

REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE

MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

UNIVERSITE DE BLIDA  
INSTITUT D'AERONAUTIQUE

MEMOIRE DE MAGISTERE EN AERONAUTIQUE

OPTION : AERONAUTIQUE

THEME

**DEVELOPPEMENT ET COMPARAISON  
DE TROIS METHODES DE CALCUL DES  
ECOULEMENTS TRANSSONIQUES**

Soutenu par : KBAB HAKIM

Devant une commission d'examen composée par

- Président :	Mr BOUKRAA Salah	M / Conférence	U. BLIDA
- Rapporteurs :	Mr HADDAD Abdelkrim	M / Conférence	U.GUELMA
	Mr YOUBI Zineddine	M / Conférence	U. BLIDA
- Examineurs :	Mr REZOUG Tahar	M/A Chargé de cours	U. BLIDA
	Mr BENYAMINA Mohamed	M/A Chargé de cours	U. BLIDA
	Mr BOUNEDDER Mohamed	M/A Chargé de cours	U. BLIDA

REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE

MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

UNIVERSITE DE BLIDA  
INSTITUT D'AERONAUTIQUE

MEMOIRE DE MAGISTERE EN AERONAUTIQUE

OPTION : AERONAUTIQUE

THEME

**DEVELOPPEMENT ET COMPARAISON  
DE TROIS METHODES DE CALCUL DES  
ECOULEMENTS TRANSSONIQUES**

Soutenu par : KBAB HAKIM

Devant une commission d'examen composée par

- Président :	Mr BOUKRAA Salah	M / Conférence	U. BLIDA
- Rapporteurs :	Mr HADDAD Abdelkrim	M / Conférence	U. GUELMA
	Mr YOUBI Zineddine	M / Conférence	U. BLIDA
- Examineurs :	Mr REZOUG Tahar	M/A Chargé de cours	U. BLIDA
	Mr BENYAMINA Mohamed	M/A Chargé de cours	U. BLIDA
	Mr BOUNEDDER Mohamed	M/A Chargé de cours	U. BLIDA

## RESUME

La poussée d'un moteur dépend essentiellement de la vitesse des gaz de combustion qui se détendent supersoniquement dans la tuyère de Laval.

Ces vitesses sont fonction de celles qui sont au niveau du col. Plusieurs méthodes ont été développées pour décrire le calcul de ces vitesses.

La présente étude consiste principalement à appliquer les méthodes de Sauer, Hall et de Kliegel & Levine basées sur l'approche classique des petites perturbations (Sauer) et celle d'un développement en série (Hall et Kliegel & Levine). Ceci est réalisé grâce au développement et à l'application de procédures de calculs adéquates.

L'application de ces dernières a été réalisée sur des moteurs appartenant à des engins de recherches aérospatiales (ONERA).

Les résultats obtenus sont comparés à ceux expérimentaux disponibles. L'influence des différents paramètres régissant les écoulements transsoniques ont aussi été étudiés. Leur variation est comparée en termes des trois méthodes faisant l'objet de cette étude.

Il apparaît que l'approche de Kliegel & Levine possède une application plus générale car tenant compte des rayons au col possédant des faibles valeurs.

### Mots clés

Tuyères convergentes-divergentes ; écoulements transsoniques

### Méthodes de :

Sauer ; Hall ; Kliegel & Levine

## REMERCIEMENTS

La réalisation de cette étude n'aurait pu menée à bien sans l'aide du dieu ainsi que le soutient de plusieurs personnes à cet effet :

Je remercie tout particulièrement Monsieur A K. Haddad, pour avoir assurer la direction de la thèse, pour son appui scientifique et la confiance qu'il m'a accordée.

Je voudrais exprimer ma profonde reconnaissance à Monsieur Z. D. Youbi, mon co-promoteur, pour ses conseils et pour toute l'aide qu'il m'a apportée.

Je remercie Monsieur T. Rezzoug directeur de la post-graduation et de la recherche scientifique pour les conseils et les suggestions dont il m'a fait part.

Je remercie Monsieur S. Boukraa président du conseil scientifique de l'institut d'Aéronautique, ainsi que Monsieur M. Benyamina et Monsieur M. Bounder tous deux chargé de cours à l'institut d'Aéronautique qui ont accepté de faire partie du jury et de me faire-part de leurs critiques, remarques et leurs conseils.

Je voudrais exprimer ma profonde reconnaissance pour mes cousins en particulier Kebbal El Hadj et son fils Tayeb pour le soutient et l'aide qu'ils m'ont portée durant tout mon cursus universitaire.

Enfin, que mes ami(es) soient ici remerciés pour l'estime et la solidarité dont ils ont fait preuve à mon égard, et des remerciements particuliers pour le responsable du centre de calcul (Dalila), ainsi que monsieur A. BELAROUCI.

# SOMMAIRE

RESUME	I
REMERCIEMENTS	II
NOMENCLATURE	III
<b>CHAPITRE 1 :</b>	
<b>INTRODUCTION</b> .....	1
1-1 INTRODUCTION [17] : .....	1
1-2 RECHERCHE BIBLIOGRAPHIQUE : .....	3
1-3 PLAN DE TRAVAIL : .....	10
<b>CHAPITRE 2 :</b>	
<b>GENERALITES SUR LES TUYERES</b> .....	11
2-1 INTRODUCTION [31-33] : .....	11
2-2 DIFFÉRENTES CONFIGURATIONS DE TUYERES SUPERSONIQUES [1-31- 33]: .....	12
2-2-1 <i>La tuyère conique</i> : .....	12
2-2-2 <i>Tuyère contour profilée</i> : .....	13
2-2-3 <i>La tuyère annulaire</i> : .....	14
2-2-4 <i>Les tuyères auto – ajustables</i> : .....	15
2-3 PRINCIPAUX PARAMETRES DE PERFORMANCES : .....	17
2-3-1 <i>La poussée</i> [17] : .....	17
2-3-2 <i>Débit d'une tuyère</i> : .....	19
2-3-3 <i>Vitesse effective</i> : .....	20
2-3-4 <i>Impulsion spécifique</i> : .....	21
2-3-5 <i>L'impulsion totale</i> : .....	21
<b>CHAPITRE 3 :</b>	
<b>APPROCHES NUMERIQUES ET ANALYTIQUES POUR LA RESOLUTION DES ECOULEMENTS TRANSSONIQUES</b> .....	22
3-1 INTRODUCTION : .....	22
3-2 METHODES NUMERIQUES : .....	23
3-2-1 <i>Méthode des éléments finis</i> [10] : .....	23
3-2-2 <i>La méthode des relations intégrales</i> [9] : .....	26
3-3 METHODES ANALYTIQUES : .....	30
3-3-1 <i>Méthode de Oswatitsh-Rothstein</i> [25] : .....	31
3-3-2 <i>Méthode de Taylor</i> [17] : .....	31
<b>CHAPITRE 4 :</b>	
<b>DEVELOPPEMENT DES METHODES DE SAUER, HALL ET KLIEGEL &amp; LEVINE</b> .....	33
4-1 INTRODUCTION : .....	33
4-2 METHODE DE SAUER [2] : .....	34
4-2-1 <i>Formulation Mathématique</i> : .....	34
4-2-2 <i>Résolution de l'équation</i> : .....	37
4-2-3 <i>Ecoulement bidimensionnel (<math>\delta = 0</math>)</i> : .....	40
4-2-4 <i>Ecoulement axisymétrique (<math>\delta = 1</math>)</i> : .....	40

4-2-5 Ecoulements autour des profils : .....	42
4-3 METHODE DE HALL [3] : .....	44
4-3-1 Formulation mathématique: .....	44
4-3-2 Conditions aux limites : .....	47
4-3-3 Solution pour un écoulement bidimensionnel ( $\delta = 0$ ) : .....	48
4-3-4 Discussions de la solution bidimensionnelle : .....	56
4-3-5 Solution pour un écoulement axisymétrique ( $\delta = 1$ ) : .....	61
4-3-6 Discussions de la solution axisymétrique : .....	66
4-4 METHODE DE KLIEGEL ET LEVINE : .....	69
4-4-1 Les coordonnées toroïdales : .....	69
4-4-2 Discussions de la solution axisymétrique : .....	72

## CHAPITRE 5 :

<b>APPLICATIONS AUX CAS D'ETUDE, RESULTATS ET COMPARAISONS .....</b>	<b>76</b>
5-1 INTRODUCTION : .....	76
5-2 PREMIER CAS D'ETUDE : 'TUYERE BERENICE' : .....	77
5-2-1 La forme de la ligne sonique : .....	80
5-2-2 Influence du rapport de chaleur spécifique $\gamma$ sur la ligne sonique : .....	82
5-2-3 Influence du rayon de courbure $R$ sur la ligne sonique : .....	82
5-2-4 Variation du coefficient de décharge : .....	86
5-2-5 Distributions des isobares au col et "Branch-line": .....	91
5-3 DEUXIEME CAS D'ETUDE TUYERE "ANTARES " : .....	96
5-3-1 La ligne sonique : .....	98
5-3-2 Influence du rapport de chaleur spécifique ( $\gamma$ ) : .....	101
5-3-3 Influence du rayon de courbure $R$ : .....	101
5-3-4 Variation du coefficient de décharge : .....	105
5-3-5 Distribution des isobares au col et "branch-line" : .....	108
<b>CONCLUSION ET RECOMMANDATIONS .....</b>	<b>113</b>
1- Conclusion : .....	113
2- Recommandations : .....	115

## REFERENCES

# NOMENCLATURE

## Systeme de coordonnees

x : coordonnee axiale

y : coordonnee radiale

## Lettres latines

A : aire de section

a : vitesse locale du son

$C_D$  : coefficient de decharge

$C_F$  : coefficient de pousse

D : dynalpie

F : pousse

M : nombre de mach

g : acceleration de la pesanteur

I : impulsion totale

$I_s$  : impulsion specifique

P : pression

T : temperature

$\dot{m}$  : debit massique

$R_G$  : constante des gaz parfait

u : composante axiale du vecteur vitesse

$\bar{u}$  : composante axiale de la vitesse de perturbation definie par sauer

$\underline{u}$  : composante axiale de la vitesse de perturbation dimensionnelle de sauer

v : composante radiale de la vitesse .

$\bar{v}$  : composante radiale de la vitesse de perturbation definie par sauer

$\underline{v}$  : composante radiale de la vitesse de perturbation dimensionnelle de sauer .

$V_{eff}$  : vitesse effective des gaz

W : composante de la vitesse

$R_t$  : col de la tuyère

$R_{au}$  : rayon de courbure amont

$R_{av}$  : rayon de courbure aval

$r_t$  : rayon au col

### **Lettre grecques :**

$\gamma$  : rapport de chaleurs spécifiques.

$\delta$  : switch déterminant le type d'écoulement

$\rho$  : densité

$\theta$  : direction de l'écoulement

$\varphi$  : potentiel de vitesse

$\alpha$  : constante.

$\lambda$  : coefficient de perte de poussée

$\alpha, \beta$  : angles

$\psi$  : fonction

$\eta, \varepsilon$  : coordonnées toroïdales

$\Gamma$  : vortex

$\infty$  : conditions avales



# CHAPITRE 1 : INTRODUCTION

## 1-1 INTRODUCTION :

Les progrès rapides observés ces dernières années dans le domaine de la propulsion en général, et plus spécialement dans la propulsion aérothermique, sont étroitement liés aux efforts effectués pour rendre toujours plus efficace et plus précise l'analyse des phénomènes aérothermodynamiques dans le circuit moteur. Cette remarque s'applique particulièrement bien à l'étude de l'écoulement dans les tuyères et à leur sortie qui fait l'objet de cette dernière.

Pendant longtemps, la tuyère d'un turboréacteur a été considérée à cause de sa simplicité comme un organe annexe dont le rôle consistait essentiellement à assurer le fonctionnement du turbocompresseur à un régime donné, par une adaptation convenable de sa forme géométrique.

Les méthodes de calculs élémentaires de l'aérodynamique permettaient de déterminer cette condition avec précision suffisante. Comme le rapport de compression était assez faible, on se contentait alors d'une éjection sonique de sorte que la poussée au point fixe était elle aussi aisément calculable. L'intervention de calculs aérodynamiques plus précis semblait donc dans ces conditions d'un intérêt purement académique.

L'avènement du vol supersonique à ses débuts d'ailleurs n'a pas provoqué à cet égard un changement d'attitude immédiat chez les constructeurs, car le souci majeur pour les premiers avions supersoniques militaires était surtout d'assurer de bonnes conditions de vol subsoniques ou transsoniques de sorte que l'emploi d'un divergent était pratiquement proscrit pour éviter les régimes de surdetente à ces vitesses modérées.

Le vol supersonique étant par ailleurs généralement limité à une très faible portion de la mission, ne justifiait pas les trop grandes complications technologiques qu'aurait entraîné l'introduction d'un divergent.

Il arrivait parfois aussi que l'on constatât en vol des pertes de poussée considérables dues à l'interaction du jet sonique et de l'écoulement extérieur sans qu'une étude vraiment systématique ait été effectuée.

Il en est plus de même depuis que des avions de transport supersoniques volent au-dessus de mach 2 pendant plusieurs heures. Il apparaît en effet clairement que la rentabilité de tels projets n'est assurée que si les performances optimales sont obtenues de tous les éléments du moteur. Dans un avion tel que le concorde par exemple, une diminution d'un pour cent de la consommation spécifique entraîne un gain direct de 5 à 6 passagers sur la traversée atlantique.

Dans de tels projets le rôle assigné à la tuyère peut être défini par les conditions suivantes [17] :

1- Elle doit d'abord assurer le blocage de l'écoulement aux divers régimes de fonctionnement du moteur, avec ou sans postcombustion ; ceci implique une possibilité de variation de la surface du col en fonction du débit et des conditions de température et de pression des gaz à évacuer.

2- La tuyère doit aussi assurer la détente optimale des gaz de combustion, c'est à dire la poussée maximale au régime de croisière, ce problème n'est pas simple car la section de sortie de la tuyère doit être raccordée au maître couple du moteur ou à la structure de l'avion par un carénage. Il est évident que la forme de ce carénage, et par conséquent les pressions qu'il subira en vol du fait de l'écoulement extérieur, dépend de la forme et de la dimension de sortie de la tuyère. Il ne servira à rien d'optimiser la tuyère au banc d'essai, si des dépressions importantes devaient se produire en vol sur le carénage de raccordement. Ainsi l'étude d'optimisation, impose l'étude globale de l'arrière corps.

3- Aux régimes de vol intermédiaires, il faut encore que la tuyère ne provoque pas de pertes de poussée trop élevées du fait de son inadaptation. Dans ces régimes, ce sont les sur-détentes qui sont à craindre et à éviter. Leur analyse impose une étude approfondie des conditions de décollement d'un écoulement.

4- En dehors du flux principal du moteur, il existe en général un ou plusieurs flux secondaires provenant soit de l'air de refroidissement soit d'un piège de la couche limite de la prise d'air. Ces flux qui représentent jusqu'à 5 ou 6% du débit total doivent être éjectés dans les meilleures conditions soit dans des tuyères séparées, soit dans la tuyère principale comme dans le cas du Concorde.

5- A l'atterrissage, la tuyère peut contribuer au freinage de l'avion en organisant un reversement de la poussée soit dans un circuit spécial dès la sortie du moteur, soit par déviation du jet à la sortie de la tuyère principale.

6- Enfin ; une autre préoccupation que nous ne citons ici que pour mémoire, est celui du bruit dont l'atténuation peut être assurée par la tuyère.

Il n'est pas possible dans le cas de cette étude limitée de discuter et de traiter tous ces problèmes, dont certains sont encore très loin d'être accessibles à un traitement rationnel, mais on se contentera de l'étude d'une partie de cette tuyère dans la région du col où l'écoulement est transsonique, l'étude proposée consiste essentiellement à appliquer quelques méthodes analytiques pour étudier le comportement du fluide dans cette région.

## 1-2 RECHERCHE BIBLIOGRAPHIQUE

Depuis plusieurs années, la résolution numérique ou analytique des problèmes aérodynamiques, tels que les écoulements des fluides dans les tuyères convergentes-divergentes, est devenue possible grâce aux travaux réalisés par plusieurs chercheurs dans le domaine.

Les tuyères supersoniques dont le but essentiel est d'assurer l'accélération des gaz de combustion à des vitesses supersoniques, interviennent dans beaucoup de structures telles que les moteurs fusées, les moteurs d'avions et dans la fabrication des souffleries supersoniques pour une étude expérimental des écoulements réels.

Comme nous l'avons déjà mentionné précédemment, les tuyères propulsives ont été considérées à cause de leur simplicité comme un organe annexe. Son rôle consistait à assurer le bon fonctionnement du turbocompresseur à un régime donné.

Par conséquent, la conception de tuyères convergentes-divergentes reçoit une attention particulière et fait l'objet d'intenses et nombreuses recherches [1-7-12-34-36].

L'optimisation du choix d'une tuyère supersonique doit tenir compte en plus de calculs de dynamique des gaz, les divers paramètres tels que le matériau utilisé, le mode de fabrication, les exigences de refroidissement et les limites admissibles de dimensionnement [38].

En 1958, Rao [38] a développé une méthode de base pour la conception de tuyères supersoniques. Elle permet la conception de tuyères performantes dont le contour est déterminé grâce à des calculs variationnels. Une autre approche directe pour la conception du contour de la tuyère a été proposé par Guderley et Hantch en 1955 [19]. Le problème de calcul de la section de sortie et du contour pouvant fournir une poussée optimale a été proposé en spécifiant uniquement la longueur et la pression ambiante. Un calcul variationnel permettant de résoudre le problème du champ d'écoulement à la sortie, nécessaire à atteindre. La dernière étape consiste en l'application la méthode des caractéristiques, présente dans différents ouvrages pour déterminer le contour supersonique de la tuyère.

Afin d'atteindre un écoulement uniforme à la sortie par conséquent des poussées maximales, les travaux [34-35-36-37] utilisent des tuyères convergentes-divergentes en forme de cloche dont la section divergente est simulée par un polynôme de second degré. Cette simulation conduit à des tuyères dont les performances se comparaient à celles de Rao[38]. Dans un premier temps, ils se sont intéressés aux calculs de l'écoulement transsonique se produisant au voisinage du col ; celui-ci a été simulé grâce à plusieurs approches qui représentent le but de notre étude. Pour le calcul de l'écoulement supersonique se tenant au sein de la tuyère, ils utilisent la méthode des caractéristiques[37].

La poussée d'un moteur dépend essentiellement des vitesses d'éjection des gaz de combustion. Ces vitesses sont proportionnelles à celles qui sont au niveau du col qui représente la région transsonique dans la tuyère[11].

La présente étude s'est intéressée à la description du comportement d'un fluide compressible dans une région très complexe de la tuyère en l'occurrence le col. Vu qu'au sein de cette partie l'écoulement doit atteindre les conditions soniques pour nous donner ensuite un écoulement supersonique dans le divergent.

Depuis le premier vol historique des frères Wright en 17 décembre 1903, le monde de l'aviation a subi durant un siècle une révolution considérable. A travers cette révolution, la mécanique des fluides et en particulier les écoulements compressibles ont trouvé leur place durant cette phase de développement.

Cependant, l'étude des écoulements transsoniques dans le col de la tuyère n'a pu attirer l'attention majeure qu'après la première guerre mondiale.

L'étude de ces écoulements a fait l'objet de plusieurs années de recherches, afin d'avoir une idée sur le comportement des fluides dans ces régions très complexes de la tuyère.

Finalement, dans ce qui suit on va citer quelques travaux effectués par différents chercheurs durant ces dernières années, pour la description de l'écoulement transsonique se produisant au niveau du col.

Les premières tentatives pour résoudre ces types d'écoulements, ont été faites par Mayer 1908, Taylor 1930 pour le cas des écoulements plan et Hooker 1931 pour le cas des écoulements axi-symétriques. Ils ont utilisé des séries de puissances inverses des coordonnées  $x$  et  $y$ , tel que l'abscisse  $x$  est mesurée le long de l'axe de la tuyère et  $y$  perpendiculaire à  $(ox)$ . Ces séries se terminent au terme de l'ordre quatre. Mais les résultats obtenus par ces auteurs sont pas satisfaisants, vu que la négligence des termes d'ordre supérieur à quatre pour  $y$  est injustifiée. En réalité, ces termes peuvent devenir très importants au niveau de la paroi. Bien que ces méthodes aient servi de base pour les

études qui sont venues après, surtout la méthode de Taylor qui est utilisée pour des tuyères dont le rayon au col est très faible[3].

La méthode de Oswatitsh-Rothstein [25], a été développée dans le but d'étudier le comportement du fluide dans la région du col pour des tuyères dont le paramètre  $R$  est grand. Elle donne la solution en termes de séries de puissances pour les composantes radiale et axiale de la vitesse. A cause de la symétrie par rapport à l'axe ( $ox$ ), les composantes  $u_x$  et  $u_r$  sont développées en séries de Taylor à  $r = 0$  (axe de la tuyère). La vitesse potentielle est introduite et en utilisant les équations de la dynamique des gaz, ça été montré que les coefficients de ces deux séries dépendent essentiellement de la vitesse à la ligne centrale et ses dérivées. Le problème est amené à calculer où a supposer cette vitesse.

En 1942, R. Sauer[2] développa une méthode pour l'étude des écoulements transsoniques qui est basé sur la théorie des petites perturbations. L'étude a résolu l'équation des petites perturbations pour un écoulement compressible pour les deux cas plan et axi-symétrique. Elle donne la solution en termes de puissances inverses du paramètre  $R$  au premier ordre, en négligeant les termes à partir du deuxième ordre, sachant que le paramètre  $R$  représente le rapport du rayon de courbure amont au rayon de la tuyère. L'application de cette méthode sur des tuyères de rayon de courbure égale à 0.625, a donné des résultats satisfaisants. La méthode est très intéressante, elle a été utilisée par de nombreux chercheurs pendant plusieurs années. Son avantage réside dans le fait qu'elle peut être appliquée sur des écoulements autour des profils arbitraires. Son inconvénient est qu'elle ne donne aucune information sur la direction du fluide, ni sur la distribution des isobares, de plus elle diverge pour des paramètres  $R$  très petits.

En 1949, Hall[3] développa une autre méthode, qui donne la solution pour les composantes de vitesse axiale et radiale sous forme de séries de puissances inverses de  $R$ . Cette méthode néglige les termes à partir du quatrième ordre. Cette approximation est justifiée, vu que la solution obtenue pour les termes de grand ordre ne sont pas différents de la solution du troisième ordre[3]. La méthode est utilisée pour des tuyères dont le profil du col amont est de forme parabolique, hyperbolique ou arc circulaire, mais l'analyse peut être modifiée pour d'autres profils s'il est nécessaire. Cette approche, en

plus des résultats donnés par la méthode de Sauer, elle donne aussi, la direction de l'écoulement, la distribution des isobares et la "branch-line". Son inconvénient réside dans le fait qu'elle diverge pour des petites valeurs de  $R$ . Beaucoup de recherches ont été faites dans ce sens et elles ont montré que ces problèmes sont dus au système de coordonnées utilisé.

En effet le paramètre  $\frac{1}{R}$  dans la méthode de Hall est introduit dans les conditions aux limites à la paroi qui exige que l'angle formé par la direction du fluide soit égale à la pente locale de la paroi.

Mais cette limite n'est pas une coordonnée constante dans le système de coordonnées cylindriques et elle doit être évaluée comme une série de puissances inverses de  $R$ . Ainsi la condition au limite à la paroi n'est jamais satisfaite dans le système de coordonnées ajoutant qu'à la paroi la vitesse radiale  $v$  est proportionnelle à sa pente qui peut devenir très importante au voisinage du col dans la tuyère où  $R < 1$ .

Donc le travail consiste à trouver la solution dans un autre système de coordonnées où l'axe et la paroi de la tuyère sont tous les deux les lignes de coordonnées.

En 1969, Klegel-Levine[4] et afin d'améliorer l'étude de Hall, ils ont proposé un autre système de coordonnées toroïdales où l'axe et la paroi de la tuyère sont tous les deux axes de coordonnées. Les trois premières approximations des composantes axiale et radiale sont déjà calculées par Hall, en négligeant toujours les termes à partir du quatrième ordre. En plus les deux auteurs ont proposé une autre approximation des composantes de la vitesse en termes de puissances inverses du paramètre  $R$  ajouté à l'unité, c'est à dire  $(R+1)$  au lieu de  $R$ , comme ça été le cas dans la méthode de Hall.

En 1970, S. G. Liddle et R. D. Archer[9] ont adopté une méthode appelée "relations intégrales" pour résoudre les équations d'un champ fluide d'un gaz parfait dans des tuyères axi-symétriques de forme arbitraire et en particulier dans les tuyères coniques qui sont généralement utilisées dans la propulsion. Cette méthode se base sur l'intégration des équations de continuité et d'irrotationalité à travers des pas dans la direction radiale.

L'application de cette méthode sur une tuyère conique dans un système de coordonnées cylindriques a donné des résultats compatibles avec l'expérimental pour les régimes subsoniques et transsoniques. En utilisant un pas unique, la méthode a donné des résultats satisfaisants pour la distribution de la pression à la paroi pour des paramètres de  $R \geq 2$  et la distribution de la pression sur l'axe pour des paramètres de  $R \geq 4$ . Pour la solution à deux pas, de très bon résultats ont été obtenus pour la distribution de la pression à la paroi quand  $R \geq 0.625$ , et pour  $R \geq 2$  on obtient des résultats probants pour la distribution de la pression sur l'axe. Donc, en augmentant le nombre de pas, la méthode devient plus efficace. En présence de l'onde choc la méthode ne peut pas être utilisée.

Autres méthodes qui ont pris en charge l'étude de ce type d'écoulements on trouve celles élaborées respectivement par Rizk, Serag El Dine et Moubarek [27] publiée en 1983 qui considère que le champ fluide dans la région transsonique est un problème semi-elliptique[5] et la distribution de la pression au col peut être obtenue par cette dernière. La méthode de "time marching"[5] donne la position de la ligne sonique et l'onde de choc.

Enfin, on ne peut pas s'en passer de l'étude de Kenneth E. Tatum[10]: qui a résolu le problème des écoulements transsoniques autour d'un profil d'aile par la méthode des éléments finis. Elle est la plus employée dans le domaine de l'industrie. Elle représente beaucoup d'avantage, tel que sa capacité d'intervenir dans les écoulements autour des géométries très complexes. Cette méthode est stable pour ce type d'écoulements où les équations sont elliptiques.

Actuellement, beaucoup d'efforts sont déployés pour appliquer cette méthode pour les écoulements dans la région du col de la tuyère.

A travers ce tour d'horizon dans le domaine de calcul des écoulements transsoniques, on a constaté que ces auteurs ont donné la solution en termes de puissances inverses du paramètre  $R$ . Ce choix peut être justifié soit par l'expérimental où ces auteurs ont remarqué l'influence de ce paramètre sur l'écoulement. Soit en se basant sur la théorie, parce qu'au niveau de la ligne centrale  $\frac{1}{R}$  tend vers l'infini c'est à dire la vitesse est



maximale. On avait aussi remarqué que même les résultats obtenus par la méthode des relations intégrales sont en fonction de ce paramètre.

Donc, pour comprendre bien l'influence de ce paramètre sur l'écoulement on s'est référé aux deux applications suivantes:

L.H.Back, P.F.Massier, et H.L.Gier [7] en 1966 et pour bien comprendre l'équilibre d'un fluide à travers des tuyères supersoniques, une étude expérimentale a été faite sur deux types de tuyères dont le paramètre  $R$  est égale à 2 et 0.425. Les résultats obtenus ont été comparés à ceux obtenus par quelques méthodes citées ci-dessus et ils ont constaté que :

1 - Dans la région du col où l'écoulement est transsonique, les résultats obtenus pour un écoulement bidimensionnel par les méthodes de Sauer et Hall sont en accord acceptable avec l'expérimental pour  $R=2$ , mais insatisfaisants pour  $R=0.425$ .

2 - Les paramètres de l'écoulement dépendent essentiellement de la valeur de  $R$ . Le changement de la géométrie du col amont n'avait aucune incidence majeure sur l'écoulement.

3 - Le coefficient de décharge augmente en fonction de  $R$  pour se stabiliser au voisinage de l'unité.

Une autre étude similaire a été faite par T. Ingolf et A. Weiderman en 1985, en appliquant les méthodes de Hall et Kliegel & Levine sur d'autre types de tuyères et ils sont arrivés aux même conclusions c'est à dire:

1 - Les résultats obtenus sont compatibles avec ceux obtenus par la méthode analytique de Oswatitsh-Rothstein et ceux obtenus par la méthode numérique "time-marching".

2 - Le changement de géométrie en gardant toujours la même valeur de  $R$  n'avait pas d'incidence majeure sur les paramètres de l'écoulement.

3 - Le coefficient de décharge augmente en fonction de  $R$  pour atteindre une valeur très voisine de l'unité.

### 1-3 PLAN DE TRAVAIL

Le mémoire est devisé en cinq chapitres. Dans le premier, on a parlé sur le rôle assigné à une tuyère de propulsion, les travaux effectués dans le domaine de calcul des écoulements transsoniques, ainsi que le but et les objectifs recherchés à travers cette étude. Le deuxième chapitre présente les différents types de tuyères et leurs performances. Le développement de quelques méthodes de calcul des écoulements transsoniques fera l'objet du troisième chapitre. Dans le quatrième chapitre, une étude détaillée sera faite pour les trois méthodes analytiques qui sont généralement les plus utilisées dans le domaine en l'occurrence les méthodes de Sauer, Hall et Kliegel & Levine. Un programme de calcul sera élaboré pour chaque méthode. Le cinquième chapitre fera l'objet d'une étude comparative entre ces méthodes, et les principaux résultats seront présentés dans ce chapitre.

Finalement, une conclusion sera tirée et des perspectives de recherches ultérieures seront présentées.

## CHAPITRE 2 : GENERALITES SUR LES TUYERES

### 2-1 INTRODUCTION [31-33] :

La poussée d'un moteur dépend principalement de la vitesse des produits des gaz de combustion à travers la section de sortie qui le propulse. Durant le passage à travers une tuyère de laval, les gaz d'échappement sont accélérés de vitesses subsoniques à des vitesses supersoniques.

Le passage de ces écoulements par ces différentes vitesses permet de diviser une tuyère convergente divergentes en trois sections, le convergent subsonique où l'écoulement passe d'une vitesse presque nulle à celle du son qu'il atteint au col pour enfin se détendre au sein du divergent supersonique. Cette division appropriée car d'une part elle permet la détermination de la poussée totale développée et d'autre part car différentes méthodes d'analyses sont utilisées pour déterminer le champ d'écoulement dans chaque région.

La vitesse sonique atteinte au col par les gaz d'échappement est fixée par les conditions prévalant au sein de la chambre de combustion. Si cette vitesse est atteinte, la tuyère est dite adaptée et une future détente dans le divergent l'augmente encore pour atteindre les vitesses supersoniques. Cette vitesse additionnelle dépend uniquement de la configuration de la paroi du divergent et de l'aire de la section de sortie. Depuis plusieurs années, la conception de la portion divergente supersonique reçoit une attention particulière et fait l'objet d'intenses et nombreuses recherches afin d'atteindre des vitesses de sortie et des poussées de plus en plus importantes.

L'optimisation du choix d'une tuyère de propulsion doit tenir compte de plus des calculs de dynamique des gaz qui nous intéressent, de divers paramètres tels que les matériaux utilisés, le mode de fabrication de la paroi, les exigences de refroidissement et les limites admissibles de dimensionnement.

