

MINISTERE DE L'EDUCATION NATIONALE

UNIVERSITE DE BLIDA

INSTITUT D'ELECTRONIQUE



THESE DE MAGISTER

Co travail a été effectué à l'Institut d'Electronique de l'Université de BLIDA, sous la direction de Mr... SPECIALITE : Electronique de conférence à l'Université de Blida... OPTION : Contrôle... soit permis de lui exprimer ma vive gratitude pour la confiance qu'il m'a toujours témoignée, les conseils et les encouragements qu'il m'a prodigués tout au long de cette étude.

THEME

ETUDE ET SIMULATION DE LA LEVITATION MAGNETIQUE

Par

HEDJAR Ramdane

J'adresse aussi tous mes sincères remerciements à Messieurs Mr A. BENKHEROUF Maître de conférence à l'Université de BLIDA (Institut d'Aéronautique) et Mr H. BENCHOUANE PhD à l'Université de BLIDA (Institut d'Electronique)

Présenté devant le jury constitué de :

- Mr : BELKHAMZA N. ; Maitre de conférence (Université de Blida) ; Président
Mr : TOUMI R. ; Professeur à l'USTHB ; Examineur
Mr : BENKHROUF A. ; Maitre de conférence (Université de Blida) ; Examineur
Mr : BENCHOUBANE H. ; PhD (Université de Blida) ; Examineur
Mr : SALHI H. ; Maitre de conférence (Université de Blida) ; Rapporteur

BLIDA ALGERIE

NOVEMBRE 1992

REMERCIEMENTS

Ce travail a été effectué à l'Institut d'Electronique de l'Université de BLIDA, sous la direction de Mr H.SALHI, Maître de conférence à l'Université de BLIDA. Qu'il me soit permis de lui exprimer ma vive gratitude pour la confiance qu'il m'a toujours témoignée, les conseils et les encouragements qu'il m'a prodigué tout au long de cette étude.

Je tiens à remercier Monsieur N.BELKHAMZA pour avoir accepté la présidence de ce jury.

J'exprime toute ma gratitude à Monsieur R.TOUMI Professeur à l'U.S.T.H.B (Institut d'Electronique) et responsable du laboratoire d'automatique d'avoir accepté de faire partie de ce jury.

J'adresse aussi tous mes sincères remerciements à Messieurs Mr A. BENKHEROUF Maître de conférence à l'Université de BLIDA (Institut d'Aéronautique) et Mr H.BENCHOUBANE PhD à l'Université de BLIDA (Institut d'Electronique) qui ont aimablement acceptés de participer à ce jury.

Enfin, que toutes les personnes qui ont participés, de près ou de loin, à la réalisation de ce travail, trouvent ici l'expression de mes sincères remerciements.

4- ETUDE DU PROCESSUS MULTI-VARIABLE PERTURBE	64
4-1 Introduction	64
4-2 Amélioration de la structure de commande en présence des perturbations.....	64
4-3 Conclusion.....	78
INTRODUCTION GENERALE.....	1
5- ETUDE D'UNE IMPLANTATION A BASE D'UN 1- MODELISATION DE LA FORCE MAGNETIQUE	5
1-1 Introduction.....	5
1-2 Modélisation de la force magnétique d'attraction.....	5
1-3 Conclusion.....	12
numérique du procédé.....	78
2- LEVITATION MAGNETIQUE D'UNE BALLE METALLIQUE	13
2-1 Introduction.....	13
2-2 Analyse du procédé.....	13
2-3 Linéarisation du processus non-linéaire	15
2-4 Commande analogique par retour d'état	17
2-5 Simulation et résultats.....	23
2-6 Commande numérique par retour d'état.....	26
2-7 Simulation et résultats.....	31
2-8 Conclusion.....	34
3- LEVITATION MAGNETIQUE D'UNE BARRE METALLIQUE	37
3-1 Introduction.....	37
3-2 Analyse du processus.....	38
3-3 Linéarisation du modèle mathématique du procédé.....	43
3-4 Commande analogique par retour d'état	45
3-5 Simulation et résultats.....	49
3-6 Commande numérique par retour d'état	53
3-7 Simulation et résultats.....	60
3-8 Conclusion.....	62

4- ETUDE DU PROCESSUS MULTI-VARIABLE PERTURBE	64
4-1 Introduction.....	64
4-2 Amélioration de la structure de commande en présence des perturbations.....	64
4-3 Conclusion.....	76
5- ETUDE D'UNE IMPLANTATION A BASE D'UN MICROPROCESSEUR DE LA COMMANDE DU PROCÉDE MULTI-VARIABLE.....	78
5-1 Introduction.....	78
5-2 Etude du schéma synoptique de la commande numérique du procédé.....	78
5-3 Problèmes posés par l'utilisation d'un divers microprocesseur dans la commande du procédé.....	90
5-4 Conclusion.....	95
CONCLUSION GENERALE.....	96
BIBLIOGRAPHIE.....	99
ANNEXE A.....	104
ANNEXE B.....	109
ANNEXE C.....	114

INTRODUCTION GENERALE

Le phénomène de lévitation magnétique constitue à l'heure actuelle un des axes importants de recherche en matière de suspension d'objets métalliques en mouvement. Supprimant la majeure partie des contacts physiques et donc de frottements, cette technique a polarisé particulièrement l'attention de l'industrie en matière de recherche pour l'amélioration du transport urbain à grande vitesse.

De nombreuses difficultés inhérentes à la complexité des techniques employées (création du champ magnétique, méthodes de commande...) ont pu être résolues, si ce n'est surmontées pour que cette technique soit appliquée dans divers horizons industriels.

Le problème majeur de la lévitation magnétique est la stabilisation de l'objet lévité dans le milieu magnétique. Plusieurs méthodes ont été proposées pour supporter des masses en mouvement ou en rotation :

1-La répulsion entre des aimants permanents et un matériau ferromagnétique, surtout après le développement de la fabrication des aimants permanents avec des champs coercitifs très élevés.

2-La lévitation utilisant des matériaux diamagnétiques : lors de l'analyse de la nature de la force magnétique, Braunbeck [1] a déduit que la suspension ou lévitation, dans un champ statique, n'est possible qu'avec des matériaux dont les perméabilités relatives sont inférieures à un ($\mu_r < 1$) ou ($\mu < \mu_0$).

3-La lévitation utilisant des aimants ou des surfaces supraconductrices: certains matériaux portés à la température

de (-270°) deviennent supraconducteurs. La résistance électrique est pratiquement nulle. Par conséquent, l'injection de très forte intensité de courant dans les bobines supraconductrices produit des forces magnétiques qui peuvent suspendre des objets métalliques lourds [2].

4-La lévitation utilisant des courants de Foucault [3].

5-Une force agissant sur un conducteur porteur d'un courant linéaire dans un champ magnétique [4].

6-L'attraction électrostatique entre deux plaques, utilisant des circuits accordés R L C [5].

7- L'attraction magnétique entre un électro-aimant et un matériau ferromagnétique, utilisant des circuits accordés R L C pour réguler la force d'attraction magnétique [6,7,8].

8-La lévitation utilisant des électro-aimants contrôlés par un courant continu [9]. La position de l'objet suspendu est commandée par le courant d'alimentation de l'électro-aimant. La force d'attraction et de stabilisation de l'objet dans le champ magnétique, est contrôlée par le courant continu.

9-Un système à perméabilité composite [10]:après l'analyse de la théorie de Braunbeck sur la perméabilité des corps, Bevir a montré que les matériaux à perméabilité composite ($\mu < \mu_0$ et $\mu > \mu_0$) peuvent être stabilisés dans un champ magnétique.

La plupart de ces méthodes de suspension sont d'intérêt académique, vue leurs complexités de réalisation et d'application. Cependant, il existe trois méthodes qui ont fait l'objet d'intensives recherches depuis le début des années soixante-dix :

■ a-la suspension faisant usage de nouveaux matériaux tels que le Barrium-ferrite et Somarium-cobalt a permis la réalisation d'aimant ayant une force magnétique de vingt à cinquante fois supérieure à celle des aimants classiques.

■ b-la lévitation basée sur l'usage des bobines supraconductrices.

Cependant, le choix de ces deux techniques pour la suspension des objets lourds a tendance à rendre leurs applications plus coûteuse par la nécessité de réaliser des aimants permanents avec les nouveaux matériaux ou d'utiliser les bobines supraconductrices.

Ainsi, une troisième méthode de lévitation magnétique des objets lourds, moins coûteuse, est mise en oeuvre en utilisant les électro-aimants contrôlés par le courant d'alimentation.

■ c-la lévitation faisant usage d'électro-aimants contrôlés par le courant d'alimentation : cette méthode est une mise en oeuvre des principes d'attraction des matériaux ferromagnétiques par les électro-aimants. L'objet lévité est maintenu à une position d'équilibre par une électronique de commande, qui ajuste en permanence l'intensité du courant alimentant des électro-aimants pour ramener la hauteur de l'objet à une position spécifiée.

Notons que cette technologie est de très loin la plus avancée, vue la diversité de son application.

Notons enfin que, l'inconvénient majeur d'une telle approche est la limite en puissance de l'électro-aimant pour la suspension d'objets lourds d'où on propose l'utilisation de plusieurs électro-aimants, qui sont commandés par retour d'état.

Dans cette thèse, l'étude et la simulation de la lévitation magnétique des objets métalliques sont présentées. On s'intéresse principalement à la commande du processus de lévitation mono-variable (un seul électro-aimant) et multi-variable (deux électro-aimants).

Grâce à une étude bibliographique sur le problème de la structure du modèle du procédé à stabiliser, nous avons constaté l'importance du modèle mathématique de la force magnétique. Ceci, nous amène, au premier chapitre de la thèse à étudier la modélisation de la force magnétique.

Dans le deuxième chapitre, on traite la lévitation magnétique d'une balle métallique et la simulation de ce processus non-linéaire bouclé par retour d'état analogique et discret.

Le troisième chapitre s'intéresse à l'étude de la lévitation magnétique d'une barre métallique et de ce processus non-linéaire commandé par retour d'état (continu et discret) avec un estimateur des états inaccessibles.

Le quatrième chapitre présente l'étude par simulation du système multi-variable perturbé. Cette étude nous a permis de constater l'importance de la propriété de la robustesse du processus en boucle fermée par rapport aux perturbations de structure et d'environnement.

Le cinquième chapitre de cette thèse est consacré à l'étude de l'aspect pratique de notre travail : conception d'une implantation à base d'un microprocesseur.

Enfin, on termine ce travail par quelques conclusions et perspectives.

- I : intensité du courant d'alimentation

- Mg : poids de la balle métallique

- x : position de la balle métallique

- Φ : flux magnétique de l'électro-aimant

- E : tension d'alimentation du circuit magnétique

CHAPITRE: 1 MODELISATION DE LA FORCE MAGNETIQUE

1-1- INTRODUCTION

L'analyse d'un processus qui est l'étape préalable à toute étude de régulation, a pour objet la recherche d'un modèle mathématique fiable représentant le comportement du processus tant en régime statique que dynamique.

Ce modèle de procédé est donc, un ensemble de relations mathématiques (équations différentielles) permettant de décrire avec une précision suffisante le comportement physique du processus.

Notre étude, s'intéresse dans ce premier chapitre aux modèles décrivant l'évolution de la force d'attraction d'un électro-aimant durant le déplacement d'un objet métallique en suspension.

1-2 MODELISATION DE LA FORCE MAGNETIQUE D'ATTRACTION

□ Présentation du procédé (fig.1-1) :

Le processus de lévitation est composé :

- D'un électro-aimant fixé, alimenté par un courant $i(t)$.
- D'une balle métallique qui est l'objet à suspendre.
- Les paramètres du procédé sont:
 - $i(t)$: intensité du courant d'alimentation
 - Mg : poids de la balle métallique
 - x : position de la balle métallique
 - ϕ : flux magnétique de l'électro-aimant
 - E : tension d'alimentation du circuit magnétique

Le but essentiel est donc, de trouver l'expression mathématique de la force magnétique d'attraction F_L .

Le déplacement de la balle fait varier l'écart x (fig 1-1) produisant ainsi une variation de la reluctance du système. L'attraction aura lieu dès que le flux est suffisant, pour permettre de vaincre le poids de la balle.

Le modèle de la force magnétique est obtenu à partir d'un bilan énergétique du procédé. L'évolution de l'inductance du procédé en fonction de la position de la balle métallique.

Bilan Energétique: l'énergie fournie par la source au circuit magnétique pendant un temps élémentaire dt est:

$$E i dt = R i^2 dt + i d\phi \quad (1-1)$$

Lorsque l'objet suspendu se déplace de dx sous l'influence de la force magnétique F_L , exercée par l'électro-aimant, l'énergie mise en évidence est:

- Le travail mécanique $F_L dx$ fourni par le système
- Les pertes d'énergie par effet Joule
- La variation de l'énergie magnétique du système dW

La conservation d'énergie fournie par la source s'écrit:

$$E i dt = F_L dx + dW + R i^2 dt \quad (1-2)$$

En tenant compte des expressions (1-1) et (1-2), on obtient:

$$F_L dx + dW = i d\phi \quad (1-3)$$

d'où:

$$F_L = \frac{i d\phi - dW}{dx} \quad (1-4)$$

or : l'énergie magnétique instantanée est:

$$W = 1/2 L i^2 \quad (1-5)$$

et le flux magnétique instantané est:

$$\phi = L i \quad (1-6)$$

En portant ces deux expressions dans l'équation (1-4) on obtient:

$$F_L = \frac{1}{2} i^2 \frac{dL}{dx} \quad (1-7)$$

où L: l'inductance du circuit magnétique.

Principalement on distingue deux types de modélisation très utilisés qui décrivent l'évolution de l'inductance du procédé en fonction de la position de la balle métallique.

1-2-1 Modélisation de connaissance:

Etant donnée la complexité de trouver la représentation mathématique de (dL/dx) par une approche théorique, l'idée a été d'établir l'expression de la variation de l'inductance du système de la figure 1-1 à travers un circuit magnétique plus simple schématisé par la figure 1-2. Donc, l'élaboration de l'expression de dL/dx peut se faire à partir des connaissances du circuit magnétique de la figure 1-2. Le modèle ainsi obtenu est dit modèle de connaissance.

L'application du théorème d'Ampere [11] au circuit magnétique de la figure 1-2 avec :

x : l'épaisseur de l'entrefer

μ_0 : perméabilité dans le vide

l_0 : longueur du noyau de fer

nous donne :

$$\int \frac{B}{\nu} dL = N \cdot I \quad (1-8)$$

ν : est la perméabilité au lieu où le champ a la valeur B

Le flux magnétique étant constant, avec la valeur:

$$\phi = B S \quad (1-9)$$

S' : étant l'aire de la section du noyau de fer
Alors, l'équation (1-8) devient :

$$N I = \phi \int \frac{dL}{\mu s} \quad (1-10)$$

et la valeur du flux est :

$$\phi = \frac{N I}{R} \quad (1-11)$$

où $R = \int \frac{dL}{\mu s}$ représente la reluctance du circuit magnétique.

La reluctance du circuit magnétique de la figure 1-2 est:

$$R = R_e + R_f = \frac{L_0}{s} + \frac{x}{\mu_0 s} \approx \frac{x}{\mu_0 s}$$

où l'indice f caractérise le noyau de fer et l'indice e celui de l'entrefer.

$$R \approx R_e = \frac{x}{\mu_0 s} \quad (1-12)$$

L'énergie magnétique emmagasinée dans le circuit, exprimée en fonction du flux est :

$$W_m = 1/2 R \phi^2 \quad (1-13)$$

En outre, l'énergie magnétique peut s'exprimer en fonction de l'inductance du système :

$$W = 1/2 L i^2 \quad (1-14)$$

De ces deux équations (1-13, 1-14), on déduit que :

$$L = \frac{R \phi^2}{i^2} \quad (1-15)$$

Compte tenu des expressions (1-11, 1-12), l'expression de l'inductance du (1-15) s'écrit sous la forme :

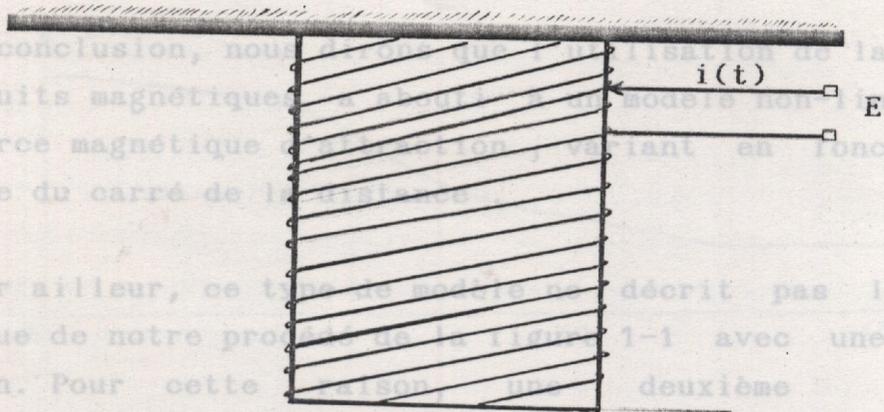
$$L = N^2 \frac{\mu_0}{x} s \quad (1-16)$$

En reportant cette expression dans l'équation (4-7), on obtient le modèle mathématique de la force d'attraction :

$$F_L = - \frac{1}{2} \frac{i^2 N^2 \mu_0 s}{x^2} \quad (1-17)$$

En conclusion, nous avons vu que la modélisation de la théorie des circuits magnétiques a abouti à un modèle non linéaire de la force magnétique d'attraction variant en fonction de l'inverse du carré de la distance.

Par ailleurs, ce type de modèle ne décrit pas la force magnétique de notre procédé de la figure 1-1 avec une bonne précision. Pour cette raison, une deuxième méthode expérimentale de modélisation a été mise au point [8].



1-2-2 Modélisation de représentation

Pour établir l'expression mathématique traduisant l'évolution de la force d'attraction du procédé de la figure 1-1 en réponse aux variations de la position de la balle métallique, une modélisation expérimentale de l'inductance du procédé a été effectuée.

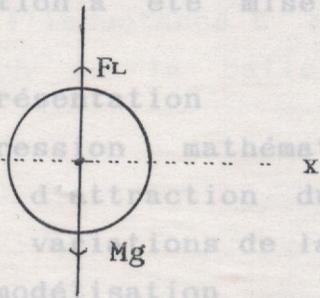
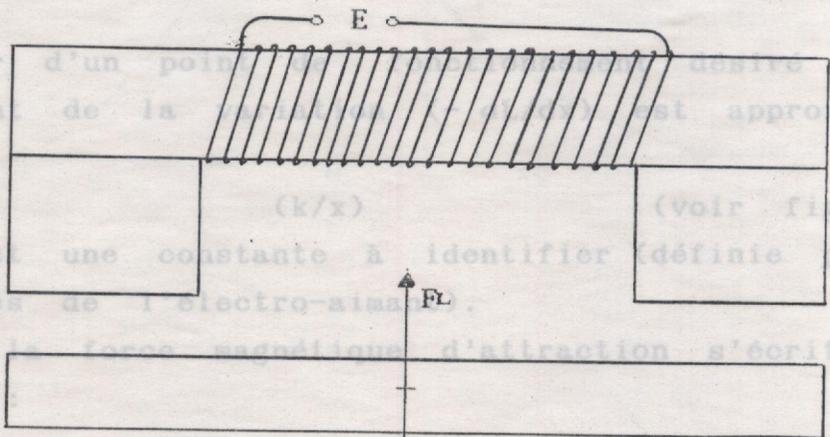


Fig 1-1 Schéma du procédé

La courbe de la variation de l'inductance L du procédé en fonction de la position de la balle est représentée à la figure 1-3.

Autour d'un point fixe, le comportement de la force d'attraction est approximé par:



$$F_L = -\frac{1}{2} I^2 \frac{k}{x} \quad (1-18)$$

Fig.1-2

En conclusion, nous dirons que l'utilisation de la théorie des circuits magnétiques a abouti à un modèle non-linéaire de la force magnétique d'attraction, variant en fonction de l'inverse du carré de la distance.

Par ailleurs, ce type de modèle ne décrit pas la force magnétique de notre procédé de la figure 1-1 avec une bonne précision. Pour cette raison, une deuxième méthode expérimentale de modélisation a été mise au point [8].

1-2-2 Modélisation de représentation

Pour établir l'expression mathématique, traduisant l'évolution de la force d'attraction du procédé de la figure 1-1 en réponse aux variations de la position de la balle métallique, une modélisation expérimentale de l'inductance du système a été effectuée [8]. La courbe de la variation de l'inductance L du procédé en fonction de la position de la balle est représentée à la figure 1-3.

Autour d'un point de fonctionnement désiré x_e , le comportement de la variation $(-dL/dx)$ est approximé par :

$$(k/x) \quad \text{(voir fig 1-4)}$$

où k est une constante à identifier (définie par les paramètres de l'électro-aimant).

