

TRAITÉ
DE MATHÉMATIQUES

KHELIFA ZIZI

ALGÈBRE LINÉAIRE ET MULTILINÉAIRE

ALGÈBRE QUADRATIQUE

LIVRE 04



OFFICE DES PUBLICATIONS UNIVERSITAIRES



Table des matières

1 Espace vectoriel - Application linéaire - Produit et quotient	5
1.1 Espace vectoriel	5
1.2 Application linéaire	7
1.3 Matrices	10
1.4 Sous-espace vectoriel - Noyau et image d'une application linéaire	11
1.5 Produit d'espaces vectoriels	14
1.6 Exemples d'équations linéaires	16
1.7 Espace quotient - Décomposition canonique	20
1.8 Exercices sur les systèmes de vecteurs	26
2 Base d'un espace vectoriel - Rang d'un système de vecteurs - Rang d'une matrice	35
2.1 Famille génératrice, famille libre	35
2.2 Base d'un espace vectoriel - Espace vectoriel de dimension finie	39
2.2.1 Complexification d'un espace vectoriel réel	44
2.3 Matrice d'une application linéaire	46
2.4 Rang d'un système de vecteurs, d'une matrice	48
2.5 Résolution des systèmes d'équations linéaires scalaires par la méthode de Gauss	54
2.6 Exercices sur les systèmes d'équations linéaires scalaires	65
3 Sous-espaces supplémentaires - Indice d'un endomorphisme - Projecteurs - Symétries	71
3.1 Sous-espaces supplémentaires	71
3.2 Rang et indice - Endomorphisme de Fredholm	75
3.3 Projecteurs - Symétries	80
3.4 Exercices sur applications linéaires	89
4 Algèbre des matrices carrées	117
4.1 Produit de matrices	119
4.1.1 Matrices inversibles - Le groupe $GL(n, \mathbf{K})$	132
4.2 Matrices diagonales et triangulaires	133
4.3 Matrices de changement de bases	137
4.4 Matrices équivalentes - Matrices semblables	141
4.5 Matrices élémentaires	144
4.6 Matrices de permutation	159
4.7 Exercices sur l'algèbre des matrices carrées	163

4.8	Exercices sur les changements de base et les matrices semblables	182
5	Dualité	195
5.1	Dual - Base duale - Bidual	195
5.2	Orthogonalité	204
5.3	Transposée d'une application linéaire	209
5.4	Applications de rang fini	212
5.5	Relations entre les noyaux et les conoyaux d'une application linéaire et sa transposée	214
5.6	Alternative de Fredholm	221
5.7	Dilatation et transvection	229
5.8	Exercices sur la dualité	231
6	Programmation linéaire	237
6.1	Systèmes d'inéquations linéaires homogènes	237
6.2	Programme linéaire	248
6.3	Variables de base et hors base, solution réalisable de base	255
6.4	Méthode du simplexe	259
6.5	Méthode des deux phases, méthode des pénalités	271
6.6	Dual d'un programme linéaire	281
6.7	Transport optimal	288
6.8	Solution de base réalisable par la méthode du coin nord-ouest	291
6.9	Résolution du programme de transport	297
6.10	Exercices sur la programmation linéaire	301
7	Introduction à l'algèbre tensorielle	311
7.1	Rappels et conventions de notations	311
7.2	Produit tensoriel de deux espaces vectoriels	314
7.2.1	Produit tensoriel de deux applications linéaires	320
7.3	Produit tensoriel d'un nombre fini d'espaces vectoriels	333
7.3.1	Produit tensoriel de deux algèbres	338
7.4	L'isomorphisme $\mathcal{L}_n(E_1^*, \dots, E_n^*; \mathbf{K})$ et $E_1 \otimes \dots \otimes E_n$	342
7.5	Tenseur p fois contravariant et q fois covariant - Critère de tensorialité	345
7.5.1	Contraction d'un tenseur mixte - Multiplication contractée	348
7.5.2	Tenseur p fois covariant (resp. contravariant) symétrique	350
7.6	Exercices sur les tenseurs	354
8	Introduction à l'algèbre extérieure d'un espace vectoriel	359
8.1	Application p -linéaire alternée et antisymétrique, p vecteurs et p covecteurs	359
8.2	Antisymétrisée d'une application p -linéaire	362
8.3	Base de la puissance extérieure p -ième d'un espace vectoriel de dimension finie	363
8.4	Exercices sur l'algèbre extérieure	370
9	Déterminant de n vecteurs - Applications	375
9.1	Déterminant de n vecteurs - Déterminant d'une matrice carrée	375
9.2	Déterminant d'un endomorphisme	381
9.3	Développement d'un déterminant suivant une ligne (resp. une colonne)	383
9.4	Calcul de l'inverse d'une matrice inversible et résolution des systèmes de Cramer	389
9.4.1	Le groupe spécial linéaire $SL(n, \mathbf{K})$	390

9.5	Détermination du rang d'un système de vecteurs ou d'une matrice	394
9.6	Résolution des systèmes d'équations linéaires scalaires	396
9.6.1	Décomposition $A = LU$, $PA = LU$	400
9.7	Familles biorthogonales	410
9.8	Orientation d'un espace vectoriel réel de dimension finie	418
9.9	Exercices sur les déterminants et les applications des déterminants	421
10	Equations récurrentes linéaires	439
10.1	Cas des équations à coefficients constants	442
10.2	Résolution de l'équation non homogène - Méthode de la variation de la constante	448
10.3	Exercices sur les équations récurrentes linéaires	455
11	Algèbre Cayleyenne, le corps des quaternions	459
11.1	Algèbre quadratique	459
11.2	Algèbre cayleyenne	463
11.3	Le corps des quaternions \mathbb{H}	469
11.4	Algèbre de Cayley alternative - Octonions	477
11.5	Exercices sur les quaternions	487