## 2-2 DIFFERENTES CONFIGURATIONS DE TUYERES SUPERSONIQUES [1-31- 33].

Le maximum de poussée pour une tuyère est obtenue lorsque l'écoulement à la sortie est uniforme (direction axiale) et possède une pression égale à celle ambiante, l'écoulement étant assumé non visqueux, il ne peut y avoir de fluide traversant une ligne de courant. Par conséquent, le profil de la paroi solide peut être assumé comme confondu avec une ligne de courant. Tenant compte de ces deux principes de base et essayant de développer un maximum de poussée, plusieurs configurations de tuyères ont été proposées dont les plus fréquentes utilisées sont présentées dans le présent paragraphe.

### 2-2-1 LA TUYERE CONIQUE :

La forme géométrique la plus simple d'une tuyère est un cône figure (2-1). bien que la vitesse de sortie des gaz de combustion d'une tuyère conique est essentiellement égale à sa valeur unidimensionnelle correspondante a un rapport de section donné ; la direction de l'écoulement à la sortie n'est pas axiale ; par conséquent, une diminution de poussée due à la divergence de l'écoulement est engendrée ; cette perte est prise en compte grâce à un facteur dépendant principalement de l'angle de divergence et il est défini par Melina[18] :

$$\lambda = \frac{1 + \cos\alpha}{2} \quad (2-1)$$

Dans le cas des petits moteurs propulsifs, il est généralement plus pratique d'utiliser des tuyères coniques à cause particulièrement de leur simplicité de fabrication .

Habituellement, le demi-angle du cône est pris égale à 15°. La longueur de ce type de tuyère est petit relativement à celle de la tuyère idéale. Le coefficient de poussée qu'elle développe est inférieur d'aproximativement 1,7% de celui du cas idéal. Cette configuration est souvent utilisée comme base de comparaison en termes de poussée et de longueur .

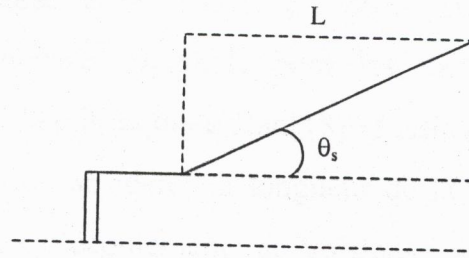


Fig (2-1) : tuyère conique

### 2-2-2 TUYERE CONTOUR PROFILEE :

Les pertes de performances notamment en termes de poussée de la configuration conique due à la divergence de l'écoulement à la sortie augmente avec l'angle  $\alpha$  que fait la direction de la paroi avec l'axiale.

Une méthode permettant d'éviter cet inconvénient est de 'tourner' la section divergente vers l'intérieur comme indiqué sur la figure (2-2). Dans ce cas on pourra donner une valeur relativement importante à l'angle de divergence situé près du col permettant de réaliser une importante détente sans gêner l'axialité de l'écoulement à la sortie. En effet sa seconde partie du divergent de par sa forme courbée tendra à faire suivre à ce dernier la direction axiale limitant ainsi les pertes de poussée dues à la divergence rencontrée avec les tuyères coniques

Une approche directe pour la conception du contour d'une tuyère a été proposée par Guderley et Hantsh [19] en 1955, le problème du calcul de la section de sortie et du contour pouvant fournir une poussée optimale en spécifiant uniquement la longueur et la pression ambiante. Un calcul variationnel permettant de résoudre le problème du champ d'écoulement à la sortie nécessaire pour l'atteindre. La dernière étape consiste en l'application de la méthode des caractéristiques pour développer le contour supersonique de la tuyère.

Ce dernier étant obtenu de cette manière devrait représenter le profil donnant une poussée optimale pour des valeurs particulières de la section de sortie et de la longueur.

Néanmoins à cause de la nature complexe de la solution présentée, les contours donnant une poussée optimale pour les tuyères de propulsion ont été négligés jusqu'en 1958 date à laquelle Rao[18] réussit de développer une approche simple basée sur le fait de considérer la longueur de la tuyère ainsi que la pression ambiante et les conditions d'écoulement au voisinage du col comme les conditions sous lesquelles, la poussée pourrait être maximale .

En supposant l'écoulement isentropique et en utilisant la méthode des caractéristiques, le contour optimal est ainsi construit. En général ; la tuyère profilée possède des angles au col et a la sortie allant de 20° à 30° pour le premier et de 5° à 14° pour le dernier .

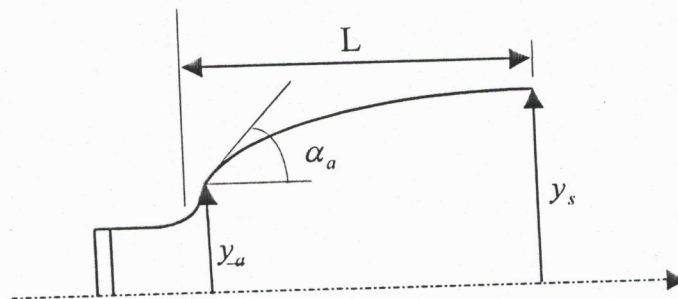


Fig (2-2) : tuyère contour profilée

### 2-2-3 LA TUYERE ANNULAIRE :

Dans les tuyères conventionnelles, le col et la section de la sortie sont généralement formés par des sections circulaires normales à l'axe de la tuyère.

Un autre type de tuyère largement utilisé en turbo- machine est appelé tuyère annulaire, elle possède des sections au col en forme d'anneaux formées par un « bouchon » central et d'une paroi externe. En aval du col , les gaz d'échappement subissent une détente dans l'anneau divergent formé par le contour convergent du « bouchon » central et la section divergente de la tuyère figure (2-3). Si le contour est conique, la poussée est réduite d'un facteur ( $\lambda$ ) qui s'exprime[18] .

$$\lambda = \frac{\frac{1}{2}(\sin \alpha + \sin \beta)^2}{(\alpha + \beta)\sin \beta + \cos \beta - \cos \alpha} \quad (2-2)$$

où  $\alpha$  et  $\beta$  sont les angles formés par l'axe de la tuyère et la paroi extérieure, et l'axe de la tuyère et la paroi intérieure du « bouchon » respectivement.

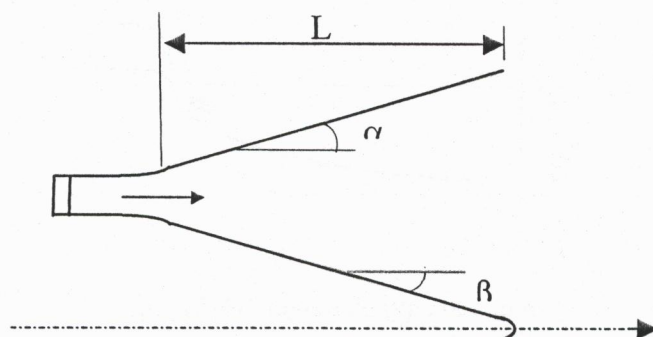


Fig (2-3) : tuyère annulaire

#### 2-2-4 LES TUYERES AUTO – AJUSTABLES :

Contrairement aux configurations précédemment présentées où le processus de détente des gaz est principalement influencé par le contour de la paroi de la section divergente de la tuyère, le processus de détente des gaz dans ce cas est directement ou indirectement régulé par la pression ambiante[1] .

L'écoulement des gaz dans ce cas s'ajuste donc de lui-même pour être conforme aux conditions extérieures. Ces tuyères sont classées en deux catégories

- Tuyère type « bouchon » (plug type )
- Tuyère type détente – déviation (expansion – déflexion type )

##### 2-2-4-1 Tuyère de type « bouchon » ( Plug Type )

Le col de ce type de tuyère possède la forme d'un anneau localisé au diamètre extérieure figure (2-4) l'écoulement est contrôlé par des ondes de détente provoquées par la déviation du « bouchon » dont la surface constitue le principal paramètre qui l'influence.

Les gaz d'échappement subissent une détente de la pression de la chambre de combustion  $P_c$  jusqu'à la pression ambiante  $P_a$  la poussée de ce type de tuyère est identique à celle de la tuyère convergente – divergente .

## 2-3 PRINCIPAUX PARAMÈTRES DE PERFORMANCE

## 2-3-1 LA POUSSÉE [17]

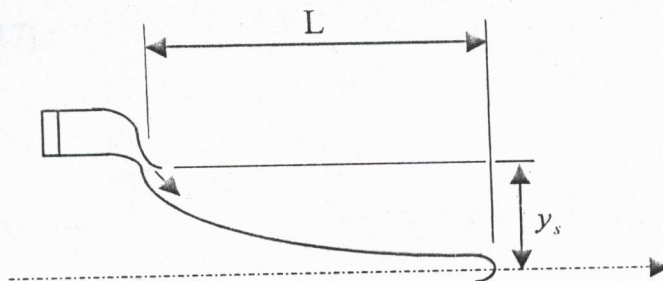


Fig (2-4) : tuyère de type bouchon

## 2-2-4-2 Tuyère type 'Détente – Déviation' :

En ajoutant un obstacle tel que celui décrit dans la figure (2-5) qui permet outre la détente de dévier les gaz de combustion vers l'extérieur, on obtient une tuyère détente -déviation.

Cette configuration permet l'obtention de bonnes performances même dans les conditions au-dessous de celles pour lesquelles elle a été initialement conçue. Les travaux expérimentaux sur les tuyères [1-3] ont montré qu'une utilisation d'angles de déviation d'une valeur aussi importante que  $40^\circ$  pour des rapports de détente bas n'entraînent que des pertes minimales de poussée (une perte de 1% a été enregistrée pour un angle de  $30^\circ$ ).

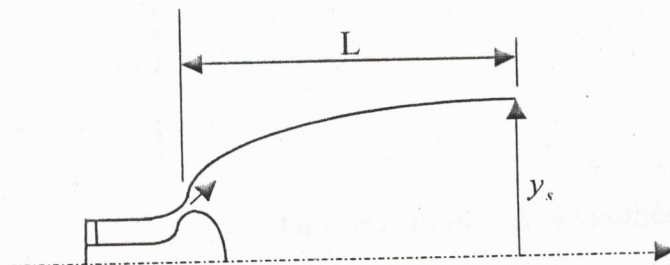
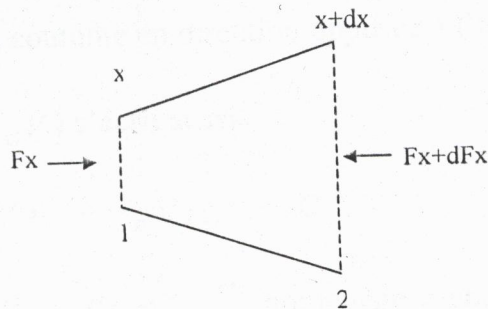


Fig (2-5) : tuyère type détente-déviation



## 2-3 PRINCIPAUX PARAMETRES DE PERFORMANCES :

## 2-3-1 LA POUSSEE [17] :



Considérons une canalisation parcourue par un écoulement supposé monodimensionnel et stationnaire de direction fixe.

Le théorème général de la mécanique  $\vec{F} = M \vec{\gamma}$  appliqué à une tranche de fluide comprise entre les abscisses  $x$  et  $x + dx$  s'écrit immédiatement en désignant par  $dF$  la force axiale exercée par les parois sur ces écoulements.

$$dF + P \cdot A - [P \cdot A + d(P \cdot A)] = \rho A_x \gamma_x dx \quad (2-3)$$

en régime permanent

$$\gamma_x = \frac{dv}{dt} = \frac{dv}{dx/v} \quad (2-4)$$

on en déduit

$$\rho A v dv + d(P \cdot A) = dF \quad (2-5)$$

Mais le débit  $\dot{m} = \rho A v$  étant invariant par hypothèse, cette expression s'intègre entre les sections (1) et (2) pour donner :

$$F_1^2 = (P_2 A_2 + q_m V_2) - (P_1 A_1 + q_m V_1) \quad (2-6)$$

$F_1^2$  représente en projection sur l'axe (ox) la composante de la poussée des parois sur l'écoulement, c'est donc aussi la poussée de l'écoulement sur les parois comptée positivement selon la coutume en direction opposée à l'écoulement.

la grandeur.  $(P A + q_m V)$  s'écrit aussi

$$P \cdot A + q_m \cdot V = (P + \rho V^2) = A \cdot D \quad (2-7)$$

La grandeur  $D = P + \rho V^2$  (\*\*\*) homogène à une pression est appelée dynalpie (A.D) représente alors le flux de dynalpie à travers l'aire A, et on peut énoncer le théorème suivant :

*La poussée d'un écoulement monodimensionnel stationnaire sur un élément de conduite d'axe rectiligne est égale et opposée à la différence de flux de dynalpie sortant et entrant [17].* On notera que la formule (\*\*) ayant été établie sans hypothèse spéciales sur la nature de  $dF$ , la formule est valable même s'il y'a frottement pariétal [17].

Si on introduit la vitesse du son  $a = \sqrt{\frac{\bar{\gamma} \cdot P}{\rho}}$  dans D on peut aussi écrire .

$$D = P(1 + \bar{\gamma} M^2) \quad (2-8)$$

d'où on obtient

$$F_1^2 = P_2 A_2 (1 + \bar{\gamma}_2 M_2^2) - P_1 A_1 (1 + \bar{\gamma}_1 M_1^2) \quad (2-9)$$

Si on fait aussi intervenir  $P_i, T_i$  et  $A^*$  du col on aura :

$$D = \frac{P}{P_i} (1 + \gamma M^2) \cdot P_i \quad (2-10)$$

et le flux de dynalpie dans la section A est donnée

$$A \cdot D = P_i A^* \left[ \frac{P}{P_i} \frac{A}{A^*} (1 + \bar{\gamma} M^2) \right] \quad (2-11)$$

## 2-3-2 DEBIT D'UNE TUYERE :

Dans la théorie monodimensionnelle, le débit d'une tuyère amorcée se calcule au col ( $M=1$ ) et s'écrit .

$$\dot{m} = \rho^* a^* A^* \quad (2-12)$$

Si l'on introduit au lieu de  $\rho^*$  et  $a^*$  leur valeurs en fonction de  $\rho_i$  et  $a_i$  de l'état initial et si on remplace  $P_i$  par  $\frac{\gamma P_i}{a_i^2}$  on trouve aisément dans le cas d'un gaz calorifiquement parfait .

$$\bar{\dot{m}} = \frac{\delta(\gamma)}{\sqrt{C_p T_i}} P_i A^* \quad (2-13)$$

$\delta(\gamma)$  est une fonction de  $\gamma$

$$\delta(\gamma) = \frac{\gamma}{\sqrt{\gamma-1}} \left( \frac{\gamma+1}{2} \right)^{-\frac{(\gamma+1)}{2(\gamma-1)}} \quad (2-14)$$

Lorsque la tuyère n'est pas amorcée au col c'est à dire si l'écoulement dans la section minimale  $A_{\min}$  n'atteint pas la vitesse sonique le débit effectif est  $\dot{m} < \bar{\dot{m}}$  ; il est généralement déterminé par la pression de sortie  $P_a$  et la section de sortie  $A_e$  de la tuyère.

## 2-3-2-1 Coefficient de débit [17] :

A cause principalement des effets de frottement, le débit réel d'une tuyère est légèrement différent de celui déterminé dans le cas de la théorie monodimensionnelle, à cet effet on définit un coefficient de décharge comme étant le rapport du débit actuel à celui déterminé à partir des relations isentropiques.

$$\bar{\dot{m}} = C_D \cdot \dot{m}_{is} \quad (2-15)$$

$C_D$  Le coefficient de débit qui est toujours voisin de l'unité d'une manière général, on considère que  $C_D$  peut s'écrire sous forme [17]

$$C_D = C_{DK} \cdot C_{D\delta} \cdot C_{DV} \cdot C_{D\gamma} \quad (2-16)$$

Où :

$C_{DK}$  : représente l'effet de courbure du col.

$C_{D\delta}$  : représente l'effet de déplacement de la couche limite.

$C_{DV}$  : représente l'effet viriel

$C_{D\gamma}$  : représente l'effet des températures élevées .

Chacun des facteur  $C_D$  étant voisin de l'unité. On admet qu'il peut être évolué indépendamment des autres.

### 2-3-2-2 Effet d'un gaz réel sur le coefficient de débit

La formule de débit déjà trouvée ne s'applique pas dans le cas des gaz réel. Dans ce cas on peut montrer que une erreur d'un pour cent sur  $\gamma$  entraîne une erreur de même ordre sur  $\delta(\gamma)$  donc sur le débit. Le calcul précis exige donc la connaissance de  $\gamma$  à 0,001 près. On prend pour les calculs du débit la valeur moyenne.

$$\gamma_M = \frac{\gamma(T_i) + \gamma(T^*)}{2} \quad (2-17)$$

### 2-3-3 VITESSE EFFECTIVE :

Elle est notée  $V_{eff}$ , est la vitesse de sortie de la tuyère adaptée, elle est définie par le rapport de la poussée au débit massique .

$$v_{eff} = \frac{F}{\dot{m}} \quad (2-18)$$

#### 2-3-4 IMPULSION SPECIFIQUE

Elle est notée  $I_s$  et elle est définie comme le rapport de la poussée au produit massique par l'accélération de la pesanteur

$$I_s = \frac{F}{\dot{m} g} \quad (2-19)$$

Elle est utilisée pour comparer les performances des propergols utilisés par la propulsion .

#### 2-3-5 L'IMPULSION TOTALE :

Notée  $I$ , et elle représente l'intégrale de la poussée durant la totalité de fonctionnement

$$I = \int F dt \quad (2-20)$$

**3-2 METHODES NUMERIQUES :**

Depuis longtemps, beaucoup de méthodes numériques ont été développées pour prendre en charge l'étude des écoulements transsoniques. Parmi elles, on trouve la méthode de "time-marching" [29-30] élaborée en 1972 et la méthode publiée récemment (1983) par Rizk, Serag-El-Din et Moubarek[27].

Dans cette section on se contente de donner un aperçu général sur deux méthodes qui sont souvent utilisées en l'occurrence la méthode des éléments finis et la méthode des relations intégrales.

**3-2-1 METHODE DES ELEMENTS FINIS[10] :**

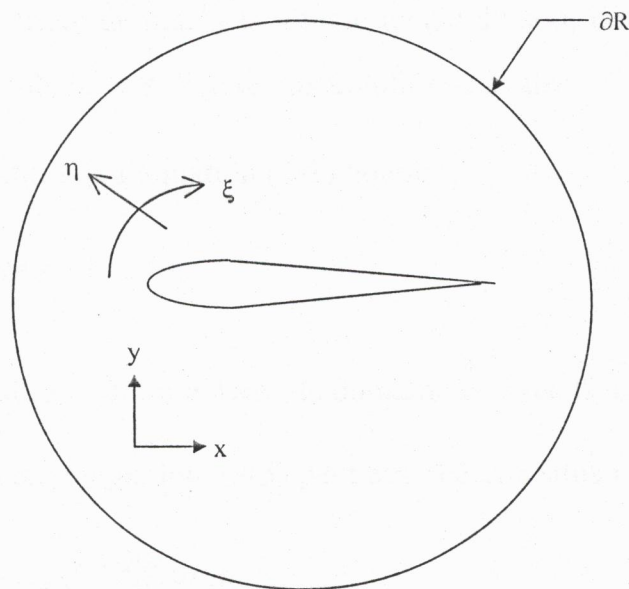


Fig (3-1) champ fluide défini autour d'une aile pour un écoulement bidimensionnel par la méthode des éléments finis

La méthode des éléments finis pour la résolution des écoulements transsoniques est l'une des méthodes les plus employées dans le domaine de l'industrie. Elle représente beaucoup d'avantages tels que sa capacité d'intervenir dans les écoulements autour des géométries les plus complexes.

L'analyse des écoulements transsoniques avec cette méthode utilise la formulation de Galarkin pour l'équation potentielle. La densité est définie comme une fonction gradient du potentiel. La méthode est stable pour les écoulements subsoniques où les équations sont elliptiques.

La méthode des éléments finis est basée sur l'équation potentielle écrite sous forme :

$$\nabla (\rho \nabla \Phi) = 0 \quad (3-1)$$

Où  $\Phi$  la vitesse potentielle totale,  $\rho$  la densité locale et  $\nabla$  l'opérateur gradient

$$\rho = \left( M_\infty^2 A^2 \right)^{\frac{1}{\gamma-1}} = \left[ V_\infty^2 - \frac{\gamma-1}{2} M_\infty^2 (V^2 - V_\infty^2) \right]^{\frac{1}{\gamma-1}} \quad (3-2)$$

$M$ ,  $a$ ,  $V$  et  $\gamma$  sont le nombre de mach, la vitesse locale du son, la vitesse et la constante spécifique du gaz, le symbole  $\infty$  se réfère aux conditions avales.

La formulation de Galarkin de l'équation (3-1) donne :

$$\iint_R \nabla (\rho \nabla \Phi) \, dA = 0 \quad (3-3)$$

$\Psi$  est une fonction arbitraire définie dans le domaine  $R$  avec la surface  $A$ .

Par le théorème de Green, l'équation (3-3) peut être réécrite sous forme:

$$\iint_R \rho \nabla \Phi \nabla \Psi \, d_A = \oint_{\partial R} \rho \frac{\partial \Phi}{\partial n} \Psi \, ds \quad (3-4)$$

$\delta$  et  $\eta$  sont les coordonnées tangentielle et normale de la frontière  $\partial R$ , le potentiel  $\Phi$  est définie comme une somme d'un potentiel réduit et un vortex tel que

$$\Phi = \phi + \Gamma \xi \quad (3-5)$$

$\Gamma$  : intensité du vortex et  $\xi$  la coordonnée périodique de l'aile.

En substituant l'équation (3-5) dans l'équation (3-4) on obtient :

$$\iint_R \rho \nabla \Phi \nabla \Psi \cdot d_A + \iint_R \rho \Gamma \nabla \xi \cdot d_A = \oint_{\partial R} \rho \frac{\partial \Phi}{\partial n} \Psi ds \quad (3-6)$$

en coordonnées cartésiennes

$$\iint_R \rho \Phi_x \Psi_x + \rho \Phi_y \Psi_y \cdot dx dy = - \iint_R \rho \Gamma [\xi_x \Psi_x + \xi_y \Psi_y] dx dy + \oint_{\partial R} \rho \frac{\partial \Phi}{\partial n} \Psi \cdot ds \quad (3-7)$$

le domaine R est divisé en petits éléments, donc on peut écrire:

$$R = \sum_{i=1}^M ei \quad (3-8)$$

M représente le nombre d'éléments

La fonction arbitraire  $\Psi$  est définie comme une combinaison linéaire des simples fonctions  $\Psi_i$ ,

$$\Psi = \sum_{i=1}^N \Psi_i(x,y) \quad (3-9)$$

le potentiel réduit et la densité sont approximiés par

$$\Phi - \bar{\Phi} = \sum G_i \Psi_i(x,y) \quad \rho - \bar{\rho} = \sum_{i=1}^N D_i \Psi_i(x,y) \quad (3-10)$$

Avec  $G_i$ ,  $D_i$  sont respectivement l'approximation du potentiel réduit et la densité au point nodal.

En utilisant les équations (3-9) et (3-10), l'intégrale de l'équation (3-7) est évoluées pour chaque élément du domaine. La contribution de tous ces éléments donne.

$$D_K G_j I_i = - \Gamma D_K I_2 + \oint_{\partial R} \rho \Phi_n \Psi_i ds \quad (3-11)$$

$$I_i = \iint_e [\Psi_{jx} \Psi_{ix} + \Psi_{jy} \Psi_{iy}] \Psi_k dx dy$$

$$I_2 = \iint_e [\xi_x \Psi_{ix} + \xi_y \Psi_{iy}] \Psi_k dx dy$$



3-2-2 LA METHODE DES RELATIONS INTEGRALES [9] :

La méthode des relations intégrales est adaptée pour résoudre les équations du champ fluide des gaz parfait dans des tuyères axisymétriques de géométrie arbitraire, et en particulier dans les tuyères coniques généralement utilisées dans la propulsion.

- Formulation mathématique :

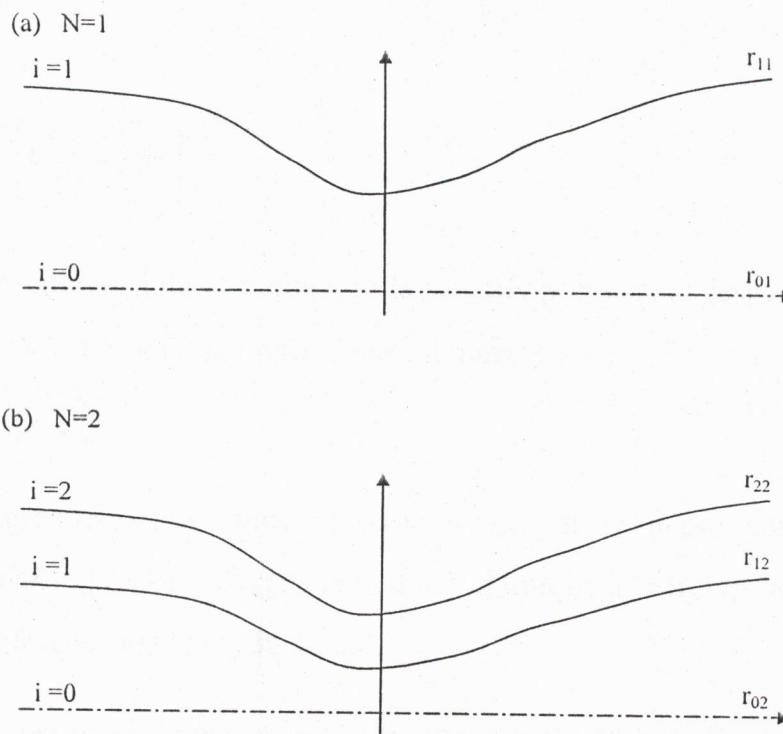


Fig (3-2) Désignation de pas

La méthode des relations intégrales, nous impose à choisir deux équations différentielles qui décrivent le mouvement transsonique dans le col qui sont l'équation de continuité et d'irrotationalité.

équation de continuité :

$$\frac{\partial}{\partial r} (\rho u r^n) + \frac{\partial}{\partial z} (\rho w r^n) = 0 \tag{3-11}$$

équation d'irrotationnalité

$$\frac{\partial w}{\partial r} - \frac{\partial u}{\partial z} = 0 \quad (3-12)$$

entropie

$$P = \rho^\gamma \quad (3-13)$$

avec

$$\rho = \left\{ 1 - \left[ \frac{\gamma-1}{\gamma+1} \right] V^2 \right\}^{\frac{1}{\gamma-1}} \quad (3-14)$$

$u, w$  : composantes axiale et radiale de la vitesse,  $p$  et  $\rho$  sont respectivement la pression et la densité,  $V$  est la vitesse totale qui est donnée par

$$V^2 = u^2 + w^2$$

Les grandeurs physiques: pression, densité et la vitesse sont adimensionnées en les divisant par la pression d'arrêt, la masse volumique à l'arrêt et la vitesse maximale, la hauteur de référence est le rayon du col.

L'équation (3-4) est obtenue en intégrant l'équation du moment et en utilisant l'équation (3-3). Les conditions aux limites de la vitesse sont :

sur l'axe :

$$u_{0j} = 0 \quad (3-15)$$

sur la proie

$$u_{jj} = w_{jj} \left( \frac{dr_{jj}}{dz} \right) \quad (3-16)$$

La condition initiale amont à l'entrée est trouvée par itération, et la condition aval est donnée par les conditions au col. Le champ fluide est divisé en  $N$  pas.

---

Les équations (3-11) et (3-12) sont intégrées à travers ces pas dans la direction radial. Dans le cas d'une simple solution (un pas unique) on emploie deux approximations qui sont la valeur à la ligne centrale et la valeur à la paroi de la tuyère.

Donc l'intégration de l'équation d'irrotationnalité entre la ligne centrale  $r_o = 0$  et la paroi  $r = r_{11}$  on trouve :

$$w_{11} - w_{01} - \int_0^{r_{11}} \frac{\partial u}{\partial z} dr = 0 \quad (3-17)$$

en appliquant la loi de Leibnitz et les conditions à la paroi on aura

$$w_{11} - w_{01} - \frac{d}{dz} \int_0^{r_{11}} u dr + u_{11} \frac{dr_{11}}{dz} = 0 \quad (3-18)$$

une approximation est faite pour la composante  $u$  qui est assumée comme une fonction continue:

$$u = \sum_{k=1}^N [u]_k \left( \frac{r}{r_{jj}} \right)^{2k-1} \quad (3-19)$$

Où  $[u]_k$  est un terme en fonction de  $u$  et le pas limite. Pour  $N = 1$  on a :

$$u = [u]_1 \left( \frac{r}{r_{11}} \right) \quad (3-20)$$

si on pose :

$$r = r_{11} \quad \text{alors} \quad [u]_1 = u_{11}$$

donc :

$$u = \frac{u_{11}}{r_{11}} \cdot r \quad (3-21)$$

l'équation (3-21) peut être intégrée entre les limites  $r = 0$  et  $r = r_{11}$  d'où :

$$\int_0^{r_{11}} u dr = \frac{u_{11} r_{11}}{2} \quad (3-22)$$

en substituant l'équation (3-22) dans (3-18) on obtient :

$$w_{11} - w_{01} - \frac{1}{2} \left( \frac{d}{dz} \right) (u_{11} r_{11}) + u_{11} \left( \frac{dr_{11}}{dz} \right) = 0 \quad (3-23)$$

(3-23) est une équation différentielle ordinaire en utilisant les conditions aux limites à la paroi :

$$\frac{dw_{11}}{dz} = \left[ 2 w_{11} - 2 w_{01} - w_{11} r_{11} \left( \frac{d^2 r_{11}}{dz^2} \right) + w_{11} \left( \frac{d r_{11}}{dz} \right)^2 \right] \cdot \frac{1}{r_{11} \cdot \frac{d r_{11}}{d z}} \quad (3-24)$$

$r_{11}$  et ses dérivées sont connues, ce qui reste à chercher sont  $w_{01}$  la vitesse à la ligne centrale et  $w_{11}$  la vitesse à la paroi de la tuyère.

Un traitement similaire de l'équation (3-11) on aura l'expression  $\frac{d w_{01}}{d z}$ , et

$\rho w$  est approximé par l'équation suivante :

$$\rho w = \sum_{k=0}^N [\rho w]_k \left( \frac{r}{r_{11}} \right)^{2k} \quad (3-25)$$

Quand  $N=1$  les deux premiers termes du polynômes sont utilisés en évaluant les équations à  $r=0$  et  $r=r_{11}$  on trouve les expressions de  $(\rho w)_0$  et  $(\rho w)_1$ . Lorsque celles-ci sont substituées dans l'équation (3-25) on aura :

$$\rho w = \rho_{01} w_{01} + (\rho_{11} w_{11} - \rho_{01} w_{01}) \left( \frac{r}{r_{11}} \right)^2 \quad (3-26)$$

De l'équation (3-22) déjà intégrée entre  $r_0=0$  et  $r=r_{11}$  on a :

$$\frac{dw_{01}}{dz} = \left[ \frac{\rho_0^{\gamma-1}}{(8-5n) P_0 (1-w_{01}^2) r_{11}} \right] \left\{ \frac{2(4-n) P_{11} w_{11}^8 r_{11}}{(\gamma+1) \rho_{11}^{(\gamma-1)}} \frac{dr_{11}}{dz} \frac{(dr_{11})^2}{dz^2} \right. \\ \left. - (n+1) [(8-5n) \rho_{01} w_{01} + (4-n) \rho_{11} w_{11}] \left( \frac{dr_{11}}{dz} \right) - [(4-n) r_{11} \frac{\rho_{11}}{\rho_{11}^{(\gamma-1)}}] [1 - w_{11}^2 \left( \frac{dr_{11}}{dz} \right)^2 - w_{11}^2] \frac{dw_{11}}{dz} \right\} \quad (3-27)$$

ce qui donne aussi :

$$\rho_{01} = \left\{ 1 - \left[ \frac{\gamma-1}{\gamma+1} \right] w_{01}^2 \right\}^{\frac{1}{\gamma-1}} \quad (3-28)$$

$$\rho_{11} = \left\{ 1 - \left[ \frac{\gamma-1}{\gamma+1} \right] w_{11}^2 \left[ \left( \frac{dr}{dz} \right)^2 + 1 \right] \right\}^{\frac{1}{\gamma-1}} \quad (3-29)$$

les équations de l'entropie

$$P_{01} = \rho_{01}^\gamma \quad P_{11} = \rho_{11}^\gamma \quad (3-30)$$

Avec les conditions aux limites

$$u_{11} = w_{11} \left( \frac{dr_{11}}{dz} \right) \quad u_{01} = 0 \quad (3-31)$$

L'intégration de l'équation de continuité nous donne :

$$\left[ (8-5n)\rho_0 w_0 + (4-n)\rho_{11} w_{11} \right] r_{11}^{(n+1)} = F \quad (3-32)$$

En suivant la même démarche qu'auparavant, il est facile de résoudre le problème à deux pas les résultats sont données dans la référence [9].

