

LICENCE 3 | MASTER | ÉCOLES D'INGÉNIEURS

SCIENCES SUP

Cours et
applications

Plus de
300 figures

Jean-Pierre Provost, Bernard Raffaelli, Gérard Vallée

Mathématiques en physique

Concepts et outils

DUNOD

Table des matières

Liste des abréviations	vii
Table des sujets de physique	viii
Avant-propos	xi
1 Nombres réels ; grandeurs physiques ; dimensions	1
1.1 Grandeurs physiques ; continuité ; paramétrages additifs	1
1.1.1 Survol « physique » des ensembles \mathbb{N} , \mathbb{Z} , \mathbb{Q} , \mathbb{R}	1
1.1.2 Paramétrage additif des lois de composition ; logarithmes	4
1.1.3 Fonction et notation exponentielles ; applications	6
1.1.4 Mesure additive du désordre microscopique ; grands nombres et entropie ; exemples ; irréversibilité	8
1.2 Caractère algébrique des grandeurs physiques	9
1.2.1 Pensée « naïve » et pensée algébrique	9
1.2.2 Conventions et lois de l'électricité	11
1.3 Grandeurs physiques et dimensions	14
1.3.1 Changements d'unités et invariance des lois physiques	14
1.3.2 Applications et limites de l'analyse dimensionnelle	17
1.3.3 Analyse d'échelle ; fractals ; percolation ; renormalisation	20
2 Nombres et notation complexes ; plan et mouvements plans	23
2.1 Calculs avec les nombres complexes	23
2.1.1 Règles de calcul ; exponentielle imaginaire ; fonctions complexes . .	23
2.1.2 « Théorème fondamental de l'algèbre » ; application aux E.D. . . .	25
2.2 Plan complexe et transformations associées	27
2.2.1 Plan complexe et plan cartésien ; produit scalaire ; aire	27
2.2.2 Transformations dans le plan complexe ; applications physiques . .	28
2.3 Etude de courbes et de mouvements plans	31
2.3.1 Mouvements et courbes en coordonnées polaires	31
2.3.2 Coniques en coordonnées polaires et cartésiennes ; foyers	32
2.3.3 Mouvement de Kepler ; diffusion de Rutherford	36
2.3.4 Mouvement harmonique ; vecteurs tournants	37
2.4 Notation complexe en physique classique	38
2.4.1 Signaux réels et complexes ; propriétés ; fonction de corrélation . .	38
2.4.2 Systèmes entrée-sortie ; fonctions de transfert et impédances	39
2.4.3 Signaux modulés ou quasi-monochromatiques	41
2.5 Applications à l'optique ondulatoire	41
2.5.1 Interférences ; réseaux ; fonction de corrélation	41
2.5.2 Diffraction en lumière monochromatique	43

