les points H et R sur l'axe vertical des y donne un segment de droite. Avec  $R'$  et  $H'$  sont les projections respectivement des points R et H sur l'axe des ordonnées (voir figure IV-8b).



**Fig. IV-8 a,b :** Illustration de la procédure de détermination des ordonnées

Comme chaque courbe contient  $N_y$  nœuds, alors, chaque segment contient  $N_y$  nœuds. On divise ce dernier en  $(N_y - 1)$  intervalles égaux, l'ordonnée de chaque nœud est donnée par :

$$y_j = y_R + (j-1) \cdot \Delta y \quad j=1, 2, 3, \dots, N_y \quad \text{avec :} \quad \Delta y = \frac{y_H - y_R}{(N_y - 1)} \quad (IV-11)$$

En faisant varier maintenant le point R sur le coté 1 du bas et le point H sur le coté 3 du haut, on obtient des autres courbes dont les ordonnées de ces nœuds sont données par le système suivant par l'extension de la relation (IV-11).

$$\left. \begin{aligned} \Delta y(i) &= \frac{y_{\text{coté 3}}(i) - y_{\text{coté 1}}(i)}{(N_y - 1)} \\ y(j) &= y_{\text{coté 1}}(i) + (j-1) \cdot \Delta y(i) \quad j=1, 2, 3, \dots, N_y \end{aligned} \right\} \quad i=1, 2, 3, \dots, N_x \quad (IV-12)$$

Finalement, les relations (IV-10) et (IV-12) déterminent rapidement les positions des nœuds internes du maillage qui représentent les sommets des éléments finis obtenus, or pour les positions des nœuds des milieux des côtés et aux centres des surfaces des éléments finis, on a développé -pour le calcul de leurs positions- des corrélations en fonction des coordonnées des sommets de chaque élément fini et en fonction de son type qui soit triangulaire à 3, 4... nœuds ou quadrilatère à 4, 5... nœuds. De la, on montre dans la suite ces relations selon chaque cas (type d'élément fini) avec les affectations directes dans les vecteurs coordonnées X et Y par une partie du programme de la sous-routine **SUITGEOM**. Tel qu'on a fait le stockage des positions de ces nœuds internes dans les vecteurs uni-colonnes X(NNT) et Y(NNT) par la position 'L' et non des matrices à deux colonnes, comme indiqué précédemment pour les nœuds de frontières.

**c** DETERMINATION DE COORDONNEES DES NOEUDS DES SOMMETS INTERNES

```
GOTO (10,10,10,10,10,200) NTEF
```

**c** \*\*\*\*\* cas de NTEF=1 ou =3 ou =4 et une partie de 2 et 5 \*\*\*\*\*

```
10 DO 30 J=2, NY-1
    DXJ=(XCOTE2(J)-XCOTE4(J))/(NX-1)      ; JJ=(J-1)*nn(NTEF)
    DO 30 I=2, NX-1
        DYI=(YCOTE3(I)-YCOTE1(I))/(NY-1)
        L=JJ+I
        X(L)=XCOTE4(J)+(I-1)*DXJ
30   Y(L)=YCOTE1(I)+(J-1)*DYI
    IF(NTEF.EQ.2) GOTO 40
    IF(NTEF.EQ.3) GOTO 250
    IF(NTEF.EQ.5) GOTO 60
    GOTO 500
```



c DETERMINATION DE COORDONNEES DES NOEUDS INTERNES INTERMEDIAIRES

c \*\*\*\*\* cas de NTEF=2 (la suite) \*\*\*\*\*

```

40 DO 50 j=1,ny-1
    jj=(j-1)*nn(NTEF)
    DO 50 i=1,nx-1
        I1=i+jj ; L=I1+nx+i-1
        I2=I1+nn(NTEF) ; I3=I2+1 ; I4=I1+1
        X(L)=(X(I1)+X(I2)+X(I3))/3. ; Y(L)=(Y(I1)+Y(I2)+Y(I3))/3.
        X(L+1)=(X(I1)+X(I3)+X(I4))/3. ; Y(L+1)=(Y(I1)+Y(I4)+Y(I3))/3.
    
```

50 CONTINUE

GOTO 500

c \*\*\*\*\* cas de NTEF=5 (la suite) \*\*\*\*\*

```

60 DO 120 j=1,ny-1
    jj=(j-1)*nn(NTEF)
    DO 120 i=1,nx-1
        I1=i+(jj) ; I2=I1+1 ; L=I1+nx ; I3=L+nx-1 ; I4=I3+1
        X(L)=(X(I1)+X(I2)+X(I3)+X(I4))/4.
        Y(L)=(Y(I1)+Y(I2)+Y(I3)+Y(I4))/4.
    
```

120 GOTO 500

c \*\*\*\*\* les sommets --- cas de NTEF=6 \*\*\*\*\*

```

200 DO 210 J=3, NY-1, Ipas
    DXJ=(XCOTE2(J)-XCOTE4(J))/(NX-1) ; JJ=(J-1)*nn(NTEF)-((NNX-1)*((j+1)/2+1))
    DO 210 I=2, NNX-1
        II=2*I-1 ; DYI=(YCOTE3(ii)-YCOTE1(ii))/(NY-1)
        L=JJ+ii
        X(L)=XCOTE4(J)+(I-1)*DXJ*2 ; Y(L)=YCOTE1(ii)+(J-1)*DYI
    
```

210 CONTINUE

c \*\*\*\*\* Les noeuds internes intermediaires NTEF=6 \*\*\*\*\*

```

DO 240 J=2, NY-1
    JJ=(J-1)*nn(NTEF)-((NNX-1)*((j+1)/2-1))
    IF(MOD(j,2).NE.0) GOTO 220
    DO 215 I=2, NNX-1
        II=2*I-1 ; L=JJ+I ; L1=JJ-NX+ii ; L2=L1+2*nx-(NNX-1)
        X(L)=(X(L1)+X(L2))/2. ; Y(L)=(Y(L1)+Y(L2))/2.
    
```

215 CONTINUE

GOTO 240

```

220 DO 230 I=2, NX-1, Ipas
    L=JJ+I
    X(L)=(X(L-1)+X(L+1))/2. ; Y(L)=(Y(L-1)+Y(L+1))/2.
    
```

230 CONTINUE

240 CONTINUE

GOTO 500

c \*\*\*\*\* cas de NTEF=3 (la suite) \*\*\*\*\*

c Les noeuds internes intermediaires

```

250 DO 300 J=2, NY-1 ; JJ=(J-1)*nn(NTEF)
    IF(MOD(j,2).NE.0) GOTO 280
    DO 260 I=2, NX-1
        L=JJ+I ; L1=L-NX-1 ; L2=L1+2*nx+2
        IF(MOD(i,2).EQ.0) THEN
            X(L)=(X(L1)+X(L2))/2. ; Y(L)=(Y(L1)+Y(L2))/2.
        ELSE
            X(L)=(X(L1+1)+X(L2-1))/2. ; Y(L)=(Y(L1+1)+Y(L2-1))/2.
        ENDIF
    
```

260 CONTINUE

GOTO 300

```

280 DO 290 I=2, NX-1, Ipas
    L=JJ+I
    X(L)=(X(L-1)+X(L+1))/2. ; Y(L)=(Y(L-1)+Y(L+1))/2.
    
```

290 CONTINUE

300 CONTINUE

GOTO 500

Les figures qui illustrent les nœuds indicés par L, 11, 12, 13... sont similaires à celles qui seront montrées dans le prochain paragraphe (IV-3-1-3) selon les types des éléments finis.

**Remarques**

Une fois, on s'intéresse à un raffinement du maillage dans une région qui contient un fort gradient, on peut utiliser la procédure de condensation des nœuds présentée dans le paragraphe IV-3-2, ou bien utiliser encore l'option de filtrage des nœuds internes présentée dans le paragraphe IV-3-4.

Des exemples sur la génération des maillages sur différents domaines simplement connexes (et multi-connexes) ainsi que pour différentes discrétisations avec et sans procédure de condensation, seront présentées dans la première partie du chapitre des résultats (VI).

Le prochain paragraphe traite la connexion des éléments finis (en fonction de leur type).

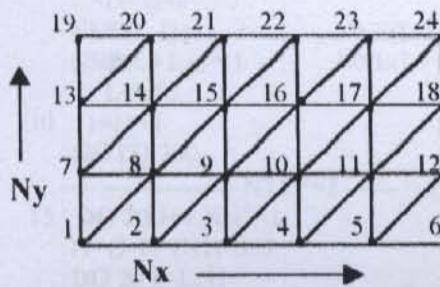
**IV-3-1-3/ CONNEXION DES ELEMENTS DU MAILLAGE TYPE 'H'**

Après avoir faire la discrétisation type H du domaine en petits éléments, on obtient un ensemble de nœuds et d'éléments finis quadrilatères. Pour avoir les éléments triangulaires, on procède à la division de chaque élément quadrilatère en deux sous éléments triangulaires comme le montre la figure III-6 du paragraphe III-7-2.

Chaque élément a sa propre matrice de rigidité  $[K^{(e)}]$  et son vecteur force  $\{f^{(e)}\}$ . Le problème consiste à faire l'assemblage de ces matrices élémentaires pour obtenir celle du domaine complet, où le principe est donné dans le paragraphe § III-9 du chapitre (III). Pour arriver aux résultats, il faut connaître les numéros globaux des nœuds locaux de chaque élément. Pour cela, on déclare une matrice de connexion d'ordre  $(NEL \times NNPE)$  pour les éléments obtenus qui ont NNPE nœuds. On désigne cette matrice par NNE.

On note que la numérotation optée est donnée selon la condition que la largeur de la demi-bande soit minimale pour le stockage type Matrice bande ou une numérotation quelconque pour le stockage type Matrice creuse (complexe). Le problème de l'influence de cette numérotation sera exposé en détaille au prochain chapitre lorsqu'on aborde le problème de stockage.

Dans la suite, on donne un exemple de numérotation d'un maillage rectangulaire de dimension  $Nx \times Ny = 6 \times 4$ , qui a des éléments triangulaires à trois nœuds (T3N). La matrice NNE(NEL,3) sera rempli de la façon suivante, tel que la numérotation interne d'élément est de direction anti-horaire :



**Fig.IV-9 a:** Discrétisation en éléments triangulaires et numérotation des nœuds



**Fig.IV-9 b:** Numérotation des éléments

Afin de voir plus sur la numérotation, des exemples d'illustrations sur les numérotations globales d'un domaine type 'H' seront montrées dans le chapitre V au paragraphe V-3-2 dans les figures (V-9a, 9b et 9c ).

NEL	NNE(NEL, 3)		
	1	2	3
1	1	8	7
2	1	2	8
3	2	9	8
4	2	3	9
5	3	10	9
6	3	4	10
7	4	11	10
8	4	5	9
9	5	6	11
10	6	12	11
11	7	14	13
12	7	8	14
13	8	15	14
14	8	9	15
15	9	16	15
16	9	10	16
17	10	17	16
18	10	11	17
19	11	18	17
20	11	12	18
...	...	...	...

Tableau IV-1 : Remplissage de la matrice NNE(NEL,3)

Les trois valeurs de chaque ligne du vecteur NNE(NEL,3) représentent les numéros des lignes et des colonnes de la matrice de rigidité globale du domaine complet avant l'introduction des conditions aux limites. Par exemple pour la ligne 14, on a l'élément triangulaire numéro 14 a les trois nœuds de numéros 8, 9 et 15 dans le sens anti-horaire. Autrement dit, le nœud local 1 de ce triangle est égale à 8 global du domaine. On peut prendre le nœud local 1 égale à 9 ou 15, mais il faut que les trois numéros permutent dans le sens anti-horaire.

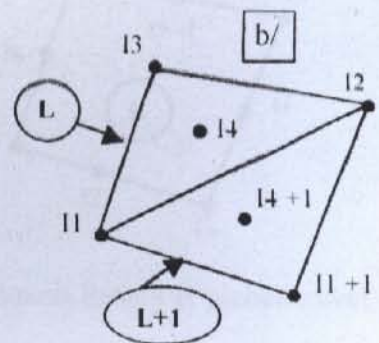
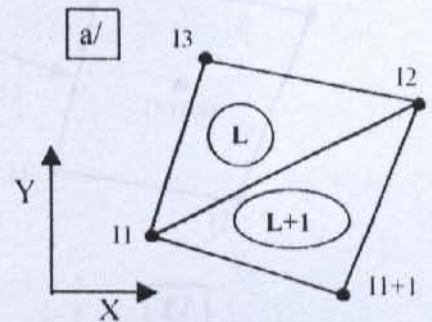
Si la numérotation des nœuds est aléatoire, le remplissage de cette matrice sera d'une façon manuel, vu l'inexistence d'une formule de récurrence.

Dans le cas général pour tous les types d'éléments fini, on propose le programme suivant permettant le remplissage du vecteur NNE(NEL,NNPE), en donnant uniquement le nombre de nœuds  $N_x$  et  $N_y$  (noté par NNX et NNY) et le type NTEF. Pour plus d'illustration, ajoutons les figures correspondantes.

```

L=1
N1=mx-1
N2=mx+1
GOTO (5,15,25,35,45,55), NTEF
c ----- NTEF=1 ----- = (T3N) -----
5 DO 10 J=1,NNY-1
  I1=(J-1)*(N1)+J
  DO 10 I=1,N1
    I2=I1+N2
    I3=I2-1
    NNE(L,1)=I1      ;   NNE(L,2)=I2      ;   NNE(L,3)=I3
    NNE(L+1,1)=I1   ;   NNE(L+1,2)=I1+1  ;   NNE(L+1,3)=I2
    L=L+2
10 I1=I1+1
GOTO 700
c ----- NTEF=2 ----- = (T4N) -----
15 DO 20 J=1,NNY-1
  I1=(J-1)*(N1)*3+J
  DO 20 I=1,N1
    I2=I1+N2+(N1)*2
    I3=I2-1      ;   I4=N1+I1+1
    NNE(L,1)=I1  ;   NNE(L,2)=I2
    NNE(L,3)=I3  ;   NNE(L,4)=I4
    NNE(L+1,1)=I1 ;   NNE(L+1,2)=I1+1
    NNE(L+1,3)=I2 ;   NNE(L+1,4)=I4+1
    L=L+2
20 I1=I1+1
GOTO 700
    
```

Fig. IV-10 (a,b,c,d,e & f) connexion type 'H'



c ----- NTEF=3 ----- = (T6N) -----

25 n3=4\*NNX-2

n4=2\*NNX

DO 30 J=1,NNY-1

I1=(J-1)\*(n3)+1

DO 30 I=1,N1

I2=I1+n4 : I3=I2+n4

I4=I3-1 : I5=I4+1

I6=I2-1

NNE(L,1)=I1 : NNE(L,2)=I3

NNE(L,3)=I5 : NNE(L,4)=I2

NNE(L,5)=I4 : NNE(L,6)=I6

NNE(L+1,1)=I1 : NNE(L+1,4)=I1+1

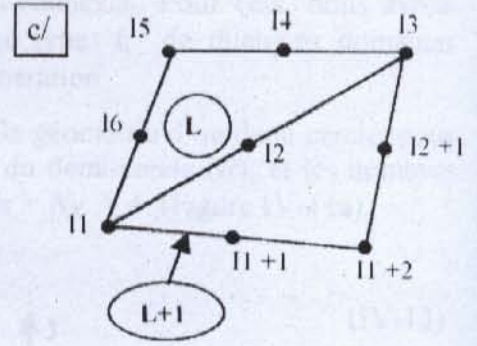
NNE(L+1,2)=I1+2 : NNE(L+1,5)=I2+1

NNE(L+1,3)=I3 : NNE(L+1,6)=I2

L=L+2

30 I1=I1+2

GOTO 700



c ----- NTEF=4 ----- = (Q4N) -----

35 L=1

DO 40 J=1,NNY-1

I1=(J-1)\*(N1)+J

I2=I1+1

DO 40 I=1,N1

I3=I1+N2

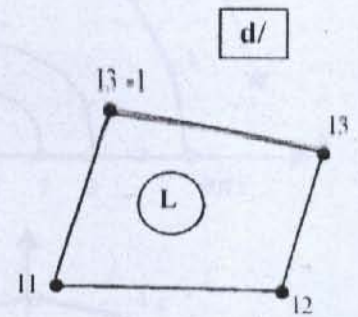
NNE(L,1)=I1 : NNE(L,2)=I2

NNE(L,3)=I3 : NNE(L,4)=I3-1

L=L+1 : I1=I1+1

40 I2=I1+1

GOTO 700



c ----- NTEF=5 ----- = (Q5N) -----

45 n3=2\*N1

DO 50 J=1,NNY-1

I1=(J-1)\*(n3)+J : I2=I1+1

DO 50 I=1,N1

I3=I1+2\*NNX

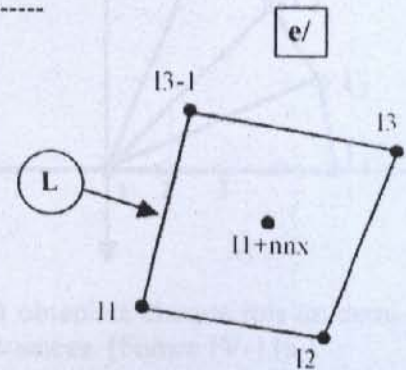
NNE(L,1)=I1 : NNE(L,2)=I2

NNE(L,3)=I3 : NNE(L,4)=I3-1

NNE(L,5)=I1+NNX : I1=I1+1

50 I2=I1+1

GOTO 700



c ----- NTEF=6 ----- = (Q8N) -----

55 n3=(3\*NNX-1)

DO 60 J=1,NNY-1

I1=(J-1)\*(n3)+1 : I2=I1+1

DO 60 I=1,N1

I3=I1+2 : I4= I1+2\*NNX-(I-1)

I5=I1+3\*NNX+1 : I8= I1+2\*NNX-1-(I-1)

NNE(L,1)=I1 : NNE(L,5)=I2

NNE(L,2)=I3 : NNE(L,6)=I4

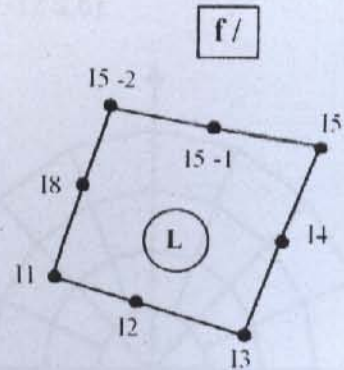
NNE(L,3)=I5 : NNE(L,7)=I5-1

NNE(L,4)=I5-2 : NNE(L,8)=I8

L=L+1

I1=I1+2 : I2=I1+1

60 CONTINUE



Rappelant que le principe de ces correspondances entre les nœuds locaux et globaux avec un tableau est montré au paragraphe III-9 (tableau N°3).

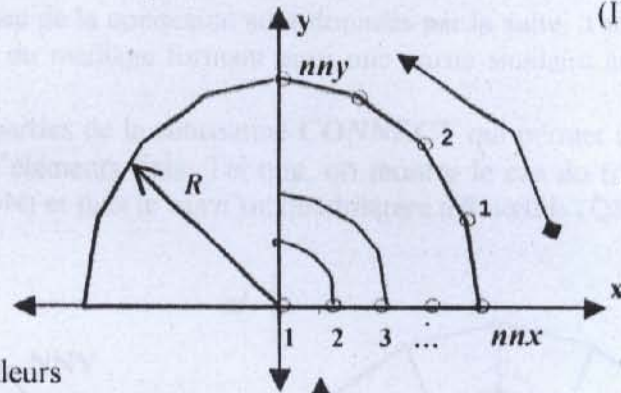
IV-3-1-4/ GENERATION DES NŒUDS POUR UN MAILLAGE DE TYPE 'C'

L'intérêt de faire appelle à des méthodes de génération automatique est indispensable, puisque le domaine de notre étude est simplement et multi-connexes. Pour cela, nous avons adapté la méthode suivante pour la génération du maillage type 'C' de quelques domaines simplement connexes qui se comporte bien avec ce type de génération.

Nous allons illustrer la procédure sur une demi-partie de la géométrie d'un demi cercle, pour raison de symétrie. On donne alors en premier lieu le rayon du demi-cercle ( $R$ ), et les nombres de subdivision ( $N_x, N_y$ ). Prennent l'exemple suivant pour :  $N_x = N_y = 4$ . (Figure IV-11a). La procédure consiste premièrement à déterminer  $dr$  et  $d\Gamma$  :

$$\left. \begin{aligned} dr &= R / N_x \\ d\Gamma &= \text{teta} / (2.N_y - 1) \end{aligned} \right\} \quad (IV-13)$$

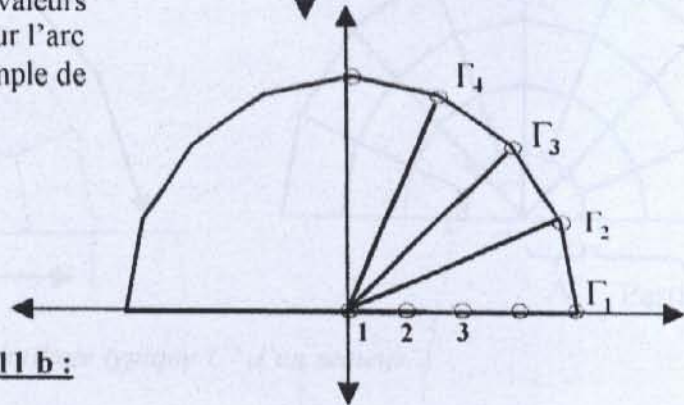
**Fig. IV-11 a :** *Discretisation d'un maillage type 'C'*



Puis, on procède à la détermination des valeurs des angles  $\Gamma(i)$  situés entre les nœuds sur l'arc limité entre les arêtes du secteur (l'exemple de domaine demi-cercle), (Figure IV-11b).

Par :

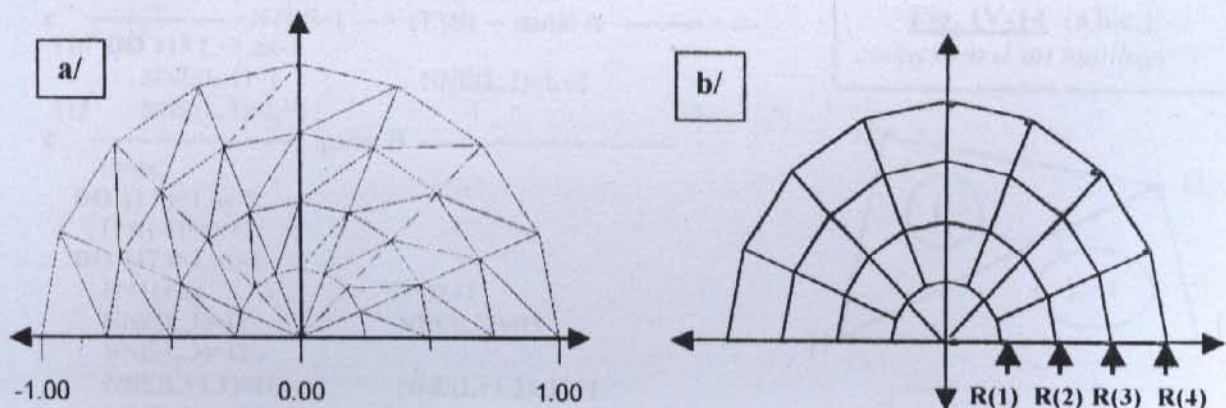
$$\Gamma(i) = (i-1).d\Gamma \quad i=1,2,3,\dots,2.N_y$$



**Fig. IV-11 b :**

Puis, on divise le rayon et on le fait varié d'une façon à obtenir à chaque fois un demi-cercle, autour du point de centre de l'intersection des axes de coordonnées. [Figure IV-11a].

En combinant entre les étapes précédentes, et avec un réarrangement des nœuds, nous obtenons finalement la discretisation de notre géométrie, voir figure (IV-12 a,b).



**Fig. IV-12 a,b :** *Illustration d'un maillage final type 'C'*

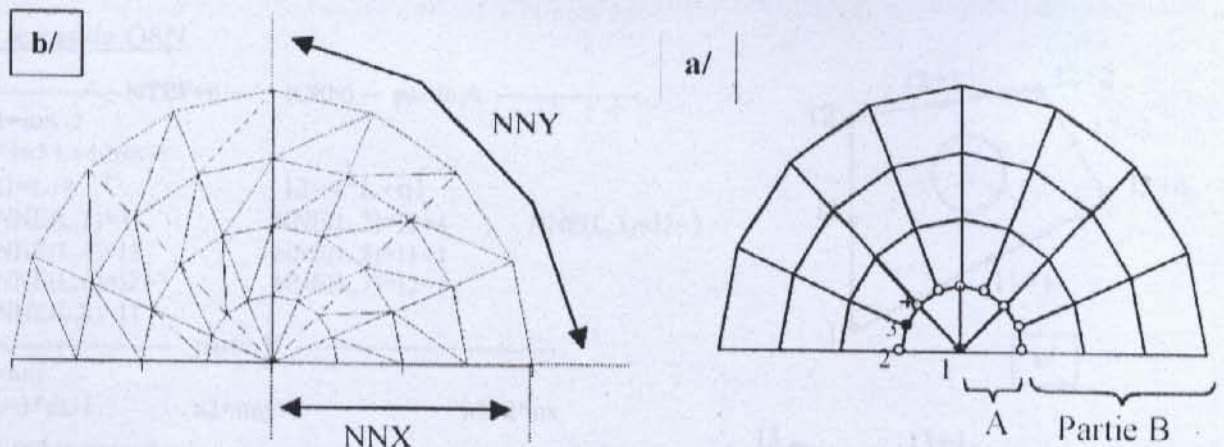
Finalement, pour obtenir des éléments triangulaires on découpe chaque cellule rectangulaire en deux éléments.

**IV-3-1-5/ CONNEXION DES ELEMENTS DU MAILLAGE TYPE 'C'**

Afin d'assembler les matrices de rigidité élémentaires et de permettre la résolution du système d'équations obtenu par discrétisation en éléments finis, on procède à la connexion des éléments du maillage considéré. Similaire au cas du maillage 'H', on considère la matrice de connexion NNE d'ordre  $(NEL \times NNPE)$  qu'il faut remplir, voir l'annexe E pour les symboles.

Pour cela, considérons le cas d'un domaine secteur, voir la figure IV-13. L'idée de la procédure de connexion des maillages type 'C' est de subdiviser la région en deux parties A et B, tel que la partie A constitue tous les éléments liés au nœud '1' de l'intersection des arêtes du secteur, où les expressions du récurrence de la connexion sont données par la suite. Tandis que la partie B englobe les éléments restants du maillage formant ainsi une partie similaire au maillage 'H'.

Dans la suite on donne quelques parties de la sous-routine **CONNECT** qui permet de charger la matrice NNE pour tous les types d'éléments finis. Tel que, on montre le cas du triangle à 3 nœuds (T3N) et triangle à 6 nœuds (T6N) et puis le cas d'un quadrilatère à 8 nœuds (Q8N).



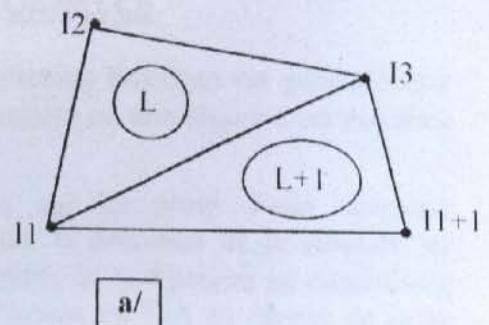
**Fig. IV-13 a,b :** Maillage typique 'C' d'un secteur

Pour le cas de T3N

```

c ***** CONNEXION D'UN SECTEUR CIRCULAIRE *****
100 nx=2*NNY-1
    ny=NNX
    GOTO (110,120,130,140,150,160), NTEF
c ----- NTEF=1 --- = (T3N) -- partie A -----
110 DO 115 L=1,nx-1
    NNE(L,1)=1 : NNE(L,2)=L+2
115 NNE(L,3)=L+1
c ----- partie B -----
    L=nx
    DO 117 j=1,ny-1
    11=(j-1)*nx+2
    DO 117 i=1,nx-1
    12=11+nx : 13=12+1
    NNE(L,1)=11 : NNE(L,2)=13
    NNE(L,3)=12
    NNE(L+1,1)=11 : NNE(L+1,2)=11+1
    NNE(L+1,3)=13 ; L=L+2
117 11=11+1
    GOTO 700
    
```

**Fig. IV-14 (a,b,c) :** connexion d'un maillage 'C'



Pour le cas de T6N

c ----- NTEF=3 --- = (T6N) -- partie A -----

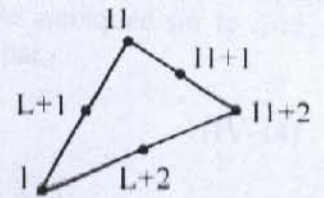
130 DO 135 L=1,nx-1

$I1 = nx + 2 * L$

$NNE(L,1) = 1$  ;  $NNE(L,2) = I1 + 2$  ;  $NNE(L,3) = I1$

$NNE(L,4) = L + 2$  ;  $NNE(L,5) = I1 + 1$

135 NNE(L,6) = L + 1



c ----- partie B -----

$L = nx$

$n1 = 4 * nx - 2$

$n2 = 2 * nx - 1$

DO 137 j=1,ny-1

$I1 = (j-1) * n1 + nx + 2$

DO 137 i=1,nx-1

$I2 = I1 + n2$  ;  $I3 = I2 + n2$  ;  $I4 = I3 + 2$

$NNE(L,1) = I1$  ;  $NNE(L,2) = I4$  ;  $NNE(L,3) = I3$

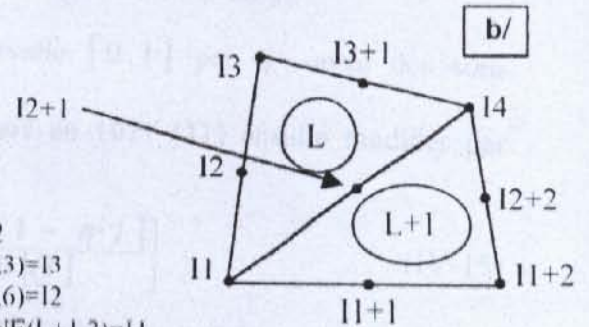
$NNE(L,4) = I2 + 1$  ;  $NNE(L,5) = I3 + 1$  ;  $NNE(L,6) = I2$

$NNE(L+1,1) = I1$  ;  $NNE(L+1,2) = I1 + 2$  ;  $NNE(L+1,3) = I4$

$NNE(L+1,4) = I1 + 1$  ;  $NNE(L+1,5) = I2 + 2$  ;  $NNE(L+1,6) = I2 + 1$

$L = L + 2$

137 I1 = I1 + 2



Pour le cas de Q8N

c ----- NTEF=6 --- = (Q8N) -- partie A -----

160 n1 = nny - 2

DO 165 L=1,nny-1

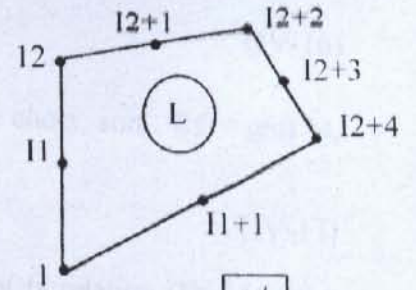
$I1 = L + 1$

$NNE(L,1) = 1$  ;  $NNE(L,2) = I2 + 4$  ;  $NNE(L,3) = I2 + 2$

$NNE(L,4) = I2$  ;  $NNE(L,5) = I1 + 1$

$NNE(L,6) = I2 + 3$  ;  $NNE(L,7) = I2 + 1$

165 NNE(L,8) = I1



c ----- partie B -----

$L = nny$

$n1 = 3 * nx - 1$  ;  $n2 = nny + 2$  ;  $n3 = 2 * nx$

DO 167 j=1,nny-1

$I1 = (j-1) * n1 + n2$

DO 167 i=1,nx-1

$I3 = I1 + n1$  ;  $I2 = I1 + n3 - i$

$NNE(L,1) = I1$  ;  $NNE(L,2) = I1 + 2$

$NNE(L,3) = I3 + 2$  ;  $NNE(L,4) = I3$

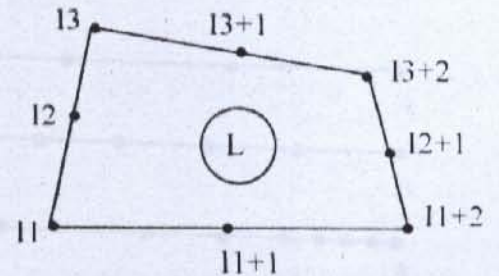
$NNE(L,5) = I1 + 1$  ;  $NNE(L,6) = I2 + 1$

$NNE(L,7) = I3 + 1$  ;  $NNE(L,8) = I2$

$L = L + 1$

167 I1 = I1 + 2

GOTO 700



IV-3-2/ FONCTION DE CONDENSATION UNIDIMENSIONNELLE

La fonction de condensation unidimensionnelle (stretching function) est généralement utilisée pour distribuer les points le long d'une frontière particulière où une région d'un domaine nécessite une résolution précise.

Par exemple, pour étudier un écoulement visqueux sur un profil d'aile nécessite l'introduction de cette fonction ou équivalente pour renforcer la précision de la solution au niveau de la surface du profil d'aile et par conséquent, les points de la frontière se condensent volontairement vers une région voulue. Le gradient de la solution est fort au niveau de cette région [31], [24].

Mathématiquement, il est intéressant d'introduire une variable indépendante dans la fonction pour la normalisation. Pour la fonction de condensation unidimensionnelle appliquée sur le côté EA dans la figure (IV-15), la variable indépendante normalisée est donnée par :

$$\eta^* = \frac{\eta - \eta_A}{\eta_E - \eta_A} \quad (IV-14)$$

avec :  $0 \leq \eta^* \leq 1$  et  $\eta_A \leq \eta \leq \eta_E$  Où :  $\eta$  peut représenter  $x$  ou  $y$ .

On peut même donner la distribution sur l'intervalle  $[0, 1]$  par  $\eta^*$  avec des sous intervalles égaux.

La fonction de condensation développée par Robert en 1971 [31] ensuite modifiée par Eisemann en 1979 est donnée par :

$$s = P \cdot \eta^* + (1 - P) \left[ 1 - \frac{\tanh [Q(1 - \eta^*)]}{\tanh [Q]} \right] \quad (IV-15)$$

Où :  $P$  et  $Q$  sont deux paramètres de contrôles de points de maillage.

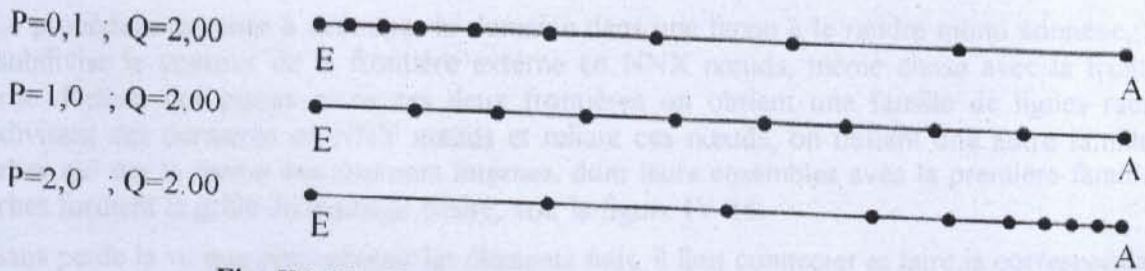
Si la valeur de  $P$  proche de l'unité, le deuxième membre de la formule se disparaît rapidement. Une fois 's' est obtenu, il est demandé de spécifier la distribution de  $x$  et  $y$ . Par exemple, définissons :

$$\frac{x - x_A}{x_A - x_E} = f(s) \quad ; \quad \frac{y - y_A}{y_A - y_E} = g(s) \quad (IV-16)$$

Ces formules génèrent  $x(s)$  et  $y(s)$  directement. On prend un simple choix, soit :  $f(s) = g(s) = s$ , tels que les relations (IV-16) donnent :

$$x = x_A + s \cdot (x_A - x_E) \quad ; \quad y = y_A + s \cdot (y_A - y_E) \quad (IV-17)$$

Des distributions typiques des points sur le segment EA en utilisant la relation (IV-15) pour différentes valeurs de  $P$  et  $Q$ , sont présentées sur la figure (IV-15) suivante :



**Fig. IV-15 :** Distribution des nœuds par condensation selon la relation (IV-15)

Pour des valeurs de  $P > 1,0$ , il est possible de condenser les nœuds vers le point A. De même, pour condenser les nœuds vers le point 'E', il suffit de prendre des valeurs de  $P$  Proche de zéro. On peut remarquer que si on choisit la fonction  $f(s) = 1 - s$ , on trouve la configuration inverse, c'est-à-dire, pour des valeurs de  $P > 1,0$  les points se condensent vers l'extrémité E au lieu de l'extrémité A.

On propose l'algorithme suivant permettant de positionner les nœuds sur le segment EA en utilisant la fonction de condensation (IV-15) :



LIRE N, P, Q, X<sub>E</sub>, X<sub>A</sub>

$$\Delta X = \frac{X_A - X_E}{(N-1)}$$

POUR I=1 JUSQU'À N

FAIRE

$$XX = X_E - (I-1) \Delta X$$

$$\eta^* = \frac{XX - X_A}{X_E - X_A}$$

$$S = P \times \eta^* + (1-P) \times \left[ 1 - \frac{\tanh \left[ Q(1-\eta^*) \right]}{\tanh [Q]} \right]$$

$$X(I) = X_A + S \times (X_E - X_A) \quad ; \quad Y(I) = F_{EA}(X(I))$$

FIN FAIRE

Où F<sub>EA</sub>(x) : La fonction de la courbure EA. Ici on a pris une ligne de droite (Fig. IV-15).

**IV-3-3/ CONFIGURATION MULTI-CONNEXES**

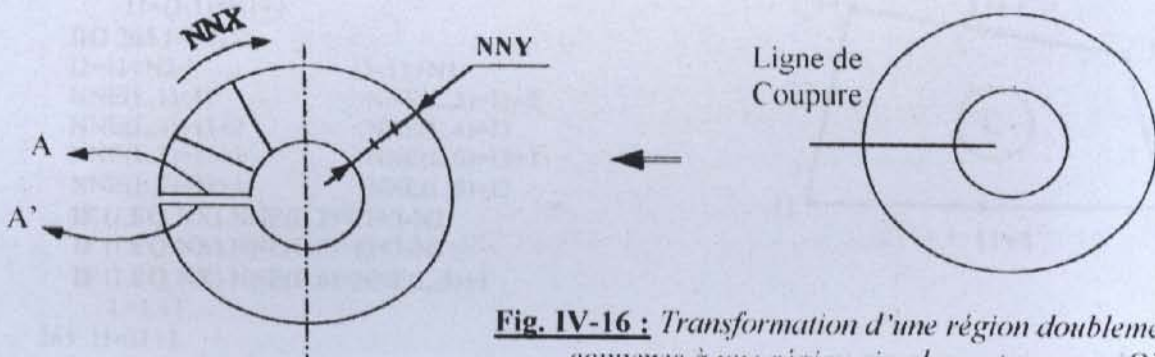
Dans cette partie on va entamer les procédures de génération des maillages pour les domaines multi connexes, en traitant les maillages type 'O' puis celles générer par coupure.

**IV-3-3-1/ GENERATION DES NŒUDS INTERNES POUR UN DOMAINE DOUBLEMENT CONNEXES DE TYPE 'O'**

Nous avons déjà cité dans l'aspect physique les différentes régions topologiques que l'on peut rencontrer et parmi lesquelles on trouve les régions doublement connexes. L'exemple le plus typique est l'écoulement dans une conduite ayant un obstacle interne. En outre, on peut citer aussi l'écoulement externe autour d'un ou plusieurs obstacles comme dans le cas des ailettes d'une hélice ou les parties constituant les ailes (le bec, le bord de fuite...).

La procédure consiste à découper le domaine dans une façon à le rendre mono connexe, puis on subdivise le contour de la frontière externe en NNX nœuds, même chose avec la frontière interne. Reliant ces points entre ces deux frontières on obtient une famille de lignes radiale. Subdivisant ces dernières en NNY nœuds et reliant ces nœuds, on obtient une autre famille de courbes qui ont la forme des contours internes, dont leurs ensembles avec la première famille de courbes forment la grille du maillage désiré, voir la figure IV-16.

Sans perdre la vue que pour obtenir les éléments finis, il faut connecter et faire la correspondance entre les nœuds obtenus, et aussi bien les nœuds des côtes A et A' tel que, il faut les superposer et contrôler leurs connexions, (voir la figure suivante et le paragraphe de la connexion du maillage type 'O').



**Fig. IV-16 :** Transformation d'une région doublement connexes à une région simplement connexe 'O'.

Pour adapter le maillage au comportement de la solution du problème physique connu par une étude qualitative du modèle d'équations d'origine expérimentale ou théorique, il faut utiliser l'option de filtrage des nœuds du domaine.

**IV-3-3-2/ CONNEXION DES ELEMENTS DU MAILLAGE TYPE 'O'**

La connexion pour ce type de maillage se fait dans la première phase comme étant un maillage type 'H' après la découpeure du domaine, puis dans une autre phase on relie les points des éléments situant entre les lignes de découpe obtenant ainsi la connexion complète d'un maillage O.

Dans la suite, on donne un exemple d'une partie de la subroutine **Connect** concernant la connexion des éléments finis type triangulaire à 6 nœuds (T6N) et des éléments finis type quadrilatère à 8 nœuds (Q8N).

c \*\*\*\*\* CONNECTION DOUBLEMENT CONNEXE \*\*\*\*\*

```

200 nx=4*NNX
    ny=NNY+1
    L=1
    GOTO (210,220,230,240,250,260),NTEF

```

Le cas de T6N

c ----- NTEF=3 ----- = (T6N) -----

```

230 N1=4*NX
    N2=2*NX
DO 235 J=1,NY-1
    I1=(J-1)*N1+1
DO 235 I=1,NX
    I2=I1+N2 ; I3=I1+N1 ; I4=I3+2
    NNE(L,1)=I1 ; NNE(L,2)=I4 ; NNE(L,3)=I3
    NNE(L,4)=I2+1 ; NNE(L,5)=I3+1 ; NNE(L,6)=I2
    NNE(L+1,1)=I1 ; NNE(L+1,2)=I1+2 ; NNE(L+1,3)=I4
    NNE(L+1,4)=I1+1 ; NNE(L+1,5)=I2+2
    NNE(L+1,6)=I2+1

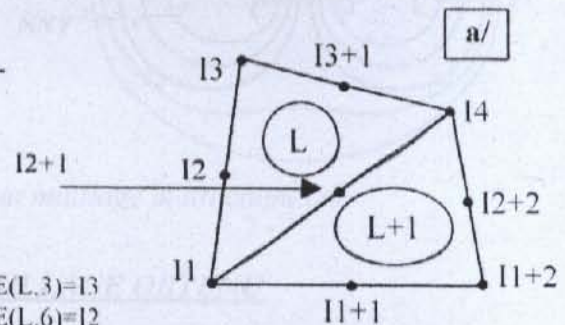
```

```

IF (I.EQ.NX) NNE(L,2)=I4-N2
IF (I.EQ.NX) NNE(L+1,2)=I1+2-N2
IF (I.EQ.NX) NNE(L+1,5)=I2+2-N2
IF (I.EQ.NX) NNE(L+1,3)=NNE(L,2)
L=L+2

```

```
235 I1=I1+2
```



**Fig. IV-17 a.b :**  
Connexion pour un maillage type 'O'

Pour le cas de Q8N

C ----- NTEF=6 ----- = (Q8N) -----

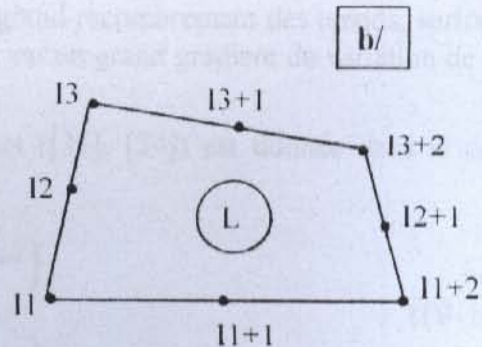
```

260 N1=3*NX
    N2=NX*2+1
DO 265 J=1,NY-1
    I1=(J-1)*N1+1
DO 265 I=1,NX
    I2=I1+N2-1 ; I3=I1+N1
    NNE(L,1)=I1 ; NNE(L,2)=I1+2
    NNE(L,3)=I3+2 ; NNE(L,4)=I3
    NNE(L,5)=I1+1 ; NNE(L,6)=I2+1
    NNE(L,7)=I3+1 ; NNE(L,8)=I2
    IF (I.EQ.NX) NNE(L,2)=I1+3-N2
    IF (I.EQ.NX) NNE(L,3)=I3+3-N2
    IF (I.EQ.NX) NNE(L,6)=NNE(L,5)+1
    L=L+1

```

```
265 I1=I1+2
```

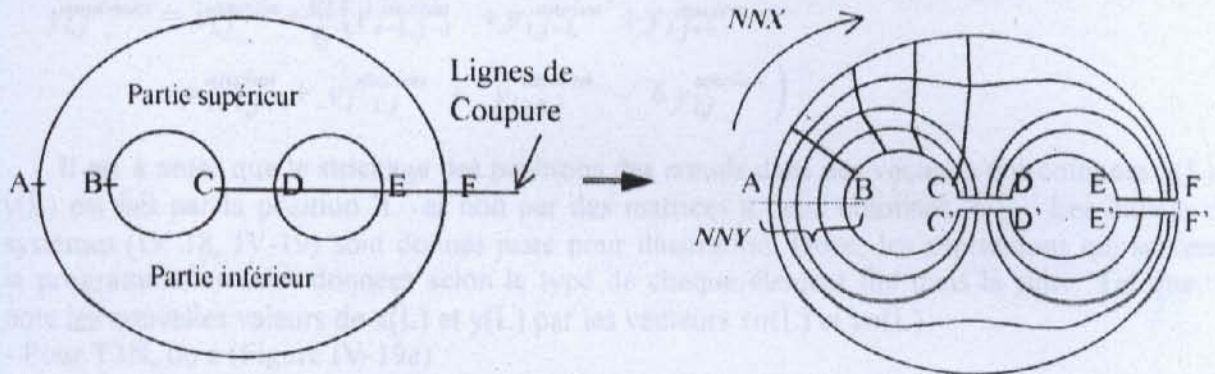
```
C GOTO 700
```



**IV-3-3-3/ APERCU SUR LA GENERATION DES NŒUDS INTERNES POUR UN DOMAINE MULTI-CONNEXES QUELCONQUE**

Plusieurs procédures peuvent être considérées et cela suivant la disposition de la courbure de chaque cotés. Une région multi-connexes peut être rendue mono-connexe par l'introduction de limite(s) ou ligne(s) de coupure à partir de la limite interne (obstacles) jusqu'à la limite la plus externe. Cette limite ne peut pas être traversée [32], voir figure (IV-18).

Pour l'exemple d'application suivant d'un domaine former par un grand cercle moins deux petits cercles internes, prenant premièrement la partie supérieure on discrétise le domaine commettant un mono-connexe, après la découpe comme le montre la figure (IV-18), tout on reprend les étapes d'un maillage type 'H'. Puis, on passe pour générer les nœuds de la partie inférieure par symétrie à l'autre partie.



**Fig. IV-18 :** *Coupure et génération d'un maillage multi connexes.*

**IV-3-3-4/ CONNEXION DES ELEMENTS DU MAILLAGE OBTENU**

Cette technique de coupure constitue un outil très efficace pour traiter les problèmes de multi connexes. Pour l'exemple de la figure précédente on procède en premier lieu à la connexion des parties similaire aux maillages type 'H' en conservant l'ordre de la numérotation d'une partie à une autre. Dans une autre étape on reprend les parties coupées et faisant la connexion de telle manière à lier ces frontières et reproduisant la forme initiale du domaine dans les parties coupées comme illustrer dans le cas de maillage 'O'.

**IV-3-4/ FILTRAGE DES NŒUDS INTERNES**

Il est parfois très efficace d'utiliser une option appelée filtrage des nœuds. Dans certain cas, la procédure de condensation des nœuds ne permet pas une bonne répartition de ces derniers dans des régions où la solution à recherchée demande un grand recombement des nœuds, surtout devant les frontières, au voisinage d'une grande courbure, ou un grand gradient de variation de la solution du problème.

La technique de filtrage utilisée par pas mal d'auteurs ([31], [24]) est donnée dans le cas général par l'algorithme suivant:

$$\begin{aligned}
 x_i^{nouveau} &= x_i^{ancien} - \frac{\omega}{m} \sum_{k=1}^{k=m} (x_k^{ancien} - x_i^{ancien}) \\
 y_i^{nouveau} &= y_i^{ancien} - \frac{\omega}{m} \sum_{k=1}^{k=m} (y_k^{ancien} - y_i^{ancien})
 \end{aligned}
 \tag{IV-18}$$

- avec m : le nombre de nœuds qui sont reliés par une arête avec le nœud de numéro ' i ' à filtrer.

- $\omega$  : Facteur de relaxation compris  $0 < \omega < 1$ .
- $(x_k, y_k)$  :  $k = 1, 2, 3, \dots, m$  : les positions des 'm' nœuds reliés avec le nœud 'i'

L'algorithme (IV-18), à refaire entre 20 jusqu'à 100 itérations. On peut même aller à 2000 itérations, à savoir la forme finale du maillage obtenu.

Pour le maillage de type 'H' et élément fini triangulaire à trois nœuds, chaque nœuds interne est relié avec six (06) nœuds, donc  $m=6$ . Alors la relation (IV-18) sera donc adaptée comme suit :

$$\begin{aligned}
 x_{i,j}^{nouveau} &= x_{i,j}^{ancien} + \frac{\omega}{6} \left( x_{-1,j-1}^{ancien} + x_{j-1}^{ancien} + x_{j+1}^{ancien} + \right. \\
 &\quad \left. x_{+1,j+1}^{ancien} + x_{-1,j}^{ancien} + x_{+1,j}^{ancien} - 6 x_{i,j}^{ancien} \right) \begin{cases} i=2,3,4,\dots,N_x-1 \\ j=2,3,4,\dots,N_y-1 \end{cases} \quad (IV-19) \\
 y_{i,j}^{nouveau} &= y_{i,j}^{ancien} + \frac{\omega}{6} \left( y_{i-1,j-1}^{ancien} + y_{i,j-1}^{ancien} + y_{i,j+1}^{ancien} + \right. \\
 &\quad \left. y_{i+1,j+1}^{ancien} + y_{i-1,j}^{ancien} + y_{i+1,j}^{ancien} - 6 y_{i,j}^{ancien} \right)
 \end{aligned}$$

Il est à noter que le stockage des positions des nœuds dans des vecteurs uni-colonnes  $x(L)$  et  $y(L)$  est fait par la position 'L' et non par des matrices à deux colonnes 'i, j'. Les indices des systèmes (IV-18, IV-19) sont donnés juste pour illustration. Donc, les expressions qui servent à la programmation sont données selon le type de chaque élément fini dans la suite. Tel que, on note les nouvelles valeurs de  $x(L)$  et  $y(L)$  par les vecteurs  $xn(L)$  et  $yn(L)$

- Pour T3N, on a (Figure IV-19a) :

$$\begin{aligned}
 xn(L) &= x(L) + \frac{\omega}{6} (XSOM - 6 \cdot x(L)) \\
 yn(L) &= y(L) + \frac{\omega}{6} (YSOM - 6 \cdot y(L))
 \end{aligned} \quad \begin{cases} i=2,3,4,\dots,N_x-1 \\ j=2,3,4,\dots,N_y-1 \end{cases} \quad (IV-20)$$

Tel que :

$$\begin{aligned}
 XSOM &= x(I1) + x(I2) + x(I3) + x(I4) + x(I5) + x(I6) \\
 YSOM &= y(I1) + y(I2) + y(I3) + y(I4) + y(I5) + y(I6) \\
 L &= i + N_x \cdot (j-1) \\
 I1 &= i-1 + (j-2) \cdot N_x \quad ; \quad I2 = I1+1 \quad ; \quad I3 = L-1 \quad ; \quad I4 = L+1 \\
 I5 &= i + j \cdot N_x \quad ; \quad I6 = I5+1
 \end{aligned}$$

- Pour l'élément fini triangulaire à quatre nœuds T4N, on a pour les nœuds des sommets  $m=6$  :

$$\begin{aligned}
 XSOM &= x(I1) + x(I2) + x(I3) + x(I4) + x(I5) + x(I6) \\
 YSOM &= y(I1) + y(I2) + y(I3) + y(I4) + y(I5) + y(I6) \\
 L &= i + (3N_x - 2)(j-1) \\
 I1 &= i-1 + (j-2)(3N_x - 2) \quad ; \quad I2 = I1+1 \quad ; \quad I3 = L-1 \quad ; \quad I4 = L+1 \\
 I5 &= i + j(3N_x - 2) \quad ; \quad I6 = I5+1
 \end{aligned} \quad \begin{cases} i=2,3,4,\dots,N_x-1 \\ j=2,3,4,\dots,N_y-1 \end{cases} \quad (IV-21)$$

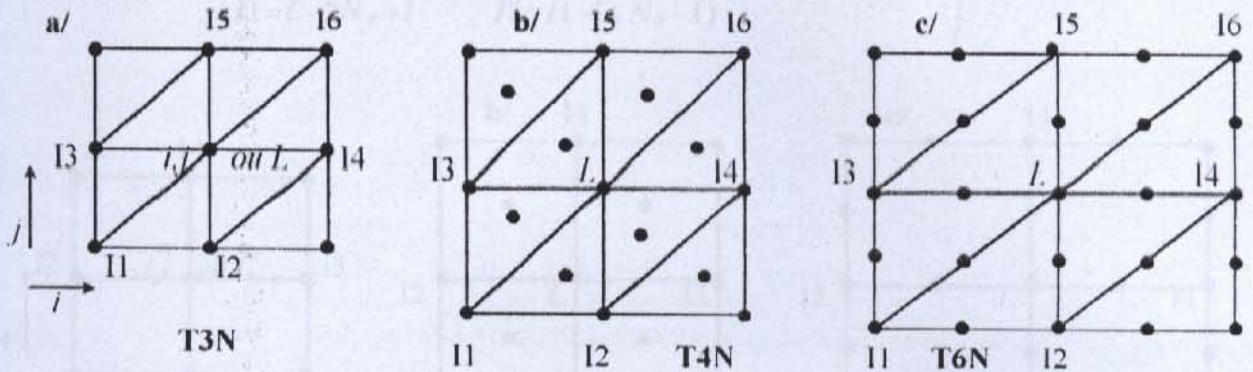
Et pour les nœuds des milieux des triangles, on reprend le calcul des moyennes des coordonnées des nœuds des sommets, comme le montre les algorithmes de génération des maillages de paragraphe IV-3-1-2, voir figure(IV-19b).

- Pour l'élément fini triangulaire à six nœuds T6N, on a pour les nœuds des sommets  $m=6$  :

$$\begin{aligned}
 XSOM &= x(I1) + x(I2) + x(I3) + x(I4) + x(I5) + x(I6) \\
 YSOM &= y(I1) + y(I2) + y(I3) + y(I4) + y(I5) + y(I6)
 \end{aligned} \quad (IV-22)$$

$$\begin{aligned}
 L &= i + (j-1) \cdot (2 \cdot N_x - 1) \\
 I1 &= i - 2 + (j-3) \cdot (2 \cdot N_x - 1) \quad ; \quad I2 = I1 + 1 \quad ; \quad I3 = L - 1 \\
 I4 &= L + 1 \quad ; \quad I5 = i + (j+1) \cdot (2 \cdot N_x - 1) \quad ; \quad I6 = I5 + 1
 \end{aligned}
 \quad \left\{ \begin{array}{l} i = 3, 5, 7, \dots, 2N_x - 3 \quad \text{pas} = 2 \\ j = 3, 5, 7, \dots, 2N_y - 3 \quad \text{pas} = 2 \end{array} \right.$$

Et pour les nœuds des milieux des arêtes (figure IV-19c), on reprend le calcul des moyennes des coordonnées des nœuds des sommets de chaque arête, comme le montre les algorithmes de génération des maillages de paragraphe IV-3-1-2.



**Fig.IV-19 a,b,c** : les indices des formules de filtrage pour les nœuds internes des éléments triangulaire.

- Pour l'élément fini quadrilatère à quatre nœuds Q4N, on a  $m=4$  (voir figure IV-20a), donc :

$$\begin{aligned}
 x_n(L) &= x(L) + \frac{\omega}{4} (XSOM - 4 \cdot x(L)) \\
 y_n(L) &= y(L) + \frac{\omega}{4} (YSOM - 4 \cdot y(L))
 \end{aligned}
 \quad \left\{ \begin{array}{l} i = 2, 3, 4, \dots, N_x - 1 \\ j = 2, 3, 4, \dots, N_y - 1 \end{array} \right. \quad (IV-23)$$

tel que :

$$\begin{aligned}
 XSOM &= x(I1) + x(I2) + x(I3) + x(I4) \\
 YSOM &= y(I1) + y(I2) + y(I3) + y(I4)
 \end{aligned}$$

$$L = i + N_x \cdot (j-1) \quad ; \quad I1 = i + (j-2) \cdot N_x \quad ; \quad I2 = L - 1 \quad ; \quad I3 = L + 1 \quad ; \quad I4 = L + N_x$$

- Pour l'élément fini quadrilatère à cinq nœuds Q5N, on a pour les nœuds des sommets  $m=4$  (voir figure IV-20b), alors :

$$\begin{aligned}
 L &= i + (2N_x - 1)(j-1) \quad ; \quad I1 = i + (j-2)(2N_x - 1) \\
 I2 &= L - 1 \quad ; \quad I3 = L + 1 \quad ; \quad I4 = L + (2N_x - 1)
 \end{aligned}
 \quad \left\{ \begin{array}{l} i = 2, 3, 4, \dots, N_x - 1 \\ j = 2, 3, 4, \dots, N_y - 1 \end{array} \right. \quad (IV-24)$$

Pour les nœuds des milieux des quadrilatères, on reprend le calcul des moyennes des coordonnées des nœuds des sommets, comme le montre les algorithmes de paragraphe IV-3-1-2.

- Pour l'élément fini quadrilatères à huit nœuds Q8N, on a pour les nœuds des sommets  $m=4$  :

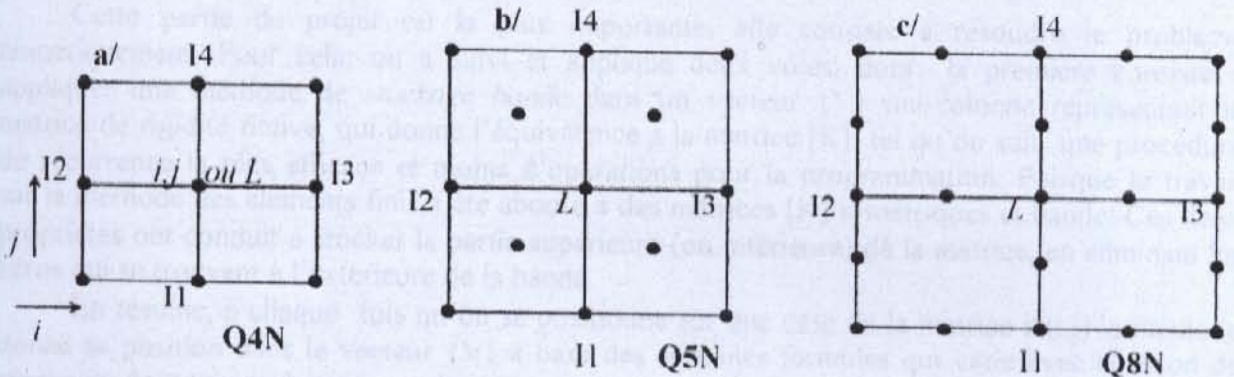
$$\begin{aligned}
 L &= i + (j-1) \cdot (3 \cdot N_x - 1) \\
 I1 &= i - 2 + (j-2) \cdot (3 \cdot N_x - 1) \quad ; \quad I2 = L - 2 \\
 I3 &= L + 2 \quad ; \quad I4 = i + (j) \cdot (3 \cdot N_x - 1)
 \end{aligned}
 \quad \left\{ \begin{array}{l} i = 3, 5, 7, \dots, 2N_x - 3 \quad \text{pas} = 2 \\ j = 2, 3, 4, \dots, N_y - 1 \quad \text{pas} = 1 \end{array} \right. \quad (IV-25)$$

Et pour les nœuds des milieux des arêtes (figure IV-20c), on reprend le calcul des moyennes des coordonnées des nœuds des sommets de chaque arête, comme suit :

$$x_n(k) = (x(I1) + x(I2))/2, \quad y_n(k) = (y(I1) + y(I2))/2 \tag{IV-20}$$

Tel que :

$$\left. \begin{aligned} \text{Si «j» impaire : } & k = i + \frac{(j-1)}{2} \cdot (3 \cdot N_x - 1) \quad i = 2, 4, 6, \dots, 2N_x - 2 \quad \text{pas} = 2 \\ & I1 = L - 1 \quad ; \quad I2 = L + 1 \\ \text{Si «j» paire : } & k = i + \frac{j}{2} \cdot (3 \cdot N_x - 1) - N_x \quad i = 2, 3, 4, \dots, N_x - 1 \quad \text{pas} = 1 \\ & I1 = L - 2N_x + i \quad ; \quad I2 = I1 + (3 \cdot N_x - 1) \end{aligned} \right\} j = 2, 3, \dots, 2N_y - 1$$



**Fig.IV-20 a,b,c :** Les indices des formules de filtrage pour les nœuds internes des éléments quadrilatères.

Remarque :

Après le calcul des nouvelles coordonnées  $x_n$  et  $y_n$ , on procède au rechargement des vecteurs  $x(L)$  et  $y(L)$  pour qu'ils soient applicables par les autres sous-routines du programme.

## CHAPITRE V

### RESOLUTION NUMERIQUE ET PROGRAMMATION

#### V-1/ INTRODUCTION

Cette partie du projet est la plus importante, elle consiste à résoudre le problème numériquement. Pour cela, on a suivi et appliqué deux voies, dont la première consiste à appliquer une méthode de *stockage bande* dans un vecteur  $\{V\}$  uni-colonne représentant la matrice de rigidité fictive, qui donne l'équivalence à la matrice  $[K]$ , tel qu'on suit une procédure de récurrence la plus efficace et moins d'opérations pour la programmation. Puisque le travail sur la méthode des éléments finis a été abouté à des matrices  $[K]$  symétriques et bande. Ces deux propriétés ont conduit à stocker la partie supérieure (ou inférieure) de la matrice, en éliminant les zéros qui se trouvent à l'extérieur de la bande.

En résumé, à chaque fois qu'on se positionne sur une case de la matrice  $K(i,j)$  la méthode donne sa position dans le vecteur  $\{V\}$  à base des certaines formules qui varie avec la façon de stockage, dont seront données par la suite.

- Si on se trouve au-dessus de la diagonale (partie supérieure) et à l'extérieur de la bande, le calcul sera ignoré puisque cette case est réellement nulle.
- Si on se trouve au-dessous de la diagonale (partie inférieure) il suffit uniquement d'utiliser la propriété de la symétrie ( $K(i,j) = K(j,i)$ ) et le traitement se fait comme étant une case  $K(i,j)$ .

Puis, toujours dans la première voie, on passe à la résolution du système d'équations obtenu en utilisant une méthode directe : de *Khalestki*, où on l'a adaptée pour des matrices bandes et symétriques en gagnant assez de mémoire et d'opérations de calcul.

Dans la deuxième voie, on a formulé et réaliser une méthode de stockage spéciale qui consiste à stocker que les cases non nulles de la partie supérieure de la matrice de rigidité globale  $[K]$  dans deux vecteurs différents. Tel que l'un prend les valeurs des cases de la diagonale de la matrice, l'autre stocke les cases restantes de sa partie supérieure.

Vu que ce procédé de stockage peut atteindre des échelles de discrétisation très élevée, il est déconseillé d'utiliser une méthode d'inversion directe du système. Alors, on a adapté une méthode itérative puissante, c'est la méthode de *Gauss Seidel Accéléré* avec un facteur de relaxation déterminé numériquement. Les algorithmes et les procédures sont donnés après les méthodes de la première voie.

En fin, la procédure générale de calcul et les étapes du programme sont exposées à la fin du chapitre.

#### Remarques :

- Les éléments finis développés dans le programme sont linéaires et non linéaires : c'est des triangles (à trois, quatre et six nœuds) ainsi que des quadrilatères (à quatre, cinq et huit nœuds).
- On a réalisé un programme en FORTRAN où la figure V-18 illustre son organigramme général simplifié. Ce programme est spécialement conçu pour un cadre de discrétisation élevée.

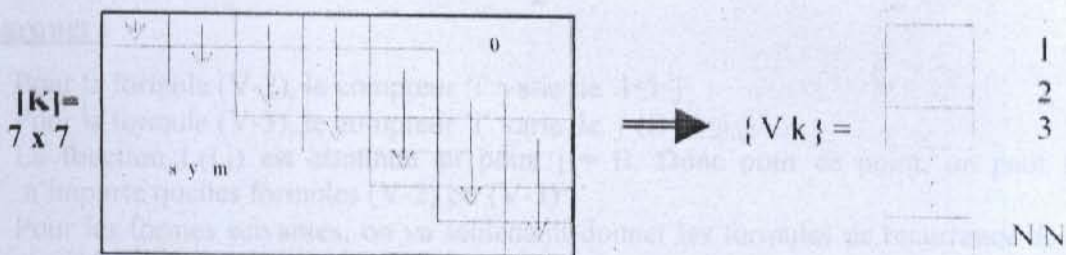
**V-2/ METHODES DE STOCKAGE DES MATRICES BANDES SOUS FORME DE VECTEUR**

Considérons une matrice [K] d'ordre (N x N) symétrique et bande avec la largeur de la demi-bande est B. Le problème est de savoir stocker les cases de cette matrice dans un vecteur {V<sub>k</sub>}. Il est parfois difficile de faire une équivalence entre une case de la matrice [K] et la case du vecteur, ce qui a supposé plusieurs formes de stockages sous forme de vecteur. Ces formes de stockages sont différentes suivant la manière de stockage et la formule de récurrence convenable.

Alors, on va proposer cinq (5) formes de stockage en prenant une matrice [K] d'ordre (7x7) symétrique et sa bande B est égale à 4, et cela pour fixer les idées. Ces formes sont : le stockage en colonne, en diagonal, en ligne, en ligne de serpent, en escalier... (existe d'autres) [24].

**V-2-1/ STOCKAGE EN COLONNE**

La méthode de stockage choisie est représentée par la direction des flèches. C'est-à-dire colonne par colonne, comme le montre la figure (V-1) :



**Fig. V-1 :** Illustration de stockage en colonne.

Tel que :

- |                              |                              |                              |                              |
|------------------------------|------------------------------|------------------------------|------------------------------|
| V <sub>k</sub> (1) = K(1,1)  | V <sub>k</sub> (2) = K(1,2)  | V <sub>k</sub> (3) = K(2,2)  | V <sub>k</sub> (4) = K(1,3)  |
| V <sub>k</sub> (5) = K(2,3)  | V <sub>k</sub> (6) = K(3,3)  | V <sub>k</sub> (7) = K(1,4)  | V <sub>k</sub> (8) = K(2,4)  |
| V <sub>k</sub> (9) = K(3,4)  | V <sub>k</sub> (10) = K(4,4) | V <sub>k</sub> (11) = K(2,5) | V <sub>k</sub> (12) = K(3,5) |
| V <sub>k</sub> (13) = K(4,5) | V <sub>k</sub> (14) = K(5,5) | V <sub>k</sub> (15) = K(3,6) | V <sub>k</sub> (16) = K(4,6) |
| V <sub>k</sub> (17) = K(5,6) | V <sub>k</sub> (18) = K(6,6) | V <sub>k</sub> (19) = K(4,7) | V <sub>k</sub> (20) = K(5,7) |
| V <sub>k</sub> (21) = K(6,7) | V <sub>k</sub> (22) = K(7,7) |                              |                              |

On, peut remarquer pour cet exemple, que la dimension nécessaire du vecteur {V<sub>k</sub>} est égal à 22, c'est-à-dire NN=22.

Si on veut généraliser à une matrice [K] d'ordre (N x N) symétrique, la dimension du vecteur {V<sub>k</sub>} doit être égale à :

$$NN = 1 + 2 + 3 + \dots + B + (N - B)B = \sum_{i=1}^B i + B(N - B)$$

Comme  $\sum_{i=1}^B i = \frac{B(B+1)}{2}$  somme d'une suite arithmétique de raison unité ! Donc :

$$NN = \frac{B(B+1)}{2} + (N - B)B \Rightarrow NN = \frac{B(2N - B + 1)}{2} \tag{V-1}$$

On peut vérifier cette formule pour l'exemple précédent :

$$\begin{cases} N = 7 \\ B = 4 \end{cases} \rightarrow NN = \frac{4(2 \times 7 - 4 + 1)}{2} = 22.$$



On procède maintenant à la détermination de la formule de récurrence de stockage des éléments de la matrice [K] (les éléments de la bande uniquement) dans le vecteur {Vk}.  
 Pour cela on divise la matrice [K] en deux blocs.

A°/ Pour une case K(i,j) telle que  $j \leq B$ , son équivalence en position dans le vecteur  $V_k(L)$  est

avec : 
$$L = 1 + 2 + 3 + \dots + (j - 1) + i = \frac{(j - 1)j}{2} + i$$

Alors 
$$L = \frac{j(j - 1)}{2} + i \quad \text{si } j \leq B \quad (V-2)$$

On peut remarquer que le nombre  $(j-1)j$  est un nombre pair.

B°/ Pour une case K(i,j) telle que  $j > B$ , son équivalence en position dans le vecteur  $V_k(L)$  est

avec : 
$$L = 1 + 2 + 3 + \dots + B + (j - B - 1)B + i - (j - B) = i - j + \frac{B(1 - B + 2j)}{2}$$

Alors : 
$$L = i - j + \frac{B(1 - B + 2j)}{2} \quad \text{si } j > B \quad (V-3)$$

**Remarques :**

- Pour la formule (V-2), le compteur "i" varie de  $1 \leq i \leq j$ .
- Pour la formule (V-3), le compteur "i" varie de  $j - (B - 1) \leq i \leq j$ .
- La fonction L(i,j) est continue au point  $j = B$ . Donc pour ce point, on peut appliquer n'importe quelles formules (V-2) ou (V-3).
- Pour les formes suivantes, on va seulement donner les formules de récurrence de stockage sans détaillé le calcul [24].

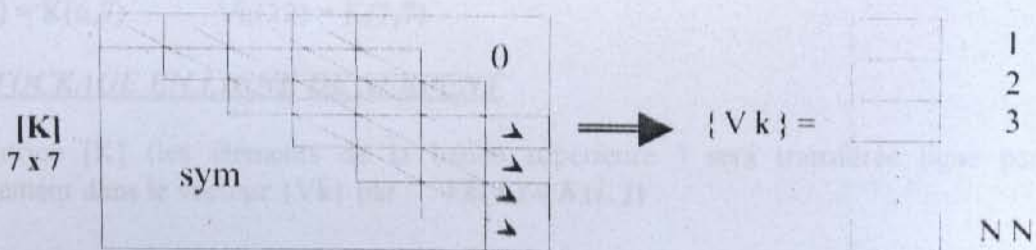
**V-2-2/ STOCKAGE EN DIAGONAL**

Les éléments de la bande supérieure de la matrice [K] seront transférés diagonalement dans le vecteur {Vk} par :  $V_k(L) = K(i, j)$

Tel que : 
$$L = \sum_{p=1}^{p=j-i} (N + 1 - p) + i = \frac{1}{2}(j - i) \cdot (2N - j + i + 1) + i \quad (V-4)$$

Avec 
$$\begin{cases} j = 1, 2, 3, \dots, B \\ i = 1, 2, 3, \dots, B \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} j = B + 1, B + 2, \dots, N \\ i = j - B, j - B + 1, \dots, j \end{cases}$$

L'exemple suivant pour une matrice d'ordre (7 x 7) illustre schématiquement le transfert des cases entre la matrice et le vecteur correspondant.



**Fig. V-2 :** Illustration de stockage en diagonal

La dimension nécessaire de ce vecteur est donnée toujours par la formule (V-1).  
 Si on applique la formule de récurrence (V-4) à l'exemple précédent c.à.d cette matrice de l'ordre (7x7) et B=4 pour bien illustrer le procédé de stockage, on trouvera les résultats suivants :

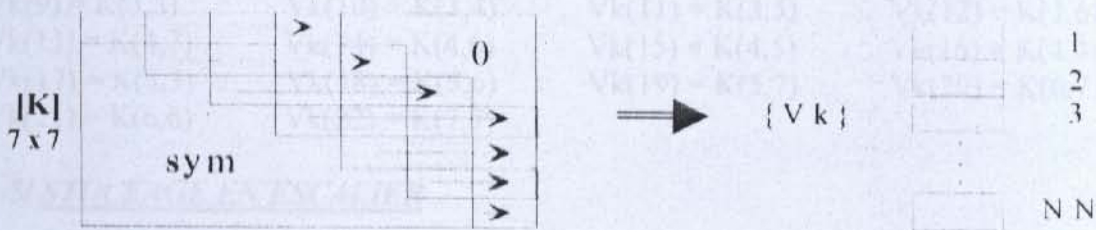
Vk(1) = K(1,1)	Vk(2) = K(2,2)	Vk(3) = K(3,3)	Vk(4) = K(4,4)
Vk(5) = K(5,5)	Vk(6) = K(6,6)	Vk(7) = K(7,7)	Vk(8) = K(1,2)
Vk(9) = K(2,3)	Vk(10) = K(3,4)	Vk(11) = K(4,5)	Vk(12) = K(5,6)
Vk(13) = K(6,7)	Vk(14) = K(1,3)	Vk(15) = K(2,4)	Vk(16) = K(3,5)
Vk(17) = K(4,6)	Vk(18) = K(5,7)	Vk(19) = K(1,4)	Vk(20) = K(2,5)
Vk(21) = K(3,6)	Vk(22) = K(4,7)		

**V-2-3/ STOCKAGE EN LIGNE**

Les éléments de la bande supérieure de la matrice [K] seront transférés ligne par ligne dans le vecteur {Vk} par :  $Vk(L) = K(i, j)$ , comme le montre la figure (V-3).