### 3-3 METHODES ANALYTIQUES

L'étude analytique des écoulements transsoniques a été l'objet de plusieurs années de recherches, et depuis beaucoup d'études ont été publiées telles que les méthodes de Sauer, Hall et Kliegel-Levine qui seront développées dans le quatrième chapitre.

Dans ce paragraphe on citera deux méthodes qui sont celles de Oswatitsh-Rothstein et la méthode de Taylor.

D'autre part, nous prendrons l'origine des axes aux points soniques sur l'axe  $M=1$  et nous chercherons des solutions satisfaisantes dans le domaines sonique. La distribution des vitesses sur l'axe ( $y = 0$ ) est de la forme :

$$U(x, 0) = 1 + x \tag{II-46}$$

L'échelle de grandeur étant indéterminée, pour le moment. De l'équation (3-43) nous déduisons :

$$u = \frac{\partial \varphi}{\partial x} = \sum m \alpha_{m,n} x^{m-1} y^n \tag{3-47}$$

$$v = \frac{\partial \varphi}{\partial y} = \sum n \alpha_{m,n} x^m y^{n-1} \tag{3-48}$$

Comme le changement de  $y$  en  $-y$  doit changer  $v$  en  $-v$ , on voit tout de suite que tous les coefficients indéterminés  $\alpha_{m,n}$  sont nuls pour  $n$  impair, donc ( $n$ ) est de la forme  $2p$  ( $p$  entier), d'autre part la condition aux limites (3-46) détermine pour  $y = 0$  les  $\alpha_{m,0}$  :

$$\alpha_{1,0}=1 \qquad 2\alpha_{2,0}=1 \qquad \alpha_{3,0}=\alpha_{4,0}=\dots\dots\dots=0$$

Il suffit alors de remplacer dans (3-47) , (3-48) et compte tenu des remarques précédentes, d'ordonner pour trouver la solution en annulant successivement tous les coefficients de  $x^m y^n$  dans l'expression polynomiale obtenue, ce calcul ne présente aucune difficulté et donne :

$$u = 1 + x + \frac{\gamma+1}{4} \left[ 1 + (2\gamma-1)x + 3\gamma(\gamma-1)x^2 + (\gamma-1)(4\gamma^2-2\gamma-1)x^3 \right] + \frac{(\gamma+1)^2}{64} y^4 \left[ 6\gamma-1 + (36\gamma^2-13\gamma-4)x \right] + \dots\dots\dots \tag{3-49}$$

$$v = \frac{\gamma+1}{2} y \left[ x + \frac{2\gamma-1}{2} x^2 + \gamma(\gamma-1)x^3 + \frac{(\gamma-1)(4\gamma^2-2\gamma-1)}{4} x^4 \right] + \frac{(\gamma+1)^2}{16} y^3 \left[ 1 + (6\gamma-1)x + \frac{36\gamma^2-19\gamma-4}{2} x^2 \right] + \frac{(\gamma+1)^3(6\gamma-1)}{128} y^5 \tag{3-50}$$

Ces expressions permettent de décrire l'écoulement dans la région sonique pour  $x$  et  $y$  pour des rayons de courbure assez petits.

## CHAPITRE 4 : DEVELOPPEMENT DES METHODES DE SAUER, HALL ET KLIEGEL & LEVINE

### 4-1 INTRODUCTION

L'écoulement d'un fluide dans une tuyère convergente-divergente dépend essentiellement de la géométrie au voisinage du col [8]. Pour savoir l'efficacité des informations obtenues, en ce qui concerne la distribution de la pression et la variation du nombre de Mach, il est important de connaître l'efficacité et l'exactitude de la méthode numérique ou analytique utilisée [5].

Dans ce chapitre on prendra comme exemple trois méthodes analytiques pour lesquelles une étude complète sera faite ainsi qu'une étude comparative et qui sont :

- la méthode de Sauer
- la méthode de Hall
- la méthode de Kliegel- Levine

On considère que les parties convergente et divergente sont reliées par une partie intermédiaire qui est le col. Le rayon de courbure amont  $R_m$  est divisé par le rayon au col  $y_c$  pour avoir le rayon de courbure normalisé qui représente le paramètre  $R$  [5-8].

## 4-2 METHODE DE SAUER [2] :

L'approche de Sauer est une approche très intéressante qui a été utilisée par un important nombre de chercheurs pendant plusieurs années et elle a permis à l'aboutissement à des résultats très intéressants.

La figure (4-1) illustre schématiquement la géométrie d'une tuyère au niveau du col, le contour de la tuyère est symétrique par rapport à l'axe (ox). La ligne sonique représentant le lieu géométrique de tous les points où  $M = 1$  est assumée être de forme parabolique.

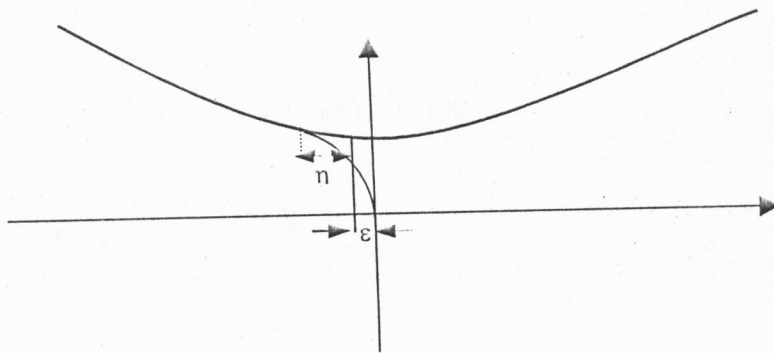


Fig.(4-1) : configuration d'une tuyère convergente – divergente

### 4-2-1 FORMULATION MATHEMATIQUE :

L'équation de perturbation pour un écoulement bidimensionnel et irrotationnel plan où axisymétrique s'exprime par :

$$(a^2 - \tilde{u}^2) \frac{\partial \tilde{u}}{\partial x} + (a^2 - \tilde{v}^2) \frac{\partial \tilde{v}}{\partial y} - 2 \tilde{u} \tilde{v} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial y} + \delta a^2 \frac{\tilde{v}}{y} = 0 \quad (4-1)$$

$\delta$  est un switch permettant de décrire les deux types d'écoulements avec la même équation :

$\delta = 0$       écoulement plan

$\delta = 1$       écoulement axisymétrique



$\tilde{u}$  et  $\tilde{v}$  étant les vitesses de perturbation supposées être petites par rapport à  $u_\infty$  de telle sorte que :

$$\frac{\tilde{u}}{u_\infty} = \frac{u - u_\infty}{u_\infty} \ll 1 \quad \text{et} \quad \frac{\tilde{v}}{u_\infty} = \frac{v}{u_\infty} \ll 1$$

au voisinage du col ; les conditions critiques prévalent et sont représentées par :

$$a_c = a_\infty \quad \text{et} \quad M_\infty = M_c = 1$$

impliquant que :

$$a_c = u_\infty$$

la vitesse locale du son notée « $a$ » s'exprime par :

$$a^2 = \frac{\gamma + 1}{2} a_\infty^2 - \frac{\gamma - 1}{2} (\tilde{u}^2 + \tilde{v}^2) \quad (4-2)$$

en posant

$$u' = \frac{\tilde{u}}{a_c}; \quad v' = \frac{\tilde{v}}{a_c} \quad (4-3)$$

l'équation (4-1) devient :

$$\left[ 1 - u^2 - \frac{\gamma - 1}{2} v^2 \right] \frac{\partial u'}{\partial x} + \left[ 1 - \frac{\gamma - 1}{\gamma + 1} u^2 - v^2 \right] \frac{\partial u'}{\partial y} - \frac{4}{\gamma + 1} \frac{\partial u'}{\partial y} u' v' + \delta \left[ 1 - \frac{\gamma - 1}{\gamma + 1} (u^2 + v^2) \right] \frac{v'}{y} = 0 \quad (4-4)$$

si on pose :

$$u' = 1 + \underline{u} \quad ; \quad v' = \underline{v} \quad (4-5)$$

L'équation (4-8) peut alors s'exprimer en termes de la fonction de potentiel :

$$(\gamma + 1) \frac{\partial \varphi}{\partial x} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} - \frac{\delta}{y} \frac{\partial \varphi}{\partial y} = 0 \quad (4-10)$$

L'équation (4-10) est l'équation dimensionnelle exprimée en termes du potentiel de vitesse de perturbation tel que dérivée par Sauer.

#### 4-2-2 RESOLUTION DE L'EQUATION :

En 1947, Sauer, afin de résoudre l'équation (4-8), il proposa une approximation en séries de la forme :

$$\left\{ \begin{aligned} \varphi(x, y) &= \sum_{l=0}^{\infty} f_{2l}(x) y^{2l} = f_0(x) y^0 + f_2(x) y^2 + f_4(x) y^4 + \dots \\ u &= \frac{\partial \varphi(x, y)}{\partial x} = f_0'(x) y^0 + f_2'(x) y^2 + f_4'(x) y^4 + \dots \\ v &= \frac{\partial \varphi(x, y)}{\partial y} = 2y f_2(x) + 4y^3 f_4(x) + \dots \end{aligned} \right. \quad (4-11)$$

dans l'équation (4-8) on aura :

$$(\gamma + 1) \left[ f_0'(x) y^0 + f_2'(x) y^2 + f_4'(x) y^4 + \dots \right] \left[ f_0'' + f_2'' y^2 + f_4'' y^4 \right] - \left[ 2f_2 + 12y^2 f_4 \right] - \frac{\delta}{y} \left[ 2y f_2 + 4y^3 f_4 + \dots \right] = 0 \quad (4-12)$$

l'équation (4-12) nous donne:

$$\begin{aligned} (\gamma + 1) f_0' f_0'' + (\gamma + 1) f_0' f_2'' y^2 + (\gamma + 1) f_2' f_0'' + \\ (\gamma + 1) f_2' f_2'' + \dots = 2(\delta + 1) f_2 + 2(6 + \delta) f_4 y^2 \end{aligned} \quad (4-13)$$

$$\alpha = \sqrt{\frac{1}{(1+\gamma)R_{tu} y_t}}$$

$$\delta_k = \sqrt{\frac{R_{tu} y_t}{\gamma + 1}}$$

$$\eta = 2\xi = \frac{R_t}{3} \sqrt{(1+\gamma) \frac{y_t}{R_{tu}}}$$

#### 4-2-5 ECOULEMENTS AUTOUR DES PROFILS

Dans ce cas l'écoulement est non symétrique par rapport à l'axe (ox),  $\frac{\partial u}{\partial y} \neq 0$ . Pour des raisons de commodité on prend  $\delta = 0$  (écoulement plan), dans le but de résoudre l'équation (4-7), Sauer a proposé une autre approximation qui est donnée par :

$$\begin{cases} \varphi = f_0(x) + yf_1(x) + y^2 f_2(x) + y^3 f_3(x) + \dots \\ u = \frac{\partial \varphi}{\partial x} = f'_0(x) + yf'_1(x) + y^2 f'_2(x) + y^3 f'_3(x) + \dots \\ v = \frac{\partial \varphi}{\partial y} = f_1(x) + 2yf_2(x) + 3y^2 f_3(x) + \dots \end{cases} \quad (4-33)$$

substituant (4-33) dans (4-7) on trouve :

$$(\gamma + 1)(f'_0 + yf'_1 + \dots)(f''_0 + yf''_1 + \dots) = (2f_2 + 6yf_3 + \dots)(2f_1 + 4yf_2 + \dots)(f'_1 + 2yf'_2 + \dots)$$

en comparant terme à terme on obtient :

$$\begin{cases} f_2 = \frac{\gamma + 1}{2} f'_0 f''_0 + f_1 f'_1 \\ 6f_3 = (\gamma + 1)(f'_0 f''_1 + f'_1 f''_0) + 4(f_1 f'_2 + f'_1 f_2) \end{cases} \quad (4-34)$$

Dans ce cas, il faut se donner arbitrairement les deux fonctions  $f_0'(x)$  et  $f_1(x)$  et on aura à déterminer  $f_2(x)$  et  $f_3(x)$ , si on pose:

$$f_0(x) = \alpha x \quad f_1(x) = -\beta x \quad (4-35)$$

à partir de (4-34) on aura:

$$f_2\left(\frac{\gamma+1}{2}\alpha^2 + \beta^2\right)x, f_3 = -\frac{\gamma+1}{2}\alpha\beta - \frac{4\beta}{3}\left(\frac{\gamma+1}{2}\alpha^2 + \beta^2\right)x$$

finalement les composantes de la vitesse sont données par :

$$\begin{cases} u = \alpha x - \beta y + \left[\frac{\gamma+1}{2}\alpha^2 + \beta^2\right]y^2 + \dots \\ v = -\beta x + [(\gamma+1)\alpha^2 + 2\beta^2]xy \\ \left[\frac{\gamma+1}{2}\alpha\beta + 4\beta\left[\frac{(\gamma+1)}{2}\alpha^2 + \beta^2\right]xy^2 + \dots \end{cases} \quad (4-36)$$

A noter que  $\alpha$  est une constante qui est différente de celle qu'on a pris dans le cas des écoulements dans des tuyères symétriques.

si on prend l'équation (4-6)

$$\left(2\underline{u} + \underline{u}^2 + \frac{\gamma-1}{\gamma+1}\underline{v}^2\right) \frac{\partial \underline{u}}{\partial x} + \frac{4}{\gamma+1} (1+\underline{u}) \underline{v} \frac{\partial \underline{u}}{\partial y} -$$

$$\left(\frac{2}{\gamma+1} \underline{v}^2 - \frac{2(\gamma-1)}{\gamma+1} \underline{u} - \frac{\gamma-1}{\gamma+1} \underline{u}^2\right) \frac{\partial \underline{v}}{\partial y} -$$

$$\delta \left(\frac{2}{\gamma+1} - \frac{2(\gamma-1)}{(\gamma+1)} \underline{u} - \frac{\gamma-1}{\gamma+1} \underline{u}^2 - \frac{\gamma-1}{\gamma+1} \underline{v}^2\right) \frac{\delta \underline{v}}{y} = 0$$

si on retient seulement les termes dominants, on aura :

$$-2\underline{u} \frac{\partial \underline{u}}{\partial x} + \frac{2}{\gamma+1} \frac{\partial \underline{v}}{\partial y} + \frac{2}{\gamma+1} \frac{\delta \underline{v}}{y} = 0 \quad \text{avec} \quad \frac{\partial \underline{u}}{\partial y} = \frac{\partial \underline{v}}{\partial z} \quad (4-38)$$

en éliminant  $\underline{v}$  par l'équation (4-38) on peut avoir comme approximation l'équation :

$$\frac{\partial^2 \underline{u}}{\partial y^2} + \frac{\delta}{y} \frac{\partial \underline{u}}{\partial y} = (\gamma+1) \frac{\partial}{\partial x} \left( \underline{u} \frac{\partial \underline{u}}{\partial x} \right) \quad (4-39)$$

et comme conditions aux limites :

$$\frac{\underline{v}}{1+\underline{u}} = \frac{dh}{dx} \quad \text{pour } y=h \quad (4-40)$$

en utilisant l'équation (4-37) on obtient :

$$\underline{v}_y = h \left(1 + \underline{u}_{y=h}\right) \left(\frac{x}{R} + \delta \left(\frac{x^3}{2R^3}\right) + \dots\right) \quad (4-41)$$

pour un R très grand et  $\underline{u}$  très petit donc :

$$\underline{v}_y = h = \frac{x}{R}$$

et

$$\left( \frac{\partial \underline{u}}{\partial y} \right)_{y=h} = \frac{1}{R}$$

$y$  : est de l'ordre  $\theta(1)$  dans le régime considéré,  $\underline{u}$  doit être de l'ordre  $\theta(1)$ .  
L'équation (4-39) montre pour que les deux cotés soient du même ordre,  $x$  doit être de l'ordre  $\theta \left( R^{-\frac{1}{2}} \right)$  et par commodité on prend :

$$x = \left[ \frac{\gamma + 1}{(1 + \delta)R} \right]^{\frac{1}{2}} z \quad (4-42)$$

ou  $z$  est du même ordre que  $y \theta(1)$ .

La solution exacte des équations différentielles (4-6) (4-38) sont en termes de  $y$  et  $z$  à la place de  $y$  et  $x$ .  $\underline{u}$  peut être exprimée en fonction des puissances inverses de  $R$

$$\underline{u} = \frac{u_1(y, z)}{R} + \frac{u_2(y, z)}{R^2} + \dots \quad (4-43)$$

les équations (4-38) et (4-42) montrent que  $\underline{v}$  doit être sous forme :

$$\underline{v} = \left[ \frac{\gamma + 1}{(1 + \delta)^2} \right]^{\frac{1}{2}} \left[ \frac{v_1(y, z)}{R} + \frac{v_2(y, z)}{R^2} + \dots \right] \quad (4-44)$$

Substituant ces séries exponentielles dans l'équation (4-38) et considérant chaque puissance de  $R$  séparément on aura les équations suivantes :

$$\frac{\partial v_n}{\partial z} = \frac{\partial u_n}{\partial y} \quad n \geq 1 \quad (4-45)$$

$$-u_1 \frac{\partial u_1}{\partial z} + \frac{1}{1+\delta} \frac{\partial v_1}{\partial y} + \frac{\delta}{1+\delta} \frac{v_1}{y} = 0 \tag{4-46}$$

$$-u_1 \frac{\partial u_n}{\partial z} - u_n \frac{\partial u_1}{\partial z} + \frac{1}{1+\delta} \frac{\partial v_n}{\partial y} + \frac{\delta}{\delta+1} \frac{v_n}{y} = \Phi_{n-1} \quad n \geq 2 \tag{4-47}$$

où  $\Phi_n$  est en fonction de  $v_1, u_1, u_2, v_2, \dots$

$$\Phi_1 = \frac{1}{2} u_1^2 \frac{\partial u_1}{\partial z} + \frac{2}{1+\delta} v_1 \frac{\partial u_1}{\partial z} + \frac{\gamma-1}{\delta+1} u_1 \frac{\partial v_1}{\partial y} + \frac{\delta(\gamma-1)}{1+\delta} \frac{u_1 v_1}{y} \tag{4-48}$$

$$\begin{aligned} \Phi_2 = & u_2 \frac{\partial u_2}{\partial z} + \frac{1}{2} u_1^2 \frac{\partial u_2}{\partial z} + u_1 u_2 \frac{\partial u_1}{\partial z} + \frac{\gamma-1}{1+\delta} v_1^2 \frac{\partial u_1}{\partial z} \\ & + \frac{2}{1+\delta} v_1 \frac{\partial u_1}{\partial y} + \frac{2}{1+\delta} u_1 v_1 \frac{\partial u_1}{\partial y} + \frac{2}{1+\delta} v_1 \frac{\partial u_2}{\partial y} \end{aligned} \tag{4-49}$$

### 4-3-2 CONDITIONS AUX LIMITES

L'équation (4-37) peut être réécrite en utilisant l'équation (4-42) comme suit :

$$h = 1 + \frac{1}{2} \left( \frac{\gamma+1}{1+\delta} \right) \frac{z^2}{R^2} + \frac{\sigma}{8} \left( \frac{\gamma+1}{1+\delta} \right) \frac{z^4}{R^5} + \dots$$

d'où :

$$\frac{dh}{dx} = \frac{dh}{dz} \frac{dz}{dx} = \left[ \frac{\gamma+1}{(1+\delta)R} \right]^{\frac{1}{2}} \left[ \frac{z}{R} + \frac{\sigma}{2} \left( \frac{\gamma+1}{1+\delta} \right) \frac{z^3}{R^4} + \dots \right]$$

Les composantes de la vitesse  $u$  et  $v$  peuvent être exprimées en fonction de leurs valeurs et leur dérivées en  $y = 1$  en utilisant les séries de Taylor.

$$\underline{v}(h.z) = \underline{v}(1,z) + (h-1) \frac{\partial \underline{v}}{\partial y} (1.z) + \theta [(h-1)^2]$$

$$= \underline{v}(1.z) + \frac{1}{2} \left( \frac{\gamma-1}{1+\delta} \right) \frac{z^2}{R^2} \cdot \frac{\partial \underline{v}}{\partial y} (1.z) + \theta \left[ R^{\frac{11}{2}} \right]$$

En substituant dans (4-40) et en utilisant les séries (4-43) et (4-44) pour  $\underline{u}$  et  $\underline{v}$  et en égalant les coefficients pour chaque puissance de  $R$  on aura les conditions aux limites où les trois premières sont données par :

$$v_1(1, z) = z \quad (4-50)$$

$$v_2(1, z) = z u_1(1, z) \quad (4-51)$$

$$v_3(1, z) = z u_2(1, z) - \frac{1}{2} \left( \frac{\gamma + 1}{\delta + 1} \right) z^2 \frac{\partial v_1}{\partial y}(1, z) \quad (4-52)$$

maintenant le problème est amené à résoudre l'équation (4-45) avec conditions aux limites (4-50), (4-51) et (4-52) :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial v_n}{\partial z} = \frac{\partial u_n}{\partial y} \\ v_1(1, z) = z \\ v_2(1, z) = z u_1(1, z) \\ v_3(1, z) = z u_2(1, z) - \frac{1}{2} \left( \frac{\gamma + 1}{\delta + 1} \right) z^2 \frac{\partial v_1}{\partial y}(1, z) \end{array} \right.$$

et le problème peut être résolu toujours pour les deux cas

- écoulement bidimensionnel

- écoulement axisymétrique

#### 4-3-3 SOLUTION POUR UN ECOULEMENT BIDIMENSIONNEL ( $\delta = 0$ ) :

*a : première approximation :*

La première approximation est trouvée en résolvant les équations (4-45) et (4-46) avec  $n=1$ , donc pour  $u_1$  et  $v_1$  les équations sont réduites à :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial v_1}{\partial z} = \frac{\partial u_1}{\partial z} \end{array} \right. \quad (4-53)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} u_1 \frac{\partial u_1}{\partial z} = \frac{\partial v_1}{\partial y} \end{array} \right. \quad (4-54)$$



$v_1$  doit satisfaire la condition aux limites donnée par l'équation (4-50) d'où :

$$v_1 = A_0'(y) + z A_1'(y) \quad (4-55)$$

$$A_0'(1) = 0 \quad A_1(1) = 1 \quad (4-56)$$

en utilisant l'équation (4-53) on trouve:

$$u_1 = A_1(y) + B_0 + f(z) \quad (4-57)$$

avec

$$f(z) = B_1 z$$

$B_0$  et  $B_1$  sont des constantes, en substituant  $u_1$  et  $v_1$  dans l'équation (4-54) ce qui donne :

$$A_0''(y) + z A_1''(y) = B_1 A_1(y) + B_0 B_1 + z B_1^2$$

d'où le système d'équations suivant:

$$\left\{ \begin{array}{l} A_0''(y) = B_1 A_1(y) + B_0 B_1 \end{array} \right. \quad (4-58)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} A_1''(y) = B_1^2 \end{array} \right. \quad (4-59)$$

La tuyère est considérée symétrique par rapport à l'axe des (ox) donc  $v_1$  est une fonction impaire de  $y$  par conséquent  $A_0$  et  $A_1$  sont les mêmes fonctions; l'inclusion d'une constante  $B_0$  dans l'équation (4-57) veut dire que  $A_1$  ne contient pas un terme constant; ainsi en intégrant l'équation (4-59) et en utilisant l'équation (4-56) on aura :

$$B_1^2 = 1$$

$$A_1(y) = \frac{1}{2} y^2$$

$\frac{\partial u}{\partial z}$  est positif, la racine carrée de  $B_1$  doit être prise positive, en substituant dans l'équation (4-58) et en utilisant l'équation (4-56) en aura :

$$B_0 = -\frac{1}{6}$$

$$A'_0(y) = \frac{1}{6}y^3 - \frac{1}{6}y$$

d'où les premières composantes de la vitesse :

$$\begin{cases} u_1 = \frac{1}{2}y^2 - \frac{1}{6} + z \end{cases} \quad (4-60)$$

$$\begin{cases} v_1 = \frac{1}{6}y^3 - \frac{1}{6}y + yz \end{cases} \quad (4-61)$$

**b: deuxième approximation :**

Quand  $n = 2$  les équations (4-45) et (4-47) s'écrivent

$$\begin{cases} \frac{\partial v_2}{\partial z} = \frac{\partial u_2}{\partial y} \end{cases} \quad (4-62)$$

$$\begin{cases} -u_1 \frac{\partial u_2}{\partial z} - u_2 \frac{\partial u_1}{\partial z} + \frac{\partial v_2}{\partial y} = \Phi_1 \end{cases} \quad (4-63)$$

où  $\Phi_1$  est évoluée à partir des équations (4-48), (4-47) et (4-61)

$$\Phi_1 = \frac{1}{2}u_1^2 \frac{\partial u_1}{\partial z} + 2v_1 \frac{\partial u_1}{\partial y} + (\gamma - 1)u_1 \frac{\partial v_1}{\partial y}$$

après substitution on trouve :

$$\begin{aligned} \Phi_1 = & \left[ \frac{6\gamma + 5}{24}y^4 - \frac{2\gamma + 3}{12}y^2 + \frac{2\gamma - 1}{72} \right] \\ & + z \left[ \frac{2\gamma + 3}{2}y^2 - \frac{2\gamma - 1}{6} \right] + z^2 \left[ \frac{2\gamma - 1}{2} \right] \end{aligned}$$

on pose

$$K_0(y) = \left[ \frac{6\gamma + 5}{24} y^4 - \frac{2\gamma + 3}{12} y^2 + \frac{2\gamma - 1}{72} \right]$$

$$K_1(y) = \left[ \frac{2\gamma + 3}{2} y^2 - \frac{2\gamma - 1}{6} \right]$$

$$K_2(y) = \left[ \frac{2\gamma - 1}{2} \right]$$

donc

$$\Phi_1 = K_0(y) + z K_1(y) + z^2 K_2(y)$$

en plus  $v_2$  doit satisfaire la condition aux limites donnée par l'équation (4-51)

$$v_2(1, z) = z u_1(1, z)$$

Qui sera donnée par:

$$v_2(1, z) = \frac{1}{3} z + z^2 \quad (4-64)$$

comme précédemment  $v_2$  est sous la forme

$$v_2 = C'_0(y) + z C'_1(y) + z^2 C'_2(y) + \dots \quad (4-65)$$

l'équation (4-62) nous donne :

$$u_2 = C_1(y) + 2z C_2(y) + D_0(y) + z D_1(y) + z^2 D_2(y) \quad (4-66)$$

à partir des équations (4-64) et (4-65) on a :

$$C'_0(1) = 0 \quad C'_1(1) = \frac{1}{3} \quad C'_2(1) = 1 \quad (4-67)$$

maintenant en substituant  $\Phi_1, u_2, v_2$  dans l'équation (4-63) et en considérant chaque coefficient de  $z$  séparément on aura les trois équations de  $C_0, C_1,$  et  $C_2$  données par :

$$C_0''(y) - (C_1(y) + D_0(y)) + \left(\frac{1}{2}y^2 - \frac{1}{6}\right)(2C_2(y) + D_1(y)) = K_0 \quad (4-68)$$

$$C_1''(y) - (4C_2(y) + 2D_1(y)) - 2D_2(y) \left(\frac{1}{2}y^2 - \frac{1}{6}\right) = K_1 \quad (4-69)$$

$$C_2''(y) - 3D_2(y) = K_2 \quad (4-70)$$

en intégrant (4-70) et en utilisant (4-67) on obtient :

$$C_2(y) = \frac{1}{2}y^2, \quad D_2(y) = -\frac{2\gamma - 3}{6}$$

dans l'équation (4-69) on intègre et on utilise (4-67) ce qui donne :

$$C_1(y) = \frac{\gamma + 6}{18}y^4 - \frac{2\gamma + 9}{18}y^2 \quad D_1(y) = -\frac{1}{2}$$

finalement en substituant dans (4-68) et à l'aide toujours de l'équation (4-67) on aura :

$$C_0'(y) = \frac{22\gamma + 75}{360}y^4 - \frac{5\gamma + 21}{54}y^3 + \frac{34\gamma + 195}{1080}y$$

$$D_0(y) = \frac{\gamma + 30}{270}$$

d'où les deuxièmes composantes de la vitesse :

$$u_2 = \frac{\gamma + 6}{18}y^4 - \frac{2\gamma + 9}{18}y^2 + \frac{\gamma + 30}{270} + z \left( y^2 - \frac{1}{2} \right) - \frac{2\gamma - 3}{6}z^2 \quad (4-71)$$

$$v_2 = \frac{22\gamma + 75}{360}y^5 - \frac{5\gamma + 21}{54}y^3 + \frac{34\gamma + 195}{1080}y + z \left( \frac{2\gamma + 12}{9}y^3 - \frac{2\gamma + 9}{9}y \right) + yz^2 \quad (4-72)$$

*c : troisième approximation :*

Quand  $n = 3$  les équations (4-45) et (4-47) deviennent :

$$\frac{\partial v_3}{\partial z} = \frac{\partial u_3}{\partial y} \quad (4-73)$$

$$-u_1 \frac{\partial u_3}{\partial z} - u_3 \frac{\partial u_1}{\partial z} + \frac{\partial v_3}{\partial y} = \Phi_2 \quad (4-74)$$

$\Phi_2$  est évoluée en utilisant l'équation (4-49), (4-50), (4-61) et (4-72) on trouve que :

$$\Phi_2 = L_0(y) + z L_1(y) + z^2 L_2(y) + z^3 L_3(y)$$

tel que :

$$L_0(y) = \frac{195 \gamma^2 + 932 \gamma + 960}{1080} y^6 - \frac{110 \gamma^2 + 620 \gamma + 753}{432} y^4$$

$$+ \frac{178 \gamma^2 + 1280 \gamma + 1830}{2160} y^2 - \frac{38 \gamma^2 + 308 \gamma + 195}{6480}$$

$$L_1(y) = \frac{142 \gamma^2 + 954 \gamma + 1233}{216} y^4 - \frac{58 \gamma^2 + 408 \gamma + 495}{108} y^2$$

$$+ \frac{226 \gamma^2 + 1410 \gamma + 225}{3240}$$

$$L_2(y) = \frac{2 \gamma^2 + 20 \gamma + 13}{4} y^2 - \frac{2 \gamma^2 + 14 \gamma - 3}{12}$$

$$L_3(y) = -\frac{2 \gamma^2 - 18 \gamma + 9}{18}$$

$v_3$  doit satisfaire la condition de l'équation (4-52) avec laquelle en utilisant les équations (4-61) et (4-71) on obtient :

$$v_3(1, z) = -\frac{14 \gamma + 15}{270} z - \frac{\gamma - 2}{6} z^2 - \frac{5 \gamma}{6} z^3 \quad (4-75)$$

