

Frédéric Rotella  
Irène Zambettakis

# Traitement des systèmes linéaires

Préface du Pr. Abdelhaq El Jai



ellipses

# Table des matières

Préface	vii
Avant-propos	xi
Chapitre 1. Introduction	1
1.1. Un peu d'histoire	1
1.2. Quelques exemples de systèmes linéaires	7
1.2.1. Flexion de poutre chargée	7
1.2.2. Équation de Poisson	10
1.2.3. Chute des corps	11
1.2.4. Modèle cinématique d'un robot	12
1.2.5. Gestion d'un stock en achat-vente	14
1.3. Formalisme matriciel et notations	16
1.4. Exercices supplémentaires	18
1.5. Corrigés des exercices	26
Chapitre 2. Résolution exacte des systèmes linéaires	37
2.1. Existence et unicité de la solution	37
2.2. Résolution des systèmes compatibles	39
2.2.1. Systèmes de Cramer	39
2.2.2. Notion d'inverse généralisée	41
2.2.3. Calcul itératif d'une inverse généralisée	42
2.2.4. Solutions d'un système compatible	43
2.2.5. Équations simultanées	44
2.3. Équations matricielles	46
2.3.1. Équations de décomposition	46
2.3.2. Équations de Sylvester	50
2.3.3. Équation de Sylvester généralisée	54
2.4. Systèmes contraints	59
2.4.1. Appartenance à un sous-espace vectoriel	59
2.4.2. Solutions de norme euclidienne minimale	61
2.4.3. Systèmes linéaires en variables entières.	62
2.4.4. Inéquations linéaires	64
2.5. Exercices supplémentaires	69
2.6. Corrigés des exercices	74

Chapitre 3. Solutions approchées	87
3.1. Moindres carrés simples	90
3.1.1. Solution générale	90
3.1.2. Utilisation de la pseudo-inverse	91
3.1.3. Moindres carrés contraints	93
3.2. Moindres carrés totaux	94
3.2.1. Interprétation géométrique	95
3.2.2. Approximation de Schmidt	97
3.2.3. Solution au sens des moindres carrés totaux	99
3.2.4. Problème mixte	103
3.3. Moindres valeurs absolues	105
3.3.1. Approximation MVA	106
3.3.2. Approximation minimax	110
3.4. Exercices supplémentaires	118
3.5. Corrigés des exercices	122
Chapitre 4. Résolution numérique directe	145
4.1. Sensibilité d'un système linéaire	146
4.1.1. Conditionnement d'un système linéaire	147
4.1.2. Amélioration du conditionnement	152
4.1.3. Sensibilité dans un cadre général	154
4.2. Traitement des systèmes triangulaires	156
4.3. De Gauss à LU	160
4.3.1. Élimination de Gauss	160
4.3.2. Factorisation LU	165
4.3.3. Algorithme direct de factorisation LU	169
4.3.4. Cas des matrices symétriques	171
4.4. De QR à SVD	174
4.4.1. Factorisation QR	174
4.4.2. Factorisation SVD	178
4.4.3. Décomposition SVD généralisée	181
4.5. Algorithmes par bloc	185
4.5.1. Factorisation LU par blocs	185
4.5.2. Factorisation QR par blocs	186
4.6. Exercices supplémentaires	189
4.7. Corrigés des exercices	195
Chapitre 5. Résolution numérique itérative	215
5.1. Méthodes par décomposition	217
5.1.1. Principe	217
5.1.2. Utilisation de la positivité	219
5.1.3. Méthode semi-itérative de Tchebychev	220
5.1.4. Relaxation	223
5.1.5. Méthodes usuelles	225