Telle que :  $L = (i - 1)B + j - i + 1$  si  $\begin{cases} i = 1, 2, 3, \dots, N - B \\ j = i, i + 1, i + 2, \dots, i + B - 1 \end{cases}$  (V-5)

$L = \frac{B}{2}(2N - B + 1) - \frac{1}{2}(N - i)(N - i + 1) - N + j$  si  $\begin{cases} i = N - B + 1, \dots, N \\ j = i, i + 1, \dots, N \end{cases}$  (V-6)



**Fig. V-3 :** Illustration de stockage en ligne.

La dimension nécessaire du vecteur {Vk} est donnée toujours par la formule (V.1)  
 Si on applique les deux formules (V.5) et (V.6) à cette matrice d'ordre (7x7) et B = 4, pour bien éclaircir le procédé de stockage, on trouve les résultats suivants :

Vk(1) = K(1,1)	Vk(2) = K(1,2)	Vk(3) = K(1,3)	Vk(4) = K(1,4)
Vk(5) = K(2,2)	Vk(6) = K(2,3)	Vk(7) = K(2,4)	Vk(8) = K(2,5)
Vk(9) = K(3,3)	Vk(10) = K(3,4)	Vk(11) = K(3,5)	Vk(12) = K(3,6)
Vk(13) = K(4,4)	Vk(14) = K(4,5)	Vk(15) = K(4,6)	Vk(16) = K(4,7)
Vk(17) = K(5,5)	Vk(18) = K(5,6)	Vk(19) = K(5,7)	Vk(20) = K(6,6)
Vk(21) = K(6,7)	Vk(22) = K(7,7)		

**V-2-4/ STOCKAGE EN LIGNE DE SERPENT**

La matrice [K] (les éléments de la bande supérieure ) sera transférée ligne par ligne alternativement dans le vecteur {Vk} par :  $Vk(L) = K(i, j)$ .

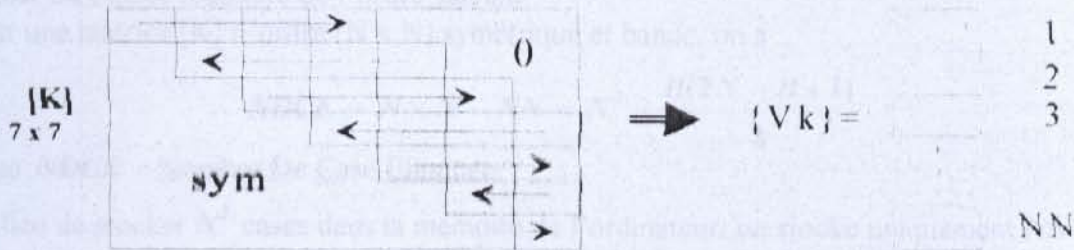
Telle que :

$L = (i - 1)B + (-1)^{i-1} \cdot (j - i + 1) + (i + 1 - 2 \cdot \text{int}(\frac{i}{2})) \cdot (B + 1)$  si  $\begin{cases} i = 1, 2, 3, \dots, N - B \\ j = i, i + 1, \dots, i - B - 1 \dots \end{cases}$  (V-7)

$$\text{et } L = \frac{B}{2}(2N - B + 1) - \frac{1}{2}(N - i)(N - i + 1) - N + j + \left[ i + 1 - 2 \text{int}\left(\frac{N}{2}\right) \right] (N - 2j + i)$$

si  $\begin{cases} i = N - B + 1, \dots, N \\ j = i, i + 1, i + 2, \dots, N \end{cases}$  (V-8)

De même, la dimension du vecteur {Vk} est donnée par la formule (V.1) si on applique les deux formules (V-7) et (V-8) à cet exemple N=7, B=4, on trouve les résultats suivants :



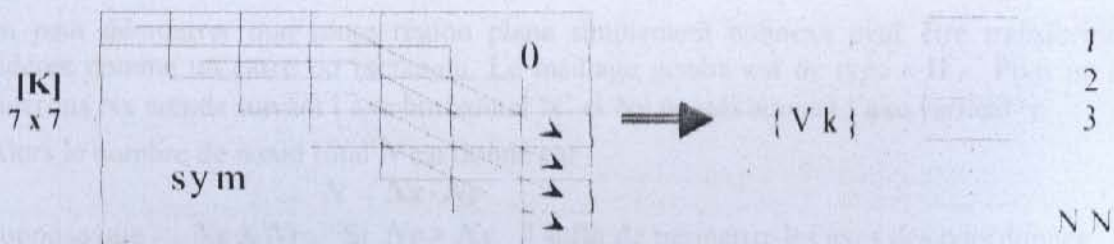
**Fig. V-4 :** Illustration de stockage en serpent.

Vk(1) = K(1,1)	Vk(2) = K(1,2)	Vk(3) = K(1,3)	Vk(4) = K(1,4)
Vk(5) = K(2,5)	Vk(6) = K(2,4)	Vk(7) = K(2,3)	Vk(8) = K(2,2)
Vk(9) = K(3,3)	Vk(10) = K(3,4)	Vk(11) = K(3,5)	Vk(12) = K(3,6)
Vk(13) = K(4,7)	Vk(14) = K(4,6)	Vk(15) = K(4,5)	Vk(16) = K(4,4)
Vk(17) = K(5,5)	Vk(18) = K(5,6)	Vk(19) = K(5,7)	Vk(20) = K(6,7)
Vk(21) = K(6,6)	Vk(22) = K(7,7)		

**V-2-5/ STOCKAGE EN ESCALIER**

Le schéma de transfert des éléments de la matrice [K] se fait comme l'indique l'exemple suivant pour N=7 et B=4. Et pour bien voir le transfert des éléments voici la correspondance :

Vk(1) = K(1,1)	Vk(2) = K(1,2)	Vk(3) = K(1,3)	Vk(4) = K(1,4)
Vk(5) = K(2,5)	Vk(6) = K(3,6)	Vk(7) = K(4,7)	Vk(8) = K(2,2)
Vk(9) = K(2,3)	Vk(10) = K(2,4)	Vk(11) = K(3,5)	Vk(12) = K(4,6)
Vk(13) = K(5,7)	Vk(14) = K(3,3)	Vk(15) = K(3,4)	Vk(16) = K(4,5)
Vk(17) = K(5,6)	Vk(18) = K(6,7)	Vk(19) = K(4,4)	Vk(20) = K(5,5)
Vk(21) = K(6,6)	Vk(22) = K(7,7)		



**Fig. V-5 :** Illustration de stockage en escalier

Pour une matrice d'ordre (NxN) avec une bande B, le transfert des éléments se fait par la formule de récurrence suivante :  $Vk(L) = K(i, j)$  or :

$$L = (i - 1) \cdot \frac{(2N - i)}{2} + j \quad \text{si} \quad \begin{cases} i = 1, 2, 3, \dots, B \\ j = i, i + 1, \dots, B \end{cases} \quad (V-9)$$

$$L = (B - j + i - 1) \cdot \frac{(2N - B + j - i)}{2} + j \quad \text{si} \quad \begin{cases} i = 1, 2, 3, \dots, N \\ j = B + 1, B + 2, \dots, i + B - 1 \end{cases} \quad (V-10)$$

**V-2-6/ GAIN EN ESPACE MEMOIRE PAR LA METHODE DE STOCKAGE BANDE**

La méthode de stockage des matrices bandes sous forme de vecteur nous a permis de gagner un espace mémoire de l'ordre suivant :

Pour une matrice [K] d'ordre (N x N) symétrique et bande, on a :

$$NDCE = N \times N - NN = N^2 - \frac{B(2N - B + 1)}{2} \quad (V-11)$$

Avec *NDCE* : Nombre De Case Eliminée.

Au lieu de stocker  $N^2$  cases dans la mémoire de l'ordinateur, on stocke uniquement *NN* cases. Pour voir une idée sur la valeur de *NDCE*, on propose les exemples suivants :

1°/ Tableau V-1: Pourcentage des cases gagnées pour N=100

B	N <sup>2</sup>	NN	NDCE	Pourcentage des cases gagnées
100	10 000	5050	4950	49,50 %
70	10 000	4585	5415	54,15 %
35	10 000	2905	7095	70,95 %
10	10 000	955	9045	90,45 %
5	10 000	490	9510	95,10 %

2°/ Tableau V-2: Pourcentage des cases gagnées pour N=5000

B	N <sup>2</sup>	NN	NDCE	Pourcentage des cases gagnées
480	25 000 000	2 285 040	22 714 960	90,85 %
270	25 000 000	1 313 685	23 686 315	94,74 %
150	25 000 000	738 825	24 261 175	97,04 %
70	25 000 000	347 585	24 652 415	98,61 %

Il est bien clair d'après ces exemples que plus la largeur de la demi-bande est petite plus le nombre des cases gagnées augmente rapidement, ce qui veut dire que durant la numérotation des nœuds du maillage généré, il est important donc de choisir celle qui donne la bande minimale ce que l'on appelle par la numérotation optimale.

On peut démontrer que toute région plane simplement connexe peut être transformée ou considérée comme un carré ou rectangle. Le maillage généré est de type « H ». Pour un carré, considérons *Nx* nœuds suivant l'axe horizontal 'x' et *Ny* nœuds suivant l'axe vertical 'y'.

Alors le nombre de nœud total *N* est donné par :

$$N = Nx \cdot Ny$$

On suppose que :  $Nx \leq Ny$ . Si  $Ny > Nx$ , il suffit de permettre les axes des coordonnées

Alors, on peut démontrer que le nombre de nœud restant après l'introduction des conditions aux limites (si ces dernières sont de type DIRICHLET), en d'autre terme : l'ordre de la matrice [K] pour la résolution finale, est donné par :

$$N = Nx \cdot Ny - 2Nx - 2Ny + 4 \quad (V-12)$$

Dans ce cas, la largeur optimale de la demi-bande  $B$  est donnée par :

$$B \leq Nx + 2$$

Alors, le cas le plus défavorable de  $B$  est donné par :  $B_{max} = Nx + 2$  (V-13)

Pour bien voir l'ordre de la dimension ' $NN$ ' nécessaire du vecteur  $\{V_k\}$  au stockage après l'application des conditions aux limites, ainsi que le pourcentage des cases gagnées ( avec la bande  $B_{max}$  ), on considère les exemples suivants :

Tableau V-3. *Pourcentage des cases gagnées pour  $N_y = 100$  en fonction de  $N_x$ .*

$N_x$	$B_{max}$	$N$	$NN$	$NDCE$	Pourcentage des cases gagnées
100	102	9 604	974 457	91 262 359	$\approx 98,94 \%$
80	82	7 644	623 487	57 807 249	$\approx 98,93 \%$
50	52	4 704	243 282	21 884 334	$\approx 98,90 \%$
30	32	2 744	87 312	7 442 224	$\approx 98,84 \%$
10	12	784	9 342	605 314	$\approx 98,48 \%$
3	5	98	480	9 124	$\approx 95,00 \%$

Tableau V-4 : *Pourcentage des cases gagnées pour  $N_y = 500$  en fonction de  $N_x$ .*

$N_x$	$B_{max}$	$N$	$NN$	$NDCE$	Pourcentage des cases gagnées
500	502	248 004	124 372 257	61 381 611 759	$\approx 99,797 \%$
300	302	148 404	44 772 557	21 978 974 659	$\approx 99,796 \%$
120	122	58 764	7 161 827	3 446 045 869	$\approx 99,792 \%$
50	52	23 904	1 241 682	570 159 534	$\approx 99,782 \%$
3	5	498	2 480	245 524	$\approx 99,000 \%$

On peut bien remarquer que le nombre de cases gagnées dans le cas le plus défavorable dépasse 90 % de la méthode classique de stockage complet. Donc, on voit clairement l'intérêt pratique de la technique de la matrice bande.

### V-3/ INFLUENCE DE LA NUMEROTATION DES NŒUDS SUR LA FORME DE LA MATRICE DE RIGIDITE

La numérotation des nœuds joue un rôle très important pour la mémorisation des matrices, surtout si le rang de la matrice devient de plus en plus élevé. Pour une matrice carrée quelconque d'ordre  $N$ , il faut stocker  $N^2$  cases, ce qui devient impossible pour des valeurs de  $N$  élevées.

Quel que soit le type de l'ordinateur, la mémoire centrale est limitée or le besoin en mémoire pour notre problème est important, ce qui nous oblige à penser à remédier par une technique adéquate afin de résoudre un système d'équations élevé avec une précision voulue.

Les deux propriétés (symétrie + bande) des matrices, obtenues par l'application de la méthode des éléments finis, donnent un avantage très important et répondent bien au problème de mémorisation des éléments de la matrice de rigidité. En premier lieu, on peut diviser les éléments de la matrice  $[K]$  en deux parties :

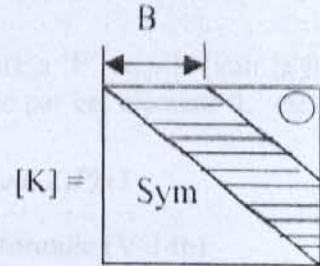
- Cases nuls.
- Cases non nuls.

Puisque le zéro est connu et il n'est pas nécessaire de réserver toute une case pour le stocker. Comme leur nombre peut être important suivant la numérotation, il reste d'indiquer uniquement leurs positions exactes dans la matrice de rigidité [K].

Alors, il est très important de rendre la matrice [K] pleine de zéros à fin de minimiser la mémorisation. Ce souhait ne sera réalisable qu'après faire une très bonne numérotation des nœuds dont le but est de serrer aux maximums les cases non nuls vers la diagonale principale.

Ce type de matrice est appelé matrice bande, elle est caractérisée par la valeur de la demi-bande. Le problème se pose donc au niveau de la valeur de cette bande. Le nombre des zéros de la matrice augmente si la valeur de la demi-bande diminue, la forme générale de la matrice bande symétrique est la suivante :

**Fig.V-6:** *Forme générale d'une matrice bande Symétrique.*



La partie hachurée contient les éléments non nuls (partis bande).

Il est à noter qu'on peut trouver dans la partie bande des éléments nuls. Mais si on veut calculer avec des matrices bandes, on ne peut pas éliminer ces éléments de la mémorisation puisque le travail avec ce type de matrice, ainsi que la décomposition en deux matrices triangulaires, nous oblige de stocker tous les éléments de la bande. Or notre 2<sup>ème</sup> méthode de stockage qui est le stockage complexe se consacre que pour la conservation des cases non nulles de la demi-bande de la matrice dans un vecteur en ordre, en gardant leurs indices de ligne et colonne.

On note encore que, si on calcule le nombre des zéros qui se trouvent dans la bande, on peut trouver pour certaines numérotations, un nombre qui dépasse la moitié ou même 80% !. Pour cela, on mise en lumière en premier lieu le calcul de la demi-bande et son algorithme dans prochain paragraphe.

**V-3-1/ EVALUATION DE LA DEMI-BANDE D'UNE MATRICE BANDE**

L'évaluation de la demi largeur de la bande est donnée par la différence maximale entre les numéros de deux nœuds d'un même élément, multiplié par le nombre de degré de liberté des noeuds (notre cas, chaque noeude contient un degré de liberté ) et en ajoutant 1 (problème des intervalles ).

Si on a un domaine plan, formé par 'NEL' éléments triangulaires à trois noeuds, la valeur de la demi-bande 'B' avant l'application des conditions aux limites est donnée comme suit :

- Soit  $B_l$  la bande donnée par l'élément numéro 'L'.

Alors 
$$B_l = \text{Max}(i, j, k) - \text{Min}(i, j, k) + 1 \tag{V-14a}$$

Avec  $i, j$  et  $k$  les numéros globaux (non locaux) des trois nœuds de l'élément  $L$ .  
Par suite la valeur de  $B$  est donnée par :

$$B = \text{Max}(B_1, B_2, \dots, B_l, \dots, B_{NEL}) \tag{V-14b}$$

Avec  $NEL$  : Nombre d'Eléments finis.

Pour un élément quadrilatère à 4 nœuds ou triangulaire à 4 nœuds, la bande donnée par cet élément est égale à :

$$B_p = \text{Max}(i, j, k, l) - \text{Min}(i, j, k, l) + 1 \quad \text{Et} \quad B = \text{Max}(B_1, B_2, \dots, B_p, \dots, B_n) \quad (V-15)$$

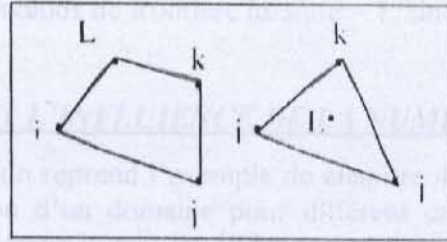


Fig.V-7: Eléments typiques à 4 nœuds

Dans le cas général, pour un élément quadrilatère ou triangulaire à 'P' nœuds (voir la figure III-3 pour les différentes géométries), l'évaluation de la bande donnée par cet élément 'L' est égale à :

$$B_L = \text{Max}(i, j, k, \dots, m, \dots, P) - \text{Min}(i, j, k, \dots, m, \dots, P) + 1 \quad (V-16)$$

Par suite la valeur de B pour tout le domaine est donnée par la formule (V-14b).

Maintenant, si on fait le calcul après l'introduction des conditions aux limites ; l'expression (V-15) reste la même sauf qu'on ajoute la condition qui exprime que les numérotations globales  $i, j, \dots, p$  doivent être apparient qu'au nœuds interne du domaine, c à d la valeur du vecteur ICL(i) indiquant les nœuds de frontières égale à « 0 » pour ce nœud 'i' par exemple. Or pour les nœuds de frontières il égale à « 1 ».

Dans ce cas, la partie du programme (subroutine bande) qui calcul la valeur de la demi-bande avant et après l'introduction l'effet des conditions aux limites, est donnée comme suit :

```

C ***** CALCUL DE LA BANDE AVANT LA REDUCTION *****
IBAV=0
DO 50 I=1,NEL
IP=NNE(I,1)      :      IG=NNE(I,1)
DO 20 II=2,NNPE
  IP=MIN(NNE(I,II),IP)
20  IG=MAX(NNE(I,II),IG)
  IBB=IG-IP+1
  IF (IBB.GT.IBAV) IBAV=IBB
50  CONTINUE

C ***** CALCUL DE LA BANDE APRES LA REDUCTION *****
IBAP=0
DO 70 I=1,NNT
  IF (ICL(I).EQ.1) GOTO 70
  NPCNN=I      :      NDCNN=NPCNN+IBAV-1
  IF (NDCNN.GT.NNT) NDCNN=NNT
  IBB=0
  DO 60 J=NPCNN,NDCNN
    IF (ICL(J).EQ.0) IBB=IBB+1
60  CONTINUE
  IF (IBB.GT.IBAP) IBAP=IBB
70  CONTINUE
    
```

Tel que :

IBAV : la largeur de la demi bande avant l'introduction des C.A.L.

IBAP : Largeur de la demi bande après l'introduction des C.A.L.

NNE : Matrice de connexion des éléments (voir les paragraphes de connexion du Chapitre 4).

NNT : Nombre Totale des Nœuds du maillage.

NPCNN : Numéro du Premier Case Non Nulle de la ligne.

NDCNN : Numéro de Dernière Case Non Nulle de la même ligne.

IP, IG : Variables pour stocker la valeur du numéro le plus grand et le plus petit d'un élément.

ICL(.) : Vecteur qui indique les nœuds de frontière lorsque = 1, sinon il égale à 0 pour les nœuds interne.

**V-3-2/ EXEMPLE ILLUSTRANT L'INFLUENCE DE LA NUMEROTATION DES NŒUDS**

Pour illustrer ce qu'on a dit, on reprend l'exemple de chapitre 4 de paragraphe §IV-3-A-4 où en faisant varier la numérotation d'un domaine pour différent cas, ainsi la valeur de la demi bande B. Pour chaque cas, on trace la matrice [K] pour présenter sa taille et les positions des cases non nulles et calculer le nombre des zéros.

le domaine est de forme rectangulaire qui sera discrétisé en 30 éléments triangulaires à trois nœuds, comme l'indique la figure (Fig. V-8) :

Chaque élément du domaine contient trois nœuds, alors la matrice de rigidité élémentaire d'après le chapitre III, est de l'ordre 3x3

On considère pour cet exemple trois cas de numérotation des nœuds différents et pour chaque cas, on va construire la matrice de rigidité du domaine complet et ça indépendamment des conditions aux limites. Il est à noter que pour cet exemple, le nombre de nœuds est égal à 24, alors la matrice de rigidité [K] est de rang 24x24.

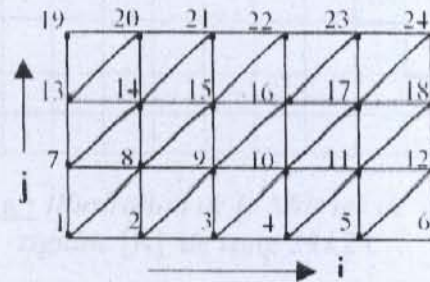
**Remarque :**

La numérotation des éléments ne pose aucun problème sur la valeur de la demi-bande de la matrice de rigidité, c'est-à-dire, elle est indépendante de la bande. Donc, on a :

**Cas I :** On va numéroter les nœuds suivant l'axe horizontal de gauche vers la droite en montant suivant y, voir la figure suivante (Fig. V-9a) pour plus d'illustration.



**Fig.V-8:** Numérotation des éléments



**Fig.V-9a:** Discretisation en éléments triangulaires Cas I

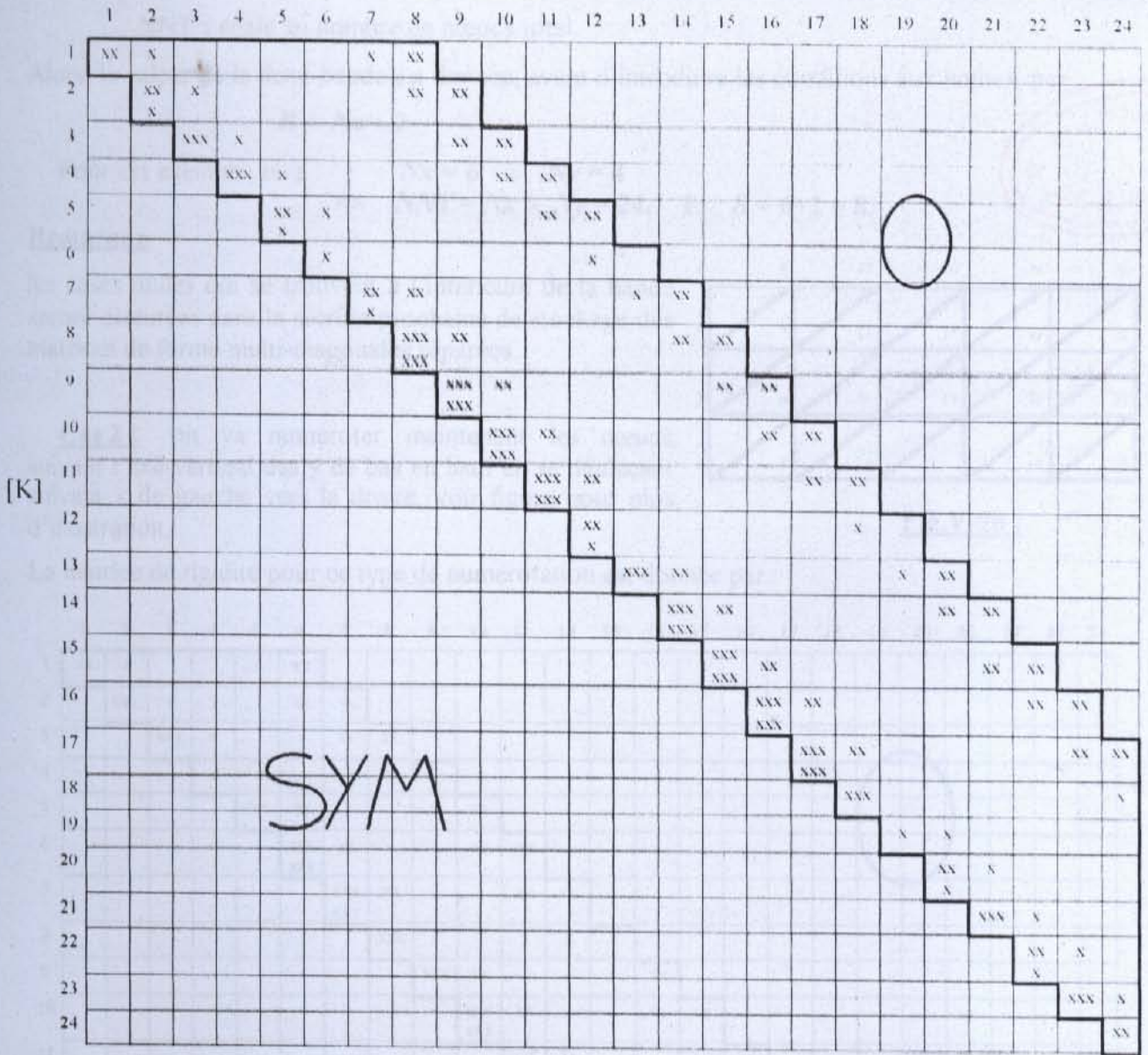
On peut bien remarquer que la largeur de la demi-bande 'B' est égale à :  $B = 8$  ainsi que le nombre des zéros à l'extérieur de la bande est égal à  $\frac{16 \times 17}{2} = 136$  cases.

La case qui contient plus d'un cochet (x) veut dire qu'elle sera rempli autant de fois le cochet. Exemple :

$$K(10,10) = K^5(2,2) + K^6(3,3) + K^7(3,3) + K^{16}(2,2) + K^{17}(1,1) + K^{18}(1,1)$$

la matrice de rigidité de ce domaine possède la forme suivante :





- case non nulle
- case nulle

**Fig.V-10 a :** Illustration de la Matrice de rigidité [K] de rang 24x24.

**Remarque:** On peut considérer plusieurs forme de calcul de K (10,10).

- K (9,10) contient la somme de deux valeurs puisque les nœuds 9 et 10 sont communs entre les éléments 5 et 16.
- K (6,12) par exemple contient la somme d'une valeur unique puisque l'arrête qui contient les nœuds 6 et 12 est sur la frontière du domaine. Autrement dit, elle est liée uniquement à un seul élément de numéro 10.
- K (1,1) contient la somme de deux valeurs, puisque le nœud 1 est commun entre les éléments 1et 2
- Chaque nœud de maillage est commun au maximum entre six (06) éléments finis, qui est vrai pour les nœuds interne. Les nœuds de frontières sauf les coins, sont liés entre trois (03) éléments finis. Or les points des coins restant sont liés en un élément ou deux.

Maintenant, si on considère que :  $NNT = Nx \times Ny$

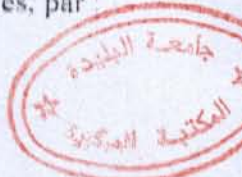
- Avec : Nx : égale au nombre de nœuds suivant le rangé 'x'.
- Ny : égale au nombre de nœuds suivant le rangé 'y'.

NNT : égale au nombre de nœuds total.

Alors, la valeur de la demi-bande est donnée, avant d'introduire les conditions aux limites, par :

$$B = Nx + 2$$

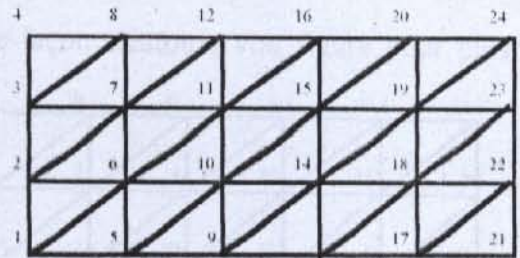
Pour cet exemple on a :  $Nx = 6$  ;  $Ny = 4$   
 $\Rightarrow NNT = Nx \times Ny = 24$ , Et  $B = 6 + 2 = 8$ .



**Remarque**

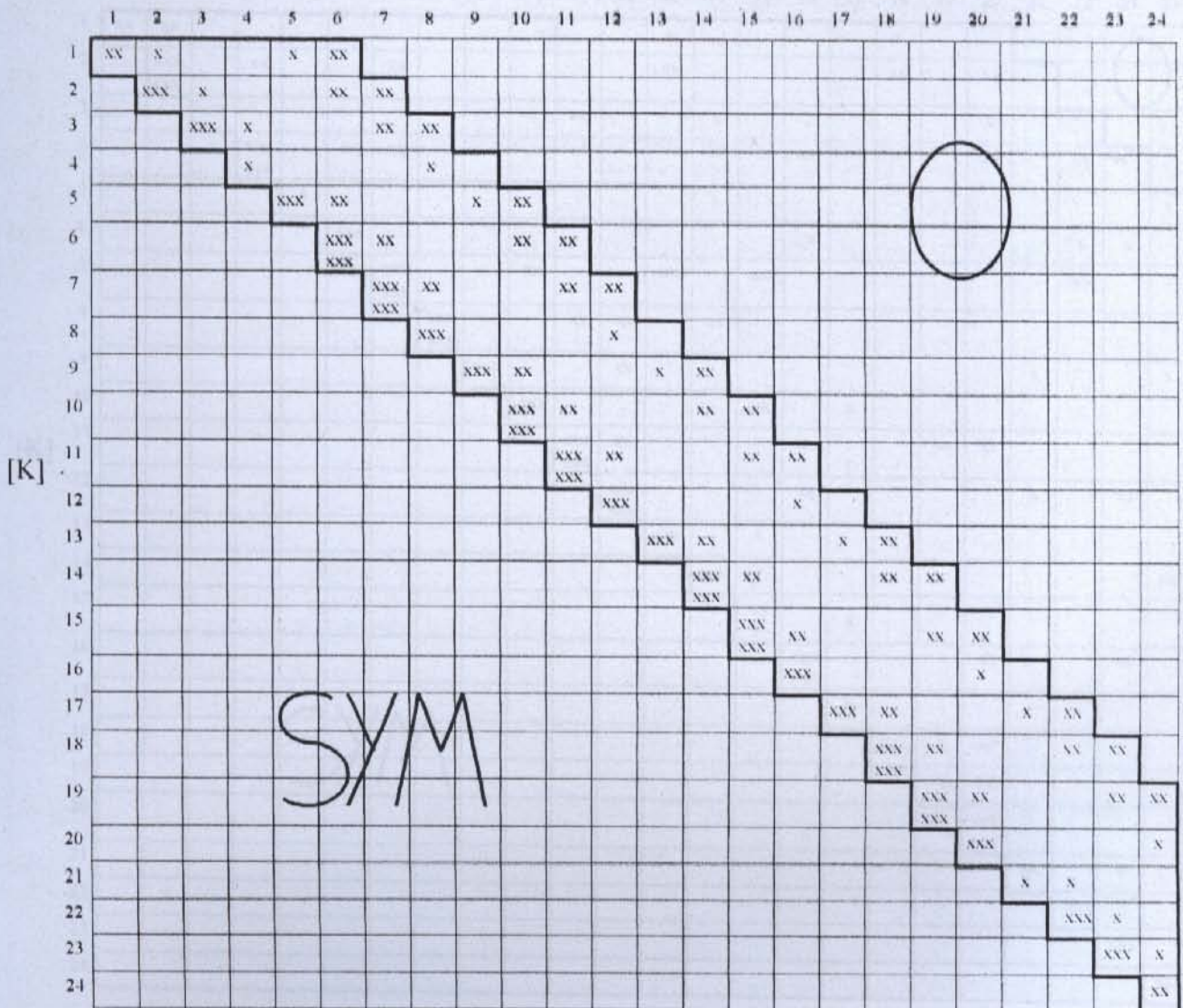
les cases nulles qui se trouvent à l'intérieur de la bande seront discutées dans la section prochaine de stockage des matrices de forme multi-diagonales séparées.

**Cas 2 :** on va numéroter maintenant les nœuds suivant l'axe vertical des y de bas en haut en se déplaçant suivant x de gauche vers la droite, voir figure pour plus d'illustration.



**Fig.V-9b :**

La matrice de rigidité pour ce type de numérotation est donnée par :



**Fig.V-10 b :**



On procède maintenant au calcul de la valeur de la bande de cette matrice. Comme la numérotation est aléatoire, on essaye de calculer la bande donnée pour chaque élément par la formule (V-14a) ensuite la bande par la formule (V-14b).

On a :

$$\begin{aligned}
 B_1 &= \text{Max}(1,2,13) - \text{Min}(1,2,3) + 1 = 12 & B_2 &= \text{Max}(1,18,2) - \text{Min}(1,2,18) + 1 = 18 \\
 B_3 &= \text{Max}(18,20,2) - \text{Min}(18,20,2) + 1 = 19 & B_4 &= \text{Max}(18,19,20) - \text{Min}(18,19,20) + 1 = 3 \\
 B_5 &= \text{Max}(19,20,11) - \text{Min}(19,20,11) + 1 = 10 & B_6 &= \text{Max}(19,11,3) - \text{Min}(19,11,3) + 1 = 17 \\
 B_7 &= \text{Max}(11,8,3) - \text{Min}(11,8,3) + 1 = 9
 \end{aligned}$$

Pour les éléments de 7 Jusqu'à 24, on trouve respectivement, 9,12,11,20,9,12,6,19,17,10,6,5, 5,17,8,9,16,19,19,13,18,12,12,13.

Alors la valeur de la demi bande de la matrice de rigidité [k] est calculée par :

$$B = \text{Max}(B_1, B_2, B_3, \dots, B_{30}) = \text{Max}(12, 18, 19, 3, \dots, 13) \quad \text{Donc : } B = 20$$

Pour ce cas, le nombre de zéros gagnés égale à 10 cases.

En conclusion, on déduit que le deuxième cas correspond à une numérotation optimale pour laquelle les cases non nulles se condensent le plus possible vers la diagonale principale.

**Remarque :**

- Dans le cas général d'un domaine quelconque, il n'est pas facile d'obtenir une numérotation optimale. On est amené à faire une estimation pour obtenir la plus petite valeur possible de la bande.

Finalement, si on veut généraliser maintenant à un domaine simplement connexe quelconque type 'H' à titre d'exemple, avec les conditions aux limites de type DIRICHLET, qui peut être considéré ou transformée en rectangle avec une discrétisation de  $N_x$  nœuds suivant l'axe horizontal des 'x' et  $N_y$  nœuds suivant l'axe vertical des 'y', donc on suit les étapes suivantes :

1. Le nombre des éléments finis est :
  - Pour un élément triangulaire :  $NEL = 2 \cdot (N_x - 1)(N_y - 1)$  (V-17a)
  - Pour un élément quadrilatère :  $NEL = (N_x - 1)(N_y - 1)$  (V-17b)
2. Le nombre total des nœuds  $NNT$  du domaine est donné par :
  - Pour un triangle 3 nœuds T3N ou quadrilatère à 4 nœuds Q4N :  $NNT = N_x \times N_y$
  - Pour un triangle 4 nds T4N ou quadrilatère à 5 nds Q5N :  $NNT = N_x \times N_y + NEL$
 Pour d'autres éléments avec différent nombre de nœuds, voir le programme suivant selon leur NTEF. (V-18)

On résume pour ces formules par la partie suivante du programme qui fait ce calcul :

```

C ***** CALCUL DU NBR DES NOEUDS TOTALE ET D'ELEMENTS SELON NTEF *****
40 IF (NTEF.LT.4) THEN
    NEL=(NNX-1)*(NNY-1)*2
ELSE
    NEL=(NNX-1)*(NNY-1)
ENDIF
IF (NTEF.EQ.1 OR NTEF.EQ.4) NNT=NNX*NNY
IF (NTEF.EQ.2 OR NTEF.EQ.5) NNT=NNX*NNY+NEL
IF (NTEF.EQ.3) NNT=(2*NNX-1)*(2*NNY-1)
IF (NTEF.EQ.6) NNT=(2*NNX-1)*(2*NNY-1)-NEL
C *****
    
```

3. On commence la numérotation suivant la direction qui possède le nombre de nœud minimal :  
 Si  $N_x \leq N_y$  on suive la numérotation comme le cas 1.  
 Si  $N_x > N_y$  on suive la numérotation comme le cas 2.

La longueur de la demi-bande est donnée, avant d'introduire des conditions aux limites par :

$$B = \text{Min} (N_x, N_y) + 2 \tag{V-19}$$

4. Le nombre de nœuds qui se trouvent sur la frontière du domaine, où la solution du problème est connue c'est-à-dire à éliminer de la résolution, est donné par :

$$NDDLE = 2N_x + 2N_y - 4 \tag{V-20}$$

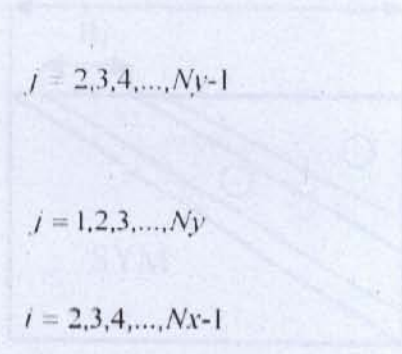
5. Les numéros des nœuds éliminés (nœuds de la frontière pour D.D.L = 1) sont donnés par :

\* Si  $N_x \leq N_y$  on a :

$$\begin{cases} K = i & i = 1, 2, 3, \dots, N_x \\ K = (N_y - 1) \cdot N_x + i & i = 1, 2, 3, \dots, N_x \\ K = (j - 1) \cdot N_x + 1 & j = 2, 3, 4, \dots, N_y - 1 \\ K = j \cdot N_x & j = 2, 3, 4, \dots, N_y - 1 \end{cases}$$

\* Si  $N_x > N_y$  on a :

$$\begin{cases} K = j & j = 1, 2, 3, \dots, N_y \\ K = (N_x - 1) \cdot N_y + j & j = 1, 2, 3, \dots, N_y \\ K = (i - 1) \cdot N_y + 1 & i = 2, 3, 4, \dots, N_x - 1 \\ K = i \cdot N_y & i = 2, 3, 4, \dots, N_x - 1 \end{cases}$$



6. Le nombre des inconnus restants qui entre dans la solution du problème pour un domaine type 'H' à titre d'exemple (c'est-à-dire le rang de la matrice de rigidité après l'introduction des C.A.L) est donné par :

$$\begin{aligned} NDDL R &= NN - NDDLE \\ &= N_x \cdot N_y - 2N_x - 2N_y + 4 \end{aligned} \tag{V-21}$$

7. La valeur finale de la demi-bande de La matrice de rigidité pour la résolution est donnée par :

$$B = \text{Min} (N_x, N_y) \tag{V-22}$$

Rappelant que la partie du calcul du programme après l'introduire des conditions aux limites est donnée dans le § V-4-1 précédent.

8. Le nombre des zéros qui se trouvent à l'extérieure de la bande (partie supérieure) est donne par :

$$NZERO = 1 + 2 + 3 + \dots + N - B = \frac{(N - B) \cdot (N - B + 1)}{2} \tag{V-23}$$

Par suite, dans les prochains paragraphes on traite le problème de stockage qui est plus amélioré que celui de précédent (bande). C'est le stockage des matrices à diagonales séparées et puis le stockage le plus économique en espace mémoire, c'est le stockage économique (ou complexe aléatoire).

**V-4 / METHODE DE STOCKAGE D'UNE MATRICE A DIAGONALES SEPARÉES**

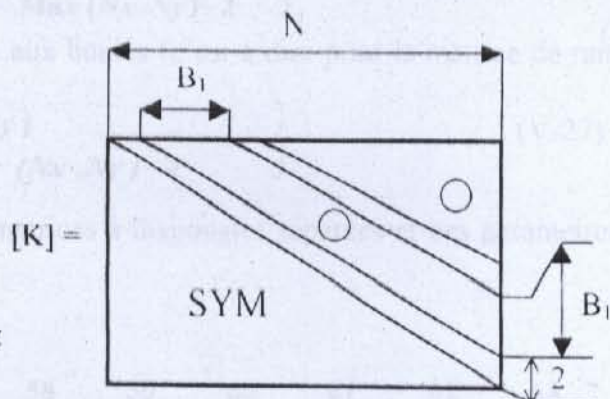
Le résultat considéré du § précédent de l'influence de la numérotation montre que la forme de la matrice de rigidité, obtenue par les différentes méthodes de numérotations, est bande et symétrique avec la largeur de la demi-bande 'B' doit être la plus petite possible.

Maintenant, si on regarde encore approfondissement à la forme de la matrice à l'intérieure de la demi-bande, on voit qu'elle contient un nombre important des zéros. Autrement, la matrice peut être de la forme de quatre diagonales séparées ou bi-bloc séparés, chaque bloc contient deux diagonales, (Fig.V-11).

Ce type de matrice n'est obtenu que si on suit une méthode de numérotation optimale (c.à.d une matrice avec une valeur minimale de la demi-bande).

Si les conditions aux limites sont de type DIRICHLET, la forme générale de la matrice de rigidité est de la forme suivante : (Fig. V-11)

**Fig. V-11 :** Matrice symétrique à quatre diagonales



Cette matrice contient quatre diagonales qui sont :

- La diagonale principale a N éléments.
- La diagonale adjacente à celle principale a (N-1) éléments.
- Une diagonale après "B<sub>1</sub> diagonales vides" contient N - B<sub>1</sub> - 2 éléments.
- Une diagonale adjacente à cette dernière contient N - B<sub>1</sub> - 3 éléments.

Avec B<sub>1</sub> : Le nombre des diagonales vides, c.à.d celles qui contiennent des zéros.  
 N : Le rang de la matrice.

Si on considère que cette matrice est bande, alors la relation existante entre B<sub>1</sub> et B est donnée par :  $B = B_1 + 4$ . Avec B : Largeur de la demi-bande complète

On constate bien que ce type de matrice contient un nombre très important de zéros à l'intérieure de la bande. Il est donné par :

$$\begin{aligned}
 NZERO &= \frac{B(2N - B + 1)}{2} - N - (N - 1) - (N - B_1 - 2) - (N - B_1 - 3) \\
 &= \frac{(B_1 + 4)(2N - B_1 - 4 + 1)}{2} - N - (N - 1) - (N - B_1 - 2) - (N - B_1 - 3) \\
 \text{Donc : } NZERO &= \frac{B_1(2N - B_1 - 3)}{2} \tag{V-24}
 \end{aligned}$$

Par contre, le nombre des éléments des diagonales non nuls qui se trouvent à l'intérieure de la bande dans la demi-partie supérieure de la matrice est donné par :

$$\begin{aligned}
 NCNN &= N + (N - 1) + (N - B_1 - 2) + (N - B_1 - 3) \\
 \text{Donc : } NCNN &= 4N - 2B_1 - 6 \tag{V-25}
 \end{aligned}$$

Tel que NCNN : Nombre des Cases Non Nuls.

Notre grand souhait est d'avoir  $NCNN$  le plus petit possible, implique que  $B_1$  doit être la plus grande valeur possible. Comme  $B = B_1 + 4$  alors, il faut que la valeur de la demi-bande soit, pour ce type de stockage, la plus grande possible.

**Remarque :**

Pour obtenir une largeur de la demi-bande plus grande possible afin que le nombre des diagonales vides  $B_1$  soit plus grand et pour obtenir un nombre de cases non nuls le plus petit possible, on suit la numérotation par la direction du côté qui contient le nombre de nœuds maximal.

Dans ce cas, la valeur de la demi-bande de la matrice de rigidité avant l'introduction des conditions aux limites est donnée par :

$$\left. \begin{aligned} B &= \text{Max}(N_x, N_y) + 2 \\ B_1 &= B - 4 = \text{Max}(N_x, N_y) - 2 \end{aligned} \right\} \quad (V-26)$$

Alors :

Et sa valeur après l'introduction ces conditions aux limites (c'est à dire pour la matrice de rang  $NDCLR$ ), est donnée par :

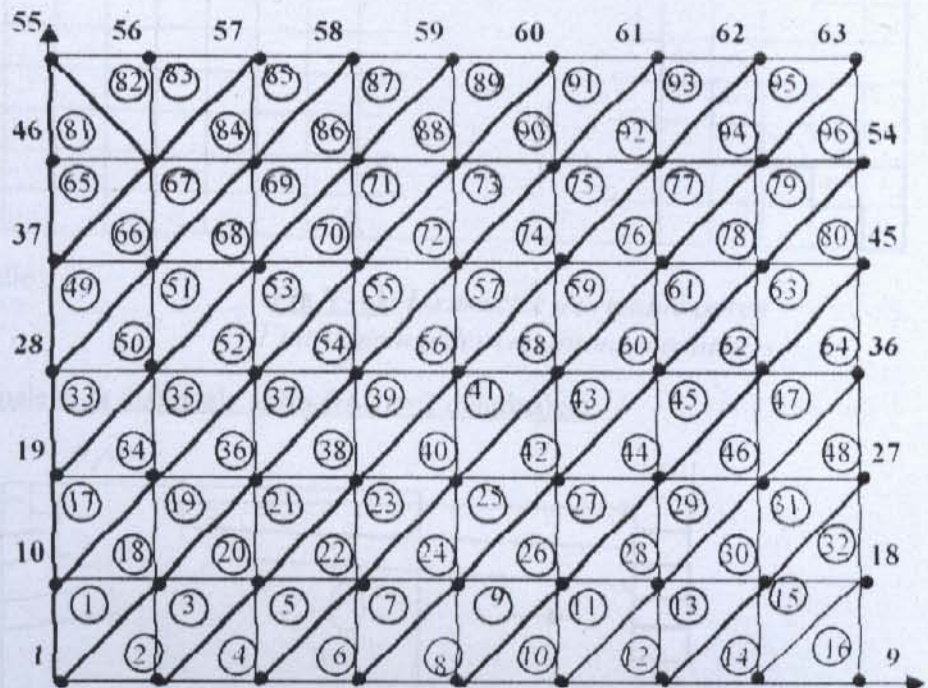
$$\left. \begin{aligned} B &= \text{Max}(N_x, N_y) \\ B_1 &= B - 4 = \text{Max}(N_x, N_y) - 4 \end{aligned} \right\} \quad (V-27)$$

Alors :

Pour illustrer la procédure de stockage des matrices à diagonales séparées et ces paramètres, nous considérons l'exemple typique suivant :

Soit un rectangle avec :

$N_x = 9$  et  $N_y = 7$



**Fig. V-12 :** Maillage typique subdivisé et numéroté

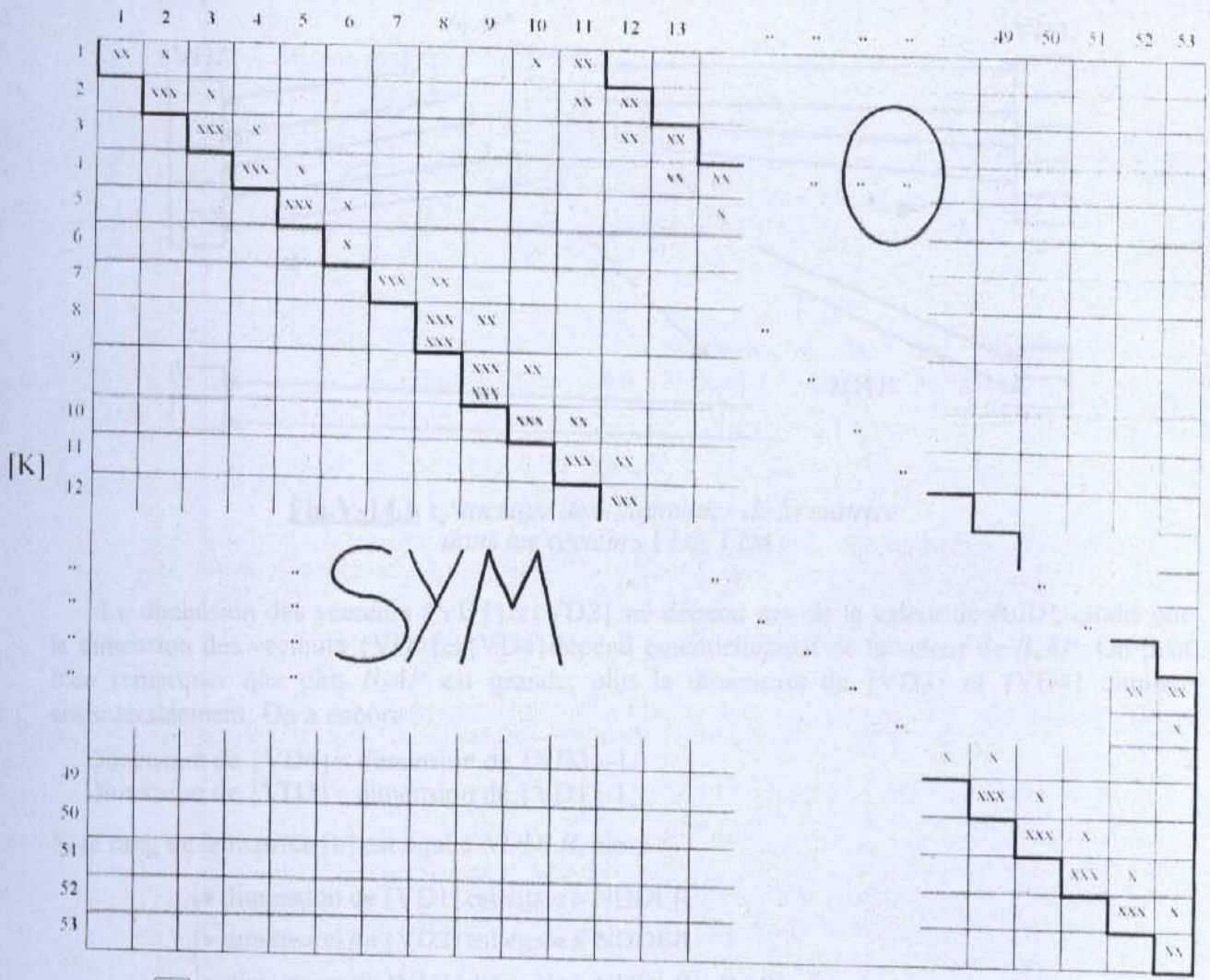
• **Numérotation :**

La façon de subdivision et de numérotation sera suivant l'axe horizontal des  $x$  puisque le nombre de nœuds  $N_x$  suivant l'axe  $x$  est supérieure au nombre de nœuds  $N_y$  suivant l'axe vertical des  $y$ , et cela de gauche à droite en montant avec l'axe  $y$ , voir figure (fig.V-12) pour plus illustration.

Pour éliminer les zéros (cases nulles) ainsi que la partie inférieure de la matrice, on s'intéresse à stocker uniquement les éléments des quatre diagonales de la façon suivante :

Chaque diagonale sera stockée dans un vecteur unicollone à part. Pour cela, on déclare quatre (4) vecteurs  $\{VD1\}$ ,  $\{VD2\}$ ,  $\{VD3\}$  et  $\{VD4\}$  pour stocker respectivement les éléments de la

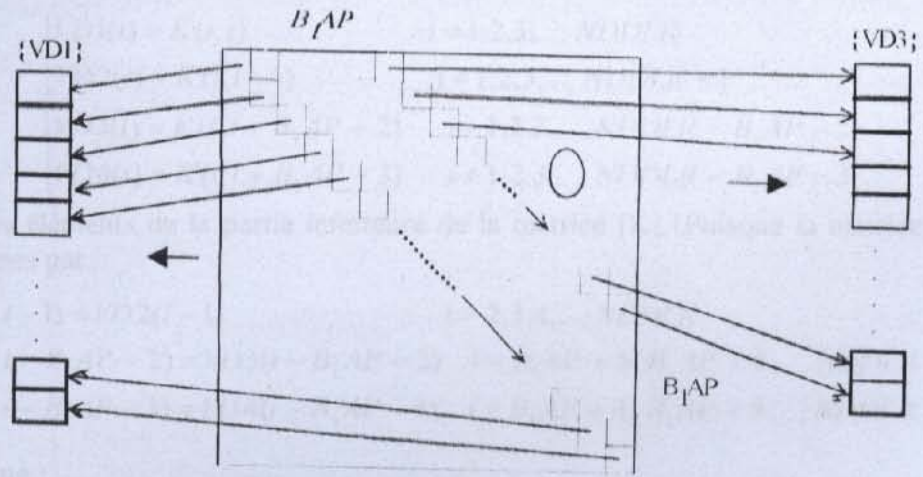
diagonale principale, celle adjacente, l'autre après ' $B_1AP+2$ ' diagonales et celle après ' $B_1AP+3$ ' diagonales. Alors :



Avec :  Case non nulle.  
 Case nulle.

**Fig.V-13:** La matrice de rigidité après l'introduction des conditions aux limites

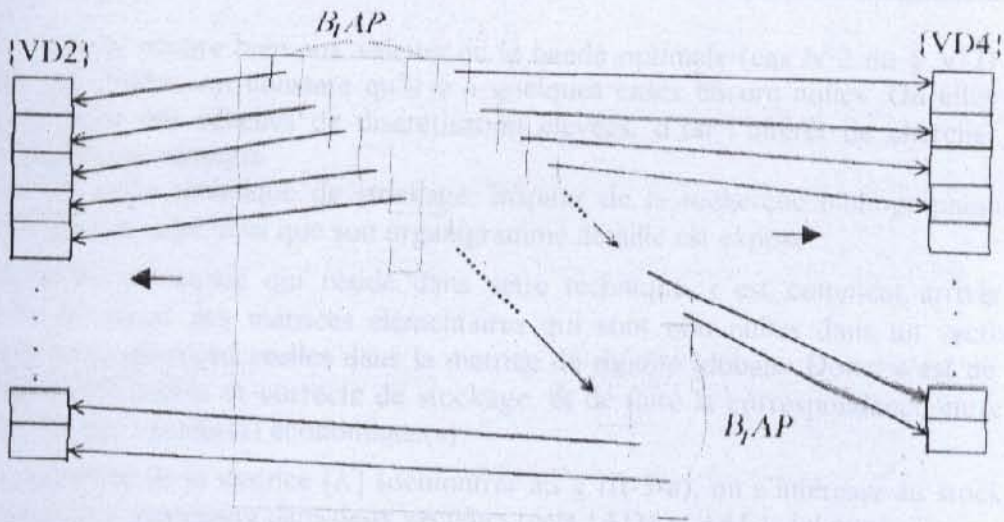
- Pour la diagonale principale et la diagonale après ( $B_1AP+2$  diagonales)



**Fig.V-14.a :** Stockage des diagonales de la matrice dans les vecteurs VD1, VD3



- Pour la 2<sup>ème</sup> diagonale et la dernière diagonale



**Fig.V-14.b** : Stockage des diagonales de la matrice dans les vecteurs VD2, VD4

La dimension des vecteurs {VD1} et {VD2} ne dépend pas de la valeur de  $B_1AP$ , tandis que la dimension des vecteurs {VD3} et {VD4} dépend essentiellement de la valeur de  $B_1AP$ . On peut bien remarquer que plus  $B_1AP$  est grande, plus la dimension de {VD3} et {VD4} diminue considérablement. On a encore :

- Dimension de {VD4} = dimension de {VD3} - 1.
- Dimension de {VD2} = dimension de {VD1} - 1.

Si le rang de la matrice [k] est égal à  $NDDL$ , alors :

- dimension de {VD1} est égale à  $NDDL$
- dimension de {VD2} est égale à  $NDDL - 1$
- dimension de {VD3} est égale à  $NDDL - B_1AP - 2$
- dimension de {VD4} est égale à  $NDDL - B_1AP - 3$

Alors, le transfert des cases entre la matrice [K] et les vecteurs {VD1}, {VD2}, {VD3} et {VD4} se fait de la manière suivante :

$$\begin{cases} VD1(i) = K(i, i) & i = 1, 2, 3, \dots, NDDL \\ VD2(i) = K(i, i + 1) & i = 1, 2, 3, \dots, NDDL - 1 \\ VD3(i) = K(i, i + B_1AP + 2) & i = 1, 2, 3, \dots, NDDL - B_1AP - 2 \\ VD4(i) = K(i, i + B_1AP + 3) & i = 1, 2, 3, \dots, NDDL - B_1AP - 3 \end{cases} \quad (V-28)$$

Pour les éléments de la partie inférieure de la matrice [K] (Puisque la matrice est symétrique) sont donnés par :

$$\begin{cases} K(i, i - 1) = VD2(i - 1) & i = 2, 3, 4, \dots, NDDL \\ K(i, i - B_1AP - 2) = VD3(i - B_1AP - 2) & i = B_1AP + 3, B_1AP + 4, \dots, NDDL \\ K(i, i - B_1AP - 3) = VD4(i - B_1AP - 3) & i = B_1AP + 4, B_1AP + 5, \dots, NDDL \end{cases} \quad (V-29)$$

**Remarque :**

Vu que, on a pu d'aboutir à une méthode plus économique en mémoire que celle là (stockage à diagonales séparées), alors on n'a pas donné ses algorithmes nécessaires où on a satisfait par ces illustrations précédentes. Dans la suite, on entame cette méthode de stockage économique.

**V-5/ STOCKAGE ECONOMIQUE D'UNE MATRICE SYMETRIQUE CREUSE**

Si on regarde encore bien aux valeurs de la bande optimale (cas N°2 du § V-3) et puis ses diagonales non nulles, on constate qu'il y a quelques cases encore nulles. Où elles deviennent importantes pour des échelles de discrétisation élevées, d'où l'intérêt de chercher encore un procédé le plus économique.

L'idée de cette technique de stockage, inspirer de la recherche bibliographique [17], est développée dans la suite ainsi que son organigramme détaillé est exposé.

La difficulté principale qui réside dans cette technique, c'est comment arriver à stocker uniquement les cases des matrices élémentaires qui sont non nulles dans un vecteur tout en connaissant leurs positions réelles dans la matrice de rigidité globale. Donc, c'est de déterminer la procédure convenable et correcte de stockage, et de faire la correspondance entre la matrice globale et ce (ces) vecteur(s) économique(s).

Vu la symétrie de la matrice [K] (démontrer au § III-5-a), on s'intéresse au stockage que sa partie triangulaire supérieure dans deux vecteurs réels {AD} et {AE}, tel que :

- {AD} vecteur contenant les valeurs de la Diagonale principale de la matrice globale [K].
- {AE} vecteur contenant toutes les valeurs Extérieures à cette diagonale de la demi-bande supérieure.

Alors, on procède au chargement de la matrice de rigidité globale [K] à partir des matrices élémentaires comme suit :

- On met les coefficients diagonaux de [K] dans le vecteur AD(NNT) de dimension égale au Nombre de Nœuds Total du maillage 'NNT'.
- Pour les coefficients non diagonaux et non nuls de la partie triangulaire supérieure de la matrice [K] sont stockés dans le vecteur AE(NcasMax) qui a une dimension de l'ordre en général trois fois NNT.

On crée deux autres vecteurs entiers {IL} et {IC}, où on stocke dans le premier vecteur IL(NNT) le nombre de cases de {AE} dans chaque ligne de la matrice globale [K]. Cependant, on stocke dans le deuxième vecteur IC(NcasMax) l'indice de colonne des éléments de {AE}.

**V-5-1/ Procédure de chargement de AD et le vecteur force global VF**

On note par AKE(i,j) la case d'une matrice de rigidité élémentaire d'un élément fini 'k' après son chargement selon son type montrer dans § III-7, tel que cette case se trouve sur la i<sup>ème</sup> ligne et dans le j<sup>ème</sup> colonne.

Alors, pour balayer tous les éléments, on fait varier k de 1 à NEL (le Nombre d'ELément dans le maillage). Pour k fixé, on a 'i' varié de 1 à NNPE, donc on charge en même temps le vecteur diagonal {AD} et le vecteur force {AF} global :

$$\left. \begin{array}{l}
 k = 1, NEL \\
 \dots \\
 i = 1, NNPE \\
 \dots \\
 m = \text{IGNR}( \text{NNE}(k,i) ) \\
 AD(m) = AD(m) + AKE(i,i) \\
 AF(m) = AF(m) + VFE(i)
 \end{array} \right\} \quad (V-30)$$

Tel que 'm' : Indice du nœuds de la numérotation globale du maillage après l'introduction des conditions aux limites, déterminer par le vecteur IGNR(...) et la matrice connexion NNE(K,i) décrit au chapitre 4.

'i' : Indice de la numérotation locale de l'élément fini 'k'.

IGNR(.) : vecteur inverse (Inverse de la numérotation Globale des Nœuds Restant après l'introduction des C.A.L) de vecteur NGNR (au sens de fonction inverse) où ce dernier conserve la numérotation première faite avant l'application des C.A.L. sur le système d'équation, donc sur la matrice de rigidité globale.

**Remarque :**

Le rang de la matrice de rigidité du système avant l'introductions des conditions aux limites est égale à  $NN$  qui est égale à  $N_x N_y$ , et après l'application des conditions aux limites, le rang de la matrice sera réduit à la valeur NDDL. A titre d'exemple pour un maillage type 'H' simplement connexe :  $NDDL = (N_x - 2)(N_y - 2)$ .

Alors, il est indispensable de crée un vecteur qui indique les numéros de nœuds restant après avoir appliquer les conditions aux limites, donc des lignes (et des colonnes), de la matrice globale seront éliminées, permettant l'assemblage des matrices élémentaires, pour cela on note le vecteur NGNR (Numérotation Globale des Nœuds Restant) et évidemment pour le besoin de calcul on a créé le vecteur IGNR(i) détermine les indices du vecteur NGNR précédent donc son inverse.

Pour connaître la procédure de chargement de ces vecteurs, voir le paragraphe § V-5-2.

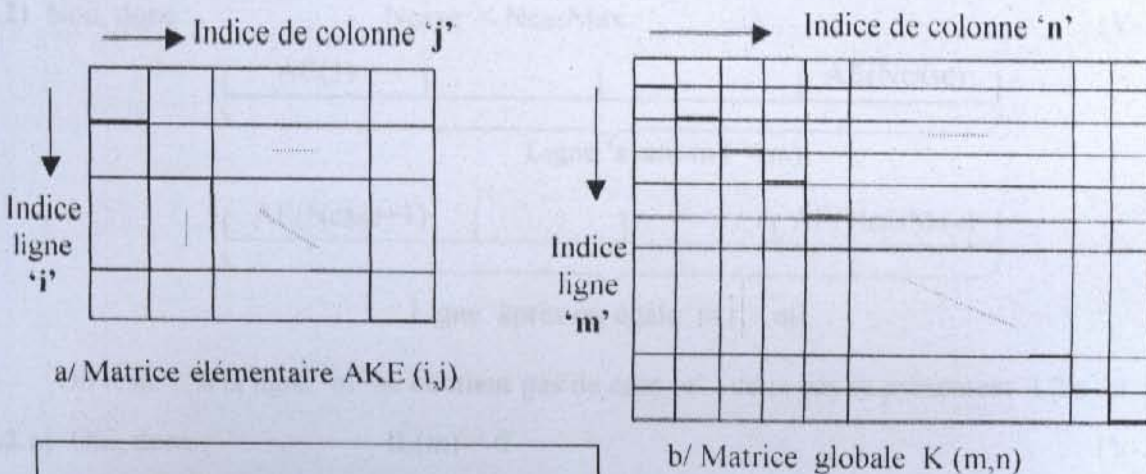
**V-5-2/ Procédure et organigramme de chargement de AE, IL et IC**

Rappelant que la difficulté de programmation qui se présent est de repérer et de charger l'élément 'e' du vecteur {AE} correctement dans lequel l'élément  $a_{ij}^k$  de la matrice élémentaire AKE va se placer.

Alors, dans cette partie on va essayer de décrire les démarches de repérage et de stockage en détail et puis, on ajoute un organigramme qui récapitule ces étapes. Où on va le programmer pour nos calculs.

En premier lieu, on entame le chargement du vecteur {AE}, et ces compléments : les vecteurs {IL} et {IC} en parallèle comme suit :

Pour un élément k fixé, on fait varier i de 1 à NNPE-1 et j de 'i+1' à NNPE, vu la symétrie des matrices élémentaires. Et en imposant que  $n > m$ , tel que m et n sont les correspondances de la numérotation globale du maillage des nœuds locaux i et j respectivement, afin de ne stocker que la partie triangulaire supérieure de la matrice symétrique [K].(voir la figure V-15)



**Fig. V-15 a,b :** illustration des indices des matrices élémentaires et globale

On crée les variables complémentaires suivants :

- L : indice servant à repérer une case 'e' de la ligne m de [K].
- Ncase : nombre de cases 'e' des lignes de la matrice [K] situant avant la ligne 'm'.
- NcasMax : nombre total de case 'e' stocker dans {AE}, inconnu au départ.
- ii : compteur utilisé par les boucles.

Alors, nous utilisons les conséquences logiques exposées si dessous pour construire les tableaux et les algorithmes du chargement de {AE} :

Pour i et j fixés Dans un élément k : deux cas majeurs I) et II) se présentent : (Voir organigramme O1). Alors :

I)  $m > 1$  : Qu'il y ait ou non des cases 'e' dans les lignes avant 'm' on a :

$$Ncase = \sum_{ii=1}^{m-1} II.(ii) \tag{V-31}$$

On initialise L :  $L=1$  (V-32)

On teste : Si Ncase égale NcasMax, deux cas I.1) et I.2) se présentent.

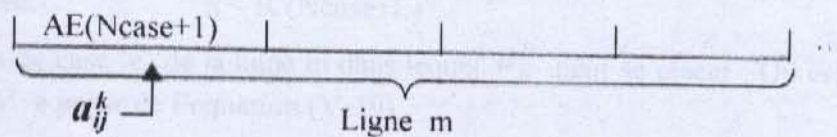
I.1) Si Oui, donc  $Ncase = NcasMax$  (V-33)

Dans ce cas, on passe à créer une case 'e' correspond au premier élément de la ligne 'm'. Alors :

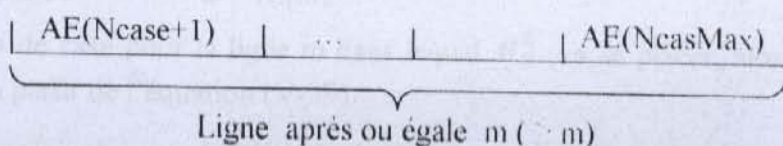
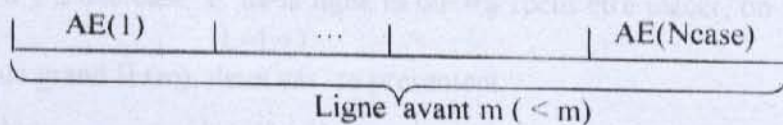
- NcasMax augmenter d'une unité :  $NcasMax = NcasMax + 1$  (V-34)

- IL(m) augmente d'une unité :  $IL(m) = IL(m) + 1$  (V-35)

- $a_{ij}^k$  est placé dans AE(Ncase+1) : 
$$\begin{cases} AE(Ncase+L) = AE(Ncase+L) + AKE(i,j) \\ IC(Ncase+L) = n \end{cases} \tag{V-36}$$



I.2) Non, donc :  $Ncase < NcasMax$  (V-37)



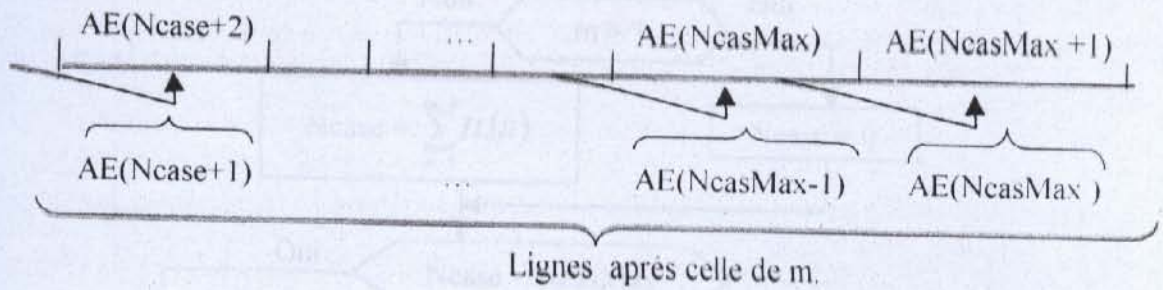
On teste : si la ligne 'm' ne contient pas de case 'e' ; deux cas se présentent I.2.a) et I.2.b).

I.2.a) Oui, donc :  $IL(m) = 0$  (V-38)

Sous les hypothèses I.2) et I.2.a) , on a AE(Ncase+1) ... AE(NcasMax) occupée par des cases 'e' des lignes après m, ( $> m$ ).

Avant de placer  $a_{ij}^k$  , il est nécessaire de décaler ces cases 'e', tout en conservant les indices de colonne. Donc on décale comme suit :

$$\begin{aligned}
 & \left. \begin{aligned}
 & ii = NcasMax+1, Ncase+L, -1 \quad (ii \text{ est d\text{e}cr\text{e}ment\text{e} d'un, c.\text{a}.\text{d} \text{'-1'}) \\
 & AE(ii) = AE(ii-1) \\
 & IC(ii) = IC(ii-1) \\
 & AE(Ncase+L) = 0
 \end{aligned} \right\} \quad (V-39)
 \end{aligned}$$



Apr\`es avoir d\`ecal\`er les cases, on place  $a_{ij}^k$  dans  $AE(Ncase+1)$ . Donc on est ramen\`e au § I.1 \`a partir de l'\`equation (V-34).

**I.2.b)** Non, donc :  $IL(m) \geq 1$  (V-40)

On cherche s'il existe une case 'e' de la ligne m dans lequel  $a_{ij}^k$  va se placer ; on commence par 'n' et  $IC(Ncase+L)$ . On teste : si n \`egale  $IC(Ncase+L)$ , deux cas I.2.b.1 et I.2.b.2 se pr\`esentent.

**I.2.b.1)** Oui, donc :  $n = IC(Ncase+L)$

$a_{ij}^k$  est plac\`e dans {AE} par l'\`equation (V-36) de I.1.

**I.2.b.2)** Non, donc :  $n \neq IC(Ncase+L)$

On teste : si  $n < IC(Ncase+L)$ , deux cas I.2.b.2.1 et I.2.b.2.2 se pr\`esentent :

**I.2.b.2.1)** Oui, donc :  $n < IC(Ncase+L)$

Il n'existe pas de case 'e' de la ligne m dans lequel  $a_{ij}^k$  peut se placer ; On est ramen\`e donc \`a l'\`etape de '§I.2.a' \`a partir de l'\`equation (V-39).

**I.2.b.2.2)** Non, donc :  $n > IC(Ncase+L)$

On cherche s'il y a une case 'e' de la ligne m o\`u  $a_{ij}^k$  peut \`etre plac\`e, on augmente L d'une unit\`e :

$$L = L + 1$$

On teste : si 'L' plus grand  $IL(m)$ , deux cas se pr\`esentent :

**I.2.b.2.2.a)** Oui, donc :  $L > IL(m)$

Il n'existe pas de case pour la ligne m dans lequel  $a_{ij}^k$  va se placer, alors on est ramen\`e \`a l'\`etape de §I.2.a \`a partir de l'\`equation (V-39).

**I.2.b.2.2.b)** Non,  $L \leq IL(m)$

On est ramen\`e au test de §I.2.b.