$v_3$  est assumée être de la forme :

$$v_3 = E'_0(y) + zE'_1(y) + z^2E'_2(y) + z^3E'_3(y) + \dots \quad (4-76)$$

à partir de l'équation (4-73) on tire :

$$u_3 = E_1(y) + 2zE_2(y) + 3z^2E_3(y) + f_0(y) + zf_1(y) + z^2f_2(y) + z^3f_3(y) \quad (4-77)$$

en substituant dans l'équation (4-74) et en arrangeant suivant les puissances de  $z$  on aura un système d'équations suivant :

$$\begin{cases} E''_0 = L_0(y) + E_2(y)y^2 - \frac{1}{3}E_2(y) + \frac{1}{2}y^2f_1(y) - \frac{1}{6}f_1(y) + E_1(y) + f_0(y) \\ E''_1 = L_1(y) + 3E_3(y)y - E_3(y) + f_2(y)y^2 - \frac{1}{3}f_2(y) + 4E_2(y) + 2f_1(y) \\ E''_2 = L_2(y) + \frac{3}{2}f_3(y)y^2 - \frac{1}{2}f_3(y) + 9E_3(y) + 3f_2(y) \\ E''_3 = L_3(y) + 4f_3(y) \end{cases}$$

avec

$$\begin{aligned} E'_0(1) = 0 & & E'_1(1) = -\frac{14\gamma + 15}{270} \\ E'_2(1) = -\frac{\gamma - 2}{6} & & E_3(1) = -\frac{5\gamma}{6} \end{aligned} \quad (4-78)$$

après calculs on trouve :

$$\begin{aligned} F_3(y) &= \frac{2\gamma^2 - 33\gamma + 9}{72} & E_3(y) &= \frac{-5\gamma}{12}y^2 \\ F_2(y) &= \frac{7\gamma - 18}{36} & F_0(y) &= \frac{\gamma^2 + 35\gamma + 15}{36} \\ E_2(y) &= \frac{26\gamma^2 + 27\gamma + 237}{576}y^4 - \frac{26\gamma^2 + 51\gamma + 189}{288}y^2 \end{aligned}$$

$$F_1(y) = \frac{134\gamma^2 + 429\gamma + 1143}{4320}$$

$$E_0(y) = \frac{10\gamma - 18}{36}y - \frac{10\gamma - 18}{72}y^2$$

$$E_1(y) = \frac{362\gamma^2 + 1443\gamma + 3177}{12960}y^6 - \frac{194\gamma^2 + 837\gamma + 1665}{2592}y^4 + \frac{854\gamma^2 + 3687\gamma + 6759}{12960}y^2$$

finalement les troisièmes composantes de v sont

$$u_3 = \frac{362\gamma^2 + 1449\gamma + 3177}{12960}y^6 - \frac{194\gamma^2 + 837\gamma + 1665}{2592}y^3 + \frac{854\gamma^2 + 3687\gamma + 6753}{12960}y^2 - \frac{782\gamma^2 + 5523\gamma + 22857}{272160} + z \left[ \frac{26\gamma^2 + 429\gamma + 237}{288}y^4 - \frac{26\gamma^2 + 51\gamma + 183}{144}y^2 + \frac{134\gamma^2 + 429\gamma + 1743}{4320} \right] + z^2 \left[ \frac{7\gamma - 18}{36} - \frac{5\gamma}{4}y^2 \right] + z^3 \left[ \frac{2\gamma^2 - 33\gamma + 9}{72} \right] \dots \quad (4-79)$$

$$v_3 = \frac{6574\gamma^2 + 26461\gamma + 40053}{181440}y^7 - \frac{2254\gamma^2 + 10113\gamma + 16479}{25920}y^5 + \frac{5026\gamma^2 + 25551\gamma + 46377}{77760}y^3 - \frac{2254\gamma^2 + 10113\gamma + 16479}{544320}y + z \left[ \frac{362\gamma^2 + 1449\gamma + 3177}{2160}y^5 - \frac{194\gamma^2 + 837\gamma + 1665}{648}y^3 + \frac{854\gamma^2 + 3687\gamma + 6759}{6480} \right] + z^2 \left[ \frac{26\gamma^2 + 27\gamma + 237}{144}y^3 - \frac{26\gamma^2 + 51\gamma + 189}{144}y \right] + z^3 \left[ -\frac{5\gamma}{6}y \right] \quad (4-80)$$

## 4-3-4 DISCUSSIONS DE LA SOLUTION BIDIMENTIONNELLE

## 4-3-4-1 La vitesse et la direction

Les composantes de la vitesse normalisées à la vitesse du son  $\underline{u}$  et  $\underline{v}$  sont données par :

$$1 + \underline{u} = u' = 1 + \frac{u_1}{R} + \frac{u_2}{R^2} + \frac{u_3}{R^3} + \dots \quad (4-81)$$

$$\underline{v} = v' = \left[ \frac{\gamma + 1}{R} \right]^{\frac{1}{2}} \left[ \frac{v_1}{R} + \frac{v_2}{R^2} + \frac{v_3}{R^3} + \dots \right] \quad (4-82)$$

où  $u_1, v_1, u_2, v_2, u_3$  et  $v_3$  sont déjà calculées

avec

$$V = \left( \underline{u}^2 + \underline{v}^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

et la direction

$$\theta = \operatorname{tg} \left( \frac{\underline{v}}{\underline{u}} \right)$$

en utilisant les équations (4-81) et (4-82) et retenant les termes jusqu'au troisième ordre seulement on trouve :

$$V = 1 + \frac{u_1}{R} + \frac{u_2}{R^2} + \frac{1}{R^3} \left( u_3 + \frac{\gamma + 1}{2} v_1^2 \right) \dots$$

$$\theta = \left[ \frac{\gamma + 1}{R} \right]^{\frac{1}{2}} \left[ \frac{v_1}{R} + \frac{1}{R^2} (v_2 - v_1 u_1) + \frac{1}{R^3} (v_3 - u_1 v_1 - u_2 v_1 + u_1^2 v_1) + \dots \right]$$

$V$  et  $\theta$  peuvent se mettre sous forme :

$$V = 1 + \frac{V_1}{R} + \frac{V_2}{R^2} + \frac{V_3}{R^3} + \dots \quad (4-83)$$



$$\theta = \left[ \frac{\gamma+1}{R} \right]^{\frac{1}{2}} \left[ \frac{\theta_1}{R} + \frac{\theta_2}{R^2} + \frac{\theta_3}{R^3} + \dots \right] \quad (4-84)$$

où les trois premiers termes de chaque série sont donnés par :

$$V_1 = \frac{1}{2} y^2 - \frac{1}{6} + z \quad (4-85)$$

$$V_2 = \frac{\gamma+6}{18} y^4 - \frac{2\gamma+9}{18} y^2 + \frac{\gamma+30}{27} + \left( y^2 - \frac{1}{2} \right) z - \frac{2\gamma-3}{6} z \quad (4-86)$$

$$\begin{aligned} V_3 = & \frac{362 \gamma^2 + 1629 \gamma + 3357}{12960} y^6 - \frac{194 \gamma^2 + 909 \gamma + 1737}{2592} y^4 \\ & + \frac{854 \gamma^2 + 3867 \gamma + 6939}{12960} y^2 - \frac{782 \gamma^2 + 5523 \gamma + 22887}{272160} \\ & + z \left[ \frac{26 \gamma^2 + 75 \gamma + 285}{288} y^4 - \frac{26 \gamma^2 + 75 \gamma + 213}{144} y^2 + \frac{134 \gamma^2 + 429 \gamma + 1743}{4320} \right] \\ & + z^2 \left[ -\frac{3\gamma-2}{4} y^2 + \frac{7\gamma-18}{36} \right] + z^3 \left[ \frac{2\gamma^2 - 33\gamma + 9}{72} \right] \quad (4-87) \end{aligned}$$

et les composantes de la direction sont données par :

$$\theta_1 = \frac{1}{6} y^3 - \frac{1}{6} y + yz \quad (4-88)$$

$$\theta_2 = \frac{22\gamma+45}{360} y^5 - \frac{5\gamma+15}{54} y^3 + \frac{34\gamma+165}{1080} y + z \left[ \frac{2\gamma+6}{9} y^3 - \frac{2\gamma+6}{9} y \right] \quad (4-89)$$

$$\theta_3 = \frac{6574\gamma^2 + 19257\gamma + 18639}{181440} y^7 - \frac{2254\gamma^2 + 7929\gamma + 8739}{25920} y^5 +$$

$$\frac{5026\gamma^2 + 21639\gamma + 28917}{77760} y^3 - \frac{7570\gamma^2 + 42735\gamma + 74817}{544320} y +$$

$$z \left[ \frac{362\gamma + 957\gamma + 1107}{2160} y^5 - \frac{194\gamma^2 + 609\gamma + 711}{648} y^3 + \frac{854\gamma^2 + 3219\gamma + 3789}{6480} y \right] +$$

$$z^2 \left[ \frac{26\gamma^2 + 3\gamma - 15}{144} y^3 - \frac{26\gamma^2 + 27\gamma + 9}{144} \right] + z^3 \left[ -\frac{\gamma + 1}{2} y \right] \quad (4-90)$$

4-3-4-2 Isobares et "Branch-line" :

Pour une valeur constante V, l'équation (4-83) est en fonction de y et elle donne la forme de l'isobare pour cette valeur de V, par commodité on fait intervenir Q tel que :

$$Q = R[V - 1]$$

$$Q = V_1 + \frac{V_2}{R} + \frac{V_3}{R^2} + \dots$$

après arrangement on trouve que :

$$Z = f_0(y, Q) + \frac{f_1(y, Q)}{R} + \frac{f_2(y, Q)}{R^2} \dots \quad (4-91)$$

avec

$$f_0 = -\frac{1}{2} y^2 + \frac{1}{6} + Q$$

$$f_1 = \frac{2\gamma + 3}{72} y^4 + \frac{\gamma + 3}{18} y^2 + \frac{2\gamma - 15}{360} + Q \left[ -\frac{2\gamma + 3}{6} y^2 + \frac{\gamma + 3}{9} \right] + \frac{2\gamma - 3}{6} Q^2$$

$$\begin{aligned}
f_2 = & \frac{74 \gamma^2 + 693 \gamma + 684}{6480} y^6 - \frac{16 \gamma^2 + 45 \gamma + 36}{324} y^4 - \\
& \frac{16 \gamma^2 + 36 \gamma + 111}{2080} y^2 - \frac{82 \gamma^2 + 99 \gamma + 81}{216} y + \\
& Q \left[ \frac{4 \gamma^2 - 72 \gamma - 81}{216} y^4 + \frac{34 \gamma^2 + 99 \gamma + 81}{216} y^2 - \frac{28 \gamma^2 + 138 \gamma + 135}{1620} \right] + \\
& Q^2 \left[ \frac{-14 \gamma^2 + 3 \gamma + 21}{48} y^2 + \frac{14 \gamma^2 + 29 \gamma - 9}{144} \right] + \\
& \frac{14 \gamma^2 - 15 \gamma + 27}{72} Q^3
\end{aligned} \tag{4-92}$$

On peut trouver l'équation de la "branch-line" en déterminant la ligne qui joint le maximum de  $\theta$  à l'isobare. Pour chaque valeur de  $Q$ , la direction du fluide est donnée en fonction de  $y$ , en utilisant l'équation (4-91) et en éliminant  $z$  on aura :

$$\begin{aligned}
\theta = & \left[ \frac{\gamma+1}{R} \right]^{\frac{1}{2}} \left[ \frac{1}{R} \left( yQ - \frac{1}{3} y^3 \right) + \right. \\
& \left. \frac{1}{R^2} \left( -\frac{2\gamma+15}{90} y^5 + \frac{\gamma+3}{9} y^3 - \frac{2\gamma-3}{18} y^3 Q - \frac{\gamma+3}{9} yQ + \frac{2\gamma-3}{6} yQ^2 \right) \right]
\end{aligned} \tag{4-93}$$

le maximum de  $\theta$  est donné pour  $\frac{d\theta}{dz} = 0$  ce qui donne

$$\frac{1}{R} (Q - y^2) + \frac{1}{R^2} \left( -\frac{2\gamma+15}{18} y^4 + \frac{\gamma+3}{3} y^2 - \frac{2\gamma-3}{6} y^2 Q - \frac{\gamma+3}{9} Q + \frac{2\gamma-3}{6} Q^2 \right) + \theta(R) = 0$$

de laquelle on trouve

$$Q = y^2 + \frac{1}{R} \left( \frac{2\gamma+15}{18} y^4 - \frac{2\gamma+6}{9} y^2 \right) + \theta(R^{-2}) \tag{4-94}$$

et en substituant Q dans l'équation (4-91) on aura l'équation de la "branch-line" :

$$Z = \frac{1}{2}y^2 + \frac{1}{6} + \frac{1}{R} \left( \frac{10\gamma - 9}{72} y^4 - \frac{\gamma + 3}{18} y^2 + \frac{2\gamma - 15}{360} \right) + \theta(R^{-2}) \quad (4-95)$$

la valeur de  $\theta$  le long de la "branch-line" peut être obtenue en inversant l'équation (4-94) ce qui donne :

$$y^2 = Q + \frac{1}{R} \left[ \frac{2\gamma + 6}{9} Q - \frac{2\gamma + 15}{18} Q^2 \right] + \theta(R^{-2})$$

En substituant dans l'équation (4-92) on trouve :

$$\begin{aligned} \theta &= \left[ \frac{\gamma + 1}{R} \right]^{\frac{1}{2}} \left[ \frac{2}{3} \frac{Q^{\frac{1}{2}}}{R} + \frac{2\gamma - 5}{10} \frac{Q^{\frac{3}{2}}}{R^2} + \theta(R^{-3}) \right] \\ &= (\gamma + 1)^{\frac{1}{2}} (V - 1)^{\frac{3}{2}} \left[ \frac{2}{3} + \frac{2\gamma - 5}{10} (V - 1) + Q \{ (V - 1)^2 \} \right] \end{aligned}$$

#### 4-3-4-3 Coefficient de décharge :

Soit W Masse de fluide à travers une tuyère.

$W^*$  Masse de fluide à travers le col

$$\frac{W}{W^*} = \int_b^1 \left( \frac{\rho u}{\rho^* u^*} \right)_{z=0} dy \quad (4-96)$$

où  $\rho$  densité et  $\rho^*$  densité critique, pour un écoulement isentropique on à :

$$\begin{aligned} \frac{\rho}{\rho^*} &= \left[ \frac{\gamma + 1}{2} - \frac{\gamma - 1}{2} V^2 \right]^{\frac{1}{\gamma - 1}} \\ \frac{W}{W^*} &= \int_b^1 \left( u \left[ \frac{\gamma + 1}{2} - \frac{\gamma - 1}{2} V^2 \right]^{\frac{1}{\gamma - 1}} \right) z dy = 0 \end{aligned}$$

avec

$$\underline{u} = 1 + u'$$

on obtient

$$\frac{W}{W^*} = 1 - \frac{\gamma + 1}{R^2} \left[ \frac{1}{90} - \frac{2\gamma + 9}{954 R} + \frac{334\gamma^2 + 1703\gamma + 2733}{340200 R^2} + \dots \right] \quad (4-97)$$

#### 4-3-5 SOLUTION POUR UN ECOULEMENT AXISYMETRIQUE ( $\delta = 1$ )

##### *a : première approximation*

Dans le cas d'un écoulement axisymétrique les équations (4-45) et (4-46) avec  $n = 1$  deviennent :

$$\frac{\partial v_1}{\partial z} = \frac{\partial u_1}{\partial y} \quad (4-98)$$

$$-u_1 \frac{\partial u_1}{\partial z} + \frac{1}{2} \frac{\partial v_1}{\partial y} + \frac{1}{2} \frac{v_1}{y} = 0 \quad (4-99)$$

or  $v_1$  satisfait la condition aux limites donnée par l'équation (4-50).

Les équations (4-55) et (4-60) données respectivement pour  $v_1$  et  $u_1$  dans le cas de l'écoulement bidimensionnel peuvent être assumées dans notre cas, en substituant  $u_1$  et  $v_1$  dans les équations (4-98) et (4-99) on aura deux équations de  $A_0$  et de  $A_1$  données par :

$$\left\{ \begin{array}{l} A_0'' + \frac{A_0'}{y} = 2B_1 A_1 + 2B_1 B_0 \\ A_1'' + \frac{A_1'}{y} = 2B_1^2 \end{array} \right. \quad (4-100)$$

$$(4-101)$$

les conditions aux limites pour  $A_0$  et  $A_1$  sont données par l'équation (4-56)

$$A_0'(1) = 0 \quad A_1'(1) = 1 \quad (4-102)$$

en intégrant (4-101) on aura :

$$A_1' = B_1^2 y$$

équation (4-102) nous donne :

$$A_1 = \frac{1}{2} y^2 \quad B_1^2 = 1$$

dans l'équation (4-100), en intégrant et en utilisant (4-102) on obtient :

$$A_0^1 = \frac{1}{4} y^3 - \frac{1}{4} y \quad B_0 = -\frac{1}{4}$$

d'où les premières composantes de la vitesse :

$$u_1 = \frac{1}{2} y^2 - \frac{1}{4} + z \quad (4-103)$$

$$v_1 = \frac{1}{4} y^3 - \frac{1}{4} y + yz. \quad (4-104)$$

*b : deuxième approximations :*

pour  $n = 2$

$$\frac{\partial v_2}{\partial z} = \frac{\partial u_2}{\partial z} \quad (4-105)$$

$$-u_1 \frac{\partial u_2}{\partial z} - u_2 \frac{\partial u_1}{\partial z} + \frac{1}{2} \frac{\partial v_2}{\partial y} + \frac{1}{2} \frac{v_3}{y} = \Phi_1(y) \quad (4-106)$$

$$\Phi(y, z) = L_0(y) + z L_1(y) + z^2 L_2(y)$$

tel que :

$$K_0(y) = \frac{2\gamma+1}{8} y^4 - \frac{2\gamma+1}{8} y^2 + \frac{2\gamma-1}{32}$$

$$K_1(y) = \frac{2\gamma + 1}{2} y^2 - \frac{2\gamma - 1}{4}$$

$$K_2(y) = \frac{2\gamma - 1}{2}$$

et la condition aux limites:

$$\begin{aligned} v_2(1, z) &= z u_1(1, z) \\ &= \frac{1}{4} z + z^2 \end{aligned}$$

$v_2(y, z)$  sera de la même forme que l'équation (4-65) :

$$v_2(y, z) = C'_0(y) + z C'_1(y) + z^2 C'_2(y)$$

de l'équation (4-104) on a :

$$u_2(y, z) = \int \frac{\partial v_2}{\partial z} \partial y$$

ce qui donne:

$$u_2(y, z) = C_1(y) + 2z C_2(y) + D_0(y) + z D_1(y) + z^2 D^2(y)$$

en substituant dans l'équation (4-105) on aura :

$$\begin{cases} -3D_2(y).y + \frac{1}{2}(C'_2(y).y)' = K_2(y).y. \\ -D_2(y)\left(y^3 - \frac{1}{2}y\right) - (4C_2(y) + 2D_1(y))y + \frac{1}{2}(C'_1(y).y)' = K_1(y).y \\ C_2(y)\left(-y^3 + \frac{1}{2}y\right) + \left(\frac{1}{2}C_2(y) + \frac{1}{4}D_1(y) - C_1(y) - D_0(y)\right)y + \frac{1}{2}(C'_0(y).y)' = K_0(y).y. \end{cases}$$

avec

$$C'_0(1) = 0 \quad C'_1(1) = \frac{1}{4} \quad C'_2(1) = 1$$

après calculs on trouve :

$$D_2(y) = -\frac{2\gamma - 3}{6} \quad C_2(y) = \frac{1}{2}y^2$$

$$D_1(y) = -\frac{5}{8} \quad C_1(y) = \frac{\gamma + 3}{9}y^5 - \frac{20\gamma + 63}{96}y^3 + \frac{28\gamma + 93}{288}y$$

$$D_0(y) = \frac{10\gamma + 57}{288}$$

finalemt on à les deuxièmes composantes de la vitesse :

$$u_2(y, z) = \frac{2\gamma + 9}{24}y^4 - \frac{4\gamma + 15}{24}y^2 + \frac{10\gamma + 57}{288} + z \left( y^2 - \frac{5}{8} \right) - \frac{2\gamma - 3}{6}z^2 \quad (4-107)$$

$$v_2(y, z) = \frac{\gamma + 3}{9}y^5 - \frac{20\gamma + 63}{90}y^3 + \frac{28\gamma + 93}{288}y$$

$$+ z \left( \frac{2\gamma + 9}{6}y^3 - \frac{4\gamma + 15}{12}y \right) + z^2 y \quad (4-108)$$

*c : troisième approximation :*

pour  $n = 3$

on a :

$$\frac{\partial v_3}{\partial z} = \frac{\partial u_3}{\partial y} \quad (4-109)$$

$$-u_1 \frac{\partial u_3}{\partial z} - u_3 \frac{\partial v_1}{\partial z} + \frac{1}{2} \frac{\partial v_3}{\partial y} + \frac{1}{2} \frac{v_3}{y} = \Phi_2 \quad (4-110)$$

$\Phi_2$  peut être calculée par l'équation (4-49) puisqu'on connaît  $u_1, v_1, u_2, et v_2$ , donc on à

$$\Phi_2 = L_0(y) + z L_1(y) + z^2 L_2(y) + z^3 L_3(y)$$

avec

$$L_0(y) = \frac{120\gamma^2 + 505\gamma + 435}{576}y^6 - \frac{38\gamma^2 + 167\gamma + 150}{96}y^4 + \frac{122\gamma^2 + 561\gamma + 234}{576}y^2$$

$$- \frac{38\gamma^2 + 156\gamma + 63}{1152}$$



$$E'_0(1) = 0 \quad E'_1(1) = -\frac{14\gamma + 15}{288} \quad E'_3(1) = -\frac{7\gamma - 3}{12}$$

En faisant les calculs comme précédemment on trouve les troisièmes composantes de la vitesse qui sont données par :

$$\begin{aligned}
 u_3 = & \frac{556 \gamma^2 + 1737 \gamma + 3069}{10368} y^6 - \frac{388 \gamma^2 + 1161 \gamma + 1881}{2304} y^4 + \\
 & \frac{304 \gamma^2 + 831 \gamma + 1242}{1728} y^2 - \frac{2708 \gamma^2 + 7839 \gamma + 14211}{82944} + \\
 & z \left[ \frac{52 \gamma^2 + 51 \gamma + 327}{384} - \frac{52 \gamma^2 + 75 \gamma + 279}{192} + \frac{92 \gamma^2 + 180 \gamma + 639}{1152} \right] + \\
 & z^3 \left[ \frac{4 \gamma^2 - 57 \gamma + 27}{144} \right] + z^2 \left[ \frac{7\gamma - 3}{8} y^2 + \frac{13 \gamma - 27}{48} \right] \quad (4-111)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 v_3 = & \frac{6836 \gamma^2 + 23031 \gamma + 30627}{82944} y^7 - \frac{3380 \gamma^2 + 11391 \gamma + 15291}{13824} y^5 + \\
 & + \frac{3424 \gamma^2 + 11271 \gamma + 15288}{13824} y^3 - \frac{7100 \gamma^2 + 22311 \gamma + 30249}{82944} + \\
 & z \left[ \frac{556 \gamma^2 + 1737 \gamma + 3069}{1728} y^5 - \frac{388 \gamma^2 + 1161 \gamma + 1881}{576} y^3 + \frac{304 \gamma^2 + 831 \gamma + 1242}{864} y \right] + \\
 & z^2 \left[ \frac{52 \gamma^2 + 51 \gamma + 327}{192} y^3 - \frac{52 \gamma^2 + 75 \gamma + 279}{192} y \right] - z^3 \left[ -\frac{7\gamma - 3}{12} y \right] \quad (3-112)
 \end{aligned}$$

#### 4-3-6 DISCUSSIONS DE LA SOLUTION AXISYMETRIQUE

##### 4-3-6-1 Vitesse et direction:

Dans la section (4-3-4-1), la vitesse et la direction peuvent s'exprimer comme des séries de puissances inverses de  $R$ , comme s'est illustrée dans les équations (4-83) et (4-84), les calculs nous donnent :

$$V_1 = \frac{1}{2} y^2 - \frac{1}{4} + z \quad (4-113)$$

$$V_2 = \frac{2\gamma+9}{24} y^4 - \frac{4\gamma+15}{24} y^2 + \frac{10\gamma+57}{288} + z \left( y^2 - \frac{5}{8} \right) - \frac{2\gamma-3}{6} z^2 \quad (4-114)$$

$$\begin{aligned} V_3 = & \frac{556\gamma^2 + 1899\gamma + 3231}{10368} y^6 - \frac{388\gamma + 1233\gamma + 1953}{2304} y^4 + \\ & \frac{304\gamma^2 + 858\gamma + 1269}{1728} y^2 - \frac{2708\gamma^2 + 7839\gamma + 14211}{82944} + \\ & z \left[ \frac{52\gamma^2 + 99\gamma + 375}{384} y^4 - \frac{52\gamma^2 + 99\gamma + 303}{192} y^2 + \frac{200\gamma^2 + 72\gamma + 639}{1152} \right] + \\ & z \left[ -\frac{5\gamma-5}{8} y^2 + \frac{13\gamma-27}{48} \right] + \frac{4\gamma^2 - 57\gamma + 27}{144} z^3 \quad (4-115) \end{aligned}$$

et les trois composantes de la direction sont données par

$$\theta_1 = \frac{1}{4} y^3 - \frac{1}{4} y + yz. \quad (4-116)$$

$$\theta_2 = \frac{8\gamma+15}{72} y^5 - \frac{20\gamma+45}{96} y^3 + \frac{28\gamma+75}{288} y + z \left( \frac{4\gamma+9}{12} y^3 - \frac{4\gamma+9}{12} y \right) \quad (4-117)$$

$$\begin{aligned} \theta_3 = & \frac{6836\gamma^2 + 16695\gamma + 14211}{82944} y^7 - \frac{3380\gamma^2 + 8703\gamma + 7875}{13824} y^5 \\ & + \frac{3748\gamma^2 + 8859\gamma + 8964}{1728} y^3 - \frac{9044\gamma^2 + 17631\gamma + 20745}{8294} \\ & + z \left[ \frac{556\gamma^2 + 1113\gamma + 981}{1728} y^5 - \frac{388\gamma^2 + 801\gamma + 693}{576} y^3 + \right. \\ & \left. \frac{304\gamma^2 + 645\gamma + 549}{864} y \right] + z^2 \left[ \frac{52\gamma^2 + 3\gamma - 33}{192} y^3 - \frac{52\gamma^2 + 27\gamma - 9}{192} \right] - \left[ \frac{\gamma+1}{4} \right] y z^3 \end{aligned}$$

(4-118)

**4-3-6-2 Coefficient de décharge:**

Qui est donnée par

$$\frac{w}{w^*} = 2 \int \left( \frac{\rho \cdot u}{\rho^* \cdot u^*} \right)_{z=0} y \, dy \tag{4-119}$$

$$\frac{w}{w^*} = 1 - \frac{\gamma + 1}{R^2} \left[ \frac{1}{96} - \frac{8\gamma + 21}{4608 R} + \frac{754 \gamma^2 + 1971 \gamma + 2007}{552960 R^2} + \dots \right] \tag{3-120}$$

**4-3-6-3 Les isobares et "Branch-line" :**

En procédant de la même manière que dans le cas de l'écoulement bidimensionnel on trouve que les isobares sont régies par l'équation :

$$Z = f_0(y, Q) + \frac{1}{R} f_1(y, Q) + \frac{1}{R^2} f_2(y, Q) \tag{4-121}$$

tel que

$$f_0(y, Q) = -\frac{1}{2} y^2 + \frac{1}{4} + Q \tag{4-122}$$

$$f_1(y, Q) = -\frac{4\gamma + 9}{48} y^2 + \frac{4\gamma + 21}{288} + Q \left( \frac{2\gamma + 3}{6} y^2 - \frac{4\gamma + 9}{24} \right) - \frac{2\gamma - 3}{6} Q^2 \tag{4-123}$$

$$\begin{aligned} f_2(y, Q) = & -\frac{364\gamma^2 + 1089\gamma + 909}{20736} y^6 + \frac{28\gamma^2 - 291\gamma - 351}{4608} y^4 + \\ & \frac{260\gamma^2 + 3687\gamma + 3105}{13824} y^2 - \frac{6272\gamma^2 + 8244\gamma + 28386}{20736} + \\ & Q \left[ \frac{180\gamma^2 + 675\gamma + 567}{1152} y^4 - \frac{168\gamma^2 + 462\gamma + 486}{576} y^2 + \frac{412\gamma^2 + 285\gamma + 711}{2304} \right] + \\ & Q^2 \left[ -\frac{12\gamma^2 + 162\gamma + 18}{288} + \frac{12\gamma^2 - 15\gamma - 243}{576} \right] + Q^3 \left[ \frac{4\gamma^2 - 57\gamma + 27}{144} \right] \end{aligned} \tag{4-124}$$

L'équation de la "branch-line" est donnée par :

$$z = \frac{1}{4} y^2 + \frac{1}{8} + \frac{1}{R} \left( \frac{15\gamma + 9}{72} y^4 - \frac{2\gamma + 3}{9} y^2 + \frac{4\gamma + 15}{180} \right) + \theta(R^{-2}) \tag{4-125}$$

#### 4-4 METHODE DE KLIEGEL ET LEVINE :

On a vu que la méthode de Hall développée en 1962 a permis de déterminer les composantes radiale et axiale de la vitesse sonique pour un écoulement axisymétrique, irrotationnel d'un gaz parfait. La solution est représentée par un développement en série exprimé en coordonnées cylindriques en termes de puissances inverses du paramètre  $R$ .

Or que pour les calculs, cette méthode a montré ses limites et des divergences sont apparues pour des tuyères à rayons au col très petits. Beaucoup de recherches ont été faites dans ce sens et elles ont montré que ces problèmes sont dus au système de coordonnées utilisé.

En effet, le paramètre  $\frac{1}{R}$  dans la méthode de Hall est introduit dans les conditions aux limites à la paroi qui exige que l'angle formé par la direction du fluide est égale à la pente locale de la paroi.

Mais cette limite n'est pas une coordonnée constante dans le système de coordonnées cylindriques et elle doit être évaluée comme une série de puissances inverses de  $R$ . Ainsi la condition au limite à la paroi n'est jamais satisfaite dans le système de coordonnées ajoutant qu'à la paroi la vitesse radiale  $v$  est proportionnelle à sa pente qui peut devenir très importante au voisinage du col dans la tuyère où  $R < 1$ .

Donc le travail consiste à trouver la solution dans un autre système de coordonnées où l'axe et la paroi de la tuyère sont tous les deux axes de coordonnées.

