

TRAITÉ
DE MATHÉMATIQUES

KHELIFA ZIZI

CALCUL DIFFÉRENTIEL DES FONCTIONS
DE PLUSIEURS VARIABLES

LIVRE 08



OFFICE DES PUBLICATIONS UNIVERSITAIRES



Professeur Khelifa ZIZI



Livre VIII

Calcul différentiel

des

fonctions de plusieurs variables

2^{ème} Édition



OFFICE DES PUBLICATIONS UNIVERSITAIRES

Table des matières

1	Espaces vectoriels normés - Espaces métriques	5
1.1	Normes - distances - Espaces métriques	5
1.1.1	Espaces vectoriels normés - Normes équivalentes	5
1.1.2	Espace métrique - Ensemble ouvert- fermé	10
1.1.3	Sous-espaces métriques - Espace métrique produit	13
1.1.4	Adhérence, Frontière, Intérieur, Extérieur	16
1.1.5	Suite convergente - limite	19
1.1.6	Suite de Cauchy - Espace métrique complet	20
1.1.7	Complété d'un espace métrique	21
1.1.8	Exercices sur les espaces métriques	25
2	Eléments de topologie générale	49
2.1	Ouverts, fermés, voisinages	49
2.2	Sous-espace d'un espace topologique - Produit de deux espaces topologiques	55
2.3	Comparaison de topologies	57
2.4	Espaces compacts	58
2.4.1	Le théorème de Bolzano-Weierstrass	61
2.4.2	Le théorème de Borel Lebesgue	62
2.5	Espaces localement compacts	63
2.5.1	Equivalence des normes dans un espace vectoriel normé de dimension finie	64
2.6	Espaces connexes	66
2.7	Exercices de topologie générale	67
3	Fonctions continues	71
3.1	Fonction d'un espace métrique dans un autre	71
3.1.1	Limite d'une fonction en un point	71
3.1.2	Fonctions continues et uniformément continues	73
3.1.3	Fonctions continues sur des espaces compacts	79
3.1.4	Le théorème d'Urysohn	80
3.1.5	Le théorème de D'Alembert-Gauss	82
3.1.6	Image d'un espace connexe par une application continue	83
3.2	Fonctions semi-continues inférieurement (resp. supérieurement)	85
3.3	Convergence de suites de fonctions, de droites et de plans	88
3.3.1	Convergence de suites de fonctions	88
3.3.2	Le chemin de Peano	90
3.3.3	Convergence de droites et de plans affines	95

3.4	Exercices sur les fonctions de plusieurs variables	97
4	Ensembles convexes et fonctions convexes	133
4.1	Ensembles convexes	133
4.2	Projection sur un convexe fermé	141
4.3	Séparation des convexes	143
4.4	Cônes polyédriques convexes	148
4.5	Fonction convexe	161
4.6	Problème général de la programmation convexe	166
4.7	Normes sur l'espace des applications linéaires	170
4.8	Exercices sur la convexité	175
5	Fonction d'une variable réelle à valeurs vectorielles	177
5.1	Dérivée d'une fonction d'une variable réelle	177
5.2	Théorème des accroissements finis - Formules de Leibniz	185
5.3	Dérivée d'ordre n	186
5.4	Formules de Taylor	190
5.5	Exercices sur le calcul différentiel d'une fonction d'une variable réelle à valeurs vectorielles	191
6	Calcul Différentiel d'une application de \mathbb{R}^p dans \mathbb{R}^q	199
6.1	Différentielle d'une fonction de \mathbb{R}^p dans \mathbb{R}^q	200
6.1.1	Différentielle, dérivée suivant un vecteur, dérivée partielle d'une fonction de \mathbb{R}^p dans \mathbb{R}	200
6.1.2	Différentielle d'une fonction de \mathbb{R}^p dans \mathbb{R}^q	203
6.1.3	Matrice jacobienne d'une application de \mathbb{R}^p dans \mathbb{R}^q	205
6.1.4	Opérations sur les applications différentiables	207
6.1.5	Cas des fonctions convexes	213
6.1.6	Exercices sur la différentiabilité	215
6.2	Gradient, Divergence, Rotationnel	229
6.2.1	Gradient d'une fonction de \mathbb{R}^p à valeurs réelles	229
6.2.2	Divergence d'un champ de vecteurs	230
6.2.3	Rotationnel d'un champ de vecteurs de \mathbb{R}^3	231
6.2.4	Divergence et rotationnel d'un produit vectoriel de champ de vecteurs	234
6.2.5	Exercices sur les notions de gradient, divergence, rotationnel	236
6.3	Le théorème des accroissements finis et ses applications	238
6.3.1	Le théorème des accroissements finis pour une fonction à valeurs réelles	238
6.3.2	Applications du théorème des accroissements finis	238
6.3.3	Le théorème des accroissements finis pour une fonction à valeurs vectorielles	241
6.3.4	Exercices sur le théorème des accroissements finis	244
6.4	Différentielle d'ordre 2 - Formules de Taylor à l'ordre 2	246
6.4.1	Théorèmes de Schwarz	246
6.4.2	Différentielle seconde et Matrice Hessienne	250
6.4.3	Formule de Taylor-Young à l'ordre 2	254
6.4.4	Cas d'une fonction convexe	257
6.4.5	Exercices sur la formule de Taylor	258
6.5	Différentielle d'ordre n - Formules de Taylor d'ordre n	265
6.5.1	Différentielle et dérivée partielle d'ordre n	265

6.5.2	Formule de Leibniz	271
6.5.3	Formules de Taylor d'ordre quelconque	273
6.5.4	Exercices sur les fonctions n fois différentiables	279
6.6	Méthode des approximations successives	282
6.6.1	Méthode des approximations successives - Théorème du point fixe	282
6.6.2	Recherche de zéros par itérations	285
6.6.3	Méthode de Newton	286
6.6.4	Exercices sur la méthode des approximations successives	295
6.7	Fonctions implicites - Difféomorphismes	303
6.7.1	Existence de la fonction implicite	303
6.7.2	Dérivabilité de la fonction implicite	310
6.7.3	Difféomorphisme	318
6.7.4	Système de fonctions indépendantes - Rang	321
6.7.5	Exercices sur les fonctions implicites	327
6.8	Extrema libres et extrema liés	340
6.8.1	Introduction : Problèmes d'extremum	340
6.8.2	Extrema libres	343
6.8.3	Extrema liés	348
6.8.4	Méthode des moindres carrés	353
6.8.5	Cas des fonctions convexes	358
6.8.6	Application au problème de la programmation convexe	359
6.8.7	Exercices sur les extrema libres et liés	362
6.9	Problèmes sur le calcul différentiel des fonctions de plusieurs variables	382
6.10	Liste des relations et des formules	393
6.10.1	Liste des formules	393
6.10.2	Liste des relations	394
6.10.3	Liste des symboles	395