**II)** Si  $m = 1$ , Il n'y a aucune ligne avant 1, donc :

$$Ncase = 0$$

$$(V-41)$$

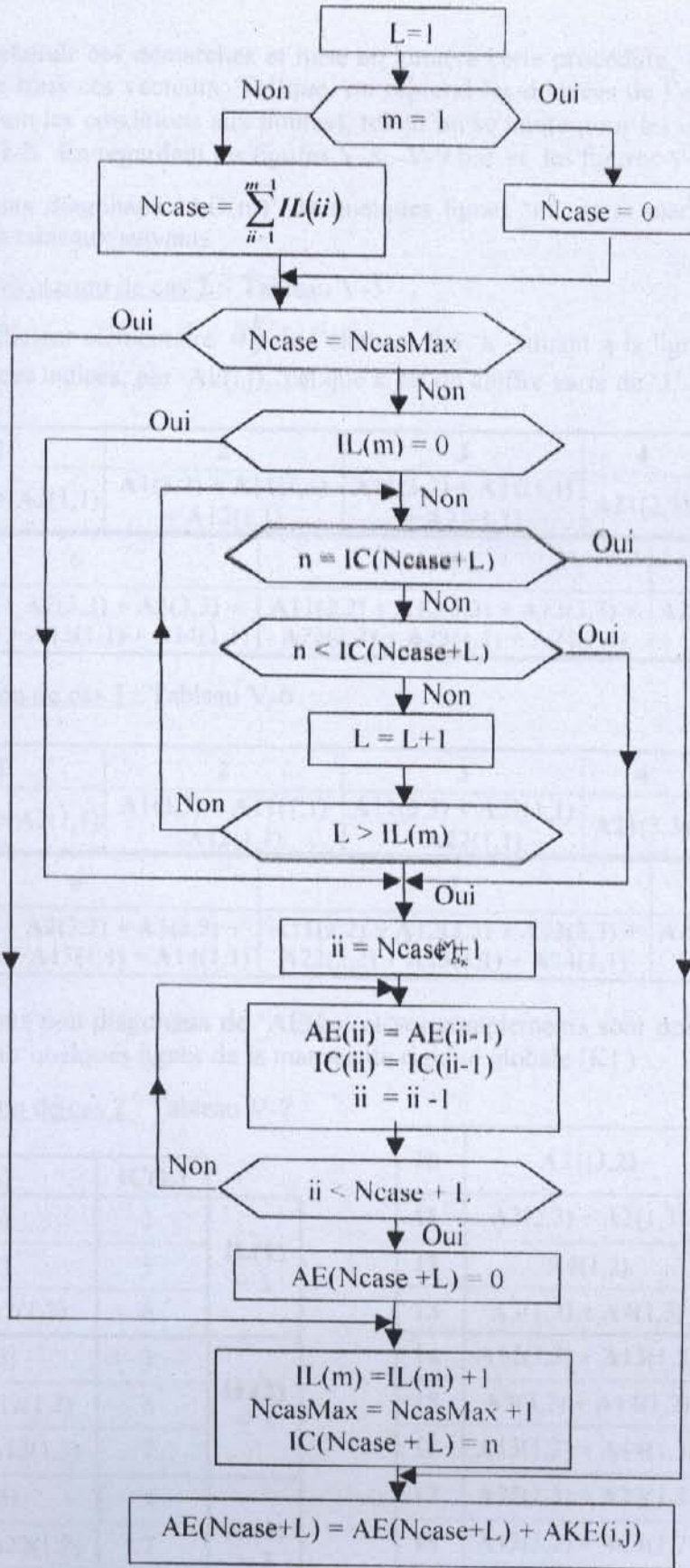
On initialise L :  $L = 1$ .

Puis, on est ramen\`e au test de dernier paragraphe de l'\`etape de '§I' apr\`es l'\`equation (V-32).

En fin, on expose l'organigramme de chargement du vecteur {AE} et ses compl\`ements dans la suite :

Organigramme de chargement de AE et ses compléments (O1)

Pour k fixé, et i, j donnés.



Incrémentation de i, j et k .....

Donc le nombre final de cases non nulles est 'NcasMax' calculer par le programme après l'assemblage de tous les éléments.

Exemple :

Afin de bien éclaircir ces démarches et mise en lumière cette procédure, on traite un exemple de remplissage de tous ces vecteurs. Tel que, on reprend les données de l'exemple du § V-3-2, (avant l'introduction les conditions aux limites), tel qu'on se limite pour les cas de numérotations '2' et '3' du § V-3-2. En regardant les figures V-8, V-9 b,c et les figures V-10 b,c on trouve :

- Les coefficients diagonaux 'AD(m)' de quelques lignes 'm' de la matrice de rigidité sont données par les tableaux suivants :

- Pour la numérotation de cas 2 : Tableau V-5

On note le coefficient élémentaire  $a_{ij}^k$  de l'élément fini 'k' situant à la ligne 'i' et à la colonne 'j', pour éclaircir ces indices, par  $A_k(i,j)$ . Tel que k est un chiffre varie de '1' jusqu'à 'NEL'

Ligne m	1	2	3	4	5
AD(m)	$A1(1,1) + A2(1,1)$	$A1(3,3) + A11(1,1) + A12(1,1)$	$A11(3,3) + A21(1,1) + A22(1,1)$	$A21(3,3)$	$A2(2,2) + A3(1,1) + A4(1,1)$
Suite m	6		7		8 ...
AD(m)	$A1(2,2) + A2(3,3) + A3(3,3) + A12(2,2) + A13(1,1) + A14(1,1)$	$A11(2,2) + A12(3,3) + A13(3,3) + A22(2,2) + A23(1,1) + A24(1,1)$	$A21(2,2) + A22(3,3) + A23(3,3)$		...

- Numérotation de cas 3 : Tableau V-6

m	1	2	3	4	5
AD(m)	$A1(1,1) + A2(1,1)$	$A1(3,3) + A11(1,1) + A12(1,1)$	$A11(3,3) + A21(1,1) + A22(1,1)$	$A21(3,3)$	$A2(2,2) + A3(1,1) + A4(1,1)$
Suite m	6		7		8 ...
AD(m)	$A1(2,2) + A2(3,3) + A3(3,3) + A12(2,2) + A13(1,1) + A14(1,1)$	$A11(2,2) + A12(3,3) + A13(3,3) + A22(2,2) + A23(1,1) + A24(1,1)$	$A21(2,2) + A22(3,3) + A23(3,3)$		...

- Les coefficients non diagonaux de 'AE(L)' et ses compléments sont données par les tableaux suivants, (Pour quelques lignes de la matrice de rigidité globale [K]) :

- Numérotation de cas 2 : Tableau V-7

L	AE(L)	IC(L)	IL(1) = 3
1	$A1(1,3)$	2	
2	$A2(1,2)$	5	IL(2) = 3
3	$A1(1,2) + A2(1,3)$	6	
4	$A11(1,3)$	3	
5	$A1(3,2) + A12(1,2)$	6	IL(3) = 3
6	$A11(1,2) + A12(1,3)$	7	
7	$A21(1,3)$	4	
8	$A11(3,2) + A22(1,2)$	7	
9	$A21(1,2) + A22(3,2)$	8	

10	$A21(3,2)$	8	IL(4) = 1
11	$A2(2,3) + A3(1,3)$	6	IL(5) = 3
12	$A4(1,2)$	9	
13	$A3(1,2) + A4(1,3)$	10	IL(6) = 3
14	$A12(2,3) + A13(1,3)$	7	
15	$A3(3,2) + A14(1,2)$	10	
16	$A13(1,2) + A14(1,3)$	11	IL(7) = 3
17	$A22(2,3) + A23(1,3)$	8	
18	$A13(3,2) + A24(1,2)$	11	
...	...	...	...

- Numérotation de cas 3 : Tableau V-8

L	AE(L)	IC(L)	
1	A1(1,2) + A2(1,3)	2	IL(1) = 3
2	A1(1,3)	13	
3	A2(1,2)	18	
4	A13(1,2) + A14(1,3)	4	IL(2) = 5
5	A12(2,3) + A13(1,3)	7	
6	A1(2,3) + A12(2,1)	13	
7	A2(3,2) + A3(3,1)	18	
8	A3(3,2) + A14(1,2)	20	
9	A7(1,2) + A8(1,3)	8	IL(3) = 4
10	A6(2,3) + A7(1,3)	11	
11	A8(1,2)	14	
12	A6(2,1)	19	

13	A25(1,2) + A26(1,3)	6	IL(4) = 5
14	A13(2,3) + A24(2,1)	7	
15	A15(3,2) + A26(1,2)	16	
16	A14(3,2) + A15(3,1)	20	
17	A24(2,3) + A25(1,3)	22	
18	A10(2,1)	14	IL(5) = 2
19	A10(2,3)	24	
20	A26(3,2) + A27(3,1)	16	IL(6) = 3
21	A25(2,3)	22	
22	A27(3,2)	23	
23	A22(2,3) + A23(1,3)	10	IL(7) = 4
24	A11(2,1) + A12(3,1)	13	
...	...	...	...

**Remarque 1 :**

On remarque d'après le processus complexe de remplissage du vecteur {AE} que ses cases sont chargées d'une manière alternée aléatoire. C'est à dire, dans quelque fois en avançant par création des nouvelles cases vides et en incrémentant sa taille. Cependant dans quelque fois en revenant à l'arrière le long de ces cases et à position calculée, on décale certaines par création d'une nouvelle case vide, puis elle est remplie par une valeur correspondante d'une case de la matrice d'élément.

Ainsi que, on aperçoit que le transfère de ces valeurs élémentaires vers les cases de {AE}, suit une technique la plus économique possible, mais n'a pas une récurrence simple comme le cas de stockage bande ou le cas de stockage à diagonales séparées. D'où le nom qu'on propose pour cette technique qui est « le stockage économique complexe aléatoire ».

**Remarque 2 :**

On constate après une inspection profonde des matrices de rigidité des différents exemples traités précédemment que : Avec cette technique de stockage économique (complexe) le nombre de cases non nulles est indépendant de la façon de numérotation des nœuds de maillage suivie.

De la, on conclue qu'en plus de l'avantage de gain de mémoire maximum atteint, le problème de la numérotation optimale traitée auparavant est dépassé et il ne présente plus un aléa.

D'où d'après ces remarques et les explications du chapitre 4, on recommande pour les cas de géométries simplement connexes de maillage type non 'H' ou celle des géométries multi connexe, d'utiliser le procéder de stockage économique (complexe) surtout pour des échelles de discrétisation moyennes ou élevées.

Enfin, après avoir prêt le problème de stockage et l'influence de la numérotation, on va procéder maintenant à la description qualitative des méthodes de résolution d'un système d'équations adaptées pour des matrices bandes stockées sous forme d'un vecteur.



**V-6/ METHODES DE RESOLUTION D'UN SYSTEME D'EQUATIONS LINEAIRE (ADAPTES A NOS PROBLEMES)**

Après avoir remplie et stocké la matrice de rigidité  $[K]$  globale et le vecteur  $\{F\}$ , et afin de déterminer le vecteur solution  $\{W\}$ , on est amené à résoudre le système d'équations suivant :

$$[K] \{W\} = \{F\} \tag{V-42}$$

On a adapté deux méthodes principales pour la résolution numérique du système (V-42). L'une est une méthode directe caractérisée par un nombre d'opérations fini et limité donc résolvant des systèmes à taille modérée. L'autre est une méthode itérative caractérisée par un nombre d'opérations inconnu (indéterminé) pour avoir la solution à une précision près, mais l'avantage qu'elle est apte à résoudre des systèmes assez élevés en taille.

**V-6-1/ METHODES DIRECTE**

**V-6-1-A/ Méthode de décomposition de KHALESTKI**

Supposons dans la première étape que la matrice  $[K]$  est quelconque mais carrée et pleine. Nous présenterons l'algorithme de résolution de cette matrice [24], ensuite nous déduirons l'algorithme de résolution pour une matrice symétrique et Bande.

Pour cela, on a choisi la méthode de *KHALESTKI* comme méthode de résolution.

**1°) Matrice carrée pleine et quelconque**

Mettons la matrice  $[K]$  sous la forme d'un produit de deux matrices, l'une triangulaire inférieure  $[L] = [L_{ij}]$  et l'autre triangulaire supérieure  $[H] = [H_{ij}]$  à diagonale unité.

C'est à dire que:  $[K] = [L] [H]$

$$\text{Où : } [L] = \begin{bmatrix} L_{11} & & & & & \\ L_{21} & L_{22} & & & & \\ L_{31} & L_{32} & L_{33} & & & \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & & \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \\ L_{n1} & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & L_{nn} \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad [H] = \begin{bmatrix} 1 & H_{12} & H_{13} & \cdot & \cdot & H_{1n} \\ & 1 & H_{23} & \cdot & \cdot & H_{2n} \\ & & 1 & \cdot & \cdot & H_{3n} \\ & & & \cdot & \cdot & \cdot \\ & 0 & & & \cdot & \cdot \\ & & & & & 1 \end{bmatrix}$$

Les éléments  $L_{ij}$  et  $H_{ij}$  se calculent par les formules suivantes :

$$\left. \begin{aligned} L_{1j} &= K_{1j} \quad , \quad H_{1j} = K_{1j}/L_{1j} \quad j = 2,3,\dots,n \\ L_{ij} &= K_{ij} - \sum_{k=1}^{j-1} L_{ik} H_{kj} \quad j = 1,2,3,\dots,i \\ H_{ij} &= \frac{1}{L_{ii}} \left( K_{ij} - \sum_{k=1}^{i-1} L_{ik} H_{kj} \right) \quad j = i+1, i+2, i+3,\dots,n \end{aligned} \right\} \quad i = 2,3,\dots,n \tag{V-43}$$

Donc, on aura deux systèmes d'équations à matrice triangulaire.

$$[K] \cdot \{W\} = \{F\} \Rightarrow [L] \cdot [H] \cdot \{W\} = \{F\}$$

On pose  $[H] \cdot \{W\} = \{Y\}$  (V-44)

Alors  $[L] \cdot \{Y\} = \{F\}$  (V-45)



Et 
$$\begin{cases} W_n = Y_n & (V-51a) \\ \left\{ \begin{aligned} W_i &= Y_i - \frac{1}{L_{ii}^r} \sum_{r=i+1}^n L_{ir} W_r & i = n-1, n-2, \dots, n-B+1 \\ W_i &= Y_i - \frac{1}{L_{ii}^r} \sum_{r=i+1}^{i+B-1} L_{ir} W_r & i = n-B, n-B-1, \dots, 3, 2, 1 \end{aligned} \right. & (V-51b) \end{cases}$$

Pour voir exactement la forme interne de la matrice (V-48), considérant un exemple avec lequel :  $n=12, B=5$  (voir la figure suivante : Fig. 5-16 ).

K <sub>11</sub>												
K <sub>21</sub>	K <sub>22</sub>											
K <sub>31</sub>	K <sub>32</sub>	K <sub>33</sub>										
K <sub>41</sub>	K <sub>42</sub>	K <sub>43</sub>	K <sub>44</sub>									
K <sub>51</sub>	K <sub>52</sub>	K <sub>53</sub>	K <sub>54</sub>	K <sub>55</sub>								
	K <sub>62</sub>	K <sub>63</sub>	K <sub>64</sub>	K <sub>65</sub>	K <sub>66</sub>							
		K <sub>73</sub>	K <sub>74</sub>	K <sub>75</sub>	K <sub>76</sub>	K <sub>77</sub>						
			K <sub>84</sub>	K <sub>85</sub>	K <sub>86</sub>	K <sub>87</sub>	K <sub>88</sub>					
				K <sub>95</sub>	K <sub>96</sub>	K <sub>97</sub>	K <sub>98</sub>	K <sub>99</sub>				
	0				K <sub>10,6</sub>	K <sub>10,7</sub>	K <sub>10,8</sub>	K <sub>10,9</sub>	K <sub>10,10</sub>			
						K <sub>11,7</sub>	K <sub>11,8</sub>	K <sub>11,9</sub>	K <sub>11,10</sub>	K <sub>11,11</sub>		
							K <sub>12,8</sub>	K <sub>12,9</sub>	K <sub>12,10</sub>	K <sub>12,11</sub>	K <sub>12,12</sub>	

**Fig. V-16 :** Exemple d'une matrice bande de l'équation (V-48).

**V-6-1-B/ Méthodes de décomposition de CHOLEVSKI [23], [19]**

Dans le cas d'une matrice indéfinie, la matrice [K] symétrique peut être décomposée sous la forme suivante :

$$[K] = [L] \cdot [D] \cdot [L]^T \tag{V-52}$$

Avec [L] : Matrice triangulaire inférieure (les éléments au-dessous de la diagonale sont non nuls) avec une diagonale unité.

[D] : Matrice triangulaire avec les éléments Pivots  $d_{ii} \neq 0$

[L]<sup>T</sup> : La transposée de la matrice [L]

**Remarque :**

Les algorithmes de cette décomposition et la résolution de leurs systèmes issus sont donnés par le référence [19].

Si la matrice [K] est symétrique et *définie positive*, on peut décomposer la matrice [K] sous la forme suivante :

$$[K] = [L]^T \cdot [L] \tag{V-53}$$

Dans ce cas la matrice [L] est triangulaire supérieure (les éléments au-dessus de la diagonale sont non nuls) et sous la forme matricielle possède la structure suivante [23] :

$$[L] = \begin{bmatrix} L_{11} & L_{12} & L_{13} & \dots & L_{1n} \\ & L_{22} & L_{23} & \dots & L_{2n} \\ & & L_{33} & \dots & L_{3n} \\ & & & \ddots & \vdots \\ & & & & L_{nn} \end{bmatrix}$$

**Algorithme :** L'algorithme qui donne la factorisation de  $[K]$  pour ce type de matrice est le suivant [19] :

$$\left. \begin{aligned} L_{11} &= \sqrt{K_{11}} \quad , \quad L_{1j} = K_{1j}/L_{11} \quad j = 2,3,\dots,n \\ L_{pp} &= \sqrt{K_{pp} - \sum_{r=1}^{p-1} L_{rp}^2} \\ L_{pj} &= \frac{1}{L_{pp}} \left( K_{pj} - \sum_{r=1}^{p-1} L_{rp} L_{rj} \right) \quad j = p+1, p+2, \dots, n \end{aligned} \right\} \quad p = 2,3,\dots,n \quad (V-54)$$

Le déterminant de la matrice  $[K]$  est obtenu par : 
$$\det [K] = \left( \prod_{i=1}^{i=n} L_{ii} \right)^2 \quad (V-55)$$

**Remarques :**

- Les éléments de la diagonale de la matrice  $[K]$  sont tous positifs et non nuls
- L'algorithme de *Cholevsky* présenté par les équations (V-54) ne pose pas de problème de division par zéro puisqu'on a de l'équation (V-55) :  $\det[K] = L_{11}^2 \cdot L_{22}^2 \cdot L_{33}^2 \dots L_{nn}^2$  et  $\det[K] \neq 0$ . Alors ils failent que les ' $L_{ii} \quad i=1,2,3,\dots,n$ ' soient tous différents de zéro.
- Le problème de la racine d'un nombre négatif de l'algorithme (V-54) pour déterminer les éléments diagonaux de la matrice  $[L]$  ne se pose plus, puisque la matrice  $[K]$  est définit positive.
- On n'a pas présenté ici les détails de l'algorithme de *Cholevsky* pour des matrices symétriques et bandes vu que on n'a pas le but de la programmer. Cette méthode elle semble à un certain niveau à celle de *Khaletski*, où le but est de montrée les variantes de choix.

**V-5-1-C/ Ordre de grandeurs du nombre d'opérations de l'algorithme de KHALETSKI**

Dans la suite, on traite l'ordre de grandeurs des opérations mathématiques effectuées par l'algorithme de *Khaletski* (pour des matrices symétriques et bandes) pour la résolution du système d'équations (V-42).

De là, il faut connaître :

- L'ordre de la matrice  $[K]$  ainsi que la valeur de la demi-bande ' $B$ '.
- Les éléments de la matrice  $[K]$  et du vecteur ' $f$ '.

Alors, le programme qui permet la résolution de ce système par la méthode de *Khaletski* nécessite la déclaration des vecteurs suivants :

- $\{V_k\}$ : Vecteur de dimension  $NN$  pour stocker les éléments de la bande de la matrice  $[K]$  en utilisant une méthode convenable, et puis pour stocker les éléments de la bande de la matrice  $[L]$ . Ce vecteur est noté dans le programme par ' $AE$ '.
- $\{W\}, \{F\}$  : des vecteurs de dimension  $N$  pour stocker respectivement la solution du problème et le vecteur force. La valeur de  $N$  est donnée par la formule (V-12), (maillage H)

- Déclaration de quelques variables comme des compteurs des boucles et autres parametres.

Il est parfois utile, pour une bonne programmation, de déclarer  $\{F\}$  pour stocker les éléments du vecteur force en suite du vecteur  $\{y\}$  et finalement le vecteur solution  $\{W\}$ . Cette idée nous donne un gain en mémoire de  $N$  cases. Avants d'écraser le vecteur  $\{F\}$  (les résultats réels de  $\{F\}$ ), on les stocke dans un fichier avant détérioration si on a besoin de ces valeurs ultérieurement.

Suivant la taille de mémoire (d'ordinateur) et le type de la numérotation des nœuds, on peut avoir l'ordre maximum du système d'équation qu'on peut résoudre. Le temps d'exécution d'un tel programme dépend essentiellement de :

- Le type de langage de programmation.
- Le type des caractéristiques de l'ordinateur.
- Le nombre d'opérations effectuer par le programme.

Pour bien estimer le temps d'exécution, on essaye de calculer le nombre des opérations effectuer pour la phase de la résolution du système d'équations par la méthode de *Khaletski*. Les opérations mathématiques effectuées sont : l'addition, la soustraction, la multiplication et la division entre les entiers ou les nombres déclarés en double précision. Ajoutant aussi les opérations d'affectation effectuées entre les vecteurs ainsi que la détermination de la position des cases de  $L_{ij}$  ou  $K_{ij}$  dans les vecteurs correspond.

Par exemple, pour la forme de stockage en colonne on a :  $Vk(m) = K(i, j)$  tel que :

- Si  $j \leq B$  :  $m = \frac{1}{2}(j-1)j + i$  Alors il faut : 04 opérations pour déterminer  $m$ .
- Si  $j > B$  :  $m = \frac{B}{2}(1-B) + (B-1)j + i$  Alors il faut : 07 opérations.

Finalement afin de calculer le nombre des opérations, on écrit l'algorithme assez optimisé de la formule (V-49) pour la phase concernant la décomposition de la matrice de rigidité  $[K]$ . on obtient le modèle suivant :

```

1er partie :
    Pour l=1 jusqu'à B
    Faire
        l1 = l*(l-1)/2
        Pour J=2 jusqu'à l
        Faire
            JM1 = J-1
            J1 = l*(JM1)/2
            Some = 0.0
            Pour k=1 jusqu'à JM1
            Faire
                K1 = K+11
                KJ = K+J1
                KK = K*(K+1)/2
                Some = Some + Vk(K1)*Vk(KJ)/Vk(KK)
            Fin faire
            Ji = j+i1
            Vk(ji) = Vk(ji) - Some
        Fin faire
    Fin faire
    
```

2<sup>ème</sup> partie :

```

C1=B+1      ; C2=1-B
C3=B*C2/2
Pour I=C1 jusqu'à N
  Faire
    I1= C3-I*C2
    Pour J=I+C2 jusqu'à I
      Faire
        JM1= J-1
        J1=C3-J*C2
        Some=0.0
        Pour k=I+C2 jusqu'à JM1
          Faire
            KI=K+I1      ; KJ=K+J1
            KK=B*K+C3
            Some=Some +Vk(KI)*Vk(KJ)/Vk(KK)
          Fin faire
        J1=J+1
        Vk(J1)=Vk(J1)-Some
      Fin faire
    Fin faire
  Fin faire.
  
```

Le nombre d'opérations effectuées par cet algorithme est donné en totale comme suit :

$$-\frac{5}{2}B^3 + (4N+1)B^2 + \left(2N + \frac{3}{2}\right)B - 2N = f(B, N) \text{ opérations. (Tel que } B < N) \quad (V-56)$$

(Pour voir le détail du calcul voir l'Annexe A.)

Maintenant, si on écrit l'algorithme assez optimisé des formules (V-50) et (V-51) pour la phase de résolution concernant la détermination des vecteurs  $\{Y\}$  et  $\{W\}$ , on aura le modèle suivant :

- Algorithme de la formule (V-50) :

1<sup>ère</sup> partie :

```

W(1) = f(1)/Vk(1)
Pour i=2 jusqu'à B
  Faire
    Some=0.0
    IM1=I-1
    I1=I*IM1/2
    Pour k=1 jusqu'à IM1
      Faire
        KI=K+I1
        Some=Some+Vk(KI)*W(K)
      Fin Faire
    I1=I+1
    W(I) = (f(I)-Some)/Vk(I)
  Fin Faire
  
```

2<sup>ème</sup> partie :

```

C1=B-1      ; C2=1-B
C3=B*C2/2
Pour I=B+1 jusqu'à N
  Faire
    Some=0.0
    IM1=I-1
    IC=I*C1+C3
    Pour k=I+C2 jusqu'à IM1
      Faire
        KI=K+IC
        Some=Some+Vk(KI)*W(K)
      Fin Faire
    I1=I+IC
    W(I) = (f(I)-Some)/Vk(I)
  Fin Faire
  
```

Le nombre total d'opérations effectuées par cet algorithme est donné comme ainsi :

$$\left(4N + \frac{5}{2}\right)B - \frac{5}{2}B^2 + 3N - 6 = f(B, N) \text{ opérations} \tag{V-57a}$$

Sans ajouter les trois opérations de C1, C2 et C3, (le détail de calcul est similaire au précédent).

- Algorithme de la formule (V-51) : cette partie donne le vecteur solution  $\{W\}$  :

```

C1=B-1
C3=B*(1-B)/2
NB=N-C1
Pour I=N-1 jusqu'à NB avec pas = -1
  Faire
    Some=0.0
    IC=I+C3
    Pour k=I+1 jusqu'à N
      Faire
        Si K ≤ B alors KI=I+K*(K-1)/2
        Si K > B alors KI=IC+C1*K
        Some=Some+Vk(KI)*W(K)
      Fin Faire
    Si I ≤ B alors II=I*(I+1)/2
    Si I > B alors II=I*B+C3
    W(I) = W(I)-Some/Vk(II)
  Fin Faire
Pour I=N-B jusqu'à 1 avec pas=-1
  Faire
    Some=0.0
    IC=I+C3 ; IC1=I+C1
    Pour k=I+1 jusqu'à IC1
      Faire
        Si K ≤ B alors KI=I+K*(K-1)/2
        Si K > B alors KI=IC+C1*K
        Some=Some+Vk(KI)*W(K)
      Fin Faire
    Si I ≤ B alors II=I*(I+1)/2
    Si I > B alors II=I*B+C3
    W(I) = W(I)-Some/Vk(II)
  Fin Faire
  
```

Le nombre total d'opérations effectuées par cet algorithme est donné comme ainsi :

$$-\frac{5}{2}B^2 + \left(4N + \frac{5}{2}\right)B + 3N - 6 = f(B, N) \text{ Opérations.} \tag{V-57b}$$

Pour illustrer exactement l'ordre de grandeur de nombre des opérations effectuées par la procédure de factorisation on considère les exemples suivants :

➤ <u>N = 100</u>	B = 12	→	55 642	opérations
	B = 20	→	144 230	opérations
➤ <u>N = 5 000</u>	B = 250	→	1 213 490 375	opérations
	B = 350	→	2 346 425 525	opérations
➤ <u>N = 10 000</u>	B = 202	→	1 615 615 087	opérations
	B = 502	→	9 774 167 737	opérations

Pour illustrer le nombre des opérations effectuées par la procédure de factorisation (V-49) et de résolution complète (V-50 et V-51), on considère les exemples suivants :

➤ <u>N = 100</u>	B = 12	→	65 170	opérations
	B = 20	→	158 918	opérations
➤ <u>N = 5 000</u>	B = 100	→	202 480 638	opérations
	B = 252	→	1 242 440 090	opérations
	B = 350	→	2 359 844 763	opérations
➤ <u>N = 10 000</u>	B = 202	→	1 631 632 065	opérations
	B = 502	→	9 813 130 215	opérations

Concernant la partie de remplissage de la matrice de rigidité  $[K]$  globale et le vecteur force  $\{F\}$ , on n'a pas fait le calcul de nombre d'opérations mathématiques, puisqu'il est négligeable devant le nombre donné par la phase de la résolution du système et que cette phase prend seule 80 % de nombre d'opérations total du problème à résoudre.

## V-6-2/ METHODES ITERATIVES

### V-6-2-A/ METHODE DE GAUSS SEIDEL

Pour des matrices à très grande dimension, les méthodes directes de résolution d'un système d'équations linéaires deviennent non recommandées, puisque le calcul devient énorme et la taille des matrices devient de plus en plus élevée et à un certain niveau sera limitée. La solution est recherchée donc par l'utilisation des schémas itératifs.

Le schéma le plus utilisé est celui de *Gauss Seidel* et de *Gauss Seidel Accéléré*. Alors pour un système général à  $(N \times N)$  équations linéaires quelconques suivant :

$$\begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} & K_{13} & \dots & K_{1n} \\ K_{21} & K_{22} & K_{23} & & K_{2n} \\ \vdots & & & \ddots & \vdots \\ K_{n1} & K_{n2} & K_{n3} & \dots & K_{nn} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ \vdots \\ U_n \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ \vdots \\ F_n \end{Bmatrix} \quad (\text{V-58})$$

La méthode itérative avec relaxation de Gauss Seidel consiste essentiellement à passer de l'étape  $(r)$  à l'étape  $(r+1)$  par le schéma suivant (Tel que  $U^{(r)}$  étant déjà calculé), donné par [19], [24]... :

$$U_i^{r+1} = (1 - \omega)U_i^r - \frac{\omega}{K_{ii}} \left\{ \sum_{j=1}^{i-1} K_{ij}U_j^r + \sum_{j=i+1}^N K_{ij}U_j^r - F_i \right\} \quad (\text{V-59})$$

Avec :  $i$  : indice sur les cases du vecteur.  $i = 1, 2, 3, \dots, n$   
 $r$  : indice sur l'itération.  $(r = 0, \text{ le vecteur initial})$   
 $\omega$  : Facteur sur-relaxation.

### V-6-2-B/ METHODE ITERATIVE DE GAUSS-SEIDEL ACCELEREE

Nous réécrivons le système d'équations (V-58) d'une façon plus compacte et utilisant les symboles qui conviennent nos paramètres comme suivant :

$$\sum_{n=1}^N a_{mn} W_n = F_m \quad ; \quad m = 1, \dots, N \quad (\text{V-60})$$



Tel que  $a_{mn}$  est un élément de la matrice de rigidité [K] situant à la ligne 'm' et à la colonne 'n'.

Le modèle (V-59) peut être modifié en accélérant encore le processus de convergence par le remplacement avec des valeurs de la solution déjà calculer de l'itération actuelle, immédiatement dans le schéma itératif pour la détermination des valeurs restantes.

L'algorithme sera modifié par [17] :

$$\begin{aligned}
 & \text{Faire } m = 1, \text{ jusqu'à } N \\
 & \text{Som} = \sum_{n < m} a_{mn} W_n^{(r+1)} + \sum_{n > m} a_{mn} W_n^{(r)} \\
 & W_m^{(r+1)} = (1-\omega) W_m^{(r)} + \frac{\omega}{a_{mm}} (F_m - \text{Som})
 \end{aligned} \tag{V-61}$$

Le paramètre de relaxation ' $\omega$ ' étant à choisir dans l'intervalle ]0,2[ or pour notre type d'application, il est choisi entre [1,2[. Et dite le 'Facteur sur-relaxation (Over-relaxation factor)'.  
 Ainsi, pour passer de l'étape (r) à (r+1), on introduit le réel 'Sav' : Somme Avant, des termes de l'étape précédente (r), et le vecteur (Sap<sub>i</sub>) Somme Après, des termes de l'étape actuelle (r+1), qui sont définis par :

$$\begin{cases}
 \text{Sav} = \sum_{n > m} a_{mn} W_n^{(r)} \\
 \text{Sap}_m^{(r+1)} = \sum_{n < m} a_{mn} W_n^{(r+1)}, \quad m > 1; \quad \text{Sap}_1 = 0
 \end{cases} \tag{V-62}$$

Donc :

$$\text{Som} = \text{Sav} + \text{Sap}_m$$

Tel que, en même temps que l'on calcul la variable Sav, on charge les composantes de Sap<sub>i</sub> par la séquence suivante, en considérant la symétrie de [K] :

Après initialisation de W et Sap :

```

10  faire m = 1, N-1
    *** calcul de 'Sav' ***
    Sav = 0
    faire n = m+1, N
        Sav = Sav + amn Wn(r)
        Som = Sapm + Sav
        Wm(r+1) = (1-ω) Wm(r) +  $\frac{\omega}{a_{mm}}$  (Fm - Som)
    *** Chargement des composantes de Sap ***
    faire n = m+1, N
        Sapn = Sapn + amn Wm(r+1)
        WN(r+1) = (1-ω) WN(r) +  $\frac{\omega}{a_{NN}}$  (FN - SapN)
    *** Remettre à zéro le vecteur Sapn pour une autre itération ***
    faire n = 2, N
        Sapn = 0
    ... les étapes de teste de convergence
    Retour à 10.
    
```

**Remarque :**

- On a noté les boucles par des flèches pour le gain d'espace (à l'écriture).
- Dans la boucle de 'n' pour le chargement de 'Sap', on tient compte de la symétrie de la matrice (a<sub>mn</sub>). On pourra se persuader de l'algorithme de passage (r) à (r+1) à la main les séquences pour N=3.

Revenons à l'expression de  $Sap_n^{(r+1)}$  ( l'équation V-62 ), on observe que :

$$Sap_m^{(r+1)} - Sap_m^{(r)} = \sum_{n < m} a_{mn} (W_m^{(r+1)} - W_m^{(r)}) \tag{V-63}$$

On peut alors éviter la remise de  $Sap_i$  à zéro d'une façon qu'on crée une variable réel 'U' où on stocke la valeur de  $W_m^{(r)}$  de l'itération (r). Tel que, on ajoute la ligne suivante :

$$U = W_m^{(r)}$$

A la séquence précédente avant le calcul de  $W_m^{(r+1)}$  (voir l'algorithme final du même §)

Et on change la boucle de chargement de  $Sap_i$  comme suit :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{faire } n = m+1, N \\ \rightarrow Sap_n = Sap_n + a_{mn} [W_m^{(r+1)} - U] \end{array} \right. \tag{V-64}$$

Adaptation à notre type de stockage

- Pour mise en lumière l'algorithme final de résolution (du système linéaire), il est essentiel de rappeler que le stockage utiliser et opté de la matrice symétrique [K] pour cette méthode est le stockage complexe aléatoire (le plus économique) dans les vecteurs AD et AE.
- Donc pour positionner le coefficient  $a_{mn}$  dans les boucles de calcul ainsi le remplissage de Sav et Sap<sub>m</sub>, on utilise les vecteurs IC<sub>m</sub> et IL<sub>m</sub> (défini au § V-5), et on crée un vecteur entier 'NCP<sub>m</sub>' qui donne le nombre total de cases stocker dans AE avant la ligne m de la matrice A. Tel que :

$$NCP_1 = 0 ; \quad NCP_m = \sum_{i=1}^{m-1} IL_i \quad \text{et } m > 1 \tag{V-65}$$

- Avec : IL<sub>i</sub> le vecteur ligne qui indique le nombre de cases non nuls de chaque ligne 'i' de la matrice [K], (la partie triangulaire supérieur sans le diagonal).
- Ainsi que, rappelant que la résolution est faite pour le système d'équations réduit sur les nœuds internes du maillage considéré. De la, on va utiliser :
  - La variable NDDL (le Nombre De Degrée de Liberté Restant) qui représente le rang de la matrice [K] réduite par l'application des conditions aux limites,
  - Le vecteur NGR<sub>m</sub> qui donne la numérotation globale des nœuds restants (sans les nœuds de frontière), où il est chargé dans une soubroutine indépendante.

Enfinement, on propose l'algorithme suivant qui fait l'objet d'une soubroutine de résolution itérative efficace. Tel qu'après l'initialisation du vecteur inconnu  $W_m$  sur les nœuds internes et par les C.A.L sur les nœuds du frontière, on procède au chargement du vecteur NCP<sub>m</sub> comme l'indique l'équation précédente (V-65). Puis, on initialise le vecteur produit  $Sap_m$  et puis, on passe aux itérations de résolution selon le schéma de Gauss-Seidel accéléré (avec son facteur sur-relaxation  $\omega$ ) jusqu'à la convergence selon les testes imposés.

On a donc :

\*\*\* initialisation du vecteur solution W \*\*\*

```

faire i = 1, NNT
  Si ( ICL(i) = 1 )
    Alors W(i) = 0.0   nœuds de frontières ( condition de DIRICHLET).
    Sinon W(i) = 1.0   nœuds internes.
  Fin si
    
```

```

*** chargement de NCP ***
NCP(1) = 0
  Faire m = 2, NDDLRL
  NCP(m) = NCP(m-1) + IL(m-1)

*** initialisation de Sap ***
  Faire i = 1, NDDLRL
  Sap(i) = 0
  Faire m = 1, NDDLRL-1
  L0 = NCP(m) + 1
  L1 = NCP(m+1)
  Faire L = L0, L1
  ii = IC(L)
  Sap(ii) = Sap(ii) + AE(L)*W( NGR(m) )

*** passage de l'iteration (r) à (r+1) ***
Nit = 0 ; Nitmax = 'valeur maximale à donnée' ; Epsmax = 'valeur de tolérance acceptée'
100 Nit = Nit + 1 ; eps = 0.0
  Faire i = 1, NDDLRL-1
  m = NGR(i)
  L0 = NCP(i) + 1 ; L1 = NCP(i + 1)
  *** Calcul de 'Sav' et 'Som' ***
  Sav = 0
  Faire L = L0, L1
  mm = NGR(IC(L))
  Sav = Sav + AE(L) .W(mm)
  Som = Sap(i) + Sav
  *** calcul de la solution W(r+1) ***
  U = W(m)
  W(m) = (1-ω).W(m) + ω.(F(i)-Som)/AD(i)
  *** calcul de l'erreur 'eps' ***
  err = W(m)-U
  si ( |err| > eps )
  | alors eps = |err|
  Finsi
  *** chargement de Sap avec W(r+1)
  Faire L = L0, L1
  Sap[IC(L)] = Sap[IC(L)] + AE(L).[W(m)-U]
  mm = NGR(NDDLRL)
  U = W(mm)
  W(mm) = (1-ω).W(mm) + ω.( F(NDDLRL)-Sap(NDDLRL) ) / AD(NDDLRL)
  eps = Max(eps, |U-W(mm)| )
  *** Test de convergence ***
  Si (eps < EpsMax et Nit < Nitmax)
  | Alors ecrire 'la convergence est atteinte à Nit itérations'
  | Sinon aller à 100 (en incrémentant l'iteration)
  Finsi
200 *** Return (Fin de la sousroutine) ***

```

Avec U : pour stocker le résultat de  $W^{(r)}$  de l'itération précédente (r).

Sap(I) : pour stocker les résultats de l'itération actuelle multiplier par les coefficients de [K].

Eps : Erreur maximale entre deux itérations successives.

EpsMax : Erreur absolue acceptée.

Nit : Nombre d'itération appliquée.

Nitmax : Nombre maximum d'itérations autorisées si la précision désirer n'est pas atteinte.

ICL(i) : Vecteur indique les nœuds de frontière par sa valeur qui égale à 1.

NNT : Nombre de Nœuds Total du maillage considéré.

**V-6-2-C/ ORDRE DE GRANDEURS DU NOMBRE D'OPERATIONS (G.S.Accélééré)**

Rappelons que le nombre d'itérations pour avoir la solution désirée dépend de trois paramètres :

- Le choix du vecteur initial de départ.
- La valeur de la tolérance, c'est à dire, l'erreur absolue acceptée.
- La valeur du facteur de relaxation  $\omega$ .

On va procéder dans la suite au calcul très rapproché de nombre d'opération effectué par l'algorithme de Gauss Seidel :

- La partie d'initialisation de W : dans ce cas on a :

02 affectations : de i et de W(i)	}	NNT fois
01 test de si		
01 opération de (+) de deux entiers pour l'incréméntation de i		

- Pour le chargement de NCP :

04 opérations + 02 affectations. } NDDLRL-1 fois + 01 affectation

- Pour l'initialisation du vecteur Sap : Pour cette partie on a :

La boucle de 'i' : 02 affectations.	}	NDDLRL fois
01 opération de (+ ou -) d'incréméntation		

La boucle de 'm' : 03 affectations + 03 opérations	}	NDDLRL fois
+ La boucle de 'L' : entre L0 et L1		
03 affectations } B fois (c'est la demi bande, le cas le plus défavorable pour un maillage type H)		

- Passage de l'itération (r) à (r+1) :

03+2 affectations + 02 opérations	}	1 fois
04+1 affectations + 02 opérations		
03 affectations + 03 opérations	}	les boucles de 'L' (NDDLRL-1) fois
02 affectations + 04 opérations		
04 affectations + 07 opérations + 01 test		
04 affectations + 08 opérations	}	1 fois

- Tests de convergence

02 tests	}	1 fois
01 Instruction ( écriture ou aller à).		

**Remarques :**

- On ne peut retrancher exactement le nombre d'affectations données par les tests précédents.
- On a fait la confusion entre le temps effectué pour les différents types d'opérations.
- La valeur de b est inconnue et vari d'une étape à l'autre de la boucle 'L' limité entre L0 et L1. Tel que pour un maillage type 'H' elle prend comme valeur max '6'.
- Concernant l'affichage, on ne l'a pas donnée dans cet algorithme, tel qu'il fait l'objet d'un autre algorithme.

Au total pour une seule itération de calcul, l'algorithme de *Gauss Seidel Accélérée* effectue un nombre d'opérations entre les étiquettes '100' et '200' (les instructions de passage de l'itération (r) à (r+1) ) d'environ :

$$\begin{aligned}
 & 10 + (\text{NDDLR}-1).(9+7.B) \text{ 'opérations'} \\
 & (\text{NDDLR}-1).(9+5.B) + 9 \text{ 'affectations'} \\
 & \text{NDDLR} + 1 \text{ 'tests'} \text{ et } 01 \text{ 'instruction' (d'écriture ou aller à).}
 \end{aligned}
 \tag{V-66}$$

Pour voir le nombre d'opérations du calcul effectué par une seule itération de l'algorithme, on considère les exemples suivants dans ce tableau V-9 (pour l'équation V-66) :

**Exemples :** Tableau V-9 : Nombre d'opérations effectuées par une itération ( $N_x = 10$ ).

$N_y$	$B$	$\text{NDDLR}$	Nombre d'opérations effectuées par une itération
10	6	64	3 223
20	16	144	17 313
50	46	384	126 783
100	96	784	533 233

**V-6-2-D/ CONDITION NECESSAIRE ET SUFFISANTE DE CONVERGENCE DU PROCESSUS DE GAUSS SEIDEL**

Considérons le système général précédent (V-60). Parmi les critères de convergence, on a : le processus itératif de *Gauss Seidel* converge si on vérifie les inégalités suivantes :

$$a^\circ) |a_{mm}| > \sum_{n=1}^{n=m-1} |a_{mn}| + \sum_{n=m+1}^{n=N} |a_{mn}| \quad m = 1, 2, 3, \dots, N \tag{V-67}$$

$$\text{Ou } b^\circ) |a_{nn}| > \sum_{m=1}^{m=n-1} |a_{mn}| + \sum_{m=n+1}^{m=N} |a_{mn}| \quad n = 1, 2, 3, \dots, N \tag{V-68}$$

Donc la convergence a lieu si les modules des éléments diagonaux de la matrice  $[K] = [a_{mm}]$  du système (V-60) dépassent pour chaque ligne (m) la somme des modules des éléments non diagonaux de cette ligne ; ou par chaque colonne dépasse la somme des modules des éléments non diagonaux de cette colonne.

Puisque la solution de ce système d'équations représente la variation d'un certain paramètre d'un phénomène physique, alors la solution mathématique existe, ce qui donne que la convergence est assurée. Autrement, on estime que la condition de convergence (V-67) ou (V-68) de processus de *Gauss Seidel* est toujours vérifiée.

## V-7/ CALCUL NUMERIQUE DES PARAMETRES DE L'ÉCOULEMENT

Après la détermination de la distribution de la vitesse ( $W$ ) en chaque point du domaine, on est amené à passer au calcul des différents paramètres de l'écoulement dans la maille d'éléments finis, par l'utilisation des formules vue au chapitre 'modélisation mathématique'.

- Surface  $A$ : Notre domaine, représente la section  $A$  d'une conduite de dimensions caractéristiques données, pour évaluer cette surface, on doit calculer les surfaces élémentaires  $A_i$  de toute la maille, et faire la sommation de ces surfaces élémentaires par :

$$A_{\text{totale}} = \sum_{i=1}^{NEL} A_i \quad (\text{V-69})$$

Les surfaces élémentaires sont de deux types : *triangulaire* ou *quadrilatère*, calculer dans la subroutine de chargement des matrices d'éléments selon leur type.

- Pour le cas des triangles (à 3 nœuds) on a la séquence suivante :

```
10 DO 200 L=1,NEL
   DO 90 I=1,3
     J=I+1
     IF (J.GT.3) J=J-3
     K=J+1
     IF (K.GT.3) K=K-3
     ALPHA(1)=X(NNE(L,J))*Y(NNE(L,K))-X(NNE(L,K))*Y(NNE(L,J))
     BETA(1)=Y(NNE(L,J))-Y(NNE(L,K))
90   GAMA(1)=X(NNE(L,K))-X(NNE(L,J))
     AAE(L)=(ALPHA(1)+ALPHA(2)+ALPHA(3))/2.d0
     Aire=Aire+AAE(L)
   ...
200 CONTINUE
```

- Pour le cas des triangles (plus que 3 nœuds : 4 ou 6) on a :

```
   DO 380 L=1,NEL
c ***** CALCUL DE XXi, YYi et AAE *****
   DO 230 i=1,NNPE
     xx(i)=X(NNE(L,i))
230   yy(i)=Y(NNE(L,i))
     A1=(xx(2)-xx(1))*(yy(3)-yy(1))
     A2=(xx(3)-xx(1))*(yy(2)-yy(1))
     AAE(L)=(A1+A2)/2.d0
     Aire=Aire+AAE(L)
     WRITE(*,*) ' NNPE >3, L=', L, AAE(L)
   .....
380 CONTINUE
```

- Pour le cas des quadrilatères (à 4, 5 ou 8 nœuds) on a :

```
   DO 180 L=1,NEL
c ***** CALCUL DE XXi, YYi et AAE *****
   DO 30 i=1,NNPE
     xx(i)=X(NNE(L,i))
30   yy(i)=Y(NNE(L,i))
     A1 = ((xx(2)-xx(1))+xx(4)-xx(1))*(yy(3)-yy(1))
     A2 = (xx(3)-xx(1))*(yy(2)-yy(1))+yy(4)-yy(1))
     AAE(L)=(A1+A2)/2.d0
     Aire=Aire+AAE(L)
   .....
180 CONTINUE
```

Tel que,  $AAE(i)$  : Vecteur qui stocke les surfaces de chaque élément du maillage.

$Aire$  : Surface totale de la géométrie.  $NNPE$  : Nombre de Nœuds Par Élément.

$xx(i)$ ,  $yy(i)$  : Vecteurs des coordonnées locales pour chaque élément.

• La dimension caractéristique  $D_H$

Appelée ‘diamètre hydraulique’, il est calculé pour les différentes géométries des conduites étudiées, par l’expression suivante :

$$D_H = \frac{4 A_{totale}}{P_m} \tag{V-70}$$

Où  $P_m$  est le périmètre de la section traversée par l’écoulement. Il sera calculé dans le programme pour chaque géométrie à l’aide des expressions analytiques ou numériques.

Quelques exemples :

- Cercle :  $P_m = 2.\pi.R$
- Grand cercle creux :  $P_m = 2.\pi.(R_2-R_1)$
- Ellipse de rayons A et B (cas numérique), on a le sous programme suivant :

```

REAL*8 X(350000), Y(350000)
c A: le rayon suivant l'axe x
c rpp: le rapport B/A telque 0<rpp<1
  PI=DAcos(-1.d0)
  DATA s,x(1)/ 2*0.d0/, n/ 350000/
  B=rpp*A ; B2=B**2.
  y(1)=B
  dx=A/float(n)
  write(*,*) ' Wait Calculate P_m'
  s=0.d0
  do 10 i =2,n+1
    x(i)=(i-1)*dx ; y(i)=dsqrt(B2-(rpp*x(i))**2.)
    r2=(x(i)-x(i-1))**2.+(y(i)-y(i-1))**2.
  10 s=s+dsqrt(r2)
  pm=s*4.d0
  Return
    
```

• La vitesse maximale  $W_{max}$  et ses coordonnées

Elle est obtenue en faisant une comparaison numérique entre les différentes vitesses nodales  $W(i)$ , ainsi on déduit sa position  $L_{max}$  et par suite ses coordonnées  $XW_{max}$  et  $YW_{max}$  par le sous programme suivant :

```

Vmax=0.0
DO 5 L=1,NNT
  IF (W(L).GT.Vmax) THEN
    Vmax=W(L) ; Lmax=L
  ENDIF
5 Continue
XWmax=X(Lmax) ; YWmax=Y(Lmax)
RETURN
    
```

• Calcul de la vitesse moyenne  $W_{moy}$  et le débit volumique  $Q_v$

La vitesse moyenne est calculée par l’expression suivante :

$$W_{moy} = \frac{1}{A} \iint_A W(x,y) dA \longrightarrow W_{moy} = \frac{1}{A} \sum_{A_i} \iint_{A_i} W^e(x,y) dA \tag{V-71}$$

Tandis que, le débit volumique traversant la section de la conduite est obtenu par l’expression générale suivante :

$$Q_v = \int dQ_v = \iint_A W(x,y) dA \tag{V-72}$$

La formulation en éléments finis donne pour un élément fini à  $NNPE$  nœuds (voir chap-III) :

$$W^e(x,y) = \sum_{j=1}^{NNPE} W_j N_j(x,y) \tag{V-73}$$

Telque :  $W_j = ct^e$  dans l'élément fini (e).

A partir (V-71) et (V-73) on trouve : 
$$W_{moy} = \frac{1}{A} \sum_{i=1}^{NEL} \left( \sum_{j=1}^{NNPE} W_j \iint_{A'} N_j(x,y) dx dy \right) \quad (V-71')$$

Tel que, d'après le § III-6-5 les fonctions d'interpolations définies par (III-36 ou 49), sont :

$$N_j(x,y) = \sum_{k=1}^P L_{Kj} \cdot G_k(x,y) \quad ; \quad P : \text{est le nombre de termes d'interpolation.}$$

$$G_k(x,y) = \sum_{Nterm=1}^r x^{Xpuis1(Nterm)} y^{Ypuis1(Nterm)} \quad ; \quad r : \text{est le nombre de sous-termes d'interpolation.}$$

Pour un quadrilatère  $A^{(e)} = A^1 + A^2$  somme des aires des deux triangles qui le constituent (Fig III-6). On note donc de (V-71') :

$$\begin{cases} SN(j) = \iint_{A'} N_j dx dy = \iint_{A1} N_j dx dy + \iint_{A2} N_j dx dy \\ = S1 + S2 \end{cases}$$

et 
$$S1 = \iint_{A1} N_j dx dy = \iint_{A1} \left( \sum_{k=1}^P L_{Kj} \sum_{Nterm=1}^r x^{Xpuis1(Nterm)} y^{Ypuis1(Nterm)} \right) dx dy$$

$$= \sum_{k=1}^P L_{Kj} \sum_{mm=1}^r \iint_{A1} x^m y^n dx dy \quad ; \quad \begin{cases} m = Xpuis1(mm) \\ n = Ypuis1(mm) \end{cases} \quad (V-74)$$

$$= \sum_{k=1}^P L_{Kj} \sum_{mm=1}^r I_{mn} \quad ; \quad I_{mn} = \iint_A x^m y^n dx dy$$

D'après le paragraphe § III-8 de la transformation de l'intégrale double  $I_{mn}$ , cette dernière s'écrit sous une manière permettant d'appliquer l'intégrale numérique de *Gauss Legendre* (qui a une précision élevée) comme suit : (équation III-65)

$$I_{mn} = \iint_A x^m y^n dx dy = \frac{1}{n+1} \int_{-1}^{+1} F(Z, ITYPE) dZ \quad (V-75)$$

avec

$$F(Z, ITYPE) = \sum_{i=1}^{i=ITYPE+2} XDIF(i) [-XDIF(i)Z + XSOM(i)]^m \cdot [-YDIF(i)Z + YSOM(i)]^{n+1}$$

Tel que : - pour un triangle  $\rightarrow$  ITYPE=1. - Pour un quadrilatère  $\rightarrow$  ITYPE=2.  
Les expressions des vecteurs *XDIF*, *XSOM*, *YDIF* et *YSOM* sont données dans le §III-8.

Finalement, la vitesse moyenne qui se calcule par :

$$W_{moy} = \frac{1}{A} \sum_{i=1}^{NEL} \left( \sum_{j=1}^{NNPE} W_j SN_j \right) \quad \text{et} \quad SN_j = \sum_{k=1}^P L_{Kj} \sum_{m=1}^r I_{mn} \quad ; \quad \begin{cases} m = Xpuis1(mm) \\ n = Ypuis1(mm) \end{cases} \quad (V-76)$$

Le débit volumique traversant la section de la conduite est calculé, en utilisant les résultats des équations (I-2), (V-69) et (V-76), par :

$$Q_v = W_{moy} A_{totale} \quad (V-77)$$

Donc, on propose la partie suivante du programme permettant le calcul du débit volumique et la vitesse moyenne qui se soit le type d'élément fini à *NNPE* nœuds. Où il utilise les subroutines qui recalculent les fonctions d'interpolation  $N_i$  convenablement au type d'élément fini, ainsi que celles qui calculent l'intégrale de surface de ces fonctions d'interpolations par la méthode de *Gauss Legendre*, et il donne finalement les résultats de ces paramètres.



```

DO 200 L=1,NEL
C ***** CALCUL DE XXi, YYi *****
DO 100 i=1,NNPE
  xx(i)=X(NNE(L,i))
  yy(i)=Y(NNE(L,i))
100
C ***** REMPLISSAGE DE COF et [H] et CALCUL SON INVERSE [L] *****
CALL RempCoffH
C ***** CALCUL DE L'INTEGRALE SURFACE DE LA FCT D'INTERPOLATION N: *****
Qvc=0.d0
DO 120 j=1,NNPE
  CALL CalcVFE(j,SN)
  Qvc=Qvc+SN*W(NNE(L,j))
120 CONTINUE
200 Qv=Qv+Qvc
  Wmoy= Qv/Aire
RETURN
    
```

**Remarque :**

- Les sousroutines RempCoffH et CalcVFE seront exposées avec leurs algorithmes à l'annexe A.

- Le nombre de Reynolds :

Comme le régime d'écoulement est considéré laminaire, le nombre de *Reynolds* est définie dans un intervalle limité, et il doit être calculer en fonction du diamètre hydraulique, et la vitesse moyenne de l'écoulement. Donc on a de (II-37) la formule suivante :

$$Re = \frac{\rho W_{moy} D_H}{\mu} \tag{V-78}$$

Tel Que  $\rho$  et  $\mu$  sont des données du fluide considéré, et  $W_{moy}$ ,  $D_H$  sont déterminés par (V-76 et 70).

- Les pertes de charge sont exprimées ainsi :

$$\Delta H = K \frac{L}{D_H} \frac{W_{moy}^2}{2g} \tag{V-79}$$

Où la gravité  $g$  et la longueur  $L$  sont parmi les données du programme (les inputs).

Calcul du coefficient de perte de charge par frottement  $K$  : Il se trouve très compliqué, vu que la formule générale de celui-ci varie pour les différentes géométries et régimes, ainsi que pour des différent paramètres variant avec celles-ci comme  $\rho$ ,  $\mu$ ,  $W$ , et l'état de surface de la conduite  $\lambda$ .

Nous avons adopté la formule suivante pour le calcul du coefficient de perte de charge [16 & 6] :

$$K = 4C_f \tag{V-80}$$

Où  $C_f$  est le coefficient de frottement local exprimé par la formule (II-26), et calculer par la procédure qui suit :

$$C_f = \frac{\overline{\tau_p}}{\frac{1}{2} \rho W_{moy}^2} \tag{V-81}$$

Où  $\overline{\tau_p}$  est la contrainte de cisaillement sur la paroi, et elle se calcule par :

$$\overline{\tau_p} = \frac{A_{total}}{P_m} \left( - \frac{dP_g}{dz} \right) \tag{V-82}$$

Avec :  $-dP_g/dz = \Delta P_g/L = a$  (voir le chapitre II).

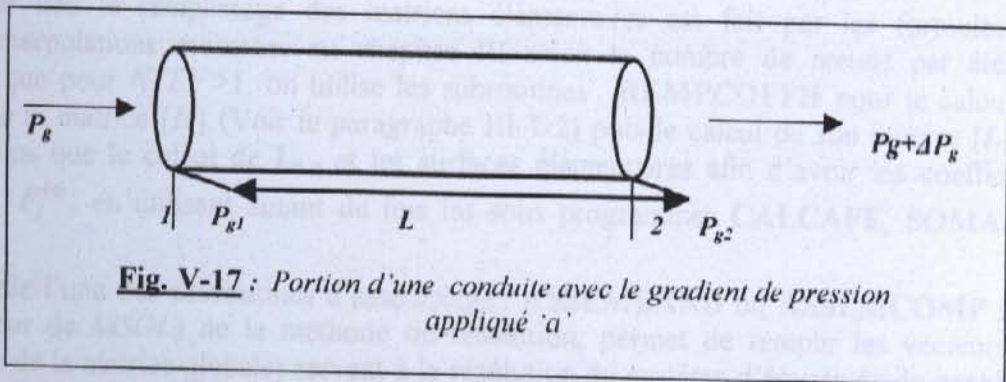
Où  $\Delta P_g$  est la différence de pression entre les sections 1 et 2 (voir la figure(V-17)), considérée parmi les données du programme (les inputs).

Finalement, on peut calculer les pertes de charge par son expression (V-79) et les paramètres précédents. On propose la partie du programme suivante :

```

c ***** NOMBRE DE REYNOLDS et DH *****
DH=4.d0*Aire/(Pm)      ! diamètre Hydraulique
RH=DH/4.0              ! rayon Hydraulique
Rey=Wmoy*DH*Rau/Mu
c ***** CONTRAINTE A LA PAROI *****
TAUp=Aire/(Pm)*FF*Mu
c ***** COEFFICIENT DE FROTTEMENT LOCAL *****
Cf=TAUp*2.0/RAU/Wmoy**2
c ***** PERTE DE CHARGE et SON COEFFICIENT *****
Kc=4.d0*Cf
DelH=(Kc*xL*Wmoy**2)/(DH*2.*g)
500 RETURN
end

```



Afin de bien assembler et comprendre les différentes tâches exposées dans ce manuscrit, on entame l'explication de l'organigramme générale et ses procédures du calcul dans le prochain paragraphe.

## V-8/ PROCEDURE DE CALCUL

Dans cette partie, on donne une description grossière du programme à partir de l'organigramme de la figure V-18.

Alors, après la déclaration des différentes variables et constantes à utilisées dans le programme (partie déclaration), l'appelle au sous-programme **INPUT**, permet de choisir la géométrie du domaine d'étude et le type d'élément fini utilisé pour la discrétisation de ce domaine à partir des menus d'input. Ainsi que un choix entre les méthodes de résolution du système d'équations, qui soient directes ou itératives avec les modes de stockage qui les correspondent, à partir d'un menu spécial.

L'introduction des différents paramètres caractérisant l'écoulement étudié, tel que : La viscosité  $\mu$ , la masse volumique  $\rho$ , la différence de pression  $\Delta P_g$ , ...etc nous permet de calculer le deuxième membre F de l'équation de *Poisson* (II-10).

Les subdivisions  $N_x$  et  $N_y$  seront aussi entrées à la fin de cette subroutine. Puis l'appelle aux sous-programmes des différentes géométries selon la valeur de la variable  $NF$ , permet de générer le maillage et de discrétiser ces domaines afin d'obtenir les coordonnées géométriques nodales (positions des nœuds), En assurant et vérifiant en parallèle les conditions de génération d'un maillage en élément fini en fonction de son type. Les caractéristiques de la discrétisation  $NNT$ ,  $NEL$   $NNPE$ ... (voir la nomenclature E2) seront calculées par la suite.

La subroutine **CONNECT** permet de faire la connexion entre les éléments finis en fonction de leur numérotation et leur type de maillage et le type d'élément fini afin de remplir la matrice connexion NNE.

Le réarrangement des nœuds du domaine dans un ordre d'affichage convenable permet le traçage et la représentation graphique des maillages, cela est grâce au sous-routine **MESH**.

Les conditions aux limites qui ferment notre système d'équations, permet de minimiser les calculs donc, on appelle le sous programme **CONDLIMIT**, en réduisant ainsi la taille de la matrice globale et les vecteurs correspondant et de remplir le vecteur indiquant les nœuds de frontière **ICL**.

Si la méthode de résolution choisie est celle de **KHALETSKI** dont son algorithme est adapté au stockage bande type colonne (voir paragraphe V-2-1), l'appel à la sous-routine est fait pour le calcul des paramètres nécessaire, comme **IBAV**, **IBAP** et **NDDL**...

Arrivant à ce stade, nous passons à une étape importante dans le programme, c'est le remplissage des matrices et des vecteurs élémentaires, ainsi que leurs assemblages dans la matrice globale et du vecteur global. Pour cela, nous appelons les sous-routines : **ELMTRIANG** ou **ELMQUADRI** selon le type d'élément fini choisi ( $NTEF > 3$  ou non).

En premier lieu le remplissage des matrices élémentaires est fait par les formules des fonctions d'interpolations montrées au chapitre III selon le nombre de nœuds par élément (**NNPE**). Tel que pour  $NTEF > 1$ , on utilise les sous-routines : **REMPCOFFH** pour le calcul des coefficients de la matrice **[H]** (Voir le paragraphe III-7-2) puis le calcul de son inverse **[L]** par **INVMAT**, ainsi que le calcul de  $I_{mn}$  et les surfaces élémentaires afin d'avoir les coefficients finaux  $K_{ij}^{(e)}$  et  $F_i^{(e)}$ , en utilisant autant de fois les sous programmes **CALCAFE**, **SOMAK** et **INTGRAL**...

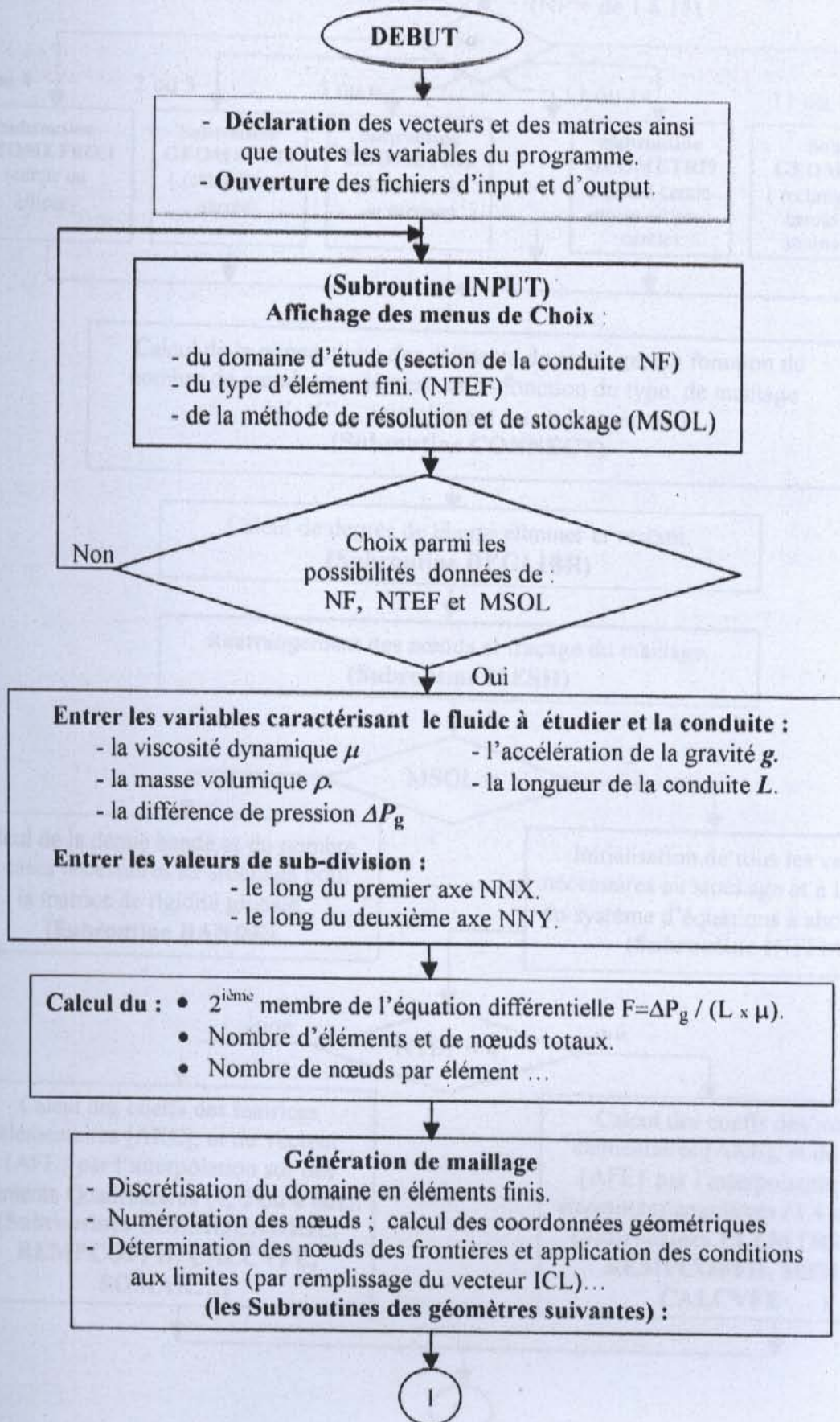
Puis l'appelle l'une des sous-routines d'assemblage : **ASSEMBAND** ou **ASSEMCOMP** selon le choix (valeur de **MSOL**) de la méthode de résolution, permet de remplir les vecteurs qui (jouent le rôle de la matrice globale) servent à la résolution du système d'équations du problème, suivant le stockage bande (de forme colonne par colonne le paragraphe V-2) ou le stockage économique (voir le paragraphe V-5).

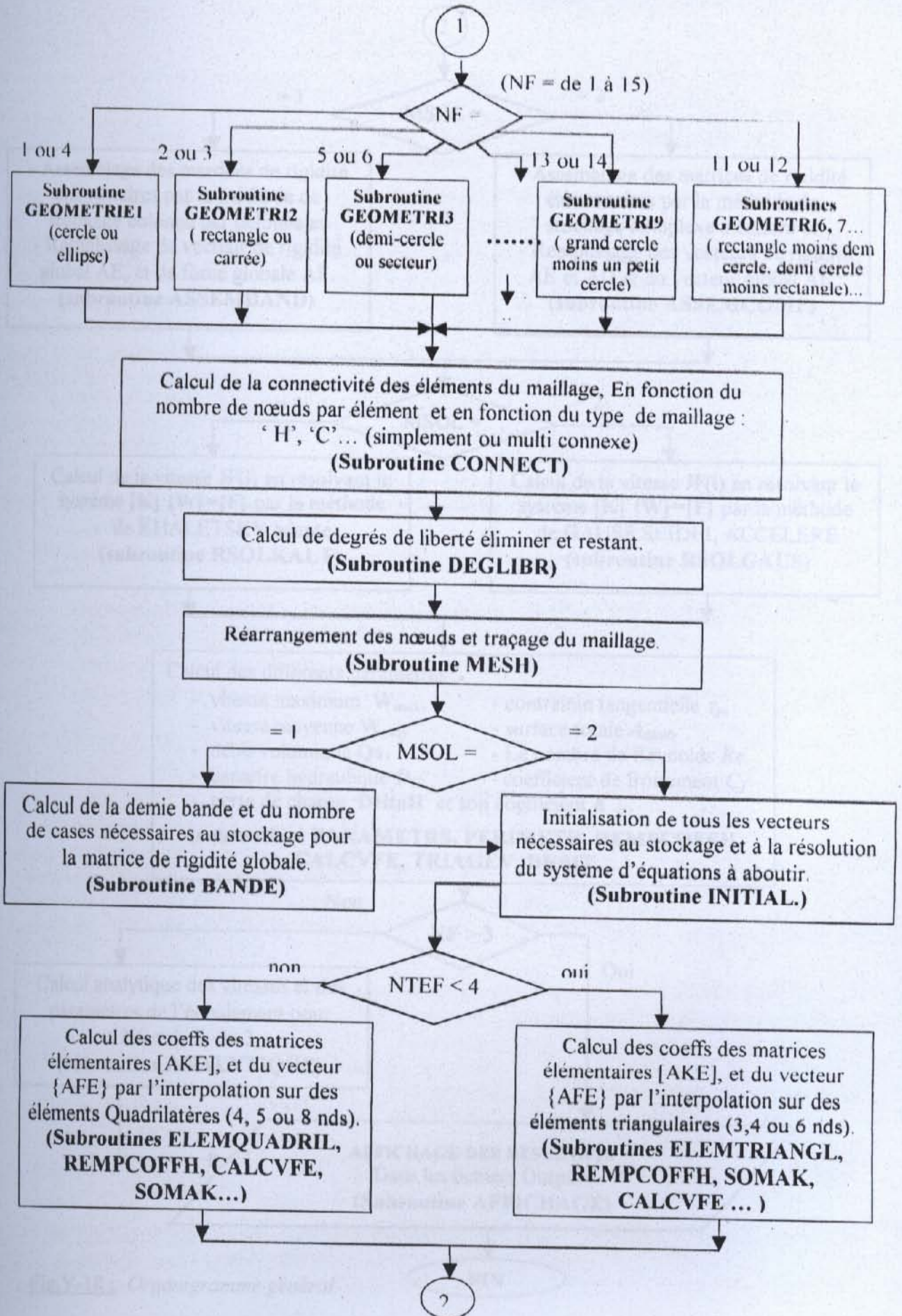
Une fois la matrice de rigidité globale et le vecteur force global sont obtenus, nous passons à une phase très importante c'est la résolution du système  $[K] \cdot \{W\} = \{F\}$ . La méthode utilisée pour sa résolution est la méthode directe de **KHALETSKI** par la sous-routine **RSOLKALT** si  $MSOL=1$ , sinon c'est la méthode itérative de Gauss-Seidel Accéléré par la sous-routine **RSOLGAUS** pour  $MSOL=2$ , adaptée difficilement au stockage économique.

Nous obtenons donc les vitesses  $W(i)$  dans tous les points du maillage considéré. Les autres paramètres tel que : les vitesses maximale et moyenne  $W_{max}$ ,  $W_{moy}$ , la surface totale  $A_{totale}$ , le débit volumique  $Q_v$ , le nombre de Reynolds  $Re$ , la perte de charge  $\Delta H$  et son coefficient  $K$ , la contrainte tangentielle  $\tau_p$ , le diamètre hydraulique, le coefficient de frottement  $C_f$ ... sont calculés par le sous-programme **PARAMETRS** qui appel aussi aux d'autres sous-routines complémentaires.

Si notre géométrie possède une solution analytique tel que (cercle ou rectangle...), l'appelle au sous-programme **ANALYTIQUE** donne les solutions analytiques de toutes les géométries qui possèdent ces solutions analytiques (voir le paragraphe II-5). Ce ci permettra de faire une comparaison et une validation par la suite des résultats obtenus par la méthode d'éléments finis. Finalement, nous affichons tous les résultats obtenus par la sous-routine **AFFICHAGE** permettant le traçage graphique et la comparaison des résultats.

## ORGANIGRAMME DU PROGRAMME PRINCIPALE





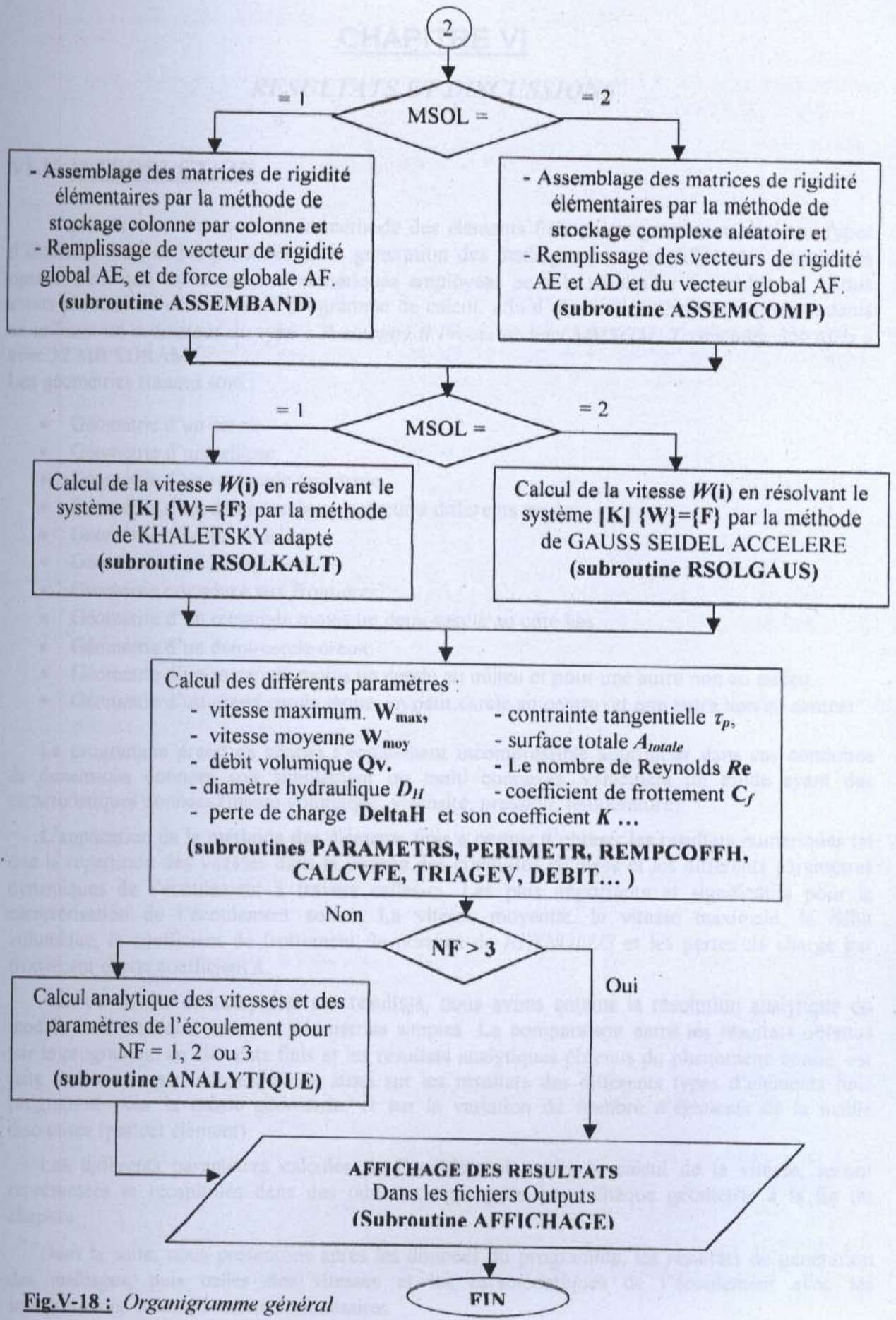


Fig.V-18 : Organigramme général

## CHAPITRE VI

### **RESULTATS ET DISCUSSIONS**

#### **VI-1/ INTRODUCTION**

Après la mise en œuvre de la méthode des éléments finis en programmant plusieurs types d'éléments finis, et les procédés de la génération des maillages pour les différentes géométries optées, ainsi que les techniques numériques employées pour la résolution du problème ; Nous avons procédé à l'exécution du programme de calcul, afin d'obtenir les résultats correspondants en utilisant un ordinateur du type « *Pentium(r) II Processor Intel MMX(TM) Technology, 350 MHz* » avec 32 MB SDRAM.