5.1.6.	Cas des systèmes tridiagonaux	231
5.1.7.	Systèmes singuliers	232
5.2.	Méthodes de transformations orthogonales	233
5.2.1.	Algorithme de Cimmino	235
5.2.2.	Algorithme de Kaczmarz	237
5.2.3.	Algorithmes par blocs	244
5.2.4.	Traitement d'un système d'inégalités	246
5.3.	Méthodes du gradient	247
5.3.1.	Méthode du gradient à pas variable	249
5.3.2.	Méthode du gradient conjugué	251
5.4.	Méthodes de Krylov	257
5.4.1.	Construction de $V_k$	258
5.4.2.	Détermination de $z^{(k)}$	259
5.4.3.	Méthodes normales	260
5.5.	Traitement des moindres valeurs absolues	261
5.5.1.	Algorithmes de Coleman-Li	262
5.5.2.	Algorithme de Ruzinsky-Olsen	264
5.6.	Exercices supplémentaires	266
5.7.	Corrigés des exercices	274
Chapitre 6. Quelques applications en ingénierie		
6.1.	Commande des convertisseurs	313
6.2.	Commande des systèmes dynamiques	317
6.2.1.	Analyse de stabilité	317
6.2.2.	Poursuite de signal	318
6.2.3.	Observation d'une fonction linéaire de l'état	320
6.3.	Systèmes de Vandermonde	325
6.3.1.	Systèmes simples	330
6.3.2.	Systèmes confluents	336
6.4.	Classement des pages Internet	337
6.4.1.	Principe du classement	338
6.4.2.	Classement par PageRank	339
6.4.3.	Classement par HITS	342
6.5.	Analyse procustéenne	342
6.5.1.	Transformation orthogonale	344
6.5.2.	Transformation affine	345
6.6.	Reconnaissance de formes	347
6.6.1.	Droites	347
6.6.2.	Coniques	352
6.7.	Régression linéaire récursive	354
6.7.1.	Suppression des données les plus anciennes	357
6.7.2.	Ajout des données les plus récentes	357
6.7.3.	Algorithme adaptatif	358
6.8.	Exercices supplémentaires	359

6.9. Corrigés des exercices	364
Annexe A. Aide-mémoire de calcul matriciel	383
A.1. Notations	383
A.2. Opérations simples	385
A.3. Transformation linéaire	390
A.3.1. Image et noyau	391
A.3.2. Similitude et équivalence	392
A.3.3. Factorisation de Smith	392
A.3.4. Factorisation de rang maximal	395
A.4. Trace et déterminant	397
A.4.1. Trace	397
A.4.2. Déterminant	397
A.5. Inversion	400
A.6. Projections	402
A.7. Polynômes annulateurs	404
A.7.1. Polynôme caractéristique	404
A.7.2. Polynôme minimal	407
A.8. Formes canoniques	408
A.8.1. Forme de Jordan	408
A.8.2. Formes normales des matrices	411
A.9. Décomposition en valeurs singulières	412
A.10. Inverses généralisées	416
A.11. Normes de matrices	420
A.12. Matrices signées	423
A.12.1. Matrices non négatives	423
A.12.2. Matrices positives	424
A.12.3. Matrices irréductibles	425
A.12.4. Matrices primitives	426
A.12.5. Matrices stochastiques	427
A.12.6. M-matrices, matrices de Hurwitz et de Schur	429
A.13. Dérivation	430
Annexe B. Aide-mémoire Scilab	433
B.1. Introduction	433
B.1.1. Démarrage	433
B.1.2. Instructions utiles et sauvegardes	434
B.2. Matrices	435
B.2.1. Définition des matrices	435
B.2.2. Génération automatique de matrices	436
B.3. Opérations et fonctions de matrices	438
B.3.1. Opérations sur les composantes	438
B.3.2. Opérations matricielles	439
B.3.3. Fonctions de matrices	439

## TABLE DES MATIÈRES

v

B.4. Matrices et espaces vectoriels	440
B.4.1. Image et noyau d'une matrice	440
B.4.2. Projections	440
B.4.3. Normes	440
B.4.4. Rayon spectral	441
B.4.5. Conditionnement	441
B.5. Les programmes Scilab	441
B.5.1. Scripts et fonctions	441
B.5.2. Boucles et instructions conditionnelles	442
Bibliographie	447
Index	461