##### 4-4-1 LES COORDONNEES TOROIDALES :

La figure (4-2) représente les coordonnées toroïdales où l'axe de symétrie et la paroi au col sont tous les deux des coordonnées. Ils sont représentés respectivement par les lignes :

$$n = 0$$

$$n = n_p = c^{ste}$$

Les coordonnées toroïdales  $(\xi, n)$  sont représentées dans le schéma suivant:

Les coordonnées toroïdales  $(\xi, \eta)$  sont représentées dans le schéma suivant:

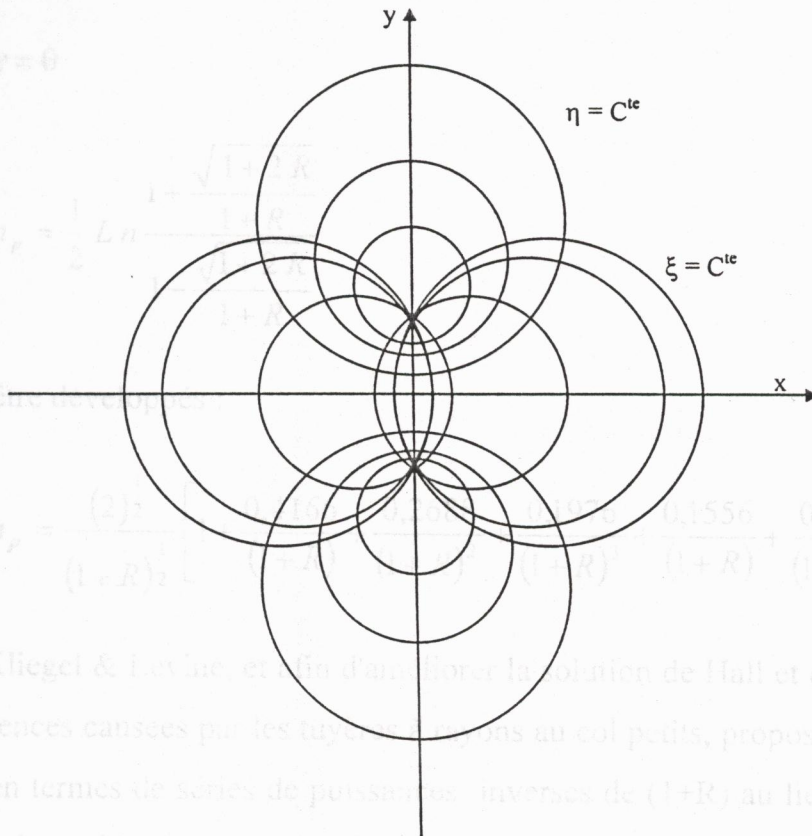


Fig (4-1) : coordonnées toroïdales

La relation entre les coordonnées cartésiennes et toroïdales est donnée par :

$$\frac{y}{y_C} = \sqrt{1 + \frac{2}{R}} \frac{\text{Sinh}(\eta)}{(\cosh(\eta) + \cos(\xi))} \tag{4-126}$$

$$\frac{x}{y_C} = \sqrt{1 + \frac{2}{R}} \frac{\sin(\xi)}{(\cosh(\eta) + \cos(\xi))}$$

avec

$$-\pi \leq \xi \leq \pi$$

$$-\infty \leq \eta \leq +\infty$$

$u_1, v_1, u_2, v_2, u_3$  et  $v_3$  sont calculés déjà par la méthode de Hall on voit que les

termes à partir de l'ordre 4 sont négligés

avec dans ce cas :

$$z = \sqrt{\frac{2R}{\gamma+1}} \frac{x}{y_c} = \sqrt{\frac{2R+4}{\gamma+1}} \frac{\sinh(\xi)}{\cosh(\eta) + \cos(\xi)}$$

$$y_r = \frac{y}{y_c} = \sqrt{1 + \frac{2}{R}} \frac{\sinh(\eta)}{\cosh(\eta) + \cos(\xi)}$$

#### 4-4-2 DISCUSSIONS DE LA SOLUTION AXISYMETRIQUE

##### 4-4-2-1 Vitesse et direction

La vitesse est donnée par la relation :

$$q = 1 + \frac{v_1}{(R+1)} + \frac{v_2}{(R+1)^2} + \frac{v_3}{(R+1)^3} \quad (4-128)$$

tel que:

$$v_1 = u_1(r, z)$$

$$v_2 = u_1(r, z) + u_2(r, z)$$

$$v_3 = u_1(r, z) + 2u_2(r, z) + u_3(r, z) + \frac{\gamma+1}{2} v_1(r, z)$$

après calculs on trouve:

$$V_1 = \frac{1}{2} y^2 - \frac{1}{4} + z \quad (4-129)$$

$$V_2 = \frac{2\gamma+9}{24} y^4 - \frac{4\gamma+3}{24} y^2 + \frac{10\gamma-15}{288} + z \left( y^2 + \frac{3}{8} \right) - z^2 \frac{2\gamma-3}{6} \quad (4-130)$$

$$\begin{aligned}
 V_3 = & \frac{556 \gamma^2 + 1899 \gamma + 3231}{10368} y^6 - \frac{388 \gamma^2 + 849 \gamma + 225}{2304} y^4 + \\
 & \frac{304 \gamma^2 + 282 \gamma - 27}{1728} - \frac{2708 \gamma + 2079 \gamma + 2115}{82944} + \\
 & z \left( \frac{52 \gamma^2 + 879 \gamma + 375}{384} y^4 - \frac{52 \gamma^2 + 99 \gamma - 81}{192} y^2 + \frac{92 \gamma^2 + 180 \gamma + 351}{1152} \right) + \\
 & z^2 \left( \frac{-5 \gamma + 5}{8} y^2 - \frac{19 \gamma - 21}{48} \right) + z^2 \left( \frac{4 \gamma^2 - 57 \gamma + 27}{144} \right)
 \end{aligned} \tag{4-131}$$

Pour la direction , elle est donnée par la relation

$$\begin{aligned}
 \theta &= \operatorname{tg} \begin{bmatrix} - \\ v \\ - \\ u \\ - \end{bmatrix} \\
 &= \left[ \frac{\gamma + 1}{R + 1} \right]^{\frac{1}{2}} \left[ \frac{\theta_1}{(R + 1)} + \frac{\theta_2}{(R + 1)^2} + \frac{\theta_3}{(R + 1)^3} + \dots \right]
 \end{aligned} \tag{4-132}$$

avec

$$\begin{aligned}
 \theta_1 &= v_1(r, z) \\
 \theta_2 &= v_2(r, z) - u_1(r, z) \cdot v_1(r, z) \\
 \theta_3 &= \frac{15}{8} v_1(r, z) + \frac{5}{2} v_2(r, z) + v_3(r, z) - u_1(r, z) \cdot v_1(r, z) - \\
 & \quad (u_1(r, z) + u_2(r, z)) v_1(r, z) + u_1^2(r, z) v_1(r, z)
 \end{aligned} \tag{4-133}$$

ce qui donne:

$$\theta_1 = \frac{1}{4} y^3 - \frac{1}{4} y + yz \tag{4-133}$$

$$\theta_2 = \frac{8\gamma + 63}{72} y^5 - \frac{20\gamma + 9}{96} y^3 + \frac{28\gamma - 33}{288} y + z \left( \frac{4\gamma + 9}{12} y^3 - \frac{4\gamma - 9}{12} y \right) \tag{4-134}$$

$$\begin{aligned}
\theta_3 = & -\frac{6836 \gamma^2 + 29367 \gamma + 47043}{82944} y^7 + \frac{3380 \gamma^2 + 12351 \gamma + 17523}{13824} y^5 - \\
& \frac{10\gamma + 45}{48} y^4 - \frac{3224 \gamma^2 + 13359 \gamma + 20688}{13824} y^3 - \\
& \frac{20\gamma + 75}{48} y^2 + \frac{1216 \gamma^2 + 3748 \gamma + 2340}{3456} + \\
& z \left( -\frac{556 \gamma^2 + 2361 \gamma + 6042}{1728} y^5 + \frac{388 \gamma^2 + 1449 \gamma + 2529}{576} y^3 - \frac{5}{2} y^2 - \right. \\
& \left. \frac{218\gamma + 69}{1152} y + \frac{304\gamma^2 + 831\gamma + 1512}{864} \right) + \\
& z^2 \left( \frac{-52\gamma^2 + 99\gamma - 735}{192} y^3 + \frac{52\gamma^2 + 123\gamma + 327}{192} y + \frac{2\gamma - 3}{6} \right) + \\
& z^3 \left( \frac{11\gamma - 21}{12} y \right)
\end{aligned} \tag{4-135}$$

#### 4-4-2-2 Les isobares et "branch-line" :

Toujours en procédant de la même manière que la méthode de Hall l'équation des isobares est donnée par :

$$z(y, Q) = f_0(y, Q) + \frac{1}{(R+1)} f_1(y, Q) + \frac{1}{(R+1)^2} f_2(y, Q) \tag{4-136}$$

avec

$$f_0(y, Q) = -\frac{1}{2} y^2 + \frac{1}{4} + Q \tag{4-137}$$

$$f_1(y, Q) = \frac{4\gamma - 9}{48} y^2 + \frac{4\gamma + 21}{288} + Q \left( \frac{2\gamma + 3}{6} y^2 - \frac{4\gamma - 15}{24} \right) - Q^2 \frac{2\gamma - 3}{3} \tag{4-138}$$



$$\begin{aligned}
 f_2(y, Q) = & -\frac{364\gamma^2 + 22149\gamma + 909}{20736} y^6 + \frac{28\gamma^2 + 2049\gamma - 351}{4608} y^4 + \\
 & \frac{908\gamma^2 + 735\gamma - 2079}{13824} y^2 - \frac{1016\gamma^2 + 1404\gamma + 6714}{82944} + \\
 & Q \left[ \frac{180\gamma^2 + 3015\gamma + 567}{1152} y^4 - \frac{168\gamma^2 + 78\gamma - 90}{576} y^2 + \frac{176\gamma^2 - 267\gamma + 1287}{2304} \right] + \\
 & Q^2 \left[ \frac{-12\gamma^2 - 9\gamma - 99}{288} y^2 + \frac{12\gamma^2 - 399\gamma + 333}{576} \right] + Q^3 \left[ \frac{4\gamma^2 - 57\gamma + 27}{144} \right] \quad (4-139)
 \end{aligned}$$

et l'équation de la "branch-line" est donnée par:

$$z = \frac{1}{4} y^2 + \frac{1}{2} + \frac{1}{R+1} \left( \frac{15\gamma - 12}{48} y^4 - \frac{4\gamma + 3}{9} y^2 + \frac{6\gamma - 9}{180} \right) + \theta(R^{-2}) \quad (4-140)$$

le coefficient de décharge sera donné par l'équation

$$\frac{w}{w^*} = 1 - \frac{\gamma + 1}{(R+1)^2} \left[ \frac{1}{96} - \frac{8\gamma + 27}{2304(R+1)} + \frac{754\gamma^2 - 757\gamma + 3633}{276480(R+1)^2} + \dots \right] \quad (4-141)$$

Pour un écoulement bidimensionnel, il suffit de poser  $\delta = 0$  et de suivre la même procédure décrite précédemment pour résoudre le problème.

## CHAPITRE 5 : APPLICATIONS AUX CAS D'ETUDE, RESULTATS ET COMPARAISONS

### 5-1 INTRODUCTION

Ce chapitre est consacré à l'application des trois méthodes (Hall, Sauer et Kliegel-Levine) décrites précédemment dans le troisième chapitre.

Pour ce faire, on s'intéressera à deux cas d'études représentés par deux tuyères supersoniques appartenant à des engins de recherches aérospatiales de l'Office Nationale d'Etudes et de Recherches Aérospatiales (ONERA -France).

Une étude comparative est faite entre ces trois méthodes en montrant les paramètres thermodynamiques et géométriques qui influent sur l'écoulement. Concernant la validation des résultats on a pu avoir trois sources de validation

- la première source est la comparaison des trois méthodes .
- la deuxième source de validation est celle des résultats obtenus par d'autres auteurs
- la troisième source est celle des résultats expérimentaux cependant nous n'avons trouvé que les courbes isobares pour comparer nos résultats .

x (i)	Y(i)	u(i)	v(i)	q(i)	P(i)	M(i)
-0,0128	0,0690	1100	0	1100	33,67	1,070
-0,0104	0,0621	1039	-0,0505	1039	36,56	1,056
-0,0082	0,0552	1036	-0,0339	1036	36,70	1,053
-0,0063	0,0483	1033	-0,0186	1033	36,86	1,049
-0,0046	0,0414	1028	-0,0089	1028	37,06	1,044
-0,0032	0,0345	1024	-0,0033	1024	37,07	1,039
-0,0020	0,0276	1019	-0,0003	1019	37,30	1,033
-0,0012	0,0207	1014	0,0008	1014	37,53	1,028
-0,0005	0,0138	1010	0,0010	1010	37,75	1,024
-0,0001	0,0069	1008	0,0006	1008	37,93	1,021
0	0	1007	0	1007	38,08	1,020

Tableau (5-2) : tuyère berenice (hall )

x (i)	Y(i)	u(i)	v(i)	q(i)	P(i)	M
-0,0128	0,069	1112	0	1112	33,14	1.100
-0,0104	0,0621	1089	0	1089	34,23	1,090
-0,0082	0,0552	1086	0	1068	35,21	1,089
-0,0063	0,0483	1049	0	1049	36,08	1,068
-0,0046	0,0414	1033	0	1033	36,84	1,049
-0,0032	0,0345	1020	0	1020	37,48	1,034
-0,0021	0,0276	1008	0	1008	38,01	1,022
-0,0012	0,0207	1000	0	1000	38,42	1,012
-0,0005	0,0138	994	0	994	38,71	1,005
-0,0001	0,0069	990	0	990	38,89	1,001
0	0	989	0	989	38,94	1,000

Tableau (5-3) : tuyère berenice (sauer )

L'application des ces trois méthodes sur ce type de tuyère a donné les résultats représentés dans les tableaux (5-1 ), (5-2 ), (5-3 ).

Pour chaque couple  $(x, y)$  de la ligne sonique correspond une vitesse axiale, une autre radiale, une pression  $P$  en bars, un nombre de mach.

Comme première constatation qui saute aux yeux est que l'écoulement est axial puisque  $(v \ll u)$  pour les méthodes de Hall et Kliegel & Levine

Pour ce qui concerne la méthode de Sauer, elle suppose dès le début que l'écoulement est axial en posant dans le programme de calcul  $(v = 0)$

Les écarts relatifs des valeurs générées par les trois solutions sont principalement dus à la différence d'approche de ces méthodes.

En comparant les performances réelles et celles obtenues par ces méthodes, on constate que ces dernières sont presque les mêmes pour les trois méthodes et qui sont très proches des performances réelles, exception faite pour la puissance développée où les écarts sont assez grands, les résultats son représentés dans le tableau ( 5-4 ).

	Réelle	Sauer	Hall	Kliegel & Levine
<b>Puissance développée</b>	164 546,9	126 114,8	126 254,6	126 357,3
<b>Débit massique</b>	70,52	70,24	70,33	70,47
<b>Coéf de Décharge</b>	0,9930	0,9946	0,9946	0,9966

Tableau (5-4) : Performances de la tuyère ( Berenice )

### 5-2-1 LA FORME DE LA LIGNE SONIQUE :

La forme de la ligne sonique est obtenue en posant  $y = f(x)$  qui donne une forme parabolique pour chaque méthode et pour un rapport de chaleur spécifique.

Les allures de ces lignes soniques sont représentées dans les figures (5 -1 ), (5 -2 ) et ( 5 -3 ) ce qui montre qu'elles ne sont pas conformes à l'hypothèse de la théorie monodimensionnelle où la ligne sonique est considérée comme une droite.

En comparant ces lignes soniques obtenues par les trois méthodes figure (5-4) on constate que les résultats sont assez proches surtout pour les deux méthodes Sauer et Hall où les courbes sont presque confondues, car ces deux auteurs ont utilisé le même système de coordonnées cartésiennes, par contre Kliegel & Levine ont travaillé dans un autre systèmes de coordonnées toroïdales. Ce résultat va aussi bien avec celui obtenu par Taylor [17] et Oswatish – Rothstein [25] pour une autre tuyère dont  $R = 0.625$ .

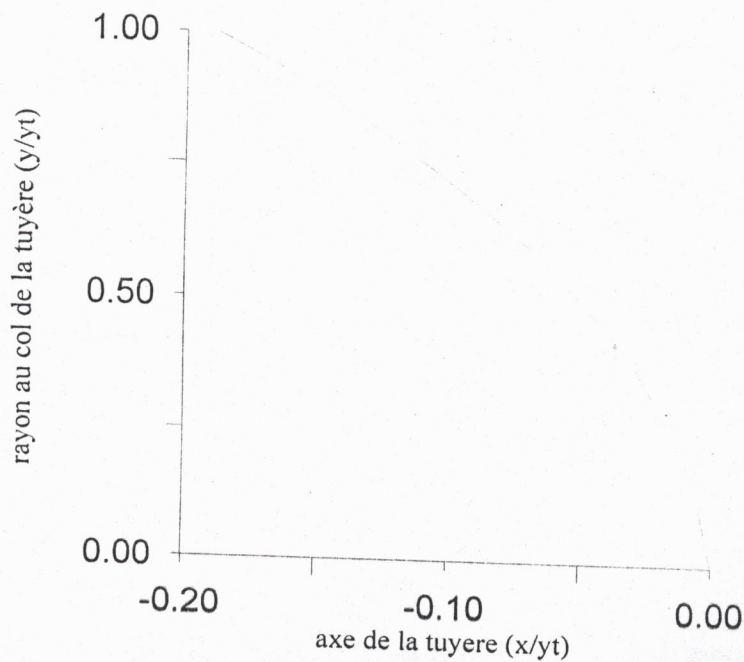
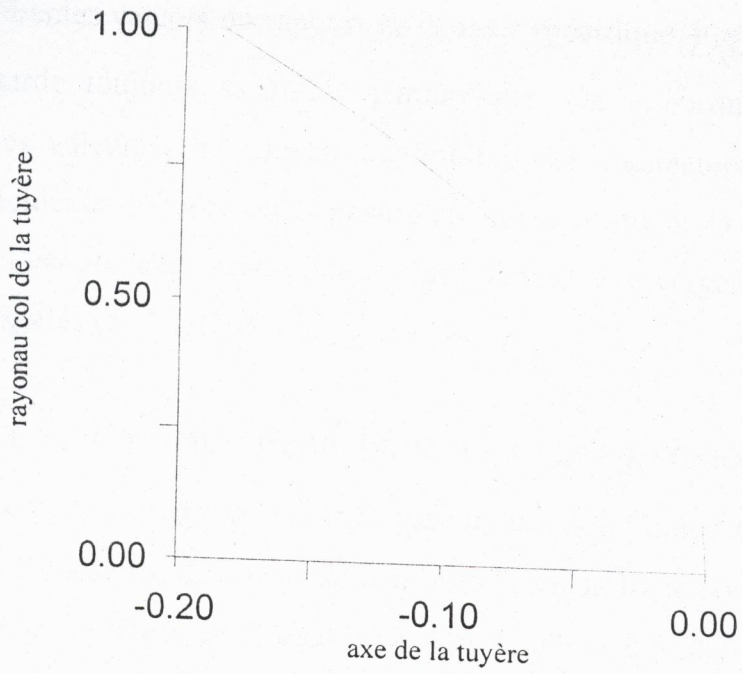


fig (5-1) Ligne sonique pour une tuyère Berenice par la méthode de Sauer



fig(5-2 ) Ligne sonique pour une tuyère Berenice par la méthode de Hall

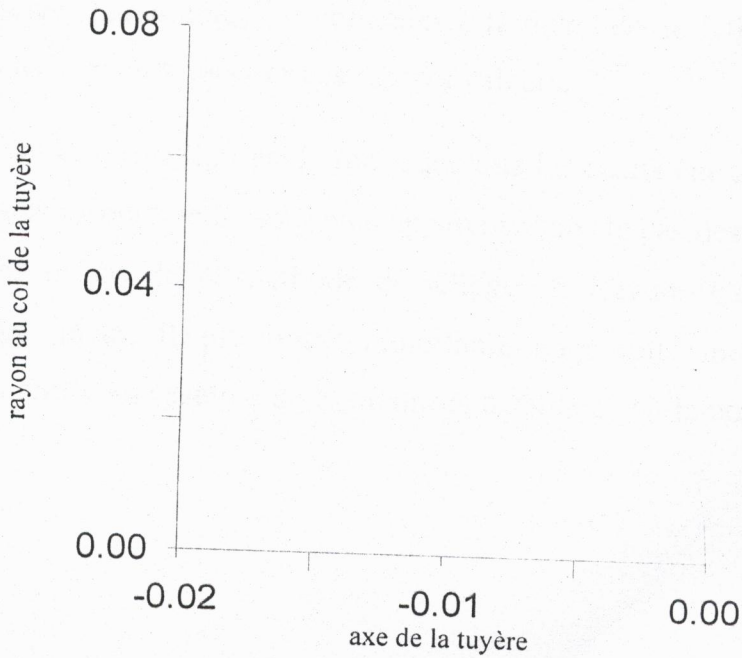


fig (5-3 ) Ligne sonique pour une tuyère Berenice par la méthode de Kliegel-Levine

### 5-2-2 INFLUENCE DU RAPPORT DE CHALEUR SPECIFIQUE $\gamma$ SUR LA LIGNE SONIQUE :

Pour différentes valeurs du rapport de chaleur spécifique  $\gamma$  (1.2, 1.36 et 1.4), la ligne sonique garde toujours sa forme parabolique. On remarque que les courbes obtenues pour ces valeurs sont presque confondues. Le changement de ce paramètre n'avait aucune incidence majeure sur la position ni sur la forme de la ligne sonique, donc aucun effet sur l'écoulement supersonique dans la partie divergente. Ce résultat est illustré dans les figures (5 -5), (5 -6) et (5 -7).

### 5-2-3 INFLUENCE DU RAYON DE COURBURE R SUR LA LIGNE SONIQUE :

Contrairement au rapport de chaleur spécifique  $\gamma$ , les figures (5 - 8), (5 - 9) et (5 - 10) illustrent l'influence du rayon de courbure R sur la ligne sonique. Ces résultats sont obtenus pour des valeurs de R égales (2, 1.5, 1, 0.8 et 0.5, 0.3, 0.2). Ce que nous avons remarqué que la ligne sonique a gardé toujours sa forme parabolique, mais qu'elle a changé de position. Ce qui se répercutera sur l'écoulement supersonique dans le divergent. Aussi nous avons constaté que les méthodes de Hall et Sauer divergent pour des valeurs du rayon de courbure R inférieures à 0.5 (les lignes soniques n'ont pas conservé le caractère parabolique), à comparer à la méthode de Kliegel & Levine qui a donné des résultats satisfaisants pour ces mêmes valeurs.

Comparant ces trois figures on remarque que les écarts entre les courbes obtenus pour les différentes valeurs de R, sont plus apparents dans le cas des méthodes de Sauer et Hall que dans le cas de la méthode de Kliegel & Levine. Ce qui veut dire que l'influence du paramètre R est moins importante pour cette méthode. Cela est dû probablement au choix du système de coordonnées toroïdales où la condition au limite est satisfaite

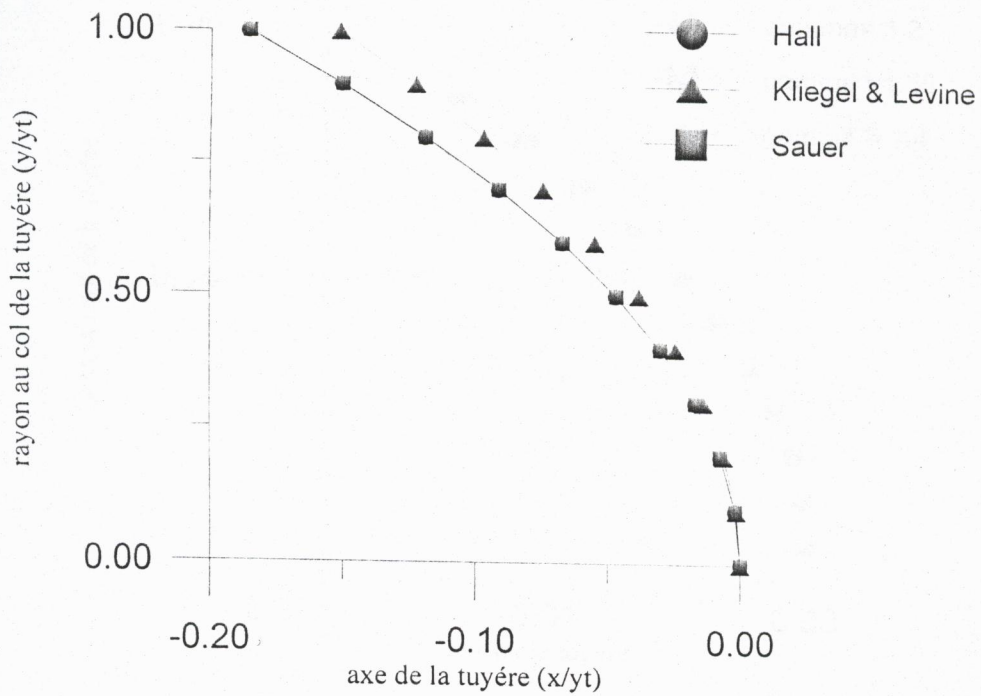


Fig (5-4) : lignes soniques obtenues pour la tuyère "BERENICE"

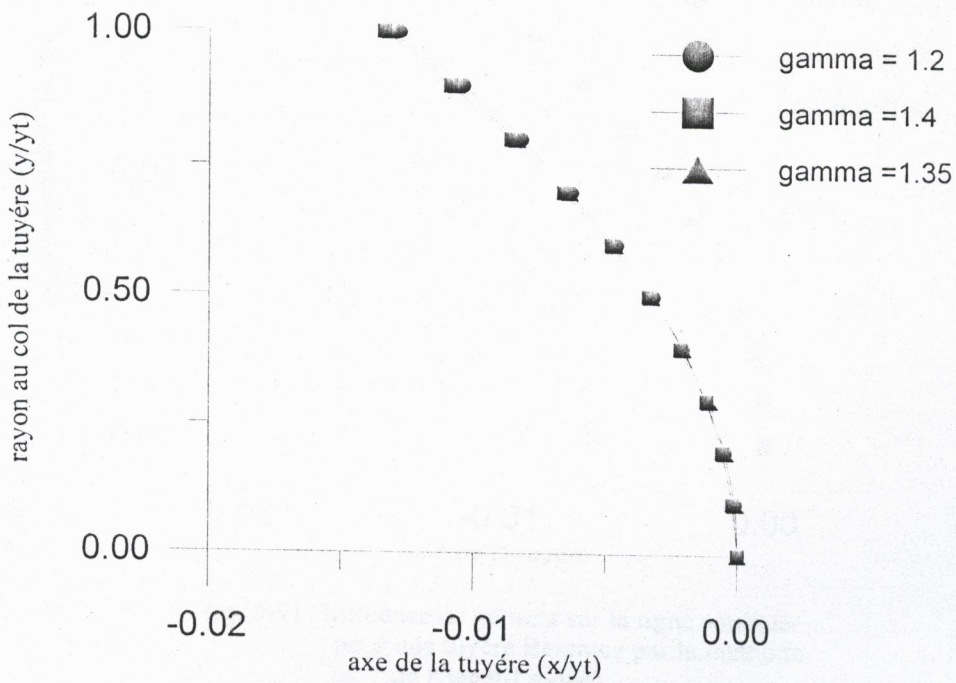


fig (5-5) Influence de gamma sur la ligne sonique par la méthode de Sauer



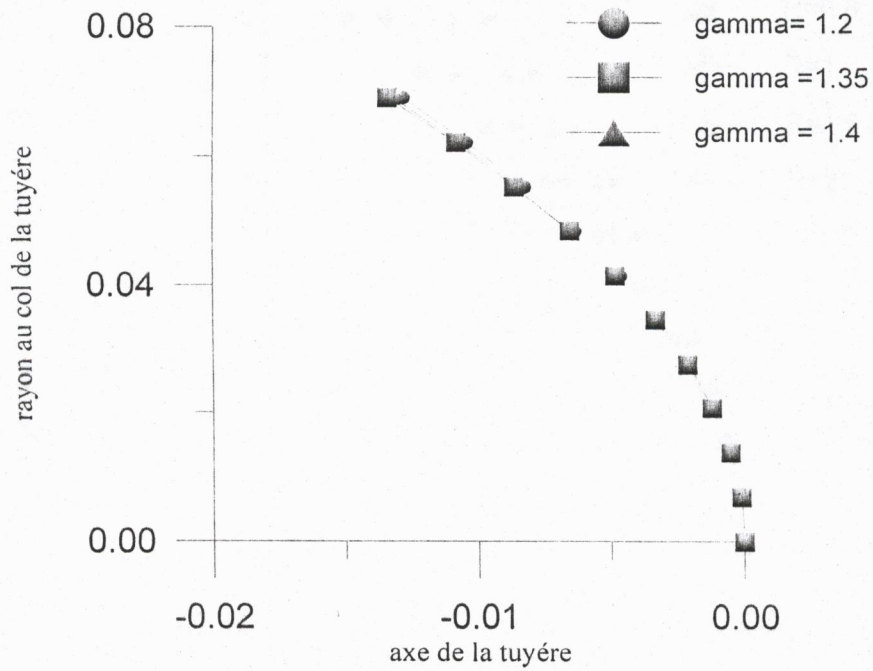


fig (5-6) Influence de gamma sur la ligne sonique pour une tuyère Berenice par la méthode de Hall

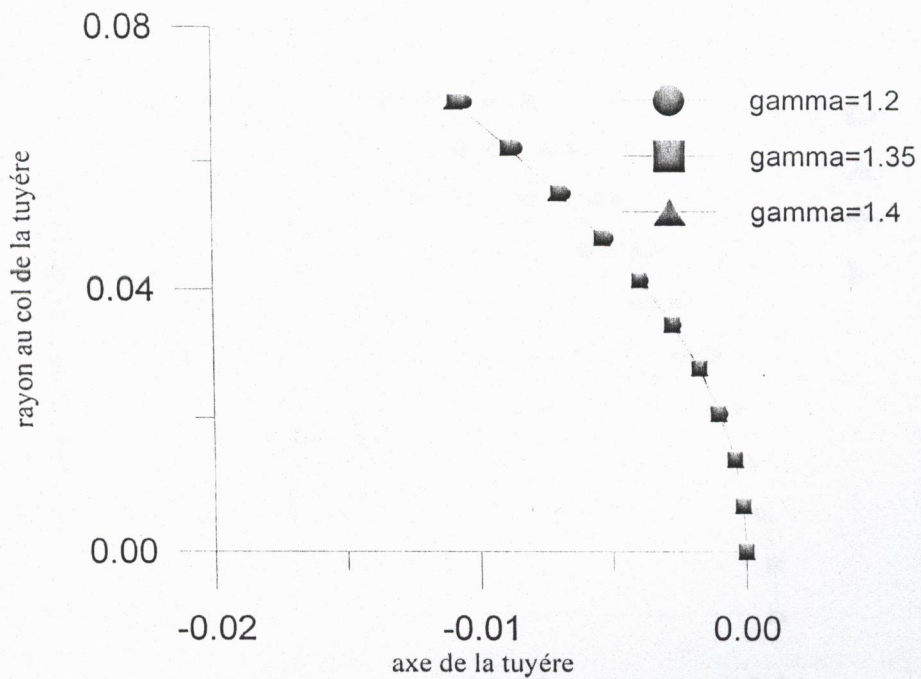


fig (5-7) Influence de gamma sur la ligne sonique pour une tuyère Berenice par la méthode de Klegel-Levine