Ainsi, la force magnétique d'attraction s'écrit sous la forme :

$$F_L = - \frac{1}{2} I^2 \frac{k}{x} \quad (1-18)$$

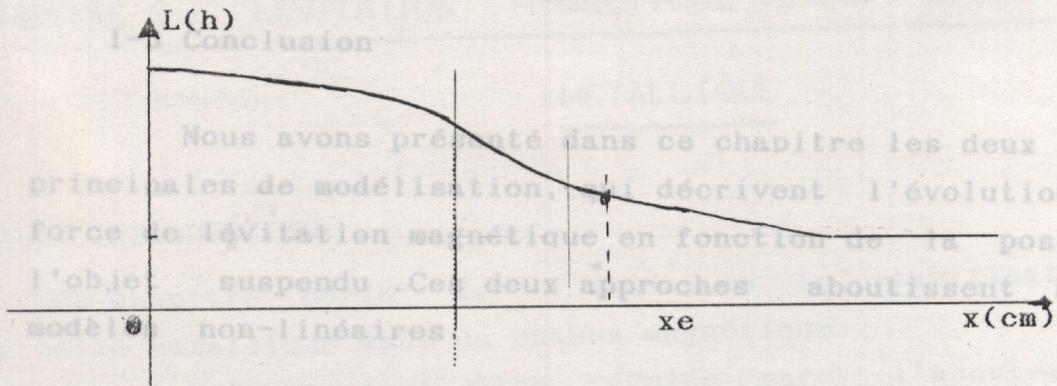


Fig.1-3 variation de l'inductance L en fonction de la position de la balle

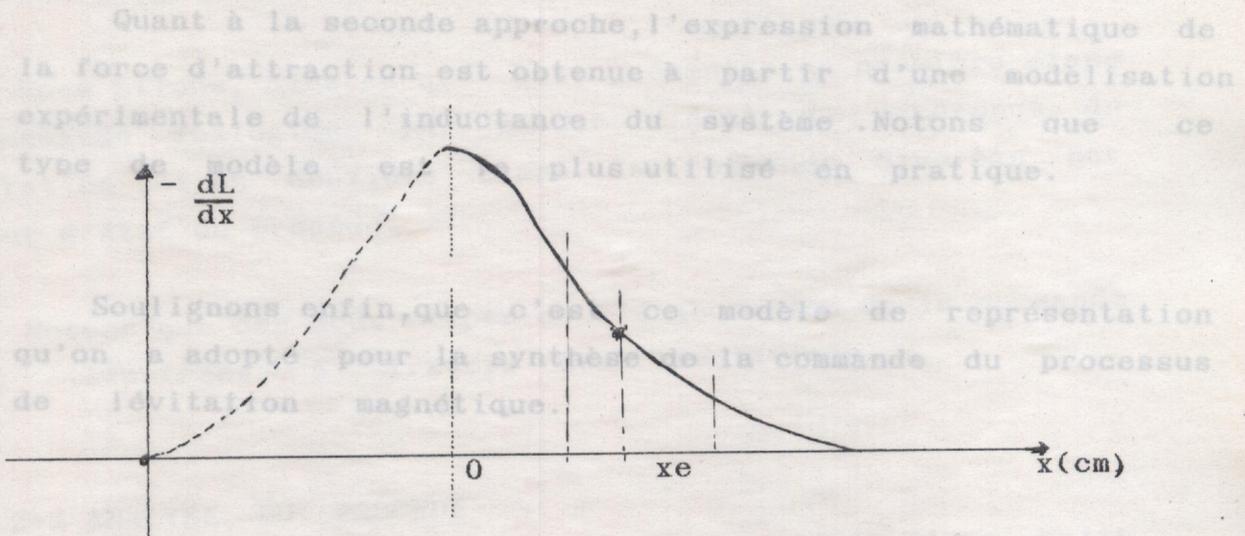


Fig.1-4

1-3 Conclusion

METALLIQUE

Nous avons présenté dans ce chapitre les deux méthodes principales de modélisation, qui décrivent l'évolution de la force de lévitation magnétique en fonction de la position de l'objet suspendu. Ces deux approches aboutissent à des modèles non-linéaires.

La première approche a permis d'établir un modèle de connaissance à travers l'approximation du procédé de la figure 1-1 par un circuit magnétique avec entrefer (fig 1-2).

Quant à la seconde approche, l'expression mathématique de la force d'attraction est obtenue à partir d'une modélisation expérimentale de l'inductance du système. Notons que ce type de modèle est le plus utilisé en pratique.

Soulignons enfin, que c'est ce modèle de représentation qu'on a adopté pour la synthèse de la commande du processus de lévitation magnétique.

2-2 ANALYSE DU PROCÉDE

L'analyse du procédé de lévitation magnétique d'une balle métallique (fig. 2-1) a pour objet la détermination d'un modèle mathématique représentant le comportement dynamique du processus.

Afin de pouvoir réguler la position de la balle métallique dans le champ magnétique, nous devons écrire la relation liant la grandeur de commande (le courant de l'électro-aimant) et la sortie du système (la position désirée de la balle). Cette

CHAPITRE 2 : LEVITATION MAGNETIQUE D'UNE BALLE

METALLIQUE

2-1 INTRODUCTION

Ce chapitre porte sur l'étude de la stabilisation d'une balle métallique dans un champs magnétique. La force magnétique peut être réglée par l'ajustement du courant d'alimentation de l'électro-aimant. Le problème est alors de déterminer une loi de commande, générée par ce courant d'alimentation, assurant le maintien de la balle à une position d'équilibre désirée.

Nous allons, dans ce qui suit présenter en première étape la commande analogique par retour d'état du processus de lévitation, et en deuxième étape la commande discrète par retour d'état du procédé.

Notons que ces deux étapes de l'élaboration de la commande sont illustrées à travers des simulations.

2-2 ANALYSE DU PROCÉDE

L'analyse du procédé de lévitation magnétique d'une balle métallique (fig.2-1) à pour objet la détermination d'un modèle mathématique représentant le comportement dynamique du processus.

Afin de pouvoir réguler la position de la balle métallique dans le champ magnétique, nous devons écrire la relation liant la grandeur de commande (le courant de l'électro-aimant) et la sortie du système (la position désirée de la balle). Cette

relation est obtenue à partir de la relation fondamentale de la dynamique, en négligeant le comportement dynamique de l'électro-aimant :

$$x'' = f(x, \dot{x}) = 0 \quad (2-3)$$

Un seul point d'équilibre est obtenu :

$$\vec{F}_L + M \vec{g} = M \vec{x}''$$

où :

x : position de la balle

M : masse de la balle

$F_L = I^2 \frac{k}{2x}$ module de la force de lévitation magnétique

$$\begin{bmatrix} \frac{k I_0^2}{2 M g} \\ 0 \end{bmatrix} \quad (2-4)$$

■ Mise en équation :

La représentation d'état adoptée est :

- $x_1(t)$: position de la balle
- $x_2(t) = \dot{x}(t)$: vitesse de la balle

Le vecteur d'état n'est accessible qu'à travers la mesure :

$$y(t) = x(t) - s = x_1(t) - s$$

où s étant la position d'équilibre désirée.

Le processus décrit dans l'espace d'état est régi par le système d'équation différentielle suivant :

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = x_2(t) \\ \dot{x}_2(t) = -\frac{1}{2} \frac{k (I_0 + \delta u)^2}{M x_1(t)} + g \end{cases} \quad (2-1)$$

$$y(t) = x_1(t) - s \quad (2-2)$$

■ Points d'équilibres [12] : Le système (2-1) peut s'écrire sous forme condensée :

$$\dot{x}(t) = f(x, u) \quad \text{avec } x(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix}$$

les points d'équilibre de ce système non-linéaire sont les solutions de l'équation :

$$\dot{x}_e = f(x_e, I_0) = 0 \quad (2-3)$$

Un seul point d'équilibre est obtenu :

$$x_e = \begin{bmatrix} \frac{k I_0^2}{2 M g} \\ 0 \end{bmatrix} \quad (2-4)$$

où encore :

$$x_{e1} = s = \frac{k I_0^2}{2 M g} \quad (2-7)$$

Cette analyse a permis d'identifier le modèle non-linéaire du processus écrit dans l'espace d'état. C'est un système non-linéaire du deuxième ordre avec un seul point d'équilibre.

Pour étudier la stabilité du procédé autour de ce point, la première méthode de LYAPUNOV est utilisée.

La commande synthétisée à partir du modèle linéarisé sera appliquée au procédé représenté par les équations (2-1, 2-2).

2-3 LINEARISATION DU PROCESSUS NON-LINEAIRE

D'après les travaux de LYAPUNOV [12,13], la stabilité autour de la position d'équilibre d'un système non-linéaire peut être étudiée à partir du système "linéarisé" obtenu en négligeant les termes qui contiennent des puissances supérieures ou égales à deux en x_1 et x_2 .

Pour linéariser le système (2-1) autour du point d'équilibre x_e , le développement de TAYLOR est appliqué avec la condition $x_{e1} \neq 0$.

$$\dot{\delta x}(t) = f(x, u) = f(x^0, I_0) + \left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_{x^0} (x - x^0) + \left. \frac{\partial f}{\partial u} \right|_{x^0} (u - I_0)$$

$$\lambda_1 = \sqrt{\frac{k}{2m} \frac{I_0}{x^0+1}} + \theta(x, u) \quad \lambda_2 = -\sqrt{\frac{k}{2m} \frac{I_0}{x^0+1}} \quad (2-5)$$

en posant : $x(t) = x^0 + \delta x(t)$ et $u(t) = I_0 + \delta u(t)$

l'équation d'état (2-5) s'écrit :

$$\dot{\delta x}(t) = \left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_{x^0} \delta x + \left. \frac{\partial f}{\partial u} \right|_{x^0} \delta u \quad (2-6)$$

où encore :

$$\dot{\delta x}(t) = A \delta x + B \delta u \quad (2-7)$$

avec : $A = \left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_{x^0}$ matrice d'état de dimension (2×2)

$B = \left. \frac{\partial f}{\partial u} \right|_{x^0}$ matrice d'entrée de dimension (2×1)

En tenant compte de (2-4), l'équation de sortie (2-2) s'écrit :

$$y(t) = C \delta x(t)$$

avec : C matrice de sortie de dimension (1×2) .

Les différentes matrices obtenues après linéarisation :

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \frac{k}{2m} \frac{I_0}{x^0+1} & 0 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ -\frac{k}{m} \frac{I_0}{x^0+1} \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \quad (2-8)$$

a-Stabilité du système linéaire

Les valeurs propres du système (2-7) sont les deux racines de l'équation

$$\left(\lambda^2 - \frac{k}{2m} \frac{I_0}{x^0+1} \right) = 0 \quad (2-9)$$

à savoir d'obtenir un comportement dynamique satisfaisant du réglage d'état et une vaste région de stabilité autour d'un équilibre d'état et d'entrée indésirable de faire le choix des pôles de manière adéquate.

$$\lambda_1 = \sqrt{\frac{k}{2m}} \frac{I_0}{x_{e1}} \quad \lambda_2 = -\sqrt{\frac{k}{2m}} \frac{I_0}{x_{e1}} \quad (2-10)$$

La valeur propre λ_1 du système (2-7) est strictement positive. Par conséquent, le système linéarisé du procédé est instable. C'est à dire que, le point d'équilibre du processus non-linéaire est un col.

b - Controlabilité

Pour que le système (2-7) bouclé par retour d'état soit stable, il faut qu'il soit contrôlable.

La commande par retour d'état s'écrit :

$$\text{Rang} \begin{bmatrix} B & A & B \end{bmatrix} = \text{Rang} \begin{bmatrix} 0 & -\frac{k I_0}{M x_{e1}} \\ -\frac{k I_0}{M x_{e1}} & 0 \end{bmatrix} = (2-12)$$

Donc, le système linéaire (2-7) est stabilisable par retour d'état.

c - Observabilité

Le vecteur d'état $\delta x(t)$ du système (2-7) est accessible à partir des valeurs d'entrées-sorties du système.

En effet, le système (2-2, 2-3) est observable car qui place les pôles stables désirés p_1 et p_2 sont déterminés par l'identification des coefficients de l'équation caractéristique et les coefficients de l'équation caractéristique du système en boucle fermée (2-13).

2- 4 COMMANDE ANALOGIQUE PAR RETOUR D'ETAT [17]

La commandabilité du système linéaire à coefficients constants permet de fixer arbitrairement les valeurs propres du système bouclé par retour d'état.

Afin d'obtenir un comportement dynamique satisfaisant du réglage d'état et une vaste région de stabilité autour du point d'équilibre du processus, il est indispensable de faire le choix des pôles de manière adéquate.

Dans ce but, des pôles complexes qui garantissent un amortissement "optimal" ($\zeta = 0.7$) et un temps de réponse satisfaisant ont été choisis.

Etant donné que le système est du deuxième ordre, deux pôles complexes conjugués s'imposent à savoir :

$$p_{1,2} = -\zeta \omega_n \mp j \omega_n \sqrt{1 - \zeta^2} \quad (2-11)$$

La commande par retour d'état s'écrit :

$$\delta u(t) = \mathbb{K} \delta x(t) \quad (2-12)$$

où \mathbb{K} est la matrice de contre-réaction de dimension (2×1)

L'équation (2-7) du système linéaire bouclé par retour d'état devient :

$$\delta \dot{x}(t) = \mathbb{A} \delta x(t) + \mathbb{B} \delta u(t) = \left[\mathbb{A} + \mathbb{B} \mathbb{K} \right] \delta x(t) \quad (2-13)$$

Les coefficients de la matrice de contre-réaction d'état qui place les pôles stables désirés p_1 et p_2 sont déterminés par l'identification des coefficients de l'équation caractéristique désirée et les coefficients de l'équation caractéristique du système en boucle fermée (2-13).

Ce qui donne :

$$\begin{cases} k_1 = \frac{m X_e}{k I_0} \left[\omega_n^2 + \frac{k I_0^2}{2 m X_e} \right] \\ k_2 = \frac{2 m X_e \zeta \omega_n}{k I_0} \end{cases} \quad (2-14)$$

Il faut remarquer que le processus non-linéaire bouclé par retour d'état (2-12) est un système non-linéaire mais avec deux points d'équilibre. Le premier point est stable (foyer), le deuxième point est un pôle instable. Les deux points d'équilibre sont :

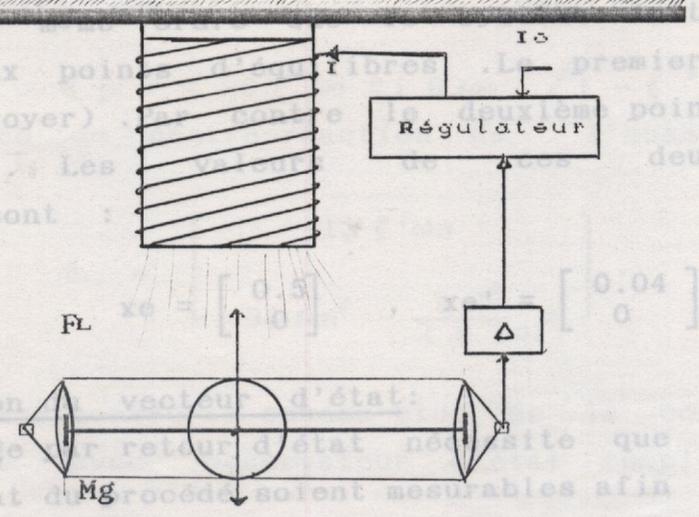
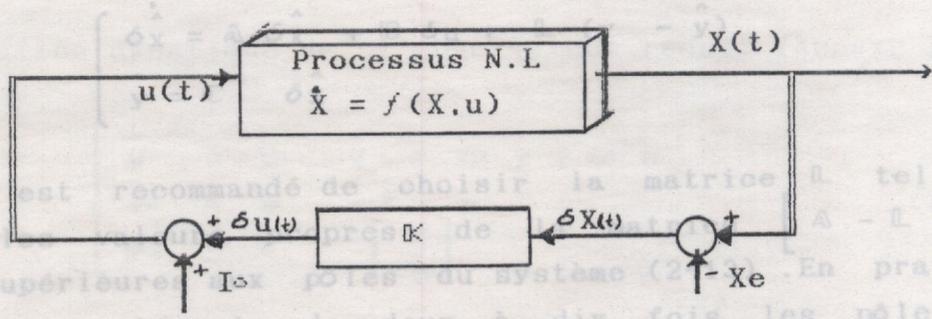


Fig.2-1 schéma de principe de la lévitation magnétique d'une balle métallique

Reconstruction du vecteur d'état : Le réglage par retour d'état nécessite que toutes les grandeurs d'état du procédé soient mesurables afin de pouvoir fermer un certain nombre de boucles. Cependant, il n'est pas possible de mesurer directement la variable $x(t)$. Par conséquent un observateur d'état pour reconstruire ces grandeurs s'impose.

L'équation dynamique de l'observateur (Annexe A-1) est donnée par :



Il est recommandé de choisir la matrice K telle que toutes les valeurs propres de $A - L C^{-1} K$ soient supérieures à dix fois les pôles du système (2-15). En pratique, ces pôles sont pris de deux à dix fois les pôles du processus. L'équation dynamique de l'observateur (Annexe A-1) soit rapide par rapport à l'évolution du système en boucle fermée.

Il faut remarquer que le processus non-linéaire bouclé par retour d'état (2-12) est un système non-linéaire du même ordre que le système initial (2-1), mais avec deux points d'équilibre. Le premier point est stable (foyer). Par contre le deuxième point est un col instable. Les valeurs de ces deux points d'équilibres sont :

$$x_e = \begin{bmatrix} 0.5 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad x_{e'} = \begin{bmatrix} 0.04 \\ 0 \end{bmatrix}$$

□ Reconstruction du vecteur d'état:

Le réglage par retour d'état nécessite que toutes les grandeurs d'état du procédé soient mesurables afin de pouvoir les mettre en contre-réaction et imposer au système en boucle fermée un certain comportement dynamique. Cependant, il n'est pas possible de mesurer directement la variable $x_2(+)$. Par conséquent un observateur d'état pour reconstruire ces grandeurs s'impose.

L'équation dynamique de l'observateur (Annexe -A- 1) est donnée par :

$$\begin{cases} \dot{\delta \hat{x}} = A \delta \hat{x} + B \delta u + L (y - \hat{y}) \\ \hat{y} = C \delta \hat{x} \end{cases} \quad (2-15)$$

Il est recommandé de choisir la matrice L telle que toutes les valeurs propres de la matrice $\begin{bmatrix} A - L C \end{bmatrix}$ soient supérieures aux pôles du système (2-13). En pratique, ces pôles sont pris de deux à dix fois les pôles du processus bouclé par retour d'état, et cela pour que la vitesse de convergence de l'erreur $e(t)$ (Annexe A-1) soit rapide par rapport à l'évolution du système en boucle fermée.

Un observateur caractérisé par les valeurs propres ci-dessous a été adopté :

$$s_{1,2} = 6 p_{1,2} = -6 \zeta \omega_n \pm j 6 \omega_n \sqrt{1 - \zeta^2}$$

La matrice de contre-réaction de l'observateur est alors :

$$L = \begin{bmatrix} -12 \zeta \omega_n \\ -36 \omega_n^2 - \frac{k I_0^2}{2 M x_{el}^2} \end{bmatrix}$$

la figure 2-3 montre le schéma-bloc de la commande par retour d'état avec observateur d'état complet.

Fig 2-3 Schéma-bloc de la commande par retour d'état avec observateur complet.

□ Observateur Réduit

L'observateur d'état présenté ci-dessus est un système du deuxième ordre, conformément à l'ordre du système à régler. Il estime la position et la vitesse de la balle métallique, alors que la position $\delta x_1(t)$ est mesurée directement par le capteur de position (figure 2-1). Par conséquent, un observateur d'ordre réduit qui n'estime que la vitesse $x_2(t)$ est nécessaire.

L'équation dynamique de l'observateur réduit (Annexe A-2)

$$\begin{cases} \dot{\hat{W}} = G^1 \hat{W} + G^2 y + G^3 u \\ \dot{\hat{V}}_2 = \hat{W} + L y \\ \hat{\delta x} = U^{-1} \begin{bmatrix} y \\ \hat{V}_2 \end{bmatrix} \end{cases} \quad (2-16)$$

Fig.2-4 Commande par retour d'état avec observateur réduit du processus non-linéaire.

La structure du procédé contrôlé par retour d'état avec observateur réduit est représentée par la figure 2-4.

2-3 SIMULATION ET RESULTATS

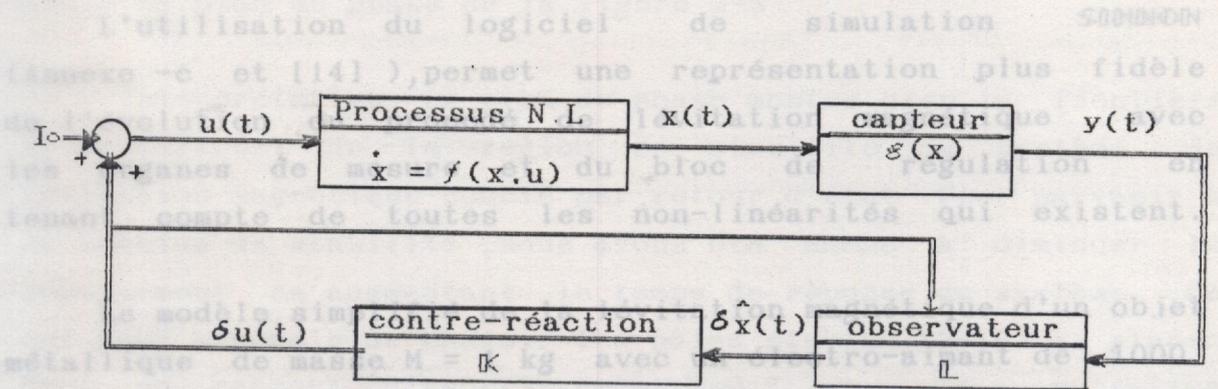


Fig 2-3 Schéma-bloc de la commande par retour d'état avec observateur complet .