Les géométries traitées sont :

- Géométrie d'un cercle.
- Géométrie d'une ellipse.
- Géométrie d'un rectangle ou carrée.
- Géométrie d'un demi-cercle ou secteur à différents angles.
- Géométrie d'un profil *d'aile*.
- Géométrie d'un hexagone.
- Géométrie complexe aux frontières.
- Géométrie d'un rectangle moins un demi-cercle au côté bas.
- Géométrie d'un demi-cercle creux.
- Géométrie d'un rectangle moins un cercle au milieu et pour une autre non au milieu.
- Géométrie d'un grand cercle moins un petit cercle au centre (et une autre non au centre).

Le programme prend en charge l'écoulement incompressible approprié dans ces conduites de dimensions données soit simplement ou multi connexes, véhiculant un fluide ayant des caractéristiques données (masse volumique, viscosité, pression, température).

L'application de la méthode des éléments finis a permis d'obtenir les résultats numériques tel que la répartition des vitesses dans la section des conduites étudiées et les différents paramètres dynamiques de l'écoulement à travers celles-ci. Les plus importants et significatifs pour la caractérisation de l'écoulement sont : La vitesse moyenne, la vitesse maximale, le débit volumique, le coefficient de frottement, le nombre de *REYNOLDS* et les pertes de charge par frottement et son coefficient  $k$ .

Afin de valider et interpréter ces résultats, nous avons entamé la résolution analytique du modèle mathématique pour les géométries simples. La comparaison entre les résultats obtenus par le programme en éléments finis et les résultats analytiques obtenus du phénomène étudié, est faite. Notre comparaison est basée aussi sur les résultats des différents types d'éléments finis programmé pour la même géométrie, et sur la variation du nombre d'éléments de la maille discrétisée (par cet élément).

Les différents paramètres calculés de l'écoulement, après le calcul de la vitesse, seront représentées et récapitulés dans des tableaux appropriés pour chaque géométrie à la fin du chapitre.

Dans la suite, nous présentons après les données du programme, les résultats de génération des maillages, puis celles des vitesses et les caractéristiques de l'écoulement avec les interprétations et les discussions nécessaires.

## VI-2/ DONNEES DU PROGRAMME

Dans le cadre d'exécution du programme de calcul, nous avons opté pour les données suivantes : le fluide véhiculé est l'air à une température constante de  $T = 20^{\circ}\text{C}$ , ayant une masse volumique  $\rho = 1.205 \text{ Kg/m}^3$ , et une viscosité dynamique  $\mu = 18.2 \cdot 10^{-6} \text{ Poiseuille (Kg/m s)}$ , le gradient de pression imposé est constant avec  $\Delta P_g = 1.10^3 \text{ pas}$ , pour une conduite de longueur  $L=10 \text{ m}$ .

Les données géométriques des différentes sections sont données dans les paragraphes suivants, où nous avons cité leurs figures.

## VI-3/ RESULTATS DES SORTIES GRAPHIQUES DES MAILLAGES

Les résultats suivants sont des maillages pour des configurations mono-connexe à frontières simples et complexes, ainsi que pour des configurations multi-connexes qui peuvent présenter le cas de l'encombrement des conduites et des canalisations pour la transmission de différents besoins dans des zones limitées. Ou bien le cas de la vaine d'une soufflerie pour un obstacle aérodynamique long.

### Remarque :

Pour obtenir les maillages des sections voulues il faut donner les informations suivantes :

- Numéro de fichier de la géométrie désirée (NF) à partir d'un menu.
- Numéro du type d'élément fini (NTEF) : Triangulaire à 3, 4 ou 6 nœuds ou quadrilatère à 4, 5 ou 8 nœuds) à partir d'un menu.
- Dimensions géométriques (largueurs, longueurs, rayon, positions des domaines internes...).
- Choix des positions des quatre points A, B, C et D des limites des cotés d'une géométrie à maillage type 'H'.
- Nombre de discrétisation NNX et NNY.
- Paramètres des fonctions de condensation (P et Q) de chaque cotés de la géométrie mono-connexe.
- Choix de l'option filtrage par l'indice IFILT :
  - ◆ Si IFILT = 0, l'option filtrage est ignorée.
  - ◆ Si IFILT = 1, l'option filtrage est prise en compte. Alors lire le nombre d'itérations NITER qu'il faut effectuer et son facteur de relaxation  $\omega_f$ .

Rappelons que, les sorties graphiques sont obtenues à partir des fichiers résultats de la subroutine **Mesh** et l'utilisation systématique de logiciel conçu pour le traçage des maillages d'une façon séquentielle.

Les figures (VI-1 a,b,c) présentent des maillages de type 'H' triangulaire gros pour les éléments finis type T3N, T4N et T6N dans un domaine circulaire (NF=1). Les figures (VI-2 d,e,f) présentent des maillages de type quadrilatère gros pour les éléments finis type Q4N, Q5N et Q8N. On a prit un rayon  $R=0.1$  et différentes subdivisions (NNX, NNY) voir tableau TVI-1. Les positions des points A, B, C, et D sont choisis aux milieux de chaque quadrant. On obtient dans ce cas NNT nœuds (nombre de nœuds totaux), NEL éléments et NNPE nœuds (nombre de nœuds par élément), voir le tableau TVI-1 pour ces nombres de chaque cas de maillage.

Le but c'est de voir exactement la division et la forme ainsi que la disposition des cellules et des nœuds. Rappelant que les paramètres de contrôle de la fonction de condensations, de la formule (IV-10) chapitre 4, sont pris les mêmes pour chaque côtés du domaine, tel que  $P=1.0$  et  $Q=2.0$ . Pour l'option de filtrage du maillage, on a donné IFILT = 0.

La figure (VI-3) présente un type de maillage fin dont, le but est de voir la forme des cellules dans le maillage lorsqu'on augmente les nombres de subdivisions. L'exemple choisi ici est pour NNX=50 et NNY=40. Le nombre de nœuds obtenu est égale à 2000 dont 176 sont sur la frontière du domaine et le nombre des triangles est égale à 3822, voir tableau TVI-1.



Tableau TVI-1 : Caractéristiques des maillages d'un domaine circulaire

N° Figure	NTEF	NNX	NNY	NNPE	NNT	NEL
VI-1 a	1	11	11	3	121	200
VI-1 b	2	11	11	4	321	200
VI-1 c	3	7	7	6	169	72
VI-2 d	4	11	11	4	121	100
VI-2 e	5	11	11	5	221	100
VI-2 f	6	10	10	8	280	81
VI-3	1	50	40	3	2000	3822
VI-4 a,b	1	35	30	3	1050	1972

A titre information, on peut aller très loin mais la présentation sur papier sera mauvaise.

Les figures (VI-4 a,b) présentent un exemple typique sur l'effet des positions des points A, B, C et D de frontière sur la forme du maillage. Pour la première figure, on a : Le point A est choisi dans le troisième quadrant pour  $\theta_A = 180+10^\circ$ . Les points B, C et D sont choisis respectivement pour  $\theta_B = 350^\circ$ ,  $\theta_C = 10^\circ$  et  $\theta_D = 170^\circ$ . La deuxième figure a les angles des points A, B, C et D choisis respectivement pour  $\theta_A = 180+10^\circ$ ,  $\theta_B = 290^\circ$ ,  $\theta_C = 70^\circ$  et  $\theta_D = 170^\circ$ .

Où, on voit la distribution des nœuds et leur condensation vers le côté gauche. On voit aussi exactement la disposition des cellules et ses formes. A titre information, cette forme de maillage n'est pas recommandée pour faire le calcul de l'écoulement visqueux, puisque ce type de problème nécessite un raffinement au voisinage de la paroi.

En comparant les neuf (09) figures, on peut tirer qu'on a une infinité de présentation de formes de maillages et que la décision finale pour faire le choix d'un tel ou tel maillage base toujours sur le type et le nombre des conditions aux limites, l'ordre de la précision du problème, le type d'élément fini, la taille de l'ordinateur et la variation du gradient de la solution du problème recherchée.

Le deuxième domaine présenté dans ce modeste travail est celui d'ellipse (NF= 4). Tel qu'on satisfait de présenter un exemple de maillage gros type 'H' triangulaire de T6N (Figure VI-5 a) et un autre maillage type quadrilatère de huit nœuds par élément Q8N (Figure VI-5 b). Les caractéristiques des maillages sont récapitulées dans le tableau TVI-2 suivant.

La figure (VI-6 a) montre un maillage triangulaire fin d'un domaine elliptique avec un grand rayon  $A=0.0$  et un autre  $B=0.05$  (m), où on voit l'effet de changement les points aux limites des côtes de la frontière, tel que les angles des points sont les mêmes que celle de la figure (VI-4 b) et les mêmes constatations tirées.

La figure (VI-6 b) montre la forme lorsqu'on applique la procédure de filtrage des nœuds au maillage précédent obtenu par notre technique. Le facteur de relaxation  $\omega = 0.3$  et le nombre d'itérations est choisi à NITER=2000. Il est à noter ici qu'on peut à partir de cette option de filtrage de considérer plusieurs forme de maillage en jouant sur les paramètres : nombre d'itérations, la manière de filtrer les nœuds et le nombre et les numéros des nœuds à filtrés.

Tableau TVI-2 : Caractéristiques des maillages d'un domaine elliptique

N° Figure	NTEF	NNX	NNY	NNPE	NNT	NEL	ITER
VI-5 a	3	13	13	6	625	288	0
VI-5 b	6	9	9	8	225	64	0
VI-6 a	1	25	25	3	625	1152	0
VI-6 b	1	25	25	3	625	1152	2000

Les figures (VI-7 a,b,c) présentent des maillages de type 'H' triangulaire gros pour les éléments finis type T3N, T4N et T6N respectivement dans un domaine rectangulaire (NF=2 ou 3). Les figures (VI-7 d,e,f) illustrent aussi des maillages de même domaine mais de type quadrilatère gros pour les éléments finis type Q4N, Q5N et Q8N.

Les caractéristiques des maillages sont données dans le tableau TVI-3 suivant.

**Tableau TVI-3 : Caractéristiques des maillages d'un domaine rectangulaire**

N° Figure	NTEF	NNX	NNY	NNPE	NNT	NEL
VI-7 a	1	11	11	3	121	200
VI-7 b	2	11	11	4	321	200
VI-7 c	3	10	10	6	361	162
VI-7 d	4	12	12	4	144	121
VI-7 e	5	11	11	5	221	100
VI-7 f	6	10	11	8	309	90

Les figures (VI-8 a,b) présentent des maillages de type 'C' triangulaire, tel que la première figure illustre le domaine d'un demi-cercle (NF=5) avec un exemple d'élément fini type T4N. La deuxième montre un quart de cercle, avec l'élément fini type T3N. le rayon utilisé est  $R=0.1$  (m).

Les figures (VI-9 a,b,c,d) illustrent aussi des maillages d'un domaine secteur (NF=6) pour différents angles mais de type quadrilatère pour les trois premiers dont les éléments finis sont Q4N, Q5N et Q8N, et la dernière figure est un maillage triangulaire de type d'élément T6N, où les angles sont limités entre  $10^\circ$  et  $350^\circ$  dont le but de montrer tous les cas de traçage et tous les types d'éléments finis utilisés par le programme, et par suite l'efficacité des sous-routines de génération des maillages. Les caractéristiques de ces maillages sont données dans le tableau TVI-4 suivant avec les différents angles utilisés.

**Tableau TVI-4 : Caractéristiques des maillages d'un domaine secteur**

N° Figure	NTEF	NNX	NNY	NNPE	NNT	NEL	Angle( $^\circ$ )
VI-8 a	2	11	11	4	420	652	$180^\circ$
VI-8 b	1	7	8	3	106	182	$90^\circ$
VI-9 a	4	7	6	4	78	65	$60^\circ$
VI-9 b	6	7	10	8	384	117	$140^\circ$
VI-9 c	5	7	11	5	278	130	$270^\circ$
VI-9 d	3	7	13	6	663	312	$310^\circ$

La figure (VI-10) montre un maillage doublement connexe de type 'O' triangulaire d'un domaine qui représente un rectangle moins un cercle centré (NF=10) avec un exemple d'élément fini type T6N, où les côtes du rectangle sont  $A=1.0$  et  $B=0.7$  (m), or le rayon du cercle est  $R=0.1$ . Avec des éléments quadrilatères, on a la figure (VI-11) qui montre un même domaine mais avec des éléments finis quadrilatères type Q8N.

La figure (VI-14) montre un maillage de type 'O' triangulaire du même domaine mais avec un cercle non centré tel que les coordonnées de ce centre sont  $X=A/14=0.071$  et  $Y=B/5=0.14$ , où l'élément fini utilisé est de type T4N. Or la figure (VI-15) illustre le même domaine mais avec des éléments finis quadrilatères type Q5N. Les caractéristiques de ces maillages sont données dans le tableau TVI-5 suivant.

**Tableau TVI-5 : Caractéristiques des maillages du domaine rectangle moins un cercle au centre ou non au centre**

N° Figure	NTEF	NNX	NNY	NNPE	NNT	NEL	Posi X;Y
VI-10	3	8	9	6	1153	576	00 ; 00
VI-11	6	7	8	8	728	224	00 ; 00
VI-14	2	6	5	4	384	240	A/14; B/5
VI-15	5	6	6	5	264	120	A/4; -B/5

La figure (VI-12) représente un maillage de type 'O' triangulaire d'un domaine doublement connexe qui représente un grand cercle moins un petit cercle centré (NF=13) avec un exemple d'élément fini type T6N, où le rayon du grand cercle égale à  $R_g = 5.0$  et le rayon du petit cercle égale à  $R_p = 2.0$  m. La figure (VI-13) montre un même domaine mais avec des éléments finis quadrilatères type Q8N.

La figure (VI-16) montre un maillage triangulaire du même domaine mais avec un cercle non centré (NF=14), tel que ses coordonnées sont  $X = R_g/5 = 1.0$  et  $Y = R_g/4 = 1.25$ m, où l'élément fini utilisé est de type T4N. Tandis que, la figure (VI-17) illustre le même domaine mais avec des éléments finis quadrilatères type Q5N et l'ordonnée du centre de cercle est  $Y = -1.25$  ; Les caractéristiques de ces maillages sont données dans le tableau TVI-6 suivant.

**Tableau TVI-6** : Caractéristiques des maillages du domaine grand cercle moins un petit cercle centré et non centré

N° Figure	NTEF	NNX	NNY	NNPE	NNT	NEL	Posi X;Y
VI-12	3	6	5	6	527	240	00 ; 00
VI-13	6	6	5	8	408	120	00 ; 00
VI-16	2	6	5	4	384	240	$R_g/5; R_g/4$
VI-17	5	6	5	5	264	120	$R_g/5; -R_g/4$

La figure (VI-18 a) représente un maillage mono-connexes gros de type 'H' d'une section de forme profil d'aile (NF=7) avec un élément fini quadrilatère type Q4N. L'exemple choisi ici est le profil NACA 0012 symétrique [5], tel que la corde est  $Cr_d = 1.0$  (unité) et l'épaisseur  $t = 12\%$ .

Or la figure (VI-18 b) montre un maillage fin dont le but de raffiné un peu le maillage ainsi que l'option de filtrage est utilisée pour les deux cas où le nombre d'itérations est égal à 1000. Ce domaine représente un grand intérêt, de plus le cas de l'écoulement interne dans une conduite ayant cette forme, il y a aussi un intérêt par exemple : si on veut chercher et étudier le problème de la torsion des pales d'hélicoptères, pales d'hélices des moteurs, les aubes du compresseur et autres cas, il faut générer ce type de maillage qui nous servira pour une étude de résistance et de rigidité.

La figure (VI-19 a) schématise un maillage avec un élément fini triangulaire sans l'option de filtrage mais avec condensation de côtes bas et haut de droite vers la gauche. Tandis que la figure (VI-19 b) illustre un exemple de maillage avec l'utilisation de la procédure de filtrage à tous les nœuds de maillage où  $\omega = 0.4$  et le nombre d'itérations Niter est égal à 2000, et avec un changement de la position du point 'B' vers l'extrémité gauche tel que le % par rapport à la corde est donné dans le tableau suivant avec le changement du point 'C'. Les facteurs de condensations P & Q sont tous les mêmes pour les côtes du domaine sauf indication contraire au tableau des caractéristiques des maillages.

Les figures (VI-20 a,b) montrent dans le même domaine des maillages filtrés avec différents types d'éléments finis. Tel que la première figure (VI-20 a) utilise des cellules triangulaires type T6N. Tandis que l'autre (VI-20 b) c'est les éléments quadrilatères type Q8N.

On peut raffiner encore le maillage, mais le dessin ne sera pas clair ; Les caractéristiques de tous ces maillages sont données dans le tableau TVI-7.

Tableau TVI-7 : Caractéristiques des maillages d'un domaine de forme profil d'aile

N° Figure	NTEF	NNX	NNY	NNPE	NNT	NEL	P / Q	B ; C	NITER
VI-18 a	4	10	14	4	140	117	1 / 2	0.9	1000
VI-18 b	4	40	35	4	1400	1326	1 / 2	0.9	1000
VI-19 a	2	15	15	4	617	392	1.8 / 2	0.7	00
VI-19 b	1	15	15	3	225	392	1 / 2	0.8	2000
VI-20 a	3	14	11	6	567	260	1 / 2	0.9	00
VI-20 b	6	15	12	8	334	154	1 / 2	0.9	00

La figure (VI-21) représente un maillage filtré de type 'H' d'une section qui représente un rectangle moins un demi-cercle à la frontière bas, avec des éléments finis triangulaires type T3N. Où les côtes du rectangle sont  $A=3.5$  et  $B=2.5$ , or le rayon du cercle est  $R=0.7$  unité.

Les figures (VI-22 a,b) montrent dans le même domaine ( $NF=12$ ) des maillages type 'H' avec différents types d'éléments finis. Tel que la première figure est discrétisé avec des éléments finis type Q5N sans filtrage. Un exemple avec la procédure de filtrage des nœuds et des cellules type Q4N est montré dans la deuxième figure (VI-22 b), et avec condensation des côtes de frontière gauche et droite du domaine vers les coins supérieurs, tel que les valeurs de ses paramètres P et Q sont données dans le tableau TVI-8.

Un type sur des cellules quadrilatères avec un maillage 'C' de même domaine est présenté dans la figure VI-23. le but est d'illustrer une autre variante de maillage. Les caractéristiques de ces maillages sont données dans le tableau suivant.

Tableau TVI-8 : Caractéristiques des maillages du domaine rectangle moins demi-cercle

N° Figure	NTEF	NNX	NNY	NNPE	NNT	NEL	P / Q	NITER
VI-21	1	30	20	3	600	1102	1 / 2	100
VI-22 a	5	30	25	5	1446	696	1 / 2	00
VI-22 b	4	30	25	4	750	696	$P_{BC, DA}=1.8 / 2$	2000
VI-23	4	18	6	4	198	240	1 / 2	00

La figure (VI-24 a) schématise un maillage modéré quadrilatère type 'H' d'un domaine former par un demi-cercle creux ( $NF=9$ ), avec des éléments finis type Q5N. Pour illustrer un autre type de maillage, la figure (VI-24 b) présente un maillage type 'C' avec des éléments quadrilatères type Q8N. Les figures (VI-25 a,b) ont pour but de montrer la forme des triangles dans le maillage lorsque ce dernier sera fin ainsi que l'effet de l'option de filtrage et la condensation des frontières. Tel que, la figure (VI-25 a) est montrée avec des éléments finis type T3N et avec l'option de filtrage. Or la figure (VI-25 b) est illustrée avec des éléments finis type T4N et sans filtrage mais avec condensation de la côte 2 'BC' (gauche). Voir le tableau 9.

Tableau TVI-9 : Caractéristiques des maillages du domaine demi-cercle creux au centre

N° Figure	NTEF	NNX	NNY	NNPE	NNT	NEL	P / Q	NITER
VI-24 a	5	15	10	5	276	126	1 / 2	0
VI-24 b	6	25	10	8	715	216	1 / 2	0
VI-25 a	1	30	25	3	750	1392	0.9 / 2	100
VI-25 b	2	25	20	4	1412	912	$P_{BC}=1.5 / 2$ $P_{DA}=0.9 / 2$	0

Les figures (VI-26) et (VI-27) représentent un maillage d'un domaine complexe aux frontières. Le but de ces maillages c'est de voir la puissance du programme réalisé, et qu'il peut aller très loin pour générer des maillages dans des configurations très complexes. (Sous réserves) qui ne sont pas industrialisé comme conduite (maillage n'est pas recommandé pour faire le calcul de l'écoulement visqueux, MDF) mais peuvent être exister comme poutre (étude RDM), exemple d'étude de la torsion d'un clet. Pour bien distribuer les nœuds de maillage, on a utilisé la procédure de filtrage tel que le nombre d'itérations choisi est 100 pour la figure VI-26 et 120 itérations d'amélioration pour l'autre maillage. Voir le tableau TVI-10.

**Tableau TVI-10** : Caractéristiques des maillages du domaine complexe aux frontières (NF=11)

N° Figure	NTEF	NNX	NNY	NNPE	NNT	NEL	P / Q	NITER
VI-26	1	50	40	3	2000	3822	1 / 2	100
VI-27	4	50	40	4	2000	1911	1 / 2	120

Pour un dernier exemple, on a la figure (VI-28) montre un maillage quadrilatère type 'H' d'un domaine Hexagone (NF= 8) à échelle gros (7 x 9) avec une côte A=1. Pour un maillage type 'O' triangulaire, on a la figure (VI-29). Afin de voir d'autre type d'éléments, on présente les figures (VI-30 a, b) dont la première illustre un maillage type 'H' modéré de même domaine avec des éléments finis triangulaires type T4N, or l'autre figure est consacrée pour les éléments finis quadrilatères type Q8N, avec condensation de la côte AB (bas) où  $P_{AB}=1.5$  et  $Q_{AB}=2.0$ . Les caractéristiques de ces maillages sont données dans le tableau suivant.

**Tableau TVI-11** : Caractéristiques des maillages du domaine Hexagone (NF= 8)

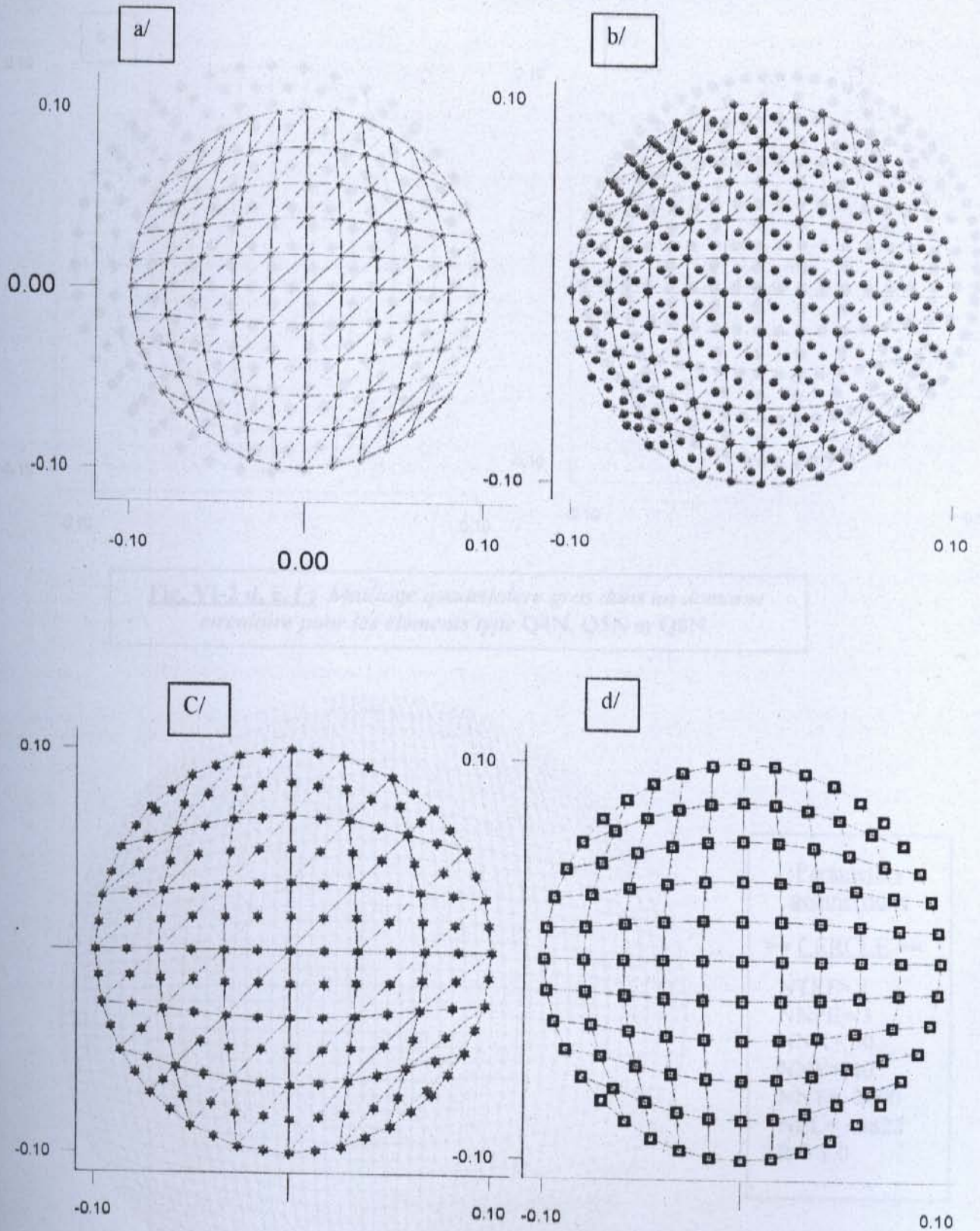
N° Figure	NTEF	NNX	NNY	NNPE	NNT	NEL	P / Q
VI-28	4	7	9	4	63	48	1 / 2
VI-29	1	9	9	3	97	160	-
VI-30 a	2	12	19	4	624	396	1 / 2
VI-30 b	6	12	19	8	653	198	$P_{AB}=1.5 / 2$

#### Remarques :

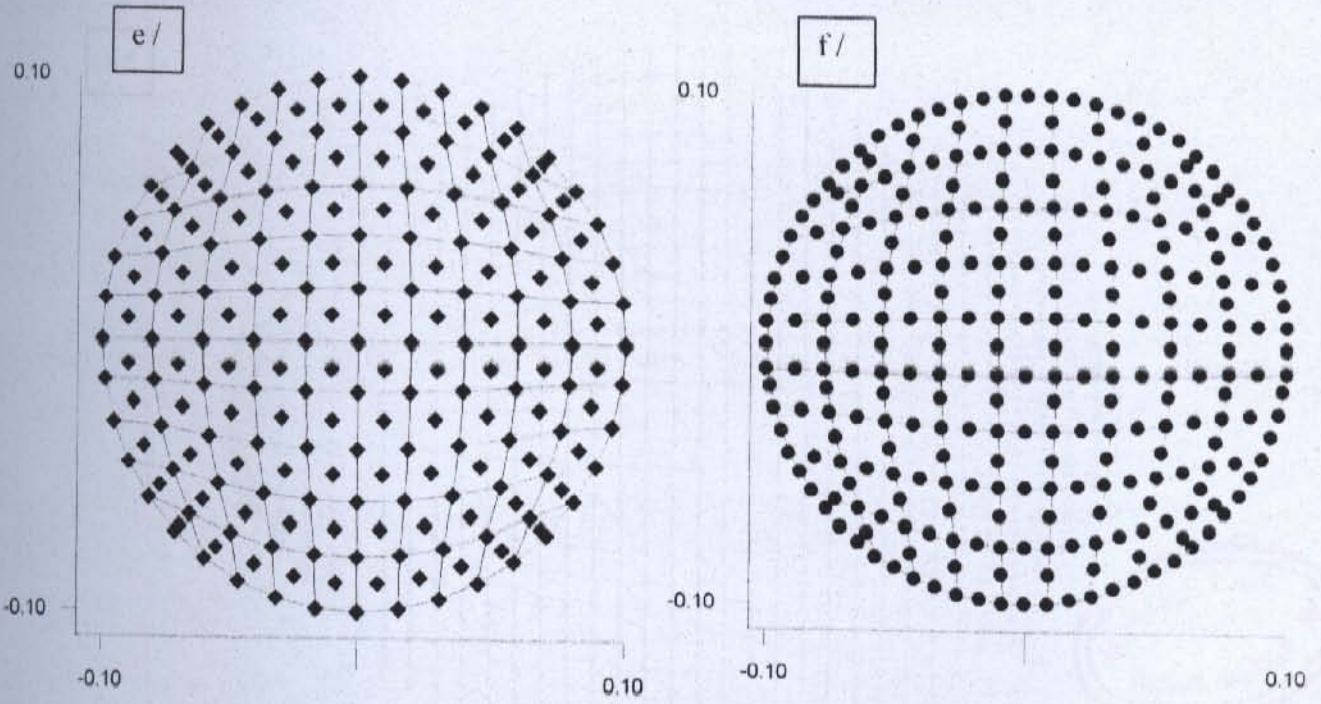
A partir de ces exemples, on voit clairement la puissance du programme réalisé sur la génération des maillages dans n'importe quelles géométries simplement ou multi-connexes applicable pour différentes disciplines.

On voit aussi l'effet des procédures de filtrage et de condensation sur l'organisation des nœuds et la taille des cellules obtenues. Tel qu'on peut jouer encore sur les valeurs de nombre d'itérations de la procédure de filtrage, positions des nœuds A, B, C et D de frontière, le nombre et les numéros des nœuds à filtrer, on peut alors obtenir des maillages assez efficaces apte à être utiliser pour faire la résolution de l'équation de Poisson avec la précision voulue. On constate aussi la variété des éléments finis utilisés pour qu'elle réponde aux besoins de l'utilisateur.

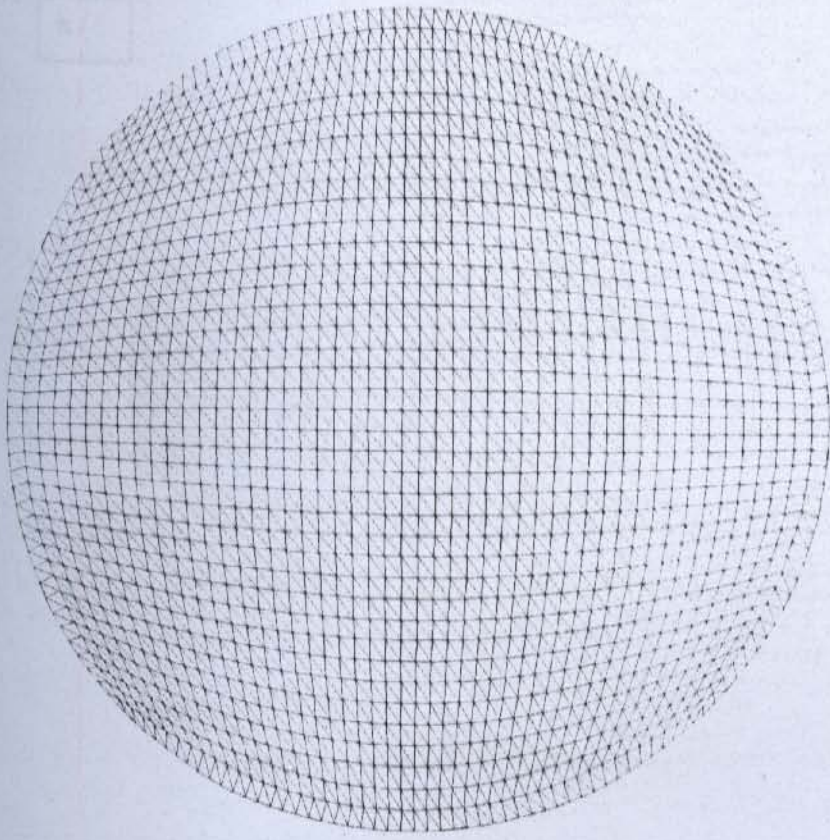
Dans la suite, on présente les figures des maillages traitées précédemment.



**Fig. VI-1 a,b et c :** Maillage triangulaire gros dans un domaine circulaire pour les éléments type T3N, T4N et T6N.



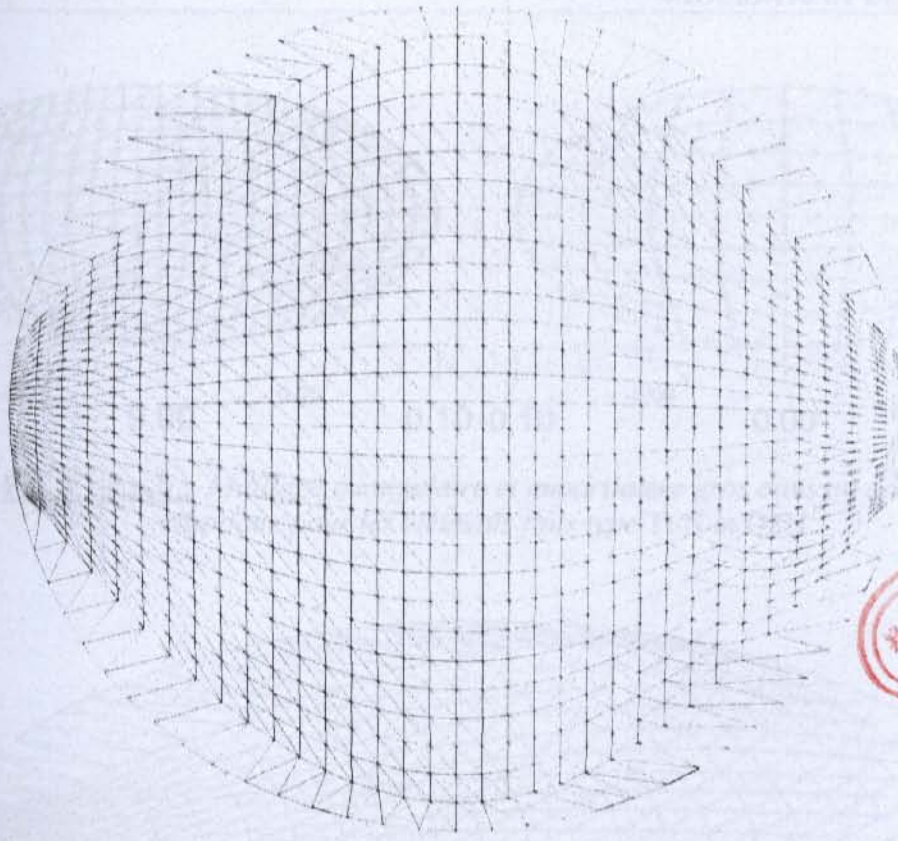
**Fig. VI-2 d, e, f :** Maillage quadrilatère gros dans un domaine circulaire pour les éléments type Q4N, Q5N et Q8N.



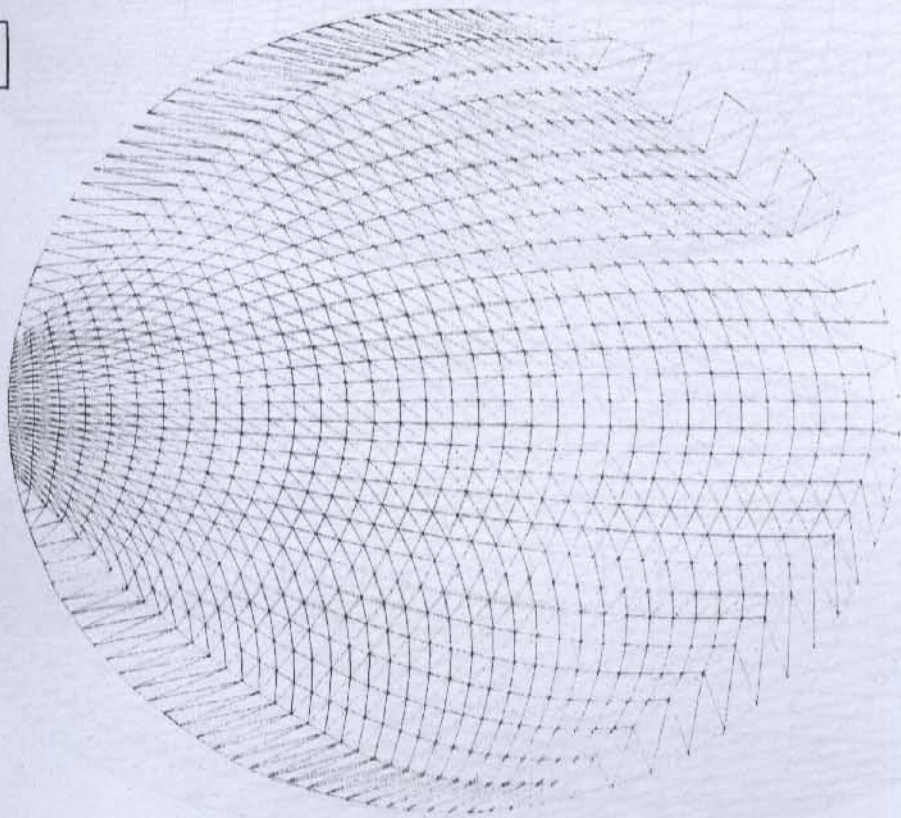
Paramètres géométrique  
 == CERCLE ==  
 NTEF= 1  
 NNPE= 3  
 NNX= 50  
 NNY= 40  
 NNT= 2000  
 NEL= 3822  
 R = 1.0

**Fig. VI-3 :** Maillage triangulaire fin dans un domaine circulaire Pour les éléments type T3N.

a /

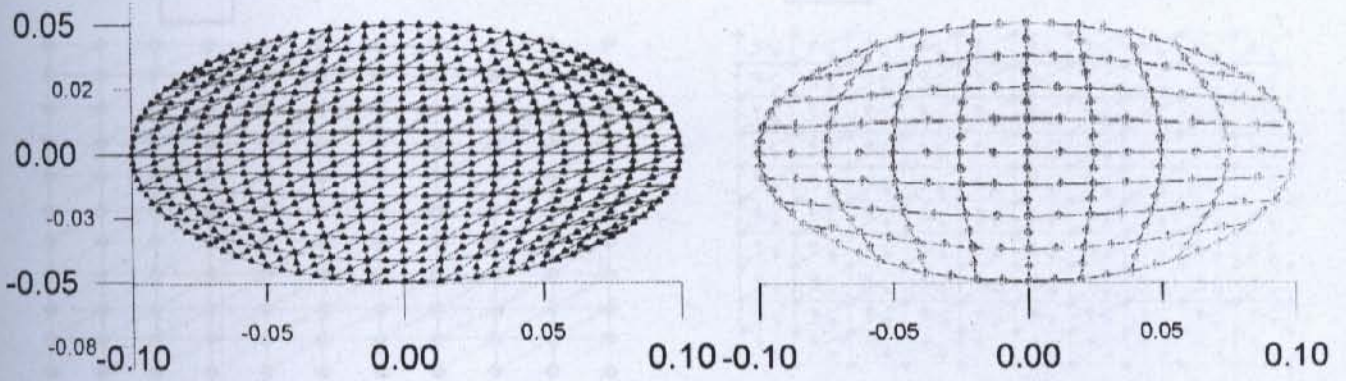


b /

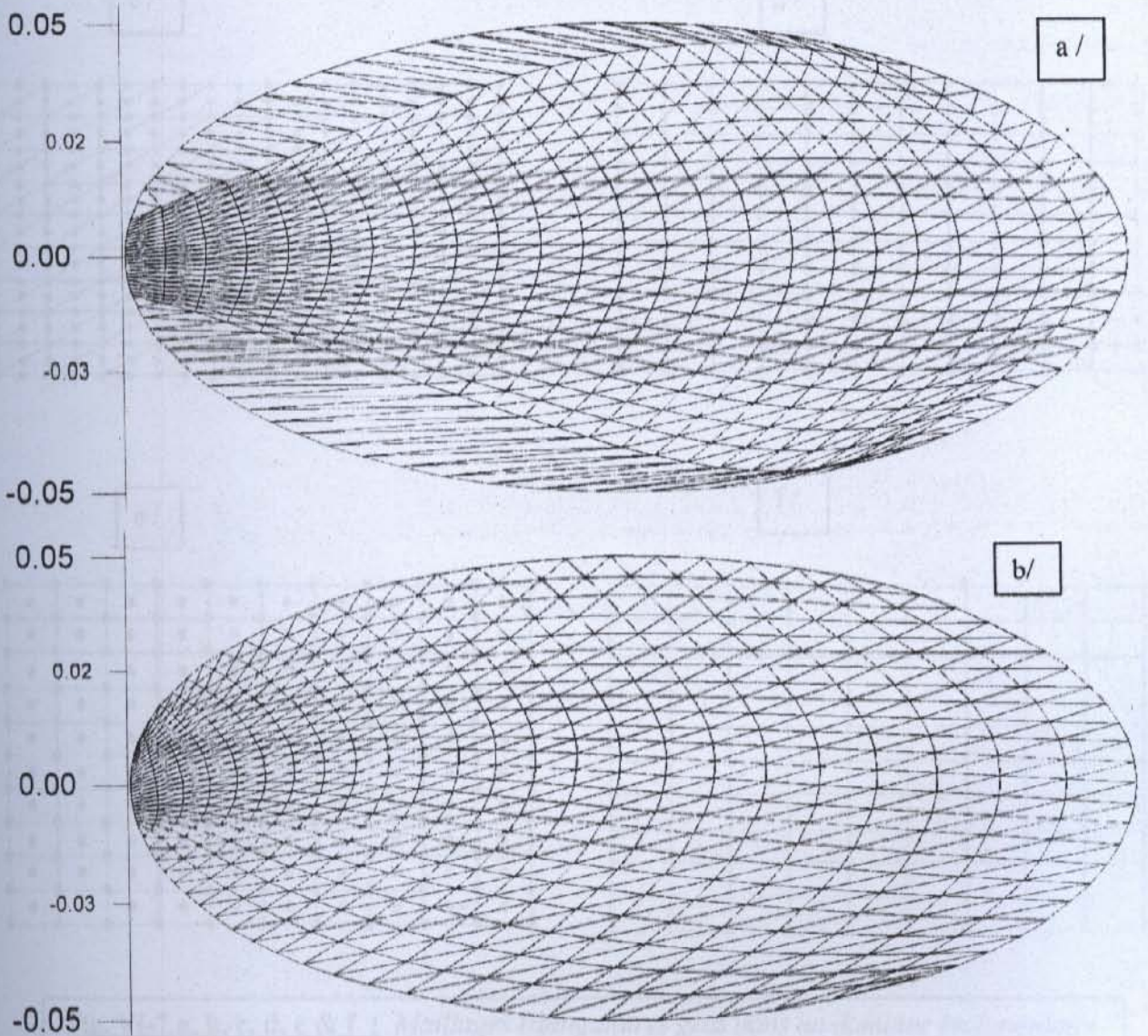


**Fig. VI-4 a, b :** Effet de changement les positions des points de la frontière sur la forme du maillage pour un domaine circulaire





**Fig. VI-5 a,b :** Maillage triangulaire et quadrilatère gros dans un domaine elliptique pour les éléments finis type T6N et Q8N.



**Fig. VI-6 a,b :** Maillage triangulaire filtré et non filtré dans un domaine elliptique avec les éléments finis type T6N

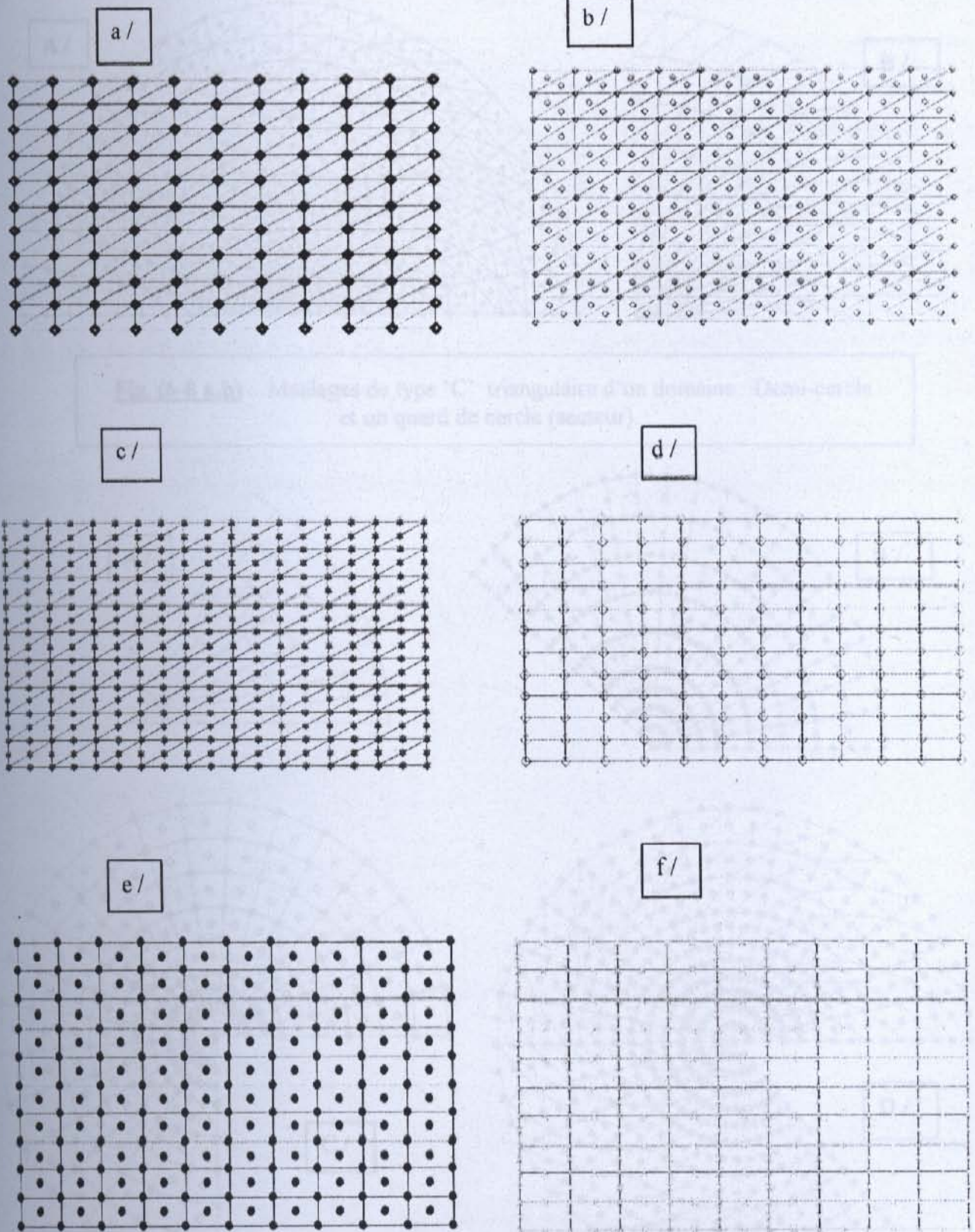
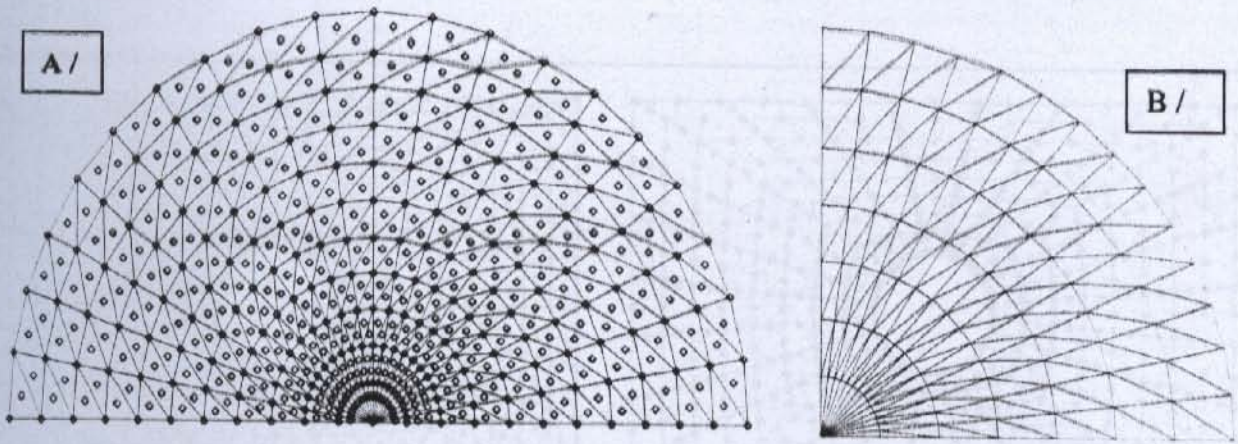
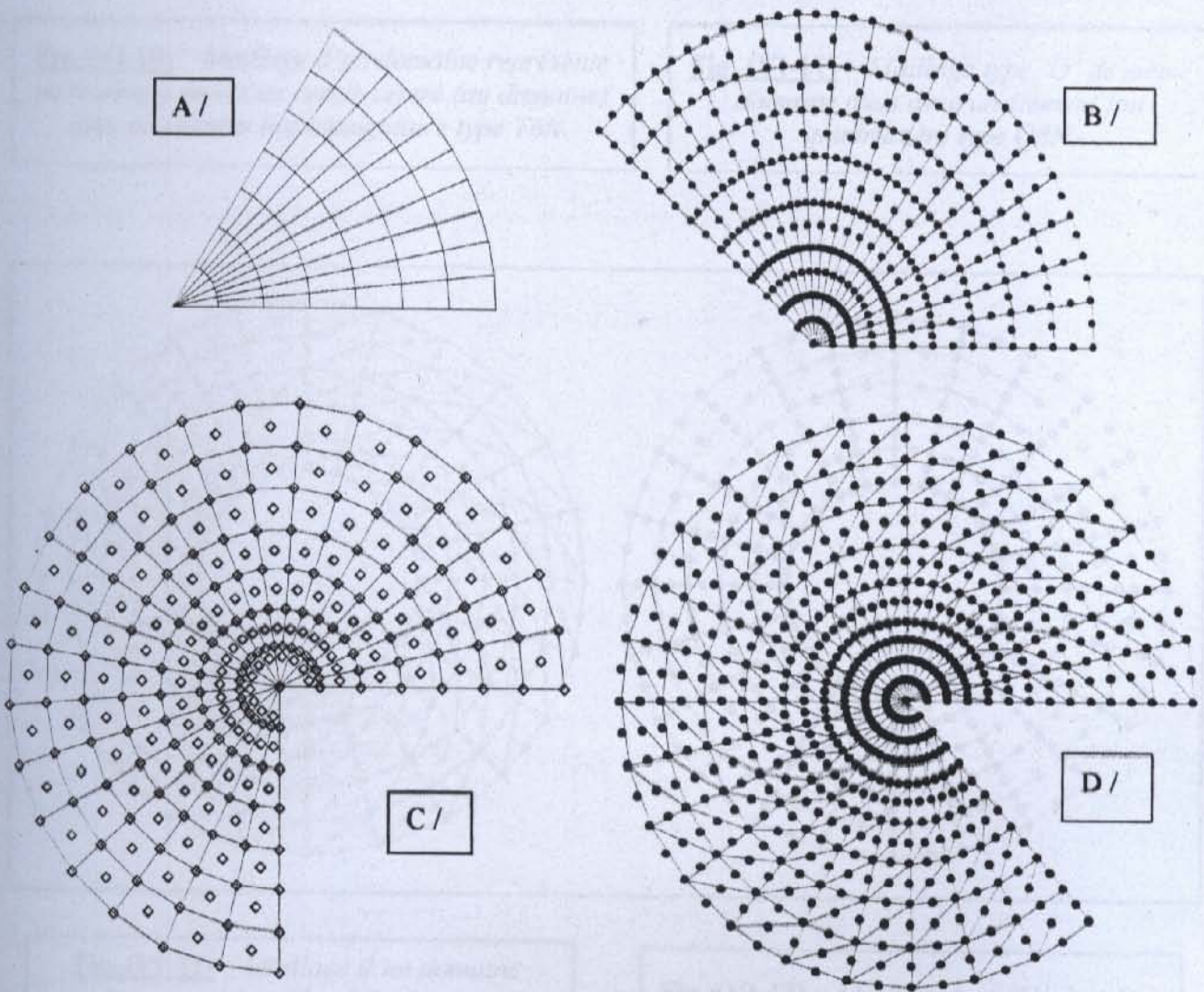


Fig. (a-f) - Maillages de type "C" triangulaires d'un domaine rectangulaire et un quart de cercle (secteur)

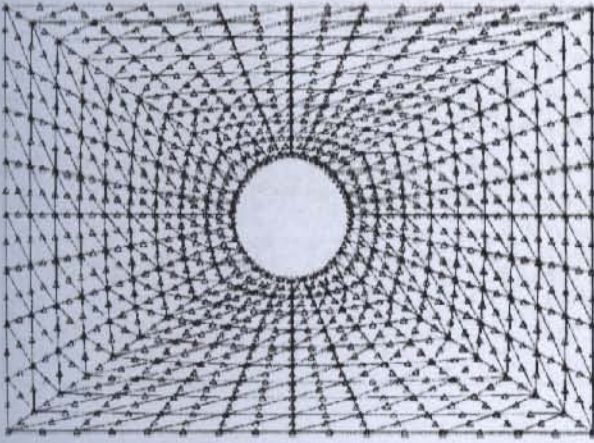
**Fig. VI-7 a, b, c, d, e & f :** Maillages triangulaires gros dans un domaine rectangulaire pour les éléments type T3N, T4N et T6N respectivement. Et des maillages quadrilatères gros pour les éléments de type Q4N, Q5N et Q8N.



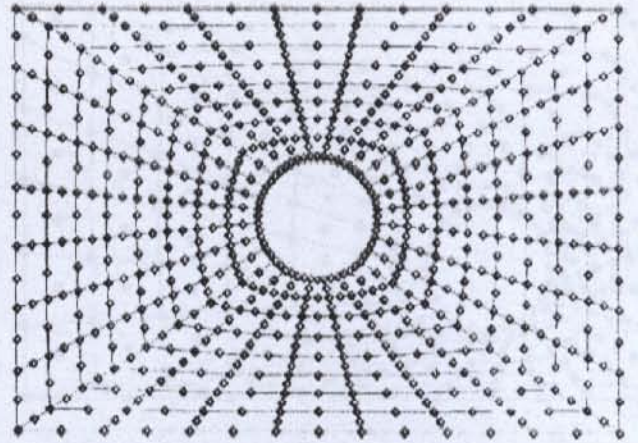
**Fig. (6-8 a,b) :** Maillages de type 'C' triangulaire d'un domaine : Demi-cercle et un quard de cercle (secteur).



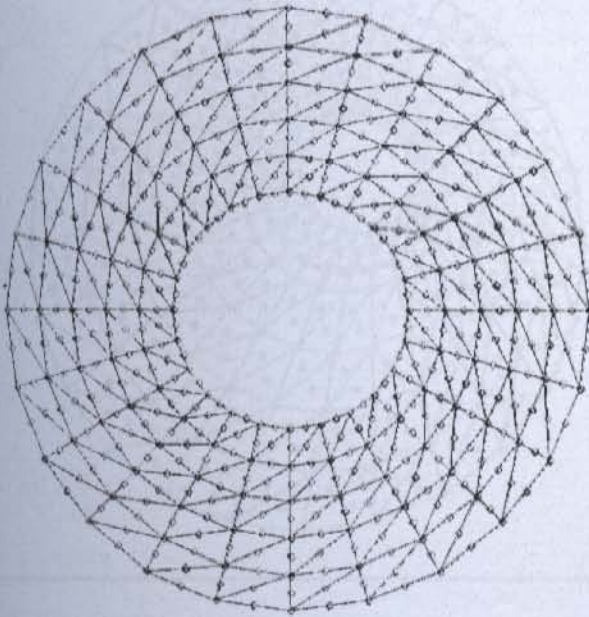
**Fig. (6-9 a,b,c,d) :** maillages d'un domaine secteur pour différents angles et différents types d'éléments finis.



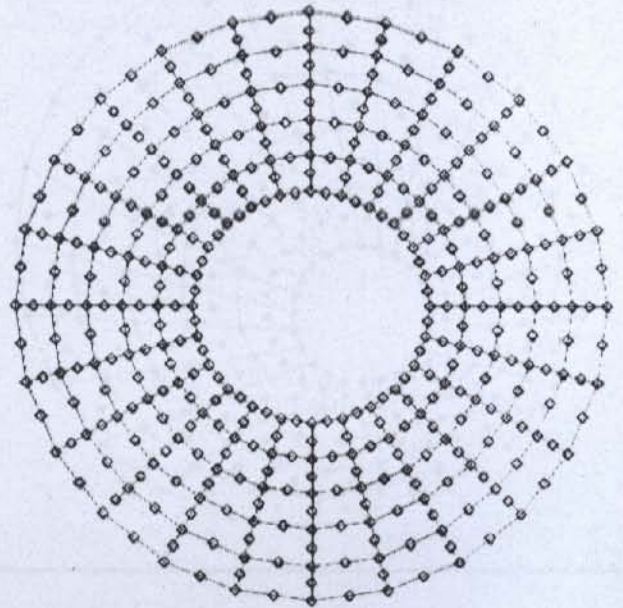
**Fig. (VI-10)** : Maillage d'un domaine représente un rectangle moins un cercle centré (au domaine) avec un élément fini triangulaire type T6N.



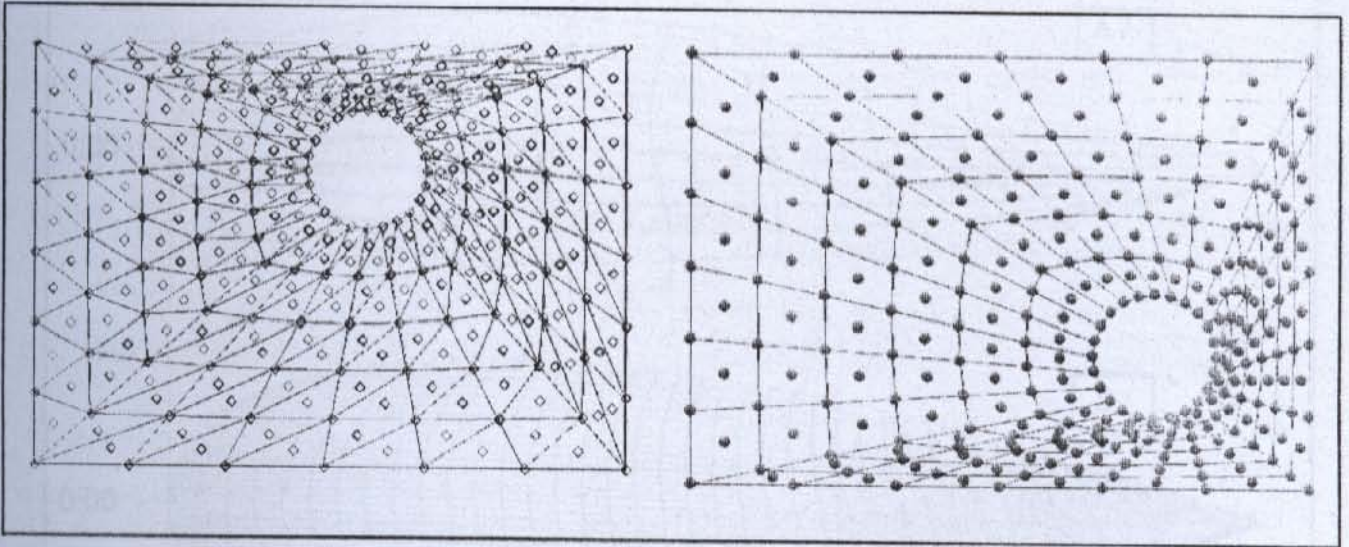
**Fig. (VI-11)** : Maillage type 'O' de même domaine mais avec un élément fini quadrilatère type Q8N.



**Fig. (VI-12)** : Maillage d'un domaine représente un grand Cercle moins un petit cercle centré (au domaine) avec un élément fini triangulaire type T6N.

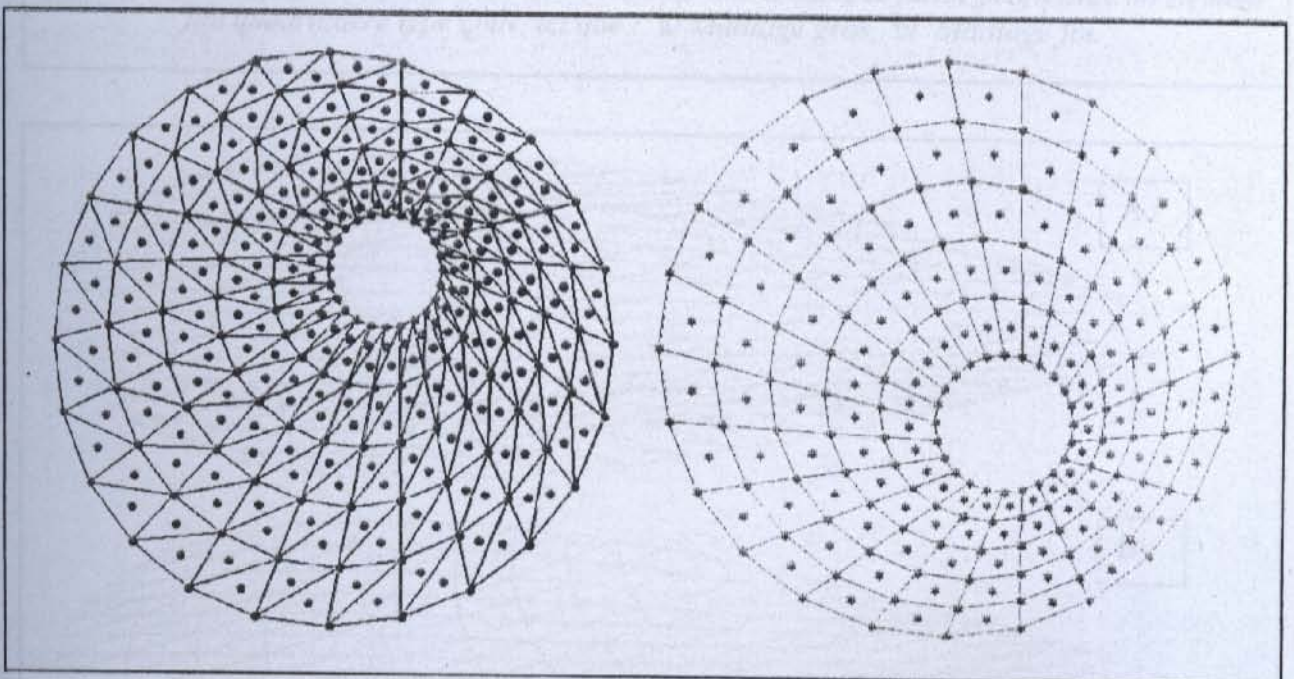


**Fig. (VI-13)** : Maillage type 'O' de même domaine mais avec un élément fini quadrilatère type Q8N.



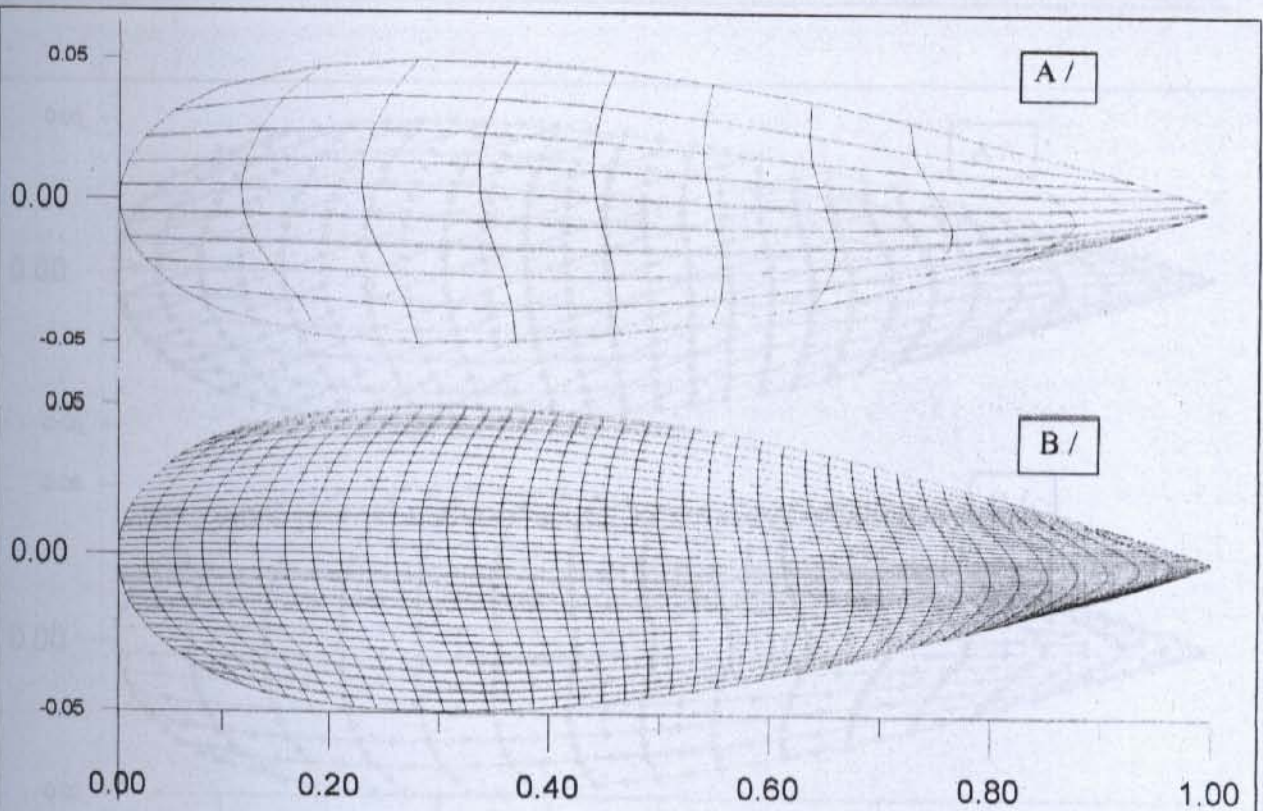
**Fig. (VI-14) :** Maillage d'un domaine représente un rectangle moins un cercle non centré, avec un élément fini triangulaire type T4N.

**Fig. (VI-15) :** Maillage type 'O' de même domaine (cercle non centré) mais avec un élément fini type Q5N.

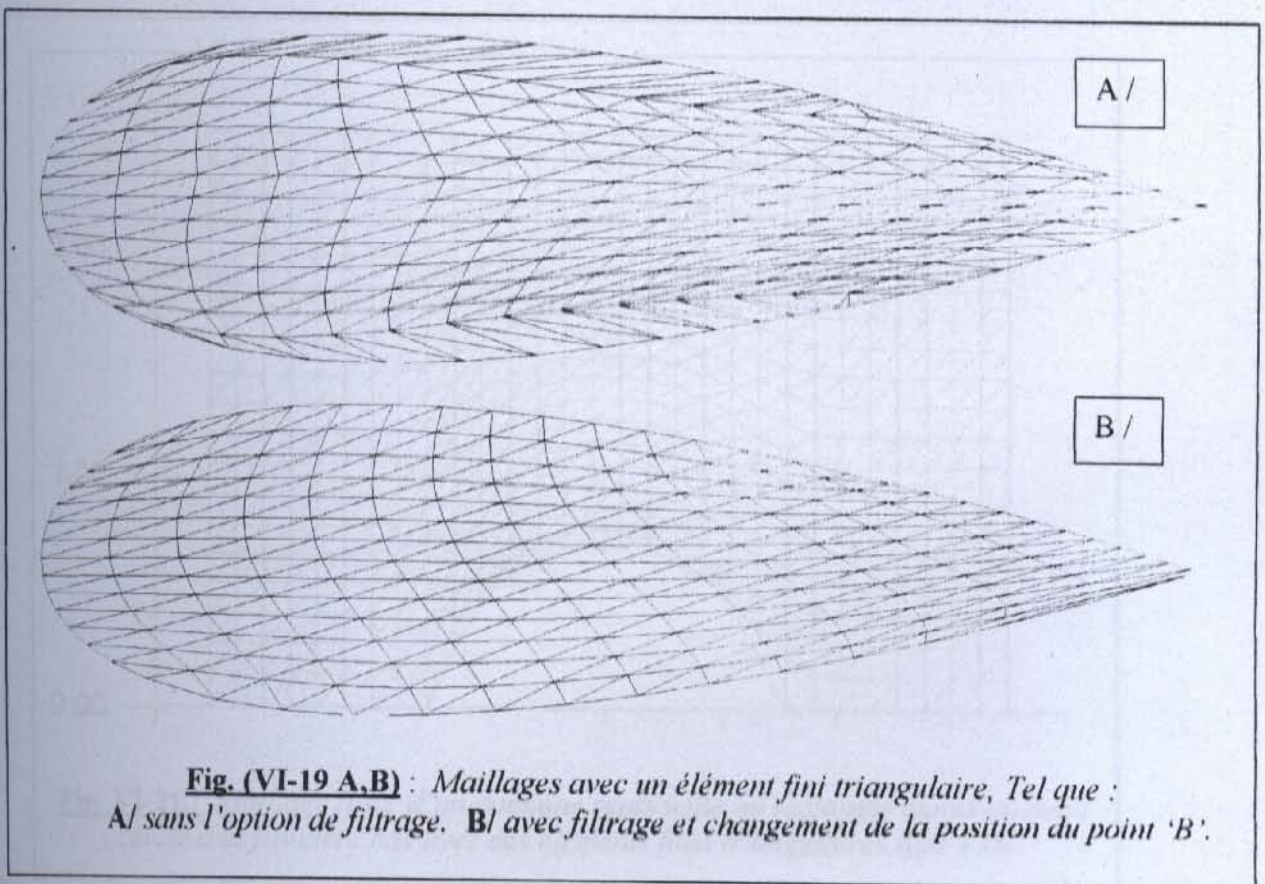


**Fig. (VI-16) :** Maillage d'un domaine représente un grand Cercle moins un petit cercle non centré avec un élément fini triangulaire type T4N.

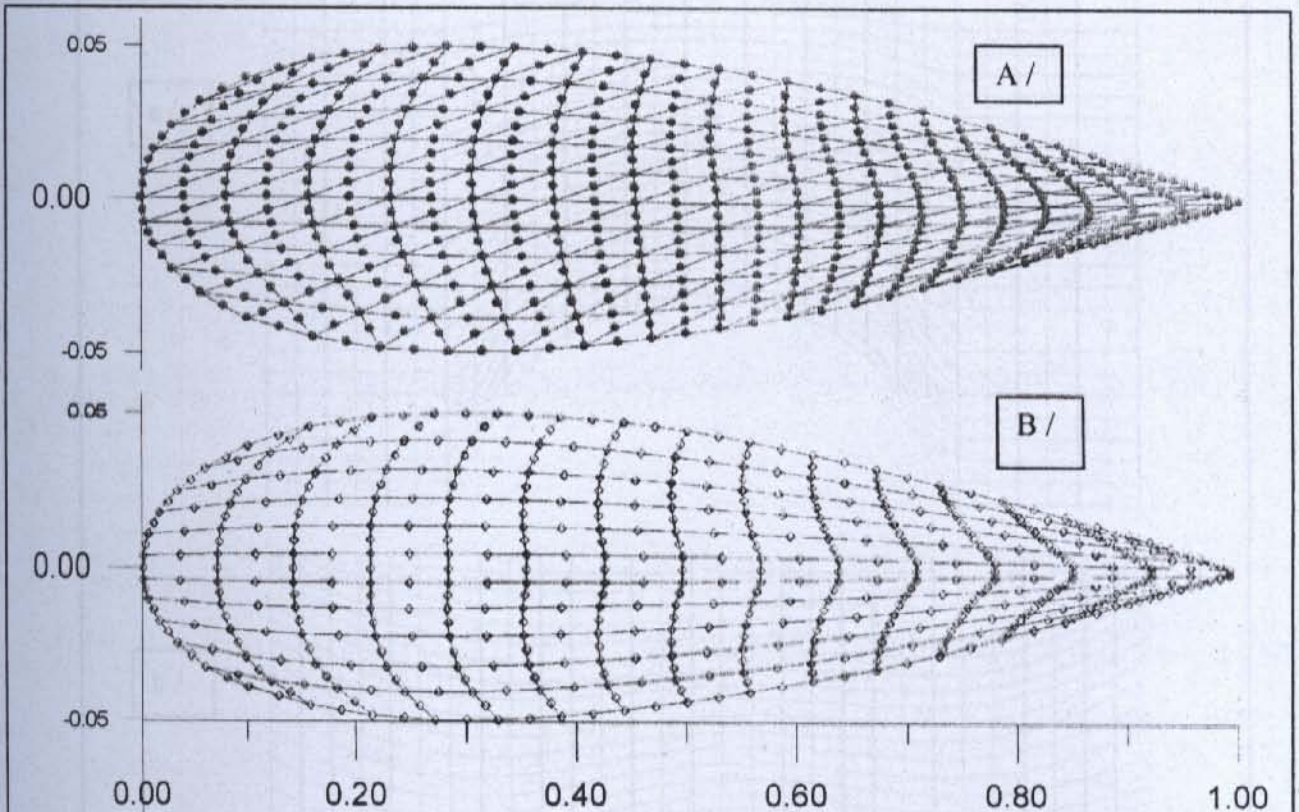
**Fig. (VI-17) :** Maillage doublement connexe type 'O' de même domaine mais avec un élément fini quadrilatère type Q5N.



