

TRAITÉ
DE MATHÉMATIQUES

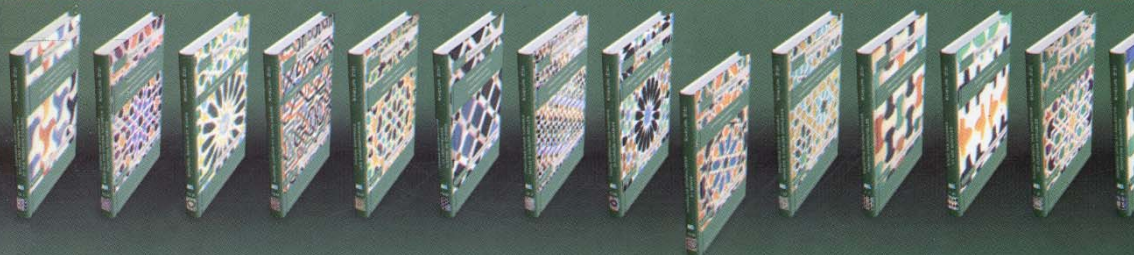
KHELIFA ZIZI

INTÉGRALES
GÉNÉRALISÉES ET SÉRIES

LIVRE 09



OFFICE DES PUBLICATIONS UNIVERSITAIRES



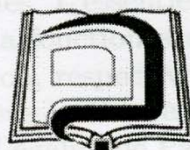
Professeur Khelifa ZIZI



Livre IX

Intégrales généralisées et séries

2^{ème} Édition



OFFICE DES PUBLICATIONS UNIVERSITAIRES

Table des matières

1	Intégrale et intégrale généralisée	3
1.1	Fonctions en escalier et fonctions réglées	3
1.2	Intégrale d'une fonction en escalier	6
1.3	Intégrale d'une fonction réglée	9
1.4	Approximation de l'intégrale de Riemann	14
1.5	Intégrale indéfinie	16
1.6	Primitive - Intégration par parties	17
1.7	Dérivée de la limite d'une suite de fonctions continûment dérivables	20
1.8	Fonction définie par une intégrale sur un intervalle borné	21
1.9	Intégrale généralisée	28
1.10	Fonction définie par une intégrale généralisée	35
1.11	Comportement asymptotique d'une intégrale	42
1.12	Exercices sur les intégrales généralisées	47
1.13	Problèmes sur les intégrales généralisées	73
2	Séries de vecteurs et séries de fonctions	109
2.1	Séries à termes positifs	113
2.2	Séries absolument convergentes	124
2.3	Séries semi-convergentes	126
2.4	Opérations sur les séries	131
2.5	Séries de fonctions	148
2.6	Exercices sur les séries numériques et les séries de fonctions	155
2.6.1	Exercices sur les séries numériques	155
2.6.2	Exercices sur les séries de fonctions	173
3	Séries entières	201
3.1	Séries entières	201
3.2	Fonctions analytiques	206
3.3	Nombres et polynômes de Bernoulli - Formule d'Euler-Mac Laurin	218
3.4	Exercices sur les séries entières	232
3.5	Problèmes sur les séries entières	252
4	Séries de Fourier	273
4.1	Famille orthonormale - Coefficients de Fourier	273
4.2	Fonctions à variation bornée	278
4.3	Etude de la convergence des séries de Fourier	283

4.3.1	Noyau de Dirichlet - Le théorème de Dirichlet	285
4.3.2	Convergence au sens de Cesaro - Noyau de Fejer	300
4.3.3	Convergence au sens d'Abel - Noyau et sommes de Poisson	304
4.4	Inégalité de Bessel, Egalité de Parseval	309
4.5	Intégration et dérivation d'une série de Fourier	312
4.6	Le théorème de Wiener	317
4.7	Application de la théorie des séries de Fourier	322
4.8	Séries de Fourier d'une fonction de plusieurs variables	328
4.9	Exercices sur les séries de Fourier	329
4.10	Problèmes sur les séries de Fourier	345
5	Séries de polynômes orthogonaux	367
5.1	Propriétés générales d'une suite de polynômes orthogonaux	367
5.1.1	Définition, Formule de récurrence	367
5.1.2	Noyau polynomial Formule de Christoffel Darboux	372
5.1.3	Nombres de Christoffel , Formule de quadrature de Gauss-Jacobi	375
5.2	Les polynômes orthogonaux classiques	378
5.2.1	Définition et propriétés générales	378
5.2.2	Equation différentielle	384
5.2.3	Formule de récurrence	396
5.3	Développement en série de polynômes orthogonaux	414
5.3.1	Fonction génératrice	424
5.4	Exercices sur les polynômes orthogonaux	429
5.5	Problèmes sur les séries de polynômes orthogonaux	430
6	Séries entières formelles	447
6.1	Algèbre des séries entières formelles	447
6.1.1	Ordre d'une série entière formelle	448
6.1.2	Substitution	449
6.1.3	Inverse d'une série formelle	452
6.1.4	Dérivée d'une série entière formelle	454
6.1.5	Séries réciproques	455
6.2	Séries génératrices	457
6.3	Exercices sur les séries formelles	468