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = -2 \frac{(I_0 + \delta u)^2}{x_1} + 1 \end{cases} \quad (2-17)$$

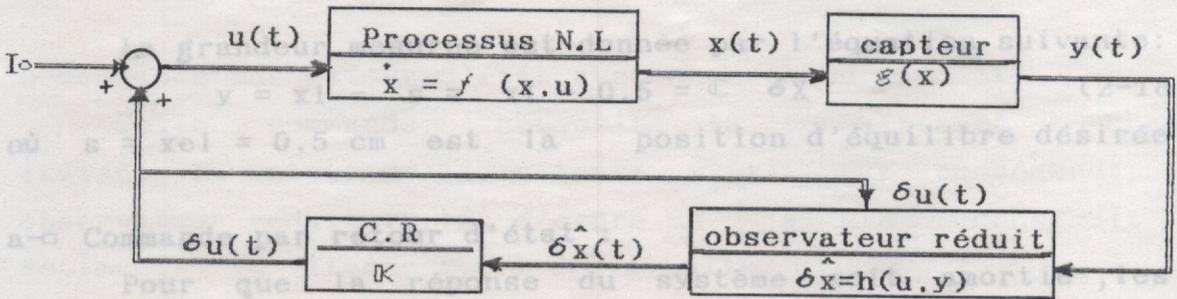


Fig.2-4 Commande par retour d'état avec observateur réduit du processus non-linéaire.

De l'équation (2-14), les éléments de la matrice de contre-réaction K obtenus sont :

$$K = \begin{bmatrix} 1.4 & 0.7 \end{bmatrix} \quad (2-20)$$

2-5 SIMULATION ET RESULTATS

L'utilisation du logiciel de simulation SIMNON (Annexe -c et [14]), permet une représentation plus fidèle de l'évolution du procédé de lévitation magnétique avec les organes de mesure et du bloc de régulation en tenant compte de toutes les non-linéarités qui existent.

Le modèle simplifié de la lévitation magnétique d'un objet métallique de masse $M = 1 \text{ kg}$ avec un électro-aimant de 1000 spires est donné par les équations suivantes (avec une mise à l'échelle de 10 sur la vitesse $x_2(t)$) :

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = -2 \frac{(I_0 + \delta u)^2}{x_1} + 1 \end{cases} \quad (2-17)$$

où $I_0 = 0.5 \text{ A}$ est le courant d'alimentation de l'électro-aimant

La grandeur mesurée est donnée par l'équation suivante:

$$y = x_1 - s = x_1 - 0.5 = C \delta X \quad (2-18)$$

où $s = x_{e1} = 0.5 \text{ cm}$ est la position d'équilibre désirée

a- Commande par retour d'état :

Pour que la réponse du système soit amortie, les pôles complexes placés sont :

$$\lambda_{1,2} = -1.4 \pm j 1.4 \quad (2-19)$$

De l'équation (2-14), les éléments de la matrice de contre-réaction K obtenus sont :

$$K = \begin{bmatrix} 1.4 & 0.7 \end{bmatrix} \quad (2-20)$$

La simulation du système (2-17) avec le retour d'état (2-20) donne le plan de phase de la figure 2-5

Interprétation: Le plan de phase montre bien la frontière (limitatrices) de la région de stabilité du système de lévitation magnétique bouclé par retour d'état. Pour parvenir à ce domaine de stabilité, nous avons été amené à diminuer le dépassement en augmentant le temps de réponse du système. Ce qui nous a permis de choisir les pôles stables (2-19) à placer avec un rapport d'amortissement $\zeta = 0.7$ et une pulsation naturelle $\omega_n = 2 \text{ rad/s}$.

Nous pouvons constater en outre, que le système non-linéaire en boucle fermée a deux points d'équilibres. Le premier point d'équilibre $x_e = \begin{bmatrix} 0.5 \\ 0 \end{bmatrix}$ est un foyer stable. Par contre le deuxième point d'équilibre $x_e' = \begin{bmatrix} 0.04 \\ 0 \end{bmatrix}$ est un col instable.

b-Commande par retour d'état avec observateur réduit:

Cette commande nécessite la connaissance à chaque instant la valeur de la vitesse $x_2(t)$. Par conséquent, un observateur réduit (2-16) d'ordre un a été construit, estimant la vitesse $x_2(t)$ de la balle.

L'équation d'état du système élargi devient :

$$\begin{cases} \dot{z}(t) = -10 z(t) - 98 y(t) - 4 \delta u(t) \\ \hat{x}_2(t) = z(t) + 10 \frac{2(I_0 + \delta u)^2}{x_1} + 1 \end{cases} \quad (2-21)$$

Notons que le système linéaire augmenté reste stable. Il est à noter que le pôle placé pour la dynamique de l'observateur est égale à -10 .

La figure 2-6 montre l'évolution du vecteur d'état et l'estimateur de vitesse $x_2(t)$ avec l'état initial : $x(t_0) = \begin{bmatrix} 0.09 \\ 0 \end{bmatrix}$

Il faut remarquer qu'en faisant varier la condition initiale du vecteur d'état $x(t)$, une légère diminution de la région de stabilité par rapport à celle de la figure 2-5. Cela est dû à l'introduction de l'observateur réduit dans la boucle de commande, en éliminant l'erreur de position (fig. 2-9).

C-Commande du système élargi

Pour des applications pratiques, il faut évoquer quelques problèmes qui peuvent déplacer la position d'équilibre ou même déstabiliser le système en boucle fermée, telle que les perturbations non prises en compte ou la variation du courant d'alimentation I_0 . Ce qui entraîne des erreurs systématiques d'estimation et de contrôle.

Donc, pour défavoriser le passage dans le signal de commande d'une composante additionnelle (bruits), on a utilisé de faibles gains de la matrice de contre-réaction K . En outre, pour supprimer les erreurs stationnaires (fig 2-7), un intégrateur est introduit dans la boucle de commande.

avec $\delta x_0(t) = \int \delta x_1 dt$ ou $\dot{x}_0(t) = x_1 - s = \delta x_1$

L'équation d'état du système élargi devient :

$$\begin{cases} \dot{\delta x}_0 = \delta x_1 \\ \dot{\delta x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = - \frac{2 (I_0 + \delta u)^2}{x_1} + 1 \end{cases} \quad (2-22)$$

Notons que le système linéaire augmenté reste contrôlable et observable, les pôles stables placés sont :

$$\sigma(A_c + B_c K_c) = \left[-10, 1.4 \pm j 1.4 \right]$$

La matrice de retour d'état obtenue est :

$$K_i = \begin{bmatrix} 1.96 & -2.88 & 1.2 \end{bmatrix}$$

En conclusion, la figure 2-8 montre l'effet de la dérive du point de fonctionnement (variation du courant d'alimentation I_0) sur la réponse du système. Il est à noter que l'introduction de l'intégrateur dans la boucle de commande améliore la réponse du système en éliminant l'erreur de position (fig.2-9).

2-6 COMMANDE NUMERIQUE PAR RETOUR D'ETAT

2-6-1 Discrétisation des équations dynamiques du système linéaire [15]:

La solution de l'équation d'état (2-7) est donnée par :

$$\delta x(t) = \Phi(t-t_0) \delta x(t_0) + \int_{t_0}^t \Phi(t,\tau) B \delta u \, d\tau \quad (2-23)$$

où : $\Phi(t-t_0)$ est la matrice de transition d'état du système (2-7)

Il est supposé que la commande est calculée numériquement et qu'elle est maintenue constante pendant un pas d'échantillonnage T . L'intégration de l'équation d'état (2-23) sur un pas d'échantillonnage donne :

Pour $kT \leq t \leq (k+1)T$, $\delta u(t) = \delta u(kT) = \text{constante}$

$$\begin{cases} \delta x[(k+1)T] = \Phi(T) \delta x(kT) + \theta(T) \delta u(kT) \\ y(kT) = C \delta x(kT) \end{cases} \quad (2-24)$$

où $\theta(T) = \int_{kT}^{(k+1)T} \Phi(t-\tau) \, d\tau \, B$

Dans le cas où A est inversible : $\theta(T) = A^{-1} [\Phi(T) - I_2] B$

■ Observabilité: La vitesse du processus peut être identifiée par la Pour notre système linéaire (2-8), les équations d'état discrétisées sont: linéaire discret (2-24) est complètement observable.

$$\Phi(T) = \begin{bmatrix} \text{ch}\alpha T & \frac{1}{\alpha} \text{sh}\alpha T \\ \alpha \text{sh}\alpha T & \text{ch}\alpha T \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad \theta(T) = \begin{bmatrix} \frac{\beta}{\alpha^2} (\text{ch}\alpha T - 1) \\ \frac{\beta}{\alpha} \text{sh}\alpha T \end{bmatrix} \quad (2-26)$$

Remarque: La discrétisation des équations d'état et de sortie (2-7) et (2-8) n'a pas modifié les deux propriétés de contrôlabilité et d'observabilité car la condition suffisante pour leurs conservations après discrétisation est vérifiée [16], c'est à dire:

$$\text{avec: } \alpha^2 = \frac{k I_0^2}{2 M X_{e-1}^2} \quad \text{et} \quad \beta = -\frac{k I_0}{M X_{e-1}}$$

2-6-2 Stabilité du système linéaire discret de la matrice A

Le polynôme caractéristique du système linéaire discret (2-26) est:

$$\Delta(\lambda) = |\lambda I - \Phi(T)| = \begin{vmatrix} \lambda - \text{ch}\alpha T & -\frac{1}{\alpha} \text{sh}\alpha T \\ \alpha \text{sh}\alpha T & \lambda - \text{ch}\alpha T \end{vmatrix} = \lambda^2 - 2 \text{ch}\alpha T \lambda + 1$$

Ses racines sont: choisie garantissant un amortissement "optimal" et un temps de réponse satisfaisant

$$\lambda_1 = e^{\alpha T} \quad \text{et} \quad \lambda_2 = e^{-\alpha T} \quad (2-28)$$

la valeur propre λ_1 est à l'extérieur du cercle unitaire pour $T \neq 0$. Par conséquent le système linéaire discret (2-26) est instable.

Avant de déterminer la commande discrète qui stabilise le processus autour de son point de fonctionnement, il convient d'étudier la contrôlabilité et l'observabilité du système linéaire discret (2-24)

■ Contrôlabilité: Le système linéaire discret (2-24) est complètement contrôlable car:

Le schéma-bloc de la commande discrète par retour d'état est représenté par la figure 2-10. Le rang de la matrice de commande est:

$$\text{Rang} \begin{bmatrix} \theta(T) & \Phi(T) \theta(T) \end{bmatrix} = 2$$

■ Observabilité: La vitesse du processus peut être identifiée par la mesure du vecteur de sortie $y(kT)$ et la commande $\delta u(kT)$. En effet, le système linéaire discret (2-24) est complètement observable.

$$\text{Rang} \begin{bmatrix} C \\ C \Phi(T) \end{bmatrix} = 2$$

Remarque: La discrétisation des équations d'état et de sortie (2-7) et (2-8) n'a pas modifié les deux propriétés de contrôlabilité et d'observabilité, car la condition suffisante pour leurs conservations après discrétisation est vérifiée [16], c'est à dire :

$$\text{Re}(\lambda_1 - \lambda_2) \neq 0 \quad \text{où} \quad \lambda_1 \text{ et } \lambda_2 \text{ les pôles de la matrice } \mathbb{A}$$

2-6-3 Commande par placement de pôles

Afin de stabiliser le processus autour du point de d'équilibre x_e , par retour d'état discret, deux pôles stables ont été choisis garantissant un amortissement "optimal" et un temps de réponse satisfaisant.

$$Z_{1,2} = \left\{ e^{-p_1 T}, e^{-p_2 T} \right\} \quad (2-29)$$

La commande discrète par retour d'état s'écrit :

$$\delta u(kT) = K \delta x(kT) \quad (2-30)$$

L'équation d'état (2-24) bouclée par cette commande s'écrit:

$$\delta x((k+1)T) = \left[\Phi(T) + \Theta(T) K \right] \delta x(kT) \quad (2-31)$$

$$\text{avec} \quad K = [k_1 \quad k_2] \quad (2-32)$$

Le schéma-bloc de la commande discrète par retour d'état est représenté à la figure 2-10.

• Observateur d'état discret :

Pour réaliser la commande par retour d'état $\delta u(kT)$, il est nécessaire de connaître à chaque période d'échantillonnage la valeur du vecteur d'état $\delta x(kT)$, puisqu'on a accès uniquement à l'entrée et à la sortie du système, alors l'estimation de l'état $\delta x(k)$ à partir de ces données avec un observateur discret complet est nécessaire.

L'observateur d'ordre deux est un système dynamique linéaire (Annexe B-1) dont l'état est $\delta \hat{x}(k)$, tel que :

$$\delta \hat{x}(k+1) = \Phi(T) \delta \hat{x}(k) + \Theta(T) \delta u(k) + \Gamma \left[y(k) - \hat{y}(k) \right] \quad (2-33)$$

$$\text{où } \hat{y}(k) = C \delta \hat{x}(k)$$

L'équation qui décrit l'évolution de l'erreur d'estimation (Annexe B) est :

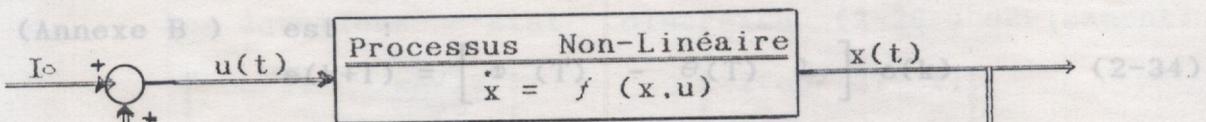


Fig.2-10 Commande par retour d'état discret

• Observateur discret réduit :

Dans la section (§ 2-4) vue précédemment, la variation de la position autour du point d'équilibre (δx_1) est mesurée directement par le capteur de position. Il reste donc à connaître à chaque pas d'échantillonnage la vitesse $x_2(kT)$. Par conséquent, on peut utiliser un observateur discret réduit d'ordre un.

■ Observateur d'état discret : observateur est donné par :

Pour réaliser la commande par retour d'état $\delta u(kT)$, il est nécessaire de connaître à chaque période d'échantillonnage la valeur du vecteur d'état $\delta x(kT)$, puisqu'on a accès uniquement à l'entrée et à la sortie du système, alors l'estimation de l'état $\delta x(k)$ à partir de ces données avec un observateur discret complet est nécessaire.

La figure 2-12 représente le schéma-bloc du processus

L'observateur d'ordre deux est un système dynamique linéaire (Annexe B-1) dont l'état est $\hat{\delta x}(k)$, tel que :

$$\hat{\delta x}(k+1) = \Phi(T) \hat{\delta x}(k) + \theta(T) \delta u(k) + \mathbb{L} \left[y(k) - \hat{y}(k) \right] \quad (2-33)$$

Soit le modèle de simulation utilisé dans la partie (§ 2-5) avec : $\alpha = \sqrt{2}$ et $\beta = -1$.

L'équation qui décrit l'évolution de l'erreur d'estimation (Annexe B) est : l'état discret (2-26) devient :

$$e(k+1) = \left[\Phi(T) - \theta(T) \mathbb{L} \right] e(k) \quad (2-34)$$

Donc, la matrice \mathbb{L} est choisie de manière à ce que l'erreur tendra asymptotiquement vers zéro avec une dynamique fixée par l'emplacement des valeurs propres de la matrice de l'équation (2-34). La période d'échantillonnage a été fixée à $T = 0.01s$.

Ce choix de la période d'échantillonnage et son influence sur La figure 2-11 représente la structure globale de la commande discrète avec observateur d'état du processus.

a) Commande par retour d'état :

■ Observateur discret réduit : par retour d'état sont :

Dans la section (§ 2-4) vue précédemment, la variation de la position autour du point d'équilibre (δx_{el}) est mesuré directement par le capteur de position. Il reste donc à connaître à chaque pas d'échantillonnage la vitesse $x_2(kT)$. Par conséquent, on peut utiliser un observateur discret réduit d'ordre un.

L'équation dynamique de cet observateur est donnée par :
(Annexe B-2)

$$\begin{cases} z(k+1) = H_1 z(k) + H_3 u(k) + H_2 y(k) \\ \hat{x}_2(k) = z(k) + L y(k) \\ \delta \hat{x}(k) = \begin{bmatrix} y(k) \\ \hat{x}_2(k) \end{bmatrix} \end{cases} \quad (2-35)$$

La figure 2-12 représente le schéma-bloc du processus non-linéaire commandé par retour d'état avec un observateur réduit.

2-7 SIMULATION ET RESULTATS

Soit le modèle de simulation utilisé dans la partie (§ 2-5) avec : $\alpha = \sqrt{2}$ et $\beta = -4$.

Les équations d'état discrètes (2-26) deviennent:

$$\delta x(k+1) = \begin{bmatrix} \text{ch}\sqrt{2}T & \frac{\text{sh}\sqrt{2}T}{\sqrt{2}} \\ \sqrt{2} \text{sh}\sqrt{2}T & \text{ch}\sqrt{2}T \end{bmatrix} \delta x(k) + \begin{bmatrix} -2(\text{ch}\sqrt{2}T - 1) \\ -2\sqrt{2} \text{sh}\sqrt{2}T \end{bmatrix} \delta u(k) \quad (2-36)$$

La période d'échantillonnage a été fixée à $T = 0.01s$. Ce choix de la période d'échantillonnage et son influence sur la stabilité du système sera étudié au chapitre 5.

a) Commande par retour d'état:

Les pôles stables placés par retour d'état sont:

$$z_{1,2} = e^{\lambda_{1,2} T} = \left[0.986 \pm j 0.0138 \right]$$

on obtient :

$$K = \begin{bmatrix} 1.466 & 0.697 \end{bmatrix} \quad (2-37)$$

Le plan de phase de la figure 2-13 montre le domaine de stabilité du processus (2-17) commandé par le retour d'état discret (2-30) pour les différentes conditions initiales de l'état.

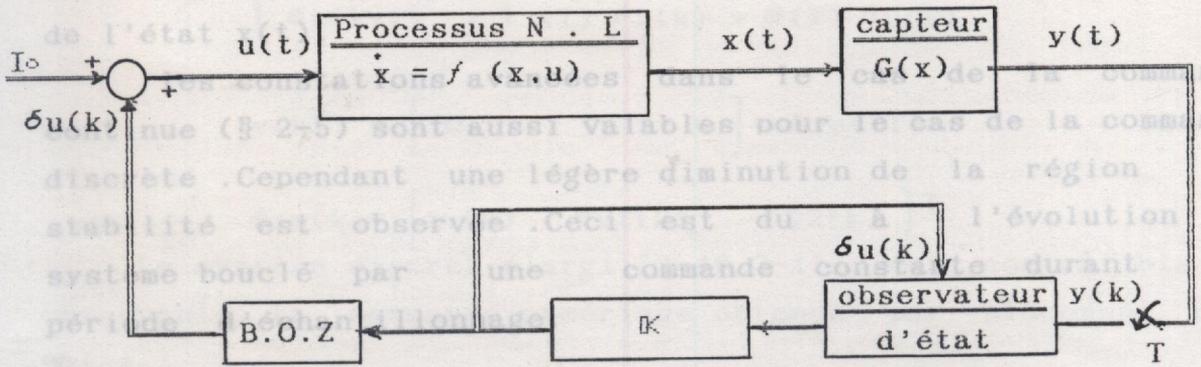


Fig 2-11 Commande discrète par retour d'état avec observateur complet.

$$\begin{cases} z(k+1) = 0.9048 z(k) - 0.038 \delta u(k) - 0.8875 y(k) \\ x_2(k) = z(k) + 9.526 y(k) \end{cases}$$

avec $Q = 9.526$ pour $\lambda L = 0.9105$

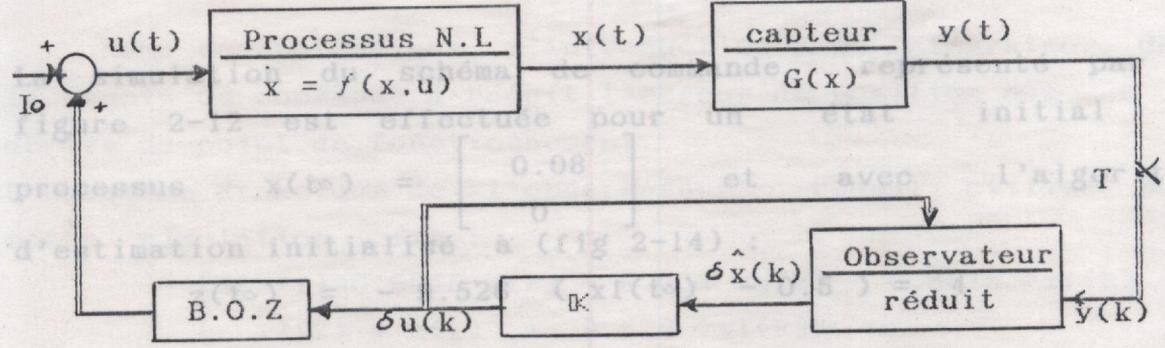


Fig 2-12 Commande discrète par retour d'état avec observateur réduit

pour diminuer l'écart de réglage du point de fonctionnement (fig 2-15), une action intégrale est utilisée. L'équation de l'intégrateur numérique est donnée par :

$$x_i(k+1) = x_i(k) + T \delta x_i(k) \quad (2-39)$$

Le plan de phase de la figure 2-13 montre le domaine de stabilité du processus (2-17) commandé par le retour d'état discret (2-30) pour les différentes conditions initiales de l'état $x(t)$.