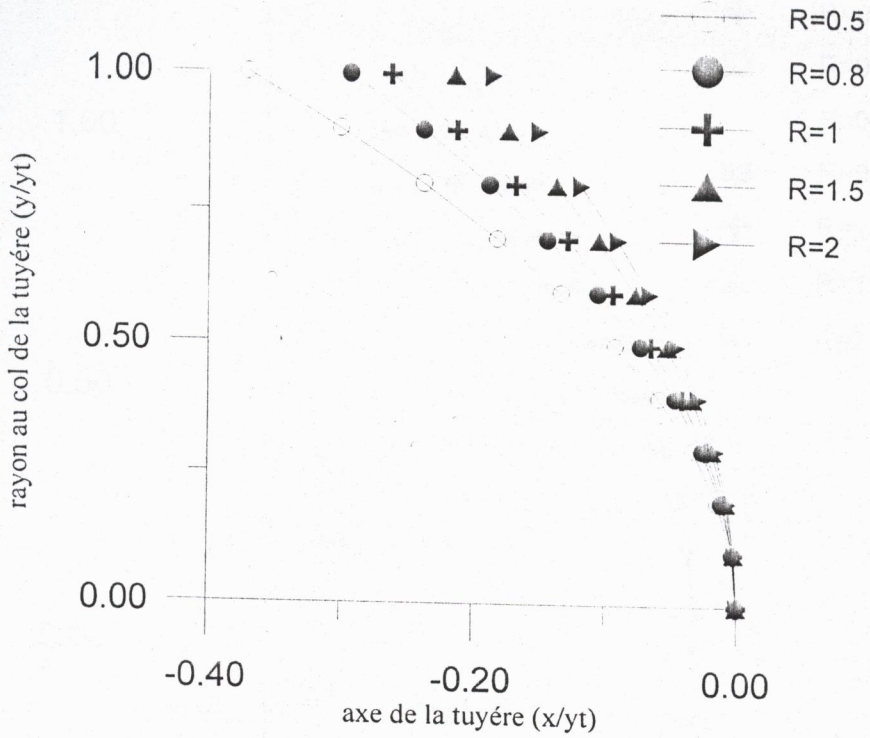


Fig (4-8) : influence du parametre R sur la ligne sonique pour la tuyère "BERENICE" par la methode de Sauer

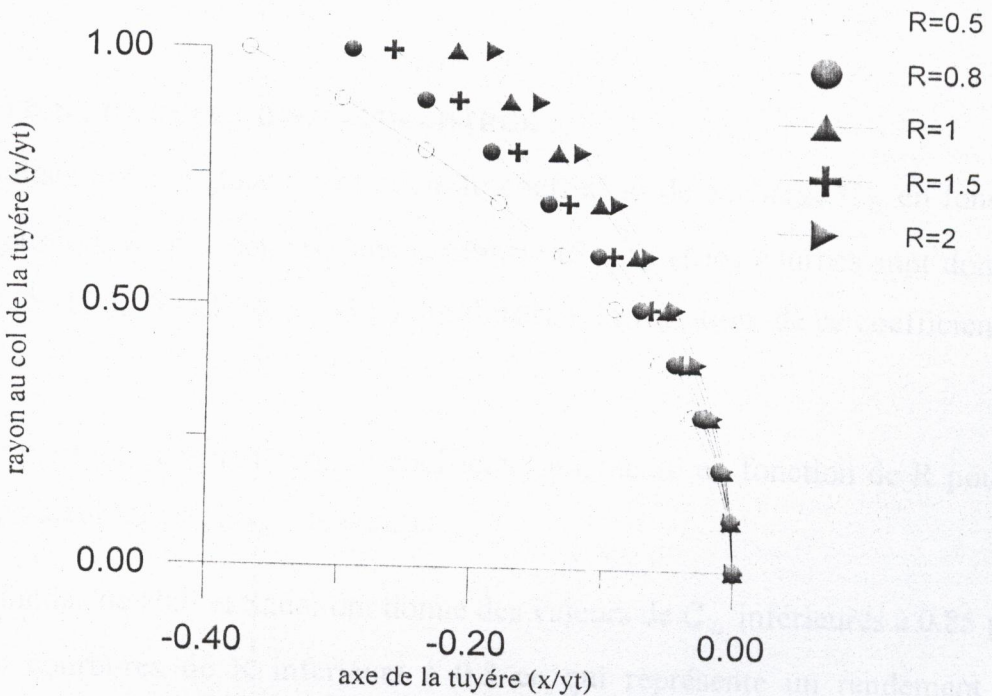


Fig (5-9) : influence du parametre R sur la ligne sonique pour une tuyère "BERENICE" par la methode de Hall

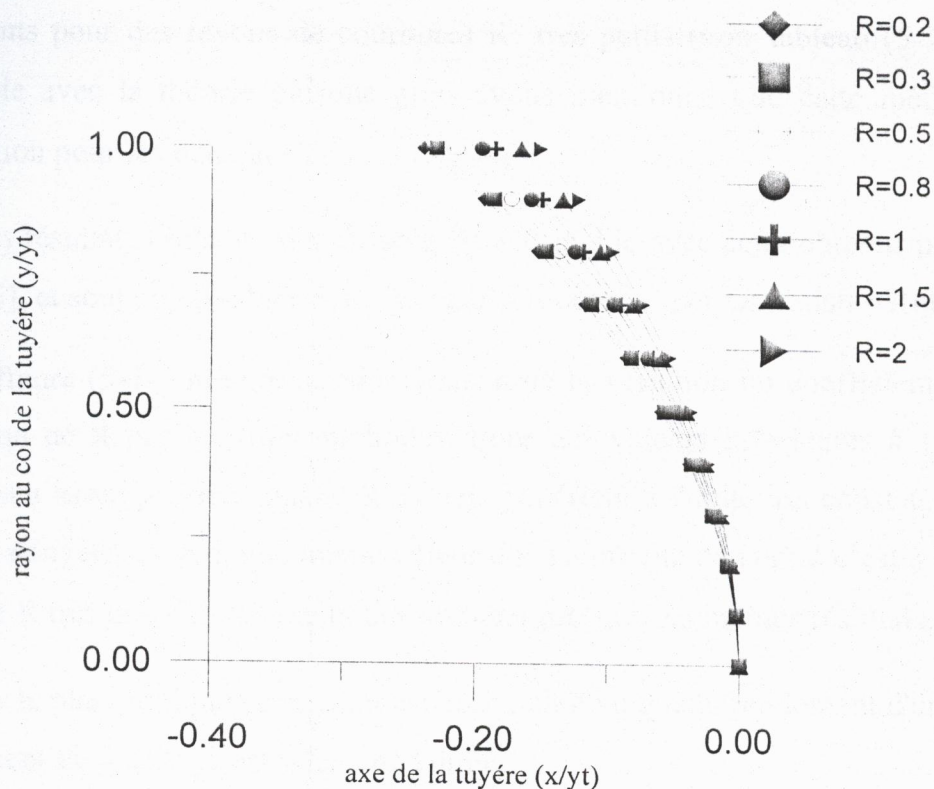


Fig (5-10) : influence du parametre R sur la ligne sonique pour la tuyère "BERENICE" par la methode de Kliegel & Levine

**5-2-4 VARIATION DU COEFFICIENT DE DECHARGE :**

Les résultats obtenus pour la variation du coefficient de décharge  $C_D$  en fonction du rayon de courbure R sont donnés dans le tableau (5 – 5) et les courbes sont données par les figures (5 -11 ), (5 -12 ) et (5 -13 ) qui illustrent la variation de ce coefficient en fonction de R.

Comme première constatation, ce coefficient augmente en fonction de R pour se stabiliser à une valeur au voisinage de l'unité.

Les méthodes de Hall et Sauer ont donné des valeurs de  $C_D$  inférieures à 0.85 pour des rayons de courbures de R inférieurs à 0.5 ce qui représente un rendement très médiocre sur le plan pratique.

Contrairement à ces méthodes, celle de Kliegel & Levine donne des résultats très satisfaisants pour des rayons de courbures  $R$  très petits (voir tableau (5-5)) ce qui est compatible avec la théorie puisque nous avons mentionné que cette méthode est une amélioration pour les deux autres.

Les résultats obtenus sont en accords acceptable avec ceux obtenus par les mêmes auteurs [5], et sont compatibles avec les résultats obtenus par Oswatish – Rothstein [25].

La figure (5-14) montre la comparaison de la variation du coefficient de décharge en fonction de  $R$  par les trois méthodes. Pour des valeurs inférieures à 1 les résultats obtenus sont assez proches, quand  $R$  devient supérieur à l'unité, on constate que les trois méthodes convergent vers une même valeur qui est proche de l'unité c'est à dire pour des valeurs de  $R$  très grandes ces méthodes donnent presque les mêmes résultats.

Sur le plan pratique ce résultat est acceptable vu que le rendement d'une tuyère ou le coefficient de décharge est voisin de l'unité.

2,000	0,9984	0,9983	0,9980
3,000	0,9974	0,9973	0,9971
3,500	0,9981	0,9980	0,9981
4,000	0,9983	0,9983	0,9980
4,500	0,9989	0,9986	0,9982

Tableau (5-5) Variation du coefficient de décharge ( $C_d$ ) en fonction de  $R$  pour la tuyère Boronica

R	$C_D$		
	Sauer	Hall	Kliegel-Levine
0,070			0,9021
0,072			0,9200
0,092			0,9520
0,138			0,9640
0,230			0,9730
0,345			0,9799
0,460	0,8300	0,8500	0,9844
0,541	0,9186	0,9101	0,9856
0,632	0,9554	0,9215	0,9886
0,690	0,9554	0,9413	0,9897
1,000	0,9781	0,9750	0,9933
1,500	0,9901	0,9908	0,9960
2,000	0,9944	0,9946	0,9973
2,500	0,9964	0,9963	0,9980
3,000	0,9974	0,9973	0,9985
3,500	0,9981	0,9980	0,9988
4,000	0,9985	0,9983	0,9990
4,500	0,9989	0,9986	0,9992

Tableau (5-5) : Variation du coefficient de décharge ( $C_D$ )  
en fonction de R pour la tuyère Berenice

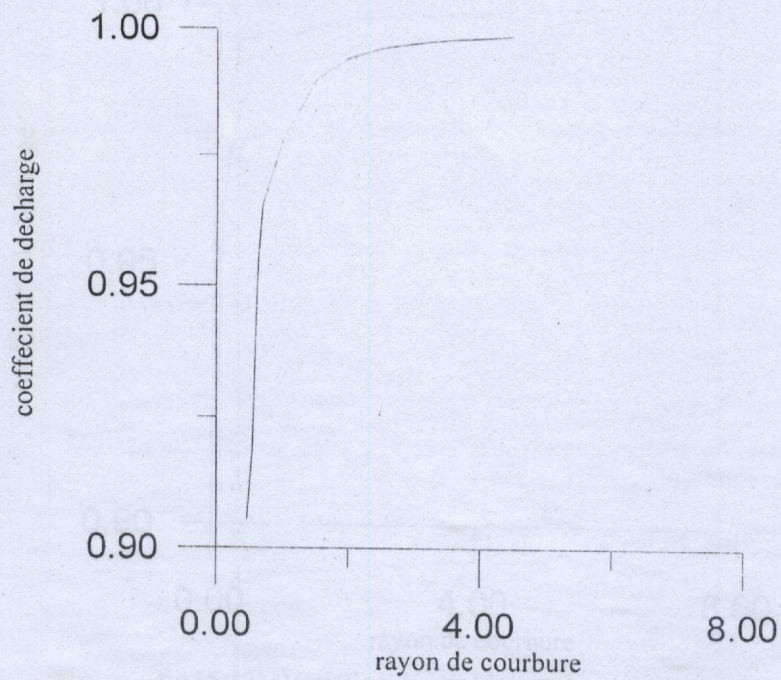


fig (5-11) Variation du coefficient de décharge en fonction du rayon de courbure pour une tuyère Berenice par la méthode de Sauer

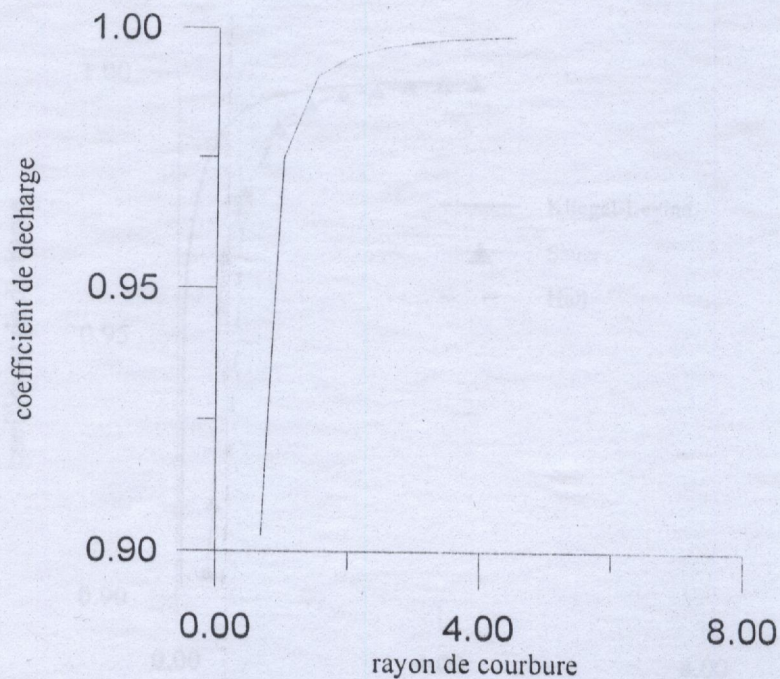


fig (5-12) Variation du coefficient de décharge en fonction du rayon de courbure pour une tuyère Berenice par la méthode de Hall

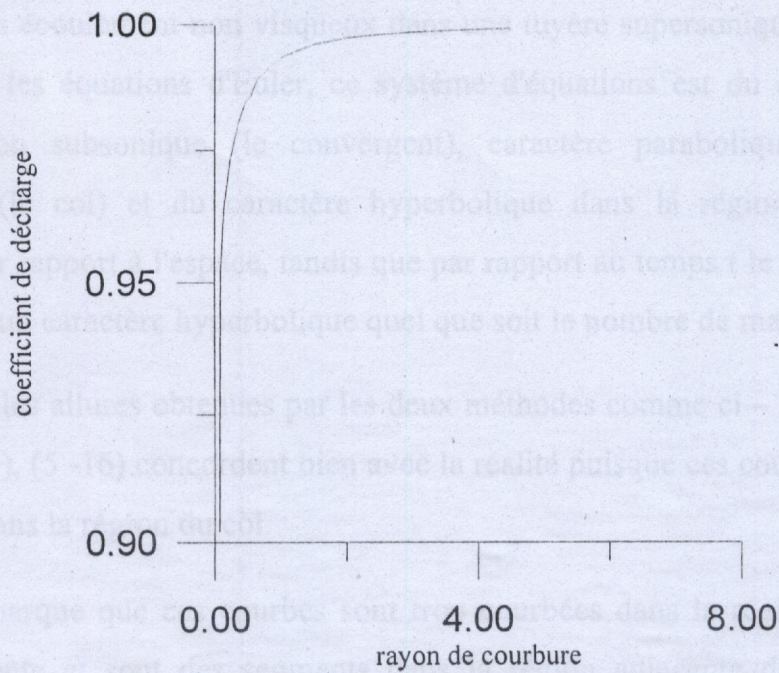


fig (5-13) Variation du coefficient de décharge en fonction du rayon de courbure pour une tuyère Berenice par la méthode de Kliegel-Levine

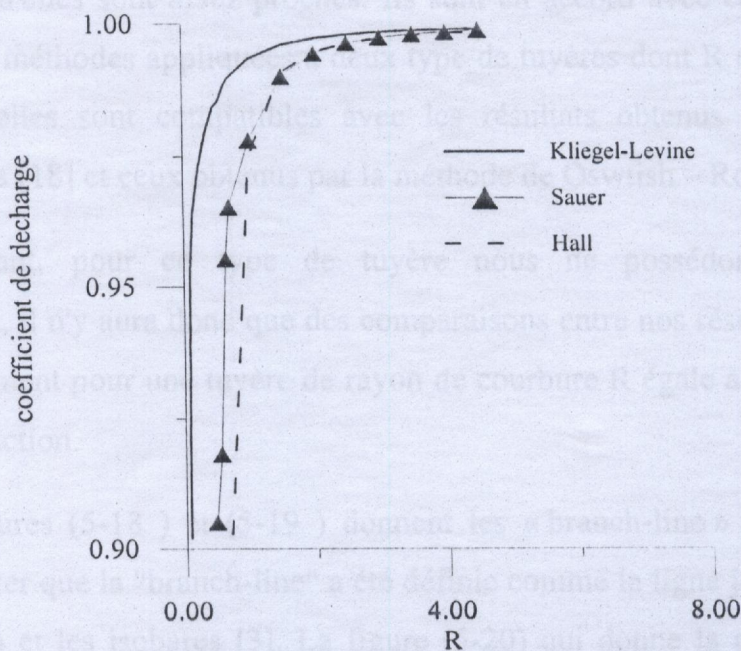


Fig.(5-14) : variation du coefficient de décharge en fonction de R

d'autres types de tuyères (aucun auteurs des références consultés n'a traité la "branch-line" à l'exception de Hall [3] sans donner l'allure).

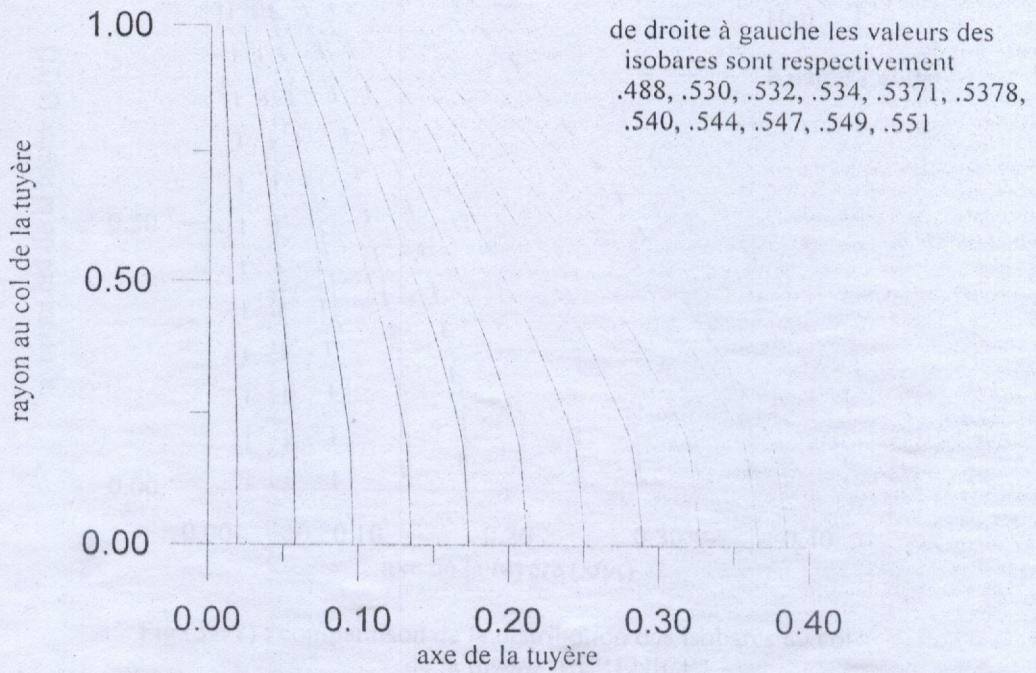


fig (5 -15 ) Les isobares dans la région du col pour la tuyère Berenice par la méthode de Hall

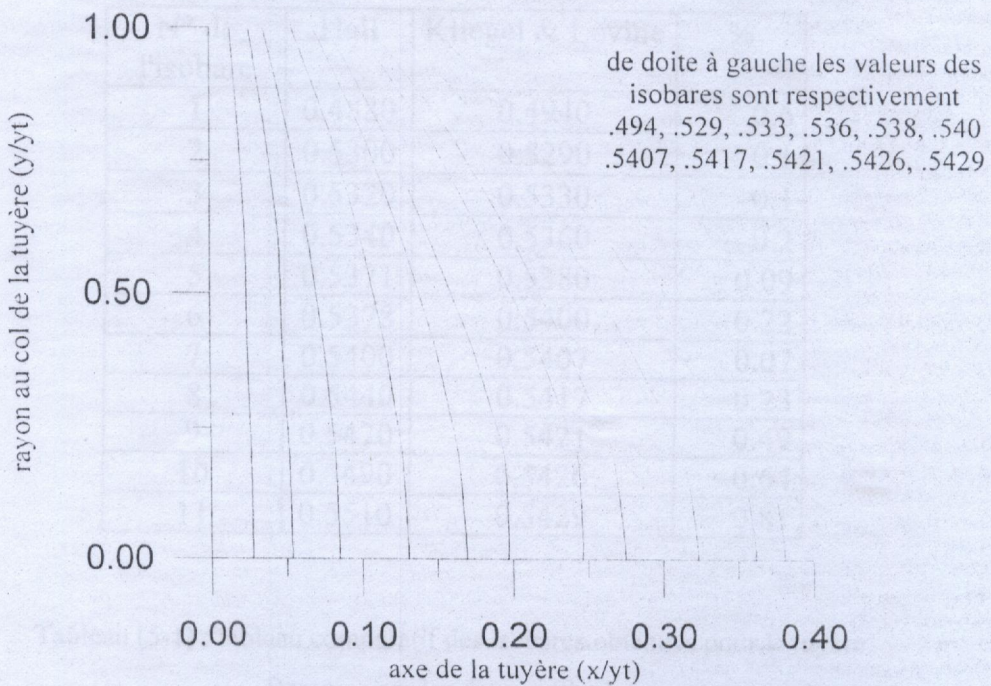


fig (5-16) Les isobares dans la région du col pour la tuyère Berenice par la méthode de Kliegel-Levine



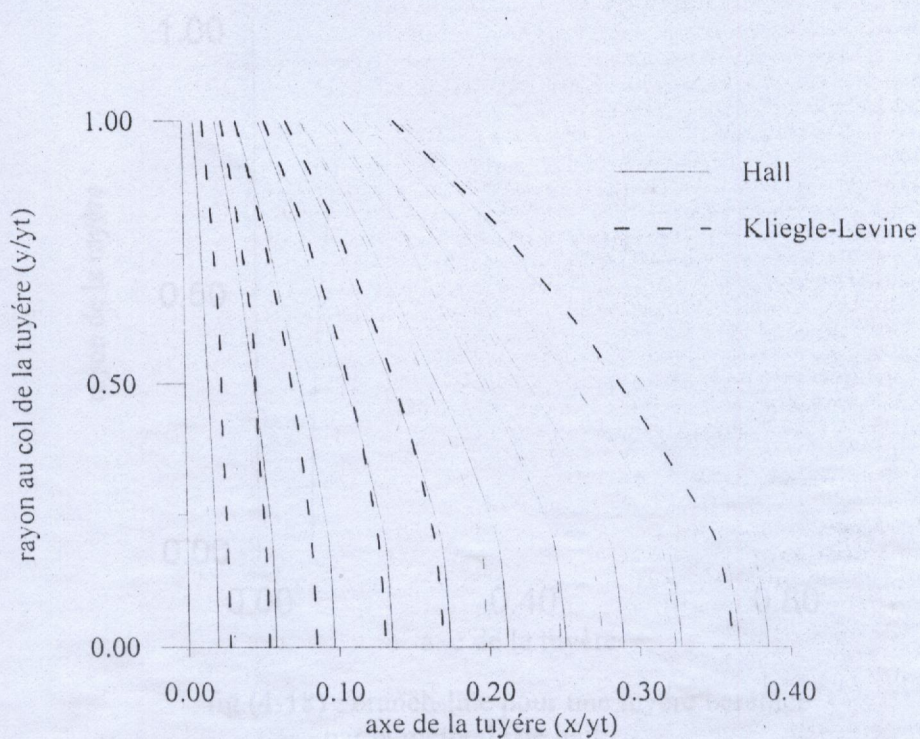


Fig.(5-17) : comparaison de la distribution des isobares au col de la tuyère "BERENICE"

N° de l'isobare	Hall	Kliegel & Levine	%
1	0.4880	0.4940	0.6
2	0.5300	0.5290	0.1
3	0.5320	0.5330	0.1
4	0.5340	0.5360	0.2
5	0.5371	0.5380	0.09
6	0.5378	0.5400	0.22
7	0.5400	0.5407	0.07
8	0.5440	0.5417	0.23
9	0.5470	0.5421	0.49
10	0.5490	0.5426	0.64
11	0.5510	0.5429	0.81

Tableau (5-1) : tableau comparatif des isobares obtenues pour la tuyère Berenice par les deux méthodes

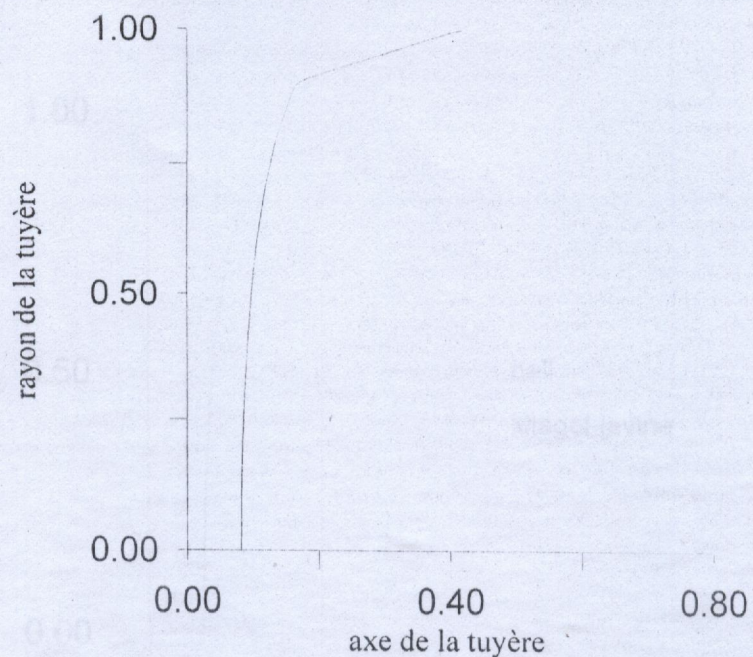


fig (4-18) : branch-line pour une tuyère berenice par la méthode de hall

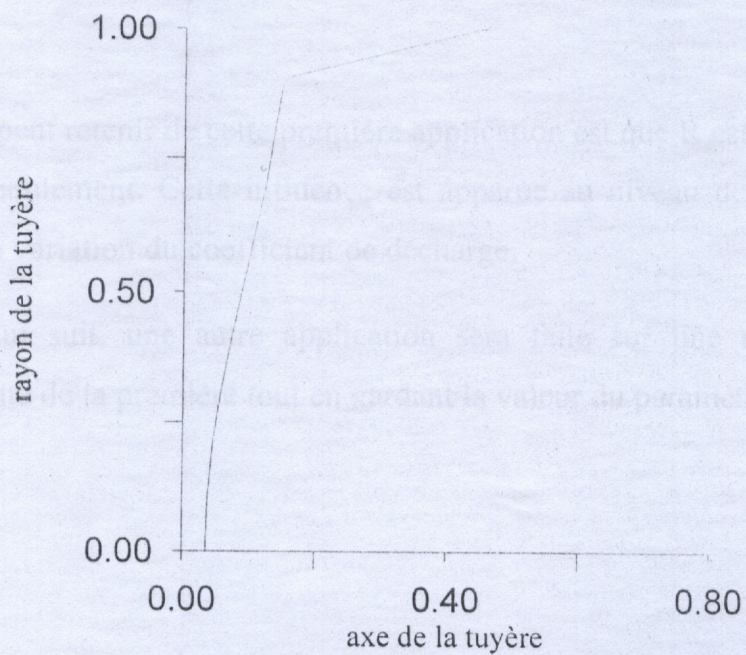


fig (4-19) : branch-line pour une tuyère berenice par la méthode de Kliegel-Levine

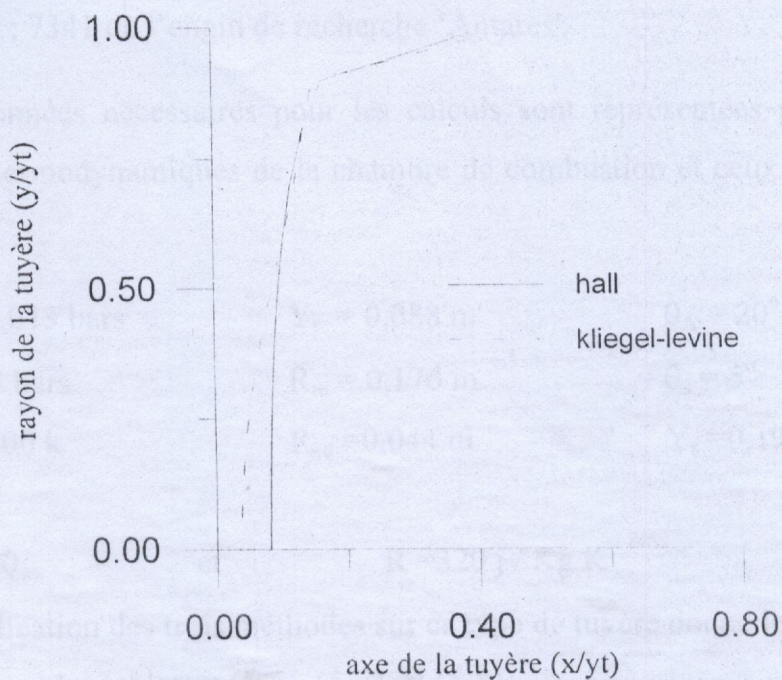


fig (4-20) : "branch-line" pour la tuyère "BERENICE" par les méthodes de Hall et Kliegel-Levine

Ce qu'on peut retenir de cette première application est que  $R$  est le seul paramètre qui influe sur l'écoulement. Cette influence est apparue au niveau de la position de la ligne sonique et la variation du coefficient de décharge.

Dans ce qui suit, une autre application sera faite sur une tuyère qui a une géométrie différente de la première tout en gardant la valeur du paramètre  $R$

### 5-3 DEUXIEME CAS D'ETUDE TUYERE "ANTARES "

Le second cas d'étude est représenté par la tuyère équipant le premier étage du moteur SEPR ; 7341 de l'engin de recherche 'Antares'.

Les données nécessaires pour les calculs sont représentées par les valeurs des paramètres thermodynamiques de la chambre de combustion et ceux géométriques de la tuyère.

$$\begin{array}{lll}
 P_a = 1,013 \text{ bars} & Y_t = 0,088 \text{ m} & \theta_A = 20^\circ \\
 P_t = 54 \text{ bars} & R_{tu} = 0,176 \text{ m} & \theta_s = 5^\circ \\
 T_t = 2500 \text{ k} & R_{cd} = 0,044 \text{ m} & Y_s = 0,197
 \end{array}$$

avec

$$\gamma = 1,20 \quad \text{et} \quad R = 320 \text{ j / Kg K}$$

L'application des trois méthodes sur ce type de tuyère donne les résultats qui sont représentés dans les tableaux (5-6) .(5-7) et (5-8).

Les valeurs obtenues par les trois méthodes sont assez proches, les écarts sont toujours dus à la différence d'approche de ces méthodes. Pour les performances, on remarque qui sont très proches des valeurs réelles et sont représentés dans le tableau (5-6).