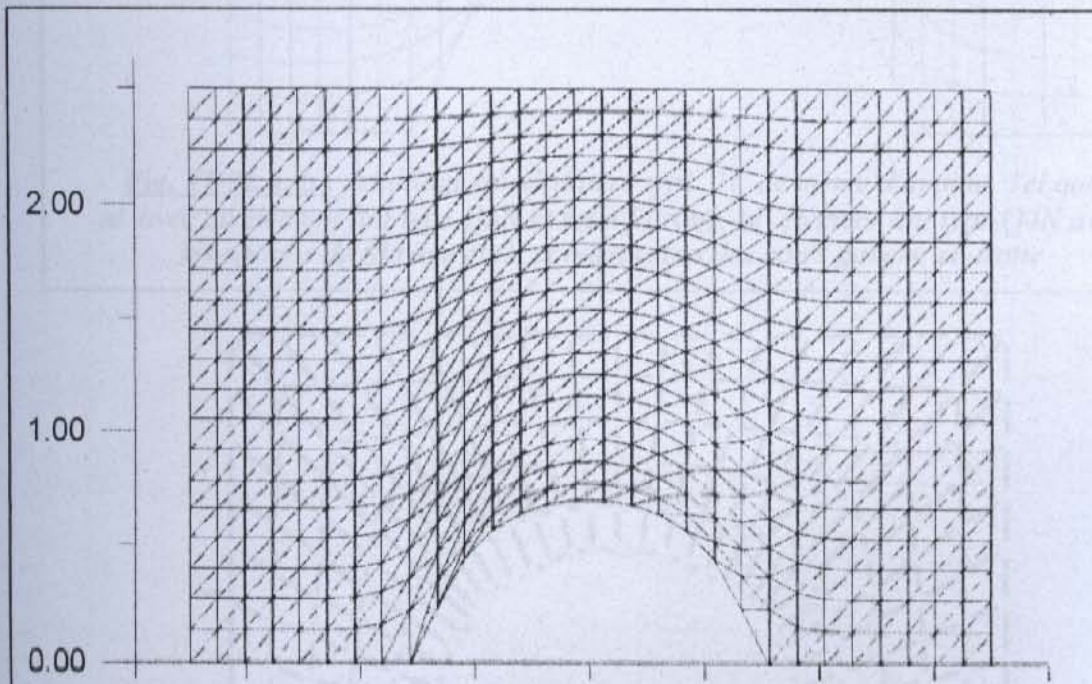
**Fig. (VI-18 a,b) :** Maillages mono-connexes d'une section de forme profil avec un élément fini quadrilatère type Q4N, tel que : a/ Maillage gros, b/ Maillage fin.



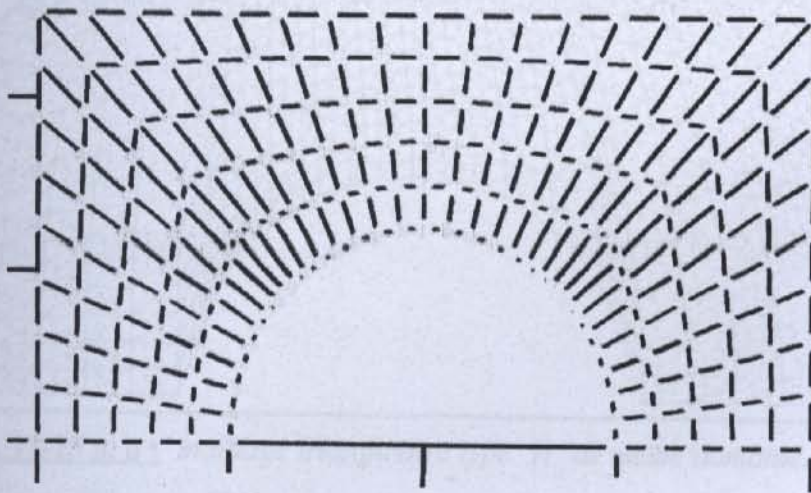
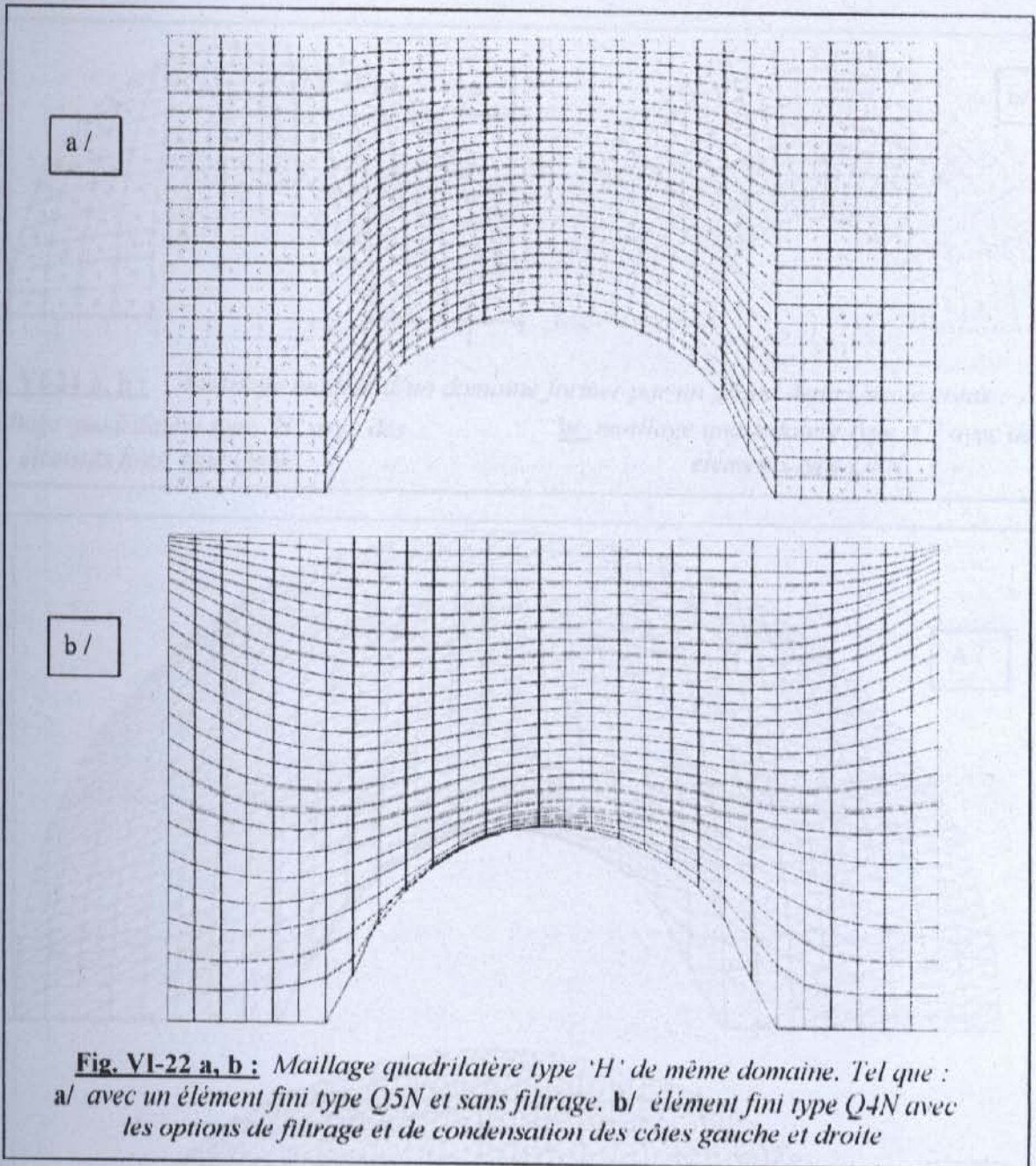
**Fig. (VI-19 A,B) :** Maillages avec un élément fini triangulaire, Tel que :  
A/ sans l'option de filtrage. B/ avec filtrage et changement de la position du point 'B'.



**Fig. VI-20 a, b :** Maillages de profil d'aile filtré avec différents types éléments finis, Tel que : a/ élément triangulaire type T6N. b/ élément quadrilatère type Q8N.

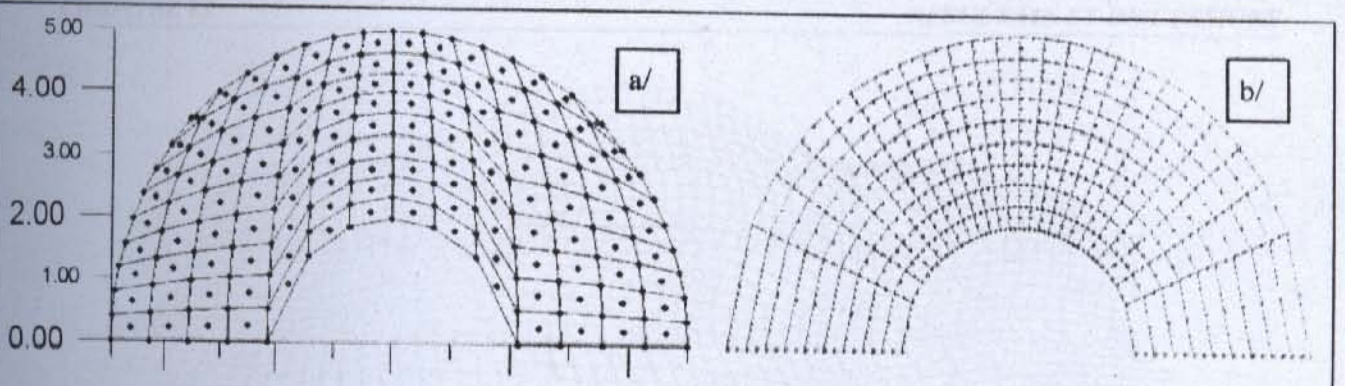


**Fig. VI-21 :** Maillage filtré d'un domaine représente un rectangle moins un demi cercle à la frontière bas avec des éléments finis triangulaires type T3N.

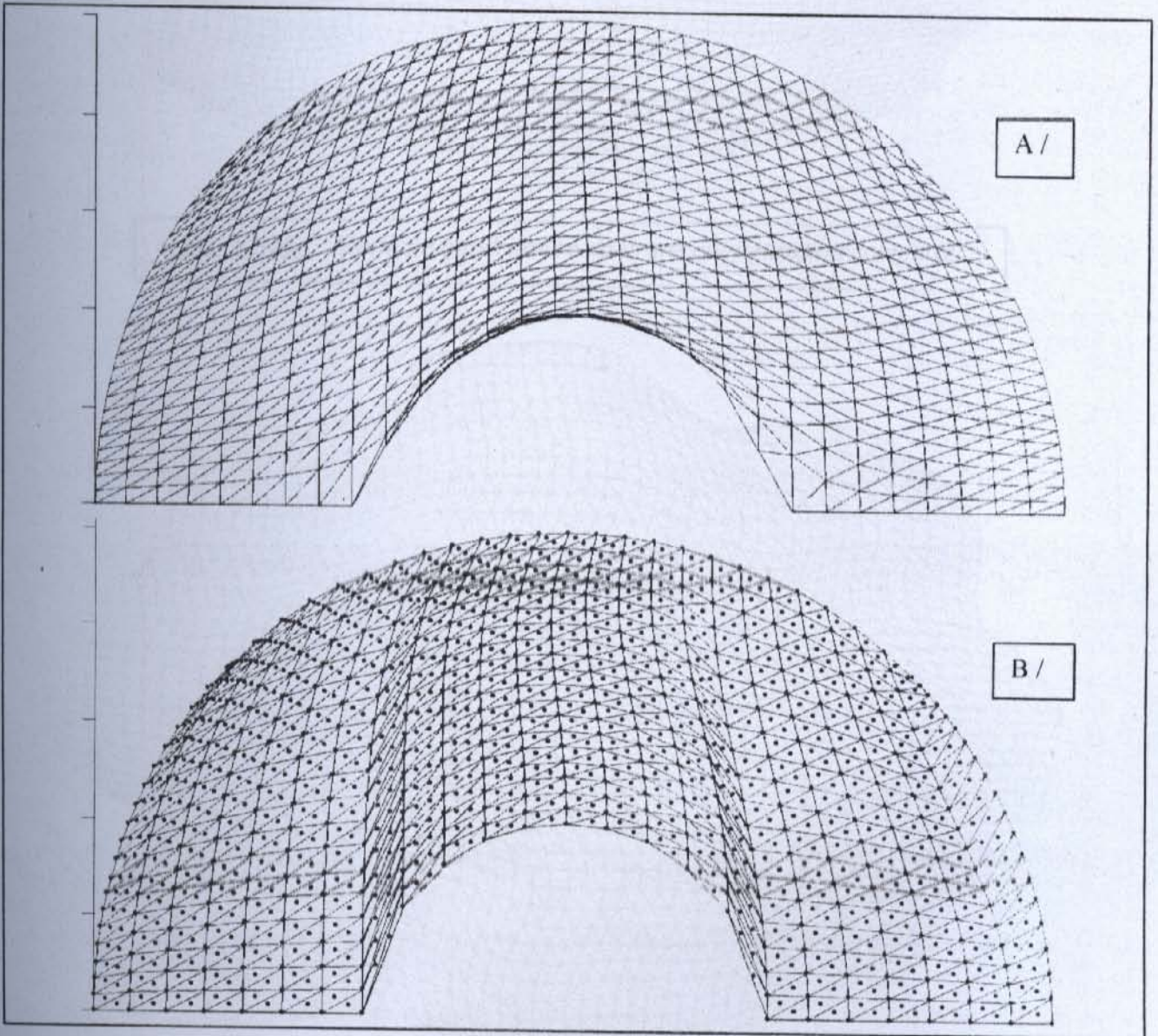


**Fig. VI-23 :** Maillage quadrilatère type (C) d' un rectangle moins un demi cercle.

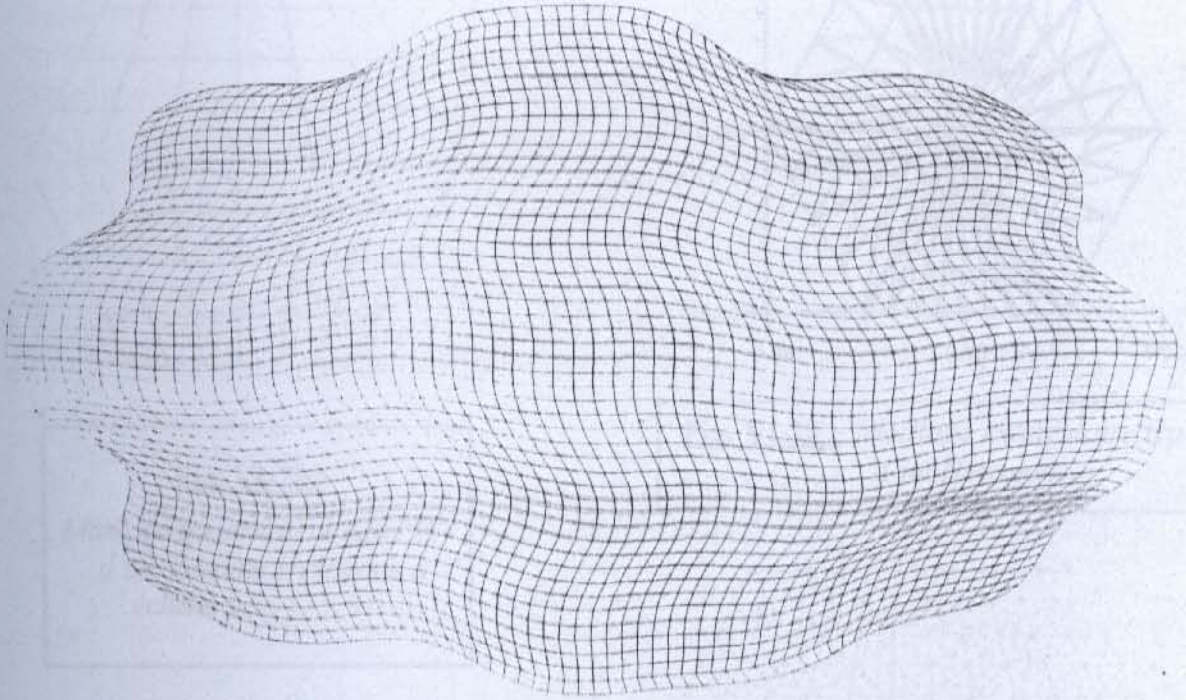




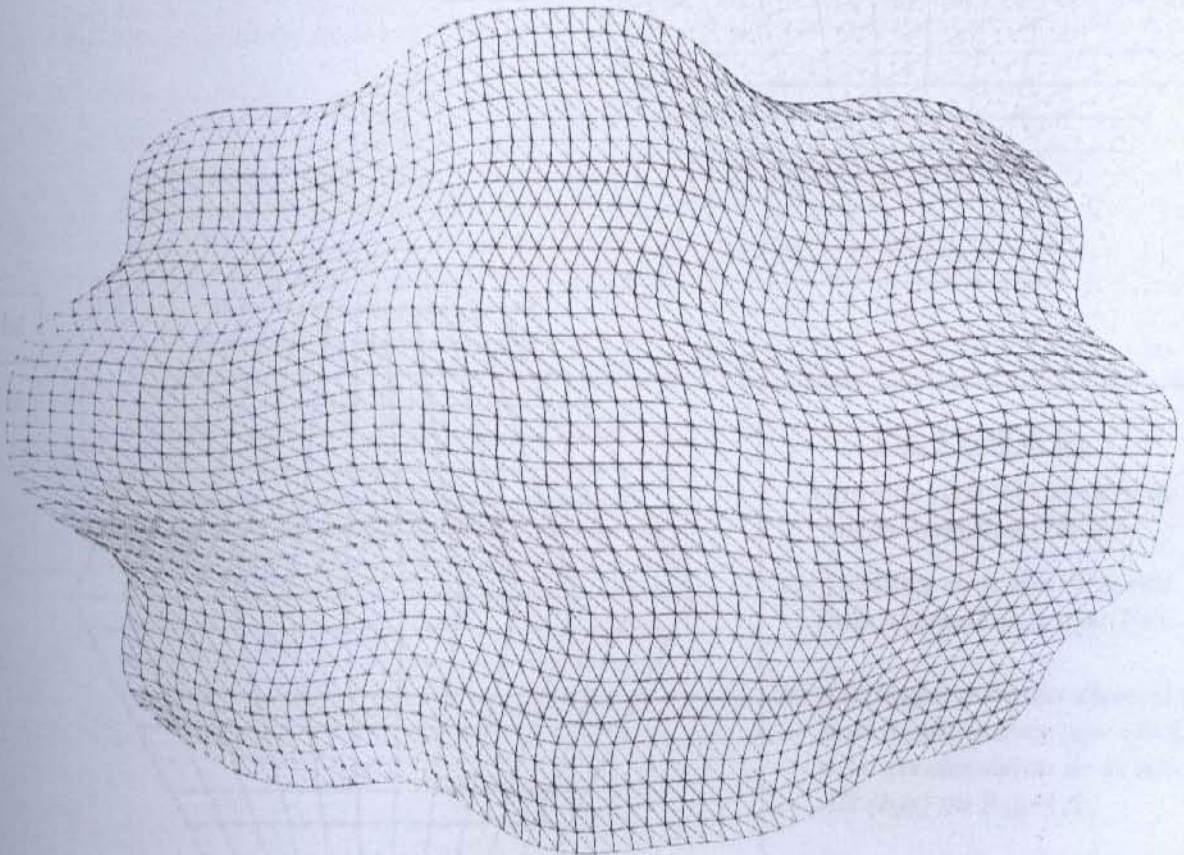
**Fig. VI-24 a, b :** : Maillage modéré d'un domaine former par un grand demi Cercle creux :  
**a/** maillage quadrilatère type 'H' avec des éléments finis type Q5N. **b/** maillage quadrilatère type 'C' avec des éléments type Q8N.



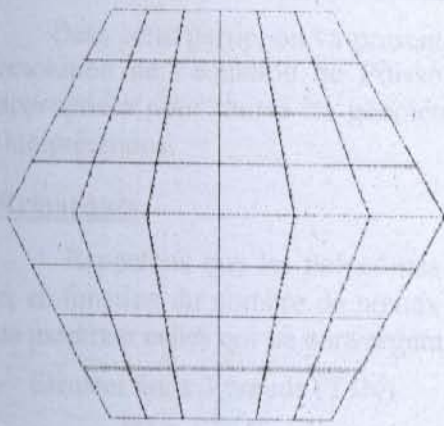
**Fig. VI-25 a, b :** maillage triangulaire type 'H' de même domaine. Tel que :  
**a/** avec des éléments finis type T3N et avec l'option de filtrage.  
**b/** avec des éléments finis type T4N et sans filtrage mais avec condensation de la côte(2) gauche



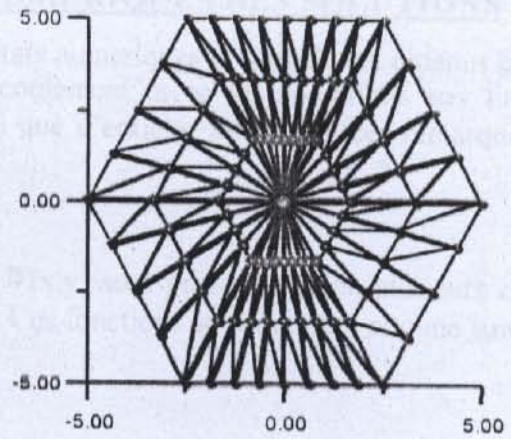
**Fig. VI-26 :** *Maillage quadrilatère dans une configuration complexe*



**Fig. VI-27 :** *Maillage triangulaire dans une configuration complexe*

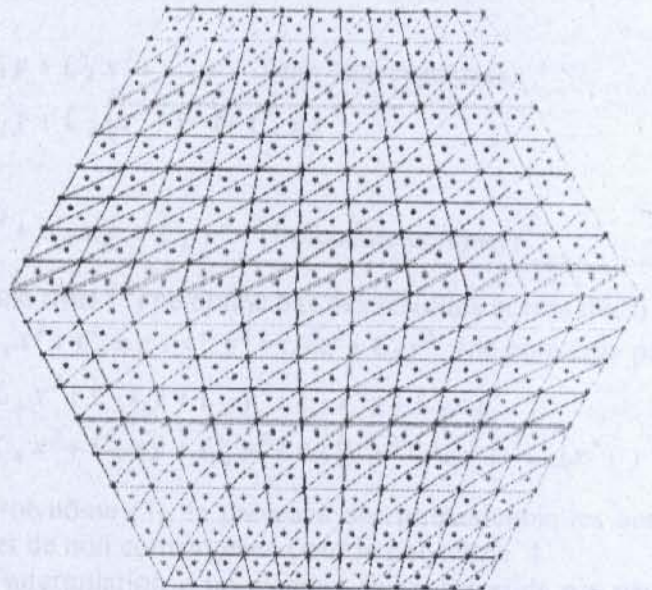


**Fig. VI-28 :**  
 Maillage quadrilatère type 'H'  
 d'un domaine Hexagone à  
 échelle gros (7 x 9)

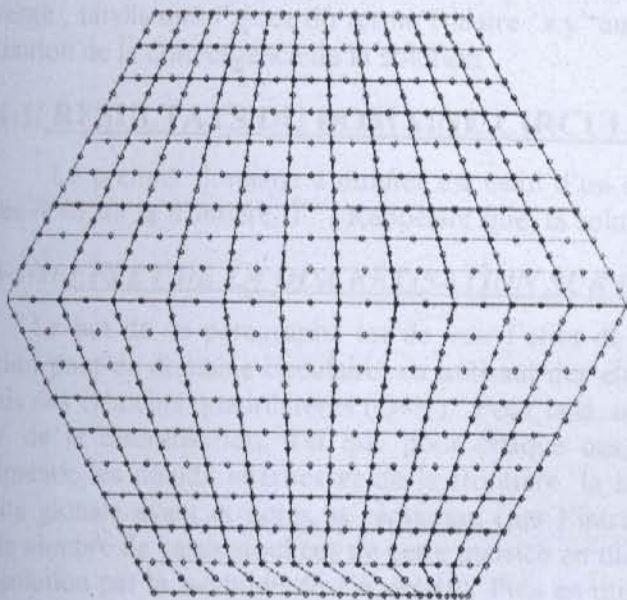


**Fig. VI-29 :** Maillage triangulaire type 'O'  
 d'un Hexagone.

a/



b/



**Fig. VI-30 a, b :**  
 Maillage type 'H' modéré de  
 même domaine, Tel que :  
 a/ Maillage avec des éléments  
 finis triangulaires type T4N.  
 b/ Maillages avec des éléments  
 finis quadrilatères type Q8N,  
 avec condensation de la côte  
 AB (bas) où  $P_{AB}=1.5$ .

## VI-4/ EXPLOITATION DES RESULTATS NUMERIQUES DES SOLUTIONS

Dans cette partie, on va présenter quelques résultats numériques et graphiques obtenus par la résolution de l'équation de Poisson qui gérant l'écoulement, avec les conditions aux limites appropriées pour toutes les géométries traitées, ainsi que d'enrichir avec quelques remarques et interprétations.

### Remarques

Rappelons que les polynômes d'interpolations  $W(x,y)$  sont présentés selon plusieurs choix et en fonction du nombre de nœuds par élément fini. Ces fonctions sont données comme suit, ou en montrant celles qui ne convergent pas :

- Élément fini à 3 nœuds (T3N) :

$$W(x,y) = C_1 + C_2 x + C_3 y \quad (\text{Polynôme complet linéaire}).$$

- Élément fini à 4 nœuds (T4N ou Q4N) :

Polynôme 1 :  $W(x,y) = C_1 + C_2 x + C_3 y + C_4 x y$

Polynôme 2 :  $W(x,y) = C_1 + C_2 x + C_3 y + C_4 (x^2 + y^2)$

- Élément fini à 5 nœuds (Q5N) :

Polynôme 1 :  $W(x,y) = C_1 + C_2 x + C_3 y + C_4 x^2 + C_5 y^2$  ( ne converge pas)

Polynôme 2 :  $W(x,y) = C_1 + C_2 x + C_3 y + C_4 (x^2 + y^2) + C_5 x y$

- Élément fini à 6 nœuds (T6N) :

$$W(x,y) = C_1 + C_2 x + C_3 y + C_4 x^2 + C_5 x y + C_6 y^2 \quad (\text{Polynôme complet})$$

- Élément fini à 8 nœuds (Q8N) : (Le polynôme trois (\*) ne donne pas des résultats acceptables)

Polynôme 1 :  $W(x,y) = C_1 + C_2 x + C_3 y + C_4 x^2 + C_5 x y + C_6 y^2 + C_7 x^3 + C_8 y^3$  (ne converge pas)

Polynôme 2 :  $W(x,y) = C_1 + C_2 x + C_3 y + C_4 x^2 + C_5 x y + C_6 y^2 + C_7 x^2 y + C_8 x y^2$

Polynôme 3 :  $W(x,y) = C_1 + C_2 x + C_3 y + C_4 x^2 + C_5 x y + C_6 y^2 + C_7 (y x^2 + x y^2) + C_8 (x^3 + y^3)$  (\*)

On peut remarquer que pour le dernier Polynôme (3), la présence des termes cubiques ont induit des résultats erronés (non admissibles), et de non convergence pour le polynôme '1'.

On observe aussi que, le polynôme 1 pour l'interpolation d'un élément fini à 5 nœuds n'a pas convergé ; tandis que l'ajout du terme Biliaire 'x.y' au polynôme '2'(du même élément) a permit l'obtention de la convergence de la solution.

### VI-4-1/ RESULTATS DU DOMAINE CIRCULAIRE

Le premier domaine à étudier est celui d'un cercle de rayon R, avec les conditions aux limites  $W=0$  sur la frontière ' $\Gamma$ '. Rappelant que, la solution analytique est donnée au chapitre II.

#### VI-4-1-1/ EFFET DE LA DISCRETISATION SUR LA CONVERGENCE

Le but de ce paragraphe est de voir l'effet de la discrétisation sur la convergence de la solution pour ce domaine circulaire, en utilisant des éléments triangulaires (T3N) en premier lieu et puis des éléments quadrilatères (Q4N). Pour cela, on va changer le nombre de nœuds NNX et NNY de la discrétisation. Tel que pour chaque cas, on calcul le nombre total de nœuds et d'éléments, les nœuds internes et de la frontière, la largeur de la demi-bande de la matrice de rigidité globale avant et après sa réduction (par l'introduction des conditions aux limites), ainsi que le nombre de cases stockées de cette matrice en utilisant la méthode de stockage bande (avec la résolution par la méthode de *Khaletsky*). Puis en utilisant la méthode de stockage économique et complexe (avec la résolution par la méthode de *Gauss Seidel Accélérée* où le facteur de

relaxation utilisé est  $\omega = 1.75$ ), et aussi quelques paramètres plus importants qui sont : le temps de calcul, l'aire de la section, la vitesse maximale et moyenne, le débit volumique  $Q_v$ , le coefficient de pertes de charge linéaire  $K$  et le coefficient adimensionnelle lié à la forme de la géométrie  $B$ . On aura les résultats suivants :

- **Tableaux TVI-12 a,b,c** : *Effet de la discrétisation*. Elément triangulaire (T3N), NNX=10.

a/ NNY	NNT	NEL	NDLE	NDLR	IBAV	IBAP	NCASE
10	100	162	36	64	12	10	595
30	300	522	76	224	12	10	2195
50	500	882	116	384	12	10	3795
80	800	1422	176	624	12	10	6195
100	1000	1782	216	784	12	10	7795

NNY	Temps 's'	Aire Tot.	$W$ max	$W$ moy	$Q_v$	$K$	$B$
10	9.88 s	0.031257	1.332144	0.667920	0.020877	0.007403	65.14481
30	18.23 s	0.031329	1.350744	0.676645	0.021198	0.007230	64.60120
50	25.16 s	0.031334	1.352005	0.677221	0.021220	0.007219	64.56679
80	27.46 s	0.031335	1.352369	0.677360	0.021225	0.007216	64.56037
100	28.01 s	0.031336	1.352427	0.677368	0.021226	0.007216	64.56114
Analytique	/	<b>0.031416</b>	<b>1.373626</b>	<b>0.686813</b>	<b>0.021577</b>	<b>0.007037</b>	<b>64.00000</b>

- NNX=51

b/ NNY	NNT	NEL	NDLE	NDLR	IBAV	IBAP	NCASE
11	561	1000	120	441	13	11	4796
31	1581	3000	160	1421	33	31	43586
51	2601	5000	200	2401	53	51	121176
81	4131	8000	260	3871	53	51	196146
101	5151	10000	300	4851	53	51	246126

NNY	Temps s	Aire Tot.	$W$ max	$W$ moy	$Q_v$	$K$	$B$
11	25.59	0.031349	1.370204	0.679003	0.021286	0.007185	64.45990
31	28.08	0.031406	1.373107	0.685667	0.021534	0.007058	64.06715
51	31.42	0.031411	1.373346	0.686200	0.021554	0.007049	64.03612
81	33.51	0.031412	1.373428	0.686383	0.021561	0.007045	64.02545
101	40.48	0.031413	1.373447	0.686425	0.021562	0.007044	64.02303

- NNX=101

c/ NNY	NNT	NEL	NDLE	NDLR	IBAV	IBAP	NCASE
11	1111	2000	220	891	13	11	9746
31	3131	6000	260	2871	33	31	88536
51	5151	10000	300	4851	53	51	246126
81	8181	16000	360	7821	83	81	630261
101	10201	20000	400	9801	103	101	984851

NNY	Temps s	Aire Tot.	$W$ max	$W$ moy	$Q_v$	$K$	$B$
11	26.42	0.031351	1.370228	0.679159	0.021292	0.007182	64.45310
31	32.30	0.031408	1.373203	0.685888	0.021542	0.007054	64.05441
51	40.37	0.031413	1.373447	0.686425	0.021562	0.007044	64.02303
81	66.13	0.031414	1.373532	0.686610	0.021569	0.007041	64.01216
101	83.26	0.031415	1.373551	0.686653	0.021571	0.007040	64.00965

Tableaux TVI-13 a,b,c : Effet de la discrétisation ; Elément quadrilatère (Q4N), NNX=11

a/ NNY	NNT	NEL	NDLE	NDLR	IBAV	IBAP	NCASE
11	121	100	40	81	13	11	836
31	341	300	80	261	13	11	2816
51	561	500	120	441	13	11	4796
81	891	800	180	711	13	11	7766
101	1111	1000	220	891	13	11	9746

NNY	Temps	Aire Tot.	W max	W moy	Qv	K	B
11	15.22	0.031287	1.385392	0.679935	0.021273	0.007151	64.11743
31	21.36	0.031344	1.380142	0.682953	0.021407	0.007101	64.06829
51	22.03	0.031349	1.379731	0.683188	0.021417	0.007097	64.06503
81	24.33	0.031350	1.379601	0.683255	0.021420	0.007096	64.06518
101	27.52	0.031351	1.379547	0.683235	0.021420	0.007096	64.06853
Analytique	/	<b>0.031416</b>	<b>1.373626</b>	<b>0.686813</b>	<b>0.021577</b>	<b>0.007037</b>	<b>64.00000</b>

• NNX=51

b/ NNY	NNT	NEL	NDLE	NDLR	IBAV	IBAP	NCASE
11	561	500	120	441	13	11	4796
31	1581	1500	160	1421	33	31	43586
51	2601	2500	200	2401	53	51	121176
101	5151	5000	300	4851	53	51	246126

NNY	Temps	Aire Tot.	W max	W moy	Qv	K	B
11	22.29	0.031349	1.379731	0.683188	0.021417	0.007097	64.06503
31	43.59	0.031406	1.374503	0.686285	0.021554	0.007046	64.00944
51	61.70	0.031411	1.374088	0.686533	0.021565	0.007042	64.00507
101	81.19	0.031413	1.373916	0.686639	0.021569	0.007040	64.00308

• NNX=101

c/ NNY	NNT	NEL	NDLE	NDLR	IBAV	IBAP	NCASE
11	1111	1000	220	891	13	11	9746
31	3131	3000	260	2871	33	31	88536
51	5151	5000	300	4851	53	51	246126
101	10201	10000	400	9801	103	101	984851

NNY	Temps	Aire Tot.	W max	W moy	Qv	K	B
11	34.17	0.031351	1.379547	0.683235	0.021420	0.007096	64.06853
31	49.90	0.031408	1.374340	0.686394	0.021558	0.007044	64.00715
51	81.95	0.031413	1.373916	0.686639	0.021569	0.007040	64.00308
101	143.85	0.031415	1.373742	0.686748	0.021574	0.007038	64.00077

• Tableau TVI-14 : Cas de différentes discrétisations pour un même nombre de nœuds.

Type	NNX	NNY	NNT	NEL	NDLE	NDLR	IBAV	IBAP	NCASE
Q4N	56	56	3136	3025	220	2916	58	56	161756
T3N	10	90	900	1602	196	704	12	10	6995
T3N	30	30	900	1682	116	784	32	30	23085

NNX	NNY	Aire Tot.	W max	W moy	Qv	K	B	Temps
56	56	0.031412	1.373099	0.686582	0.021567	0.007041	64.00419	51.93
10	90	0.031335	1.352406	0.677367	0.021226	0.007216	64.56057	12.139
30	30	0.031401	1.369558	0.685016	0.021510	0.007071	64.10519	18.119
Analytique :		<b>0.031416</b>	<b>1.373626</b>	<b>0.686813</b>	<b>0.021577</b>	<b>0.007037</b>	<b>64.00000</b>	/

On remarque bien à partir des résultats obtenus par le programme réalisé, la convergence de la valeur des paramètres vers ceux des solutions exactes montrées dans ces tableaux. Tel que cette convergence est lente, puisque chaque fois qu'on augmente les valeurs de NNX et NNY, on a une petite variation aux valeurs obtenues pour les paramètres de l'écoulement (la deuxième partie des tableaux). Ainsi que, on constate une augmentation pour les autres paramètres (NNT, NEL...). Mais la largeur de la demi bande (réduite ou non) conserve sa valeur minimale de celle de la discrétisation minimale sur l'un des axes (x ou y). Par exemple, on a pour la discrétisation  $10 \times 80$ , IBAV=12 et pour  $10 \times 100$ , IBAV=12.

On observe aussi que les vitesses maximales et même moyennes sont plus proches à celles calculées analytiquement pour les discrétisations en nombre impaire de nœuds sur les axes (x et y) que celles en nombre paires, avec un même nombre total de nœuds ou proche (voir les tableaux 12a et 12b). Par exemple, pour la discrétisation  $10 \times 100$ ,  $W_{max} = 1.352427$  m/s et pour  $11 \times 101$ ,  $W_{max} = 1.370228$  m/s, or pour l'analytique on a la vitesse  $W_{max} = 1.373626$  m/s. Ce résultat peut être justifié par le fait que la discrétisation impaire sur les axes (x et y) donne (parmi les nœuds du maillage obtenu) un nœud situé à la position où se trouve la vitesse maximale et une bonne répartition pour les autres nœuds. Donc, on conclut qu'il est préférable de choisir une discrétisation impaire sur les axes de symétrie.

Ainsi que d'après les résultats de tous les tableaux, la discrétisation qui nous satisfait (pour la suite) c'est celle qui donne un nombre total de nœuds NNT supérieur à 1000 nœuds. C'est-à-dire pour une précision de la solution obtenue (vitesses) d'au moins trois chiffres exacts après la virgule.

On remarque aussi que, ce n'est pas uniquement le but d'avoir des solutions précises en augmentant le nombre de nœuds, mais il faut que la taille des cellules doit être très petite, c'est-à-dire la surface, la longueur des côtés et les angles internes doivent être aussi à discuter.

On peut démontrer ça avec les résultats obtenus pour les discrétisations ayant un même nombre total de nœuds ou proche, par exemple pour les discrétisations suivantes : de NNX=101, NNY=31 (tableau TVI-13c) et la discrétisation de NNX=56, NNY=56 (tableau TVI-14). Pour les deux discrétisations, on a presque le même nombre total de nœuds NNT et le système à résoudre est presque le même, pour le même type d'élément fini (quadrilatère Q4N).

Malgré ça, les résultats obtenus par la deuxième discrétisation sont meilleurs que ceux de premier cas. L'autre exemple montré dans le tableau TVI-14 (deuxième et troisième ligne) pour un élément triangulaire et une discrétisation de même nombre total de nœuds, tel que NNT=900, donne la même remarque précédente. On peut noter donc, qu'il est recommandé de faire une discrétisation qui donne des cellules non trop plates, en d'autres termes des angles internes non très aigus et non très obtus. Alors il vaut mieux d'avoir les discrétisations de NNX et NNY proches entre elles.

**Tableaux TVI-15 a,b :** Méthode de stockage économique avec la résolution par le schéma de Gauss Seidel Accélérée. a/ Élément triangulaire, NNX=51.

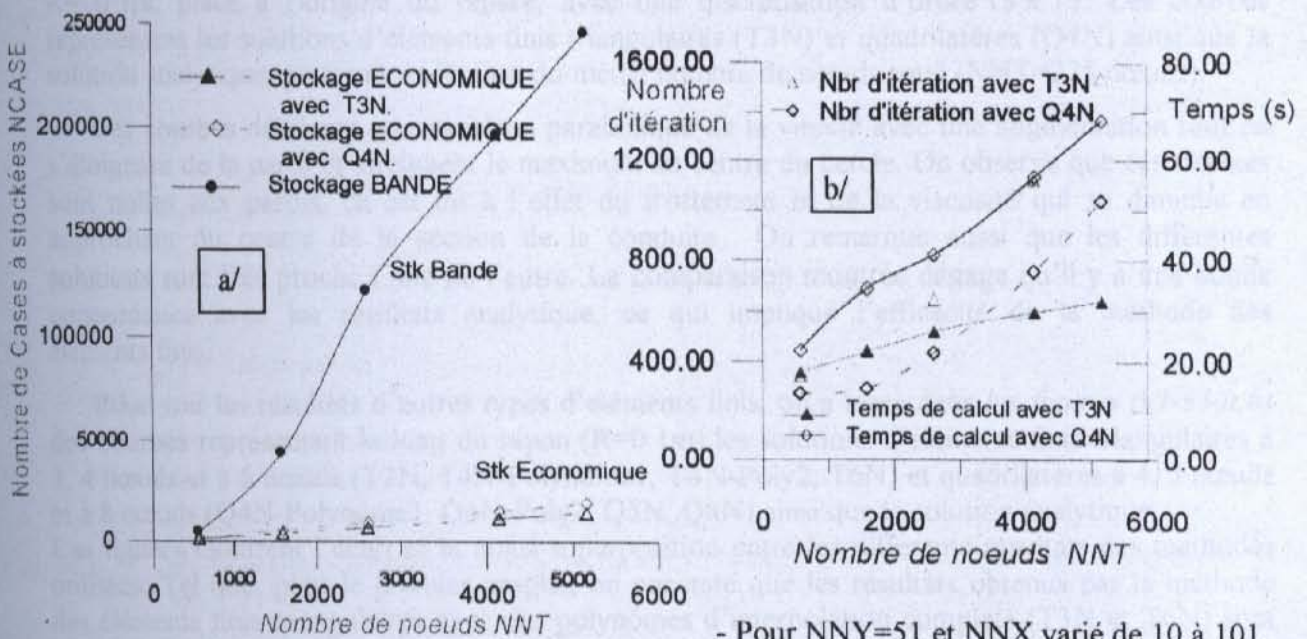
NNY	NNT	NEL	NDLE	NDLR	NCASE	Nbr Iter	Temps S
11	561	1000	120	441	1208	345	18.13
31	1581	3000	160	1421	4108	448	22.19
51	2601	5000	200	2401	7008	649	26.25
81	4131	8000	260	3871	11358	1120	30.05
101	5151	10000	300	4851	14258	1540	32.19

NNY	Aire Totale	$W_{max}$	$W_{moy}$	$Q_v$	$K$	$B$
11	0.031349	1.370204	0.679003	0.021286	0.007185	64.45990
31	0.031406	1.373107	0.685667	0.021534	0.007058	64.06715
51	0.031411	1.373346	0.686200	0.021554	0.007049	64.03612
81	0.031412	1.373428	0.686383	0.021561	0.007045	64.02545
101	0.031413	1.373447	0.686425	0.021562	0.007044	64.02303

b/ Elément quadrilatère, NNX=51.

NNY	NNT	NEL	NDLE	NDLR	NCASE	Nbr Iter	Temps
11	561	500	120	441	1592	275	22.35
31	1581	1500	160	1421	5452	298	37.62
51	2601	2500	200	2401	9312	438	41.25
81	4131	4000	260	3871	15102	755	56.68
101	5151	5000	300	4851	18962	1039	68.33

NNY	Aire Totale	W max	W moy	Qv	K	B
11	0.031349	1.379731	0.683188	0.021417	0.007097	64.06503
31	0.031406	1.374503	0.686285	0.021554	0.007046	64.00944
51	0.031411	1.374088	0.686533	0.021565	0.007042	64.00506
81	0.031412	1.373948	0.686619	0.021568	0.007040	64.00348
101	0.031413	1.373916	0.686639	0.021569	0.007040	64.00307
Analytique	0.031416	1.373626	0.686813	0.021577	0.007037	64.00000



- Pour NNY=51 et NNX varié de 10 à 101.

Fig. (VI-31a, b) : Evolution de quelques caractéristiques en fonction du nombre NNT.

L'utilisation de la méthode de stockage économique avec une résolution par le schéma de Gauss Seidel Accélérée, nous a permis d'obtenir des paramètres d'écoulement semblables aux résultats de la méthode de stockage bande pour un même type d'élément fini, qui soit l'élément triangulaire (voir les tableaux TVI-12b et TVI-15a) ou un élément quadrilatère (voir les tableaux TVI-13b et 15b). Mais toutes fois un gain en espace mémoire (d'ordinateur) de stockage est assez remarquable pour les discrétisations d'échelles importantes, comme le montre la figure (VI-31a) où on voit clairement l'écart de stockage entre ces deux méthodes.

En observant bien les résultats des tableaux, on constate en premier lieu qu'en augmentant la discrétisation on obtient une meilleure précision et une convergence vers la solution exacte. On peut remarquer aussi que, les solutions obtenues avec des éléments finis de type quadrilatère sont plus précises et meilleures avec un temps d'exécution élevé, que celles avec les éléments de type triangulaire, pour un même nombre total de nœuds. Ce ci est dû de fait que le polynôme d'interpolation dans ces derniers éléments est linéaire avec 3 termes, donc des solutions moins précises que pour l'autre type d'éléments (quadrilatère à 4 nœuds) ou il est **Billinéaire en x et y** avec 4 termes d'interpolation, qui nécessite par suite un temps d'exécution plus grand.



On remarque aussi d'après la figure précédente (VI-31a) pour le stockage économique que, le calcul avec l'élément quadrilatère (losange bleu) nécessite un stockage supplémentaire que celui avec l'élément triangulaire (triangle rouge), où ils sont très faible par rapport au stockage bande, comme il est montré dans les colonnes NCASE du tableau précédent (TVI-15 a,b).

On constate aussi d'après la figure (VI-31b) que, le nombre d'itérations nécessaire pour le calcul avec un élément triangulaire (triangle rouge) est plus grand que celui avec l'élément quadrilatère (losange noir) qui augmente en fonction de nombre total de nœuds NNT de la discrétisation. Cependant, le temps nécessaire d'exécution du calcul avec cet élément fini triangulaire est plus réduit que celui de l'élément quadrilatère. Or pour ce dernier, le temps augmente plus rapidement avec l'augmentation du nombre NNT.

On note ici que, le temps assez grand de l'exécution par l'ordinateur est celui du dernier exemple de tableau TVI-13c avec une discrétisation de  $NNT=10201$  nœuds où le temps =143.85 seconde.

#### VI-4-1-2/ REPARTITION DES VITESSES

La figure (VI-32) illustre l'évolution de la vitesse le long d'un diamètre d'un cercle de rayon  $R=0.1m$ , placé à l'origine du repère, avec une discrétisation d'ordre  $15 \times 15$ . Les courbes représentent les solutions d'éléments finis triangulaires (T3N) et quadrilatères (Q4N) ainsi que la solution analytique, pour une exécution du même nombre de nœuds total ( $NNT=225$  nœuds).

Ces courbes décrivent une variation parabolique de la vitesse avec une augmentation tout en s'éloignant de la paroi et atteignent le maximum au centre du cercle. On observe que ces vitesses sont nulles aux parois, ça est dû à l'effet du frottement et de la viscosité qui se diminue en approchant du centre de la section de la conduite. On remarque aussi que les différentes solutions sont très proche l'une de l'autre. La comparaison montrée dégage qu'il y a une bonne concordance avec les résultats analytique, ce qui implique l'efficacité de la méthode des éléments finis.

Pour voir les résultats d'autres types d'éléments finis, on a tracé dans les figures (VI-33 a,b) des courbes représentant le long du rayon ( $R=0.1m$ ) les solutions d'éléments finis triangulaires à 3, 4 nœuds et à 6 nœuds (T3N, T4N-Polynôme1, T4N-Poly2, T6N) et quadrilatères à 4, 5 nœuds et à 8 nœuds (Q4N-Polynôme1, Q4N-Poly2, Q5N, Q8N) ainsi que la solution analytique. Ces figures montrent l'écart et la quasi-superposition entre les différents résultats des méthodes utilisées. Tel que, pour le premier graphe, on constate que les résultats obtenus par la méthode des éléments finis triangulaires avec des polynômes d'interpolation complets (T3N et T6N) sont très proches de la solution analytique, donc de meilleure précision et ils sont acceptables. Or avec les résultats de l'élément triangle à 4 nœuds et pour ses deux polynômes, on trouve des valeurs très supérieures par rapport les autres résultats, tel que celles de polynôme 1 sont plus grandes que celles du deuxième polynôme. On conclut que les résultats de cet élément (T4N) sont inacceptables en comparant avec les résultats analytique.

Pour le deuxième graphe, on remarque que les solutions des éléments quadrilatères de 5 et 8 nœuds (Q5N, Q8N) et celle de 4 nœuds avec le polynôme 1 (Q4N-poly1) sont très proche de la solution analytique, donc elles sont acceptables. Tandis qu'avec le polynôme 2 pour l'élément Q4N les résultats sont loin de celles analytiques et avec des valeurs très inférieures. Donc, il ne sera pas utilisé pour les géométries complexes qui n'ont pas évidemment la solution analytique.

Quelques résultats numériques du ce traçage sont montrés dans les tableaux TVI-16a,b ; On constate dans le premier tableau les colonnes des trois résultats de chaque type d'éléments finis triangulaires : à 3 nœuds, à 4 et à 6 nœuds et des résultats analytiques avec les coordonnées du rayon exploité (x,y), ainsi que dans le deuxième tableau les solutions des éléments finis quadrilatères à 4 nœuds, à 5 et à 8 nœuds, pour une exécution d'un nombre de nœuds total faible (d'une section circulaire) ; afin qu'on puisse voir l'écart entre les différents résultats (voir tableaux TVI-16a,b). On note ici qu'on n'a pas présenté les points de la frontière, puisque la valeur de la vitesse en ces points est égale à zéro.

Ces résultats montrent que la précision augmente et la solution obtenue converge vers la solution exacte en changeant le type d'élément fini par celui qui a plus de points. Puisque ce dernier nécessite plus de termes d'interpolations, donc il a des polynômes de degré élevé qui donnent par suite des précisions meilleures lors qu'elles convergent, pour un même nombre de nœuds. Mais le calcul nécessite un temps plus élevé, comme il sera montré dans les tableaux récapitulatifs du paragraphe § VI-5.

La figure (VI-34) visualise la répartition des lignes iso-vitesses en multi-couleurs suivant son tableau (dans la figure) dans le champ d'une conduite circulaire, qui montre les différents niveaux des valeurs de la vitesse et leurs couleurs correspondantes.

On remarque bien la graduation de ces lignes iso-vitesses de la paroi vers le centre de la section et leur accumulation près de la paroi, qui montre la variation rapide de la vitesse dans cette zone qui justifier l'effet prépondérant de la viscosité dans cette couche visqueuse, ainsi qu'on remarque la zone centrale qui représente les vitesses maximums dans cette conduite cylindrique circulaire pour un régime d'écoulement établi.

La figure (VI-35) montre l'évolution de la vitesse Maximum et Moyenne pour différents rayons des sections circulaires d'une conduite (de  $R=0.02$  à  $0.2m$ ), calculée avec différentes méthodes (Analytique et E.F. Quadrilatère à 4 nœuds). L'allure de ces courbes indique qu'il y a une augmentation de ces vitesses au fur et à mesure qu'on augmente le rayon  $R$ , mais l'évolution des vitesses maximums est plus accentuée que les vitesses moyennes. La figure montre aussi qu'il y a une très bonne concordance avec les résultats analytiques.

### VI-4-1-3/ EVOLUTION DE QUELQUES PARAMETRES IMPORTANTS

Pour voir l'évolution du débit en fonction des différents rayons, nous avons la figure (VI-36a) qui montre les résultats de la méthode des éléments finis de type T6N et de la méthode analytique. Elle illustre une augmentation parabolique, mais très lente pour les rayons faibles.

La figure (VI-36b) montre l'évolution du débit par unité de surface en fonction des différents rayons, où on a ajouté pour la comparaison la méthode des éléments finis d'un quadrilatère Q4N. On constate que les allures de cette figure sont plus accentuées que précédemment. Ces figures indiquent aussi qu'il y a une bonne concordance entre ces résultats.

La figure (VI-37) illustre l'évolution des valeurs du coefficient géométrique 'B' en fonction des différents rayons d'une section circulaire. On remarque que ce paramètre est indépendant de la valeur du rayon de la section utilisée et il est constant, tel qu'il égale à '64'. Donc il ne dépend que de la forme de la géométrie, d'où son nom. Ceci est bien montré dans le chapitre (II) de la modélisation mathématique par l'équation (de Poiseuille) du coefficient de pertes de charge.

La figure (VI-38) montre l'évolution du coefficient de pertes de charge 'K' en fonction des différents rayons. On remarque que ce paramètre décroît très rapidement pour un rayon compris entre  $0.001$  et  $0.05$  m ; puis pour le reste des rayons, il se diminue lentement au voisinage de zéro. Ceci est dû au fait que la section lorsqu'elle augmente, elle permet un passage d'un grand débit et une diminution de la perte de charge, et par suite la diminution de ce coefficient linéaire 'K'. Ces figures (de B et K) indiquent aussi qu'il y a une bonne concordance entre les résultats analytique et numérique d'éléments finis qui soient triangulaires ou quadrilatères.

Pour voir l'effet du gradient de pression sur la répartition des vitesses, on a La figure (VI-39) qui illustre cette répartition le long du diamètre, en utilisant la méthode des éléments finis (Q4N) et celle analytique. Tel que, les valeurs du gradient de pression utilisées sont entre  $0.100$  et  $0.400$  KPas. On observe toujours une évolution parabolique mais plus accentuée lors en augmentant ce gradient, qui s'impose entre les extrémités de la conduite considérée. Alors, en fonction des besoins du constructeur (aéronautique ou industriel), il va fixer les paramètres d'opération (longueur conduite, gradient de pression...), donc on peut déterminer directement les caractéristiques nécessaires qui lui permettent d'optimiser ses dépenses et améliorer son gain.

Les courbes de la figure montrent une bonne concordance avec l'analytique pour tous les gradients.

La figure (VI-40) illustre l'évolution du nombre d'itérations de la résolution par la méthode itérative de Gauss Seidel accélérée et le temps du calcul nécessaire, en fonction des différentes valeurs du facteur sur-relaxation  $\omega$ . Tel qu'on utilise les éléments finis triangulaires et quadrilatères. Le maillage opté pour cette illustration, a une discrétisation fixe de l'ordre 35 x 35.

- Pour le nombre d'itérations où en utilisant les éléments finis triangulaires, on remarque une diminution à partir d'environ de 1230 itérations vers 120 itérations lorsque le facteur sur-relaxation augmente de 1.001 jusqu'à 1.800, puis ce nombre d'itérations augmente très rapidement à environ de plus de 2120 itérations lorsque le facteur sur-relaxation proche de la valeur 2.00, (voir aussi le tableau TVI-17). La même remarque qu'on obtient lorsqu'en utilisant les éléments finis quadrilatères, sauf que le nombre d'itérations est beaucoup moins qu'avec les précédents éléments finis, où il atteint son minimum de " 98 itérations" à «  $\omega = 1.77$  ».

- Pour l'évolution du temps de calcul, on constate qu'avec les éléments quadrilatères (d'une marge de 7.25 à 10.21 seconds) il est plus grand qu'avec les éléments triangulaires d'une marge de 0.99 à 2.58 seconds. On remarque aussi pour les faibles nombres d'itérations ont le moins du temps du calcul, et il augmente lorsque les itérations croient, voir le tableau 17.

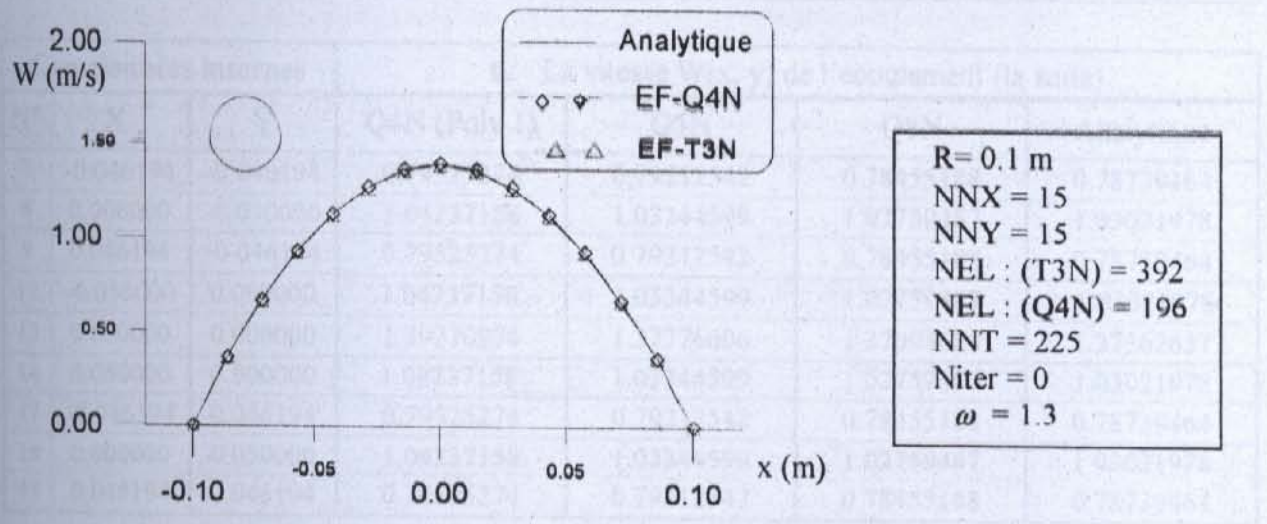


Fig. (VI-32) : Evolution de la vitesse le long d'un diamètre d'un cercle

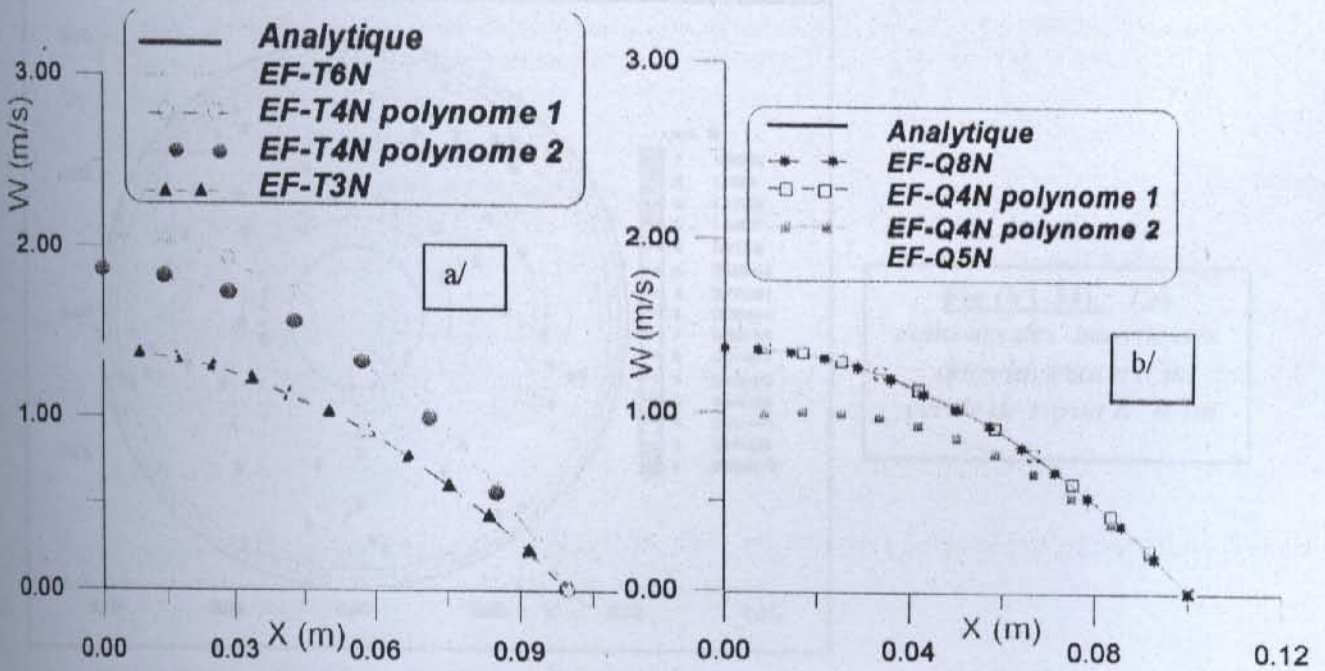
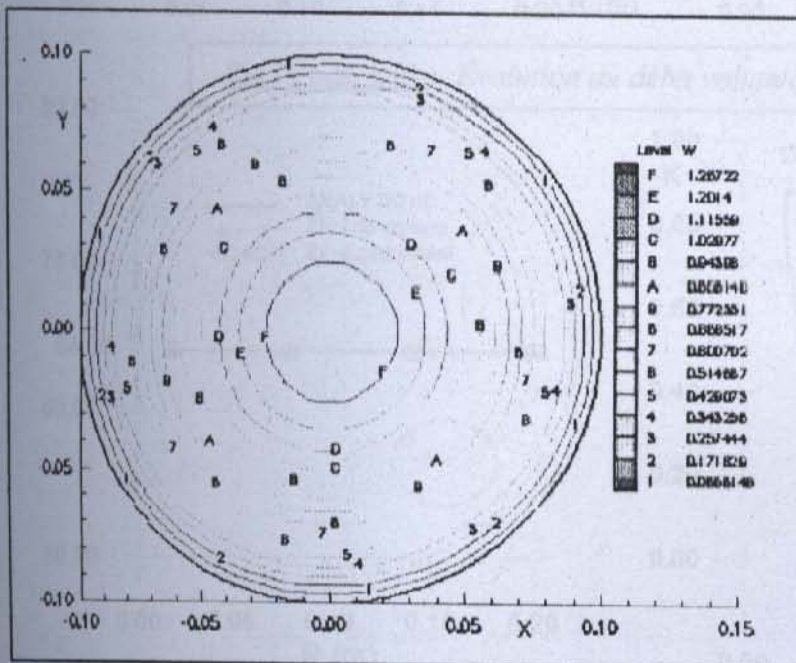


Fig. (VI-33 a,b) : Evolution de la vitesse pour différents types d'éléments finis.

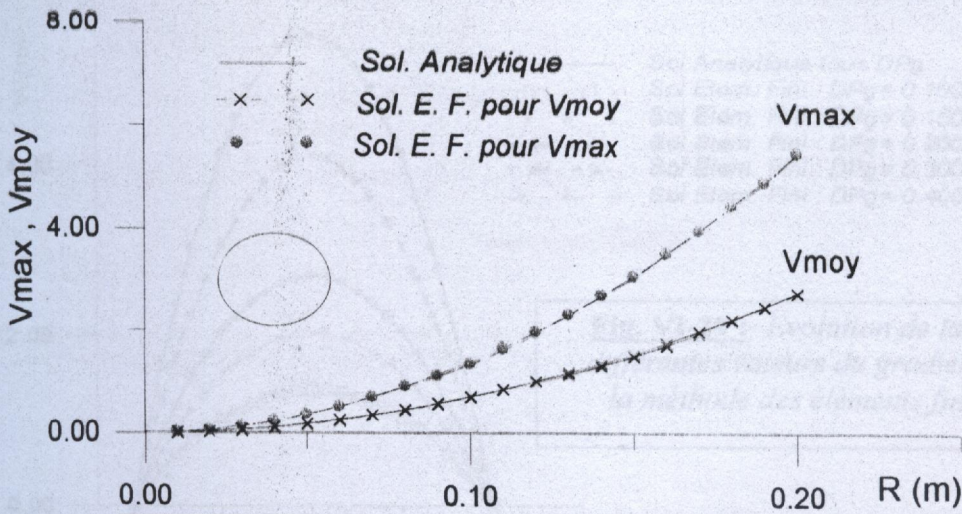
Tableau TVI-16 a,b : Effet de changement du type d'élément finis sur la vitesse d'écoulement

Coordonnées internes			a/ La vitesse $W(x, y)$ de l'écoulement en fonction de chaque type d'élément fini (géométrie cercle)			
N°	X	Y	T3N	T4N (Poly 2)	T6N	Analytique
7	-0.046194	-0.046194	0.7807552	1.00498038	0.78591127	0.78739464
8	0.000000	-0.050000	1.0020829	1.42136497	1.02038984	1.03021978
9	0.046194	-0.046194	0.7593837	1.23983764	0.77678559	0.78739464
12	-0.050000	0.000000	1.0020826	1.42136497	1.02038984	1.03021978
13	0.000000	0.000000	1.3304111	1.83541074	1.36374572	1.37362637
14	0.050000	0.000000	1.0020826	1.42136497	1.02038984	1.03021978
17	-0.046194	0.046194	0.7593837	1.23983764	0.77678559	0.78739464
18	0.000000	0.050000	1.0020829	1.42136497	1.02038984	1.03021978
19	0.046194	0.046194	0.7807552	1.00498038	0.78591127	0.78739464

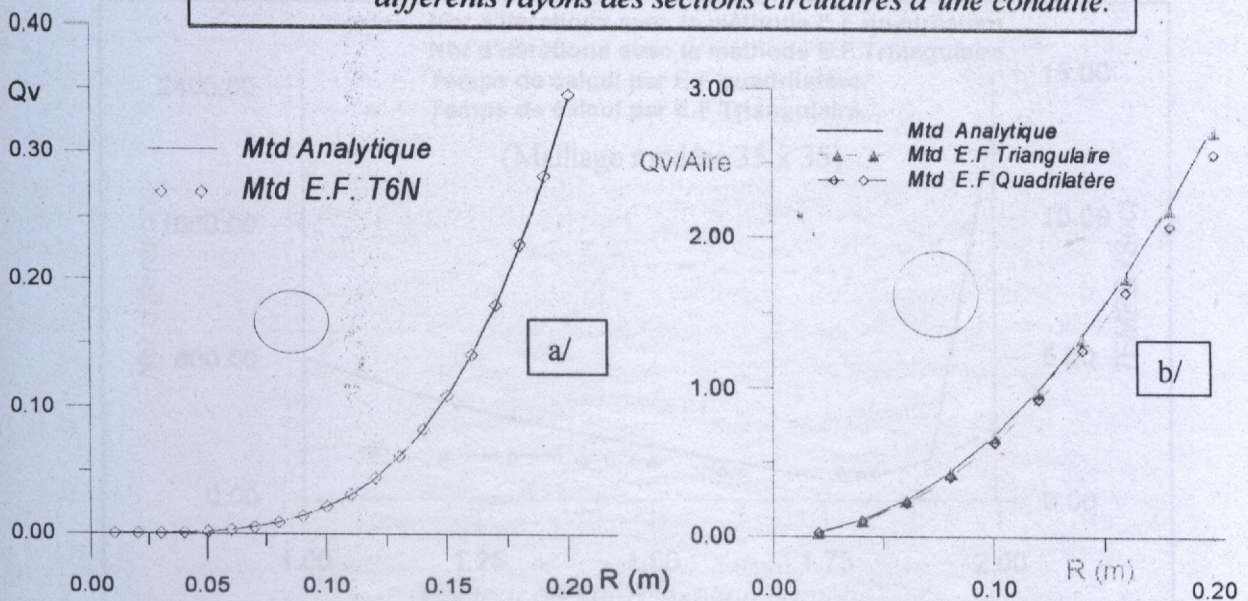
Coordonnées internes			b/ La vitesse $W(x, y)$ de l'écoulement (la suite)			
N°	X	Y	Q4N (Poly 1)	Q5N	Q8N	Analytique
7	-0.046194	-0.046194	0.79525274	0.79212542	0.78455188	0.78739464
8	0.000000	-0.050000	1.04237158	1.03344599	1.02759487	1.03021978
9	0.046194	-0.046194	0.79525274	0.79212542	0.78455188	0.78739464
12	-0.050000	0.000000	1.04237158	1.03344599	1.02759487	1.03021978
13	0.000000	0.000000	1.39210974	1.37776006	1.37094685	1.37362637
14	0.050000	0.000000	1.04237158	1.03344599	1.02759487	1.03021978
17	-0.046194	0.046194	0.79525274	0.79212542	0.78455188	0.78739464
18	0.000000	0.050000	1.04237158	1.03344599	1.02759487	1.03021978
19	0.046194	0.046194	0.79525274	0.79212542	0.78455188	0.78739464



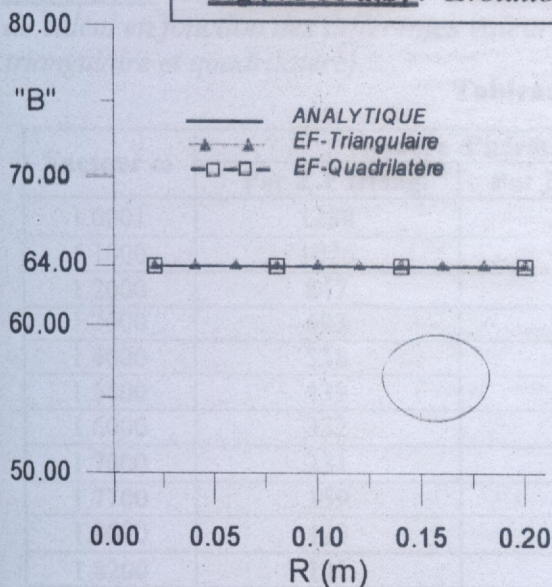
**Fig (VI-34) :** Les contours des iso-vitesse dans la section d'un cercle de rayon  $R = 0.1m$ .



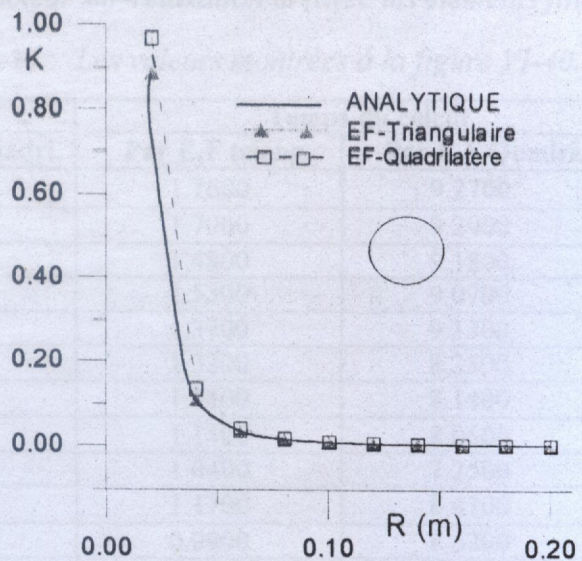
**Fig (VI-35):** Evolution de la vitesse Maximum et Moyenne pour différents rayons des sections circulaires d'une conduite.



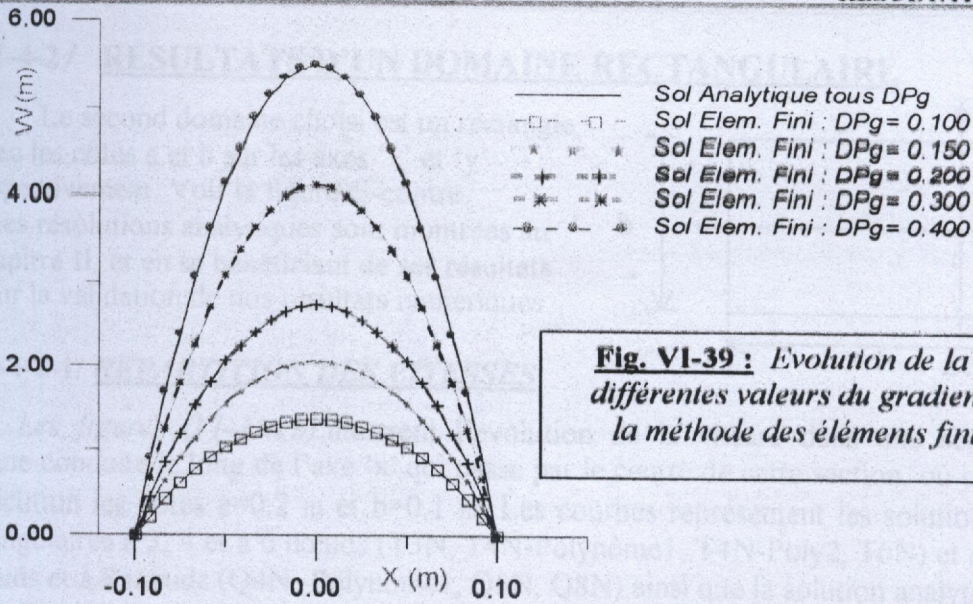
**Fig (VI-36 a,b):** Evolution du débit volumique pour différents rayons.