Les constatations avancées dans le cas de la commande continue (§ 2-5) sont aussi valables pour le cas de la commande discrète. Cependant une légère diminution de la région de stabilité est observée. Ceci est dû à l'évolution du système bouclé par une commande constante durant la période d'échantillonnage.

b) Commande par retour d'état avec un estimateur de vitesse x_2

L'observateur réduit discret utilisé pour l'estimation de vitesse $x_2(t)$ a pour équation :

$$\begin{cases} z(k+1) = 0.9048 z(k) - 0.038 \delta u(k) - 0.8875 y(k) \\ \hat{x}_2(k) = z(k) + 9.526 y(k) \end{cases}$$

avec $L = 9.526$ pour $\lambda_L = 0.9105$

La simulation du schéma de commande représenté par la figure 2-12 est effectuée pour un état initial du processus $x(t_0) = \begin{bmatrix} 0.08 \\ 0 \end{bmatrix}$ et avec l'algorithme d'estimation initialisé à (fig 2-14) :

$$z(t_0) = -9.526 (x_1(t_0) - 0.5) = 4$$

c) Commande du système élargi

Afin de réduire l'influence des perturbations et de diminuer l'écart de réglage dû à la dérive du point de fonctionnement (fig 2-15), une action intégrale est utilisée. L'équation de l'intégrateur numérique est donnée par :

$$x_0(k+1) = x_0(k) + T \delta x_1(k) \quad (2-39)$$

Les équations d'état et de sortie du système discret (2-24) augmenté par l'intégrateur (2-39) deviennent :

$$\begin{cases} x_0(k+1) = x_0(k) + 0.01 \delta x_1(k) \\ \delta x(k+1) = \Phi(T) \delta x(k) + \theta(T) \delta u(k) \end{cases} \quad (2-40)$$

Il est à noter que l'effet de la dérive du point de fonctionnement a été réduit par l'introduction d'un intégrateur dans la boucle de commande.

$$y(kT) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \delta x_e(kT) \quad (2-41)$$

où $\delta x_e(k) = \begin{bmatrix} x_0(k) & \delta x_1(k) & x_2(k) \end{bmatrix}^T$

Le système discret élargi (2-40, 2-41) est contrôlable et observable. La commande numérique obtenue par placement des pôles :

$$\sigma = \{0.9802; 0.986 \pm j.0.0138\}$$

est $\delta u(k) = \begin{bmatrix} 2.6 & 3.285 & 1.374 \end{bmatrix} \delta x_e(k) \quad (2-42)$

La figure 2-16 illustre l'évolution de l'état du processus de lévitation magnétique commandé par retour d'état avec observateur réduit.

Nous constatons que l'introduction d'un intégrateur dans la boucle de commande a réduit l'erreur de position due à la dérive du point de fonctionnement.

L'équation dynamique de l'observateur réduit utilisé pour cette simulation est :

$$\begin{cases} z(k+1) = 0.9048 z(k) - 0.038 \delta u(k) - 0.8875 \delta x_1(k) \\ \hat{x}_2(k) = z(k) + 9.526 \delta x_1(k) \end{cases}$$

2- 8 CONCLUSION

Les résultats obtenus par simulation, permettent de conclure que la stabilisation du processus non-linéaire en choisissant un temps de réponse convenable et un amortissement optimal par placement de pôles a amélioré le domaine de stabilité.

Par ailleurs, le choix de ces pôles a rendu le système insensible aux perturbations de structure.

Il est à noter que l'effet de la dérive du point de fonctionnement a été réduit par l'introduction d'un intégrateur dans la boucle de commande.

Il faut noter aussi que l'introduction de l'observateur réduit dans la boucle de commande réduit la région de stabilité autour du point d'équilibre (voir tableau 2-1).

Analogique	Retour d'état	-1.4 ± j 1.4	$x_2(t_0) = 0$ 0.06cm → 1.95cm
	Obsér. Réduit	-10	$x_1(t_0) :$
	Intégrateur	-10	0.15cm → 1.8cm
Commande	Retour d'état simple	0.986 ± j0.0138	$x_2(t_0) = 0$ $x_1 : 0.06cm → 1.8cm$
	Obsér. Réduit	0.9048	$x_2(t_0) = 0$ $x_1(t_0) :$ 0.06cm → 1.9cm
Numérique	Retour d'état	0.986 ± j0.0138	$x_2(t_0) = 0$
	Obsér. Réduit	0.9048	$x_1(t_0) :$
	Intégrateur	0.9802	0.15cm → 1.6cm

Tableau 2.1

PLAN DE PHASE

		Pôles placés	Domaine de stabilité
Commande Analogique	Retour d'état simple	$-1.4 \pm j 1.4$	$x_2(t_0) = 0$ $x_1 : .055\text{cm} \longrightarrow 1.95\text{cm}$
	Retour d'état + Obser. Réduit	$-1.4 \pm j 1.4$ $- 10$	$x_2(t_0) = 0$ $x_1(t_0) :$ $0.06\text{cm} \longrightarrow 1.95\text{cm}$
	Retour d'état + Obser. Réduit + Intégrateur	$-1.4 \pm j 1.4$ -10 -10	$x_2(t_0) = 0$ $x_1(t_0) :$ $0.15\text{cm} \longrightarrow 1.8\text{cm}$
Commande Numérique	Retour d'état simple	$0.986 \pm j 0.0138$	$x_2(t_0) = 0$ $x_1 : 0.06\text{cm} \longrightarrow 1.9\text{cm}$
	Retour d'état + Obser. Réduit	$0.986 \pm j 0.0138$ 0.9048	$x_2(t_0) = 0$ $x_1(t_0) :$ $0.06\text{cm} \longrightarrow 1.9\text{cm}$
	Retour d'état + Obser. Réduit + Intégrateur	$0.986 \pm j 0.0138$ 0.9048 0.9802	$x_2(t_0) = 0$ $x_1(t_0) :$ $0.15\text{cm} \longrightarrow 1.6\text{cm}$

Tableau 2.1

Fig 2-5 Plan de phase $x_2 = f(x_1)$

PLAN DE PHASE

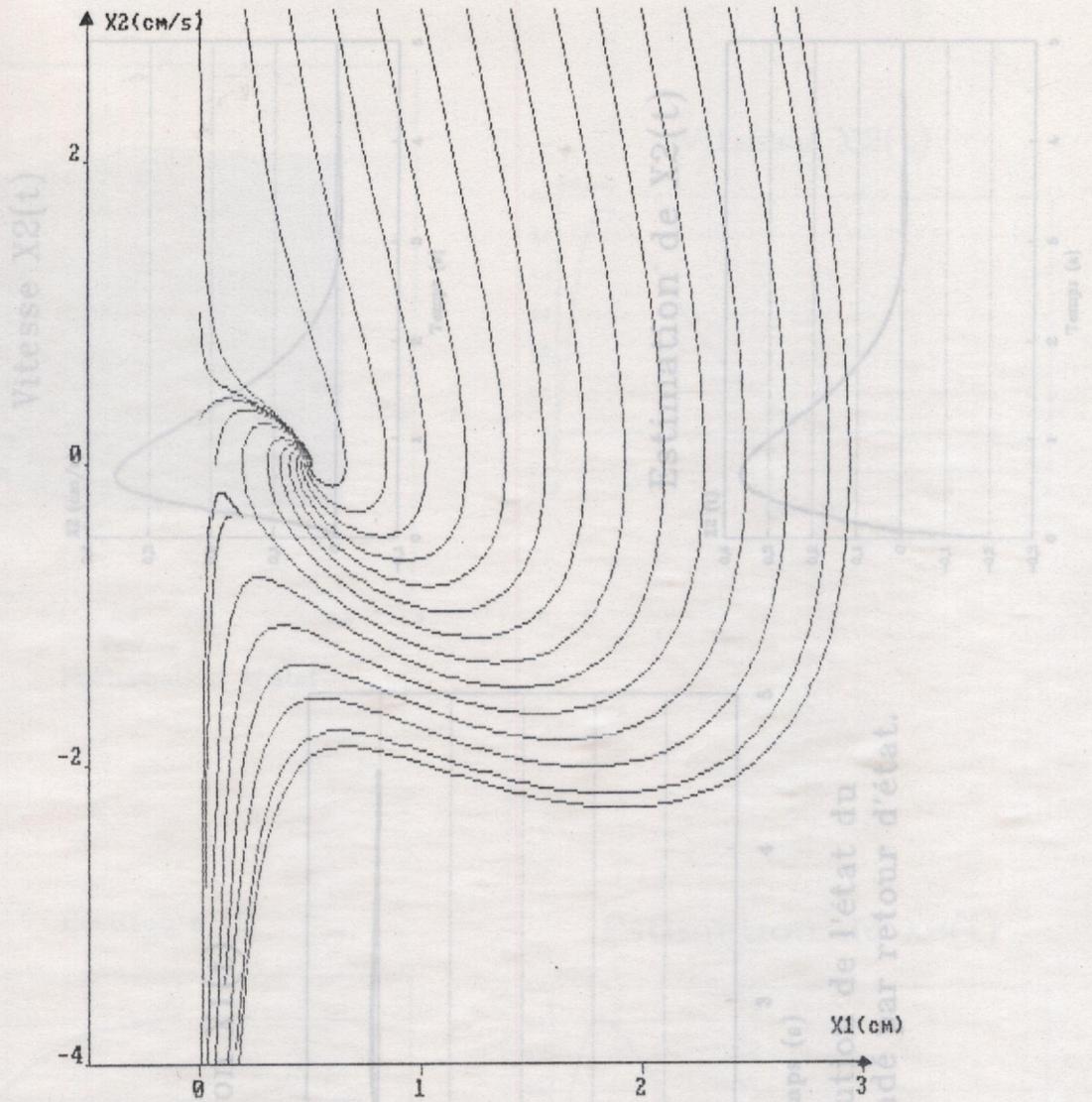
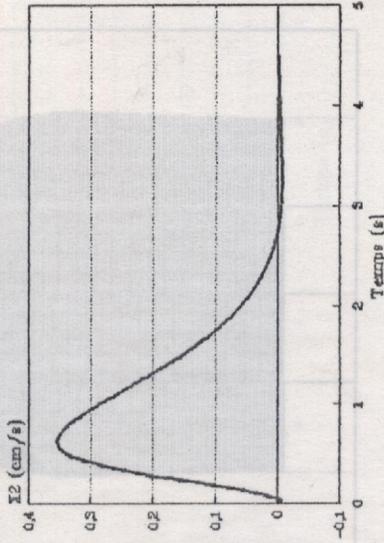
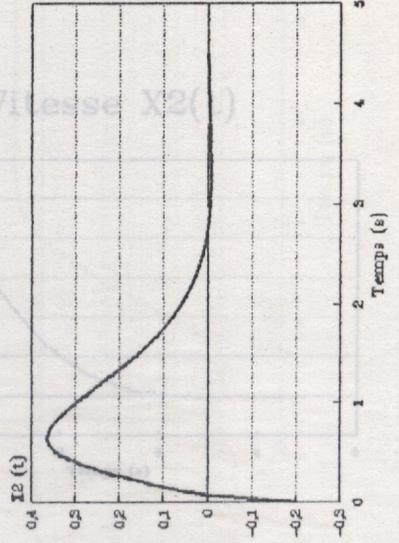


Fig 2-5 Plan de phase $x_2 = f(x_1)$

Vitesse $X_2(t)$



Estimation de $X_2(t)$



Position $X_1(t)$

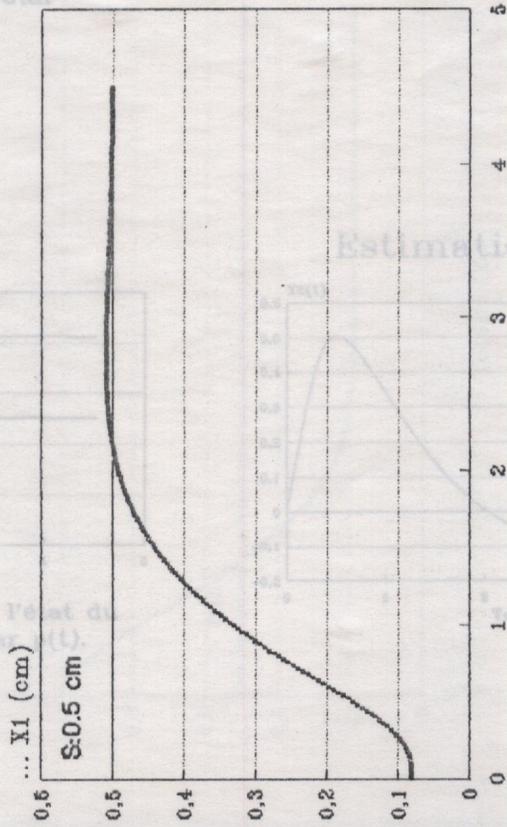
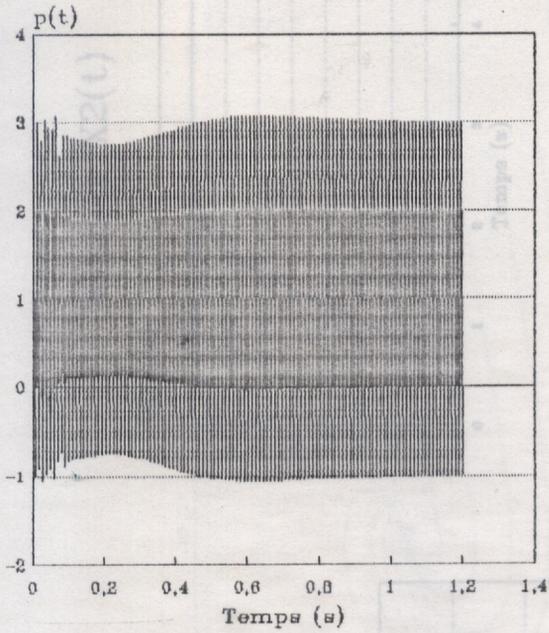


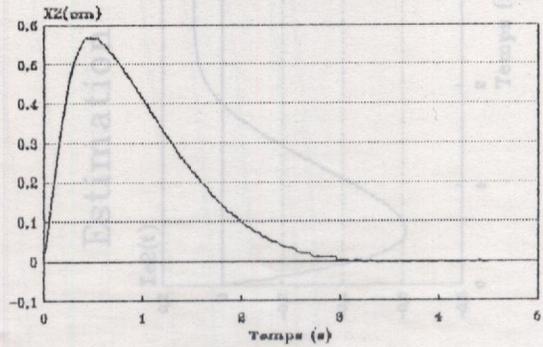
Fig.2-6 L'évolution de l'état du processus commandé par retour d'état.

Perturbation $P(t)$

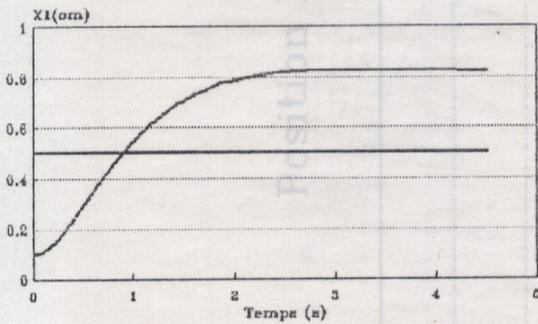


Perturbation d'état

Vitesse $X2(t)$



Position $X1(t)$



Estimation de $X2(t)$

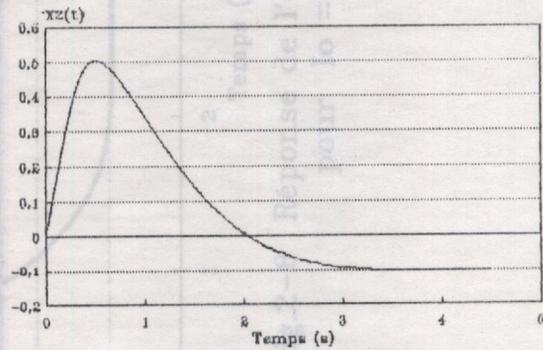
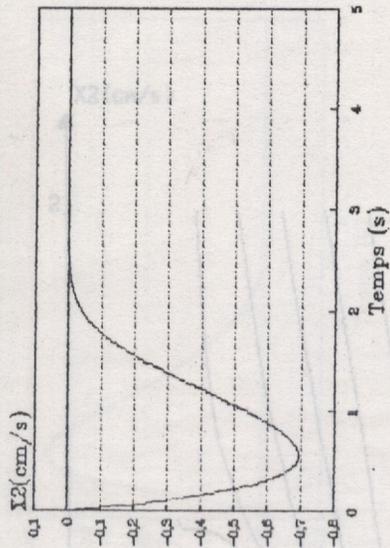
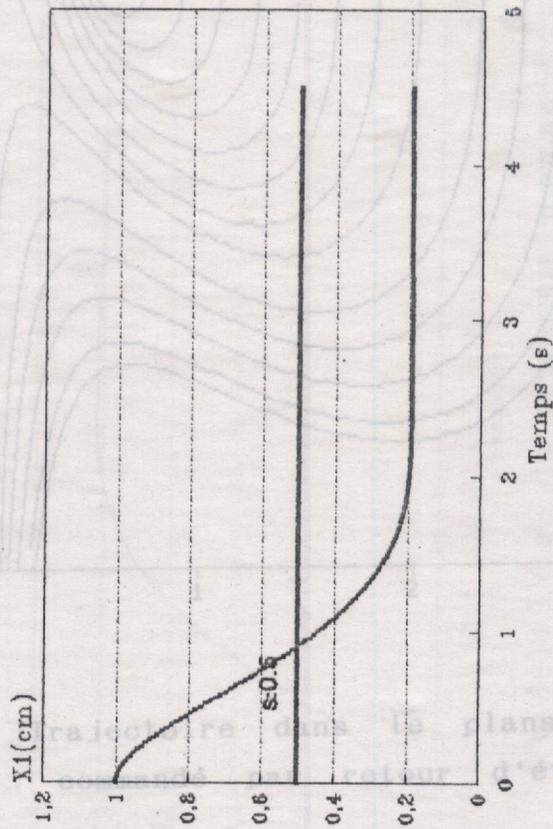


Fig.2-7 L'évolution de l'état du processus perturbé par $p(t)$.