2.5.3	Polarisations des ondes planes électromagnétiques	45
2.5.4	Etats de polarisation des photons; hélicité; introduction à la physique quantique	48
3	Espace; calcul vectoriel; symétries et lois physiques;	51
3.1	Symétrie, invariance et relativité	52
3.1.1	Groupes de symétrie et invariance	52
3.1.2	Le groupe de symétrie d'espace-temps de la physique	53
3.1.3	Symétries spatiales (présentation « expérimentale »)	55
3.1.4	Transformation des grandeurs et des champs physiques	58
3.2	Calcul vectoriel; applications	60
3.2.1	Produit scalaire, produit vectoriel et produit mixte; pseudovecteurs	60
3.2.2	Ondes planes; fréquences spatiales; réseaux	62
3.2.3	Différentielles de chemins; effet Doppler; lois de Descartes	64
3.2.4	Vecteurs surface et moments; flux de grandeurs physiques	66
3.2.5	Sphère, angle solide, théorème de Gauss, étendue d'un pinceau	69
3.2.6	Géométrie sphérique; transport parallèle; pendule de Foucault	71
3.3	Vecteurs tournants; mécanique du solide	73
3.3.1	Vecteurs tournants; changements de référentiels; référentiel local; champ de marée	73
3.3.2	Référentiel du centre de masse; problème à deux corps	75
3.3.3	Cinématique et dynamique d'un corps solide; équations d'Euler	76
3.4	Systèmes physiques possédant des symétries	79
3.4.1	Invariance des lois physiques et principe de Curie	79
3.4.2	Symétries de translation; lois de Descartes et des réseaux	80
3.4.3	Symétries de rotation et symétries discrètes; applications en électromagnétisme et en acoustique	81
4	Calcul linéaire et physique classique; relativité	83
4.1	Espaces vectoriels	83
4.1.1	Définitions; changements de bases; applications linéaires; somme; produit tensoriel	83
4.1.2	Structures métriques; inégalité de Schwarz; fonctions orthonormées	86
4.1.3	Formes quadratiques et antisymétriques; volume; calcul extérieur	87
4.2	Calcul matriciel	90
4.2.1	Bases du calcul matriciel; lien avec les espaces vectoriels	90
4.2.2	Matrices $n \times n$; trace; déterminant; inverse	91
4.2.3	Spectre d'une matrice $n \times n$; vecteurs propres; diagonalisabilité; décomposition spectrale des matrices remarquables	92
4.2.4	Exponentielles; groupes de Lie; algèbre de Lie des rotations	95
4.2.5	Matrices de Pauli; espace-temps; spineurs	96
4.2.6	Groupe des rotations et classification des grandeurs physiques	99
4.3	Applications en physique classique	101
4.3.1	Déformations et contraintes; élasticité; viscosité	101
4.3.2	Optique de Gauss des systèmes centrés; matrices de transfert; chemins optiques	104
4.3.3	Relativité 1; quadrivecteurs; cinématique; dynamique	108

4.3.4	Relativité 2; électromagnétisme; notation quadridimensionnelle; tenseur énergie-impulsion; spin; hélicité	113
5	Fonctions d'une variable; analyse des signaux	117
5.1	Savoir-faire concernant les fonctions	118
5.1.1	Graphe et informations sur une fonction	118
5.1.2	Dérivation, développements limités : principaux résultats	120
5.1.3	Intégration; cas des fonctions piquées ou rapidement oscillantes	122
5.1.4	Concavité de l'entropie; travail maximum; transitions de phase liquide-solide et para-ferromagnétisme	124
5.2	Opérations sur les fonctions; analyse de Dirac	128
5.2.1	Principales opérations sur les fonctions ou signaux	128
5.2.2	Impulsion de Dirac (« fonction delta »); exemples mécaniques	130
5.2.3	Analyse de Dirac; réponse impulsionnelle; convolution; filtrage	132
5.3	Transformation de Fourier; analyse de Fourier	134
5.3.1	Décomposition de Fourier; spectre d'un signal; formule de Poisson	134
5.3.2	Propriétés de la T.F.; dualité temps fréquence	136
5.3.3	Transformée de Laplace; importance des conditions initiales	139
5.3.4	Signaux stationnaires; signaux chaotiques; langage probabiliste	139
5.4	Optique de Fourier; filtrage optique	143
5.4.1	Décomposition en ondes planes; filtrage; diffraction	143
5.4.2	Illustrations optiques de la transformée de Fourier	144
6	Equations différentielles; systèmes dynamiques	147
6.1	Systèmes dynamiques et espace de phase	148
6.1.1	Définitions; propriétés générales	148
6.1.2	Exemples de systèmes dynamiques et de leurs portraits de phase	151
6.2	Equations linéaires stationnaires; modes propres; stabilité	154
6.2.1	Equations du premier et du second ordre; modes propres; cas général; oscillateurs couplés	154
6.2.2	Stabilité et instabilité d'un système dynamique linéaire stationnaire	158
6.3	Dix équations vectorielles classiques de la physique	160
6.4	Equations différentielles linéaires à coefficients variables	164
6.4.1	Quatre exemples (mécanique; optique; quantique; ondes); matrices de transfert	165
6.4.2	Ondes; quantification des fréquences; réflexion, transmission; matrice S	167
6.4.3	Equations avec paramètres périodiques; théorème de Floquet-Bloch	170
6.4.4	Equations d'amplitude; oscillateur paramétrique; approximation adiabatique	171
6.5	Oscillateurs non linéaires	174
6.5.1	Oscillateurs linéairement stables faiblement non linéaires	174
6.5.2	Oscillateurs linéairement instables; exemple de Van der Pol; bifurcations de Hopf et d'un cycle limite	177