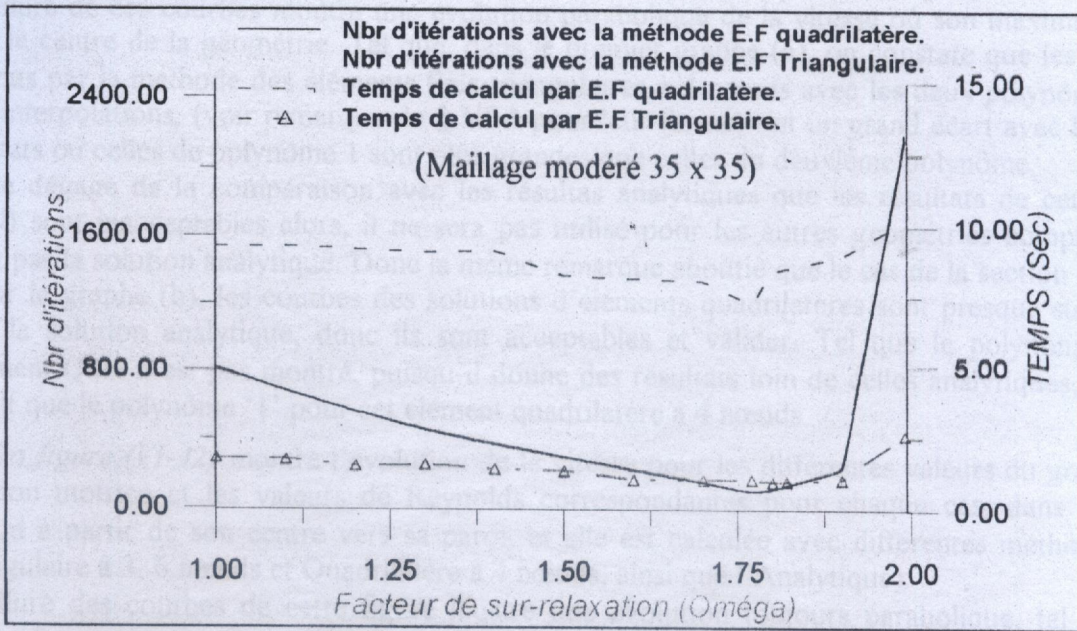
**Fig (VI-37):** Valeurs du coefficient géométrique 'B' pour différents rayons.



**Fig (VI-38):** Evolution du coefficient de pertes de charge 'K' pour différents rayons.



**Fig. VI-39 :** Evolution de la vitesse pour les différentes valeurs du gradient de pression par la méthode des éléments finis et analytique.



**Fig. VI-40 :** Evolution du nombre d'itérations de la résolution par la méthode itérative et le temps du calcul en fonction des différentes valeurs du facteur sur-relaxation  $\omega$  (avec les éléments finis triangulaire et quadrilatère).

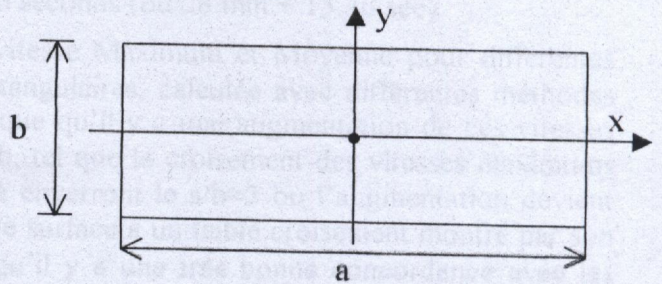
**Tableau TVI-17 :** Les valeurs montrées à la figure VI-40.

Facteur $\omega$	Nombre d'itérations		Temps du calcul	
	Par E.F triang.	Par E.F Quadri.	Par E.F triang.	Par E.F Quadri.
1.0001	1238	809	1.7600	9.2700
1.1000	1026	671	1.7000	9.2900
1.2000	847	554	1.4800	9.1800
1.3000	693	453	1.5300	9.0700
1.4000	558	365	1.3700	9.1300
1.5000	439	287	1.3200	8.2500
1.6000	332	216	1.2400	8.1400
1.7000	231	149	1.1400	8.0600
1.7700	159	98	1.0400	7.2500
1.8000	123	113	1.1700	8.4100
1.8200	131	125	0.9900	8.5200
1.9000	223	225	1.0500	8.9500
1.9900	2124	2180	2.5800	10.2100

## VI-4-2/ RESULTATS D'UN DOMAINE RECTANGULAIRE

Le second domaine choisi est un rectangle avec les côtés  $a$  et  $b$  sur les axes ' $x$ ' et ' $y$ ' respectivement. Voir la figure ci-contre.

Les résolutions analytiques sont montrées au chapitre II, et en se bénéficiant de ses résultats pour la validation de nos résultats numériques.



### VI-4-2-1/ REPARTITION DES VITESSES

Les figures (VI-41a,b) illustrent l'évolution de la vitesse dans une section rectangulaire d'une conduite le long de l'axe ' $x$ ' qui passe par le centre de cette section, où on a pris pour cette exécution les côtés  $a=0.2$  m et  $b=0.1$  m. Les courbes représentent les solutions d'éléments finis triangulaires à 3, 4 et à 6 nœuds (T3N, T4N-Polynôme1, T4N-Poly2, T6N) et quadrilatères à 4, 5 nœuds et à 8 nœuds (Q4N -Polynôme1, Q5N, Q8N) ainsi que la solution analytique.

L'allure de ces courbes montre une évolution parabolique de la vitesse où son maximum règne dans le centre de la géométrie. Tel que, dans le premier graphe (a), on constate que les résultats obtenus par la méthode des éléments finis triangulaires à 4 nœuds avec les deux polynômes (1 et 2) d'interpolations, (voir remarque de § VI-4 pour leur forme) ont un grand écart avec les autres résultats où celles de polynôme 1 sont plus grandes que celles du deuxième polynôme.

Il se dégage de la comparaison avec les résultats analytiques que les résultats de cet élément (T4N) sont inacceptables alors, il ne sera pas utilisé pour les autres géométries complexes qui n'ont pas la solution analytique. Donc la même remarque aboutie que le cas de la section cercle.

Pour le graphe (b), les courbes des solutions d'éléments quadrilatères sont presque superposer avec la solution analytique, donc ils sont acceptables et valider. Tel que le polynôme '2' de l'élément Q4N n'est pas montré, puisqu'il donne des résultats loin de celles analytiques, d'où on retient que le polynôme '1' pour cet élément quadrilatère à 4 nœuds.

La figure (VI-42) montre l'évolution de la vitesse pour les différentes valeurs du gradient de pression motrice et les valeurs de Reynolds correspondantes pour chaque cas, dans la même section à partir de son centre vers sa paroi, et elle est calculée avec différentes méthodes (E.F Triangulaire à 3, 6 nœuds et Quadrilatère à 4 nœuds, ainsi que l'Analytique).

L'allure des courbes de cette figure illustre une évolution toujours parabolique, tel que lors qu'en augmentant ce gradient on a une augmentation séquentielle des vitesses. Une bonne concordance des résultats avec celles d'analytique est constatée.

La figure (VI-43) visualise la répartition des contours iso-vitesses en multi-couleurs dans le champ d'une conduite rectangulaire, qui montre les différents niveaux des valeurs de la vitesse et leurs couleurs correspondantes. On remarque bien la graduation de ces lignes iso-vitesses de la paroi vers le centre de la section avec leur concentration près de la paroi, qui indique la variation rapide de la vitesse dans cette zone, justifier par l'effet prépondérant de la viscosité dans cette couche visqueuse. On constate aussi dans les coins de la section des zones dite morts, où il y a déplacement d'un débit très peu (faible circulation) le long de la conduite.

Ce qui a permis aussi de voir l'efficacité de la méthode des éléments finis dans cette application d'où une bonne validation des résultats obtenue.

### I-4-2-2/ EVOLUTION DE QUELQUES PARAMETRES IMPORTANTS

Pour voir l'effet de changement des dimensions de la section rectangulaire sur l'évolution des paramètres d'écoulement, on a varié le rapport  $a/b$  (ou  $n$ ) de 0.5 jusqu'à la valeur 10.5 avec un pas de 0.2. Concernant le calcul par la méthode des éléments finis, on a utilisé un maillage de 2025 nœuds avec les éléments triangulaires (T3N) et sans procédure de filtrage, or avec les éléments quadrilatères (Q8N) on a pris 675 nœuds. Après l'exécution du programme, on a

obtenus les résultats suivants donnés sous formes de graphes, tel que, avec ce dernier élément (Q8N) le temps de calcul été de l'ordre de 1695.46 seconds (ou 28 min + 15.46 sec).

La figure (VI-44) montre l'évolution de la vitesse Maximum et Moyenne pour différentes valeurs du rapport  $a/b$  de côtes des sections rectangulaires, calculée avec différentes méthodes (Analytique et E.F). L'allure de ces courbes indique qu'il y a une augmentation de ces vitesses au fur et à mesure qu'on augmente ce rapport  $a/b$ , tel que le croisement des vitesses maximums est plus rapide que les vitesses moyennes jusqu'à enverront le  $a/b \approx 3$  où l'augmentation devient en suite très faible, du fait que le débit par unité de surface a un faible croisement montré par son allure dans la figure (VI-45). La figure montre qu'il y a une très bonne concordance avec les résultats analytiques.

Dans la figure (VI-45), on voit l'évolution du débit volumique et celui par unité de surface en fonction des différents rapports  $a/b$ , avec les différentes méthodes indiquées précédemment. On constate d'après ces allures, qu'en augmentant l'aire de la section par l'une de ses côtes (c.à.d le rapport  $a/b$ ), on a un croisement linéaire du débit volumique, prouvé par les expressions du débit. Tandis que celui par unité de surface a une évolution comme celle indiquée à la figure précédente, donc les mêmes discussions auront lieu.

La figure (VI-46) illustre le développement du coefficient géométrique 'B' en fonction des différents rapports  $a/b$  de la section. On remarque que ce paramètre B dépend directement de la valeur de ce rapport  $a/b$ , tel qu'il égale à '57' lorsque  $a/b=1$ , où on a la section d'un carré. Et lorsque  $a/b$  est inférieur à '1', ce coefficient décroît vu qu'en s'approchant de la section carrée, cependant lorsque  $a/b$  est supérieur à '1', il a une augmentation quasi logarithmique. Tel qu'à titre d'exemple, il atteint pour  $a/b=5.0$  la valeur '76:01' avec la méthode E.F à Q8N (76.00 avec l'analytique).

Ainsi qu'à titre de comparaison pour  $a/b = 10.5$ , on a ce coefficient géométrique 'B' égale à 85.23 avec la méthode des éléments finis à Q8N, et il égale à 85.66 avec la méthode des éléments finis à T3N, tandis qu'avec la méthode analytique il égale à 85.13 ; on constate alors d'après les courbes une bonne précision des résultats obtenus en comparant avec ceux d'analytiques, mais quoique les résultats d'élément fini Q8N sont très précis, malgré l'utilisation d'un petit nombre de nœuds par rapport à l'élément T3N, et cela est justifié par la présence de nombreux termes d'interpolations et leur ordre mise en calcul par rapport au polynôme de ce dernier élément (T3N).

La figure (VI-47) montre le comportement du coefficient de pertes de charge 'K' en fonction des différents rapports  $a/b$  de la section. On remarque que ce paramètre décroît très rapidement avec les sections ayant le rapport  $a/b$  inférieur ou égale à '1' vu que le débit relatif ( $Q_v$  Aire) croit rapidement pour ces valeurs. Puis pour le reste des rapports, il se diminue lentement au voisinage de 0.0012. Ceci est dû au fait que la section lorsqu'elle augmente, elle permet un passage d'un grand débit et une diminution de la perte de charge, et par suite la diminution de ce coefficient linéaire 'K'. Ces allures indiquent qu'il y a une bonne concordance entre les résultats analytique et numérique d'éléments finis qui soient triangulaires ou quadrilatères.

Donc, on conclut qu'en modifiant la forme du domaine le programme donne des résultats satisfaisants. On peut dire alors que, le programme peut être applicable pour des sections complexes et on peut estimer la convergence des résultats obtenus de ce domaine malgré l'absence des résultats exacts (analytique).

#### Remarque :

Sachant que la section optimale à choisir pour la conception des conduites est celle qui permet un minimum de pertes de charge et un débit considérable et donc le minimum d'énergie mise en jeu. Alors, à partir des résultats des figures 46 et 47 du domaine rectangulaire et pour la première contrainte, on doit choisir un coefficient géométrique B avec la plus petite valeur possible donc, c'est la section carrée ( $B=57$ ) ou proche d'elle ( $a/b < 5$ ). Pour la seconde condition, et d'après la figure (VI-45) du débit par unité d'aire, il est préférable d'avoir un rapport des côtés ' $a/b$ '



supérieur ou égale à '1'. On peut conclure donc pour faire un compromis, il faut avoir une section dont le rapport des côtés soit dans l'intervalle [1,5], pour satisfaire ces conditions.

Pour mieux voir l'effet de changement de la méthode de résolution numérique sur la convergence, pour ce domaine (rectangle), nous avons testé la méthode des éléments finis avec un maillage modéré pour des exécutions d'une part avec la méthode de résolution par le schéma de *Gauss Seidel Accélérée* (de stockage économique), et d'autre part par la méthode de *Khaletsky* (de stockage bande), où les résultats sont montrés dans le tableau TVI-18 et comparés avec ceux d'analytique. En observant bien ce tableau, on constate en premier lieu que, les résultats obtenus des vitesses d'écoulement sont semblables pour les deux méthodes de résolution utilisées qui ayant le même type d'élément fini, que ce soit l'élément triangulaire ou quadrilatère. Donc, la différence ne peut être vue que lors d'une discrétisation très élevée, où la méthode de *Khaletsky* devient incapable de résoudre les énormes systèmes d'équations. C'est la même remarque obtenue que le cas du domaine cercle précédent (vu aux tableaux TVI-13 et 15).

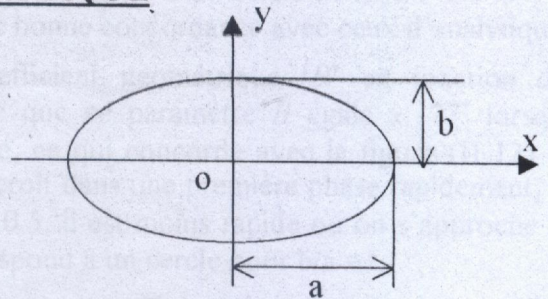
On peut remarquer aussi que, les solutions obtenues avec les éléments finis type quadrilatère sont plus précises et meilleures avec un temps d'exécution élevé, que celles avec les éléments de type triangulaire, pour un même nombre total de nœuds. Les justifications sont déjà citées au paragraphe précédent § VI-4-1-1.

### VI-4-3/ RESULTATS D'UN DOMAINE ELLIPTIQUE

Le troisième domaine à étudier est celui d'une ellipse avec les côtés *a* et *b* comme indiqués à la figure ci-contre.

L'équation de cette ellipse est donnée par :

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$



#### VI-4-3-1/ CALCUL DES VITESSES

La figure (VI-48) montre le comportement de la vitesse le long du diamètre horizontal d'une section elliptique, dont elle est calculée avec différentes méthodes : Eléments finis Triangulaires à 3, 6 nœuds et quadrilatères à 4 et 8 nœuds, ainsi que l'Analytique. L'allure de ces courbes dévoile une évolution parabolique de la vitesse où son maximum règne dans le centre de la géométrie, du fait que l'écoulement considéré est celui de régime établi (interaction des couches limites), dans cette partie de la conduite. Pour donner une idée sur le temps et le nombre de nœuds utilisés pour ce traçage graphique, on récapitule les informations suivantes :

- Elément Q4N : discrétisation de 35 x 37 => 1295 nœuds, avec un temps de 26.79 sec.
- Elément Q8N : discrétisation de 21 x 21 => 1281 nœuds, avec un temps de 102.65 sec.
- Elément T3N : discrétisation de 35 x 37 => 1295 nœuds, avec un temps de 18.53 sec.
- Elément T6N : discrétisation de 19 x 18 => 1295 nœuds, avec un temps de 61.95 sec.

La précision des méthodes montrées est très satisfaisante en comparant ces solutions avec la solution analytique de cette géométrie.

Pour visualiser la répartition des contours iso-vitesses dans la section elliptique de côtés *a*=0.3 m et *b*= 0.15 m, on a la figure (VI-49) qui les montre en multi-couleurs avec les différents niveaux des valeurs de la vitesse et leurs couleurs correspondantes. On constate d'après cette figure la graduation de ces lignes iso-vitesses de la paroi vers le centre de la section avec leur concentration près de la paroi, qui indique la variation rapide de la vitesse dans cette zone, justifier par l'effet prépondérant de la viscosité comme été indiqué pour les autres domaines.

### VI-4-3-2/ EVOLUTION DE QUELQUES PARAMETRES IMPORTANTS

Pour voir l'évolution de quelques paramètres d'écoulement en fonction des différentes sections elliptiques, on a varié la valeur du rapport des côtés d'ellipse  $b/a$  de 0.1 jusqu'à la valeur 1.0 avec un pas de 0.1. La discrétisation des maillages est faite avec un ordre de 1295 nœuds, tel que le temps de calcul nécessaire avec l'élément finis Q8N est 790.10 seconds.

Dans la figure (VI-50), on voit l'évolution du débit volumique et celui par unité de surface en fonction des différents rapports  $a/b$  d'ellipse, avec les différentes méthodes indiquées précédemment. On constate d'après ces allures, qu'en augmentant l'aire de la section par l'une de ses côtes (c.à.d le rapport  $a/b$ ), on a un croisement du débit, vu que ce dernier est lié à la section à travers laquelle il y a l'écoulement. Tel que pour les petits rapports, on a une évolution moins vite que celle de rapport supérieur à 0.5 où il s'approche du cas de cercle. On remarque aussi la bonne précision obtenue par le calcul avec l'élément fini Q8N lorsqu'en comparant avec les résultats analytiques.

La figure (VI-51) visualise l'allure de variation du périmètre et de l'aire d'une section elliptique en fonction des rapports  $b/a$  de ses côtes. On a utilisé la méthode d'éléments finis de l'élément quadrilatère à 8 nœuds et comparer avec les résultats de la méthode analytique. Pour l'évolution de l'aire, on constate une évolution linéaire puisqu'on a augmenté la surface à partir de changement du côté  $b$  et on a fixé le côté  $a$  à '0.3 m'. Pour le périmètre de la section, on remarque une évolution non linéaire qui tend vers le périmètre d'un cercle de rayon '0.3 m'. Il se dégage de la comparaison entre ces résultats une bonne concordance avec ceux d'analytique.

La figure (VI-52) illustre l'évolution du coefficient géométrique 'B' en fonction des différents rapports  $b/a$  de la section. On remarque que ce paramètre  $B$  égale à '77' lorsque  $b/a=0.1$ , où on a la section d'une ellipse très platee, ce qui concorde avec la figure (II-13) du chapitre II (inspiré de la référence [6]). Puis il se décroît dans une première phase rapidement, en suite en deuxième phase lorsque  $b/a$  est supérieur à 0.5, il est moins rapide où on s'approche du cas d'un cercle. Puis il atteint la valeur '64' qui correspond à un cercle pour  $b/a = 1$ .

Dans la même figure, on constate le décroissement du coefficient de pertes de charge 'K' en fonction des différents rapports  $a/b$  de la section. Tel que, il décroît très rapidement avec les sections ayant le rapport  $b/a$  inférieur ou égale à '0.3' vu que le débit relatif ( $Q_v$  Aire) croit pour ces valeurs. Puis pour le reste des rapports, il se diminue lentement au voisinage de 0.001873 Ceci est dû au fait que la section lorsqu'elle augmente, elle permet un passage d'un grand débit et une diminution de la perte de charge, et par suite la diminution de ce coefficient linéaire 'K'. Ces allures indiquent qu'il y a une bonne concordance entre les résultats analytique et numérique d'éléments finis quadrilatères.

On remarque bien les résultats du cercle de ( $R=0.3$  m) à partir du cas de l'ellipse pour  $b/a = 1$ .

### VI-4-4/ RESULTATS D'UN DOMAINE SECTEUR

Le domaine à étudié dans ce cas est celui d'un secteur à différents angles du sommet, avec un rayon  $R$ . Voir leurs formes dans la partie maillage (Figure VI-9).

#### VI-4-4-1/ REPARTITION DES VITESSES

La figure (VI-53) montre l'évolution de la vitesse le long du rayon qui passe sur l'axe de symétrie d'un domaine secteur, où on a choisi le cas d'un demi cercle de rayon  $R= 0.15$ m. La solution est calculée avec différentes méthodes : Eléments finis Triangulaires à 3, 4 et 6 nœuds et quadrilatères à 4, 5 et 8 nœuds. Pour une exécution d'un nombre de nœuds total d'environ (NNT=1108 nœuds) et le temps de calcul varie d'une méthode à une autre dans l'intervalle de 10.76 secondes à 73.05 secondes.

On constate que, les courbes décrivent une variation toujours parabolique de la vitesse avec une augmentation tout en s'éloignant de la paroi et atteigne le maximum au milieu de la section. On remarque aussi que, les différentes solutions sont très proche l'une de l'autre, sauf le cas des

résultats de l'élément triangle à 4 nœuds, qui sont non acceptables. Cette remarque est obtenue déjà avec les domaines précédents (cercle, ...) où on a cité sa justification. On observe aussi que ces vitesses sont nulles aux parois, ça est dû à l'effet du frottement et de la viscosité. Cela aussi est bien montré par le traçage des iso-vitesses de la figure (VI-54), tel qu'on constate les sections des secteurs à différents angles du sommet ( $180^\circ$ ,  $90^\circ$  et  $270^\circ$ ), et la graduation des vitesses du maximum jusqu'au zéro sur les frontières, et leur accumulation près des parois.

La figure (VI-55) montre l'évolution de la vitesse maximum et moyenne en fonction des différents angles du sommet d'un secteur, qui varie de  $10^\circ$  à  $350^\circ$  de raison de  $10^\circ$ , le calcul est réalisé avec différentes méthodes, tel qu'on a montré les résultats obtenus par l'élément fini quadrilatère à 8 nœuds et un autre à 4 nœuds, ainsi que un autre type, c'est l'élément triangle de 3 nœuds. On a choisi le nombre total de nœuds du maillage égale à 1576 nœuds (c.à.d :  $35 \times 23$ ). Le temps de calcul selon chaque type d'élément est : T3N  $\rightarrow$  127.44 s, Q4N  $\rightarrow$  575.68 s, et pour Q8N on a 2957.79 secondes, ou bien : 49 minutes plus 17.79 secondes.

On constate les mêmes remarques que les géométries précédentes, tel que lorsqu'en augmentant l'angle 'téta' de sommet du secteur, les vitesses augmentent de '0' vers un maximum pour un angle de  $360^\circ$ . Ces vitesses maximums sont en valeur double que celles moyennes puisque l'évolution est parabolique.

#### VI-4-4-2/ EVOLUTION DE QUELQUES PARAMETRES IMPORTANTS

La figure (VI-56) montre l'évolution du périmètre  $P_m$  et de l'aire d'un secteur en fonction de différents angles de son sommet. Les résultats sont calculés par la méthode d'éléments finis, et comparés selon les différents types d'éléments. Pour le périmètre  $P_m$ , on remarque une évolution linéaire (lignes rouge) où sa valeur débute de 0.3 m (le double du rayon) à 1.21629 m (pour téta= $350^\circ$ ). Puisque son expression est linéaire avec l'angle de sommet 'téta'.

Pour l'évolution de l'aire, on constate aussi une augmentation linéaire puisque la surface est une fonction de cet angle. La comparaison entre ces résultats montre une très bonne concordance.

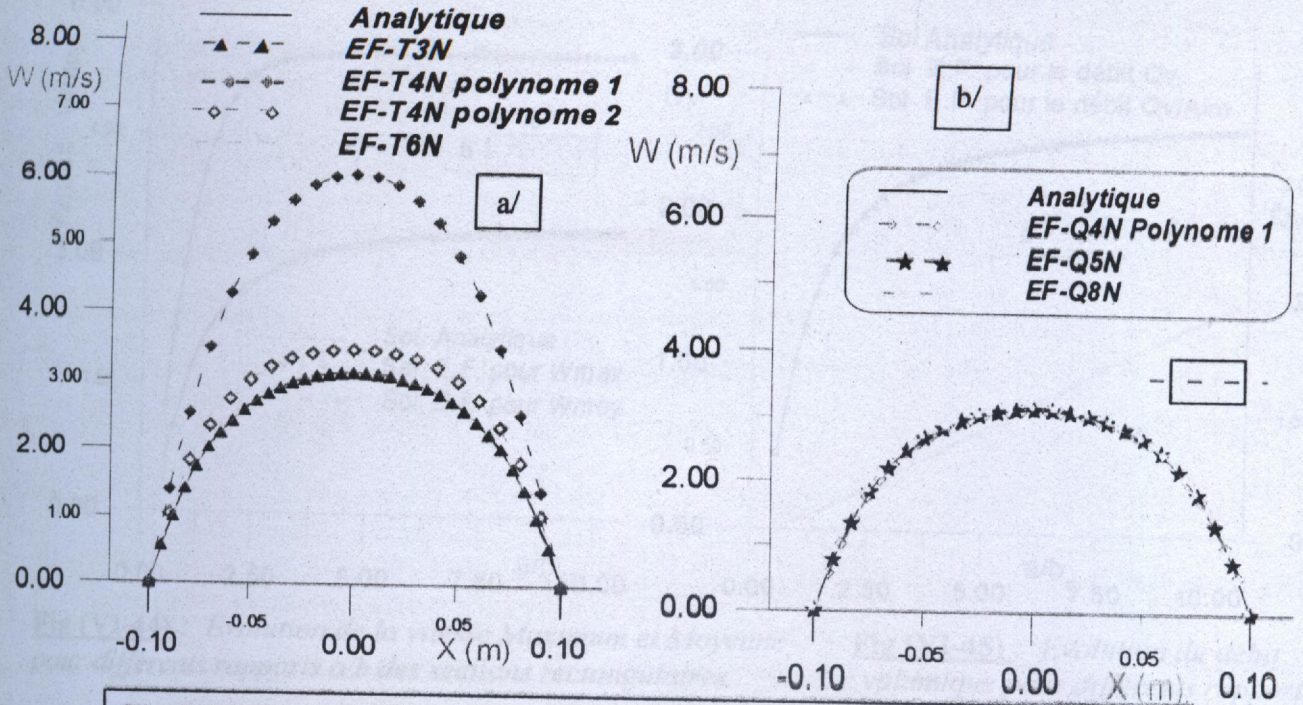
La figure (VI-57) montre l'évolution du coefficient de pertes de charge 'K' et celle du coefficient géométrique 'B', pour les différentes valeurs de téta. Tel que, pour la courbe du coefficient 'K' son allure indique qu'il y a un décroissement très rapide de 1.2320 à 0.0201, pour l'angle téta de ' $0^\circ$ ' jusqu'à  $60^\circ$ ; Puis pour le reste des angles, ce paramètre 'K' décroît très lentement au voisinage de sa valeur  $\approx 0.0032$ , vu que la section obtenue est de plus en plus grande et le débit croît paraboliquement.

Pour la courbe du coefficient 'B', On remarque une évolution quasi logarithmique, à partir de sa valeur d'environ de 50.0 jusqu'à la valeur 66.2 pour les différents angles téta. On remarque aussi que sa valeur, pour téta proche de  $360^\circ$ , est supérieure à celle de la section cercle. Ceci est justifié par la présence des frontières supplémentaire par rapport au cas cercle, qui représentent les côtés du secteur. Les résultats montrés sont en <sup>calcul</sup> d'analytique. Les résultats obtenus par les différentes méthodes citées précédemment (pour K et B) indiquent un bon accord entre eux.

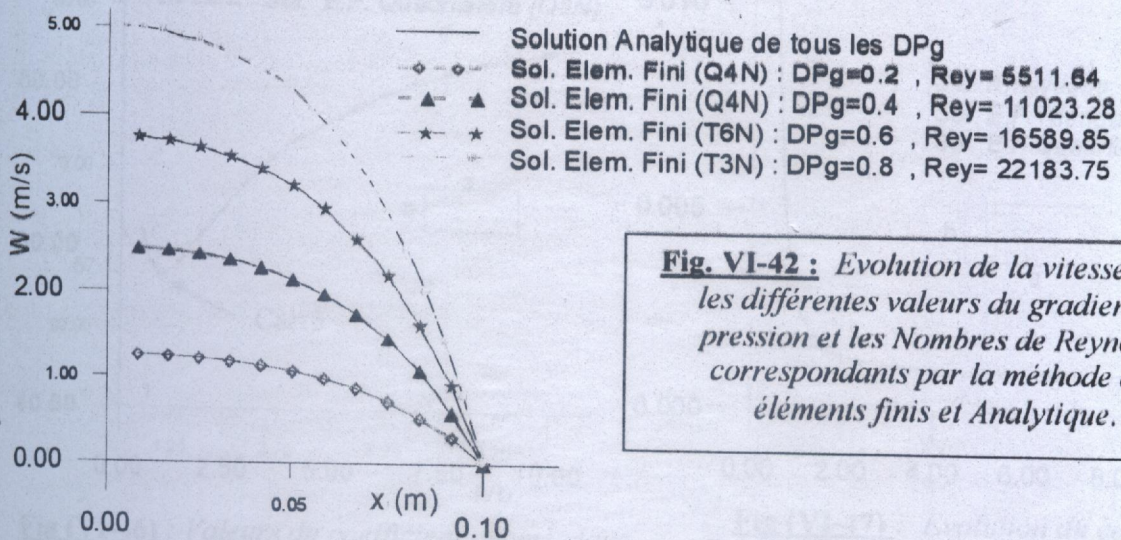
La figure (VI-58) montre l'évolution du débit volumique ainsi que celui-ci par unité de l'aire en fonction de l'angle téta. Les allures de cette figure montrent une augmentation à partir de 0.0 vers leurs maximums dont l'angle téta proche de  $360^\circ$ . Cet accroissement est dû à l'augmentation de l'aire du secteur de fait qu'on augmente son angle de sommet téta.

Cette figure indique aussi qu'il y a une bonne concordance entre les différents résultats. ce qui implique l'efficacité de la méthode des éléments finis.

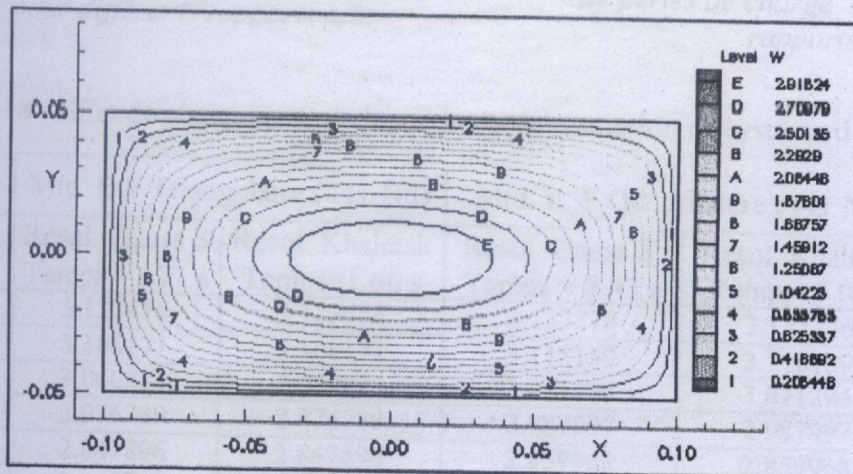
La figure (VI-59) montre l'évolution du nombre de Reynolds en fonction des différentes valeurs de l'angle téta, calculé par différentes méthodes citées auparavant. On observe que, sa courbe présente un point de foyer qui permet de distinguer deux zones d'allure différente en taux d'accroissement, tel que la première zone, où téta varie de ' $0^\circ$ ' jusqu'à  $180^\circ$ , a un taux plus élevé que la seconde zone. Vu que les secteurs ayants un angle de sommet supérieur à  $180^\circ$  ont un débit volumique par unité de l'aire évolue de la même manière, c'est à dire avec un taux d'accroissement faible.



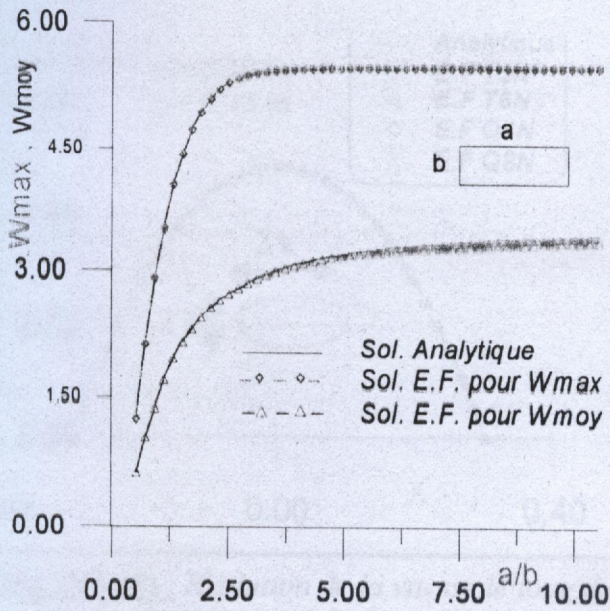
**Fig. VI-41 a,b :** Evolution de la vitesse pour différents types d'éléments finis.



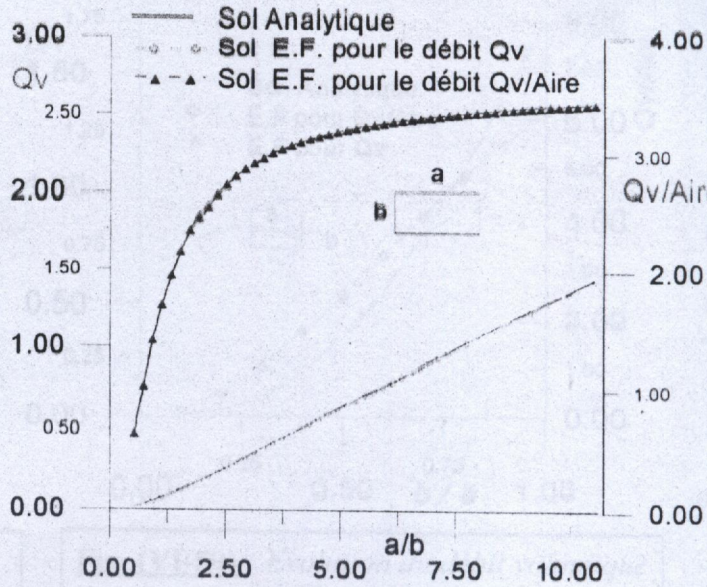
**Fig. VI-42 :** Evolution de la vitesse pour les différentes valeurs du gradient de pression et les Nombres de Reynolds correspondants par la méthode des éléments finis et Analytique.



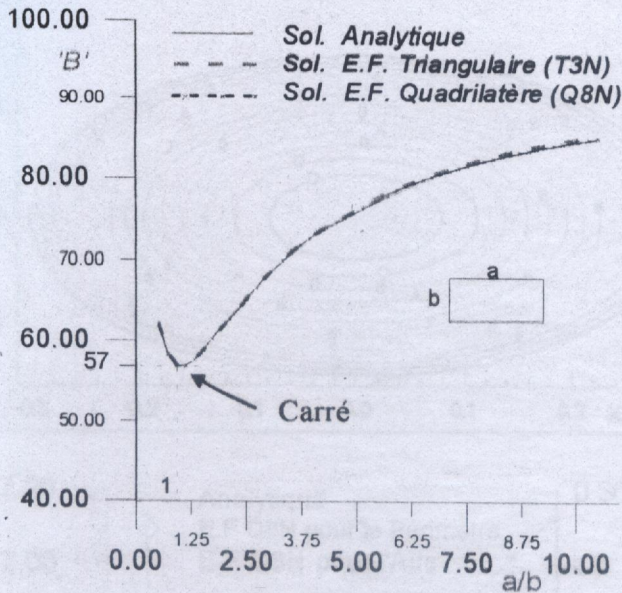
**Fig VI-43 :** Les contours des iso-vitesses dans la section d'un rectangle.



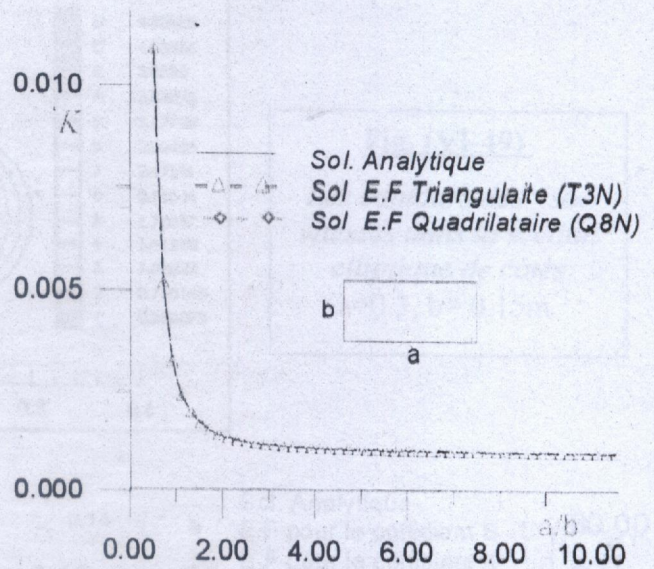
**Fig (VI-44) :** Evolution de la vitesse Maximum et Moyenne pour différents rapports  $a/b$  des sections rectangulaires.



**Fig (VI-45) :** Evolution du débit volumique pour différents rapports.



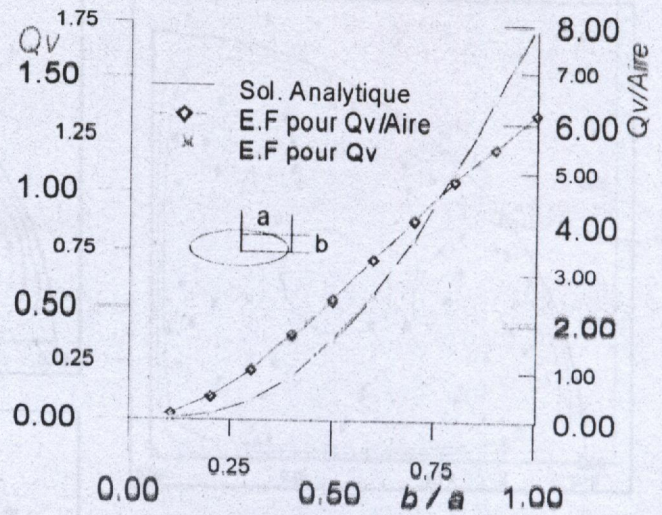
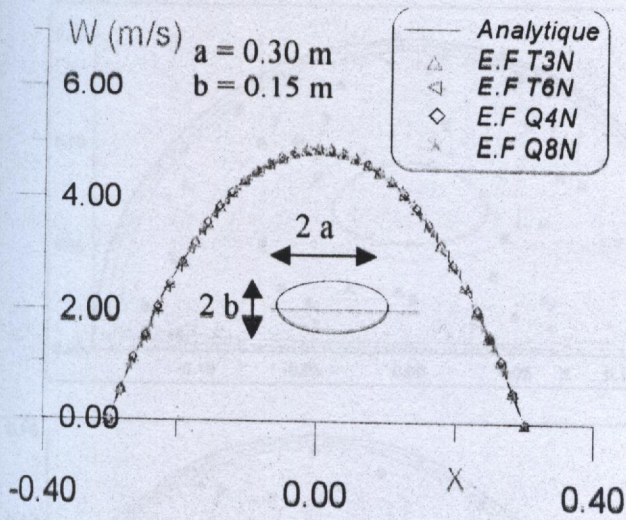
**Fig (VI-46) :** Valeurs du coefficient géométrique 'B' pour différents rapports  $a/b$ .



**Fig (VI-47) :** Evolution du coefficient de pertes de charge 'K' pour différents rapports  $a/b$ .

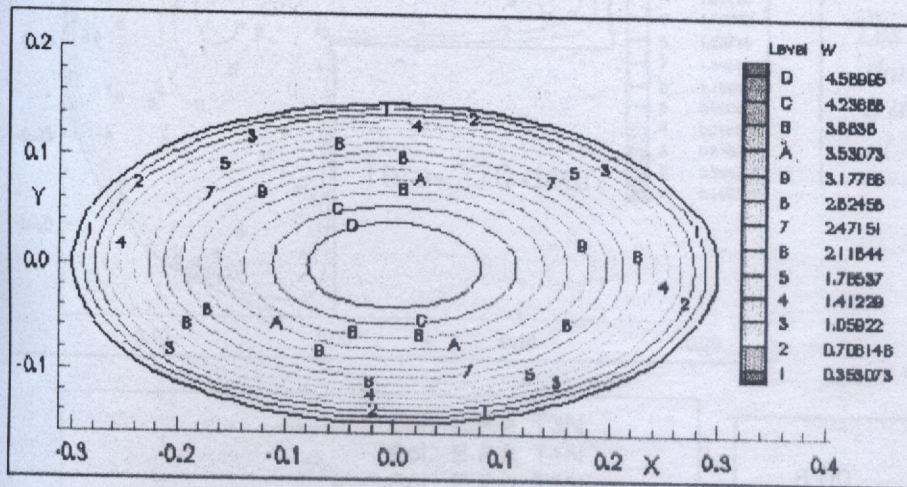
**Tableau TVI-18 :** Effet de changement de la méthode de résolution de système d'équations obtenu

$\omega = 1.70$ Cordonnées $X(i)$	Mtd. E.F Triangulaire (441 Nd)		Mtd. E. F Quadrilatère (441 Nd)		Methode Analytique (21 x 21)
	Résol. Gauss S Temps = 1.71 s	Résol. Khaletsk Temps = 1.66 s	Résol. Gauss S. Temps = 5.43 s	Résol. Khaletsk Temps = 5.06 s	
0.0000	3.123456	3.123456	3.133276	3.133276	3.128348
0.0100	3.108171	3.108171	3.118159	3.118159	3.113145
0.0200	3.060823	3.060823	3.071294	3.071294	3.053424
0.0300	2.976789	2.976789	2.987997	2.987997	2.982365
0.0400	2.847896	2.847896	2.859968	2.859968	2.853892
0.0500	2.661708	2.661708	2.674539	2.674539	2.668078
0.0600	2.400509	2.400509	2.413614	2.413614	2.407565

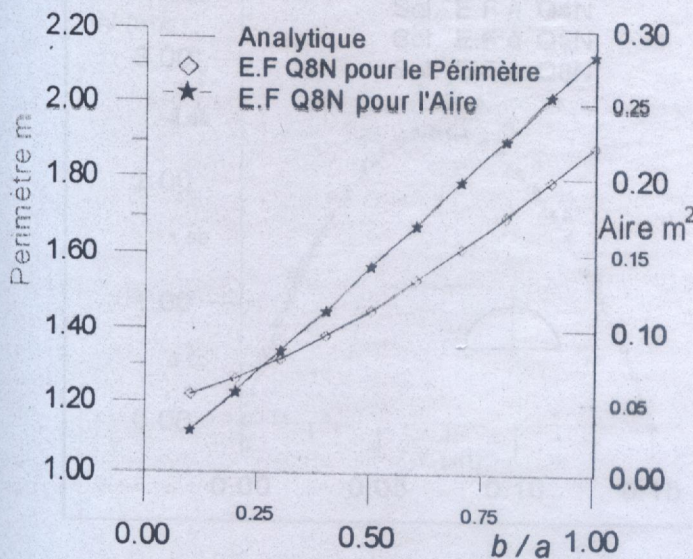


**Fig. (VI-48) :** Evolution de la vitesse le long du diamètre horizontal d'une ellipse.

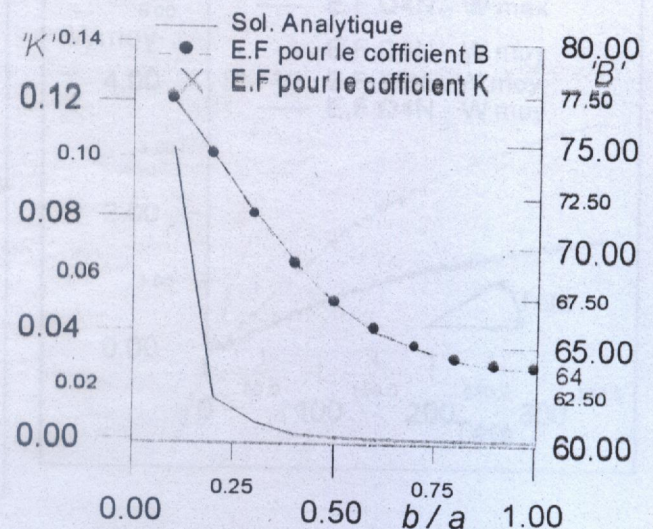
**Fig. (VI-50) :** Evolution du débit volumique pour différents rapports  $b/a$ .



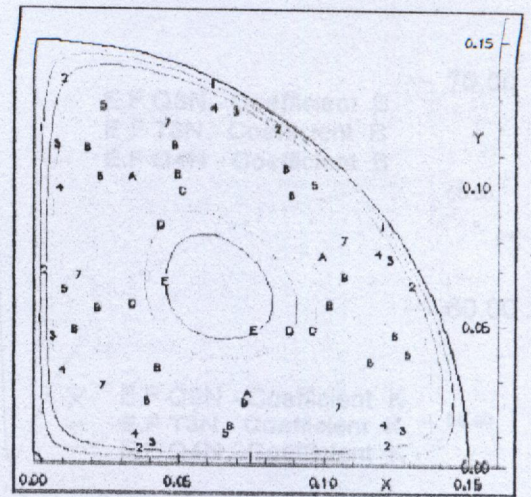
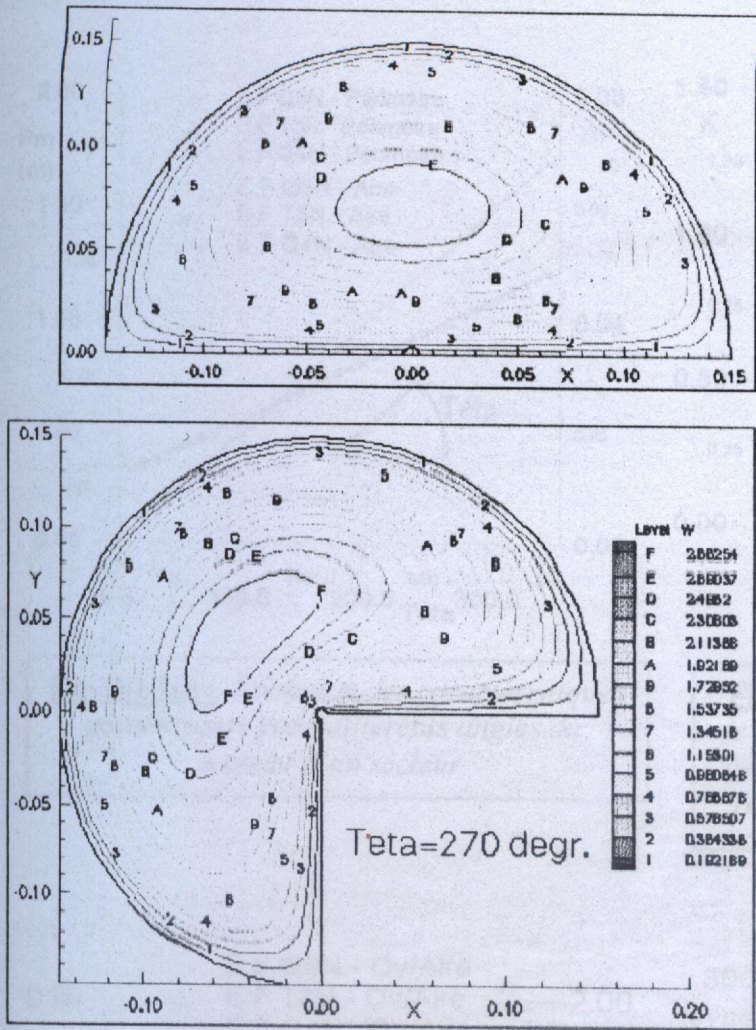
**Fig. (VI-49)**  
Les contours des iso-vitesses dans la section elliptique de côtés  $a=0.3, b=0.15m$ .



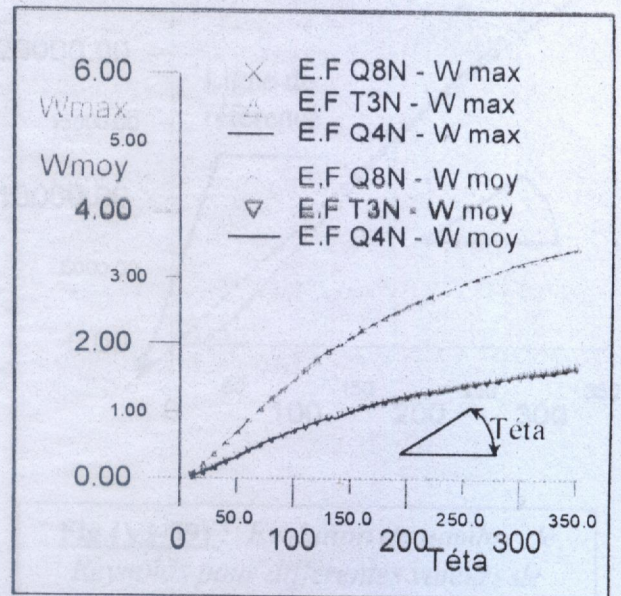
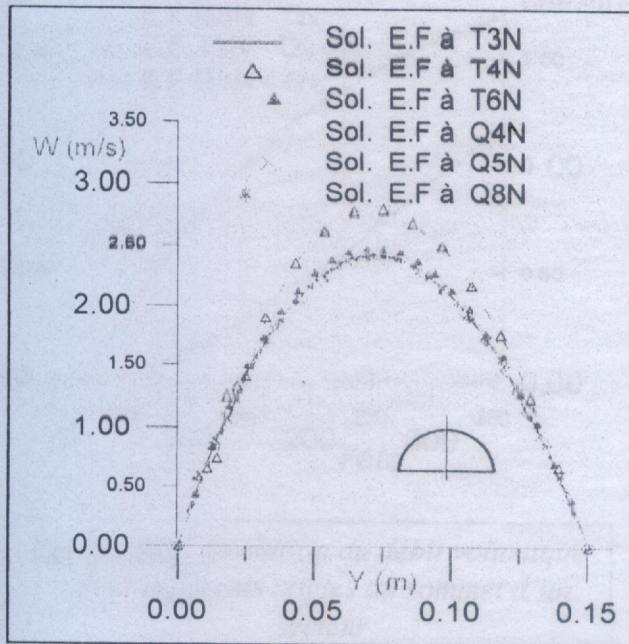
**Fig. (VI-51) :** Evolution des caractéristiques géométriques d'une ellipse pour différents rapports  $b/a$  de ses côtés.



**Fig. (VI-52) :** Evolution du coefficient de pertes de charge 'K' et du coefficient géométrique 'B' pour différents rapports.

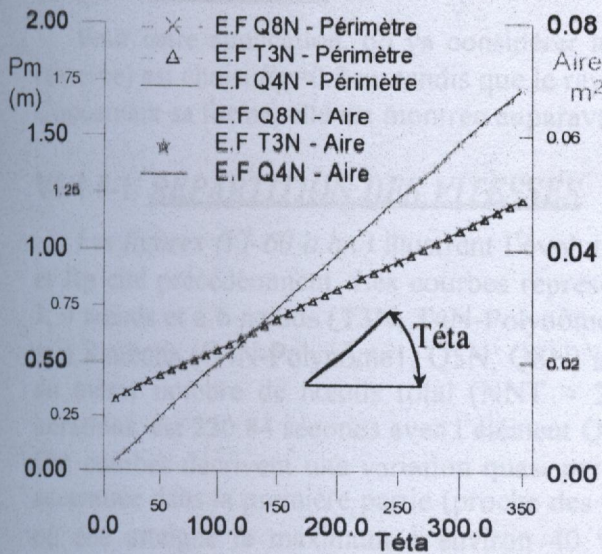


**Fig (VI-54) :**  
 Les contours des iso-vitesses dans les sections des secteurs à différents angles (180°, 90° et 270°) de rayon R=0.15m.

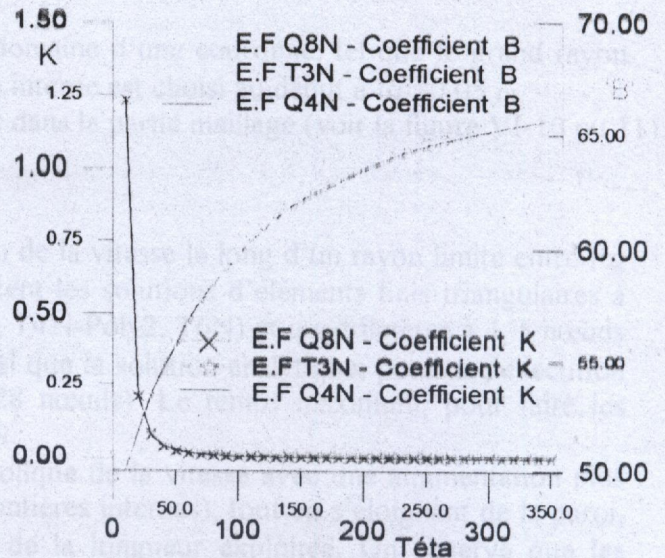


**Fig. VI-53 :** Evolution de la vitesse le long d'un rayon qui passe sur l'axe de la symétrie d'un secteur (demi cercle), pour différents types éléments finis.

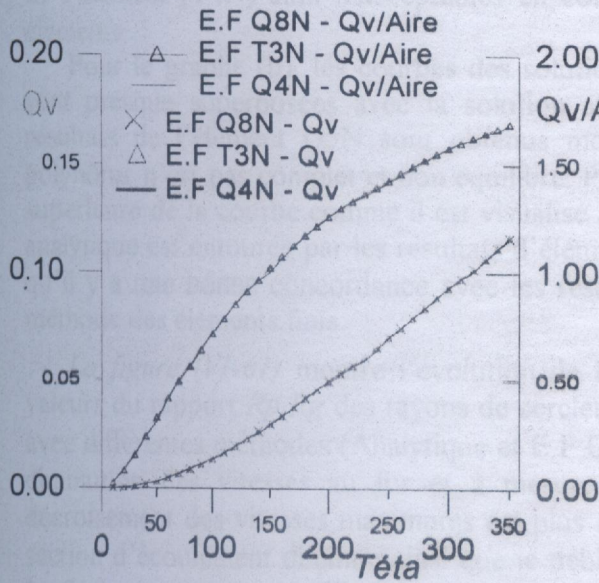
**Fig (VI-55) :** Evolution de la vitesse Maximum et Moyenne pour différents angles du sommet d'un secteur.



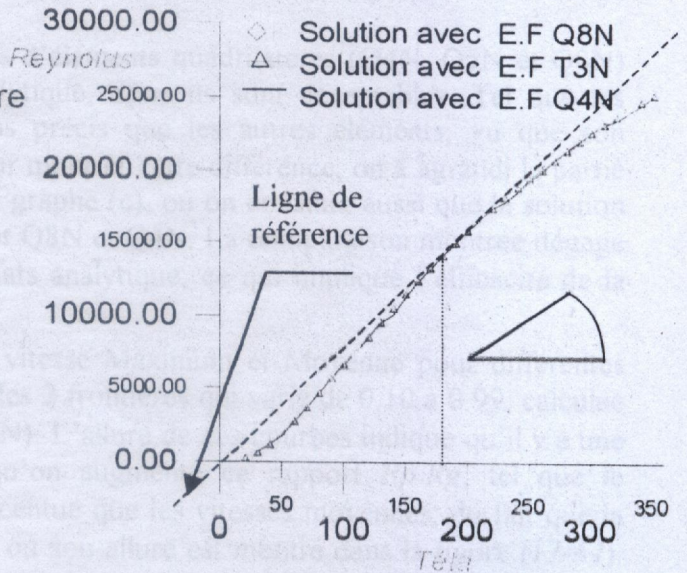
**Fig. (VI-56):** Evolution des caractéristiques géométriques pour différents angles du sommet d'un secteur



**Fig (VI-57):** Evolution du coefficient de pertes de charge 'K' et du coefficient géométrique 'B' pour différents angles Téta et différentes méthodes de calcul.



**Fig (VI-58):** Evolution du débit volumique pour différents angles du sommet d'un secteur



**Fig (VI-59):** Evolution du nombre de Reynolds pour différentes valeurs de l'angle téta.



## VI-4-5/ RESULTATS D'UN DOMAINE LIMITE ENTRE DEUX CYLINDRES COAXIAUX

Pour cette application, on va considérer le domaine d'une couronne, tel que le grand rayon (externe) est choisi  $Rg=0.2$  m, tandis que le rayon interne est choisi au début à  $Rp=0.05$  m. Concernant sa forme, elle est montrée auparavant dans la partie maillage (voir la figure VI-10 ou 11).

### VI-4-5-1/ REPARTITION DES VITESSES

Les figures (VI-60 a,b,c) illustrent l'évolution de la vitesse le long d'un rayon limité entre  $Rg$  et  $Rp$  cité précédemment. Les courbes représentent les solutions d'éléments finis triangulaires à 3, 4 nœuds et à 6 nœuds (T3N, T4N-Polynôme1, T4N-Poly2, T6N) et quadrilatères à 4, 5 nœuds et à 8 nœuds (Q4N-Polynôme1, Q5N, Q8N) ainsi que la solution analytique, pour une exécution du même nombre de nœuds total (NNT  $\approx$  2728 nœuds). Le temps maximum, pour faire les itérations, est 220.84 seconds avec l'élément Q8N.

Ces courbes décrivent une variation quasi parabolique de la vitesse avec une augmentation plus accentuée dans la première partie (proche des frontières internes), tout en s'éloignant de la paroi, où elle atteint le maximum à environ 40 % de la longueur exploitée. On observe que les vitesses sont nulles aux parois, dus à l'effet du frottement et de la viscosité, expliquée dans le cas du premier domaine. On remarque aussi l'écart et la quasi-superposition entre les différents résultats des méthodes utilisées. Tel que, pour le premier graphe, on constate que les résultats obtenus par la méthode des éléments finis triangulaires à 4 nœuds et pour ses deux polynômes, ont des valeurs très supérieures par rapport aux autres résultats, tel que celles de polynôme 1 sont plus grandes que celles du deuxième polynôme. Or, pour les autres éléments ayant les polynômes d'interpolation complets (T3N et T6N) les résultats sont très proches de la solution analytique, donc de meilleure précision et ils sont acceptables. On conclut donc que les résultats de l'élément (T4N) sont inacceptables en comparant avec les résultats analytique et les autres éléments.

Pour le graphe (b), les courbes des solutions d'éléments quadrilatères (Q4N, Q5N et Q8N) sont presque superposées avec la solution analytique, donc ils sont acceptables. Tel que les résultats de l'élément Q5N sont obtenus moins précis que les autres éléments, vu que son polynôme n'est pas complet et non équilibré. Pour montrer cette différence, on a agrandi la partie supérieure de la courbe comme il est visualisé au graphe (c), où on constate aussi que la solution analytique est entourée par les résultats d'élément Q8N et Q4N. La comparaison montrée dégage qu'il y a une bonne concordance avec les résultats analytique, ce qui implique l'efficacité de la méthode des éléments finis.

La figure (VI-61) montre l'évolution de la vitesse Maximum et Moyenne pour différentes valeurs du rapport  $Rp/Rg$  des rayons de cercles des 2 frontières qui varie de 0.10 à 0.99, calculée avec différentes méthodes (Analytique et E.F Q8N). L'allure de ces courbes indique qu'il y a une diminution des vitesses au fur et à mesure qu'on augmente ce rapport  $Rp/Rg$ , tel que le décroissement des vitesses maximums est plus accentué que les vitesses moyennes, du fait que la section d'écoulement diminue ainsi que le débit, où son allure est montré dans la figure (VI-64). La figure montre aussi qu'il y a une très bonne concordance avec les résultats analytiques.

La figure (VI-65 c) visualise la répartition des lignes iso-vitesses en multi-couleurs dans un champ d'une conduite couronne qui ayant la forme des cercles, et elle montre les différents niveaux des valeurs de la vitesse et leurs couleurs correspondantes par son tableau.

On remarque bien la graduation de ces lignes iso-vitesses de la paroi externe vers la paroi interne de la section avec leur accumulation près des parois, qui montre la variation rapide de la vitesse dans cette zone, justifier par l'effet prépondérant de la viscosité dans cette couche, ainsi qu'on remarque bien la zone intermédiaire des frontières qui représente les vitesses maximums dans cette conduite pour un régime d'écoulement établi.

### VI-4-5-2/ EVOLUTION DE QUELQUES PARAMETRES IMPORTANTS

En fonction des différents rapports  $R_p/R_g$  des rayons de cercles des frontières qui varient de 0.10 à 0.90 avec un pas de 0.1, nous avons les résultats de quelques paramètres montrés par des courbes, et calculées avec différentes méthodes (Analytique et E.F). Tel que, on a pour l'élément fini T3N et une discrétisation de 2080 nœuds, le temps nécessaire aux calculs est 58.94 secondes. Or, pour l'élément Q8N et une discrétisation de 1408 nœuds, on a le temps utilisé pour les calculs est de l'ordre de 43 min + 13.77 secondes, qui est assez important.

La figure (VI-62) montre l'évolution du coefficient de pertes de charge 'K' et celle du coefficient géométrique 'B' pour les différentes valeurs de rapport des rayons. Tel que, pour la courbe du coefficient 'K' son allure indique qu'il y a une petite augmentation au voisinage de sa valeur  $\approx 0.0012$ , pour un rapport des rayons  $R_p/R_g$  de '0' jusqu'à 75% ; Puis pour le reste des rapports, ce paramètre 'K' croît très rapidement, vu que la section obtenue est de plus en plus petite et le débit décroît paraboliquement, et on a l'effet des frontières par frottement devient important devant la petite quantité de débit qui passe.

Pour la courbe du coefficient 'B', On remarque une évolution quasi logarithmique, à partir de sa valeur d'environ de 90.0 jusqu'à la valeur 96.0 pour les différents rapports  $R_p/R_g$ . Ce qui montre l'effet de ce coefficient sur les pertes de charge pour les géométries couronnées dont le rapport des rayons  $R_p/R_g$  est élevé. On remarque aussi que sa valeur est toujours supérieure par rapport aux géométries simplement-connexes type cercle. Les résultats montrés sont en accord avec ceux d'analytique.

La figure (VI-63) visualise l'allure de variation du périmètre  $P_m$  et de l'aire d'une section couronne en fonction des rapports  $R_p/R_g$ . On a présenté les résultats de la méthode d'éléments finis de l'élément quadrilatère à 8 nœuds et comparer avec les résultats de la méthode analytique. Pour le périmètre de la section, on remarque une évolution linéaire où sa valeur tend vers le double du périmètre de cercle externe (de rayon '0.2 m'). Puisqu'on a augmenté le rapport à partir de changement du rayon interne  $R_p$  et le rayon externe  $R_g$  est fixé à '0.2 m'. Pour l'évolution de l'aire, on constate une diminution non-linéaire puisque la surface est une fonction quadratique avec le rayon. Il se dégage de la comparaison entre ces résultats une bonne concordance avec les résultats analytiques.

La figure (VI-64) montre l'évolution du débit volumique ainsi que celui ci par unité de surface en fonction du rapport  $R_p/R_g$ , où on a ajouté pour la comparaison la méthode des éléments finis d'un quadrilatère Q8N. Les allures de cette figure montrent une diminution vers 0.0, lors qu'on augmente ce rapport  $R_p/R_g$ , où la courbe de  $Q_v$  est plus accentuée que celle de  $Q_v$  aire. Cette figure indique aussi qu'il y a une bonne concordance entre les différents résultats.

D'après tous ces graphes, on peut constater et déduire que les meilleurs rapports qui donnent une satisfaction sont celles de faibles valeurs, puisqu'ils permettent de passage des grands débits et des valeurs faibles du coefficient de pertes de charge  $K$  et du coefficient géométrique  $B$ .

### VI-4-6/ RESULTATS D'UN DOMAINE LIMITE ENTRE DEUX CYLINDRES EXCENTRES

La forme géométrique de ce domaine est montrée précédemment dans la partie maillage par la figure (VI-16 ou 17).

#### VI-4-6-1/ REPARTITION DES VITESSES

La figure (VI-65 a,b) montre la répartition des contours iso-vitesses en multi-couleurs dans la section limité entre 2 cylindres excentrés, de rayon externe  $A = 0.2$  m, de rayon interne  $B=0.05$ m et d'une excentricité  $C = -0.05$ m, avec les différents valeurs des niveaux de la vitesse et leurs couleurs correspondantes. On constate d'après cette figure, la graduation de ces lignes iso-vitesses de la paroi vers le centre de la section avec leur concentration près de la paroi et la

dissymétrie de l'écoulement par rapport l'axe 'y', ce qui indique que les vitesses maximums sont dominantes dans la partie droite, justifier par l'effet que l'excentricité est décalée vers la partie gauche de la section. Ces iso-vitesses sont comparées avec celles de référence [16], une concordance des résultats est constatée.

L'évolution de ces vitesses dans la partie droite pour ' $x > 0$ ' est bien visualisée par la figure (VI-66). Tel que, elles sont calculées par des méthodes de différents types d'éléments finis, en vu d'une bonne comparaison. Ces résultats montrent une évolution quasi parabolique où les valeurs maximums sont plus proche à la frontière interne de la section qu'au milieu du rayon exploité. La figure montre aussi, qu'il y a une très bonne concordance entre les résultats.

#### VI-4-6-2/ EVOLUTION DE QUELQUES PARAMETRES IMPORTANTS

En vu de voir l'effet de changement des dimensions de la section sur l'évolution des paramètres d'écoulement, on a varié le rapport des rayons B/A de 0.05 à la valeur 0.80 ainsi que la valeur de l'excentricité relative  $C/(A-B)$  avec un pas de 10 %. Concernent le calcul par la méthode des éléments finis, on a utilisé un maillage de 1408 nœuds avec les éléments (Q8N).

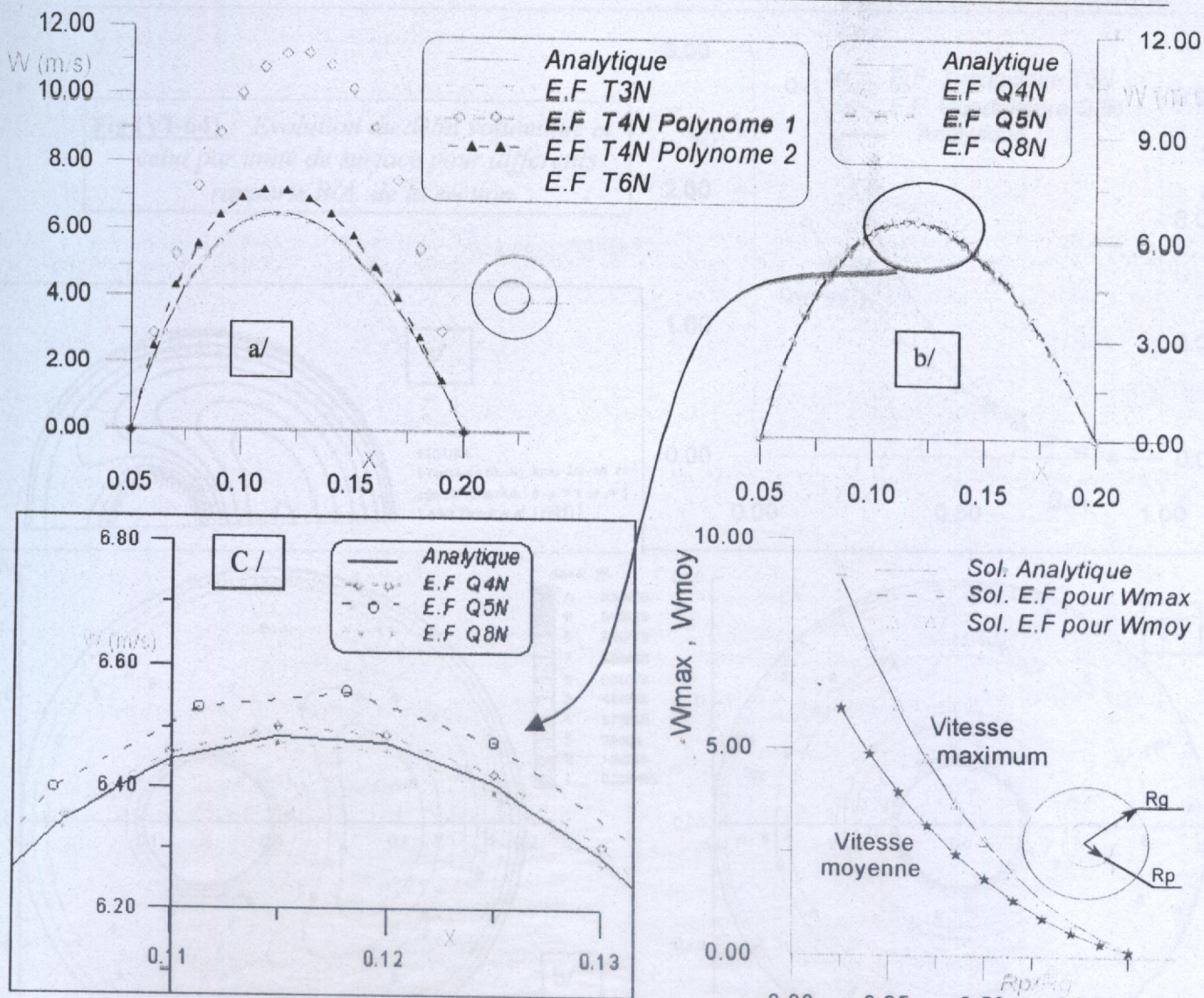
La figure (VI-67 a,b) illustre l'évolution du débit volumique rapporté au débit d'excentricité nulle, (c.à.d débit relatif) en fonction de l'excentricité relative et pour différent rapport B/A. On constate d'après ces allures, qu'en augmentant l'excentricité relative, le débit relatif croit très rapidement pour tous les rapports B/A utilisés, à partir de la valeur '1' jusqu'à un maximum proche de 2.25. Donc, pour une surface donnée (B/A fixé), le déplacement du frontière interne a permis d'augmenter le débit sans influencer aucun paramètre. D'où l'avantage d'excentricité. La comparaison, avec les résultats (b) de la référence [16], a montré une excellente concordance.

La figure (VI-68 a,b) montre l'évolution de la vitesse maximum rapportée à celle d'excentricité nulle pour le premier graphe (a), et pour le deuxième graphe (b) une évolution des vitesses maximums non relatives, en fonction des mêmes paramètres cités précédemment. On constate que pour le graphe (a), les vitesses maximums atteignent presque 4 fois celle d'excentricité nulle  $C=0$  pour un rapport de rayon B/A proche d'unité. Et on remarque que, ces allures ont une évolution semblable à celle du débit relatif, donc les mêmes considérations concernant la discussion pour ces vitesses, sauf que le taux d'accroissement est moins fors que celle du débit relatif. Le graphe (b) est montré dans le but d'avoir une idée sur les valeurs de ces vitesses et leur grandeur pour chaque rapport des rayons B/A. Tel qu'on constate la diminution des vitesses lorsqu'en augmentant le rapport B/A, où on la justifie dans la géométrie précédente. Ce qui n'est pas prévisible dans le graphe (a).

La figure (VI-69) montre l'évolution du coefficient géométrique 'B' en fonction de l'excentricité relative et pour les différents rapports B/A de la section. On remarque que, les valeurs de ce paramètre 'B' diminuent lorsqu'on augmente l'excentricité relative, et cela pour toutes les valeurs du rapport B/A. Ce qui implique la réduction de l'obstruction géométrique à travers la section, ainsi que l'augmentation du débit relatif et les vitesses illustrés auparavant. On remarque aussi qu'à 40 % de l'excentricité relative  $C/(A-B)$  les valeurs du coefficient 'B' sont égales à 78.00 pour n'importe quelle valeur du rapport B/A. Ce qui a partagé les courbes en deux parties, tel que dans la première partie [ $C/(A-B) < 40\%$ ], la valeur de 'B' croit lors on augmente le rapport B/A pour une même excentricité relative et vise-versa pour la deuxième partie.

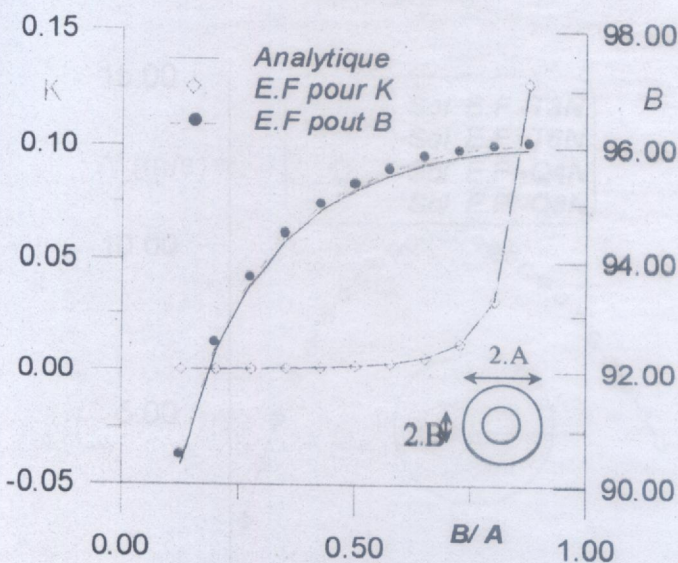
La figure (VI-70) montre l'évolution du coefficient de pertes de charge 'K' en fonction des mêmes paramètres cités préalablement. Les allures de cette figure montrent la diminution de 'K' lorsqu'on augmente l'excentricité relative où elle est très appréciable pour les valeurs du rapport de B/A élevés, de fait que le débit augmente pour cette évolution, où il est montré auparavant. Tandis que, lorsqu'on augmente le rapport des rayons B/A, le coefficient de pertes de charge 'K' augmente aussi, pour une excentricité relative fixe, ce qui est déjà prouvé et vu dans la section précédente (deux cylindres coaxiaux).