Vitesse $X2(t)$



Position $X1(t)$



Estimation de $X2(t)$

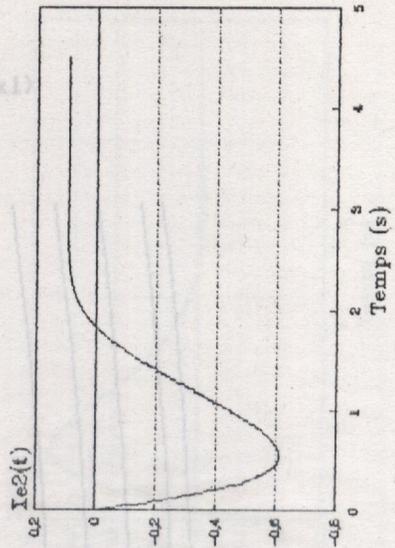


Fig.2-8 Réponse de l'état du processus pour $I_0 = 0.8$ A

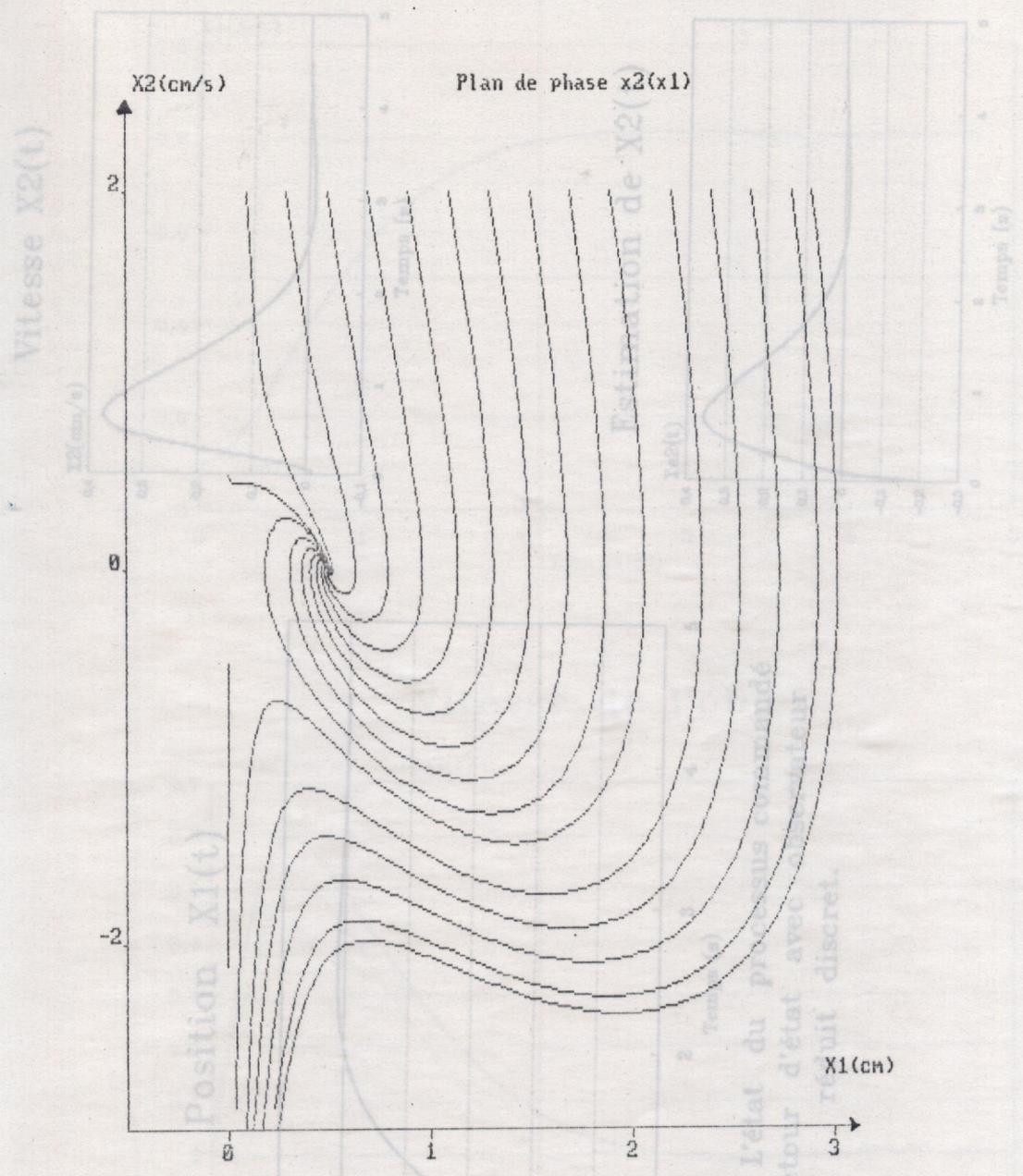
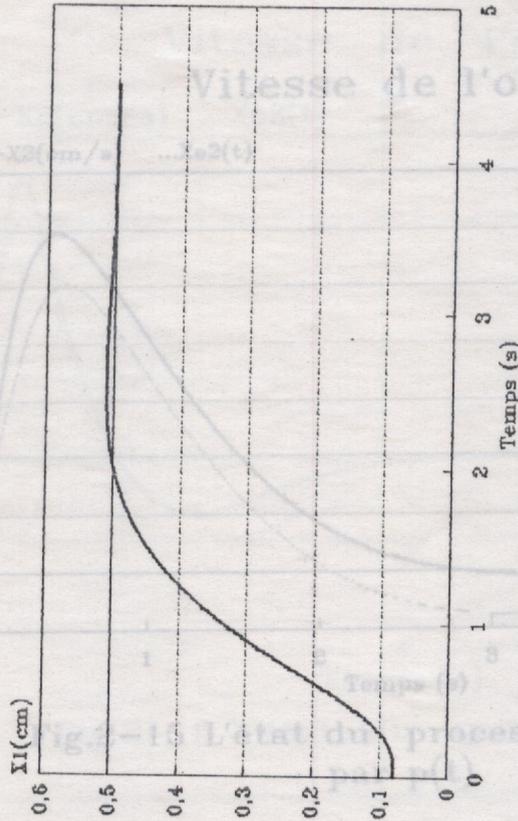
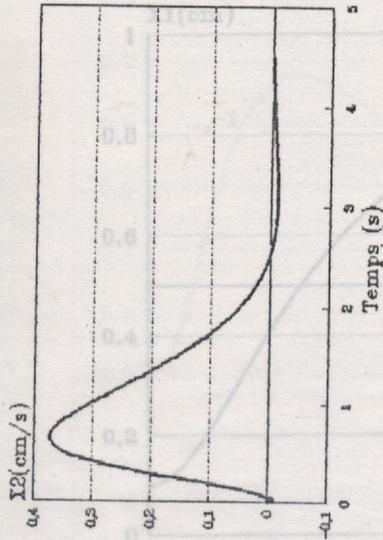


Fig. 2-13 Trajectoire dans le plans de phase du procédé commandé par retour d'état discret

Position $X1(t)$



Vitesse $X2(t)$



Estimation de $X2(t)$

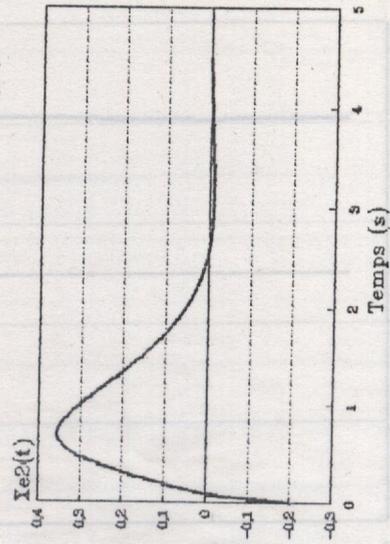
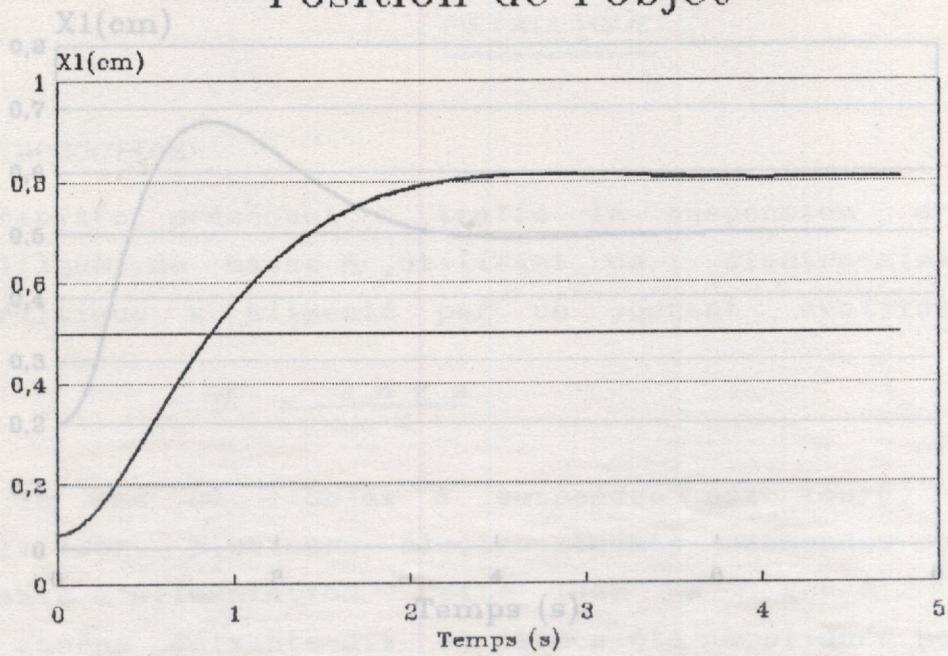


Fig.2-14 L'état du processus commandé par retour d'état avec observateur réduit discret.

Position de l'objet
Position de l'objet



Vitesse de l'objet
Vitesse de l'objet

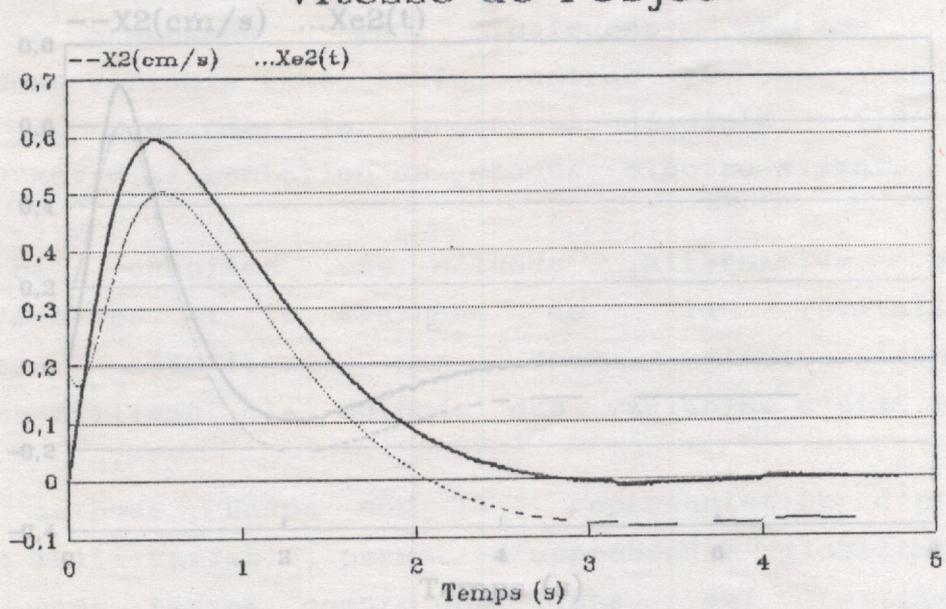
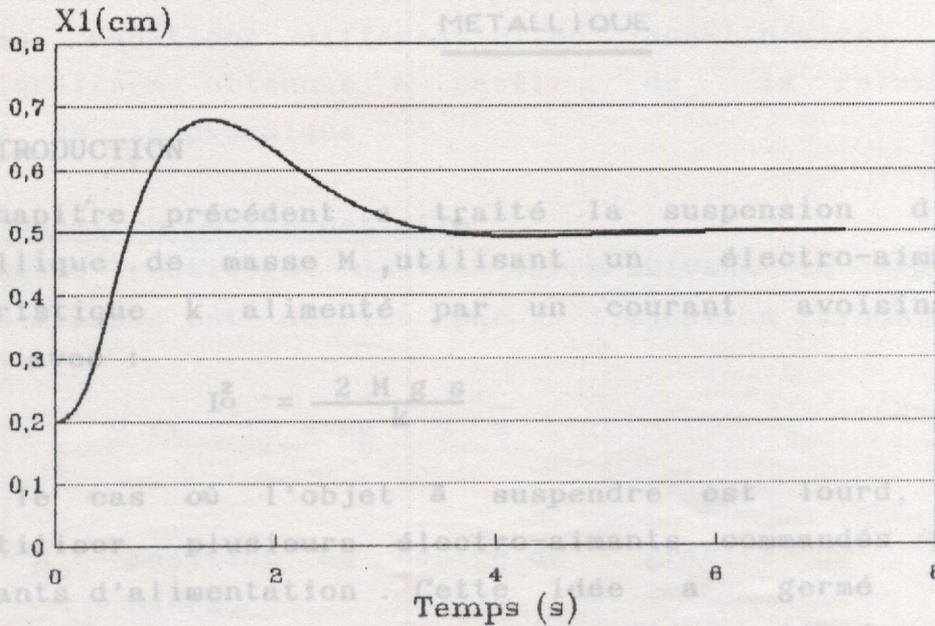


Fig.2-15 L'état du processus perturbé par $p(t)$.

Position de l'objet



Vitesse de l'objet

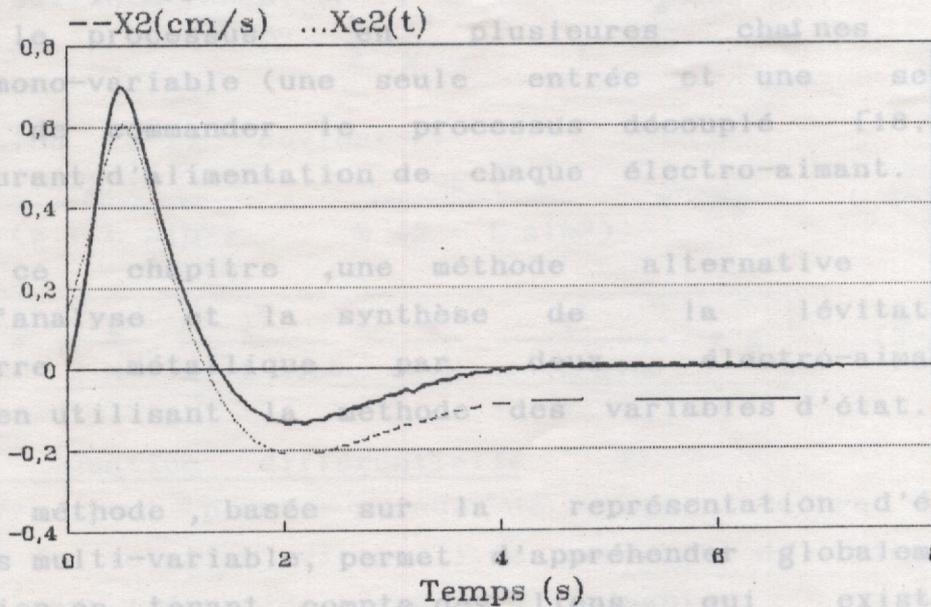


Fig.2-16 L'état du système élargi.

CHAPITRE 3 - LEVITATION MAGNETIQUE D'UNE BARRE

METALLIQUE

3-1 INTRODUCTION

Le chapitre précédent a traité la suspension d'un objet métallique de masse M , utilisant un électro-aimant de caractéristique k alimenté par un courant avoisinant I_0 (§ 2-2) avec :

$$I_0^2 = \frac{2 M g s}{k} \quad (3-1)$$

Dans le cas où l'objet à suspendre est lourd, il importe d'utiliser plusieurs électro-aimants commandés par leurs courants d'alimentation. Cette idée a germé au milieu des années soixante-dix et elle a été appliquée pour la lévitation d'un châssis d'un wagon [9].

Cependant, l'approche qui a été développée consiste à décomposer le processus en plusieurs chaînes de régulation mono-variable (une seule entrée et une seule sortie) et de commander le processus découplé [18,19] par le courant d'alimentation de chaque électro-aimant.

Dans ce chapitre, une méthode alternative est proposée : l'analyse et la synthèse de la lévitation d'une barre métallique par deux électro-aimants identiques en utilisant la méthode des variables d'état.

Cette méthode, basée sur la représentation d'état du processus multi-variable, permet d'appréhender globalement la régulation en tenant compte des liens qui existent entre les deux chaînes du procédé.

3-2 ANALYSE DU PROCESSUS

Le modèle mathématique du processus (fig 3-1) est régi par deux équations différentielles non-linéaires à paramètres localisés obtenues à partir de la relation fondamentale de la dynamique .

■ Première équation différentielle

Le mouvement rectiligne de la barre suivant le plan des électro-aimants est décrit par l'équation dynamique suivante:

$$-f_1 - f_2 + Mg = M \ddot{z} \quad (3-1)$$

où z : position du centre de gravité de la barre.

M : masse de la barre .

Le module de la force magnétique est donnée par l'équation suivante (chapitre 1) :

$$F_i = \frac{k I^2}{2 z} \quad , \quad i = 1,2$$

L'équation (3-1) devient :

$$M \ddot{z} = \frac{-k I^2}{2 (z + L \sin\theta)} + \frac{-k I^2}{2 (z - L \sin\theta)} + Mg \quad (3-2)$$

d'où :

$$\ddot{z} = - \frac{k}{2 M} \frac{I^2}{z + L \sin\theta} - \frac{k}{2 M} \frac{I^2}{z - L \sin\theta} + g \quad (3-3)$$

■ Deuxième équation différentielle

La barre peut pivoter autour de son centre de gravité (axe de rotation virtuel). Ce mouvement de rotation est décrit par l'équation dynamique suivante :

$$J \ddot{\theta} = -f_2 L \cos\theta + f_1 L \cos\theta \quad (3-4)$$

où :
 $J = \frac{1}{3} M L^2$ moment d'inertie de la barre par rapport à son centre de gravité
 $2L$ longueur de la barre.

Compte tenu de l'expression, des forces de lévitation,

$$I_1(t) \rightarrow \left[\frac{1}{2} \frac{L^2 \cos^2\theta}{z + L \sin\theta} + \frac{k L}{2 J} \right] \leftarrow I_2(t) \quad (3-5)$$

Les conditions de sortie du système
 La sortie du système dépend des grandeurs mesurées.
 Deux capteurs optiques de position sont installés pour mesurer les écarts des deux extrémités de la barre.
 L'équation de sortie du système est alors :

$$\begin{cases} y_1 = (z-s) + L \sin\theta \\ y_2 = (z-s) - L \sin\theta \end{cases} \quad (3-6)$$

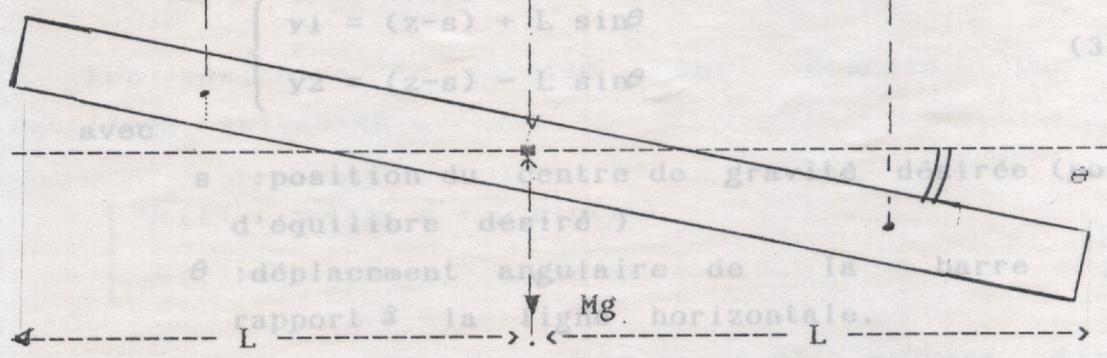


Fig.3-1 Schéma de principe de la lévitation d'une barre métallique

Il est difficile de résoudre le problème de la commande du système directement à partir d'un tel modèle. Il est donc naturel de s'orienter vers l'étude du modèle linéarisé autour d'un point d'équilibre désiré par la méthode des variables d'état.

$$J \ddot{\theta} = -f_2 L \cos\theta + f_1 L \cos\theta \quad (3-4)$$

où :

$$J = \frac{1}{3} M L^2 \quad \text{moment d'inertie de la barre par rapport à son centre de gravité}$$

$2 L$ longueur de la barre.

Compte tenu de l'expression des forces de lévitation, l'équation suivante est obtenue :

$$\ddot{\theta} = - \frac{k L}{2 J} \frac{I^2 \cos\theta}{z + L \sin\theta} + \frac{k L}{2 J} \frac{I^2 \cos\theta}{z - L \sin\theta} \quad (3-5)$$

■ Les équations de sortie du système

La sortie du système dépend des grandeurs mesurées. Deux capteurs optiques de position sont insérés pour mesurer les écarts des deux extrémités de la barre.

L'équation de sortie du système est alors :

$$\begin{cases} y_1 = (z-s) + L \sin\theta \\ y_2 = (z-s) - L \sin\theta \end{cases} \quad (3-6)$$

avec

s : position du centre de gravité désirée (point d'équilibre désiré)

θ : déplacement angulaire de la barre par rapport à la ligne horizontale.

L'analyse du procédé de lévitation de la barre a abouti à un modèle aux équations différentielles non-linéaires.

Il est difficile de résoudre le problème de la commande du système directement à partir d'un tel modèle. Il est donc naturel de s'orienter vers l'étude du modèle linéarisé autour d'un point d'équilibre désiré par la méthode des variables d'état.

■ Mise en équation : La représentation d'état adoptée est :

$$x(t) = [x^1(t), x^2(t), x^3(t), x^4(t)]^T, u(t) = [u^1(t), u^2(t)]^T$$

avec

- $x^1(t)$: position du centre de gravité de la barre $z(t)$
- $x^2(t)$: vitesse du centre de gravité de la barre $\dot{z}(t)$
- $x^3(t)$: position angulaire θ
- $x^4(t)$: vitesse angulaire $\dot{\theta}$

Le modèle mathématique (3-3, 3-5) du procédé en tenant compte de la représentation d'état est alors :

$$\begin{cases} \dot{x}^1 = x^2 \\ \dot{x}^2 = -\frac{k}{2M} \frac{u^1{}^2}{x^1 + L \sin(x^3)} - \frac{k}{2M} \frac{u^2{}^2}{x^1 - L \sin(x^3)} + g \\ \dot{x}^3 = x^4 \\ \dot{x}^4 = -\frac{kL}{2J} \frac{u^1{}^2 \cos(x^3)}{x^1 + L \sin(x^3)} + \frac{kL}{2J} \frac{u^2{}^2 \cos(x^3)}{x^1 - L \sin(x^3)} \end{cases} \quad (3-7)$$

Les variables de sorties sont données par les équations suivantes :

$$\begin{cases} y_1(t) = x^1(t) - s + L \sin(x^3) \\ y_2(t) = x^1(t) - s - L \sin(x^3) \end{cases} \quad (3-8)$$

Les deux expressions (3-7, 3-8) peuvent être écrites sous la forme :

$$\text{avec } \begin{cases} \dot{x}(t) = f(x, u) \\ y(t) = g(x, s) \end{cases}$$

Donc le procédé est représenté par un système d'équations non-linéaires multi-variables du 4^{ème} ordre .

