

Vladimir Dotsenko • Axel Courtat • Gaëtan Gauthier

Méthodes mathématiques pour la physique

Cours plébiscité par
les étudiants en physique
de Sorbonne Université

DUNOD

Table des matières

1	ANALYSE VECTORIELLE	5
1.1	Rappel, définitions	5
1.2	Bases mobiles dans les coordonnées curvilignes	9
1.3	Intégrales dans \mathbb{R}^2 et \mathbb{R}^3 , théorème de Fubini et exemples de calculs	23
1.4	Gradient d'une fonction scalaire	40
1.5	Complément sur les fonctions de plusieurs variables	48
1.6	Divergence d'une fonction vectorielle et théorème d'Ostrogradski	61
1.7	Rotationnel d'une fonction vectorielle, circulation et théorème de Stokes	84
1.8	Laplacien	108
1.9	Formules différentielles	112
1.10	Complément : formulaires	115
2	ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES	117
2.1	Équations différentielles d'ordre 1	117
2.2	Équations différentielles linéaires d'ordre 2 à coefficients constants et second membre variable	132
3	ALGÈBRE LINÉAIRE	149
3.1	Matrices	149
3.2	Opérations algébriques avec des matrices	150
3.3	Trace, déterminant et mineurs d'une matrice	159
3.4	Matrice inverse, propriétés de la trace et du déterminant d'une matrice	167
3.5	Spectre d'une matrice : ses valeurs et ses vecteurs propres	180
3.6	Changement de base	184
3.7	Diagonalisation des matrices et premières applications	187
3.8	Dégénérescence, matrices diagonalisables et non diagonalisables	202
3.9	Matrices hermitiennes, matrices unitaires et leurs propriétés	213
3.10	Applications aux systèmes des oscillateurs couplés	226
3.11	Supplément : triangularisation des matrices qui ne sont pas diagonalisables	238
4	ANALYSE RÉELLE : SUITES ET SÉRIES	243
4.1	Suites convergentes et non convergentes	243
4.2	Séries convergentes et non convergentes. Critères de convergence	252
4.3	Séries entières	268
4.4	Séries de Taylor et développement en série entière de fonction classique	273
4.5	Notion de prolongement analytique	283
4.6	Exercices sur les calculs des séries	287

5	ANALYSE RÉELLE : INTÉGRALES	297
5.1	Intégrale : définition et propriétés	297
5.2	Calcul des intégrales par la primitive	303
5.3	Intégrales impropres	308
5.4	Autres méthodes de calculs des intégrales	334
5.5	Compléments	345
6	NOTIONS DE THÉORIE DES PROBABILITÉS	349
6.1	Événements et leur probabilités	349
6.2	Variables aléatoires	365
6.3	Exemples de distributions classiques	372
6.4	Appendices	390
7	ANALYSE COMPLEXE	403
7.1	Fonctions holomorphes	403
7.2	Intégration des fonctions holomorphes	436
7.3	Dérivabilité et développements en série des fonctions holomorphes et prolongement analytique	456
7.4	Série de Laurent et théorème des résidus	475
8	TRANSFORMATIONS DE FOURIER ET DE LAPLACE	519
8.1	La transformée de Fourier : définitions et propriétés	519
8.2	Dérivabilité et décroissance à l'infini	532
8.3	Réciprocité	544
8.4	Convolution et transformation de Fourier	549
8.5	Transformation de Fourier dans $L^1(\mathbb{R}^n)$	556
8.6	Transformation de Laplace	561
8.7	Exercices sur l'ensemble du chapitre	572
8.8	Supplément 1 : listes de base des transformées	583
8.9	Supplément 2 : la fonction δ de Dirac	586
9	ESPACE DE HILBERT	589
9.1	Espace L^2 , espace de Hilbert	589
9.2	Séries de Fourier	596
9.3	Bases hilbertiennes et polynômes orthogonaux	605
9.4	Opérateurs dans un espace de Hilbert	625
9.5	Application : réponse linéaire, fonction de Green	640
10	ÉLÉMENTS D'ANALYSE DES DISTRIBUTIONS	653
10.1	Fonctions généralisées et distributions : définitions, opérations, formes limites	653
10.2	Une suite d'exemples de distributions singulières	664
10.3	Étude approfondie de la fonction $\delta(x)$	672
10.4	Transformation de Fourier des distributions. Convolution des distributions	681
10.5	Fonction $\delta(\vec{r})$ de Dirac dans l'espace tridimensionnel	686
	INDEX	690