Finalement, on peut conclure d'après ces graphes que les meilleurs choix (géométrique) sont celles qui prennent des dimensions géométriques avec une excentricité relative élevée.

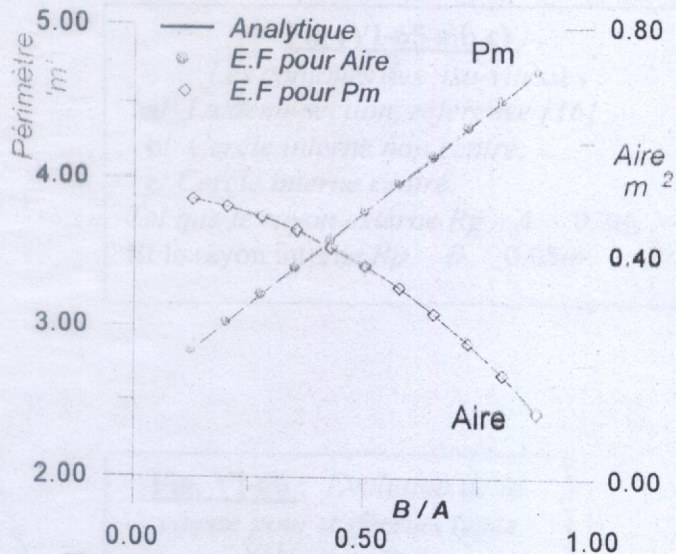


**Fig. (VI-60 a,b,c) :** Evolution de la vitesse le long d'un rayon de la couronne, pour différents types d'éléments finis.

**Fig. (VI-61) :** Evolution de la vitesse Maximum et Moyenne pour différents rapports des rayons  $R_p/R_g$  des cercles de la frontière.

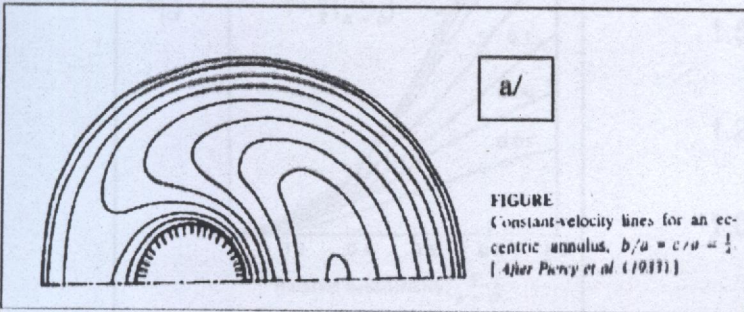
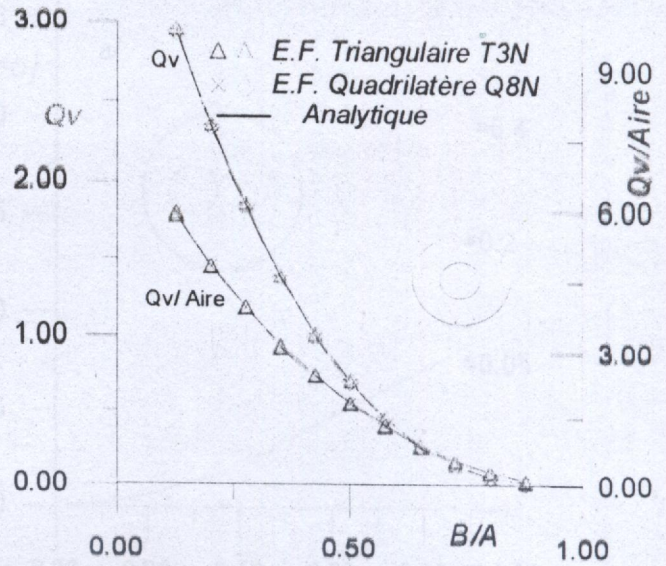


**Fig (VI-62) :** Evolution des coefficients : de pertes de charge 'K' et géométrique 'B' en fonction B/A.

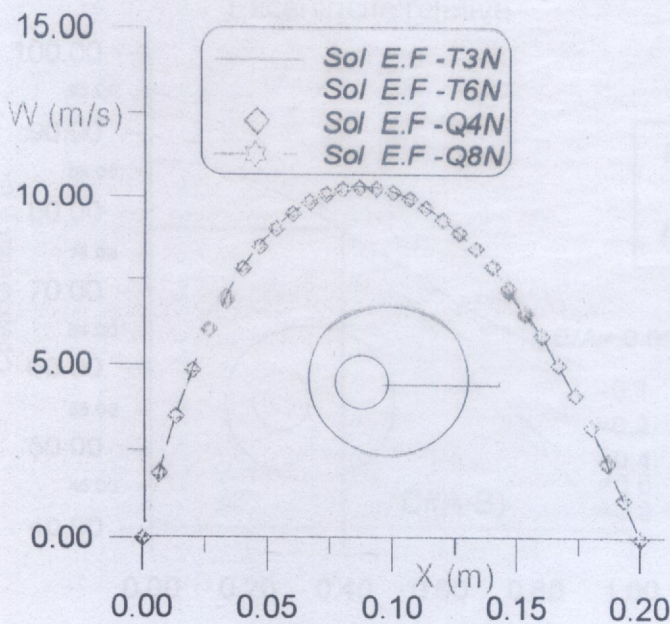
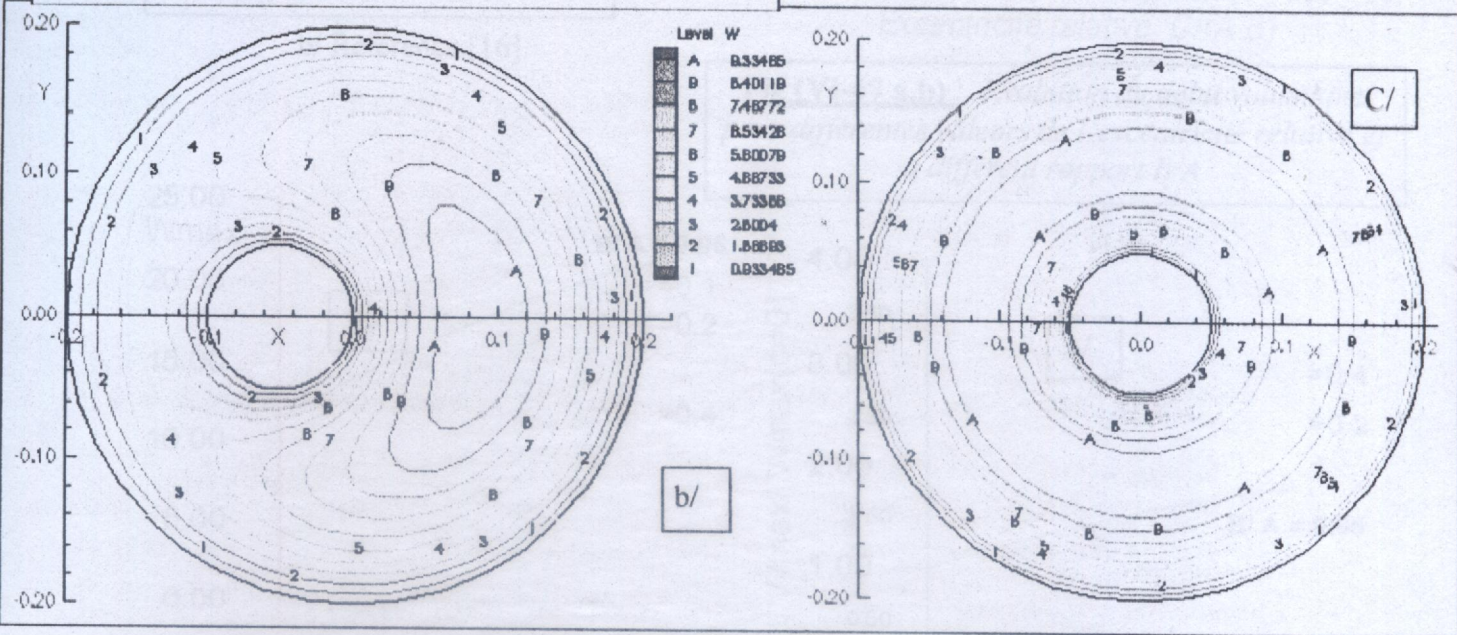


**Fig. (VI-63) :** Evolution des caractéristiques géométriques en fonction des rapports B/A.

**Fig (VI-64) :** Evolution du débit volumique et celui par unité de surface pour différents rapports B/A de la section.

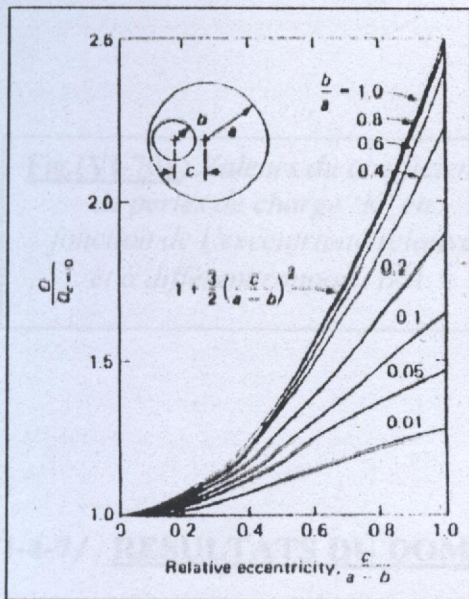


**FIGURE**  
Constant-velocity lines for an eccentric annulus,  $b/a = c/a = 1/2$   
[After Porey et al. (1977)]

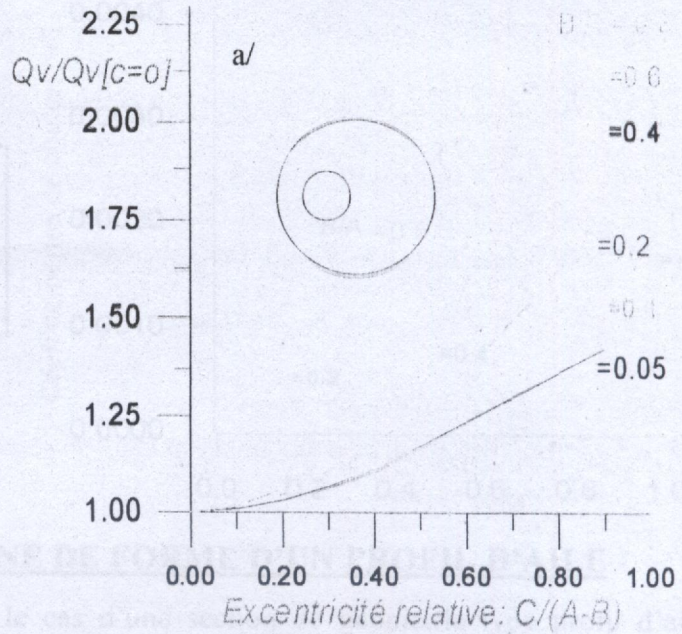


**Fig (VI-65 a,b,c) :**  
Les contours des iso-vitesses :  
a/ La demi-section, référence [16]  
b/ Cercle interne non centré.  
c/ Cercle interne centré.  
Tel que le rayon externe  $R_g = A = 0.2m$ .  
Et le rayon interne  $R_p = B = 0.05m$

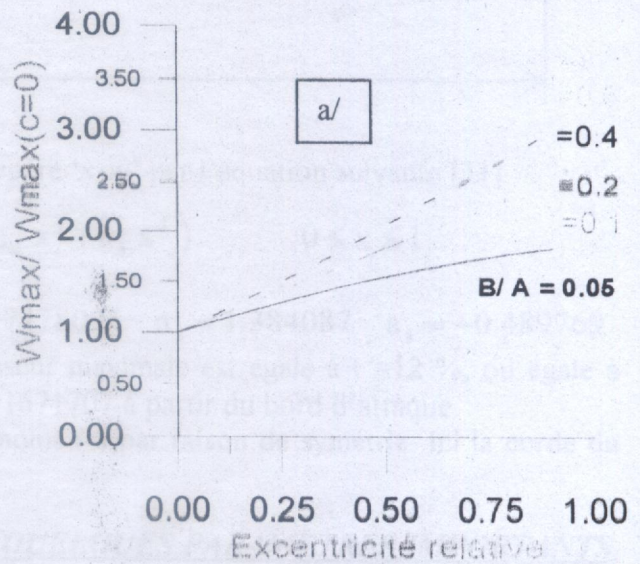
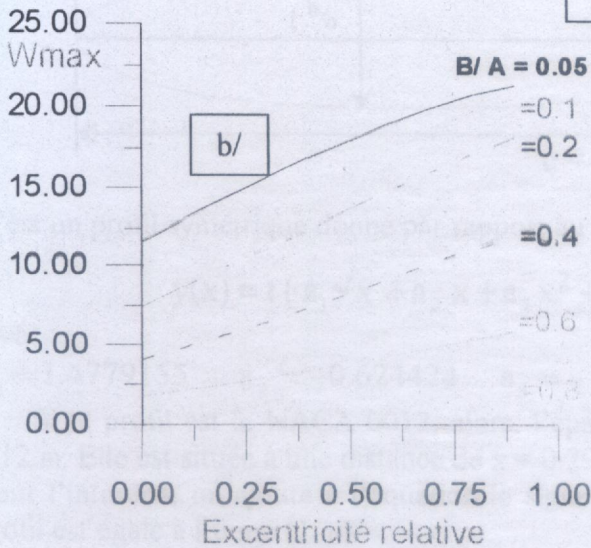
**Fig. VI-66 :** Evolution de la vitesse pour différents types d'éléments finis.



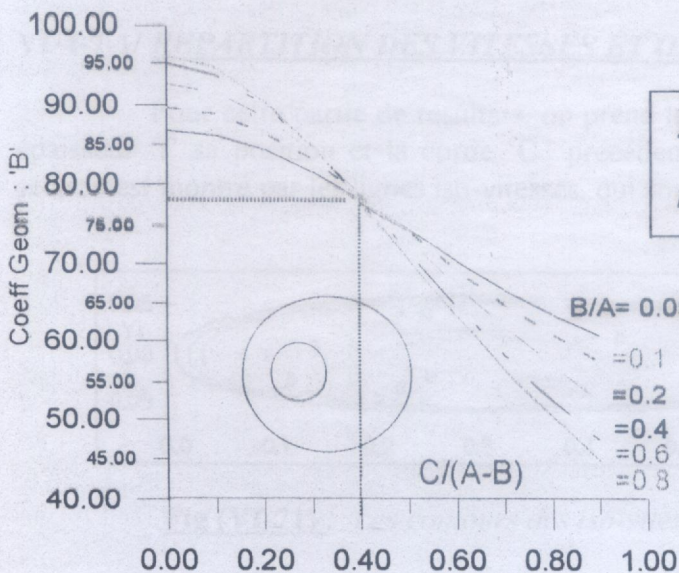
b/ Référence [16].



**Fig (VI-67 a,b):** Evolution du débit volumique pour différentes valeurs de l'excentricité relative et à différent rapport B/A

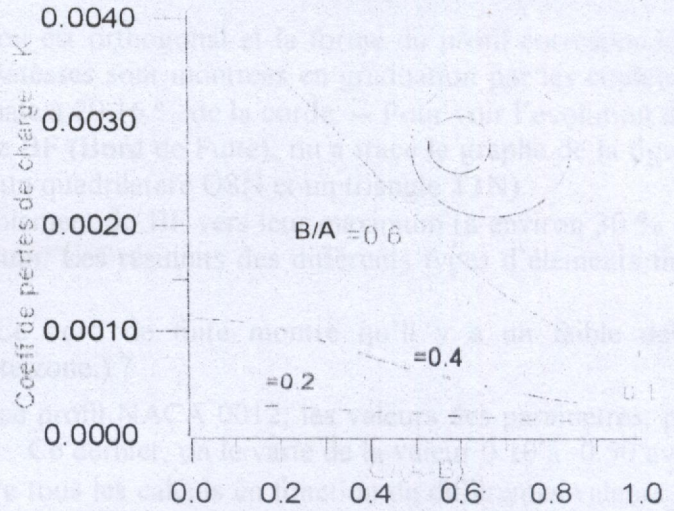


**Fig (VI-68 a,b):** Evolution de la vitesse Maximum en fonction de l'excentricité relative du cercle interne de la conduite.



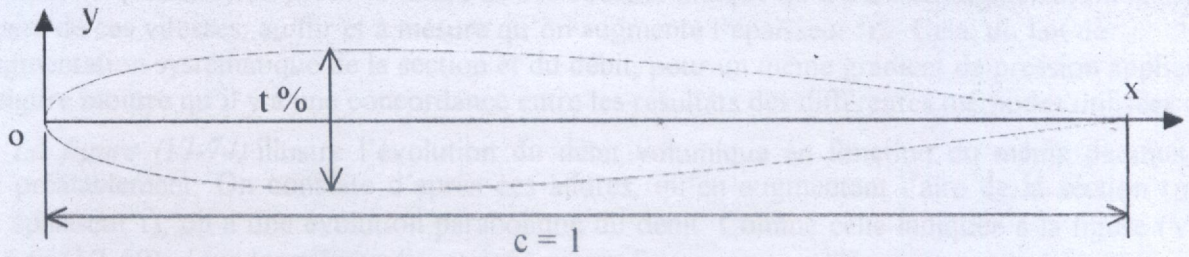
**Fig (VI-69):** Valeurs du coefficient géométrique 'B' en fonction de l'excentricité relative.

**Fig (VI-70) :** Valeurs du coefficient de pertes de charge 'K' en fonction de l'excentricité relative et à différent rapport B/A.



**VI-4-7/ RESULTATS DU DOMAINE DE FORME D'UN PROFIL D'AILE**

Le présente résultat concerne le cas d'une section de géométrie type profil d'aile. L'exemple pris ici est de la série NACA 00't', qui a la forme générale suivante.



C'est un profil symétrique donné par rapport au repère 'xoy' par l'équation suivante [31] :

$$y(x) = t ( a_1 \sqrt{x} + a_2 x + a_3 x^2 + a_4 x^3 + a_5 x^4 ) \quad 0 \leq x \leq 1$$

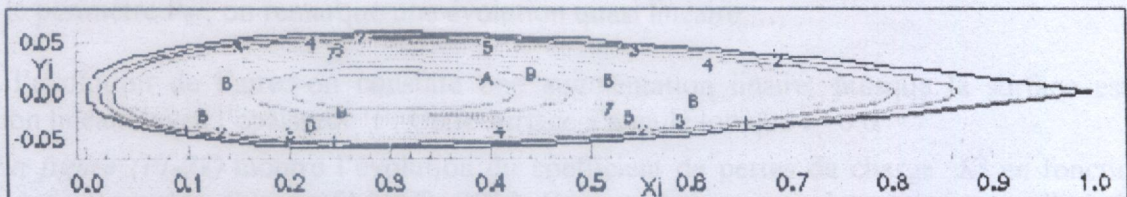
Avec :

$$a_1 = 1.4779155 \quad a_2 = -0.624424 \quad a_3 = -1.7478095 \quad a_4 = 1.384087 \quad a_5 = -0.489769$$

Si le profil est le NACA 0012, alors, l'épaisseur maximale est égale à t = 12 %, ou égale à 0.12 m. Elle est située à une distance de x = 0.2991671707 à partir du bord d'attaque. Pour l'intrados, on ajoute à l'équation le signe moins (-) par raison de symétrie. Ici la corde du profil est égale à l'unité (1 m).

**VI-4-7-1/ REPARTITION DES VITESSES ET QUELOUES PARAMETRES IMPORTANTS**

Pour cette partie de résultats, on prend le cas du profil NACA0012, dont on a cité son épaisseur 't' sa position et la corde 'C' précédemment. Le champ des vitesses à travers cette section est montré par les lignes iso-vitesses, qui sont illustrées dans la figure (VI-71) suivante.



**Fig (VI-71) :** Les contours des iso-vitesses dans la section d'un profil d'aile.

On constate que, le repère de la section est orthogonal et la forme du profil correspond à celui de la référence [31] fidèlement. Les vitesses sont montrées en graduation par les couleurs, de 'zéro' aux parois vers une valeur maximale à 29.16 % de la corde. -- Pour voir l'évolution des vitesses de BA (Bord d'Attaque) jusqu'à le BF (Bord de Fuite), on a tracé le graphe de la figure (VI-72) par différent type d'éléments finis (un quadrilatère Q8N et un triangle T3N).

On remarque que, les vitesses évoluent faiblement du BF vers leur maximum (à environ 30 % de la corde) que celles de BA vers ce maximum. Les résultats des différents types d'éléments finis montrent une bonne concordance entre eux.

(mesuré depuis le bord d'attaque. Le bord de fuite montre qu'il y a un faible débit d'écoulement à travers la conduite dans cette zone.) ?

Dans la suite, on va déterminer pour ce profil NACA 0012, les valeurs des paramètres, par des graphes, en fonction de l'épaisseur 't'. Ce dernier, on le varie de la valeur 0.10 à 0.50 avec un pas de 0.05 ; Le temps utilisé, pour faire tous les calculs en fonction de différentes valeurs de l'épaisseur 't', est donné comme suit : le cas de la méthode d'éléments finis triangulaires T3N est 61.52 secondes, pour le cas des éléments quadrilatères Q8N c'est 612.47 secondes (C.à.d 10 min +12.47 sec). Cela, pour un maillage de nombre de nœuds total est d'environ de 1147 nœuds.

La figure (VI-73) montre l'évolution de la vitesse Maximum et moyenne pour différente épaisseur 't' (relative) du profil. L'allure de ces courbes indique qu'il y a une augmentation quasi linéaire de ces vitesses, au fur et à mesure qu'on augmente l'épaisseur 't'. Cela, du fait de l'augmentation systématique de la section et du débit, pour un même gradient de pression appliqué. La figure montre qu'il y a une concordance entre les résultats des différentes méthodes utilisées.

La figure (VI-74) illustre l'évolution du débit volumique en fonction du même paramètre cité préalablement. On constate d'après ces allures, qu'en augmentant l'aire de la section (par son épaisseur t), on a une évolution parabolique du débit. Comme celle indiquée à la figure (VI-36a) ou (VI-50), donc les mêmes discussions auront lieu.

La figure (VI-75) montre le comportement du coefficient de pertes de charge 'K' et du coefficient géométrique 'B' en fonction des différentes valeurs d'épaisseur (relative) 't'.

On remarque que le paramètre K décroît rapidement avec les sections ayant l'épaisseur 't' inférieure ou égale à '0.20', vu que le débit croît paraboliquement. Puis pour le reste des valeurs d'épaisseur, ce coefficient se diminue lentement. Ceci est dû au fait que la section lorsqu'elle augmente, elle permet un passage d'un grand débit et une diminution de la perte de charge  $\Delta H$ , et par suite la diminution de ce coefficient linéaire 'K'.

Pour la courbe du coefficient 'B', On remarque une diminution non linéaire, dans une marge de valeurs d'environ de 64.0 jusqu'à la valeur 60.0 pour les différentes valeurs d'épaisseur 't'. Ce qui montre une autre fois l'effet de ce coefficient sur le coefficient des pertes de charge. On remarque aussi que sa valeur est toujours inférieure à celle de la géométrie cercle.

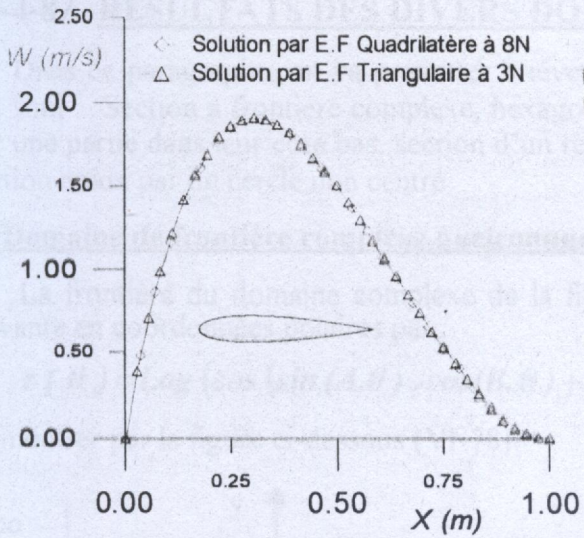
Ces courbes indiquent qu'il y a une concordance entre les résultats numériques d'éléments finis qui soient triangulaires ou quadrilatères. Sauf un très petit décalage entre les résultats du coefficient 'B', due à la précision de chaque type d'élément fini.

Dans la figure (VI-76), on constate l'évolution des caractéristiques géométriques ( $P_m$  et l'aire) pour différente épaisseur (relative) 't' calculée par différentes méthodes (Q8N et T3N). Pour le périmètre  $P_m$ , on remarque une évolution quasi linéaire. ...

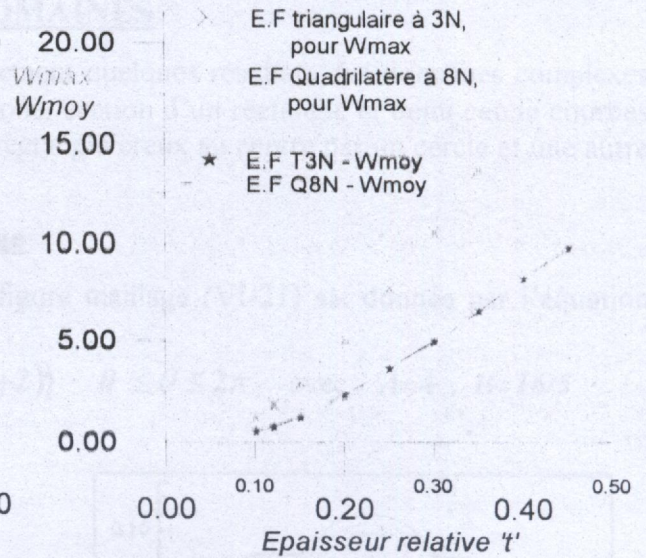
Pour l'évolution de l'aire, on constate une augmentation linéaire, puisque la surface est une fonction linéaire avec l'épaisseur 't'. Cette surface s'annule lorsque  $t=0.0$ .

La figure (VI-77) montre l'évolution du coefficient de pertes de charge 'K' en fonction du nombre de Reynolds d'un profil NACA0012. On remarque une évolution comme celle indiquée à la figure (VI-75) donc les mêmes interprétations a considéré pour son allure. Tel que les valeurs de Reynolds varient de 0.0 à  $3.5 \times 10^5$ .

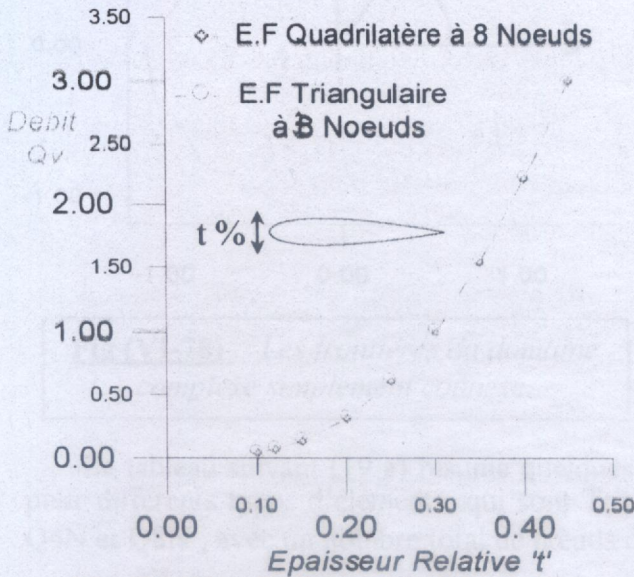




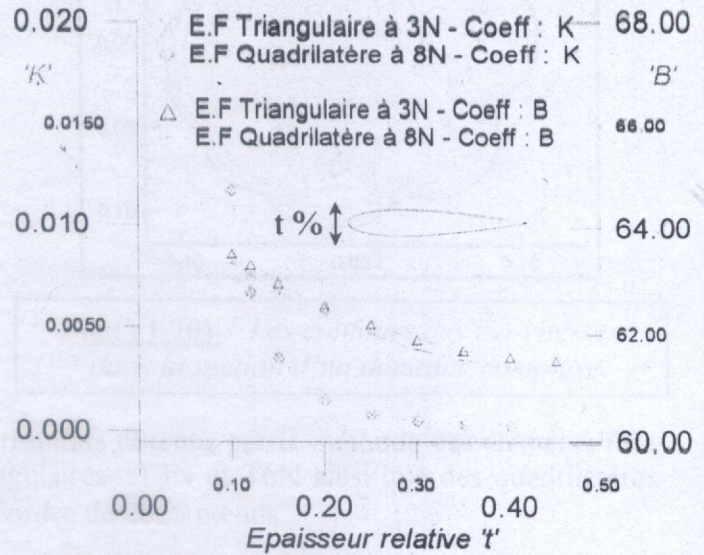
**Fig. (VI-72) :** Evolution de la vitesse pour différents types d'éléments finis.



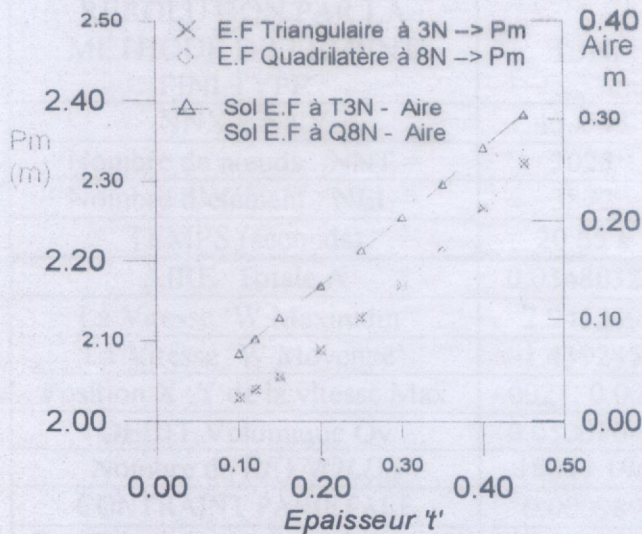
**Fig (VI-73) :** Evolution de la vitesse Maximum et moyenne pour différente épaisseur relative.



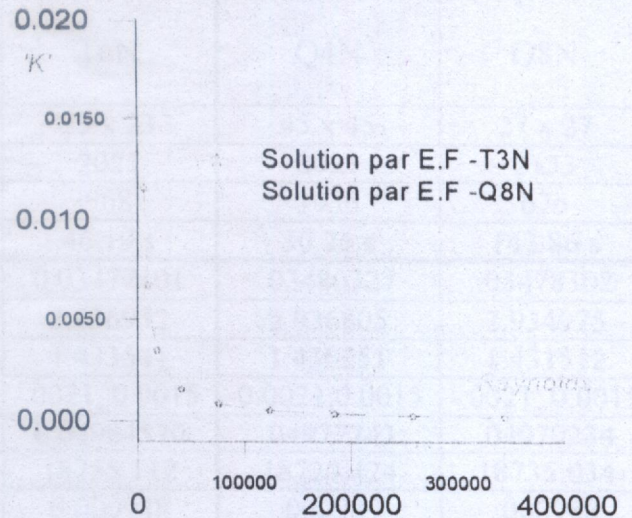
**Fig (VI-74) :** Evolution du débit volumique pour différente épaisseur relative.



**Fig (VI-75) :** Evolution des coefficients 'K' et 'B' pour différentes valeurs d'épaisseur relative.



**Fig. (VI-76) :** Evolution des caractéristiques géométriques pour différente épaisseur relative



**Fig. (VI-77) :** Evolution du coefficient de pertes de charge 'K' en fonction du nombre de Reynolds d'un profil NACA0012.

**VI-4-8/ RESULTATS DES DIVERS DOMAINES**

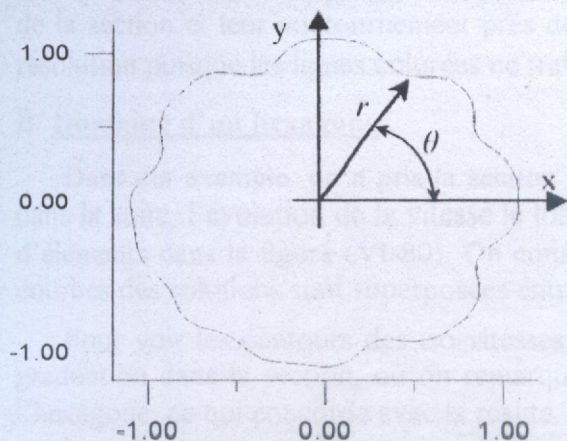
Dans ce paragraphe, on va présenter brièvement quelques résultats des domaines complexes qui sont : Section à frontière complexe, hexagone, section d'un rectangle et demi cercle courbés par une partie dans leur côté bas, section d'un rectangle creux au centre par un cercle et une autre section creux par un cercle non centré.

**A/ Domaine de frontière complexe quelconque**

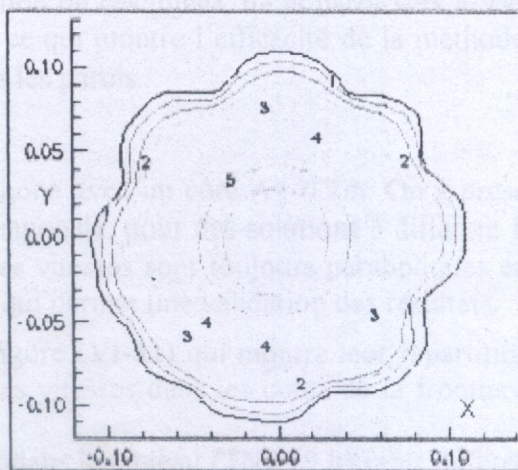
La frontière du domaine complexe de la figure maillage (VI-21) est donnée par l'équation suivante en coordonnées polaires par :

$$r(\theta) = \text{Log}(\cos(\sin(A.\theta) \cdot \cos(B.\theta) + 2)) \quad \theta \leq \theta \leq 2\pi, \text{ avec } A=4, B=16/5.$$

Et montrer par la figure ci-dessous (VI-78).



**Fig (VI-78) :** Les frontières du domaine complexe simplement connexe.



**Fig (VI-79) :** Les contours des iso-vitesses dans la section d'un domaine complexe.

Le tableau suivant (19 a) résume quelques résultats obtenus par la méthode des éléments finis pour différents types d'éléments, qui sont Triangulaires : T3N et T6N ainsi que des quadrilatères Q4N et Q8N ; avec un nombre total de nœuds d'ordre de 2025 nœuds.

**Tableau TVI-19 a :** Quelques résultats du domaine de frontière complexe.

REROLUTION PAR LA METHODE D'ELEMENT FINI TYPE :	T3N	T6N	Q4N	Q8N
NNX x NNY	45 x 45	23 x 23	45 x 45	27 x 27
Nombre de nœuds : NNT =	2025	2025	2025	2133
Nombre d'élément : NEL =	3872	968	1936	676
TEMPS (seconds)	20.65 s	46.19 s	30.26 s	142.86 s
AIRE Totale A	0.03480327	0.03477101	.03480327	.03478302
La Vitesse 'W Maximum'	2.945249	2.936932	2.936805	2.934975
La Vitesse 'W Moyenne'	1.439245	1.433541	1.430251	1.431512
Position X ;Y de la vitesse Max	-0.0021; 0.0015	-0.0021; 0.0015	-0.0021;0.0015	-0.0021; 0.0015
DEBIT Volumique Qv	0.05009044	0.04984570	.04977743	.04979234
Nombre de REYNOLDS	18847.196	18755.112	18729.424	18735.034
CONTRAI NT PARIETALE	0.000989	0.000988	.000989	.000988
Coefficient de perte de charge : K	0.00316957	0.00319187	.00320955	.00320204
Coefficient géométrique : B	59.73742	59.86396	60.11305	59.99024

On remarque qu'on a pu d'avoir des résultats acceptables malgré la complexité des frontières, ce qui montre l'avantage de choisir la méthode des éléments finis.

On remarque aussi que, les résultats sont presque les mêmes entre les différentes méthodes utilisées (selon le type d'élément). Et d'après ces résultats, on a la vitesse maximum se trouve décalé légèrement de l'origine du repère et sa valeur est environ double de la vitesse moyenne. La valeur du nombre de *Reynolds* implique qu'on a un régime laminaire établi, puisqu'elle est inférieure à la valeur critique et de transition.

En comparant avec les résultats du cercle (tableau 12 ou 13), on trouve que les valeurs des coefficients de perte de charge  $K$  et de géométrique  $B$  de la section complexe sont faible que celles du cercle. Vu que le nombre de *Reynolds* et la valeur du débit volumique  $Q_v$  sont plus grands que le cas de l'exemple du cercle.

La figure (VI-79) montre la répartition des lignes iso-vitesses en multi-couleurs dans la section de frontière complexe. On constate la graduation de ces lignes, de la paroi vers le centre de la section et leur contournement près de la paroi, ce qui montre l'efficacité de la méthode de résolution puisque les lignes colorées ne traversent pas les parois.

### B/ Domaine d'un hexagone.

Dans cet exemple, on a pris la section d'un hexagone avec un côté  $A = 0.1m$ . On a présenté dans la suite, l'évolution de la vitesse le long d'une diagonale, pour des solutions à différent type d'éléments dans la figure (VI-80). On constate que les vitesses sont toujours paraboliques et les courbes des solutions sont superposées entre elles, ce qui permet une validation des résultats.

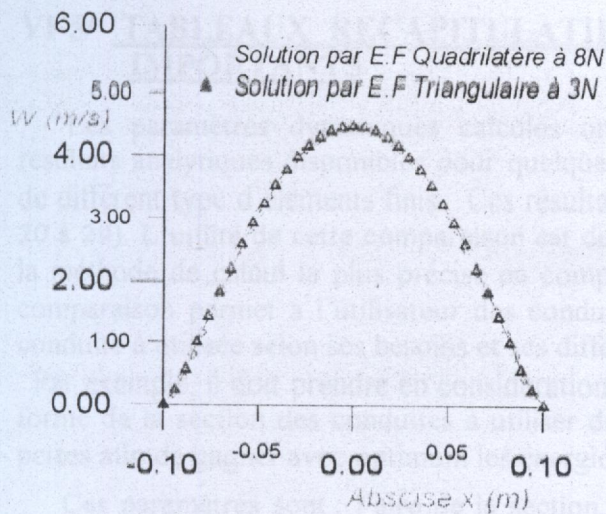
Pour voir les contours des iso-vitesses, on a la figure (VI-81) qui montre leur répartition et graduation dans la section, où on remarque les faibles vitesses dans les coins de la frontière de l'hexagone, ce qui concorde avec la réalité.

Les résultats de quelques paramètres sont donnés dans le tableau (TVI-19 b) pour différentes solutions d'éléments finis. D'après ces résultats, on a les mêmes constatations que le domaine précédent, sauf que la vitesse maximale se trouve au centre de la section.

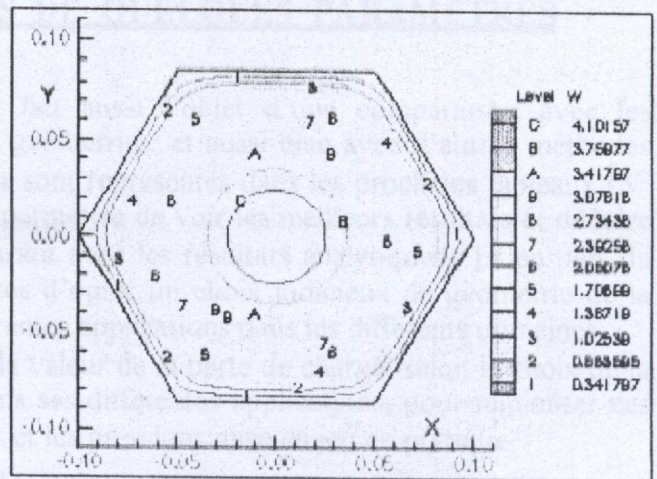
Pour voir les valeurs d'autres paramètres, on donne des tableaux récapitulatifs à la fin du chapitre, et aussi bien les paramètres pour d'autres sections (voir § VI-5).

**Tableau TVI-19 b :** *Quelques résultats du domaine hexagone.*

REROLUTION PAR LA METHODE D'ELEMENT FINI TYPE :	T3N	T6N	Q4N	Q8N
NNX x NNY =	35x35	18x18	35x35	21x21
NNT =	1225	1225	1225	1281
NEL =	2312	578	1156	400
TEMPS (seconds)	16.37 s	37.39 s	19.58 s	108.31 s
AIRE Totale A	0.02598076	0.02595080	0.02598076	0.02598076
La Vitesse 'W Maximum'	2.221681	2.223401	2.227284	2.224027
La Vitesse 'W Moyenne'	1.091335	1.095304	1.094303	1.094793
Position X ;Y de la vitesse Max	0.00 ; 0.00	0.00 ; 0.00	0.00 ; 0.00	0.00 ; 0.00
DEBIT Volumique $Q_v$	0.0283537	0.0284240	0.0284308	0.0284435
Nombre de <i>REYNOLDS</i>	12515.111	12546.131	12549.145	12554.760
CONTRAI NT PARIETALE	0.000866	0.000865	0.000866	0.000866
Coefficient de perte de charge : $K$	0.00482744	0.00478699	0.00480129	0.00479700
Coefficient géométrique : $B$	60.41593	60.05826	60.25208	60.22513



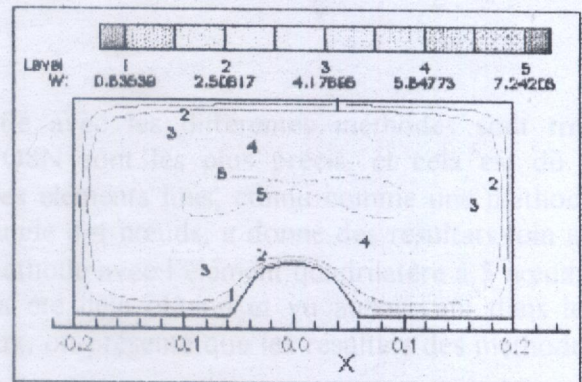
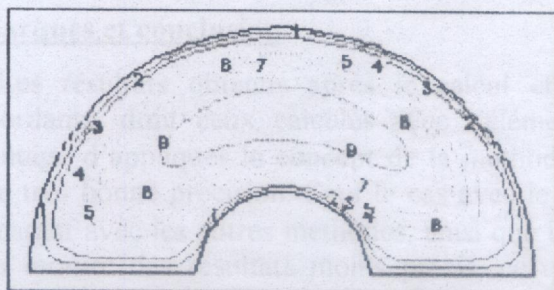
**Fig. (VI-80) :** Evolution de la vitesse pour différents types d'éléments finis.



**Fig (VI-81) :** Les contours des iso-vitesses dans la section d'un domaine hexagone.

**C/ Domaines d'un rectangle et demi cercle courbé par une partie dans leur côté bas**

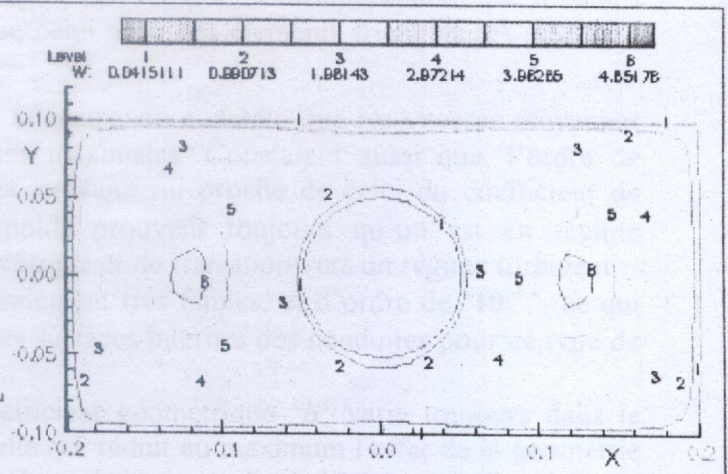
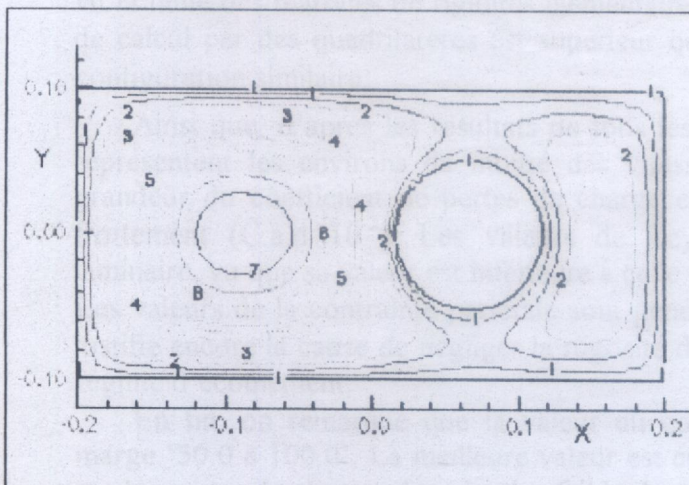
Pour ces domaines, on se satisfait par l'illustration de la répartition des iso-vitesses dans les sections, en montrant leur concentration et les régions des vitesses maximums, ainsi que leurs valeurs selon les tableaux des niveaux de couleurs indiquées dans les figures suivantes.



**Fig (VI-82 a,b) :** Les contours des iso-vitesses des sections de côté bas courbé.

**D/ Domaine d'un rectangle creux au centre et un autre d'un creux décalé de centre**

Même but et les mêmes considérations que précédemment pour ce dernier exemple.



**Fig (VI-83 a,b) :** Les contours des iso-vitesses dans les sections d'un rectangle creux par un cercle

## VI-5/ TABLEAUX RECAPITULATIFS DE QUELQUES PARAMETRES IMPORTANTS

Les paramètres dynamiques calculés ont fait aussi l'objet d'une comparaison avec les résultats analytiques disponibles pour quelques géométries, et aussi bien avec d'autres méthodes de différent type d'éléments finis. Ces résultats sont représentés dans les prochains tableaux (N° 20 à 29). L'utilité de cette comparaison est de permettre de voir les meilleurs résultats et déduire la méthode de calcul la plus précise en comparant avec les résultats analytiques ; Et en plus, la comparaison permet à l'utilisateur des conduites d'opter un choix judicieux de géométrie de la conduite à utilisée selon ses besoins et ses différentes applications dans les différents domaines.

Par exemple, il doit prendre en considération la valeur de la perte de charge, selon le choix de la forme de la section des conduites à utiliser dans ses différentes applications, pour minimiser ces pertes afin de gagner avec optimum les énergies et les pressions mise en jeu en pratique.

Ces paramètres sont : l'aire de la section, la vitesse moyenne et maximum, sa position (x,y) dans la section, le débit volumique, les pertes de charge  $\Delta H$ , le coefficient de pertes de charge linéaire 'K', le paramètre géométrique 'B' du coefficient K, le coefficient de frottement  $C_f$ , le nombre de Reynolds, et le périmètre de la géométrie. Ainsi que le temps de calcul et le nombre de nœuds et d'éléments utilisés par chaque méthode et chaque géométrie.

Pour cela, on a choisi dix géométries à titre d'illustration. Les résultats de chaque méthode de calcul, sont mis dans des colonnes facilitant ainsi la comparaison en fonction des paramètres cités précédemment

Dans la suite, on présente quelques remarques concernant les résultats, puis les tableaux qui vont clôturer ce chapitre.

### Remarques et conclusion

Les résultats obtenus après le calcul effectué avec les différentes méthodes sont très concordants, dont ceux calculés avec l'élément Q8N sont les plus précis, et cela est dû à l'avantage d'appliquer le concept de la méthode des éléments finis, connu comme une méthode d'une très bonne précision. Sauf le cas avec le triangle à 4 nœuds, a donné des résultats loin en comparant avec les autres méthodes, ainsi que la méthode avec l'élément quadrilatère à 5 nœuds, qui a montré des résultats moins précis, ce qui a été déjà obtenu et vu auparavant dans les résultats graphiques. Delà, dans les derniers tableaux, on présente que les résultats des méthodes de T3N, T6N, Q4N et Q8N.

Concernent le temps de calcul pour chaque géométrie, en remarquant que, lorsqu'on augmente le nombre de nœuds d'interpolations dans un élément fini, qui soit triangulaire ou quadrilatère, le temps de calcul augmente aussi. Tel qu'avec l'élément Q8N, ce temps est toujours plus important, vu le nombre de termes d'interpolations et leurs degrés mise en calcul et vu la taille des matrices de rigidités élémentaire qu'il faut remplir. Constatant aussi que le temps de calcul par des quadrilatères est supérieur que celui avec des éléments triangulaires pour une configuration similaire.

Ainsi que, d'après les résultats de tous les tableaux, on constate que les vitesses moyennes représentent les environs de moitié des vitesses maximales. Constatant aussi que, l'ordre de grandeur du coefficient de pertes de charge est similaire ou proche de celui du coefficient de frottement (C.à.d  $10^{-3}$ ). Les valeurs de Reynolds prouvent toujours qu'on est en régime laminaire, vu que sa valeur est inférieure à celle critique et de transition vers un régime turbulent. Les valeurs de la contrainte pariétale sont généralement très faibles, et d'ordre de  $10^{-4}$ , ce qui justifie encore la cause de négliger la rugosité des surfaces internes des conduites pour ce type de régime d'écoulement.

En fin, on remarque que la valeur du coefficient géométrique 'B' varie toujours dans la marge '50.0 à 100.0'. La meilleure valeur est celle qui réduit au maximum l'effet de la géométrie sur les pertes de charge, donc la plus faible. La valeur obtenu est celle de l'hexagone ( $B= 60.0$ ).

TABLEAU VI-20 : GEOMETRIE CERCLE (NF= 1), R=0.1 m.

METHODES	ANALYTIQUE	ELEMENTS FINIS TRIANGULAIRES						ELEMENTS FINIS QUADRILATERALS			
		TYPE / NTEF	T3N / 01	T4N / 02	T6N / 03	Q4N / 04	Q5N / 05	Q8N / 06			
PARAMETRES		NNXx NNY	31 x 33	19 x 19	17 x 17	33 x 33	23 x 23	19 x 19			
		NNT =	1023	1009	1089	1089	1013	1045			
		NEL =	1920	648	512	1024	484	324			
		TEMP (s)	07.58 s	09.23 s	16.04 s	10.79 s	16.47 s	82.33 s			
AIRE A	0.03141592	0.03140244	0.03137607	0.03138364	0.03140331	0.03139350	0.03138364				
W Max	1.373626	1.372914	1.859486	1.372144	1.374761	1.375631	1.371943				
W Moy	0.686813	0.6852339	0.9823249	0.6860385	0.6861327	0.6903109	0.6858326				
POS X VIT MAX	0.00000	0.00000	-0.00370	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000				
POS Y	0.00000	0.00000	0.00370	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000				
DEBIT Qv	0.0215768	0.02151802	0.03082149	0.02153038	0.02154684	0.02167128	0.02152392				
PERTE AH	0.00845948	0.00845949	0.00895974	0.00845949	0.00845949	0.00845950	0.00845949				
COFF K	0.00703713	0.00706657	0.00343567	0.00704579	0.00704827	0.00696103	0.00705002				
COFF 'B'	64.00000	64.09245	44.63348	63.94064	64.01204	63.58485	63.95983				
COFF Cf	0.00175928	0.00176664	0.00085892	0.00176145	0.00176207	0.00174026	0.00176250				
NBR Rev	9094.614	9069.808	12991.206	9075.019	9081.955	9134.405	9072.296				
CONTRANT PARIETAL	0.000500	0.499785E-03	0.494366E-03	0.499486E-03	0.499799E-03	0.499643E-03	0.499486E-03				
DH	0.20000	0.19991	0.199746	0.199794	0.199928	0.199857	0.199794				
PERIMETRE Pm	0.6283185	0.62831853	0.62831853	0.62831853	0.62831853	0.62831853	0.6283185				

TABLEAU VI-20 : GEOMETRIE CERCLE (NF= 1), R=0.1 m.

METHODES	ANALYTIQUE	ELEMENTS FINIS TRIANGULAIRES						ELEMENTS FINIS QUADRILATERALS					
		TYPE / NTEF	T3N / 01	T4N / 02	T6N / 03	Q4N / 04	Q5N / 05	Q8N / 06					
PARAMETRES		NNXx NNY	31 x 33	19 x 19	17 x 17	33 x 33	23 x 23	19 x 19					
		NNT =	1023	1009	1089	1089	1013	1045					
		NEL =	1920	648	512	1024	484	324					
		TEMP (s)	07.58 s	09.23 s	16.04 s	10.79 s	16.47 s	82.33 s					
AIRE A	0.03141592	0.03140244	0.03137607	0.03138364	0.03140331	0.03139350	0.03138364						
W Max	1.373626	1.372914	1.859486	1.372144	1.374761	1.375631	1.371943						
W Moy	0.686813	0.68523339	0.9823249	0.6860385	0.6861327	0.6903109	0.6858326						
POS X VIT MAX	0.00000	0.00000	-0.00370	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000						
POS Y	0.00000	0.00000	0.00370	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000						
DEBIT Qv	0.0215768	0.02151802	0.03082149	0.02153038	0.02154684	0.02167128	0.02152392						
PERTE AH	0.00845948	0.00845949	0.00895974	0.00845949	0.00845949	0.00845950	0.00845949						
COFF K	0.00703713	0.00706657	0.00343567	0.00704579	0.00704827	0.00696103	0.00705002						
COFF 'B'	64.00000	64.09245	44.63348	63.94064	64.01204	63.58485	63.95983						
COFF Cf	0.00175928	0.00176664	0.00085892	0.00176145	0.00176207	0.00174026	0.00176250						
NBR Rev	9094.614	9069.808	12991.206	9075.019	9081.955	9134.405	9072.296						
CONTRANT PARIETAL	0.000500	0.499785E-03	0.494366E-03	0.499486E-03	0.499799E-03	0.499643E-03	0.499486E-03						
DH	0.20000	0.19991	0.199746	0.199794	0.199928	0.199857	0.199794						
PERMETRE Pm	0.6283185	0.62831853	0.62831853	0.62831853	0.62831853	0.62831853	0.6283185						

**TABLEAU VI-21 : GEOMETRIE ELLIPSE (NF=2), a=0.3 m, b=0.05 m.**

METHODES	ANALYTIQUE	ELEMENTS FINIS TRIANGULAIRES						ELEMENTS FINIS QUADRILATERALS			
		TYPE / NTEF	T3N / 01	T4N / 02	T6N / 03	Q4N / 04	Q5N / 05	Q8N / 06			
PARAMETRES		NNXx NNY	35 x 37	21 x 21	19 x 18	35 x 37	25 x 27	21 x 21			
		NNT =	1295	1241	1295	1295	1299	1281			
		NEL =	2448	800	612	1224	624	400			
		TEMP (s)	16.53 s	35.74 s	61.95 s	26.79 s	40.65 s	102.65 s			
AIRE A	0.14137167	0.14132410	0.14122637	0.14118145	0.14132410	0.14127822	0.14122637				
W Max	4.945055	4.943020	6.816179	4.938450	4.948520	4.971797	4.939403				
W Moy	2.4725275	2.4680877	3.92244856	2.4689824	2.4705173	2.4920186	2.4690112				
POS X VIT MAX	0.00000	0.00000	0.01000	0.00000	0.00000	-0.01249	0.00000				
POS Y	0.00000	0.00000	-0.00500	0.00000	0.00000	-0.00576	0.00000				
DEBIT Qv	0.34954534	0.34880027	0.55424086	0.34857451	0.34914363	0.35206796	0.34868949				
PERTE ΔH	0.00846021	0.00845949	0.00855936	0.00845949	0.00845938	0.00845949	0.00845939				
COFF K	0.00102361	0.00105987	0.00041890	0.00105803	0.00105779	0.00103927	0.00105834				
COFF 'B'	67.30463	67.36891	42.30936	67.20861	67.30265	66.67865	67.25060				
COFF Cf	0.00026411	0.00026497	0.00010472	0.00026451	0.00026445	0.00025982	0.00026459				
NBR Rev	63699.157	63563.379	101001.706	63522.239	63625.952	64158.866	63643.192				
CONTRAINTE PARETAL	0.000973	0.000972	0.000972	0.000971	0.000972	0.000972	0.000972				
DH	0.389114	0.388983	0.388714	0.388590	0.388983	0.388857	0.388714				
PERIMETRE Pm	1.45326723	1.45326723	1.45326723	1.45326723	1.45326723	1.45326723	1.45326723				



TABLEAU VI-22 : GEOMETRIE RECTANGLE (NF=3), a=0.02 m, b=0.01 m.

METHODES	ANALYTIQUE	ELEMENTS FINIS TRIANGULAIRES						ELEMENTS FINIS QUADRILATERALS			
		TYPE / NTEF	T3N / 01	T4N / 02	T6N / 03	Q4N / 04	Q5N / 05	Q8N / 06			
PARAMETRES		NNXxNNY	35 x 35	21 x 21	18 x 18	35 x 35	25 x 25	21 x 21			
		NNI =	1225	1241	1225	1225	1201	1281			
		NEL =	2312	800	578	1156	576	400			
		TEMP (s)	02.15 s	07.41 s	18.57 s	10.27 s	16.81 s	77.77 s			
AIRE A	0.02000000	0.020000	0.020000	0.020000	0.020000	0.020000	0.020000				
W Max	3.128348	3.126650	3.496906	3.128335	3.130048	3.145721	3.128336				
W Moy	1.570618	1.565741	1.7851892	1.5705546	1.5683407	1.5859276	1.5706042				
POS X VIT MAX	0.00000	0.00000	-0.00333	0.00000	0.00000	-0.00417	0.00000				
POS Y	0.00000	0.00000	0.00167	0.00000	0.00000	-0.00208	0.00000				
DEBIT Qv	0.03141236	0.03131483	0.03570378	0.03141109	0.03136681	0.03171855	0.03141208				
PERTE ΔH	0.042229743	0.042229721	0.04429840	0.042229733	0.042229736	0.042229652	0.042229741				
COFF K	0.00448550	0.00451348	0.00347203	0.00448586	0.00449853	0.00439931	0.00448558				
COFF 'B'	62.19213	62.38584	54.71694	62.19465	62.28245	61.59178	62.19269				
COFF Cf	0.00112137	0.00112837	0.00086801	0.00112146	0.00112463	0.00109983	0.00112139				
NBR Rey	13865.165	13822.114	15759.363	13864.603	13845.059	14000.313	13865.040				
CONTRANT PARIETAL	0.001667	0.166667E-02	0.186667E-02	0.166667E-02	0.166667E-02	0.16777E-02	0.166667E-02				
DH	0.133333	0.133333	0.133333	0.133333	0.133333	0.133333	0.133333				
PERIMETRE Pm	0.60000	0.60000	0.60000	0.60000	0.60000	0.60000	0.60000				

**TAB. VI-23 : GEOMETRIE SECTEUR «  $\theta=180^\circ$  » (NF=5), R=0.15 m.**

METHODES	ANALYTIQUE	ELEMENTS FINIS TRIANGULAIRES						ELEMENTS FINIS QUADRILATERALS					
		TYPE / NTEF	T3N / 1	T4N / 02	T6N / 03	Q4N / 04	Q5N / 05	Q8N / 06					
PARAMETRES		NNXx NNY	21x26	14 x 14	12 x 12	20 x 27	17 x 17	14 x 14					
		NNT =	1072	1081	1059	1061	1090	1108					
		NEL =	2050	702	506	1014	528	351					
		TEMP (s)	9.28 s	10.76 s	37.57 s	11.15 s	20.099 s	73.05 s					
AIRE A	0.03534291	0.03531967	0.03525698	0.03522292	0.03532142	0.03528617	0.03525698						
W Max	/	2.410589	2.821276	2.460850	2.387427	2.411929	2.405346						
W Moy	/	1.1657106	1.3642888	1.2035675	1.1610548	1.1910906	1.1679251						
POS X VIT MAX	/	0.0000	0.00301	0.00000	0.00000	0.00368	0.00000						
POS Y	/	0.07143	0.07125	0.06875	0.07500	0.07482	0.06964						
DEBIT Qv	/	0.04117251	0.04810070	0.04239316	0.04101011	0.04202903	0.04117751						
PERTE AH	/	0.01691897	0.01699187	0.01691965	0.01691896	0.01691879	0.01691896						
COFF K	/	0.00447486	0.00326119	0.00418628	0.00451104	0.00428212	0.00444999						
COFF 'B'	/	63.26641	53.86598	60.94121	63.52641	61.80093	62.92250						
COFF Cf	/	0.00111871	0.00081530	0.00104657	0.00112776	0.00107053	0.00111250						
NBR Rey	/	14138.199	16517.265	14557.358	14082.430	14432.317	14139.915						
CONTRAIINT PARIETAL	/	0.000916	0.000914	0.000913	0.000916	0.000915	0.000914						
DH	/	0.183184	0.182859	0.182682	0.183193	0.183010	0.182859						
PERIMETRE Pm	/	0.77123890	0.77123890	0.77123890	0.77123890	0.77123890	0.77123890						

**TABLEAU VI-24 : GEOMETRIE GRAND CERCLE CREUX PAR UN PETIT CERCLE CENTREE (NF=13), RG=0.2m, RP=0.05m.**

METHODES	ANALYTIQUE	ELEMENTS FINIS TRIANGULAIRES						ELEMENTS FINIS QUADRILATERALS			
		TYPE / NTEF	T3N / 1	T4N / 02	T6N / 03	Q4N / 04	Q5N / 05	Q8N / 06			
PARAMETRES	NNXx NNY	80 x 30	48 x 15	44 x 15	80 x 30	56 x 22	60 x 15				
	NNT =	2480	2208	2728	2480	2520	2820				
	NEL =	4800	1440	1320	2400	1232	900				
	TEMP (s)	2665 s	3823 s	88.43 s	70.41 s	73.93 s	220.85 s				
AIRE A	0.11780972	0.11768864	0.11732585	0.11740974	0.11768864	0.11756270	0.11759452				
W Max	6.407226	6.475086	7.271040	6.463627	6.500744	6.597583	6.474323				
W Moy	4.2443593	4.2323011	4.8270536	4.2285742	4.2355472	4.3571862	4.2358999				
POS X VIT MAX	-0.11358	-0.08132	0.01199	-0.11383	-0.11500	-0.11441	0.05750				
POS Y	0.01799	-0.08132	-0.11572	-0.01637	0.00000	-0.00643	-0.09959				
DEBIT Qv	0.50002680	0.49809377	0.56633816	0.49647580	0.49847580	0.51224258	0.49811862				
PERTE ΔH	0.03383795	0.03383794	0.03353754	0.03396394	0.03383794	0.03383766	0.03383793				
COFF K	0.00110560	0.00111077	0.00085128	0.00111009	0.00110907	0.00104689	0.00110800				
COFF 'B'	93.20709	93.28061	81.28382	92.92084	93.20912	90.41319	93.20234				
COFF Cf	0.00027640	0.00027769	0.00021282	0.00027752	0.00027727	0.00026172	0.00027700				
NBR Rey	84304.170	83978.263	95484.218	83705.473	84042.672	86363.741	83982.451				
CONTRANT PARIETAL	0.003000	0.299692E-02	0.298768E-02	0.002990	0.002997	0.002994	0.002995				
DH	0.300000	0.299692	0.298768	0.298981	0.299692	0.299371	0.299452				
PERIMETRE Pm	1.57079633	1.57079633	1.57078596	1.57079633	1.57079633	1.57079633	1.57079633				

**TABLEAU VI-25 : GEOMETRIE DE GRAND CERCLE CREUX PAR UN PETIT CERCLE NON-CENTREE (NF=14)**

RG=0.2m, RP=0.05m., XC=RG/4, YC=0m.

METHODES	ANALYTIQ	ELEMENTS FINIS TRIANGULAIRES			ELEMENTS FINIS QUADRILATERALS		
		TYPE / NTEF	T3N / 01	T6N / 03	Q4N / 04	Q8N / 06	
PARAMETRES		NNX x NNY :	80 x 31	44 x 16	80 x 31	60 x 16	
		NNT =	2480	2728	2480	2820	
		NEL =	4800	1320	2400	900	
		TEMP (s)	27.30 s	82.50 s	66.13 s	236.61 s	
AIRE TOTALE	0.1178097	0.11768864	0.11740974	0.11768864	0.11759452		
VITESSE Max	/	10.324971	10.313587	10.286412	10.327446		
VITESSE Moy	/	4.7890527	4.7872768	4.7860690	4.7946499		
POS X VIT MAX	/	0.08667	0.08667	0.08667	0.08667		
POS Y	/	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000		
DEBIT Qv	/	0.56361711	0.56207293	0.56326597	0.56382456		
PERTE ΔH	/	0.03383794	0.03383793	0.03383794	0.03383793		
COFF K	/	0.00086752	0.00086610	0.00086860	0.00086480		
COFF 'B'	/	82.43627	82.07645	82.48766	82.20838		
COFF Cf	/	0.00021688	0.00021653	0.00021715	0.00021620		
NBR Rey	/	95025.452	94765.104	94966.249	95060.427		
CONTRRAINT PARIETAL	/	0.002997	0.002990	0.002997	0.002995		
DIAMETRE DH	/	0.299692	0.298981	0.299692	0.299452		
PERIMETRE Pm	/	1.57079633	1.57079633	1.57079633	1.57079633		

TABLEAU VI-26 : GEOMETRIE PROFIL D'AILLE (NF=7), C=1mm, t=12 °C.

METHODES	ANALYTIQ U	ELEMENTS FINIS TRIANGULAIRES			ELEMENTS FINIS QUADRILATERALS		
		TYPE / NTEF	T3N / 01	T6N / 03	Q4N / 04	Q8N / 06	
PARAMETRES		NNXc NNY	25x21	13x11	25x21	15x13	
		NNT =	525	525	525	557	
		NEL =	· 960	420	480	168	
		TEMP (s)	20.05 s	33.23 s	23.27 s	54.53 s	
AIRE TOTALE	/	0.08117082	0.08094318	0.08117082	0.08102695		
VITESSE Max	/	1.904610	1.897867	1.914591	1.901878		
VITESSE Moy	/	0.8770914	0.8777262	0.8818586	0.8790751		
POS X VIT MAX	/	0.29167	0.29167	0.29167	0.32143		
POS Y	/	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000		
DEBIT Qv	/	0.07119422	0.07104595	0.07158118	0.07122878		
PERTE ΔH	/	0.01186997	0.01186997	0.01186997	0.01186997		
COFF K	/	0.00687018	0.00684100	0.00679610	0.00682708		
COFF 'B'	/	63.52039	63.11892	63.17700	63.15259		
COFF Cf	/	0.00171754	0.00171025	0.00169902	0.00170677		
NBR Rey	/	9245.814	9226.559	9296.068	9250.303		
CONTRANT PARIETAL	/	0.000796	0.000794	0.000796	0.000795		
DIAMETRE DH	/	0.159215	0.158769	0.159215	0.158933		
PERIMETRE Pm	/	2.039272	2.039272	2.039272	2.039272		

**TABIEAU VI-27 : GEOMETRIE HEXAGONE (NF=8), A=0.1m.**

METHODES	ANALYTIQ	ELEMENTS FINIS TRIANGULAIRES			ELEMENTS FINIS QUADRILATERALS		
		TYPE / NTEF ↙	T3N / 01	T6N / 03	Q4N / 04	Q8N / 06	
PARAMETRES		NNXx NNY	35x35	18x18	35x35	21x21	
		NNT =	1225	1225	1225	1281	
		NEL =	2312	578	1156	400	
		TEMP (s)	16.37 s	37.39 s	19.58 s	108.31 s	
AIRE TOTALE	/	0.02598076	0.02595080	0.02598076	0.02598076	0.02598076	
VITESSE Max	/	2.221681	2.223401	2.227284	2.224027		
VITESSE Moy	/	1.0913359	1.0953042	1.0943036	1.0947933		
POS X VIT MAX	/	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	
POS Y	/	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	
DEBIT Qv	/	0.02835374	0.02842401	0.02843084	0.02844356		
PERTE ΔH	/	0.01691897	0.01691897	0.01691897	0.01691897	0.01691897	
COFF K	/	0.00482744	0.00478699	0.00480129	0.00479700		
COFF 'B'	/	60.41593	60.05826	60.25208	60.22513		
COFF Cf	/	0.00120686	0.00119675	0.00120032	0.00119925		
NBR Rey	/	12515.111	12546.131	12549.145	12554.760		
CONTRANT PARIETAL	/	0.000866	0.000865	0.000866	0.000866		
DIAMETRE DH	/	0.173205	0.173005	0.173205	0.173205		
PERIMETRE Pm	/	0.60000	0.60000	0.60000	0.60000		

**TABIEAU VI-28 : GEOMETRIE DEMI CERCLE CREUX PAR UN PETIT DEMI CERCLE (NF=9), RG=0.3m, RP=0.1m.**

METHODES	ANALYTIQ	ELEMENTS FINIS TRIANGULAIRES			ELEMENTS FINIS QUADRILATERALS		
		TYPE / NTEF	T3N / 01	T6N / 03	Q4N / 04	Q8N / 06	
PARAMETRES	/	NNX x NNY	45x45	23x23	45x45	27x26	
		NNT =	2025	2025	2025	2053	
		NEL =	3872	968	1936	650	
		TEMP (s)	15.88 s	51.74 s	30.81 s	141.93 s	
AIRE TOTALE	/	0.12551239	0.12561097	0.12551239	0.12531647		
VITESSE Max	/	5.526580	5.575424	5.524841	5.568197		
VITESSE Moy	/	2.9389005	2.9648986	2.9430792	2.9643876		
POS X VIT MAX	/	-0.00098	-0.00098	-0.00098	-0.00100		
POS Y	/	0.19091	0.19091	0.19091	0.19200		
DEBIT Qv	/	0.36886841	0.37242377	0.36939290	0.37148660		
PERTE ΔH	/	0.01691897	0.01691898	0.01691897	0.01691898		
COFF K	/	0.00116472	0.00114528	0.00116142	0.00114299		
COFF 'B'	/	68.68188	68.18661	68.58436	67.87896		
COFF Cf	/	0.00029118	0.00028632	0.00029035	0.00028575		
NBR Rev	/	58968.454	59536.826	59052.300	59387.007		
CONTRAIINT PARETAL	/	0.001515	0.001516	0.001515	0.001513		
DIAMETRE DH	/	0.303053	0.303291	0.303053	0.302580		
PERIMETRE Pm	/	1.656637	1.656637	1.656637	1.656637		

**TABLEAU VI-29 : GEOMETRIE RECTANGLE CREUX PAR UN PETIT CERCLE NON CENTREE (NF=10), a=0.3m, b=0.5m, R=0.05m, Xc=-a/6, Yc=0.**

METHODES	ANALYTIQ	ELEMENTS FINIS TRIANGULAIRES				ELEMENTS FINIS QUADRILATERALS	
		TYPE / NTEF	T3N / 01	T6N / 03	Q4N / 04	Q8N / 06	
PARAMETRES		NNXx NNY	24x21	13x11	24x21	13x13	
		NNT =	2112	2392	2112	2132	
		NEL =	4032	1144	2016	676	
		TEMP (s)	33.40 s	75.52 s	50.91 s	175.38 s	
AIRE TOTALE	/		0.14215162	0.14216512	0.14215162	0.14216512	
VITESSE Max	/		5.473361	5.492210	5.477124	5.486043	
VITESSE Moy	/		2.7604971	2.7760625	2.7636760	2.7761937	
POS X VIT MAX	/		0.02157	0.02233	0.02157	0.01716	
POS Y	/		0.13277	0.12845	-0.13277	-0.13207	
DEBIT Qv	/		0.39240915	0.39465924	0.39286103	0.39467790	
PERTE ΔH	/		0.016897 90	0.01689791	0.01689790	0.01691897	
COFF K	/		0.00129399	0.00127964	0.00129102	0.00127952	
COFF 'B'	/		70.25364	69.87299	70.17283	69.86968	
COFF CF	/		0.00032350	0.00031991	0.00032275	0.00031988	
NBR Rey	/		54292.108	54603.421	54354.629	54606.004	
CONTRANT PARIETAL	/		0.001485	0.001485	0.001485	0.001485	
DIAMETRE DH	/		0.297053	0.297081	0.297053	0.297081	
PERIMETRE Pm	/		1.91415927	1.91415927	1.91415927	1.91415927	



## CONCLUSION GENERALE ET PERSPECTIVES

L'objectif de ce travail était de procéder à la simulation numérique de l'écoulement d'un fluide visqueux traversant des conduites ayant des sections complexes, soit simplement et multi connexes pour des régimes laminaires, par la méthode des éléments finis, tous en déterminant le champ des vitesses et les pertes de charge subit par le fluide, ainsi que les paramètres dynamiques essentiels de l'écoulement. Permettant ainsi au constructeur aéronautique ou industriel un choix judicieux selon ses critères et les exigences de l'encombrement dans l'avion ou autre.