7 Fonctions de plusieurs variables ; analyse vectorielle	181
7.1 Calcul différentiel	181
7.1.1 Développement de Taylor ; différentielles ; variation seconde ; extremum ; E.D.P. simples	181
7.1.2 Changements de variables ; règles de calcul différentiel	184
7.1.3 Dérivées spatiales de champs scalaires et vectoriels ; gradient ; Laplacien ; divergence ; rotationnel	185
7.1.4 Dérivées temporelles et applications hydrodynamiques	189
7.2 Calcul intégral	191
7.2.1 Intégration à n dimensions ; jacobien ; cas des très grandes dimensions	191
7.2.2 Formes différentielles ; théorème de Stokes	194
7.2.3 Analyse vectorielle ; circuits, volumes et champs dépendant du temps ; loi de Lenz ; milieux continus	199
7.2.4 Flux et bilans de grandeurs ; E.D.P. d'Euler, de Navier-Stokes et des milieux élastiques	201
7.3 Applications à la mécanique et à l'optique géométrique	205
7.3.1 Forces, couples et fonctions énergie potentielle ; théorème du viriel	205
7.3.2 Optique géométrique : rayons ; surfaces d'onde ; caustiques et problèmes d'extremum ; aberrations	208
7.4 Applications à la thermodynamique	211
7.4.1 Rôle clé de l'entropie ; équations d'état ; coexistence de phases . . .	212
7.4.2 Potentiels thermodynamiques ; équilibres ; transitions de phase . .	214
7.5 Applications à l'électromagnétisme	217
7.5.1 Formulation intégrale ; champs statiques ; milieux	217
7.5.2 Potentiel scalaire et potentiel vecteur ; bilans d'énergie et de quantité de mouvement ; A.R.Q.S	221
7.5.3 Calculs avec des densités microscopiques ; moments électriques et magnétique ; rayonnements dipolaire et synchrotron	222
8 Equations aux dérivées partielles ; propagation ; diffusion	225
8.1 Chaines de systèmes dynamiques couplés ; limite continue	225
8.1.1 Chaines d'oscillateurs ; rôle des conditions aux limites ; phonons . .	226
8.1.2 Limite continue ; cordes vibrantes ; lignes électriques ; analogues hydrodynamiques ; impédances	228
8.2 Solutions de quelques E.D.P. dynamiques	232
8.2.1 E.D.P. linéaires à coefficients constants ; solutions ondes planes, électromagnétisme ; milieux continus	232
8.2.2 Choix des solutions onde plane, ; vitesse de l'énergie, sommes d'ondes planes	236
8.2.3 Equations de diffusion et de propagation ; solutions générales ; fonc- tions de Green ; ondes stationnaires	240
8.2.4 Principales E.D.P. de la physique liées à une loi de conservation . .	244
8.2.5 Trois exemples d'E.D.P. non linéaires ; ondes solitaires	245
8.3 E.D.P. « spatiales » impliquant l'opérateur laplacien	246
8.3.1 E.D.P. de Laplace, de Poisson et de Helmholtz ; laplacien et har- moniques sphériques	246