	Réelle	Sauer	Hall	Kliegel- Levine
<b>P Développée</b>	202 923	160 002,8	160 030,8	160 311,5
<b>D massique</b>	95	94,634	94,661	94,940
<b>Coef de décharge</b>	0,9930	0,9934	0,9937	0,9966

Tableau (5-6) : performances d'une tuyère "Antares"

X(i)	Y(i)	U(i)	V (i)	q(i)	P(i)	M(i)
-0,0163	0,0880	1051	0	1051	25,93	1,140
-0,0132	0,0792	1029	0	1029	26,79	1,113
-0,0104	0,0704	1009	0	1009	27,56	1,089
-0,0080	0,0616	991	0	991	28,24	1,068
-0,0053	0,0528	976	0	976	28,83	1,049
-0,0041	0,0440	963	0	963	29,33	1,034
-0,0026	0,0352	952	0	952	29,75	1,022
-0,0015	0,0264	944	0	944	30,07	1,012
-0,0006	0,0176	938	0	938	30,29	1,005
-0,0001	0,0088	935	0	935	30,43	1,001
0	0	934	0	934	30,48	1

Tableau (5-9) : résultats obtenus pour une tuyère "Antares"  
par la méthode de Sauer

### 5-3-1 LA LIGNE SONIQUE :

L'application des trois méthodes sur une tuyère de géométrie différente et qui possède le même R que la tuyère berenice, montre que l'allure de la ligne sonique n'a pas changée comme illustrent les figures(5-21) ,(5-22) et (5-23), ceci montre que le changement de la géométrie de la tuyère n'a pas une grande influence sur la forme de la ligne sonique.

La comparaison de ces résultats a donné satisfaction pour les trois méthodes comme on l'a déjà vu dans le cas de la tuyère Berenice figure(5-24). En plus ces résultats concordent bien avec ceux obtenus par d'autres auteurs en l'occurrence Taylor [17] et Oswatish – Rothstein [25].

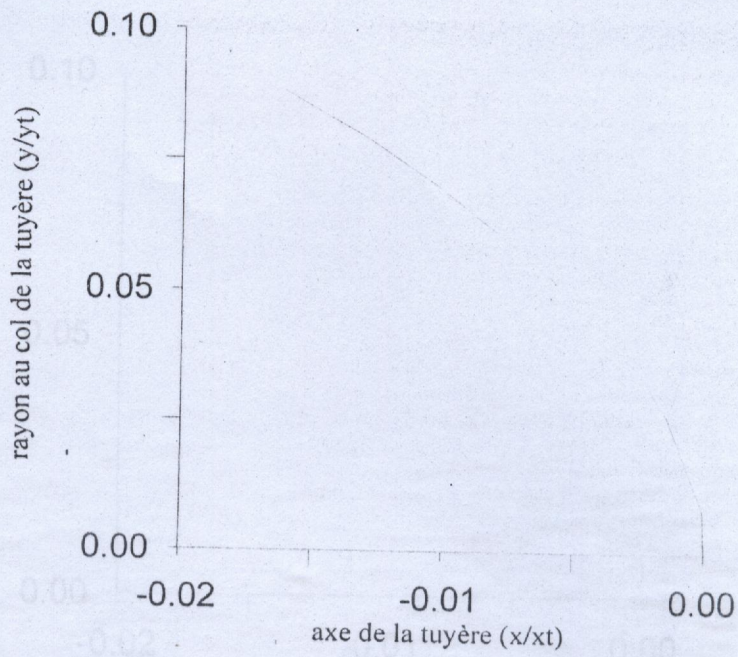


fig (5-21) Ligne sonique pour une tuyère Antares par la méthode Sauer

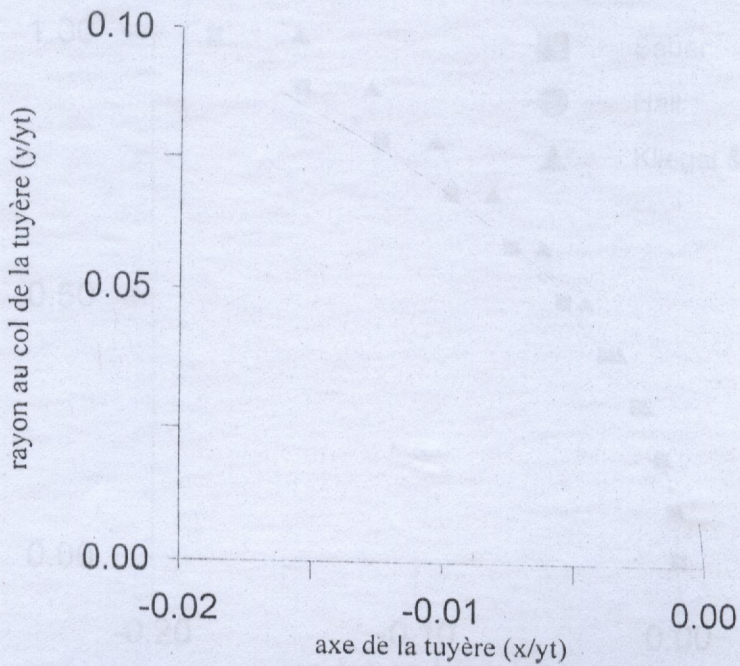


fig (5-22) Ligne sonique pour une tuyère Antares par la méthode de Hall

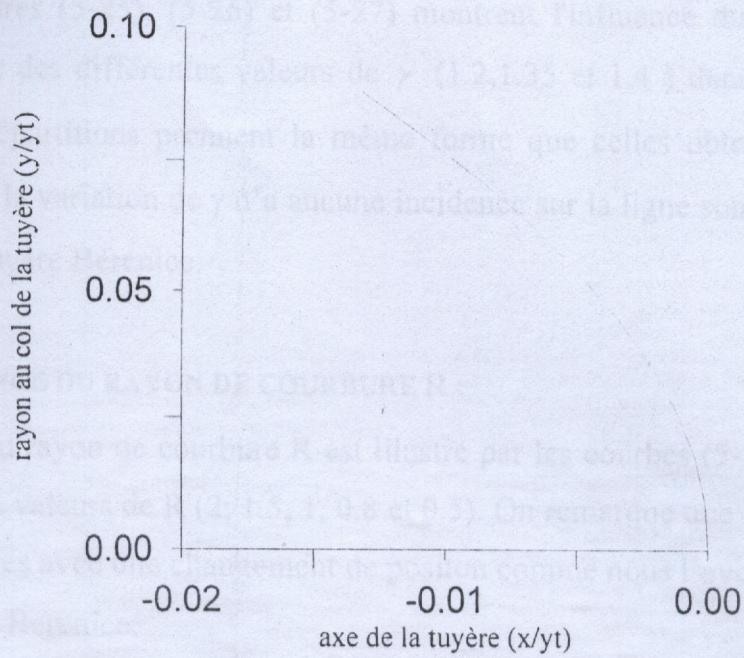


fig (5-23) Ligne sonique pour une tuyère Antares par la méthode de Kliegel-Levine

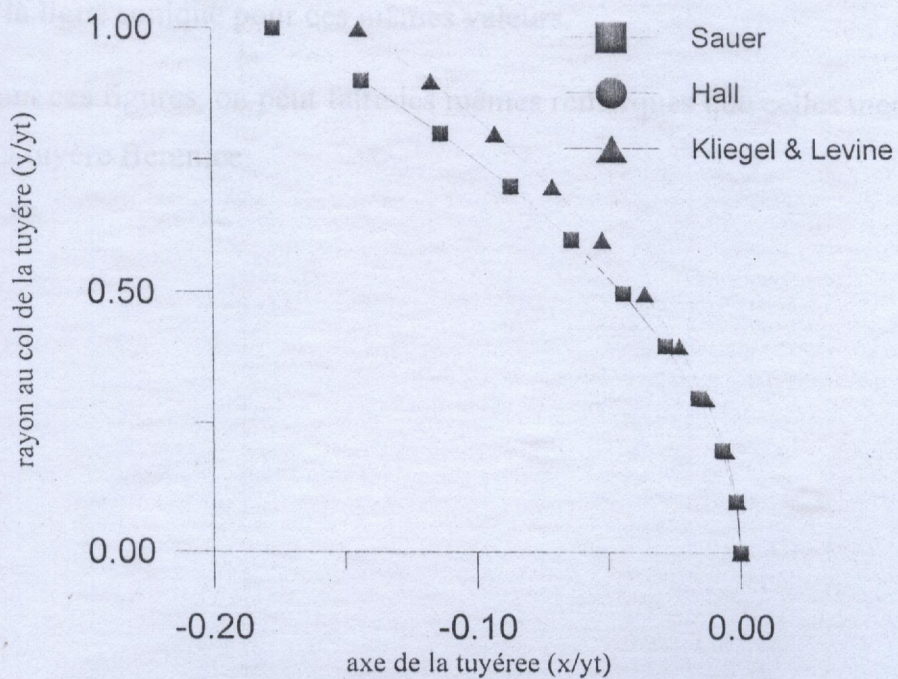


Fig (5-24) : lignes soniques obtenues pour la tuyère "ANTARES"

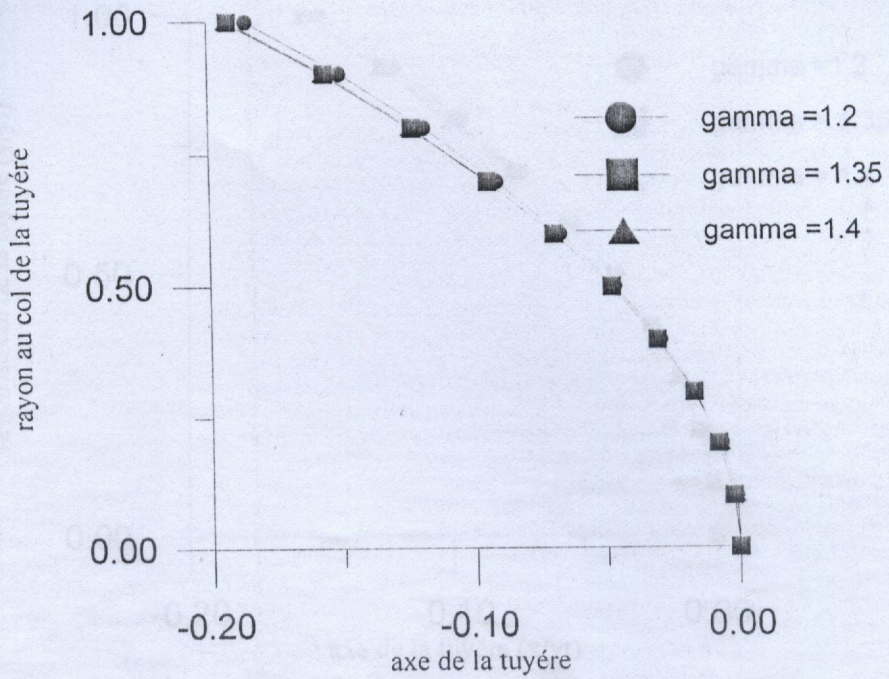


fig (5-25) Influence de gamma sur la ligne sonique pour la tuyère "ANTARES" par la méthode de Sauer

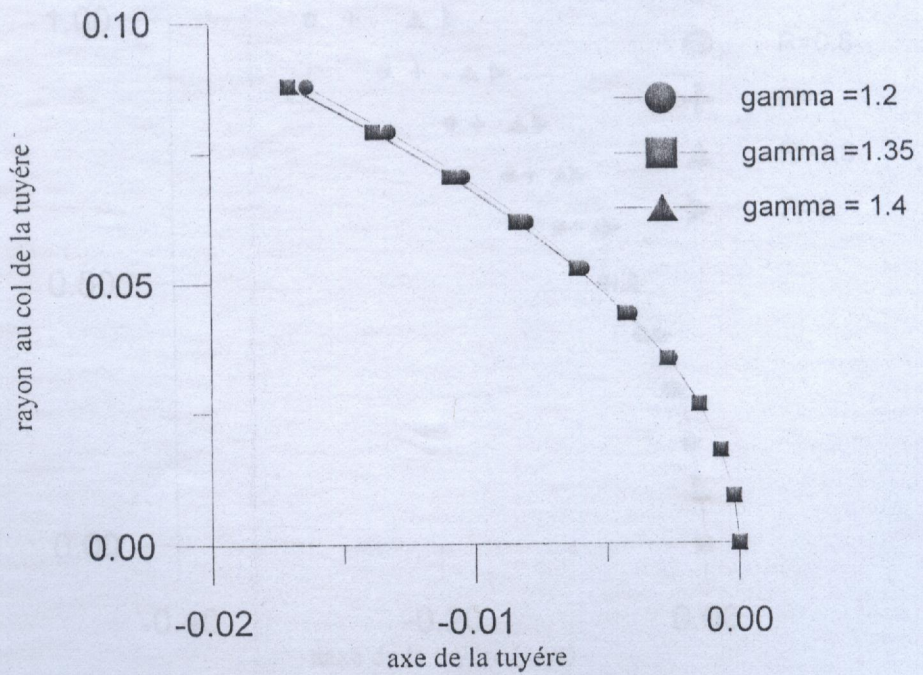


fig (5-26) Influence de gamma sur la ligne sonique pour la tuyère Antares par la méthode de Hall



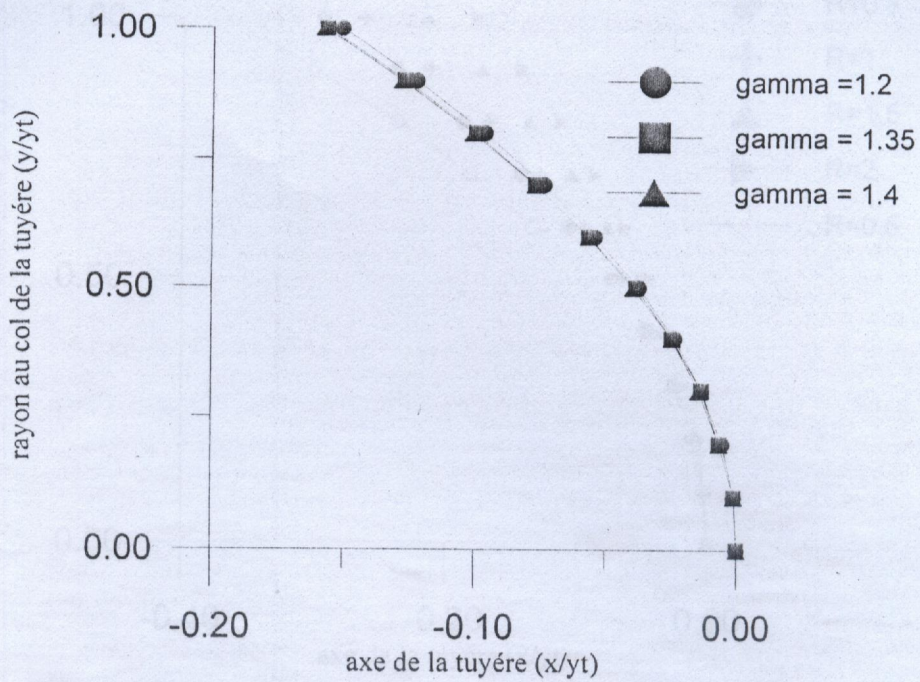


fig (5-27) Influence de gamma sur la ligne sonique pour une tuyère Antares par la méthode de Kliegel-Levine

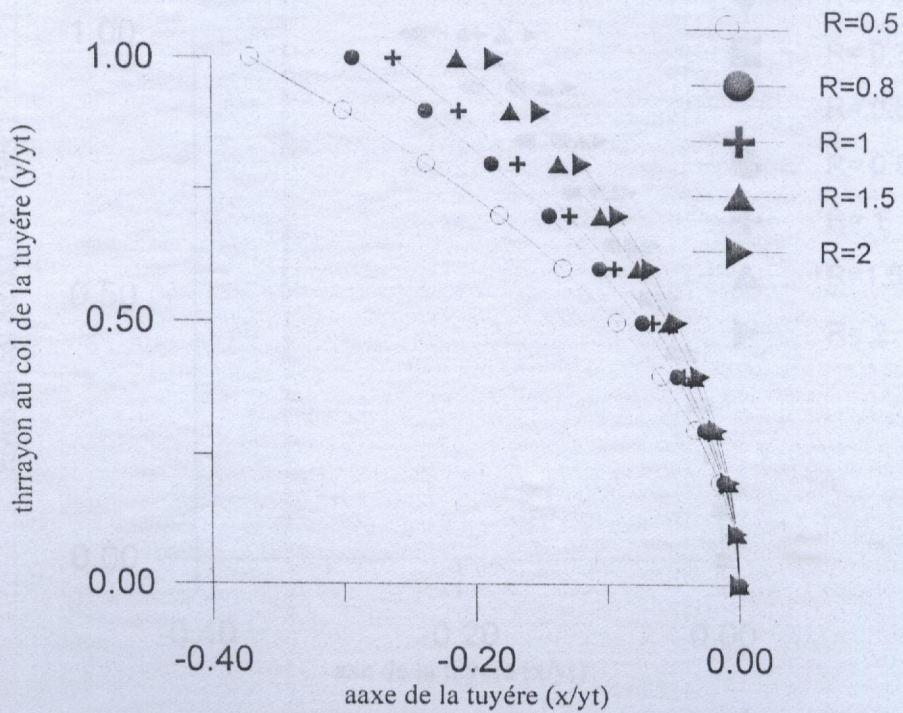


Fig (5-28) : influence du parametre R sur la ligne sonique pour la tuyère "ANTARES" par la methode de Sauer

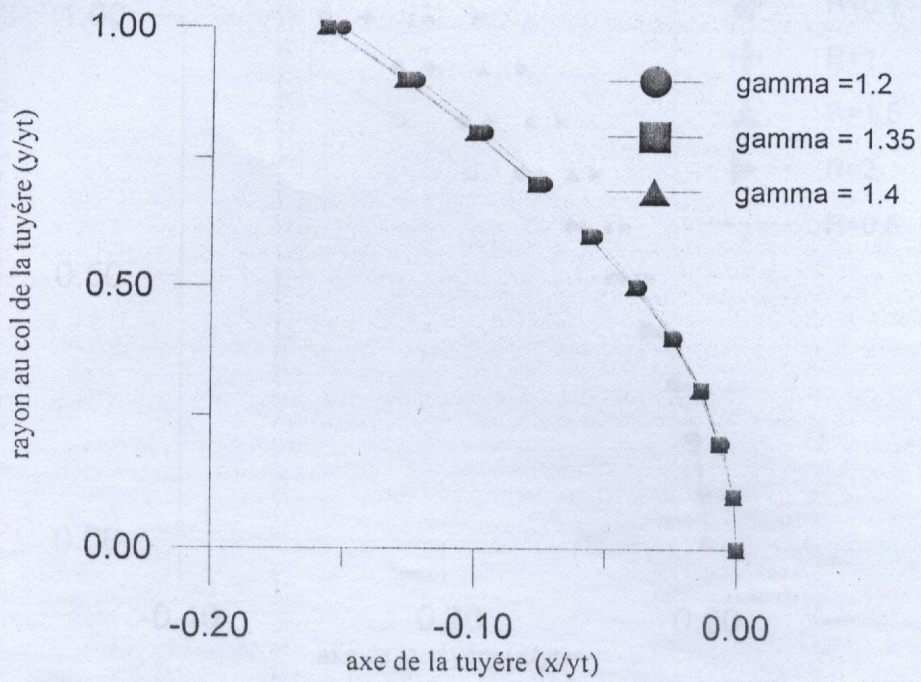


fig (5-27) Influence de gamma sur la ligne sonique pour une tuyère Antares par la méthode de Kliegel-Levine

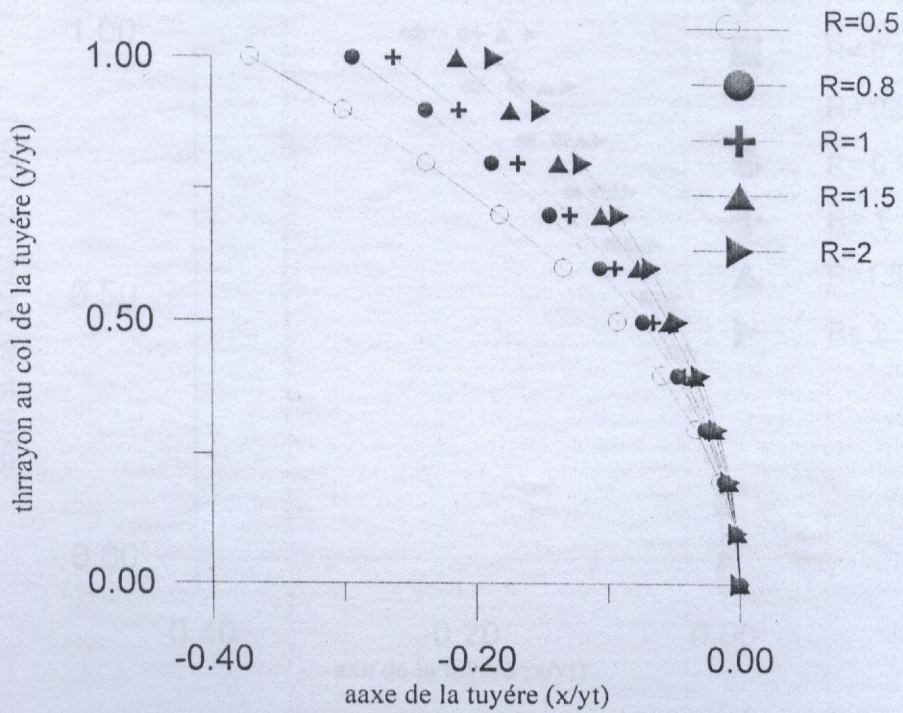


Fig (5-28) : influence du parametre R sur la ligne sonique pour la tuyère "ANTARES" par la methode de Sauer

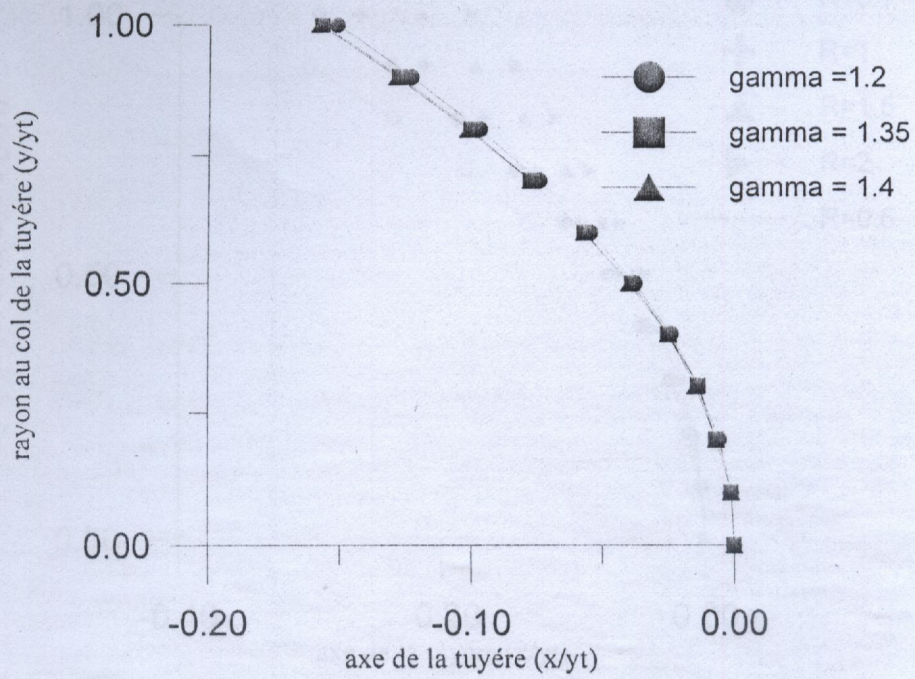


fig (5-27) Influence de gamma sur la ligne sonique pour une tuyère Antares par la méthode de Kliegel-Levine

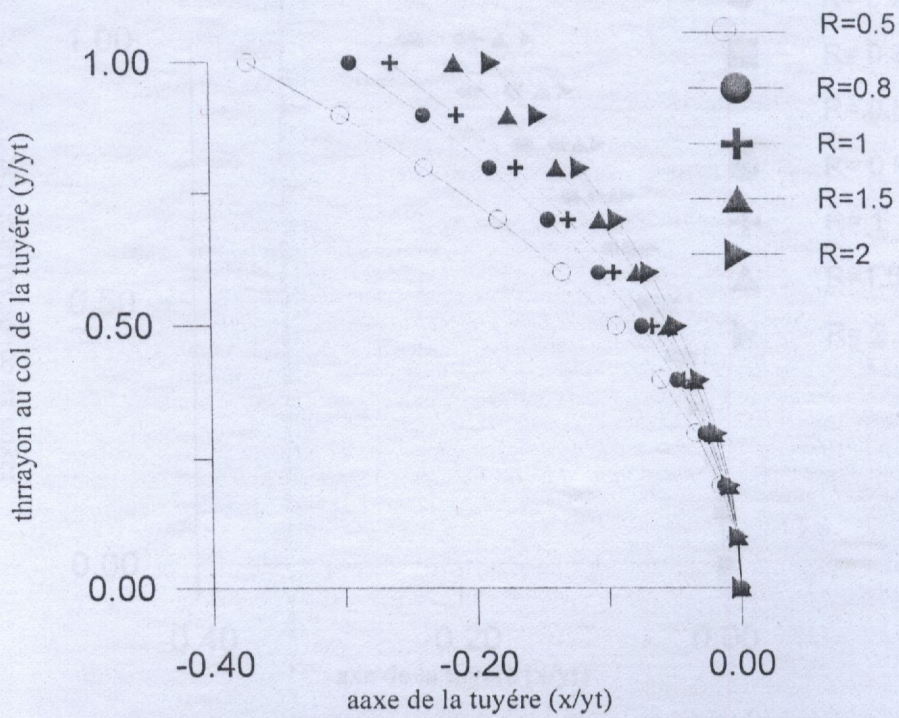


Fig (5-28) : influence du parametre R sur la ligne sonique pour la tuyère "ANTARES" par la methode de Sauer

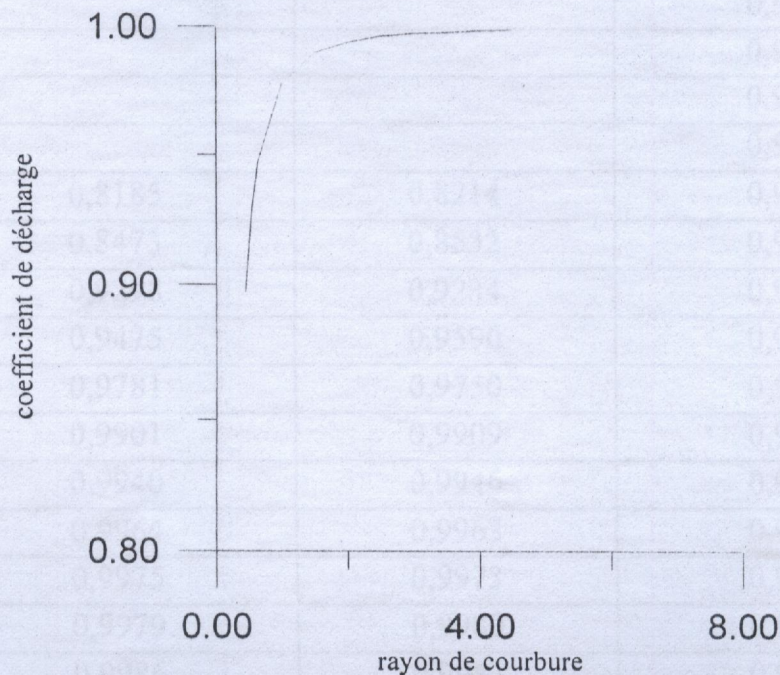
### 5-3-4 VARIATION DU COEFFICIENT DE DECHARGE :

Le tableau (5-10) représente les valeurs du coefficient de décharge pour des différentes valeurs de R pour une tuyère Antares. Les commentaires mentionnés dans le cas de la tuyère Berenice sont valables dans ce cas, c'est à dire le coefficient de décharge augmente en fonction de R pour atteindre une valeur avoisinante de l'unité.

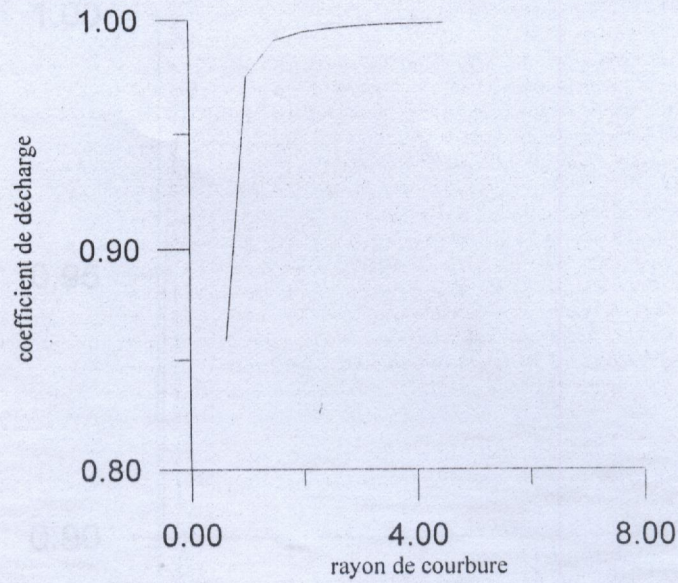
Ainsi la divergence est apparue pour les méthodes de Sauer et Hall pour des rayons de courbures R très petits contrairement à la méthode de Kliegel-Levine voir tableau (5-10) qui a donné des résultats satisfaisants pour ces mêmes valeurs. Les allures sont représentés dans les figures (5-31), (5-32) et (5-33).

La figure (5-34) représente la comparaison des résultats obtenus par ces trois méthodes qui concorde bien avec ceux obtenus pour la tuyère Berenice.

Ces résultats sont aussi en accord avec les résultats obtenus par ces mêmes méthodes [5], ainsi que les résultats de la référence[25].