■ Recherche des points d'équilibres [12]: la solution du système :

$$x^e = f(x^e, u^e) = 0$$

est :

$$f(x^e, u^e) = 0 \implies \begin{cases} x^2 = 0 & (1) \\ g = \frac{k}{M} I_0^2 \left[\frac{x^e}{x^e} - L^2 \sin^2(x^e) \right] & (2) \\ x^3 = 0 & (3) \\ \frac{k L I_0^2}{2 J x^e - L \sin(x^e)} \cos(x^e) = \frac{k L I_0^2}{2 J x^e + L \sin(x^e)} \cos(x^e) & (4) \end{cases}$$

L'équation (4) donne :

$$2 L \sin(x^e) = 0 \quad \text{pour } x^e \neq (2\beta + 1)\frac{\pi}{2} \quad \text{où } \beta \in \mathbb{Z}$$

d'où $x^e = n\pi$, $n \in \mathbb{Z}$

L'équation (2) est alors :

$$x^e = \frac{k}{M} \cdot \frac{I_0^2}{g}$$

Donc, le système non-linéaire (3-7) a une infinité de points d'équilibres dont les composantes sont :

$$x^e = \begin{bmatrix} \frac{k \cdot I_0^2}{M g} \\ 0 \\ n\pi \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s \\ 0 \\ n\pi \\ 0 \end{bmatrix} \quad (3-9)$$

avec :

$$s = \frac{k}{M} \cdot \frac{I_0^2}{g}$$

$$n \in \mathbb{Z}$$

Pratiquement, la solution (3-9) se réduit à une seule position d'équilibre.

3-3 - LINEARISATION DU MODELE MATHEMATIQUE DU PROCÉDE [13]

La stabilité de la position d'équilibre de ce procédé (avec $n = 0$) peut s'étudier à partir du système linéarisé, obtenue par approximation du premier ordre de LYAPUNOV. Pour cela, le développement de TAYLOR de la fonction $f(x,u)$ autour du point d'équilibre (x^e, u^e) est utilisée. La fonction $f(x,u)$ possède au voisinage du point (x^e, u^e) des dérivées partielles continues. Par conséquent,

$$f(x,u) = f(x^e, u^e) + \left. \frac{\partial f(x,u)}{\partial x} \right|_{\substack{x=x^e \\ u=u^e}} (x-x^e) + \left. \frac{\partial f(x,u)}{\partial u} \right|_{\substack{x=x^e \\ u=u^e}} (u-u^e) + \theta(x,u)$$

avec $f(x^e, u^e) = 0$.

Le système linéarisé est alors :

$$\dot{\delta x}_i = \sum_{j=1}^4 \left. \frac{\partial f_i(x,u)}{\partial x_j} \right|_{\substack{x=x^e \\ u=u^e}} \delta x_j + \sum_{j=1}^2 \left. \frac{\partial f_i(x,u)}{\partial u_j} \right|_{\substack{x=x^e \\ u=u^e}} \delta u_j$$

pour $i = 1, 2, 3, 4$.

Ces équations peuvent être écrites sous forme matricielle :

$$\dot{\delta x} = A \delta x + B \delta u$$

où Les valeurs propres sont :

$$A = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_4} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f_4}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f_4}{\partial x_4} \end{bmatrix} ; B = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial u_1} & \frac{\partial f_1}{\partial u_2} \\ \vdots & \vdots \\ \frac{\partial f_4}{\partial u_1} & \frac{\partial f_4}{\partial u_2} \end{bmatrix}$$

Le système linéaire (10-11) a deux pôles (λ_2, λ_4) et deux zéros (λ_1, λ_3) . Par $\delta x(t) = x(t) - x^e$ et $\delta u(t) = u(t) - u^e$ le modèle du

Le comportement de la sortie du système autour du point d'équilibre est caractérisé par le système suivant :

Pour stabiliser $y(t) = C \delta x(t)$ autour de ce point d'équilibre, la méthode du retour d'état est utilisée. Pour cela, le système $\begin{bmatrix} 1 & 0 & L & 0 \\ 1 & 0 & -L & 0 \end{bmatrix}$ doit être complètement contrôlable.

Ainsi, au voisinage du point d'équilibre, l'évolution du processus est décrit par le système linéaire suivant :

$$\begin{cases} \dot{\delta x} = A \delta x + B \delta u & \text{équation d'état} \end{cases} \quad (3-10)$$

$$\begin{cases} y = C \delta x & \text{équation de sortie} \end{cases} \quad (3-11)$$

avec

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ \frac{k \cdot I_0^2}{M \cdot s} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \frac{k \cdot L I_0^2}{J \cdot s} & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -\frac{k I_0}{M \cdot s} & -\frac{k I_0}{M \cdot s} \\ 0 & 0 \\ -\frac{k L I_0}{J \cdot s} & \frac{k L I_0}{J \cdot s} \end{bmatrix}$$

■ Stabilité : La stabilité locale du procédé dépend des racines de l'équation caractéristique de la matrice A .

Le polynôme caractéristique est donné par :

$$\Delta(\lambda) = \|\lambda \cdot I_4 - A\| = \left[\lambda^2 - \frac{k I_0^2}{M \cdot s} \right] \cdot \left[\lambda^2 - \frac{k L^2 I_0^2}{J \cdot s} \right]$$

Les valeurs propres sont :

$$\lambda_1 = -\frac{\sqrt{k} I_0}{\sqrt{M} s}; \quad \lambda_2 = \frac{\sqrt{k} I_0}{\sqrt{M} s}$$

$$\lambda_3 = -\sqrt{\frac{k}{J}} \frac{L I_0}{s}; \quad \lambda_4 = \sqrt{\frac{k}{J}} \frac{L I_0}{s}$$

Le système linéaire (10-11) a deux pôles (λ_2, λ_4) strictement positifs. Par conséquent, le modèle du procédé est un système non-linéaire multi-variable avec un point d'équilibre instable.

Un choix convenable de K permet d'améliorer la stabilité et les propriétés dynamiques du processus. Ainsi, la commande par retour d'état modifie le comportement dynamique du système bouclé sans toutefois modifier l'ordre du système.

■ CONTROLABILITE: L'état du système décrit par l'équation (3-10) est complètement contrôlable, en effet :

la matrice K se calcule à partir de la représentation (A, B)

■ Choix des pôles de contrôle: Comme on l'a souligné dans le chapitre précédent, le choix des pôles

$$\text{Rang} \begin{bmatrix} B & AB & A^2B & A^3B \end{bmatrix} = 4$$

■ OBSERVABILITE: Pour pouvoir appliquer la commande par retour d'état, il faut que tous les états soient observables.

le portissement dans le régime transitoire et la précision dans le régime permanent.

$$\text{Rang} \begin{bmatrix} C & CA & CA^2 & CA^3 \end{bmatrix}^T = 4$$

Ainsi, les états de inaccessible directement par la sortie du système peuvent être estimés par un observateur d'état.

3-4 COMMANDE ANALOGIQUE PAR RETOUR D'ETAT [17]

3-4-1 Placement de pôles stables: Le principe de la méthode consiste à utiliser une loi de commande de la forme :

$$\delta u(t) = K \delta x(t) \quad (3-12)$$

où K est la matrice de contre-réaction de dimension (2x4).

Le système bouclé par retour d'état admet la représentation suivante :

$$\dot{\delta x}(t) = [A + BK] \delta x(t)$$

Comme au chapitre précédent, la commande par retour d'état fixe le comportement dynamique du système ainsi bouclé est donc fixé par le polynôme caractéristique :

$$\Delta_c(\lambda) = \det \lambda I_4 - (A + BK)$$

Un choix convenable de \mathbb{K} permet d'améliorer la stabilité et les propriétés dynamiques du processus. Ainsi, la commande par retour d'état modifie le comportement dynamique du système bouclé sans toutefois modifier l'ordre du système.

La matrice \mathbb{K} se calcule à partir de la représentation (A, B) du système et de la dynamique souhaitée pour le processus en boucle fermée, celle-ci est fixée par un choix convenable des pôles à placer par retour d'état.

■ Choix des pôles de contrôle : Comme on l'a souligné dans le chapitre précédent, le choix des pôles dominants doit répondre à un certain nombre de spécifications désirées telles que la stabilité, temps de réponse, amortissement dans le régime transitoire et précision dans le régime permanent.

Dans le plan de Laplace, les deux pôles dominants complexes conjugués sont :

$$\lambda_{1,2} = -\xi \cdot \omega_n \mp j \omega_n \sqrt{1 - \xi^2}$$

Pour diminuer le dépassement de l'état $x(t)$ du régime transitoire, qui peut faire éloigner suffisamment le processus de son point d'équilibre, un amortissement optimal de 0.7 est choisi. Quant à la pulsation ω_n , elle dépendra du temps de réponse imposé au régime transitoire. Dans la partie simulation, le temps de réponse sera choisi de manière à obtenir une plus grande région de stabilité.

3-4 -2 Reconstruction du vecteur d'état

Comme au chapitre précédent, la commande par retour d'état d'un système contrôlable nécessite la connaissance du vecteur d'état $\hat{x}(t)$. Par conséquent, un estimateur d'état ou observateur de LUENBERGER [27,28] est ajouté.

L'observateur de LUENBERGER est décrit par l'équation dynamique suivante:

$$\dot{\hat{\delta x}}(t) = \mathbb{A}e \hat{\delta x}(t) + \mathbb{B} \delta u + \mathbb{L} y(t) \quad (3-13)$$

Cette équation peut être déduite de l'équation (A-1-2) de l'annexe-A-1 en posant :

$$\mathbb{A}e = \mathbb{A} - \mathbb{L} \mathbb{C}$$

Pour déterminer la matrice \mathbb{L} , des pôles stable de la matrice $\begin{bmatrix} \mathbb{A} - \mathbb{L} \mathbb{C} \end{bmatrix}$ sont placées suffisamment loin des pôles du système bouclé par retour d'état de telle sorte l'erreur d'estimation $\left[e(t) = \delta x(t) - \hat{\delta x}(t) \right]$ tend asymptotiquement vers zéro.

Fig 3-2 Schéma de principe de la commande

Remarque : l'inconvénient qui peut surgir lors du choix des pôles de l'observateur très loin des pôles du système, est le gain élevé de la matrice \mathbb{L} qui peut amplifier les perturbations de mesures.

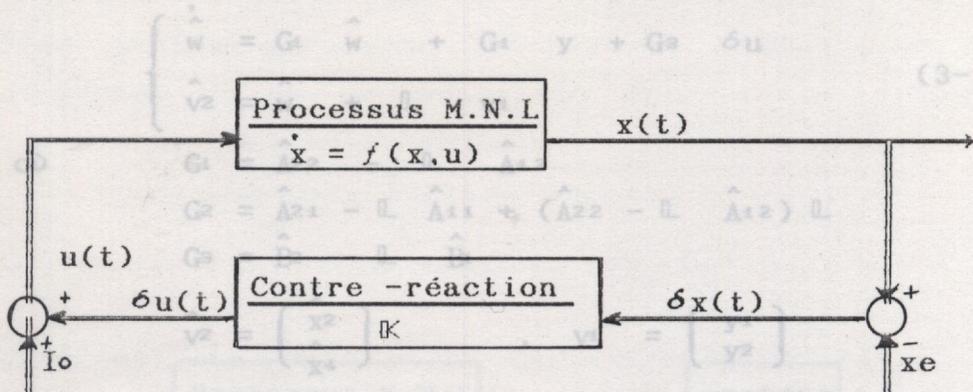
La structure générale du processus multi-variable non-linéaire commandé par retour d'état avec un observateur complet est schématisé à la figure 3-3.

■ Observateur réduit : En tenant compte de l'information fournie par le vecteur de sortie $y(t)$, on peut calculer la position du centre de gravité de la barre $\delta x_1(t)$ et l'angle de rotation $\delta x_3(t)$. En effet, de la combinaison des deux éléments du vecteur $y(t)$, il en découle :

$$\begin{aligned} \delta x_1(t) &= \frac{y_1(t) + y_2(t)}{2} \\ \delta x_3(t) &\approx \frac{y_1(t) - y_2(t)}{2 L} \end{aligned}$$

Dans ce cas, un observateur réduit d'ordre deux peut être utilisé, qui estime les deux grandeurs $\delta x_2(t)$ et $\delta x_4(t)$ non accessibles directement par l'organe de mesure.

Les équations dynamiques de l'observateur réduit sont (Annexe -A-2) :



3-5 SIMULATION ET RESULTATS

La simulation de l'évolution du procédé de la lévitation magnétique d'une barre métallique est effectuée par le logiciel MATLAB [14]. Il faut noter en outre que les différentes matrices de contre-réaction d'état et d'observation ont été calculées en utilisant le logiciel MATLAB [20].

Fig 3-2 Schéma de principe de la commande du procédé non-linéaire par retour d'état

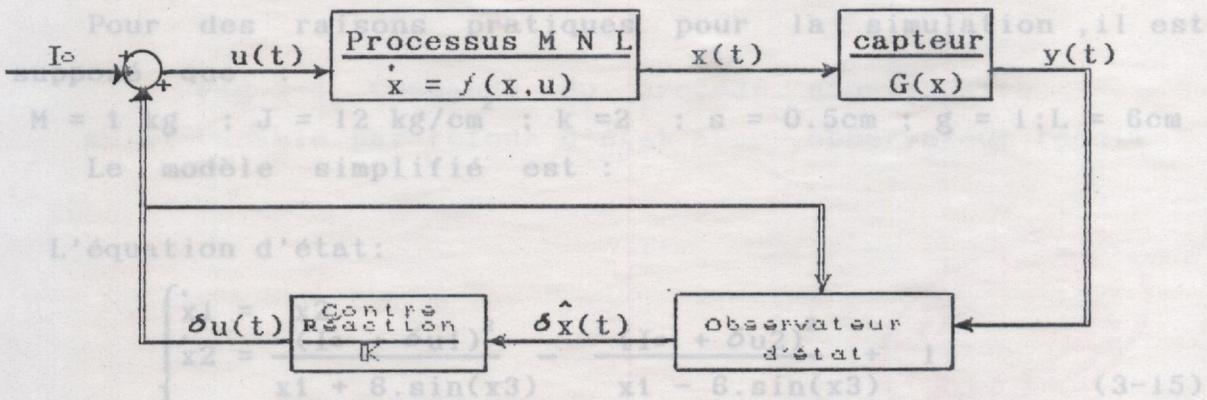


Fig.3-3 Commande par retour d'état avec observateur d'état complet

L'équation de sortie :

$$\begin{cases} y_1(t) = x_1(t) - s + 6 \cdot \sin(x_3) \\ y_2(t) = x_1(t) - s - 6 \cdot \sin(x_2) \end{cases} \quad (3-16)$$

Les équations dynamiques de l'observateur réduit sont (Annexe -A-2) :

$$\begin{cases} \dot{\hat{w}} = G_1 \hat{w} + G_2 y + G_3 \delta u \\ \dot{\hat{v}_2} = \hat{w} + \mathbb{L} v_1 \end{cases} \quad (3-14)$$

où

$$\begin{aligned} G_1 &= \hat{A}_{22} - \mathbb{L} \hat{A}_{12} \\ G_2 &= \hat{A}_{21} - \mathbb{L} \hat{A}_{11} + (\hat{A}_{22} - \mathbb{L} \hat{A}_{12}) \mathbb{L} \\ G_3 &= \hat{B}_2 - \mathbb{L} \hat{B}_1 \end{aligned}$$

$$\hat{v}_2 = \begin{bmatrix} \hat{x}_2 \\ \hat{x}_4 \end{bmatrix}, \quad v_1 = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}$$

3-5 SIMULATION ET RESULTATS

La simulation de l'évolution du procédé de la lévitation magnétique d'une barre métallique est effectuée par le logiciel SIMULINK [14]. Il faut noter en outre que les différentes matrices de contre-réaction d'état et d'observation ont été calculées en utilisant le logiciel MATLAB [20].

Pour des raisons pratiques pour la simulation, il est supposé que :

$$M = 1 \text{ kg} ; J = 12 \text{ kg/cm}^2 ; k = 2 ; s = 0.5 \text{ cm} ; g = 1 ; L = 6 \text{ cm}$$

Le modèle simplifié est :

L'équation d'état:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = \frac{-(I_0 + \delta u_1)^2}{x_1 + 6 \cdot \sin(x_3)} - \frac{(I_0 + \delta u_2)^2}{x_1 - 6 \cdot \sin(x_3)} + 1 \\ \dot{x}_3 = x_4 \\ \dot{x}_4 = -0.5 \frac{(I_0 + \delta u_1)^2 \cdot \cos(x_3)}{x_1 + 6 \cdot \sin(x_3)} + 0.5 \frac{(I_0 + \delta u_2)^2 \cdot \cos(x_3)}{x_1 - 6 \cdot \sin(x_3)} \end{cases} \quad (3-15)$$

L'équation de sortie :

$$\begin{cases} y_1(t) = x_1(t) - s + 6 \cdot \sin(x_3) \\ y_2(t) = x_1(t) - s - 6 \cdot \sin(x_3) \end{cases} \quad (3-16)$$

* Commande par retour d'état

Il a été souligné dans (§ 3-4) que le choix judicieux des pôles stables à placer par retour d'état, aboutit à une plus grande région de stabilité. Pour cette raison, les pôles suivants ont été choisis :

$$\sigma(A + BK) = \left\{ -3 \pm j3 ; -1 \pm j1 \right\}$$

avec un amortissement optimal de 0.7

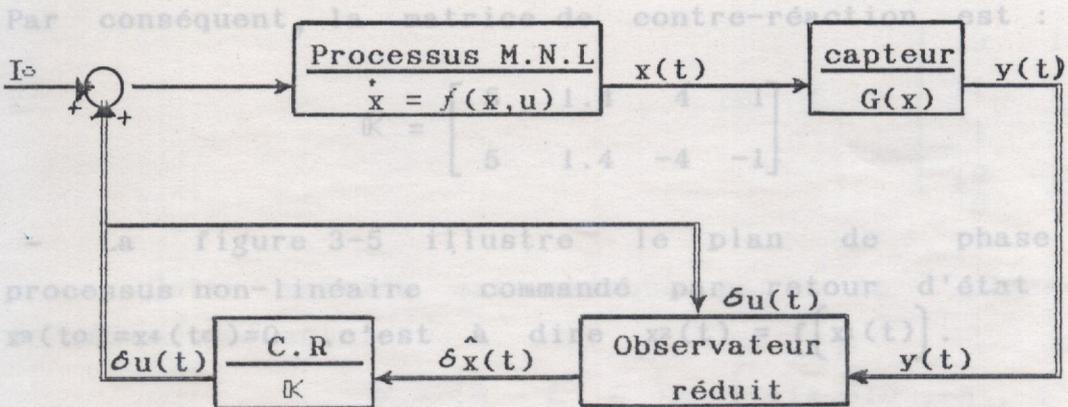
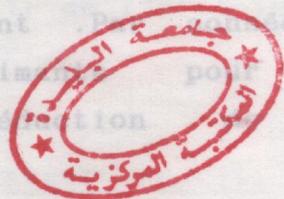


Fig 3-4 Commande du procédé non-linéaire multi-variable par retour d'état avec observateur réduit



Il faut noter que :
 - le processus non-linéaire bouclé par retour d'état présente deux points singuliers.
 - une diminution appréciable de la région de stabilité par rapport au cas de la lévitation magnétique avec un seul électro-aimant. Par conséquent, l'emploi de deux ou plusieurs électro-aimants pour la lévitation magnétique engendre une réduction de la région de stabilité.

La figure 3-8 illustre le comportement de l'état $x(t)$ du processus (3-15) commandé par retour d'état avec l'état initial :

$$x(1^0) = \begin{bmatrix} 0.89 \\ 0 \\ 0.02 \\ 0 \end{bmatrix}$$

■ Commande par retour d'état

Il a été souligné dans (§ 3-4) que le choix judicieux des pôles stables à placer par retour d'état, aboutit à une plus grande région de stabilité. Pour cette raison, les pôles suivants ont été choisis.

$$\sigma(A + BK) = \left\{ -3 \pm j 3 ; -1 \pm j 1 \right\}$$

avec un amortissement optimal de 0.7

Par conséquent, la matrice de contre-réaction est :

$$K = \begin{bmatrix} 5 & 1.4 & 4 & 1 \\ 5 & 1.4 & -4 & -1 \end{bmatrix}$$

La figure 3-5 illustre le plan de phase du processus non-linéaire commandé par retour d'état avec des $x_3(t_0) = x_4(t_0) = 0$, c'est à dire $x_2(t) = f(x_1(t))$.