Une simulation basée sur l'extension de l'analyse mathématique de l'écoulement interne de *Poiseuille* a été adoptée, qui a abouti à un problème de l'équation de *Poisson*.

La modélisation et la discrétisation numériques utilisées sont basées sur la méthode des éléments finis, pour la résolution de l'équation différentielle partielle du second ordre type elliptique dans les domaines complexes. Elle a été largement détaillée.

La mise en œuvre de la méthode des éléments finis par un programme important de calcul, nous a permis de trouver des solutions numériques pour des sections circulaires et non circulaires complexes et même multi connexes, avec une bonne adaptation aux frontières tout en ajustant la précision d'interpolation par l'utilisation de plusieurs types d'éléments finis soit triangulaire à 3, 4 et 6 nœuds et des quadrilatères à 4, 5 et 8 nœuds dans des maillages générés.

Les méthodes de génération de maillage présentées dans ce travail se présentent en deux groupes. Le premier groupe traite les configurations mono-connexes, tel qu'on a élaboré deux procédés l'un pour la génération de maillages type 'H' et un second pour les géométries qui se comportent mieux avec le maillage type 'C'. L'autre groupe présente deux autres méthodes, dont elles sont élaborées pour les configurations plus complexes. Soit doublement connexes par la méthode de génération des maillages type 'O' ; et pour multi connexes, on a adapté la méthode de coupure. Ces dernières se sont avérées plus appropriées pour les domaines plus en plus complexes. Par ailleurs, il est à noter que l'application d'une méthode de génération de maillage est indépendante de la nature mathématique des équations qui régissent le problème physique.

Rappelant que, on a présenté un ensemble de géométries communément utilisées dans les conduites et réalisable industriellement ; tel que, pour un choix d'une section non existante dans notre liste, il suffit de changer les fonctions des frontières d'un domaine existant ou bien d'incorporer uniquement une subroutine pour générer les nœuds du domaine.

Le temps nécessaire pour générer ces maillages représente une petite fraction (moins de 8%) du temps de calcul nécessaire pour la résolution de l'écoulement.

Le problème délicat de stockage des éléments de la matrice de rigidité à rang élevé obtenue après la discrétisation en élément fini, a été traité avec diversité. Tel qu'en premier lieu, on a programmé l'algorithme de stockage bande de type colonne par colonne dans un vecteur, vu la simplicité de ses formules de récurrences, où on a adapté une méthode de résolution directe du système d'équations algébriques, cette méthode est celle de *Khaletsky*.

Mais l'inconvénient majeur réside au niveau de la bande de la matrice de rigidité qui contient encore des cases nulles où atteignent environ 80 à 90 % du nombre de cases total, et au niveau la méthode directe utilisée pour la résolution qui nécessite un temps important de calcul pour les rangs élevés de la matrice.

D'où en deuxième lieu, nos recherches et développement ont abouté l'algorithme final de la méthode de stockage économique complexe après un temps important, tel que la première tentative était avec la procédure de stockage à diagonales séparées. Rappelons que le stockage complexe prend soigneusement toutes les cases non nulles de la partie triangulaire supérieure de la matrice de système à résoudre.

Par suite, l'adaptation d'une méthode itérative est faite avec celle de *Gauss Seidel Accélérée* avec un facteur de relaxation  $\omega$ , permettant la résolution des systèmes à échelle très élevée.

De ce fait, un programme important de calcul donc a été mis au point, permettant de calculer les vitesses axiales de l'écoulement d'un fluide visqueux. Il prend aussi en charge le calcul nécessaire pour l'évaluation des pertes de charge, le débit et les paramètres de l'écoulement à travers les conduites ayant des sections simplement connexes et multi-connexes.

Citant que parmi les choses intéressantes dans le programme réalisé est l'optimisation de déclaration des variables et des vecteurs, ainsi qu'il peut résoudre un problème avec une grande discrétisation possible d'ordre des centaines de milliers, suivant la taille de l'ordinateur disponible.

Cependant, les solutions numériques obtenues ont fait l'objet d'une comparaison avec les résultats analytiques (démontrés) obtenus par d'autres sous programmes élaborés, où ils sont consacrés pour les sections circulaires, rectangulaires, elliptiques et même couronne, dont lesquelles on a pu d'avoir leurs solutions analytiques. D'où la validation a été très satisfaisante lors la comparaison. Ainsi que, d'après la référence [16] de 'FRANK M White -1991', pour une section type deux cylindres non coaxiaux d'une conduite, les résultats obtenus a montré une très bonne concordance avec ceux de la référence [16] pour toutes les dimensions et les excentricités relatives traitées de la géométrie.

Nous avons montré que les vitesses obtenues numériquement sont en générale très proche des vitesses analytiques. Ces vitesses varient en augmentation à partir des frontières des conduites jusqu'à la zone où elles atteignent leur maximum, d'une manière parabolique ou proche d'elle, pour les toutes géométries traitées. Cette variation (augmentation) est due à la présence de la viscosité du fluide véhiculé.

Nous avons remarqué en premier lieu qu'en augmentant la discrétisation, on obtient une meilleure précision et une convergence vers la solution exacte. On peut remarquer aussi que, les solutions obtenues avec des éléments finis de type quadrilatère sont plus précises et meilleures avec un temps d'exécution élevé, que celles avec les éléments de type triangulaire, pour un même nombre total de nœuds. Mais, on constate un ordre de précision assez élevé pour les éléments quadrilatères à 8 nœuds en comparant avec les autres types d'éléments finis pour un même ordre de discrétisation. Il est justifié de fait que l'interpolation avec cet élément est faite avec des polynômes d'ordre supérieur et avec plusieurs termes utilisés dans ces fonctions d'interpolations. Tandis que, pour avoir une précision élevée avec des éléments triangulaires à nombre de nœuds par élément faible, il faut augmenter le nombre d'éléments dans le maillage, mais cela donne un temps du calcul et un nombre d'itérations assez élevées.

Néanmoins, on a constaté d'après les résultats qu'il y a quelques polynômes, utilisés pour l'interpolation numérique, ne donnent pas de solutions (divergent) et d'autres avec des solutions mais moins précises. C'est le cas des éléments finis ayants un nœud dans leurs surfaces (C.à.d les triangles T4N et les quadrilatères Q5N), indiqué au § VI-4.

Les résultats obtenus ont montré que la discrétisation qui nous satisfaire est celle qui donne un nombre total de nœuds NNT supérieur à 1000 nœuds, et qu'il est recommandé de faire une discrétisations qui donne des cellules non trop plates, en d'autres termes des angles internes non très aigus et non très obtus. D'où il vaut mieux d'avoir les discrétisations le long des axes 'X et Y' (c.à.d NNX et NNY) proches entre elles.

L'étude présentée nous a amenés à constater aussi que le coefficient de frottement a un grand influence sur les pertes de charge, et le coefficient  $K$  de ces dernières est fonction de nombre de *Reynolds* et de la forme de la conduite (désigné par le coefficient  $B$ ) et sa surface interne, présentée par la rugosité des parois, où cette dernière a une influence négligeable pour les régimes laminaires.

Constatant aussi qu'il faut choisir la forme de la section des conduites et les paramètres optimaux pour lesquels, on obtient les coefficients de pertes de charge les plus faibles. Alors, des compromis à faire entre le coefficient de la forme géométrique  $B$  et les côtés de la section

(géométrie) choisie, de telle sorte avoir le coefficient  $B$  le plus faible possible, et des côtés qui donnent une section de grande surface et donc un débit volumique et une vitesses moyenne plus importants possibles, tous en diminuant ainsi les énergies et les pressions mise en jeu en pratique.

Comme perspective, il y a lieu de compléter cet axe de recherche en incluant notamment la simulation numérique de l'écoulement dans les conduites pour les régimes établit turbulent et voir l'effet de la rugosité relative sur les pertes de charge. On peut aussi proposer l'étude de l'effet de transfert de chaleur et son développement ; Par exemple l'échauffement d'huile ou de carburant dans l'avion. Ou encore, étudier le cas des impulsions par vibration engendrant un régime non permanent.

Aussi en perspective, des autres méthodes de génération de maillage telles que les techniques de génération par blocs ou par des maillages hybrides peuvent être considérées, pour lesquelles les domaines qui présentent trop d'irrégularité et de complexité.

Enfin, il y a lieu d'ajouter comme perspective, la possibilité de faire une extension des méthodes de résolution par le développement des autres types d'éléments finis à nombre de nœuds plus élevé (9, 12, ...).

Toute fois, ce projet nous a permis d'exploiter nos connaissances théoriques et d'éclaircir un peu sur la procédure et la manière de résoudre un tel problème par la méthode des éléments finis, et de s'améliorer dans la programmation de cette méthode ainsi que de confronter à ses difficultés et ses disciplines, où elle est considérée comme une méthode révolutionnaire dans presque tous les domaines techniques rencontrés dans la pratique mais très délicate vu l'utilisation intensive de numérique et de l'ordinateur. Il nous a permis aussi de voir et d'exploiter les travaux réalisés par des institutions de recherches dans ce domaine.

Finalement, nous espérons que ce travail pourrait servir de base pour un développement ultérieur progressif dans les techniques appliquées aux éléments finis et dans le domaine des écoulements internes dans les conduites et d'être une aide utile aux spécialistes du calcul des pertes de charge dans différents domaines.

**ANNEXE A1**

On essaye de compter les opérations du calcul effectué, par l'algorithme de (V-49) :

**Pour la 1<sup>er</sup> partie on a :**

A°/ La boucle de variation de K dans cette première partie donne :

- 05 opérations de (+ ou -) de deux entiers ou réels.
- 04 opérations de (\* ou /) de deux entiers ou réels. } (j-1) fois

En totale on a : 05 opérations qui se répètent (j-1) fois.

B°/ La boucle de variation de J dans la première partie donne :

- 5\*J-1 opérations de (+ ou -) de deux entiers ou réels.
- 4\*J-2 opérations de (\* ou /) de deux entiers ou réels. } (i-1) Termes

Connaissant que :  $\sum_{j=2}^{j-1} J = \frac{I(I+1)}{2} - 1$ , Alors cette boucle donne :

- $2I^2+I-3$  opérations de (+ ou -) de deux entiers.
- $(I^2+I-2)$  opérations de (\* ou /) de deux entiers.
- $\frac{1}{2}(I^2+I)-1$  opérations de (+ ou -) de deux réels.
- $I(I-1)$  opérations de (\* ou /) de deux réels.

En totale on a :  $\frac{9}{2}I^2 + \frac{3}{2}I - 6$  opérations

C°/ La boucle de variation de I dans la première partie donne :

- $2.I^2+I-1$  opérations de (+ ou -) de deux entiers.
  - $(I^2+I)$  opérations de (\* et /) de deux entiers.
  - $\frac{1}{2}(I^2+I)$  opérations de (+ ou -) de deux réels.
  - $(I^2+I)$  opérations de (\* ou /) de deux réels
- } (B-1) Termes

En totale on a :  $\frac{9}{2}I^2 + \frac{3}{2}I - 2$  opérations qui se répètent (B-1) fois.

Connaissant que :  $\sum_{i=2}^{i-B} I = \frac{B(B+1)}{2} - 1$  et  $\sum_{i=2}^{i-B} I^2 = \frac{1}{3}B^3 + \frac{1}{2}B^2 + \frac{1}{6}B - 1$

Alors la 1<sup>er</sup> partie donne en total le nombre des opérations suivantes :

- $\frac{2}{3}B^3 + \frac{3}{2}B^2 - \frac{1}{6}B - 2$  opérations de (+ ou -) de deux entiers.
- $\frac{1}{3}B^3 + B^2 + \frac{2}{3}B - 2$  opérations de (\* ou /) de deux entiers.
- $\frac{1}{6}B^3 + \frac{1}{2}B^2 - \frac{2}{3}B$  opérations de (+ ou -) de deux réels.
- $\frac{1}{3}B^3 - \frac{1}{3}B$  opérations de (\* ou /) de deux réels.

En totale on a :  $\frac{3}{2}B^3 + 3B^2 - \frac{1}{2}B$  opérations.

Remarque : il faut ajouter une opération de (+ ou -) pour  $I=1$ .

**Pour la 2<sup>ème</sup> partie on a :**

Sans répéter l'idée, on donne directement le nombre total des opérations.  
En totale pour les boucles de K et J, on a :  $8 \cdot J - 8 \cdot I + 8 \cdot B - 2$  opérations.

Sachant que : 
$$\sum_{j=1+2-B}^{I-1} J = \sum_{j=1}^{I-1} J - \sum_{j=1}^{j=1-B+1} J = \frac{I(I+1)}{2} - \frac{1}{2}(I-B+1)(I-B+2)$$

Remarque : la valeur de  $J=1+2-B$  n'est pas tenue en compte

En totale on a :  $4B^2 + 2B - 6$  opérations

C°/ La boucle de variation de I dans la deuxième partie donne :

- $2 \cdot B^2 + 2B - 1$  opérations de (+ ou -) de deux entiers.
  - $\frac{1}{2}(B^2 + B)$  opérations de (\* et /) de deux entiers.
  - $\frac{1}{2}(B^2 + B - 2)$  opérations de (+ ou -) de deux réels.
  - $(B^2 - B)$  opérations de (\* ou /) de deux réels
- }  $i = B + 1, \dots, N$

Alors la 2<sup>ème</sup> partie donne au total les nombres des opérations suivants :

- $(2B^3 + 2B^2 - 1)(N - B) + 2$  opérations de (+ ou -) de deux entiers.
- $\frac{1}{2}(B^2 + B)(N - B) + 2$  opérations de (\* ou /) de deux entiers.
- $\frac{1}{2}(B^2 + B - 2)(N - B)$  opérations de (+ ou -) de deux réels.
- $(B^2 - B)(N - B)$  opérations de (\* ou /) de deux réels.

En totale on a :  $(4B^2 - 2B - 2)(N - B) + 3$  opérations.

Finalement, l'algorithme de factorisation de Khletski effectue le nombre d'opérations suivant :

- $-\frac{4}{3}B^3 + \left(2N - \frac{1}{2}\right)B^2 + \left(2N + \frac{5}{6}\right)B - N$  opérations de (+ ou -) de deux entiers.
- $-\frac{1}{6}B^3 + \left(\frac{1}{2}N + \frac{1}{2}\right)B^2 + \left(\frac{1}{2}N + \frac{2}{3}\right)B$  opérations de (\* ou /) de deux entiers.
- $-\frac{1}{3}B^3 + \left(\frac{1}{2}N\right)B^2 + \left(\frac{1}{2}N + \frac{1}{3}\right)B - N$  opérations de (+ ou -) de deux réels.
- $-\frac{2}{3}B^3 + (1 + N)B^2 - \left(N + \frac{1}{3}\right)B$  opérations de (\* ou /) de deux réels.

En totale on a :  $-\frac{5}{2}B^3 + (4N + 1)B^2 + \left(2N + \frac{3}{2}\right)B - 2N = F(B)$  opérations. (tel que  $B \leq N$ ).

Pour illustrer également un ordre de grandeur sur le nombre des opérations effectuées par la procédure de factorisation, on considère l'exemple suivant

- $N=100 ; \quad F(B) = -\frac{5}{2}B^3 + (401)B^2 + \left(200 + \frac{3}{2}\right)B - 200$
- $B=20 \quad \longrightarrow \quad F(20) = 144\,230$
- $B=50 \quad \longrightarrow \quad F(50) = 699\,875$

**ANNEXE A2**

Illustration des sousroutines de : RempCoffH, CalcVFE, SomAK et Intgr ainsi que la fonction 'F'.

```

SUBROUTINE RempCoffH
  IMPLICIT DOUBLE PRECISION(A-H,O-Z)
  :
  EXTERNAL InvMat
  real*8 invH(8,8)
c  open(1,file='invHf.dat',status='unknown')
c  ***** REPLISSAGE DE LA MATRICE Cof *****
  DO 240 i=1,2+ITYP
    j=i+1 ; IF(j.GT.2+ITYP) j=1
    Cof(1,i)=(xx(i)-xx(j))/2.d0
    Cof(2,i)=(xx(i)+xx(j))/2.d0
    Cof(3,i)=(yy(i)-yy(j))/2.d0
240  Cof(4,i)=(yy(i)+yy(j))/2.d0
c  ** REPLISSAGE DE [H] et CALCUL SON INVERSE [H'] puis stocker dans [H] **
  DO 260 i=1,NNPE
    DO 260 j=1,NNPE
      H(i,j)=0.d0
      DO 250 jj=1,NTERM(j)
        m=Ipuisx(jj,j) ; n=Ipuisy(jj,j)
250  H(i,j)=H(i,j)+(xx(i)**m)*(yy(i)**n)
260  CONTINUE
      CALL InvMat(H,invH,NNPE)
    DO 231 i=1,NNPE
      DO 231 j=1,NNPE
231  H(i,j)=invH(i,j)
c  WRITE(1,'(1x,A)') 'LA MATRICE INVERSE EST:'
c  DO 41 j=1,NNPE
c 41  WRITE(1,22)(H(i,j),i=1,NNPE)
c22  format(1x,4(f15.9)/,5x,4(f15.9)/)
  RETURN
  END
c *****
  SUBROUTINE CalcVFE(i,SF)
  IMPLICIT DOUBLE PRECISION(A-H,O-Z)
  COMMON NNX,NNY,NEL,NNT,NNPE,NTEF,FF,ICL(12100)
  COMMON /com4/ H(8,8),Ipuisx(2,8),Ipuisy(2,8),nterm(8)
  EXTERNAL Intgr ,F
c ***** REPLISSAGE DU VECTEUR VFEi *****
  SF=0.d0
  DO 280 k=1,NNPE
    Sjj=0.d0
    DO 270 jj=1,NTERM(k)
      m=Ipuisx(jj,k) ; n=Ipuisy(jj,k)
      CALL Intgr(Tmn,m,n)
270  Sjj=Sjj+Tmn
280  SF=SF+H(k,i)*Sjj
  RETURN
  END
c *****
  SUBROUTINE SomAK(i,j,SK,Idebut)
  IMPLICIT DOUBLE PRECISION(A-H,O-Z)
  COMMON NNX,NNY,NEL,NNT,NNPE,NTEF,FF,ICL(12100)
  COMMON /com4/H(8,8),Ipuisx(2,8),Ipuisy(2,8),nterm(8)
  EXTERNAL Intgr ,F
c ***** CALCUL DE SK POUR AKEij *****
  SK=0.d0
  DO 360 Ik=Idebut,NNPE

```

```

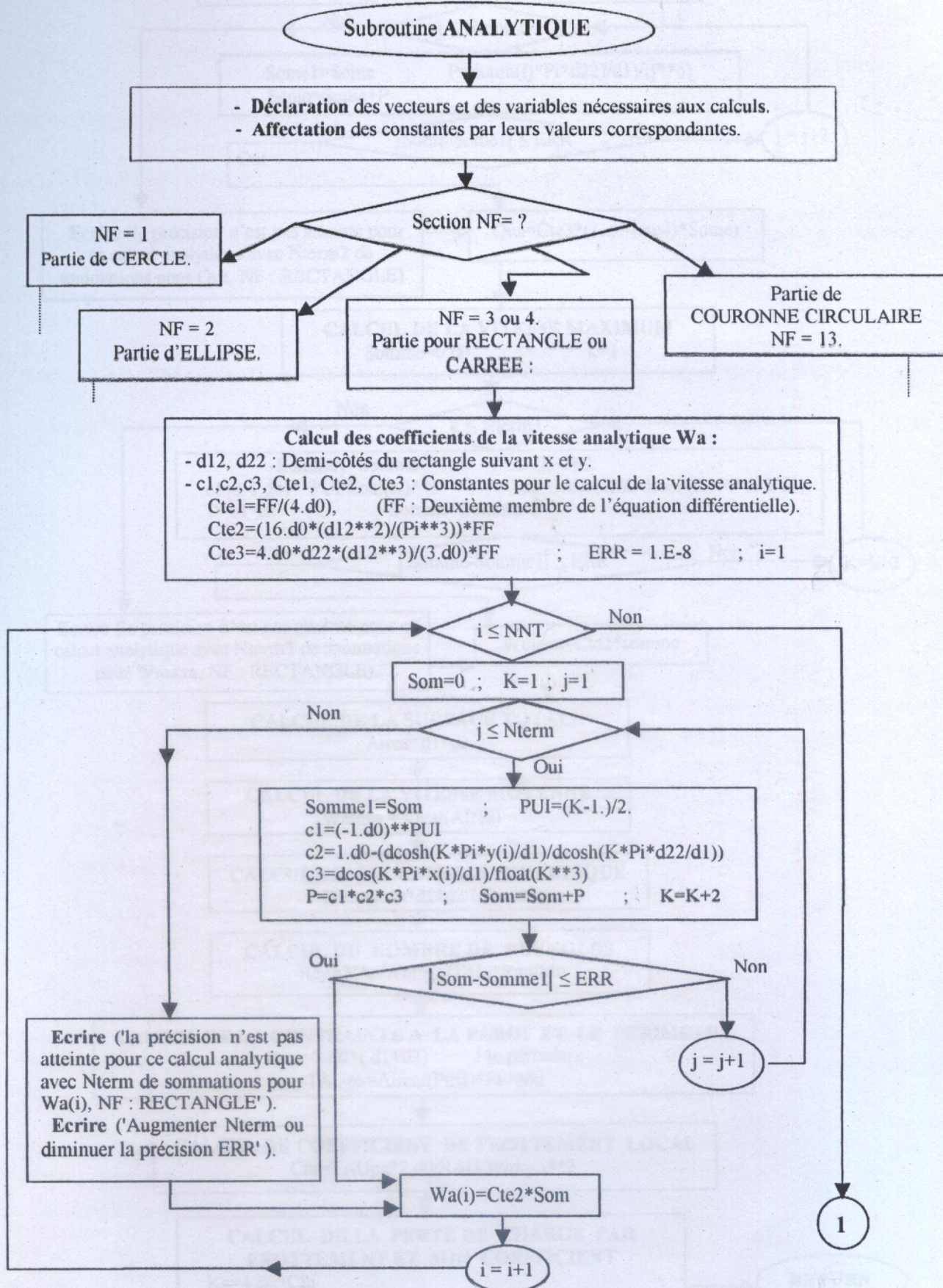
Sm=0.d0
DO 350 Im=Idebut,NNPE
  Sjj=0.d0
  IF(Idebut.EQ.2)THEN
    DO 320 jj=1,NTERM(Ik)
      Sii=0.d0
      IF(Ipuisx(jj,ik).LE.0)GOTO 320
      DO 310 ii=1,NTERM(Im)
        m=Ipuisx(jj,ik)+Ipuisx(ii,im)-2 ; n=Ipuisx(jj,ik)+Ipuisx(ii,im)
        IF(Ipuisx(ii,im).LE.0)GOTO 310
        CALL Intgr(Tmn,m,n)
        Sii=Sii+Ipuisx(ii,im)*Tmn
        WRITE(*,33)ik,i,im,j,m,n,Sii,Sjj
c 310 CONTINUE
320 Sjj=Sjj+Sii*Ipuisx(jj,ik)
      ELSE
        DO 340 jj=1,NTERM(Ik)
          Sii=0.d0
          IF(Ipuisx(jj,ik).LE.0)GOTO 340
          DO 330 ii=1,NTERM(Im)
            m=Ipuisx(jj,ik)+Ipuisx(ii,im) ; n=Ipuisx(jj,ik)+Ipuisx(ii,im)-2
            IF(Ipuisx(ii,im).LE.0)GOTO 330
            CALL Intgr(Tmn,m,n)
            Sii=Sii+Ipuisx(ii,im)*Tmn
330 Sjj=Sjj+Sii*Ipuisx(jj,ik)
340 CONTINUE
          ENDif
          SM=SM+Sjj*H(im,j)
350 CONTINUE
360 SK=SK+Sm*H(ik,i)
33 FORMAT(2(' L',2(1x,I3)), 'I ',2(I2),2(f12.7))
      RETURN
    END
c*****
c*** SUBROUTINE Intgr(som,m,n)
c*** INTEGRATION PAR LA METHODE DE QUADRETURE DE GAUSS-LEGENDRE ***
  IMPLICIT DOUBLE PRECISION(A-H,O-Z)
  COMMON NNX,NNY,NEL,NNT,NNPE,NTEF,FF,ICL(12100)
  COMMON X(12100),Y(12100),VF(11700),W(12100),AD(11700)
  COMMON AE(1100 000),VFE(8),AKE(8,8), Z(12),Wp(12)
  COMMON /com3/ITYP,Legendr,NcasMax,NDLR,Cof(4,4)
  External F
  som=0.d0
  DO 10 k=1,Legendr
10 som=som+WP(K)*F(z(k),m,n)
  IF(n.EQ.-1) WRITE(*,*) 'Vous avez som/0 dans le substr Intgr n=-1'
  som=som/(n+1.d0)
  RETURN
  END
c*****
  FUNCTION F(xx,M,N)
  IMPLICIT DOUBLE PRECISION(A-H,O-Z)
  COMMON /com3/ITYP,Legendr,NcasMax,NDLR,Cof(4,4)
  N1=N+1 ; S=0.d0
  DO 10 i=1,2+ITYP
10 S=S+Cof(1,i)*(Cof(2,i)-Cof(1,i)*xx)**m*(Cof(4,i)-Cof(3,i)*xx)**N1
  F=S
  RETURN
  END

```

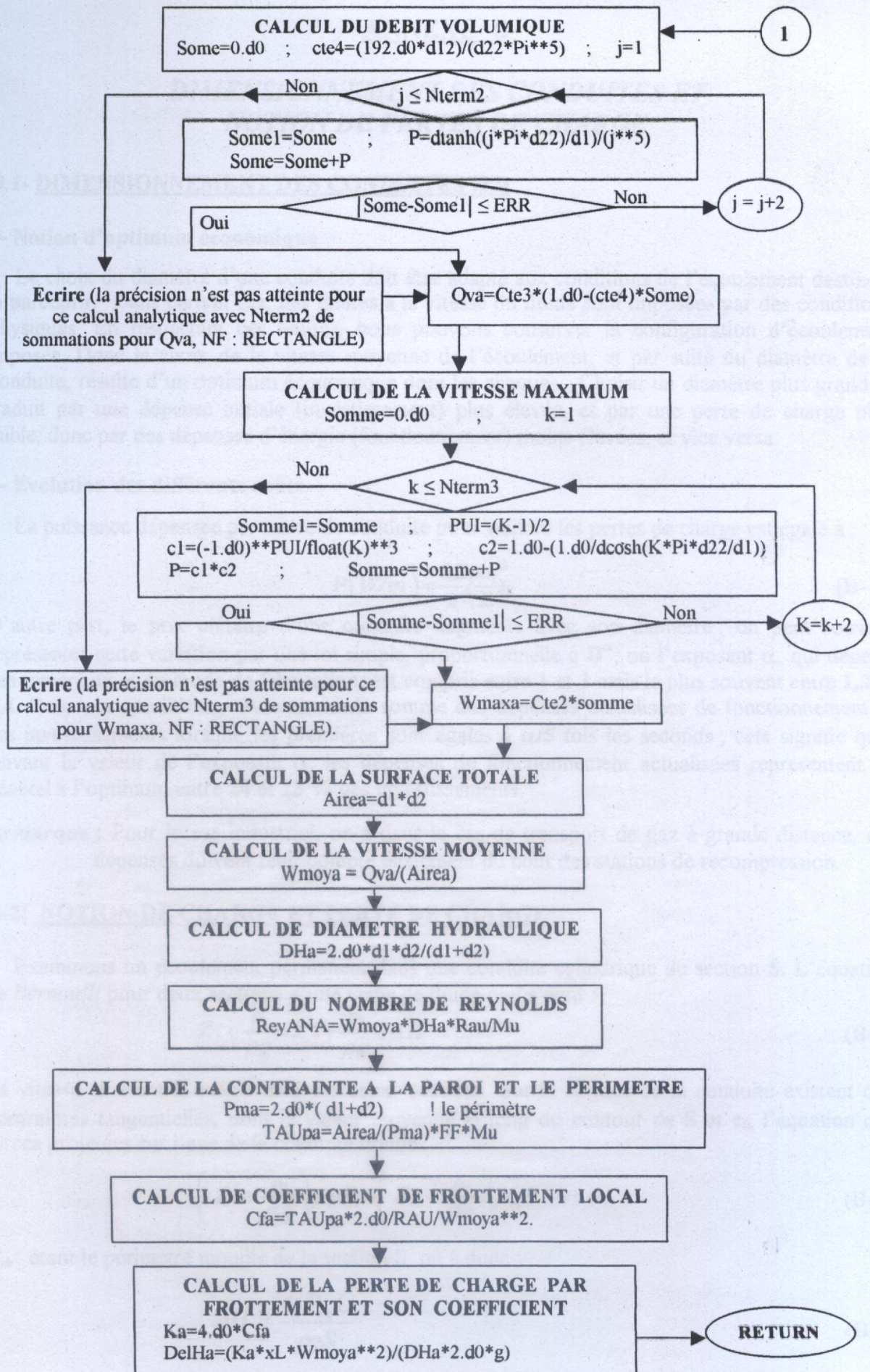
Dans la suite, on montre un organigramme d'une partie de la subroutine ANALYTIQUE.

## Organigramme d'une partie de la subroutine ANALYTIQUE :

Elle correspond au calcul des expressions analytiques du cas de la section rectangulaire ou carrée.







**ANNEXE B****DIMENSIONNEMENT DES CONDUITES ET  
NOTION DE PERTES DE CHARGE****B.1- DIMENSIONNEMENT DES CONDUITES [22]****a- Notion d'optimum économique**

Le choix du diamètre d'une conduite doit être adapté aux conditions de l'écoulement destiné à la parcourir. Dans certain cas, des limites à la vitesse du fluide sont imposées par des conditions physiques. En respectant ces limites, nous pouvons conserver la configuration d'écoulement imposée. Donc le choix de la vitesse moyenne de l'écoulement, et par suite du diamètre de la conduite, résulte d'un optimum économique dont les abaques. Choisir un diamètre plus grand se traduit par une dépense initiale (investissement) plus élevée, et par une perte de charge plus faible, donc par des dépenses d'énergie (fonctionnement) moins élevées, et vice versa.

**b- Evolution des différents coûts.**

La puissance dépensée par mètre de conduite pour vaincre les pertes de charge est égale à :

$$P(W/m) = \frac{8K\rho \cdot q_v^3}{\pi^2 \cdot D^5} \quad (B-1)$$

D'autre part, le prix unitaire d'une conduite augmente avec son diamètre ; on peut souvent représenter cette variation par une loi simple, proportionnelle à  $D^\alpha$ , où l'exposant  $\alpha$ , qui dépend des matériaux et du mode de fabrication, est compris entre 1 et 2 mais le plus souvent entre 1,2 et 1,4. Dans ces conditions, on minimise la somme des dépenses actualisées de fonctionnement et des investissements lorsque les premières sont égales à  $\alpha/5$  fois les seconds ; cela signifie que, suivant la valeur de l'exposant  $\alpha$ , les dépenses de fonctionnement actualisées représentent en général à l'optimum entre 24 et 28 % des investissements.

**Remarque :** Pour le cas industriel, on a dans le cas de transport de gaz à grande distance, ces dépenses doivent tenir compte également du coût des stations de recompression.

**B-2/ NOTION DE CHARGE ET PERTE DE CHARGE**

Examinons un écoulement permanent dans une conduite cylindrique de section  $S$ . L'équation de *Bernoulli* pour deux sections d'une veine de fluide réel s'écrit :

$$Z_1 + \frac{P_1}{\rho g} = Z_2 + \frac{P_2}{\rho g} + \Delta H \quad (B-2)$$

La vitesse  $W$  étant la même dans les deux sections. Sur la surface de la conduite existent des contraintes tangentielles, dont la valeur moyenne le long du contour de  $S$  et  $\tau_0$ , l'équation des forces projetées sur l'axe de la conduite donne :

$$\left( Z_1 + \frac{P_1}{\rho g} \right) \rho g S = \left( Z_2 + \frac{P_2}{\rho g} \right) \rho g S + \tau_0 P_m L \quad (B-3)$$

$P_m$  : étant le périmètre mouillé de la section  $S$ , on a donc :

$$\Delta H = \frac{\tau_0 P_m L}{\rho g S} \quad (B-4)$$

$\tau_0$  dépend que : (analyse dimensionnelle)

- Du type de fluide (les paramètres  $\mu$ ,  $\rho$ ) et vitesse  $W$ .
- De la conduite (matériau), la forme de sa section et la dimension caractéristique  $d$
- De l'état de surface (rugosité relative  $\xi$ ).

$$\tau_0 = f(W, \rho, \mu, d, \xi) \quad (\text{B-5})$$

Pour une forme de section définie il y a 6 variables et 3 dimensions, donc la formule se simplifie en une relation de trois variables dimensionnelles.

Choisissons :

$$\frac{\tau_0}{\rho W^2} : \text{Nombre de Newton}, \quad \frac{\rho W d}{\mu} : \text{Nombre de Reynolds}$$

$$\frac{\lambda}{d} = \xi : \text{Rugosité relative (avec } \lambda : \text{rugosité de la parois).}$$

La relation est de la forme :

$$\frac{\tau_0}{\rho W^2} = f(\Re_e, \xi) \quad (\text{B-6})$$

Les pertes de charge sont donc :

$$\Delta H = \rho W^2 f(\Re_e, \xi) \cdot \frac{P_m \cdot L}{\rho g S} = f(\Re_e, \xi) \cdot \frac{L P_m}{S} \cdot \frac{W^2}{g} \quad (\text{B-7})$$

Le rapport  $R_h = S/P_m$ , appelé le rayon hydraulique il caractérise les dimensions de la section. Pour une conduite circulaire le plus fréquent,  $R_h = d/4$ .

Introduisons la notion de coefficient de perte de charge continues (par frottement)  $K$ .

$$K = 8 f(\Re_e, \xi) \quad (\text{B-8})$$

C'est ce qui permet d'écrire la formule de *DARCY-WEISBACH*, qui permet le calcul des pertes de charge.

$$\Delta H = \frac{K L}{D_H} \cdot \frac{W^2}{2g} \quad (\text{B-9})$$

Avec :  $D_H = 4R_h$  et  $D_H$  : Diamètre hydraulique de la conduite.

Nous aurons finalement :

$$\Delta H = \frac{K L}{4 R_H} \cdot \frac{W^2}{2g} \quad (\text{B-10})$$

C'est la formule de la perte de charge qui sera toujours de la même forme.

Nous proposons, dans ce qui suit, de déterminer le coefficient  $K$ , pour une conduite donnée, et un débit donné, il sera alors facile de calculer tous les éléments qui peuvent nous intéresser : perte de charge, puissance perdue, force appliquée sur les parois, ... etc.

#### a- Calcul du coefficient de pertes de charge par frottement K

Dans les calculs actuels, on se sert du coefficient de perte de charge, il est d'usage commode du fait que, dans les écoulements dynamiquement semblables (similitude), il a la même valeur quelle que soit la nature du fluide, la vitesse de l'écoulement et les dimensions des tronçons considérés.  $K$  qui est la fonction sans dimensions, elle suffit à elle seule à caractériser la perte de charge des conduites géométriquement semblables.

Le problème qui se pose est donc de déterminer la loi de variation  $K=f(\Re_e, \xi)$ . Cette détermination pourra être effectuée théoriquement dans certains cas (écoulement laminaire dans des conduites de sections circulaires), mais en générale il faudrait faire appel à l'expérience.

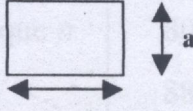
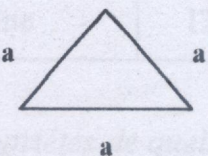
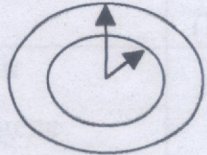
### - Cas des sections circulaires

Le coefficient de perte de charge est fonction du régime d'écoulement et de la rugosité  $\xi$  des parois. Pour les écoulements laminaires des liquides ( $\mathcal{R}_e < 2000$  à  $2500$ ), le coefficient de perte de charge  $K$  pour une section circulaire dépend du seul nombre de Reynolds  $\mathcal{R}_e$  (formule de Hagen-Poiseuille) est égal :

$$K = \frac{64}{\mathcal{R}_e} \quad (\text{B-11})$$

### - Cas des sections non-circulaires

En écoulement laminaire dans des conduites de sections non-circulaires le coefficient numérique de l'équation (B-11) n'est plus égal à 64 ; sa valeur dépend de la forme de la section ; dans quelques cas simples on peut calculer la valeur de ce coefficient on donne des exemples ci dessous où il peut varier de 47 à 96, [27].

Forme de la conduite	Nombre de Reynolds $\mathcal{R}_e$	Coefficient de perte de charge $K$
	$\mathcal{R}_e = \frac{Ua}{\nu}$	$K = \frac{57}{\mathcal{R}_e}$
	$\mathcal{R}_e = \frac{Ua}{\sqrt{3}\nu}$	$K = \frac{53}{\mathcal{R}_e}$
	$\mathcal{R}_e = \frac{U[2.(R_2 - R_1)]}{\nu}$	$K = \frac{64 \cdot F(R_1, R_2)}{\mathcal{R}_e}$

### B-3/ INFLUENCE DE LA RUGOSITE

Dans le cas des conduites rugueuses, l'écoulement autour des aspérités se produit avec un décollement de la veine, et le coefficient de perte de charge commence à dépendre non seulement du nombre de Reynolds  $\mathcal{R}_e$ , mais aussi de la rugosité relative. Pratiquement, les conduites à parois lisses ou rugueuses. En outre, la rugosité peut être homogène ou non.

Les deux formes de rugosité diffèrent par la forme des aspérités, leurs dimensions, les intervalles entre elles, etc. La rugosité alors dépend :

- Du matériau et du procédé de fabrication des conduites (exemple, les conduites en fonte, fabriquées par coulée centrifuge, sont plus lisses que les conduites coulées par des procédés ordinaires, les conduites entièrement étirées sans soudure sont moins rugueuses que les conduites soudées)
- De la nature du fluide qui s'écoule dans la conduite ; l'influence du fluide sur la surface interne peut se manifester par l'apparition de corrosion.
- De la durée de service des conduites.

**ANNEXE C :****CARACTERISTIQUES DES FLUIDES USUELLES****1/ PROPRIETES IMPORTANTES DE QUELQUES FLUIDES :****Tableau N°1 :** *Propriétés de quelques liquides à 20 °C*

Liquide	$\rho$ (Kg.m <sup>-3</sup> )	$10^3 \cdot \mu$ (Pa.s)	$10^6 \cdot \nu$ (m <sup>2</sup> .s <sup>-1</sup> )	$C_p$ Kj.kg <sup>-1</sup> .°C <sup>-1</sup>
Eau	997	1.00	1.00	4.205
Aniline	1020	4.4	4.3	2.00
Fréon 12	1315	0.26	0.198	0.975
Alcool Butylique <i>n</i>	806	3.10	3.85	2.34
Benzène	881	0.65	0.74	1.70
glycérine	1260	1.7	1.35	2.35

**Tableau N°2 :** *propriétés de quelques gaz à 20 °C et à la pression normale.*

Gaz	$\rho$ (Kg.m <sup>-3</sup> )	$10^6 \cdot \mu$ (Pa.s)	$10^6 \cdot \nu$ (m <sup>2</sup> .s <sup>-1</sup> )	$C_p$ Kj.kg <sup>-1</sup> .°C <sup>-1</sup>
Air	1.205	18.2	15.1	1.004
Oxygène	1.332	20.2	15.2	0.920
Azote	1.174	18.8	18.1	1.040
hydrogène	0.0833	8.85	106.0	14.30
Dioxyde de carbone	1.834	14.8	8.07	0.824
Hélium	0.167	18.7	112.0	5.19

Pour l'indication des symboles, voir la liste des symboles.

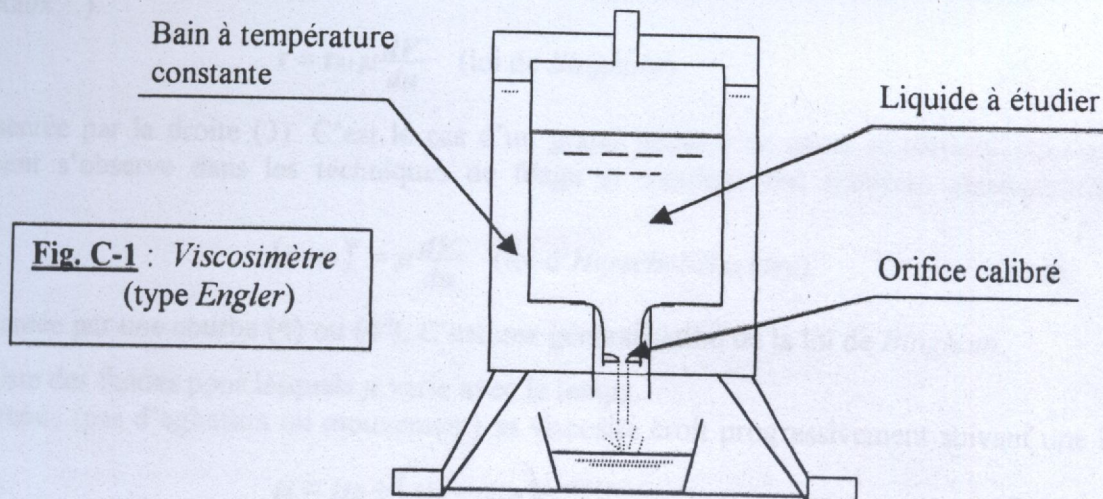
**2/ MESURE DE LA VISCOSITE DES LIQUIDES (VISCOSIMETRE)**

Les appareils utilisés pour la mesure précise de la viscosité  $\mu$  (par la formule de Poiseuille) sont des viscosimètres.

Ils comportent un récipient pourvu à sa partie inférieure d'un orifice calibré ( Fig. C-1). Le liquide à étudier est placé dans le récipient et on mesure le temps nécessaire à l'écoulement d'un volume déterminé du liquide. Le coefficient de viscosité étant très sensible à la température, le récipient est généralement placé à l'intérieure d'un bain maintenu à température constante.

Tous les modèles de viscosimètres correspondent au schéma de principe suivant (Fig.C-1) et ne diffèrent que par des détails constructifs.

Exemple :



On utilise le plus souvent : le viscosimètre *Engler* (France et Allemagne) au moyen duquel on définit le degré *Engler* qui est le rapport du temps nécessaire à l'écoulement de 200 cm<sup>3</sup> du liquide à étudier à travers un orifice calibré, au temps nécessaire à l'écoulement de 200 cm<sup>3</sup> d'eau à 20°C à travers le même orifice (ce dernier temps est de 51 secondes pour l'appareil *Engler*).

Il y a aussi l'appareil Viscosimètre *Redwood standard* (Angleterre) et le viscosimètre *Say-bolt Universal* (Etats-Unis) et d'autres moins utilisées.

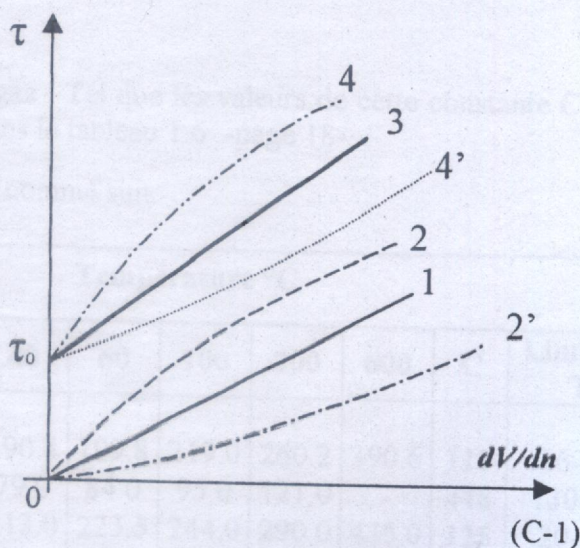
### 3/ LIMITATION DE LA LOI DE NEWTON (INTRODUCTION A LA RHEOLOGIE)

Représentons la contrainte tangentielle  $\tau$  en fonction du gradient de Vitesse  $dV/dn$  (fig.C-2) comme suit :

L'axe des abscisses ( $\tau = 0$ ) traduit le comportement du fluide parfait.

L'axe des ordonnées ( $dV/dn = 0$ ) traduit le comportement du solide élastique au sens de la théorie de l'élasticité.

**Fig. C-2 :** Evolution de la contrainte  $\tau$  en fonction du gradient de vitesse pour différents fluides



On a :

a) la formule de *Newton*  $\tau = \mu \frac{dV}{dn}$

est représentée par une droite (1) passant par l'origine ; on a affaire à un fluide visqueux newtonien (qu'on a étudié son écoulement dans ce mémoire), qui représente la majorité des fluides que nous traitons.

Le comportement de certains autres fluides correspond à des lois différentes dont nous citerons les principales :

b) la formule

$$\tau^n = \mu \frac{dV}{dn}, \quad n \neq 1 \quad (\text{C-2})$$

Représentée par une courbe (2) ou (2') (Fig.C-2). Ces fluides présentent une viscosité de structure (non linéaire) caractérisée par une « pseudo-viscosité »  $\mu$  résultant de l'orientation et de la déformation des micelles colloïdales sous l'action des forces hydrodynamiques [27].

C'est le cas de nombreuses solutions colloïdales (encres, peintures, vernis, lait, sang, crème, latex végétaux...).

$$c) \quad \tau = \tau_0 + \mu \frac{dV}{dn} \quad (\text{loi de Bingham}) \quad (C-3)$$

Représentée par la droite (3). C'est le cas d'un grand nombre de pâtes et matière plastique. L'écoulement s'observe dans les techniques de filage et moulage des matières plastiques par extrusion.

$$d) \quad (\tau - \tau_0)^n = \mu \frac{dV}{dn} \quad (\text{loi d'Herschel-Buckley}). \quad (C-4)$$

Représentée par une courbe (4) ou (4'). C'est une généralisation de la loi de Bingham.

e) Il existe des fluides pour lesquels  $\mu$  varie avec le temps.

Tel qu'au repos (pas d'agitation ou mouvement) sa viscosité croît progressivement suivant une loi

$$\text{de la forme :} \quad \mu = \mu_b + (\mu_a - \mu_b) e^{-t/t_0} \quad (C-5)$$

Où le «  $t_0$  » le temps de relaxation caractéristique du fluide et  $\mu_a < \mu_b$ . On dit que le fluide est thixotropique, c'est le cas des argiles, bitumes, silicones, colles, graisses... [27].

#### 4/ CALCUL DE VISCOSITE DYNAMIQUE POUR LES GAZ :

La relation entre la  $\mu$  des gaz et la température pour une pression atmosphérique ou modérée peut s'exprimer approximativement par la formule de « Sutherland » :

$$\mu = \mu_0 \frac{273+C}{T+C} \left( \frac{T}{273} \right)^{2/3} \quad (C-6)$$

Où  $\mu_0$  : Viscosité dynamique des gaz à 0°C.

T : température en °K.

C : constante dépendant de la nature du gaz . Tel que les valeurs de cette constante C sont données pour divers gaz dans la référence [26] dans le tableau 1.6 -page 18-.

De la, on donne une petite partie de ce tableau comme suit.

Viscosité dynamique (micro.poise)		Température °C									
Gaz	formule	-20	0	20	40	60	100	200	600	C	Limite de T°
Air	-	162.0	171.2	180.9	190.4	199.8	219.0	260.2	390.6	111	16-825
Benzol	C <sub>6</sub> H <sub>6</sub>	62.0	68.0	73.5	79.0	84.0	95.0	121.0	-	448	130-313
Oxygène	O <sub>2</sub>	181.5	192.0	202.5	213.0	223.5	244.0	290.0	435.0	125	20-280
Azote	N <sub>2</sub>	157.5	166.0	174.8	183.5	192.5	208.2	246.0	366.0	104	25-280
Hydrogène	H <sub>2</sub>	80.4	84.0	88.0	91.8	95.9	103.0	121.0	183.0	71.0	20-100
Gaz carbonique	CO <sub>2</sub>	128.0	138.0	147.0	157.0	167.0	184.5	226.0	362.0	254	-
Ammoniac	NH <sub>3</sub>	86.0	93.0	100.5	107.8	114.5	128.0	-	-	503	20-300
Vapeur d'eau	H <sub>2</sub> O	82.0	89.3	96.7	104.0	111.3	126.0	160.4	314.5	961	20-406
.....											

**Tableau N°3 :** Viscosité dynamique des gaz, en Micro-poises à la pression atmosphérique, en fonction de la température et valeurs de la constante C de la formule de SUTHERLAND [26].

## ANNEXE D

### INTEGRATION NUMERIQUE PAR LA METHODE DE « GAUSS-LEGENDRE »

#### 1/ INTEGRATION NUMERIQUE

Dans la mise en œuvre de la méthode des éléments finis, et vu que l'intégration numérique fait une partie intégrante de cette méthode, on a opté la méthode de *GAUSS-LEGENDRE* puisqu'elle est la plus utilisée et efficace que d'autres méthodes comme celle de *NEWTON-CÔTE* ou *SIMPSON*...

Dans la méthode de *GAUSS-LEGENDRE*, les « r » poids «  $Wp_i$  » et les « r » abscisses  $\xi_i$  sont déterminés de manière à intégrer exactement des polynômes d'ordre ' $m \leq 2r-1$ ', [23].

#### 1-a/ Détermination des poids « $Wp_i$ » et des abscisses $\xi_i$ :

Si 'F' est une fonction polynomiale de degré ' $m \leq 2r-1$ ', nous pouvons l'intégrer exactement par la méthode de GAUSS-L sur l'intervalle [-1, +1] :

$$\int_{-1}^{+1} F(\xi) d\xi = \sum_{i=1}^r Wp_i F(\xi_i) \quad (D-1)$$

l'équation (D-10) est donc vérifiée pour le polynôme suivant :

$$F(\xi) = a_1 + a_2\xi + a_3\xi^2 + \dots + a_{2r}\xi^{2r-1} \quad (D-2)$$

Pour déterminer les poids  $Wp_i$  et les abscisses  $\xi_i$  qui sont aussi des inconnus, nous portons l'expression (D-2) dans (D-1), nous aurons alors :

$$\begin{aligned} a_1 \int_{-1}^{+1} d\xi + a_2 \int_{-1}^{+1} \xi d\xi + a_3 \int_{-1}^{+1} \xi^2 d\xi + \dots + a_{2r} \int_{-1}^{+1} \xi^{2r-1} d\xi &= a_1 (W_1 + W_2 + \dots + W_r) + \\ a_2 (W_1 \xi_1 + W_2 \xi_2 + \dots + W_r \xi_r) + \dots &+ a_{2r} (W_1 \xi_1^{2r-1} + W_2 \xi_2^{2r-1} + \dots + W_r \xi_r^{2r-1}) \end{aligned} \quad (D-3)$$

Pour que (D-3) soit identiquement vérifiée pour tout  $a_1, a_2, \dots, a_{2r}$ , il faut que :

$$\int_{-1}^{+1} \xi^\alpha d\xi = \frac{2}{\alpha+1} = \sum_{i=1}^r W_i \xi_i^\alpha \quad \alpha=0,2,4,\dots,2r$$

$$\int_{-1}^{+1} \xi^\alpha d\xi = 0 = \sum_{i=1}^r W_i \xi_i^\alpha \quad \alpha=1,3,5,\dots,2r-1$$

Soit :

$$\begin{aligned} 2 &= W_1 + W_2 + \dots + W_r \\ 0 &= W_1 \xi_1 + W_2 \xi_2 + \dots + W_r \xi_r \\ 2/3 &= W_1 \xi_1^2 + W_2 \xi_2^2 + \dots + W_r \xi_r^2 \\ &\vdots \\ 0 &= W_1 \xi_1^{2r-1} + W_2 \xi_2^{2r-1} + \dots + W_r \xi_r^{2r-1} \end{aligned} \quad (D-4)$$

Le système (D-4) est linéaire en  $W_i$  et non linéaire en  $\xi_i$ , il détermine les 2r paramètres de (D-1) sous les conditions :

$$\left. \begin{aligned} W_i &> 0 \\ 0 &< \xi_i < 1 \end{aligned} \right\} \quad i = 1, 2, 3, \dots, r$$

Les abscisses  $\xi_i$ , solution de (D-4) sont aussi les racines du polynôme de *LEGENDRE* d'ordre 'r' :



$P_r(\xi) = 0$ , défini par la formule de récurrence :

$$\left. \begin{aligned} P_0(\xi) &= 0 \\ P_1(\xi) &= \xi \\ &\vdots \\ P_k(\xi) &= \frac{2k-1}{k} \xi \cdot P_{k-1}(\xi) - \frac{k-1}{k} P_{k-2}(\xi) \end{aligned} \right\} k = 1, 2, \dots, r \quad (D-5)$$

Les poids  $W_i$  sont donnés par [23] :

$$W_i = \frac{2(1-\xi_i^2)}{(r \cdot P_{r-1}(\xi_i))^2} \quad i = 1, 2, \dots, r \quad (D-6)$$

L'erreur d'intégration est donnée par :

$$e = \frac{2^{2r+1} (r!)^4}{(2r+1) (2r)!^3} \frac{d^{2r} F}{d\xi^{2r}} \quad (D-7)$$

Le tableau suivant donne les valeurs des abscisses  $\xi_i$  et des poids  $W_i$  pour :  $r=1$  jusqu'à '7'. Les abscisses  $\xi_i$  sont symétrique par rapport à  $\xi_i = 0$ . Les poids  $W_i$  correspondant à deux points symétriques sont égaux : (la précision est de l'ordre  $10^{-19}$ )

r	$\xi_i$	$W_i$
1	0.000000 000000 000000	2.000000 000000 000000
2	± 0.577350 269189 625764	1.000000 000000 000000
3	± 0.774596 669241 483377 0.000000 000000 000000	0.555555 555555 555555 0.888888 888888 888888
4	± 0.861136 371594 052575 ± 0.339981 043584 856264	0.347854 845137 453857 0.652145 154862 546142
5	± 0.906179 845938 663992 ± 0.538469 310105 683091 0.000000 000000 000000	0.236926 885056 189087 0.478628 670499 366468 0.568888 888888 888888
6	± 0.932469 514203 152027 ± 0.661209 366466 264513 ± 0.238619 185083 196908	0.171324 492379 170345 0.360761 573048 138607 0.467913 934572 691047
7	± 0.949107 912342 758524 ± 0.741531 185599 394439 ± 0.405845 151377 397166 0.000000 000000 000000	0.129484 966168 869693 0.279705 391489 276667 0.381830 050505 118944 0.417959 183673 469387

**Tableau 1** : Les abscisses  $\xi_i$  et les poids  $W_i$  de l'intégration numérique par la méthode de GAUSS-LEGENDRE, pour :  $r = 1$  jusqu'à '7'

### 1-b/ Généralisation à un intervalle d'intégration quelconque

Jusqu'à présent, nous avons présenté la méthode de GAUSS-L dans l'intervalle  $[-1, +1]$  sans nous soucier de sa généralisation à un intervalle quelconque  $[a, b]$  sur lequel 'F' est définis. Avec un changement de variable approprié, une intégrale du type suivante, peut facilement se ramener à une intégrale sur l'intervalle  $[-1, +1]$ .

$$\int_a^b F(x) dx \quad (D-8)$$

Le changement de variable qu'il faudrait opérer est le suivant :  $x = \frac{b-a}{2} \cdot \xi + \frac{b+a}{2}$

Après remplacement de x par sa valeur, l'intégrale (D-8) s'écrit :

$$\int_a^b F(x) dx = \frac{b-a}{2} \int_{-1}^{+1} F(x(\xi)) d\xi$$

Que nous pouvons l'évaluer par la méthode de GAUSS-LEGENDRE.  
 D'après ce qui précède, nous pouvons évaluer l'intégrale double suivante :

$$I = \int_a^b \int_c^d F(x,y) dx dy \tag{D-9}$$

Avec cette méthode, tous on utilisant dans chaque direction (x et y) une intégration numérique à une dimension. Pour cela, nous devons opérer un changement de variables :

$$\begin{matrix} x = x(\xi) \\ y = y(\eta) \end{matrix} \quad \text{avec} \quad \begin{cases} a \leq x \leq b \\ c \leq y \leq d \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} -1 \leq \xi \leq +1 \\ -1 \leq \eta \leq +1 \end{cases}$$

Alors :

$$\begin{aligned} x &= \frac{b-a}{2} \cdot \xi + \frac{b+a}{2} \\ y &= \frac{d-c}{2} \cdot \eta + \frac{d+c}{2} \end{aligned}$$

Après remplacement de x et y par leurs nouvelles expressions dans (D-9), l'intégrale 'I' s'écrit de la manière suivante :

$$\begin{aligned} I &= \left(\frac{b-a}{2}\right) \left(\frac{d-c}{2}\right) \int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} F(x(\xi), y(\eta)) d\xi d\eta \\ &= \left(\frac{b-a}{2}\right) \left(\frac{d-c}{2}\right) \sum_{i=1}^{r_1} \sum_{j=1}^{r_2} W_i W_j F(x(\xi_i), y(\eta_j)) \end{aligned} \tag{D-10}$$

Avec r<sub>1</sub> points dans le sens de 'x' et r<sub>2</sub> points dans le sens de 'y', la méthode de GAUSS-L permet d'intégrer exactement le produit d'un polynôme en x d'ordre 2r<sub>1</sub>-1 et d'un polynôme en y d'ordre 2r<sub>2</sub>-1.

**Remarque :**

Les termes :  $\left. \begin{matrix} \frac{b-a}{2} \\ (b-a) \left(\frac{d-c}{2}\right) \\ \frac{(b-a)^2(d-c)}{4} \end{matrix} \right\}$  intégration à une dimension ou intégration double

Sont constants, parce que les limites d'intégration sont constantes. En effet, ce sont les déterminants des matrices Jacobiennes des transformations :

$$\begin{matrix} (x) & \xrightarrow{\tau_1} & (\xi) \\ (x, y) & \xrightarrow{\tau_2} & (\xi, \eta) \end{matrix}$$

Exemple :  $[J_2] = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \xi} \\ \frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial y}{\partial \eta} \end{bmatrix}$

Les déterminants de ces matrices peuvent ne pas être constants. Dans ce cas nous n'avons pas le droit de les faire sortir des signes « ∑ » somme, et ils doivent être évalués aux points d'intégration de GAUSS-L. La forme d'intégration devient :

$$\begin{aligned} I &= \int_{\Omega} F(x,y) dx dy \\ &= \left(\frac{b-a}{2}\right) \left(\frac{d-c}{2}\right) \int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} F(x(\xi), y(\eta)) Det[J(\xi, \eta)] d\xi d\eta \\ &= \left(\frac{b-a}{2}\right) \left(\frac{d-c}{2}\right) \sum_{i=1}^{r_1} \sum_{j=1}^{r_2} W_i W_j F(x(\xi_i), y(\eta_j)) Det[J(\xi, \eta)] \end{aligned} \tag{D-11}$$

**ANNEXE E****E1 : MENUS DES CHOIX DES POSSIBILITES D'INPUT**

\*\*\*\*\* MENU PRINCIPAL DES DIFFERANTES SECTIONS: \*\*\*\*\*

- 1: CERCLE      2: CARREE      3: RECTANGLE      4: ELLIPSE
- 5: DEMI CERCLE    6: QUART OU SECTEUR DE CERCLE
- 7: PROFIL D'AILE    8: HEXAGONE
- 9: DEMI-CERCLE CREUX
- 10: RECTANGLE MOINS UN CERCLE CENTREE OU NON
- 11: GEOMETRIE COMPLEXE AU FRONTIERE
- 12: RECTANGLE MOINS UN DEMI-CERCLE AU COTEE BAS
- 13: GRAND CERCLE MOINS UN PETIT CERCLE AU CENTRE
- 14: GRAND CERCLE MOINS UN PETIT CERCLE NON CENTRE

0: POUR QUITER.

CHOISISSEZ UN DE CES NOMBRES (0,1,2...14)

\*\*\*\*\*

?

\*\*\*\*\* MENU DE DIFFERANTS TYPES D'ELEMENTS FINIS: \*\*\*\*\*

- 1: TRIANGLE A 3 NOEUDS (AUX SOMMETS)
- 2: TRIANGLE A 4 NOEUDS (3 AUX SOMMETS ET 1 AU CENTRE)
- 3: TRIANGLE A 6 NOEUDS (AUX SOMMETS ET AU MILIEU DES COTES)
- 4: QUADRILATERAL A 4 NOEUDS (AUX SOMMETS)
- 5: QUADRILATERAL A 5 NOEUDS (...+ 1 AU CENTRE)
- 6: QUADRILATERAL A 8 NOEUDS (AUX SOMMETS ET AU MILIEU DES COTES)
- 7: ...

0: POUR QUITER.

CHOISISSEZ UN DE CES NOMBRES (0,1,2...6)

\*\*\*\*\*

?

\*\*\*\*\* MENU DE DIFFERANTS METHODES DE RESOLUTION: \*\*\*\*\*

CHOISISSEZ UNE DE CES METHODES POUR LA RESOLUTION DU SYSTEME D'EQUATIONS DU PROBLEME, QUI SONT :

- 1: METHODE DIRETE DE KHALITSKI AVEC UN STOCKAGE BANDE
- 2: METHODE ITERATIVE DE GAUSS-Seidl ACCELERI AVEC RELAXATION  
ET LE STOCKAGE EST COMPLEXE ALIATOIRE

0: POUR QUITER.

\*\*\*\*\*

?

## E2 : LISTE DE SIGNIFICATION DE QUELQUES PRINCIPAUX VARIABLES ET SYMBOLES DU PROGRAMME

### VARIABLES DU PROGRAMME PRINCIPAL :

AE:	vecteur contenant toutes les valeurs non nuls de la demi-bande supérieure de [K] (et non diagonaux pour le stockage complexe ou avec les valeurs diagonaux pour le stockage bande).
AD:	vecteur contenant les valeurs de la diagonale principale de la matrice globale [K].
AFE:	Vecteur force élémentaire d'un élément fini typique.
AKE:	Matrice de rigidité élémentaire d'un élément fini typique
AAE:	Vecteur qui stocke les surfaces de chaque élément du maillage.
Aire:	Surface totale de la géométrie.
FF:	Second membre de l'équation différentielle discrétisée.
IL(.):	vecteur où on stocke le nombre de cases de AE dans chaque ligne de la matrice globale.
IC(.):	vecteur pour stocker l'indice de colonne des éléments de 'AE'.
NEL:	Nombre d'Eléments finis du maillage.
NNT:	Nombre de Nœuds Total dans un maillage..
NNX:	Nombre de nœuds dans la direction de l'axe 'X'
NNY:	Nombre de nœuds dans la direction de l'axe 'Y'
NNPE:	Nombre de Nœuds Par Elément fini du maillage.
NTEF:	Numéro du type d'élément fini opté.
NNE:	Matrice pour stocker les numéros globaux des nœuds de chaque élément.
NF:	Numéro du fichier de la géométrie du domaine choisie.
NCAS:	Nombre de cases du vecteur représentant la matrice de rigidité globale.
NGNR:	vecteur indiquant le numéro global des nœuds restants dans la matrice de rigidité.
X,Y:	Vecteurs pour stocker les positions des nœuds du maillage.
W:	Vecteur solution du système d'équations du problème.

### VARIABLES LIE AUX SOUBROUTINES

i,j,k,l,m:	Des compteurs des boucles de calcul.
TITA:	Angle qui donne la position du premier nœud de discrétisation.
C, RR, :	Rapport entre les rayons d'un ellipse ou couronne ou autre le long de l'axe x et y
R1, R2:	Les rayons d'une géométrie donnée le long de l'axe x et y.
DELXI, DELXJ:	Le pas ( $\delta$ ) de maillage dans la direction 'X' sur les boucles i et j
DELY:	Le pas (delta $\delta$ ) dans le maillage dans la direction 'Y'.
A, B:	Les arrêtes des géométries dans les directions 'X' et 'Y'
XG, YG:	Les coordonnées de l'origine du repère de discrétisation
DX, DY:	Le pas ( $\delta$ ) dans le maillage dans les directions 'X' et 'Y'.
NDDLRL:	Nombre de Degrés De Liberté Restants du problème. (subroutine DEGLIBR).
NDDLE:	Nombre de Degrés De Liberté Eliminés.
NPCNN:	Numéro du Premier Case Non Nulles sur la diagonale de la ligne considéré
NDCNN:	Numéro de la Dernière Case Non Nulles de la même ligne.
Ncase:	Dimension de vecteur {Vk} nécessaire pour la matrice [K].
Nterm:	Matrice de Nombre de termes existants dans chaque partie de la fct. d'interpolation
NZERO:	Nombre des zéros qui se trouvent à l'extérieure de la bande.
IP:	La valeur de la plus petite différence entre la numérotation d'un élément typique
IG:	La valeur de la grande différence entre la numérotation d'un élément typique.
ALPHA, BETA, GAMA:	Vecteurs qui servent aux calculs des coefficients des fonctions d'interpolations (ELEMTRIANG).
NUMI, NUMJ:	Numéro du $i^{eme}$ et $j^{eme}$ nœud d'un élément fini K(ELEMTRIANG).

- IPOS, JPOS, KPOS : Variables servant au stockage type bande.
- IBAP : Largeur de la demi-bande après l'application des conditions aux limites (la réduction).
- IBAV : Largeur de la demi-bande de la matrice de rigidité avant la réduction.
- IGNR(.) : vecteur indique les Indices de la numérotation globale des nœuds restant du vecteur NGNR
- XpuiSI, YpuiSI : Puissances de 'x' et 'y' de la fonction d'interpolation de l'équation (III-50).
- SPX, SPY : sont les Sommes des Puissances du terme 'x' et du terme 'y'.
- U : pour stocker le résultat de  $W^{(r)}$  de l'itération précédente (r).
- ITYP : Indice qui égale à '1' pour indiquer un élément fini type triangle ou bien égale à '2' pour indiquer un élément fini type quadrilatère.
- NDCE : Nombre De Case Eliminée.
- NCNN : Nombre des Cases Non Nuls.
- T3N, T4N, T6N : Pour un triangle à 3, 4 ou 6 nœuds.
- Q4N, Q5N, Q8N : Quadrilatère à 4, 5 ou 8 nœuds.
- ICL : Vecteur indique les nœuds de frontière lorsque =1, sinon si il égale à 0 pour les nœuds interne.
- NcasMax : nombre total de case 'e' stocker dans AE
- NIT : Nombre d'itération appliquée.
- NITRMAX : Nombre maximum d'itérations autorisées si la précision désirer n'est pas atteinte.
- SAP(i) : vecteur pour stocker les résultats de l'itération actuelle multiplier par les coefficients de [K], (Somme Après les calculs).
- EPS : Erreur maximale entre deux itérations successives.
- EPSMAX : Erreur absolue acceptée.
- xx(i), yy(i) : Vecteurs des coordonnées locales pour chaque élément fini.
- IFILT : Variable qui indique que l'option de filtrage est retenue ou ignorée.

**BIBLIOGRAPHIE** “”

- [1] W.F Hughes & E.W Gaylord.  
« *Basic Equations Of Engineering Science* »  
Schaums Outline series. Mc Graw-Hill Book company, (1964).
- [2] GOURI Dhatt & GILBERT Touzot.  
« *Une présentation de la méthode des éléments finis* »  
Université LAVAL, Maloine S.A. Editeur, Paris (1981).
- [3] INGE L. RYMING  
« *Dynamique des Fluides* »  
PRESSES POLYTECHNIQUES ROMANDES, Paris (1982)
- [4] RONALDS L. Panton.  
« *Incompressible Flow* »; 2<sup>nd</sup> Edition printed in U.S.A, Texas (1996).
- [5] R. OUZIAUX & J. Perrier  
« *Mécanique Des Fluides Appliquée* ».  
Dunod Université, 3<sup>e</sup> Edition -BORDAS, Paris 1978
- [6] R. COMOLET.  
« *Mécanique Des Fluides (Expérimentale)* », Dynamique des fluides réels, Tome II  
3<sup>ème</sup> Edition ©Masson - Paris, (1982 ).
- [7] N.J. HOFF  
« *Analysis Of Structures* ». Wiley, New York, (1956).
- [8] Pierre Arnaud RAVIART & Robert DAUTRY.  
« *Les Méthodes D'éléments Finis En Mécanique Des Fluides* ».  
Editions EYROLLES, saint German, Paris (1981).
- [9] M. TURNER, R.W.CLOUGH, H.MARTIN & L.J.TOPP  
« *Stiffness And Deflection Analysis Of Complex Structures* ».  
Journal of Aeronautical science, Vol. 23, pp.: 805-823, (1956).
- [10] REDDY A.  
« *The Finite Element Method* »  
Mc GARW-HILL International Editions, 3<sup>rd</sup> Printing in 1988.
- [11] G. STRANG & G.J. Fix  
« *An Analysis Of The Finite Element Method* »  
Wellesley-Cambridge Press, Wellesley (1973).
- [12] DERRAR A.A.  
« *Introduction Aux Techniques de Calcul de l'Ecoulement dans les Turbomachines* ».  
E.R.M.A-URD moteur Dar-El-Baidha, Alger (1994).

- [13] HRENNIKOFF A.  
« *Solution of Problems in Elasticity by The Framework Method* ».  
**J.Appl.Mech**, Vol. 8, pp 169-175, -1941-
- [14] MASATAKE Movi.  
« *The Finites Elements Method And Its Application* »  
MAC Millan **publishing Company**, New York (U.S.A) 1986.
- [15] U.S.DEPARTMENT Of Transportation.  
« *Airframe & Powerplant Mechanics* »  
**AIRFRAME HANDBOOK** - Federal Aviation Administration (1977).
- [16] FRANK M. White  
« *Viscous fluid flow* », 2<sup>nd</sup> Edition.  
**Mc GRAW-HILL**, Series in mechanical engineering - New York (1991).
- [17] G. BEAUQUET et M. POGU.  
« *Programmation des éléments finis (2D)* »  
**Edition CEPADUES** - Toulouse, FRANCE 1987
- [18] HIRSCH Charles  
« *Numerical Computation of Internal And External Flows* »  
Vol. 2 : Computational Methods for Inviscid and Viscous Flows.  
**A Wiley-Interscience Publication**, New York - U.S.A 1988
- [19] M. BOUMAH RAT, A. GOURDIN  
« *Méthodes Numérique Appliquées* » ; **Edition OPU**, ALGERIE, 1983.
- [20] Merzak DAMOU (Msc, Phd)  
« *Mécanique des fluides* » ; **Edition OPU. Ben Aknoun** (ALGERIE) 1994.
- [21] O.C. ZIENKIEWICZ.  
« *The Finite Element Method In Engineering Science* ».  
2<sup>nd</sup> Edition **McGRAW - HILL**, LONDON - 1971.
- [22] TECHNIQUES DE L'INGENIEUR  
« *Rubriques de Tuyauteries Et Appareils à Pression* », cote **A690** &  
« *Écoulement Des Fluides Dans Les Tuyauteries* », cote **A738** ; France, 1991.
- [23] Amar KHENNANE.  
« *Méthodes Des éléments Finis, énoncé des principes de base* ».  
**Edition OPU**, ALGERIE, 1997.
- [24] ZEBBICHE TOUFIK (Chargé de cours à L'I.A.B.)  
« *Éléments Finis* » Cours Ingénieur Aéronautique, Option Structure.  
**Institut d'Aéronautique**, Université de Blida, ALGERIE, 1998.

- [25] B.M. IRONS & O.C. ZIENKIEWICZ  
« *The Isoparametric Finite Element System - a new concept in Finite Element analysis* ». Proceedings, Conference on recent advances in stress analysis.  
**Royal Aeronautical Society, London, 1968.**
- [26] I. E IDELCIK  
« *Mémento des Pertes de Charge* » ; **EYROLLES Editeur PARIS.**
- [27] M.CARLIER  
« *Hydraulique Générale et Appliquée* » ; **EYROLLES Editeur PARIS.**
- [28] J.S. PRZEMIENIECKI  
« *Theory of Matrix Structural Analysis* »  
**McGRAW - HILL, New York, 1968.**
- [29] A.PIMENOV KH. & TAGUI-Zadé  
« *Hydraulique Générale* » ; **EDITION OPU, ALGERIE, 1990.**
- [30] AMTOUT.A.  
« *Cours d'Analyse Numérique de Magister* » ; **Institut d'Aéronautique, Université de Blida, ALGERIE, 1998.**
- [31] C.A.G FLETCHER.  
« *Computational Techniques In Fluid Dynamics* » Volume 2,  
**Spinger – Verlag, Berlin Heidelber, (1988, 1991).**
- [32] Toufik EL-AICHI.  
« *Application Des Techniques De Génération De Maillage Pour Le Calcul Des écoulements Potentiels Transsonique Stationnaires* », Mémoire de MAGISTER.  
**Institut d'Aéronautique, Université de Blida, (1997).**
- [33] A. POUJADE  
« *Cellule Et Systèmes* », **Inst. Aéronautique Jean MERMOZ**  
**Edition 1991, France, 1991 – (pages : 269...328 ).**
- [34] OURAGH Youcef (Maître assistant I.N.G.M.)  
« *Aide Mémoire de Mathématique pour Ingénieurs* » Partie 'II'  
**Edition OPU, ALGERIE, (1993).**