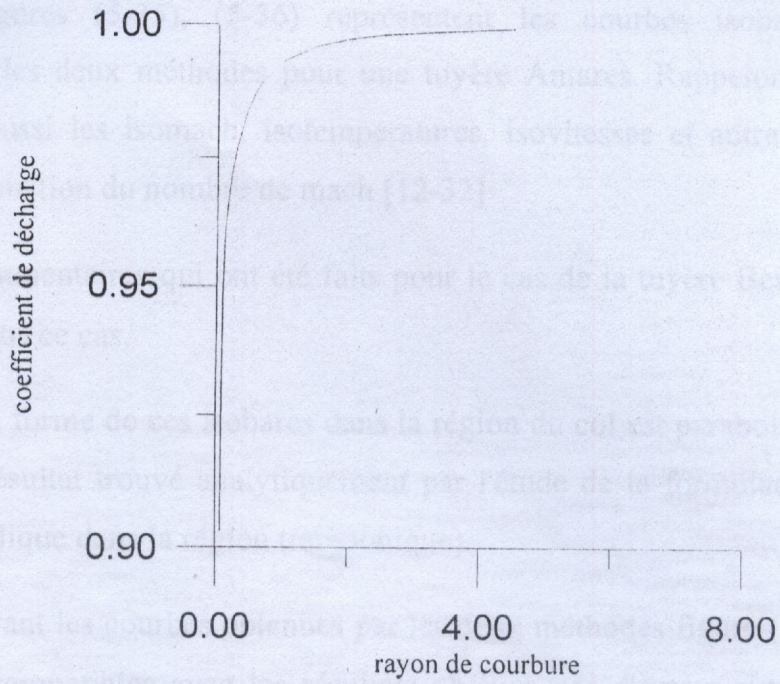
fig(5-31) Variation du coefficient de décharge en fonction du rayon de courbure pour une tuyère Antares par la méthode de Sauer



fig(5-32) Variation du coefficient de décharge en fonction du rayon de courbure pour une tuyère Antares par la méthode de Hall

R	$C_D$		
	Sauer	Hall	Kliegel- Levine
0,0704			0,9030
0,0880			0,9478
0,1173			0,9604
0,176			0,9682
0,220			0,9721
0,293	0,8185	0,8214	0,9771
0,440	0,8473	0,8532	0,9838
0,541	0,9298	0,9234	0,9867
0,632	0,9475	0,9590	0,9887
1	0,9781	0,9750	0,9933
1,5	0,9901	0,9909	0,9960
2	0,9940	0,9946	0,9973
2,5	0,9964	0,9963	0,9981
3	0,9975	0,9973	0,9985
3,5	0,9979	0,9980	0,9988
4	0,9986	0,9983	0,9991
4,5	0,9990	0,9987	0,9993

Tableau (5-10): Variation du coefficient de décharge en fonction de pour la tuyère "Antares"



fig(5-33) Variation du coefficient de décharge en fonction du rayon de courbure pour une tuyère Antares par la méthode de Kliegel-Levine

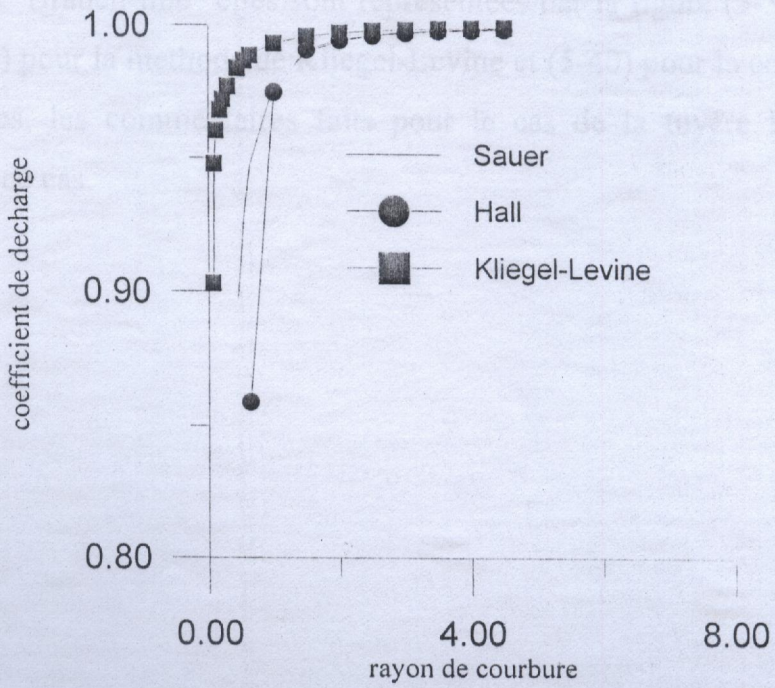


fig (5-34) Variation du coefficient de decharge en fonction du rayon de courbure pour la tuyère "ANTARES" par les trois méthodes

### 5-3-5 DISTRIBUTION DES ISOBARES AU COL ET "BRANCH-LINE" :

Les figures (5-35), (5-36) représentent les courbes isobares (isopressions) calculées par les deux méthodes pour une tuyère Antares. Rappelons que ces courbes représentent aussi les isomach, isotemperatures, isovitesses et autres qui peuvent être exprimés en fonction du nombre de mach [12-32]

Les commentaires qui ont été faits pour le cas de la tuyère Berenice peuvent être mentionnés dans ce cas.

Ainsi la forme de ces isobares dans la région du col est parabolique ce qui montre et justifie le résultat trouvé analytiquement par l'étude de la formulation caractéristique (nature parabolique dans la région transsonique).

Comparant les courbes obtenues par les deux méthodes figure (5-37) on remarque qu'elles sont compatibles avec les résultats obtenus par d'autres auteurs [16-25] et en accord acceptable avec les résultats expérimentaux dans les références [8-12].

Pour la "Branch-line" elles sont représentées par la figure (5-38) pour la méthode de Hall, (5-39) pour la méthode de Kliegel-Levine et (5-40) pour la comparaison entre les deux méthodes, les commentaires faits pour le cas de la tuyère Berenice sont aussi valables pour ce cas.

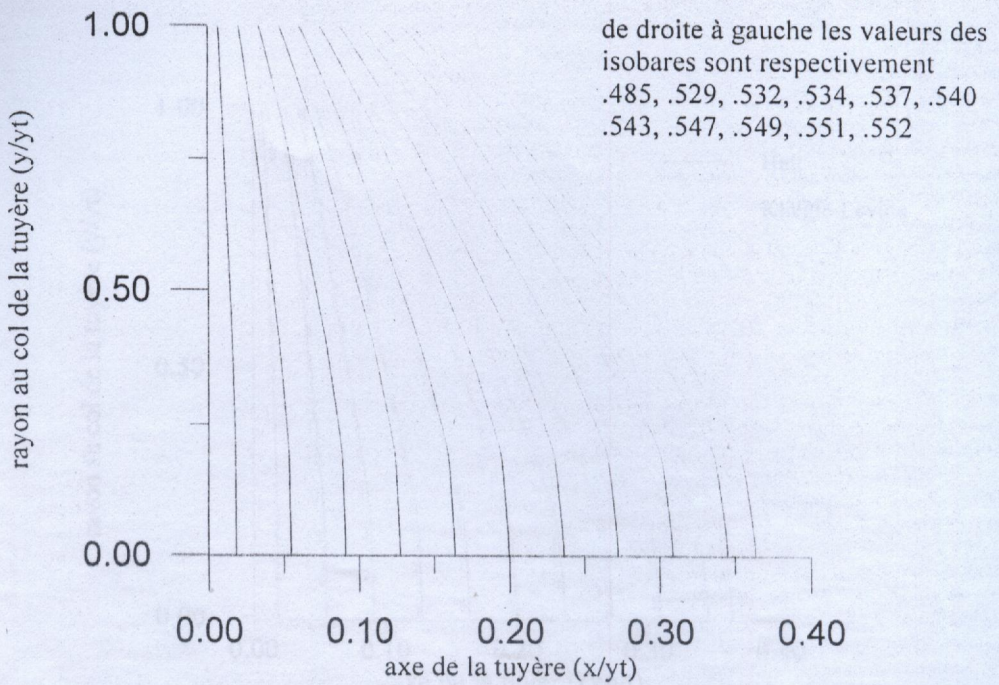


fig (5-35) Les isobares dans la région du col pour la tuyère Antares par la méthode de Hall

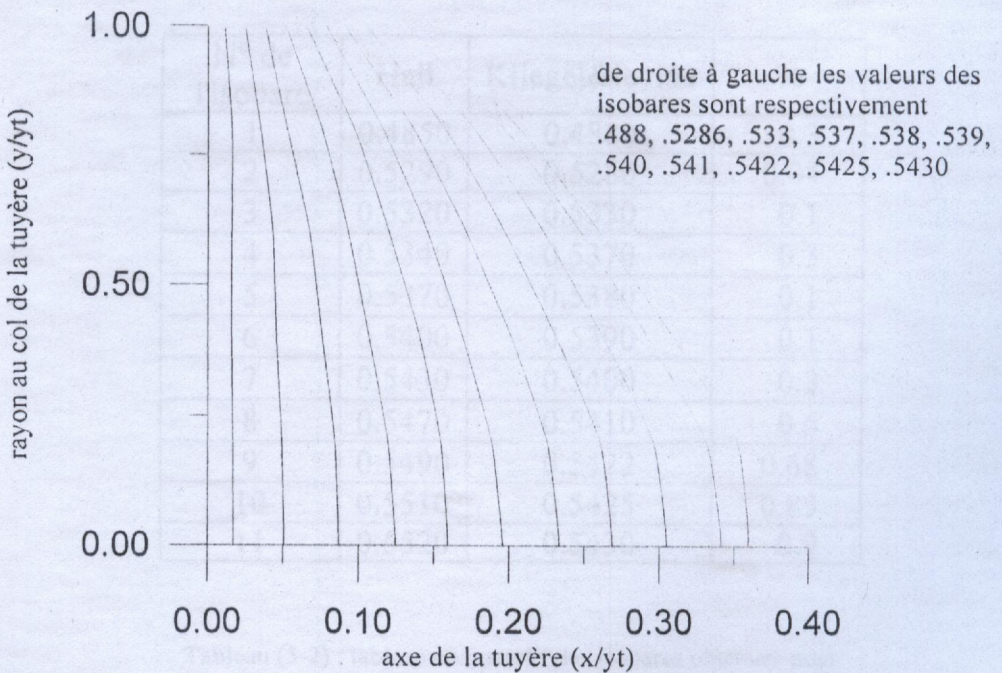


fig (5-36) Les isobares dans la region du col pour la tuyère "ANTARES" par la méthode de Kliegel-Levine



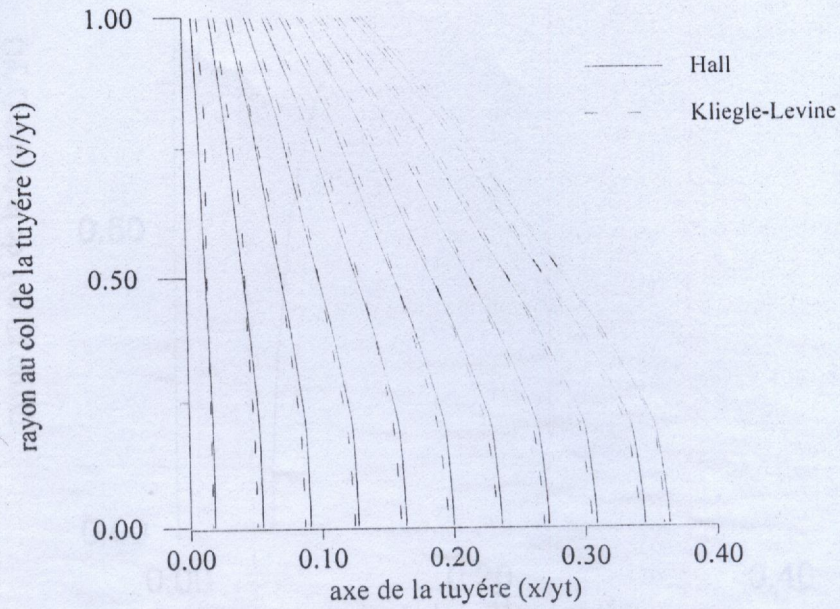
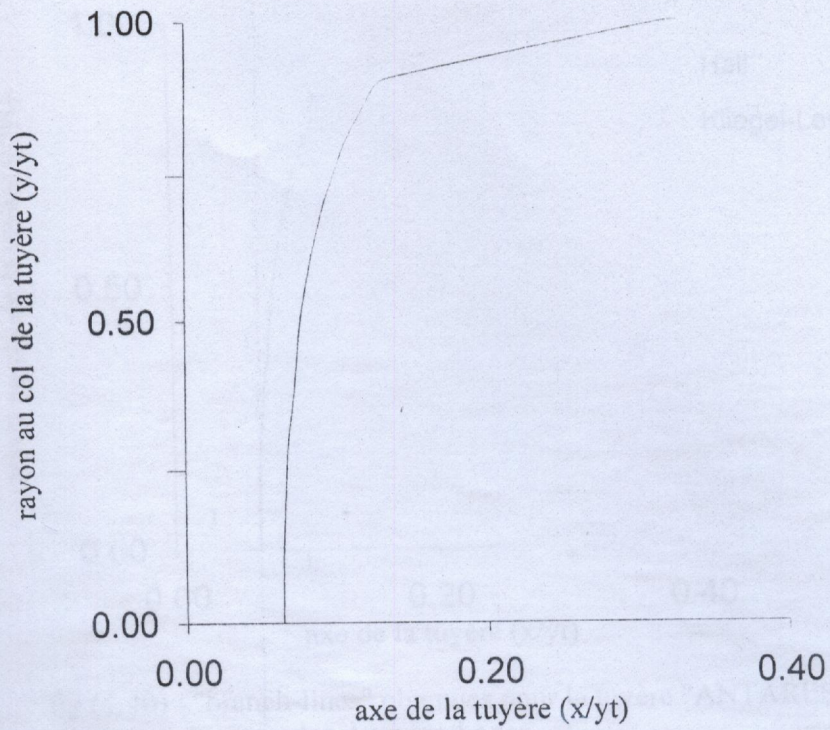


Fig.(5-37) : la distribution des isobares dans la region du col pour la tuyère "ANTARES"

N° de l'isobare	Hall	Kliegel&levine	%
1	0.4850	0.4880	0.3
2	0.5290	0.5286	0.04
3	0.5320	0.5330	0.1
4	0.5340	0.5370	0.3
5	0.5370	0.5380	0.1
6	0.5400	0.5390	0.1
7	0.5430	0.5400	0.3
8	0.5470	0.5410	0.6
9	0.5490	0.5422	0.68
10	0.5510	0.5425	0.85
11	0.5520	0.5430	0.9

Tableau (5-2) : tableau comparatif des isobares obtenues pour la tuyère Antares par les deux méthodes



fig(4-38) : "branch-line" pour une tuyère antares par la méthode de Hall

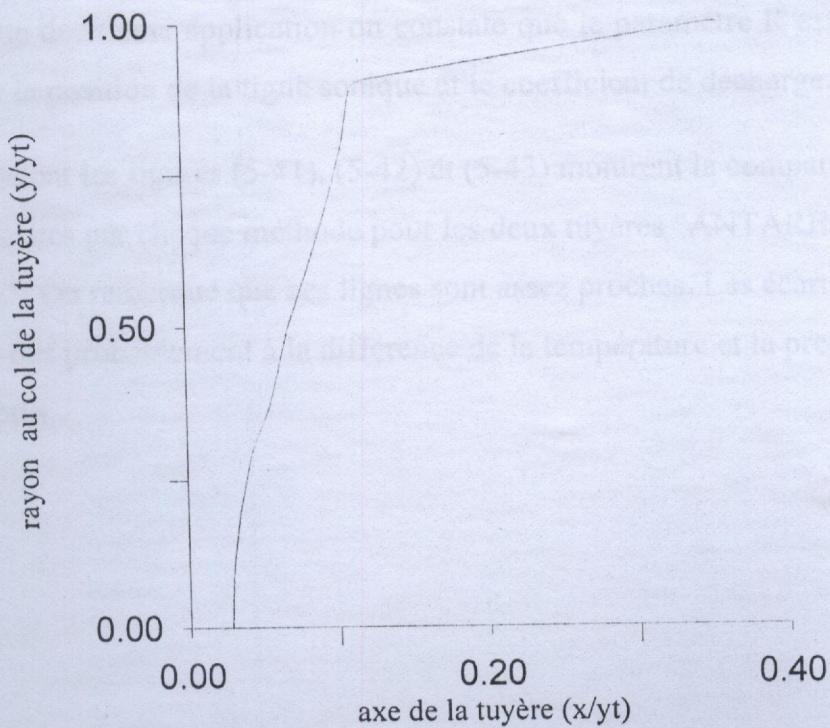


fig (4-39) : " branch- line" pour une tuyère "ANTARES" par la méthode de Kliegel-Levine

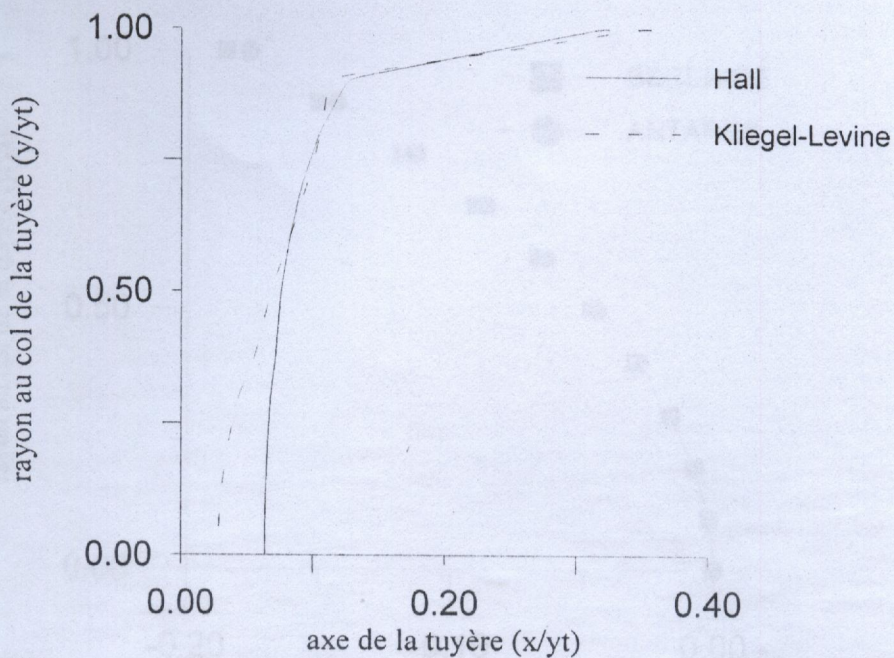


fig (4-40) : "branch-lines" obtenues pour la tuyère "ANTARES"  
par les deux méthodes

De cette deuxième application on constate que le paramètre  $R$  est toujours le seul qui influe sur la position de la ligne sonique et le coefficient de décharge.

Finalement les figures (5-41), (5-42) et (5-43) montrent la comparaison des lignes soniques obtenues par chaque méthode pour les deux tuyères "ANTARES" et "BERENICE". On remarque que ces lignes sont assez proches. Les écarts entre ces courbes sont dus probablement à la différence de la température et la pression d'arrêt pour les deux tuyères.

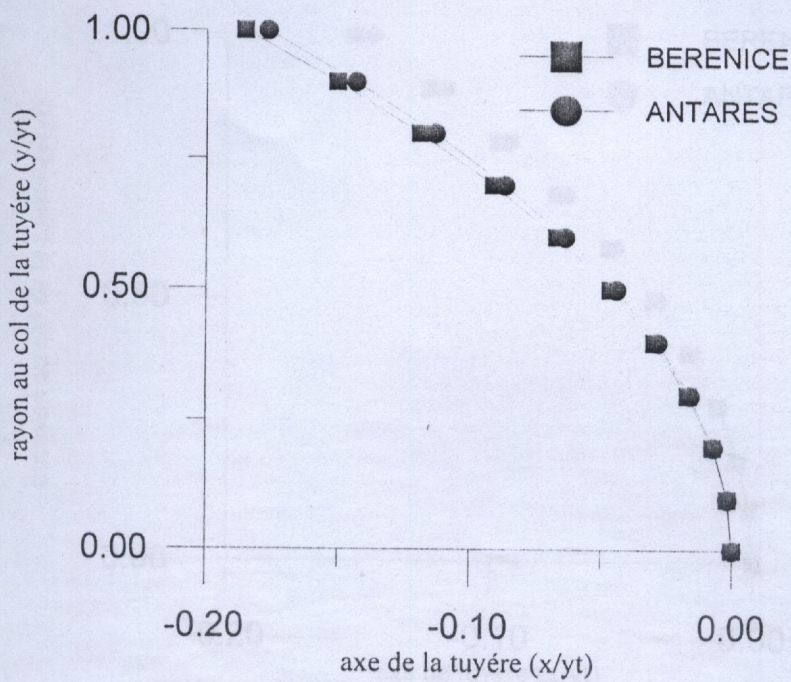


Fig (5-41) : lignes soniques obtenues pour les tuyères for "BERENICE et ANTARES" par la methode de Sauer

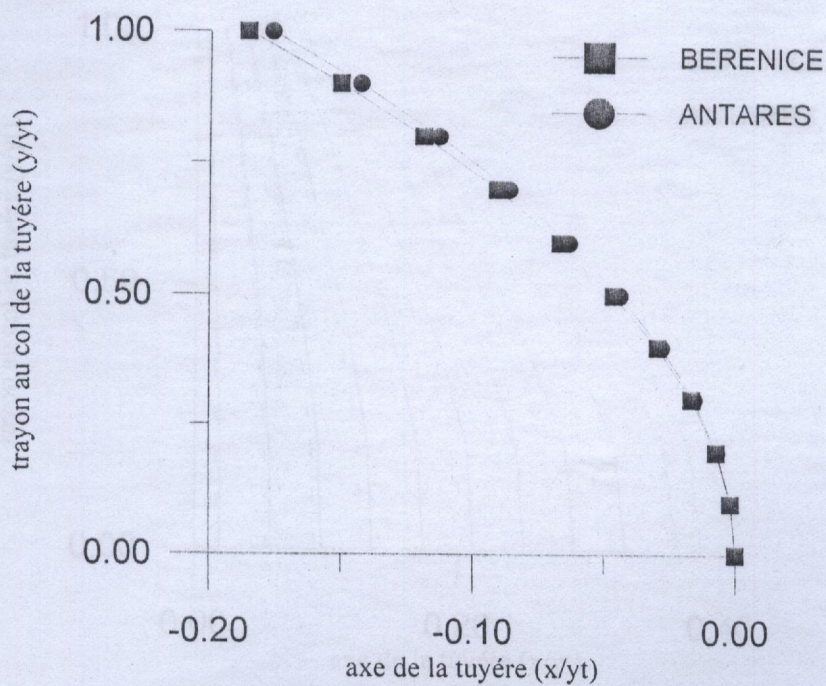


Fig (5-42) : lignes soniques obtenues pour les tuyères "BERENICE et ANTARES" nozzles par la methode de Hall

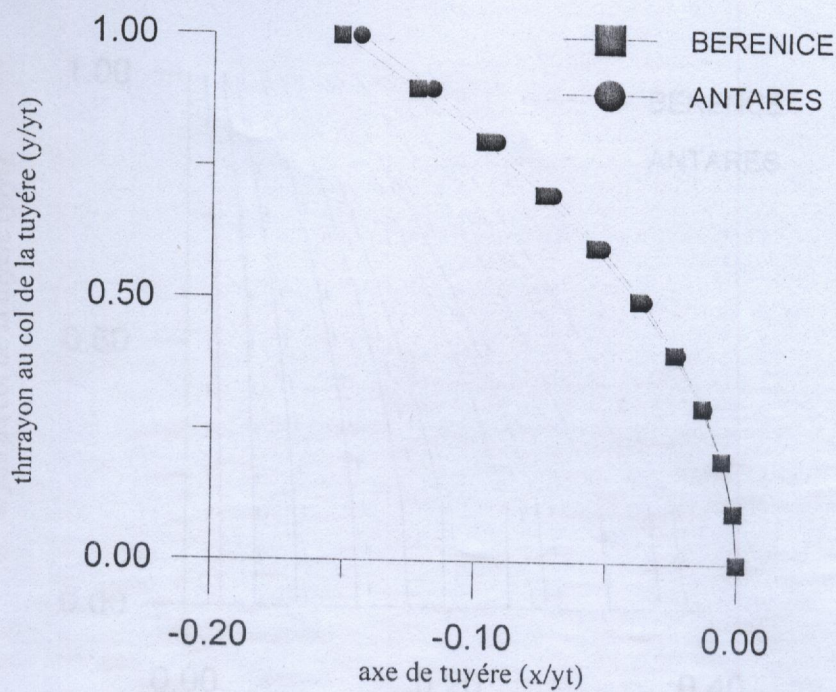


Fig (5-43) : lignes soniques obtenues pour les tuées "BERENICE et ANTARES" par la methode de Kliegel & Levine

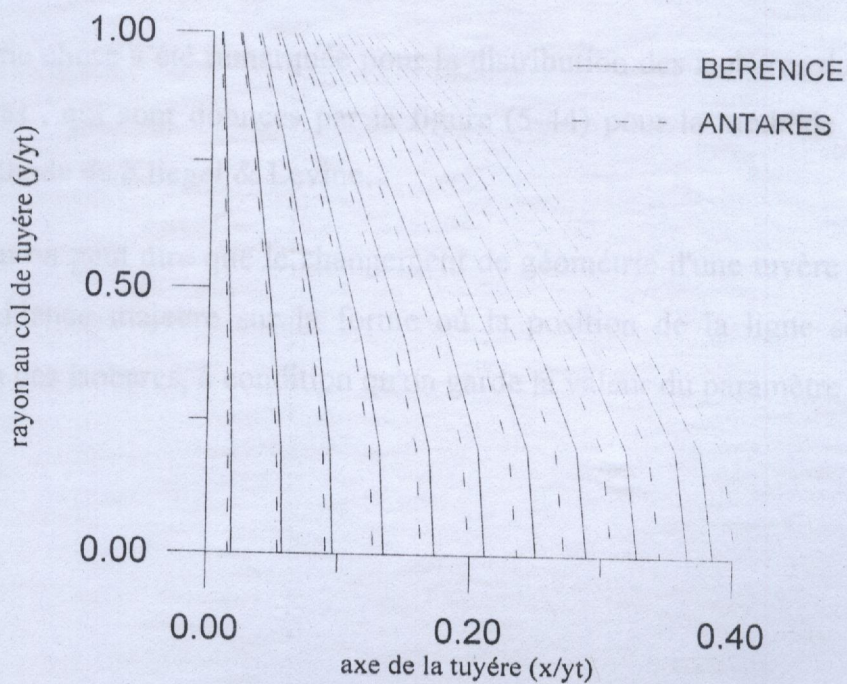


Fig (5-44) : comparaison des isobares pour les tuyées "BERENICE et ANTARES" par la methode de Hall

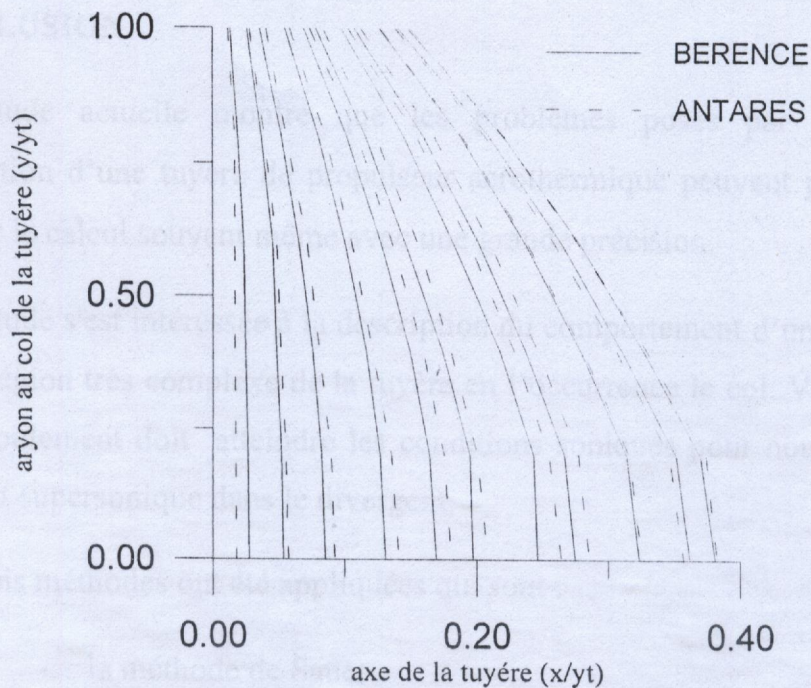


Fig (5-45) : comparaison des isobares pour les tuyères "BERENICE et ANTARES" par la méthode de Kliegel & Levine

Même chose a été remarquée pour la distribution des isobares dans le col pour les deux tuyères , qui sont données par la figure (5-44) pour la méthode de Hall et (5-45) pour la méthode de Kliegel & Levine.

D'où on peut dire que le changement de géométrie d'une tuyère de propulsion n'a aucune incidence majeure sur la forme où la position de la ligne sonique, ni sur la distribution des isobares, à condition qu'on garde la valeur du paramètre R constante.

# CONCLUSION ET RECOMMANDATIONS

## 1- CONCLUSION

L'étude actuelle montre que les problèmes posés par la définition et la caractérisation d'une tuyère de propulseur aérothermique peuvent pour la plupart être résolus par le calcul souvent même avec une grande précision.

L'étude s'est intéressée à la description du comportement d'un fluide compressible dans une région très complexe de la tuyère en l'occurrence le col. Vu qu'au sein de cette partie l'écoulement doit atteindre les conditions soniques pour nous donner ensuite un écoulement supersonique dans le divergent.

Trois méthodes ont été appliquées qui sont :

- la méthode de Sauer
- la méthode de Hall
- la méthodes de Kliegel-Levine

Ces trois méthodes ont été appliquées sur deux types de tuyères appartenant à l'Office National des Etudes et de Recherches Aérospatiales (ONERA) qui sont la tuyère Berenice et la tuyère Antares

Ces tuyères possèdent le même rapport rayon de courbure - rayon au col  $R=2$ , mais, ont des géométries différentes représentées par le rayon de courbure amont qui est égale a 0,138 m pour une Tuyère Berenice et 0,176m pour une tuyère Antares, et du rayon au col qui est donné respectivement pour les deux tuyères par les valeurs 0.069m et 0.088m.

Un programme de calcul a été ensuite élaboré pour chaque méthode. Les résultats obtenus ont été comparés entre eux ainsi qu'avec les résultats expérimentaux en notre possession.

La méthode de Sauer est une méthode classique utilisée durant plusieurs années. Elle se base sur la théorie des petites perturbations et elle donne la solution en termes des composantes axiales et radiales de la vitesse. Elle donne aussi les caractéristiques de la ligne sonique. Son inconvénient majeur réside dans le fait qu'elle ne donne aucune information sur la direction de l'écoulement ni sur la distribution des isobares dans le col, ni sur la "branche-line".

La méthode de Hall est l'une des méthodes qui donne la solution sous forme des séries inverses du rapport de rayon de courbure amont au rayon au col  $\frac{Rt_u}{Rt}$ . Son avantage sur la méthode de Sauer est le fait qu'elle fournit plus de renseignement sur le comportement du fluide comme la distribution des isobares, la direction du fluide ainsi que la "branch-line". Son seul inconvénient est qu'elle diverge pour les paramètres R très petits ( $R < 0.5$ ) ceci est dû au système de coordonnées cartésiennes utilisées qui rend très complexes la vérification des conditions aux limites.

Pour remédier à ce problème, Kliegel -Levine proposèrent une autre méthode qui se base sur la méthode de Hall mais donne la solution en termes de séries inverses de  $(R + 1)$  et qui prend donc en considération la géométrie de la tuyère afin de vérifier les conditions aux limites en proposant un autre système de coordonnées toroïdales.

Les résultats obtenus par les trois méthodes sont assez proches entre eux quand  $R < 1$ , et ils convergent vers les mêmes valeurs pour des valeurs du paramètre R très grandes. Ces résultats sont compatibles avec ceux obtenus par d'autres auteurs cités dans la bibliographie ainsi qu'avec les résultats expérimentaux en notre possession.

Ces méthodes aussi nous ont permis de décrire l'écoulement du fluide dans le col d'une manière très précise en donnant la distribution de la pression et le nombre de mach sur la ligne sonique.

L'influence de certains paramètres sur l'écoulement dans cette région comme le rapport de chaleurs spécifiques et le paramètre R a été étudié, comme déduction on a remarqué que ce dernier est le seul paramètre qui influe sur l'écoulement. Cette influence est apparue au niveau de la position de la ligne sonique ainsi que la variation du coefficient de décharge.



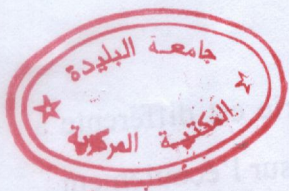
L'application de ces méthodes sur deux tuyères dont la géométrie est différente a montré que ce changement de géométrie n'a aucune incidence majeure sur l'écoulement.

Les lignes soniques et les lignes de pressions (les lignes de mach) obtenues par ces méthodes peuvent nous servir comme des lignes de démarrage pour la méthode des caractéristiques pour étudier l'écoulement dans le divergent où ce dernier est supersonique.

## 2- RECOMMANDATIONS :

L'actuelle étude bien qu'assez complète dans son principe, puisqu'elle touche pratiquement aux trois méthodes de calcul des écoulements transsonique disponibles, pourrait recevoir d'intéressants développements

Nous en recommandons particulièrement le développement de quelques méthodes numériques mentionnées dans le troisième chapitre et de comparer les résultats obtenus avec ceux présentés dans cette étude.



RECOMMANDATIONS

رقم الجرد: 581  
رقم الفاتورة:                       
التاريخ: 08-06-2001  
الأصل: Yusuf daera