Il faut noter que :

- le processus non-linéaire bouclé par retour d'état présente deux point singuliers.

- une diminution appréciable de la région de stabilité par rapport au cas de la lévitation magnétique avec un seul électro-aimant. Par conséquent, l'emploi de deux ou plusieurs électro-aimants pour la lévitation magnétique engendre une réduction de la région de stabilité.

La figure 3-6 illustre le comportement de l'état $x(t)$ du processus (3-15) commandé par retour d'état avec l'état initial :

$$x(t_0) = \begin{bmatrix} 0.83 \\ 0 \\ 0.02 \\ 0 \end{bmatrix}$$

■ Commande du processus avec observateur complet

L'équation dynamique de l'observateur d'ordre 4 est :

la matrice $\dot{\delta \hat{x}} = A_e \delta \hat{x} + B \delta u + L y(t)$ placement des pôles

suivants :

avec $A_e = A - L C = \begin{bmatrix} -24 & 1 & 0 & 0 \\ -140 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -12 & 1 \\ 0 & 0 & -70 & 0 \end{bmatrix}$ $\{-10, -5\}$

La figure (3-8-a et b) montre l'évolution du vecteur d'état $x(t)$ et de l'estimation de $x^2(t)$ et $x^4(t)$.

Il faut noter que pour maintenir le domaine de stabilité vue précédemment (fig 3-5), l'observateur réduit est initialisé à :

où $L = \begin{bmatrix} 12 & 12 \\ 71 & 71 \\ 1 & -1 \\ \frac{19}{6} & -\frac{19}{6} \end{bmatrix}$

Cette matrice est obtenue par le placement des pôles suivants:

$\sigma = \{A - L C\} = \{-14, -10, -8, -4\}$

Ainsi, l'état initial de l'observateur réduit ou complet

Alors l'équation (3-12) devient :

$\delta u(t) = K \delta \hat{x}(t)$

la région de stabilité de la figure (3-5).

Pour le cas de la figure (3-8), on a posé $z(t_0) = \begin{bmatrix} -2 & 5 \\ 0 & 15 \end{bmatrix}$.
La figure (3-7-a) et (3-7-b) montre l'évolution du vecteur d'état et son estimateur, à partir de l'état initial :

$x(t_0) = \begin{bmatrix} 0.35 \\ 0.1028 \\ 0 \end{bmatrix}$

3-6-1- Discretisation des équations dynamiques du procédé

■ Commande du processus avec observateur réduit:

par : L'équation dynamique de l'observateur réduit (3-14) est:

$\begin{cases} \dot{w}_1 = -7.5 w_1 - 15 w_2 - 49 y_1 - 11.5 y_2 - 2 (\delta u_1 + \delta u_2) \\ \dot{w}_2 = -0.4166 w_1 - 7.5 w_2 - 7.833 y_1 + 2.88 y_2 - \delta u_1 + \delta u_2 \\ \hat{x}^2 = w_1 + 5 y_1 + 2.5 y_2 \\ \hat{x}^4 = w_2 + 0.833 y_1 - 0.461 y_2 \end{cases}$ (3-17)

Le système de la figure 3-9 est commandé par un signal discret interpolé entre des instants d'échantillonnage par un bloqueur d'ordre zéro (B.O.Z) c'est à dire, pour $t \in (kT, (k+1)T)$:

$$\text{où } \mathbb{L} = \begin{bmatrix} 53.9 & 2.5 \\ 0.833 & -0.461 \end{bmatrix}$$

la matrice \mathbb{L} est obtenue par le placement des pôles suivants : $e_i(t) = \delta_{ui}(kT) = \text{constant}$ pour $i:1,2$

$$\sigma = \left[\hat{A}_{22} - \mathbb{L} \hat{A}_{12} \right] = \left\{ -10, -5 \right\}$$

En posant $t_0 = kT$ et $t = (k+1)T$, l'équation (3-17) devient :

La figure (3-8-a et b) montre l'évolution du vecteur d'état $x(t)$ et de l'estimation de $x^2(t)$ et $x^4(t)$.

Il faut noter que pour maintenir le domaine de stabilité vu précédemment (fig 3-5), l'observateur réduit est initialisé à :

$$z(t_0) = xv(t_0) - \mathbb{L} y(t_0) \quad \text{où} \quad xv(t) = \begin{bmatrix} \hat{x}^2 \\ \hat{x}^4 \end{bmatrix}$$

Ainsi, l'état initial de l'observateur réduit ou complet doit être choisi à l'intérieur de la région de stabilité de la figure (3-5).

Pour le cas de la figure (3-8), on a posé $z(t_0) = \begin{bmatrix} -2.5 \\ 0.15 \end{bmatrix}$.

3-6 -COMMANDE NUMERIQUE PAR RETOUR D'ETAT [15]

3-6-1- Discretisation des équations dynamiques du procédé

La solution de l'équation d'état (3-13) est donnée par :

$$\delta x(t) = \phi(t-t_0) \delta x(t_0) + \int_{t_0}^t \phi(t-\tau) \mathbb{B} u(\tau) d\tau \quad (3-17)$$

où t_0 : instant initial

$\phi(t-t_0)$: matrice de transition d'état du système linéaire

Le système de la figure 3-9 est commandé par un signal discret interpolé entre les instants d'échantillonnage par un bloqueur d'ordre zéro (B.O.Z), c'est à dire, pour $kT \leq t < (k+1)T$;

$$e_i(t) = \delta u_i(kT) = \text{constant} \quad \text{pour } i:1,2$$

En posant $t_0 = kT$ et $t=(k+1)T$, l'équation (3-17) devient:

$$\delta x[(k+1)T] = \phi(T) \delta x(kT) + \int_{kT}^{(k+1)T} \phi[(k+1)T-\tau] B \, d\tau \delta u(kT)$$

Le système linéaire est représenté par l'équation discrète:

$$\delta x(k+1) = \phi(T) \delta x(k) + \theta(T) u(k) \quad (3-18)$$

$$\text{ou} \quad \theta(T) = \int_0^T \phi(T-\tau) \, d\tau \cdot B$$

L'équation de sortie discrète est :

$$y(k) = C \lambda \delta x(k) \quad (3-19)$$

Pour le système étudié (3-17), $\phi(T)$ et $\theta(T)$ sont données par :

$$\phi(T) = \begin{bmatrix} \text{chaT} & \frac{1}{a} \cdot \text{shaT} & 0 & 0 \\ a \cdot \text{shaT} & \text{chaT} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \text{chbT} & \frac{1}{b} \text{shbT} \\ 0 & 0 & b \cdot \text{shbT} & \text{chbT} \end{bmatrix}$$

$$\theta(T) = \begin{bmatrix} \frac{-J s}{M L^2 I_0} (\text{ch}(aT) - 1) & \frac{-J s}{M L^2 I_0} (\text{ch}(aT) - 1) \\ \sqrt{\frac{k}{M}} \text{sh}(aT) & \sqrt{\frac{k}{M}} \text{sh}(aT) \\ -\frac{s}{L I_0} (\text{ch}(bT) - 1) & \frac{s}{L I_0} (\text{ch}(bT) - 1) \\ -\frac{k L}{J} \sqrt{\frac{M}{3 k}} \text{sh}(bT) & \frac{k L}{J} \sqrt{\frac{M}{3 k}} \text{sh}(bT) \end{bmatrix}$$

avec $a^2 = \frac{k I_0^2}{M s^2}$ $b^2 = \frac{k L^2 I_0^2}{J s^2}$

■ Stabilité du système linéaire discret

Les valeurs propres du système (3-18) sont la solution de l'équation caractéristique :

$$\text{Det} \parallel \lambda \cdot I_4 - \phi(T) \parallel = 0$$

ayant pour racines

$$\begin{bmatrix} \lambda_1 = e^{aT} & \lambda_2 = e^{-aT} \\ \lambda_3 = e^{bT} & \lambda_4 = e^{-bT} \end{bmatrix}$$

Deux valeurs propres (λ_1 et λ_2) sont à l'extérieur du cercle unitaire, et cela quelle que soit la cadence d'échantillonnage ($T \neq 0$). Donc le système discret (3-18) est instable. Ce résultat est attendu, vu que le système linéaire continu est instable.

Pour stabiliser le système discret (3-18) c'est à dire le processus non-linéaire (3-7) autour du point d'équilibre x_e , on doit changer la dynamique du processus par un placement de pôles stables par retour d'état discret. Pour y parvenir, il faut que le système soit contrôlable et observable.

■ CONTROLABILITE: la matrice de contrôlabilité est donnée par :

$$S = \begin{bmatrix} \theta(T) & \phi(T)\theta(T) & \phi(T)^2\theta(T) & \phi(T)^3\theta(T) \end{bmatrix}$$

dont le rang égal à quatre .Donc le système discret (3-18) est complètement contrôlable, les valeurs propres du système bouclé peuvent être fixées arbitrairement par le choix adéquat de la matrice K .
C'est à dire :

$$\text{Fig. } \delta u(kT) = K \delta x(kT)$$

■ OBSERVABILITE: Comme souligné précédemment , pour pouvoir appliquer la commande par retour d'état , il faut que le système (3-18 ,3-19) soit observable .
En effet ,le rang de la matrice d'observabilité est de quatre .

$$\text{Rang } \Gamma = \text{Rang} \begin{bmatrix} C & C\phi(T) & C\phi^2(T) & C\phi^3(T) \end{bmatrix}^T = 4$$

■ Commande discrète avec observateur complet:

L'équation aux différences régissant la dynamique de l'observateur complet s'écrit (Annexe B-1):

$$\begin{cases} \delta x[(k+1)T] = \phi(T) \delta \hat{x}(kT) + \theta(T) \delta u(kT) + \mathbb{L} \left[y(kT) - \hat{y}(kT) \right] \\ \hat{y}(k) = C \cdot \delta x(k) \\ \text{où } \delta u(k) = K \delta \hat{x}(k) \end{cases}$$

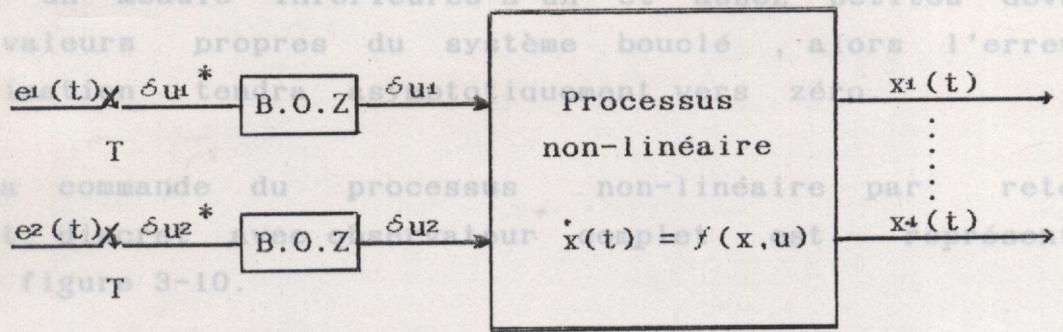
Fig.3-10 Commande par retour d'état

L'évolution dynamique de l'erreur d'estimation (Annexe B-1) est donnée par :

$$e[(k+1)T] = \left[\phi(T) - \mathbb{L} C \right] e(kT)$$

Par conséquent, si la matrice L est choisie telle que toutes les valeurs propres de la matrice $[\phi(T) - L C]$ aient un module inférieure à un et assez petites devant les valeurs propres du système bouclé, alors l'erreur d'estimation des états converge vers zéro.

la commande du processus non-linéaire par retour d'état est à la figure 3-10.



* Commande du processus avec observateur réduit

Comme souligné dans Fig.-3-9 partie (§ 3-4-2), il est fondamental d'utiliser toute l'information disponible pour reconstruire le vecteur d'état. Or, la position $\delta x(t)$ et l'angle de déviation $\delta \dot{x}(t)$ peuvent être calculés en combinant les deux sorties du système, c'est à dire :

$$\delta x_1(k) = \frac{y_1(k) + y_2(k)}{2}, \quad \delta \dot{x}_1(k) = \frac{y_1(k) - y_2(k)}{2L}$$

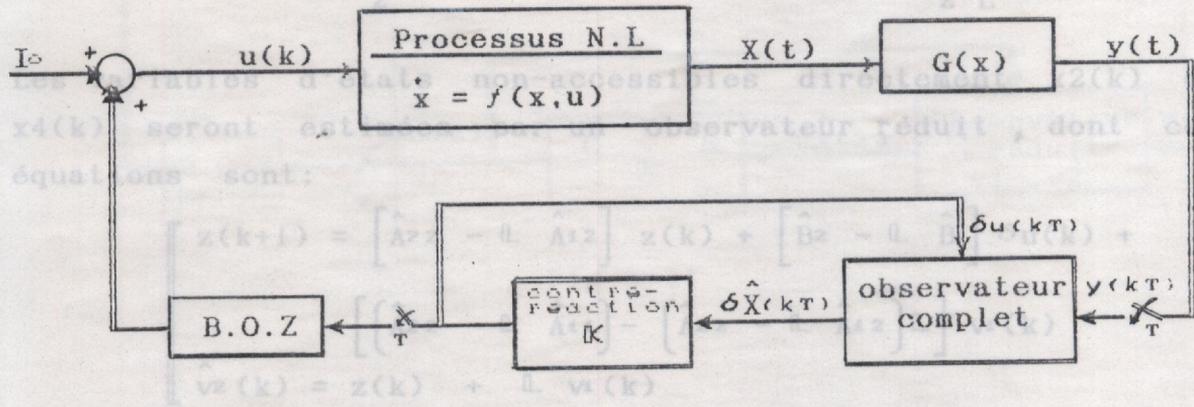


Fig.3-10 Commande par retour d'état

avec $w(k) = \begin{bmatrix} y_1(k) \\ y_2(k) \end{bmatrix}$ avec observateur complet

La figure 3-11 représente le schéma de principe de la commande discrète du processus de lévitation non-linéaire avec observateur réduit.

Par conséquent, si la matrice \mathbb{L} est choisie telles que toutes les valeurs propres de la matrice $\left[\phi(T) - \mathbb{L} \mathbb{C} \right]$ aient un module inférieures à un et assez petites devant les valeurs propres du système bouclé, alors l'erreur d'estimation tendra asymptotiquement vers zéro.

La commande du processus non-linéaire par retour d'état discret avec observateur complet est représentée à la figure 3-10.

■ Commande du processus avec observateur réduit

Comme souligné dans la partie (§ 3-4-2), il est fondamental d'utiliser toute l'information disponible pour reconstruire le vecteur d'état. Or, la position $\delta x_1(t)$ et l'angle de déviation $\delta x_3(t)$ peuvent être calculés en combinant les deux sorties du système, c'est à dire,

$$\delta x_1(k) = \frac{y_1(k) + y_2(k)}{2}, \quad \delta x_3(k) \approx \frac{y_1(k) - y_2(k)}{2L}$$

Les variables d'états non-accessibles directement $x_2(k)$ et $x_4(k)$ seront estimées par un observateur réduit, dont ces équations sont:

$$\begin{cases} z(k+1) = \left[\hat{A}_{22} - \mathbb{L} \hat{A}_{12} \right] z(k) + \left[\hat{B}_2 - \mathbb{L} \hat{B}_1 \right] \delta u(k) + \\ \left[\left(\hat{A}_{22} - \mathbb{L} \hat{A}_{12} \right) - \left(\hat{A}_{22} - \mathbb{L} \hat{A}_{12} \right) \mathbb{L} \right] v_1(k) \\ \hat{v}_2(k) = z(k) + \mathbb{L} v_1(k) \end{cases}$$

$$\text{avec } v_1(k) = \begin{bmatrix} y_1(k) \\ y_2(k) \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad \hat{v}_2(k) = \begin{bmatrix} \hat{x}_2(k) \\ \hat{x}_4(k) \end{bmatrix}$$

La figure 3-11 représente le schéma de principe de la commande discrète du processus de lévitation non-linéaire avec observateur réduit.

3-7 - SIMULATION ET RESULTATS

Pour le cas du système (3-15), les matrices d'état linéaire discrète sont :

$$\phi(T) = \begin{bmatrix} \text{ch}\sqrt{2} T & \frac{1}{\sqrt{2}} \text{sh}\sqrt{2} T & 0 & 0 \\ \sqrt{2} \text{sh}\sqrt{2} T & \text{ch}\sqrt{2} T & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \text{ch}\sqrt{6} T & \frac{1}{\sqrt{6}} \text{sh}\sqrt{6} T \\ 0 & 0 & \sqrt{6} \text{sh}\sqrt{6} T & \text{ch}\sqrt{6} T \end{bmatrix}$$

(3-39)

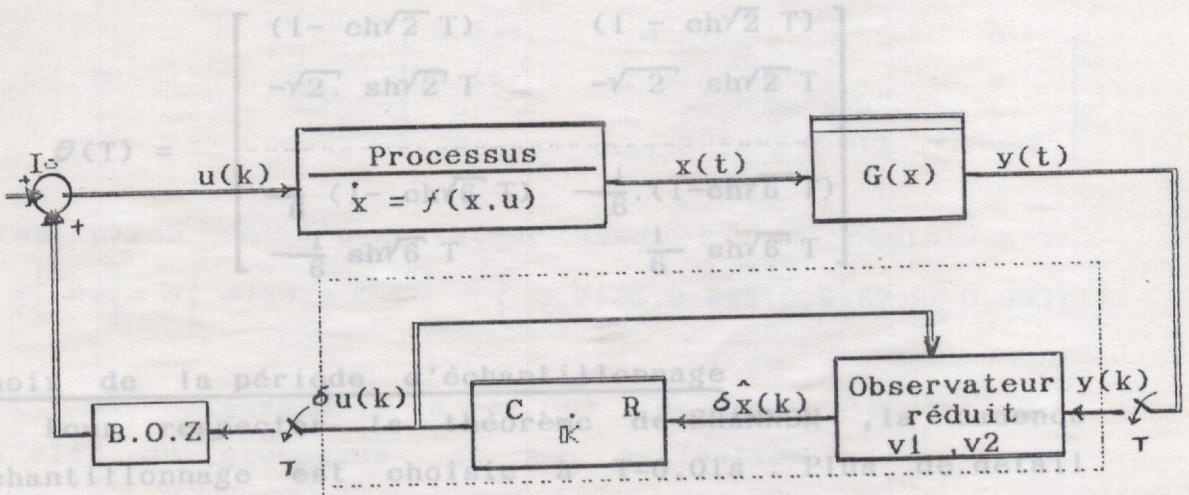


Fig 3-11

Pour les pôles

$$\sigma[\phi(T) + \theta(T) K] = \{ 0.95 \pm j 0.0475 ; 0.98 \pm j 0.019 \}$$

la matrice K est :

$$K = \begin{bmatrix} 12.442 & 2.442 & 4.9 & 2 \\ 12.442 & 2.442 & -4.9 & -2 \end{bmatrix}$$

La figure 3-12 illustre l'état du processus de lévitation contrôlé par retour d'état discret.

3-7 - SIMULATION ET RESULTATS

Pour le cas du système (3-15), les matrices de l'état linéaire discrète sont :

$$\phi(T) = \begin{bmatrix} \text{ch}\sqrt{2} T & \frac{1}{\sqrt{2}} \text{sh}\sqrt{2} T & 0 & 0 \\ \sqrt{2} \text{sh}\sqrt{2} T & \text{ch}\sqrt{2} T & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \text{ch}\sqrt{6} T & \frac{1}{\sqrt{6}} \text{sh}\sqrt{6} T \\ 0 & 0 & \sqrt{6} \text{sh}\sqrt{6} T & \text{ch}\sqrt{6} T \end{bmatrix}$$

(3-39)

et

$$\theta(T) = \begin{bmatrix} (1 - \text{ch}\sqrt{2} T) & (1 - \text{ch}\sqrt{2} T) \\ -\sqrt{2} \text{sh}\sqrt{2} T & -\sqrt{2} \text{sh}\sqrt{2} T \\ \frac{1}{6} (1 - \text{ch}\sqrt{6} T) & -\frac{1}{6} (1 - \text{ch}\sqrt{6} T) \\ -\frac{1}{6} \text{sh}\sqrt{6} T & \frac{1}{6} \text{sh}\sqrt{6} T \end{bmatrix}$$

□ Choix de la période d'échantillonnage

Pour respecter le théorème de SHANNON, la cadence de l'état du processus d'échantillonnage est choisie à $T=0.01s$. Plus de détail sera fourni au chapitre 5 concernant le choix de la période d'échantillonnage.

Pour les pôles

$$\alpha[\phi(T) + \theta(T) K] = \{ 0.95 \pm j 0.0475 ; 0.98 \pm j 0.019 \}$$

la matrice K est :

$$K = \begin{bmatrix} 12.442 & 2.442 & 4.9 & 2 \\ 12.442 & 2.442 & -4.9 & -2 \end{bmatrix}$$

La figure 3-12 illustre l'état du processus de lévitation contrôlé par retour d'état discret.

Les pôles de l'observateur sont :

Pour ce cas, le procédé est initialisé à $x(t_0) = \begin{bmatrix} 0.35 \\ 0 \\ 0.02 \end{bmatrix}$.
 En faisant varier l'état initial $x_1(t_0)$ du processus, il y a lieu de constater que le processus est stable de $x_1(t_0) = 0.34 \text{ cm}$ jusqu'à $x_1(t_0) = 0.86 \text{ cm}$.