8.3.2	E.D.P. $\Delta f = 0$ (Laplace) et $\Delta^2 f = 0$ dans le plan et fonctions d'une variable complexe; applications hydrodynamiques	251
9	Probabilités; processus aléatoires; physique statistique	255
9.1	Langage des probabilités	255
9.1.1	Grandeurs aléatoires et raisonnements logiques; conditionnement	256
9.1.2	Probabilités; lois de probabilité	257
9.1.3	Grandeurs moyennes; moments; corrélations	261
9.2	Origine et discussion de quelques lois importantes en physique	263
9.2.1	Théorème de la limite centrale et lois gaussiennes	263
9.2.2	Loi binomiale et loi de Poisson; l'aléatoire du temps	265
9.2.3	Loi de Boltzmann; théories de champ moyen; modèle d'Ising; statistiques quantiques; réponse linéaire et fluctuations	267
9.2.4	Estimation; lois et test de χ^2 (khi-deux)	270
9.3	Processus aléatoires	272
9.3.1	Marche aléatoire; processus de diffusion et de Fokker Planck; bruit blanc; mouvement brownien	272
9.3.2	Processus de Markov; probabilités de transition; bilan détaillé	274
9.3.3	Processus stationnaires; théorème de Wiener-Khintchine; ergodicité	276
10	Principes variationnels et action	279
10.1	Exemples historiques; schéma général	279
10.1.1	Principes de Fermat, Maupertuis, Lagrange	279
10.1.2	Principe de Hamilton dans l'espace de phase; théorème de Liouville	282
10.1.3	Equations d'Euler-Lagrange; symétries et lois de conservation; E.D.P. d'Hamilton-Jacobi	283
10.1.4	Equations de Hamilton et géométrie symplectique de l'espace de phase	285
10.2	Principes de moindre action et généralisation des mouvements inertiels	286
10.2.1	Collisions et introduction de la masse inertielle	286
10.2.2	Particules chargées et interactions électromagnétiques	287
10.2.3	Temps propre et gravitation; métriques d'espace-temps	289
10.2.4	Géodésiques; transport parallèle; courbure de Riemann	293
10.3	Champs et principes de moindre action	295
10.3.1	E.D.P. d'Euler-Lagrange; corde vibrante; électromagnétisme; gravitation	295
10.3.2	Symétries et courants conservés; théorème de Noether; tenseur énergie-impulsion	297
10.3.3	Equations d'Einstein de la gravitation; cosmologie; action d'Hilbert	299
11	Quantique; états; symétries; interactions	301
11.1	Cadre général	302
11.1.1	Etats; symétries; moyennes; opérateur densité	302
11.1.2	Evolution; théorème adiabatique; intrication, corrélations	304
11.1.3	Dynamique des systèmes à deux états; transitions quantiques; règle d'or de Fermi; loi exponentielle de désexcitation	307

11.1.4	Fonctions d'ondes; E.D.P. de Schrödinger; états gaussiens; chemins de Feynman	311
11.1.5	Oscillateur harmonique; mode électromagnétique	314
11.2	Champs et particules	317
11.2.1	E.D.P. relativiste de Klein-Gordon; champs quantiques; particules et antiparticules (bosons); masse et fréquence	317
11.2.2	E.D.P. de Weyl et de Dirac; fermions	319
11.3	Interactions; symétries et théories de jauge	321
11.3.1	Electromagnétisme et symétrie $U(1)$; dérivée covariante et transport; brisure de symétrie	321
11.3.2	Gravitation et symétrie $SL(2, \mathbb{C})$; spineurs $\psi_{R,L}$; constante cosmologique; symétrie conforme	325
11.3.3	Modèle standard	327
12	Analyse numérique; physique discrète	329
12.1	Discrétisation	330
12.1.1	Représentation des nombres; erreurs; stabilité numérique	330
12.1.2	Dérivation et intégration; extrapolation de Richardson	332
12.2	Résolution numérique d'E.D. et d'E.D.P.	333
12.2.1	Systèmes dynamiques; schémas d'Euler et de Runge Kutta	333
12.2.2	E.D.P. avec conditions initiales : propagation, diffusion	336
12.3	Approximation de fonctions	338
12.3.1	Approximations polynomiales (Tchebychev; B-splines...)	338
12.3.2	Interpolation de Lagrange et par "cubic-splines"	341
12.3.3	Méthode des moindres carrés	343
12.4	Résolution d'équations, d'E.D. et d'E.D.P. linéaires	344
12.4.1	Equations linéaires régulières et singulières	344
12.4.2	E.D. et E.D.P.; méthodes spectrales; éléments finis	348
12.5	Recherche de minima; méthodes de Newton, du simplex, du recuit simulé	350
Index		353