■ Commande discrète avec observateur complet

L'équation dynamique de l'observateur complet pour le système discret (3-18, 3-19) est donnée par :

$$\delta x(k+1) = A e \delta x(k) + \hat{e}(T) \delta u(k) + L y(k)$$

où $x(t_0) = 0.4 \text{ cm}$
 $x_2(t_0) = 0.02 \text{ cm}$

$$A e = \begin{bmatrix} 0.597 & 0.01 & 0 & 0 \\ -9.292 & 1.0001 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.808 & 0.01 \\ 0 & 0 & -0.919 & 1.0009 \end{bmatrix}$$

Les pôles de l'observateur complet sont choisis à :

$$\sigma[A e] = \sigma[\phi(T) - L C] = \left\{ 0.9135; 0.895; 0.8187 \pm j 0.0037 \right\}$$

La figure 3-13 (a et b) donne l'évolution de l'état du processus et son estimation.

■ Commande discrète avec observateur réduit

L'équation dynamique de l'observateur réduit est :

$$\begin{cases} z(k+1) = \begin{bmatrix} 0.7444 & -0.4458 \\ -0.0123 & 0.7445 \end{bmatrix} z(k) + \begin{bmatrix} -5.4330 & -1.6340 \\ -0.9040 & 0.2743 \end{bmatrix} v_1(k) \\ \quad + \begin{bmatrix} -0.0152 & 9.0700 \\ -0.0086 & 0.0088 \end{bmatrix} u(k) \\ \hat{v}_2(k) = \begin{bmatrix} \hat{x}_2 \\ \hat{x}_4 \end{bmatrix} = z(k) + \begin{bmatrix} -16.50 & -9.07 \\ -2.75 & 1.51 \end{bmatrix} y(k) \end{cases}$$

Les pôles de l'observateur sont:

$$\sigma \left[\hat{A}_{22} - L \hat{A}_{12} \right] = \{ 0.67 ; 0.8187 \}$$

où

$$L = \begin{bmatrix} -16.5 & -9.07 \\ -2.75 & 1.513 \end{bmatrix}$$

La figure 3-14 montre l'évolution du vecteur d'état du processus non-linéaire et les variables ($\hat{x}_2(t)$ et $\hat{x}_4(t)$) estimées par l'observateur réduit.

Ces courbes sont obtenues pour les valeurs initiales suivantes :

$$x_1(t_0) = 0.4 \text{ cm}$$

$$x_3(t_0) = 0.02 \text{ rd}$$

$$x_2(t_0) = 0$$

$$x_4(t_0) = 0$$

3-8 - CONCLUSION

Les simulations effectuées sur le processus non-linéaire commandé par retour d'état ont permis de représenter le domaine de l'espace d'état où le système est stable.

Tableau 3.1

Par ailleurs, moyennant un choix approprié des pôles de contrôle à placer par retour d'état avec des observateurs (complet et réduit), nous avons constaté une amélioration notable de la région de stabilité (voir tableau 3-1).

Enfin, il faut noter que la région de stabilité du processus multi-variable est moins vaste que celle du processus mono-variable vue au chapitre précédent.

		Pôles placés	Domaine de stabilité
Commande Analogique	Retour d'état simple	$-3 \pm j3$ $-1 \pm j$	$x_1: .32\text{cm} \rightarrow .88\text{cm}$ $x_3: -0.07\text{rd} \rightarrow 0.07\text{rd}$
	Retour d'état + Obser. Complet	$-3 \pm j3$ $-1 \pm j1$ $-14, -10, -8, -4$	$x_1: .25\text{cm} \rightarrow .95\text{cm}$ $x_3(t_0) = 0.02\text{rd}$ $x_1(t_0) = 0.4\text{cm}$ $x_3: -.12\text{rd} \rightarrow .12\text{rd}$
	Retour d'état + Obser. Réduit	$-3 \pm j3$ $-1 \pm j1$ $-10, -5$	$x_1: .15\text{cm} \rightarrow 1\text{cm}$ $x_3(t_0) = 0.02\text{rd}$ $x_1(t_0) = 0.04\text{cm}$ $x_3: -.3\text{rd} \rightarrow 0.3\text{rd}$
Commande Numérique	Retour d'état simple	$0.95 \pm j0.0475$ $0.98 \pm j0.019$	$x_1: 0.94 \rightarrow 0.86\text{cm}$ $x_3: -0.07 \rightarrow 0.07\text{rd}$
	Retour d'état + Obser. Complet	$0.97 \pm j0.029$ $0.99 \pm j0.0099$ $0.9195, 0.895$ $0.8187 \pm j0.097$	$x_3(t_0) = 0.02\text{rd}$ $x_1: 0.92 \rightarrow 0.84\text{cm}$ $x_1(t_0) = 0.94\text{cm}$ $x_3: -0.1\text{rd} \rightarrow 0.1\text{rd}$
	Retour d'état + obser. Réduit	$0.97 \pm j0.029$ $0.99 \pm j0.0099$ $0.67, 0.8187$	$x_3(t_0) = 0.02\text{rd}$ $x_1: 0.90\text{cm} \rightarrow 0.85\text{cm}$ $x_1(t_0) = 0.92\text{cm}$ $x_3: -0.1\text{rd} \rightarrow 0.1\text{rd}$

Tableau 3.1

Fig. 3-5 Trajectoire dans le plan de phase $x_2 = f(x_1)$
pour $x_3(t_0) = x_4(t_0) = 0$

Position Angulaire X3(t)

Position X1(t)

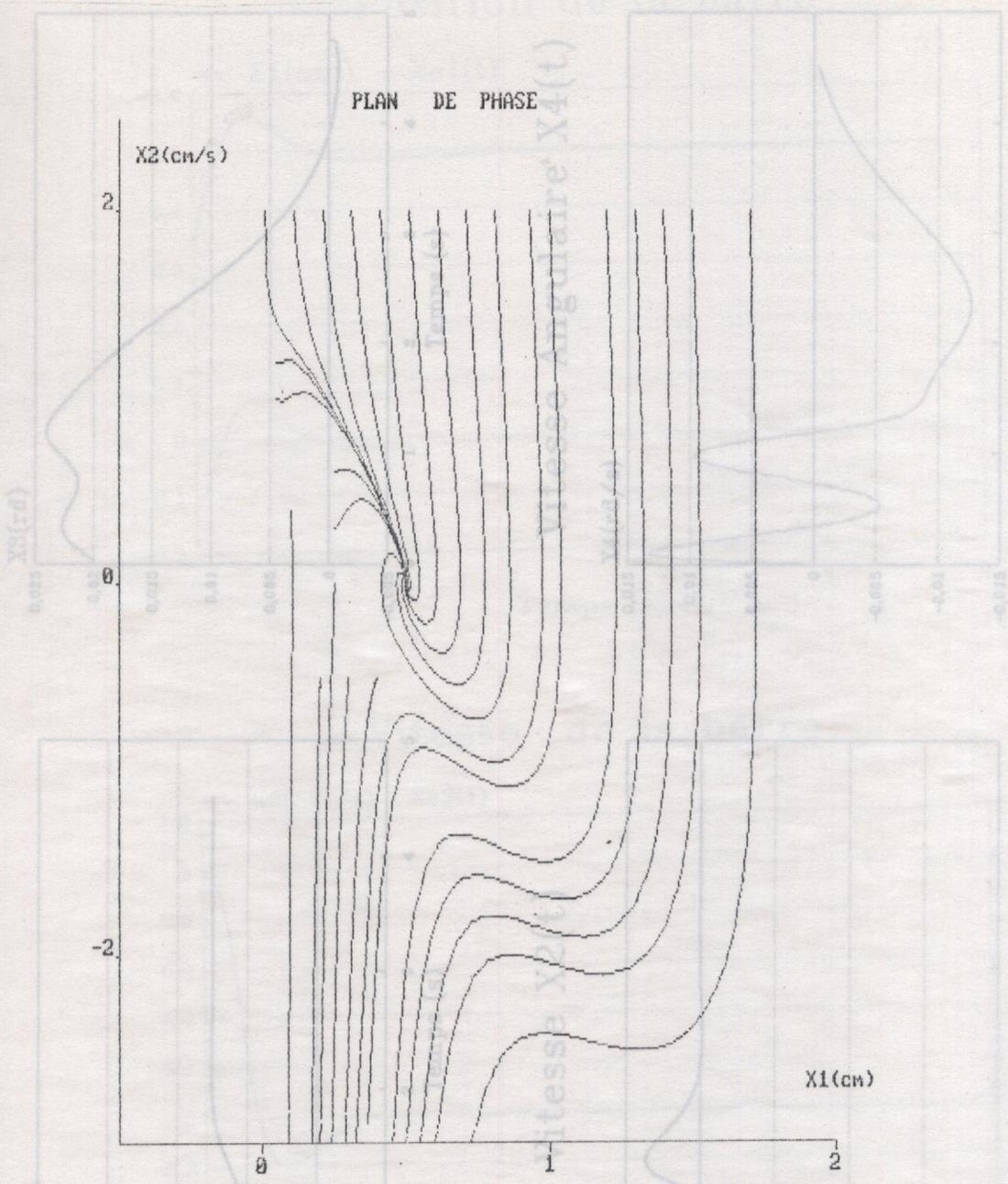
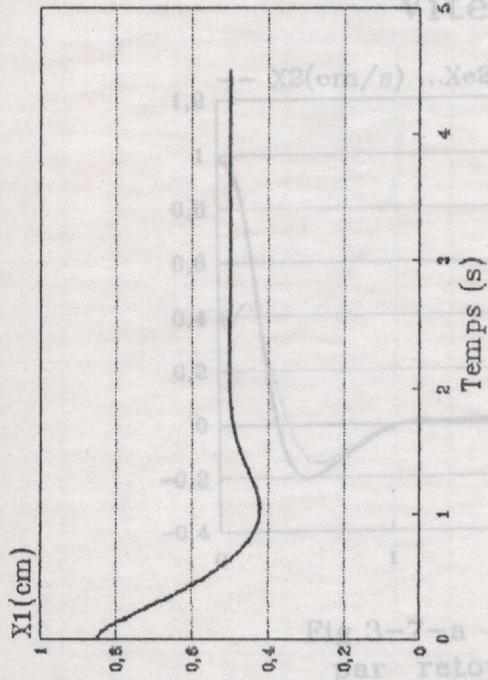


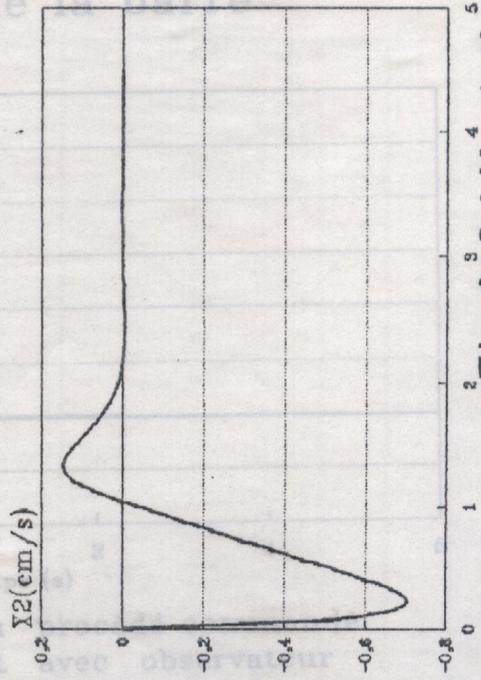
Fig. 3-5 Trajectoire dans le plan de phase $x_2 = f(x_1)$ pour $x_3(t_0) = x_4(t_0) = 0$

Fig 3-6 L'évolution de l'état du procédé

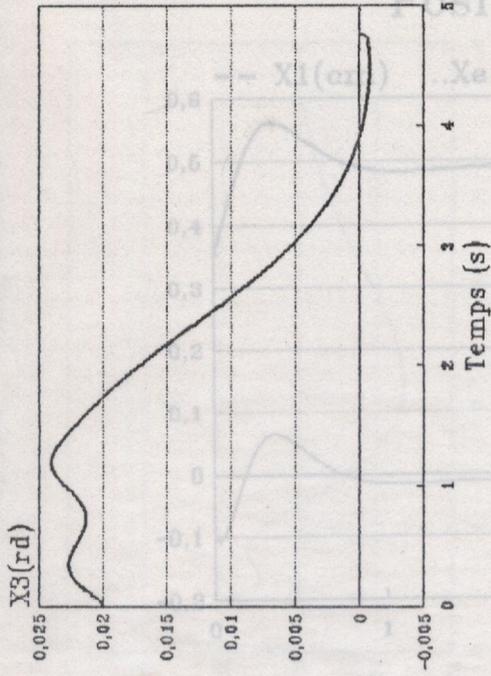
Position $X1(t)$



Vitesse $X2(t)$



Position Angulaire $X3(t)$



Vitesse Angulaire $X4(t)$

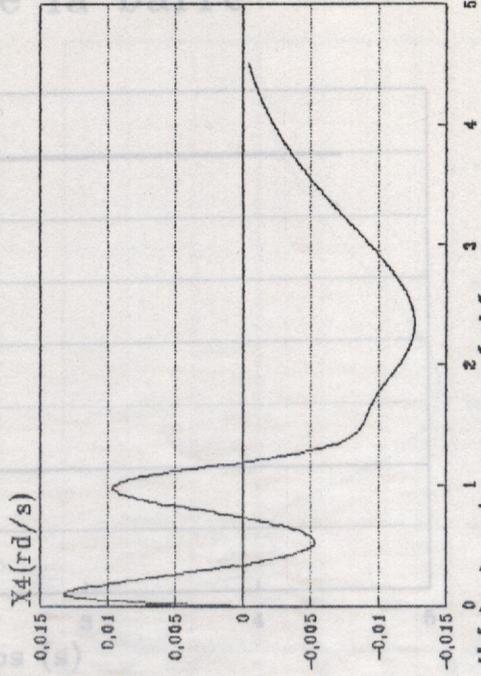
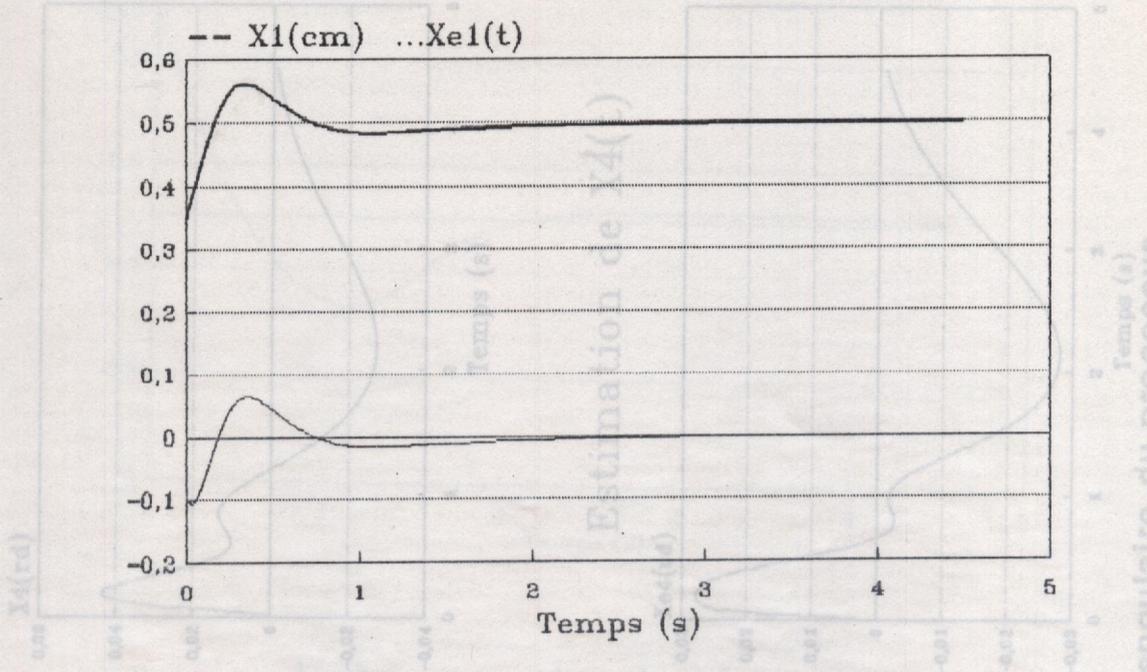


Fig 3-6 L'évolution de l'état du procédé

Position de la barre



Vitesse de la barre

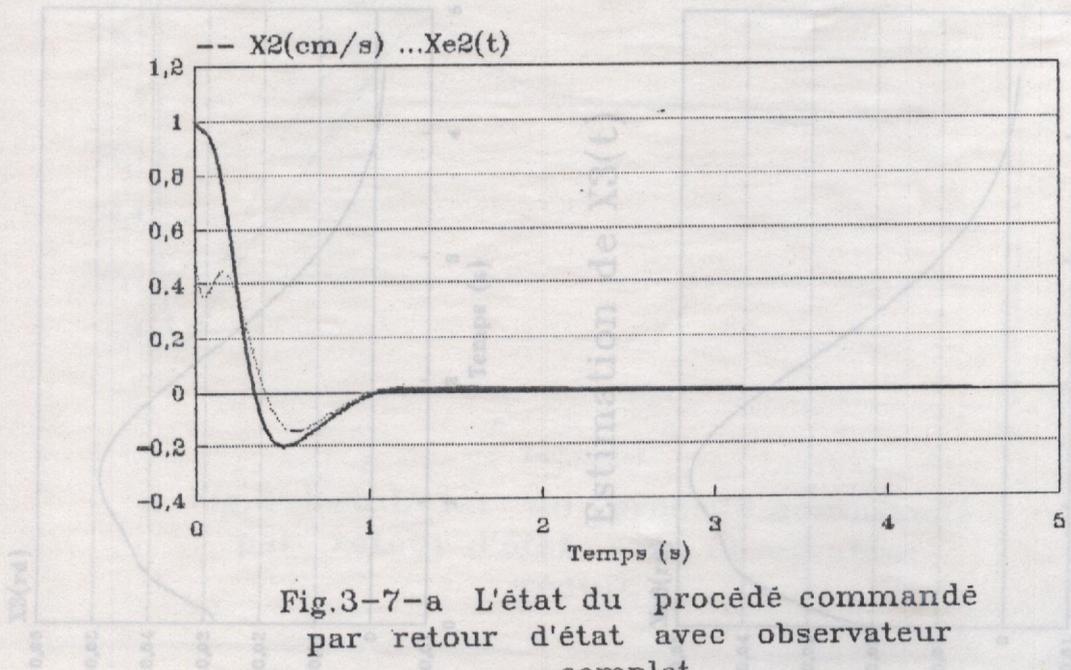
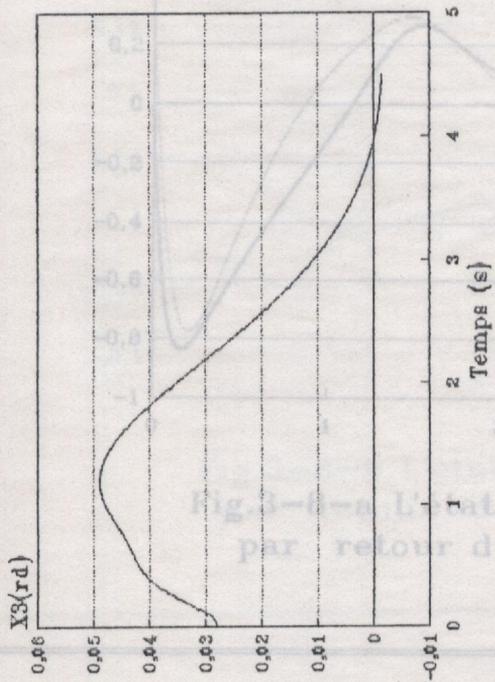


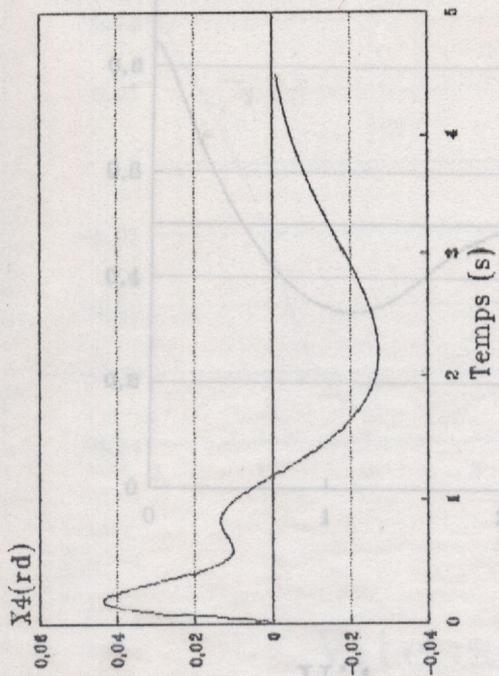
Fig.3-7-a L'état du procédé commandé par retour d'état avec observateur complet.

Fig.3-7-b Position et vitesse angulaire du processus.

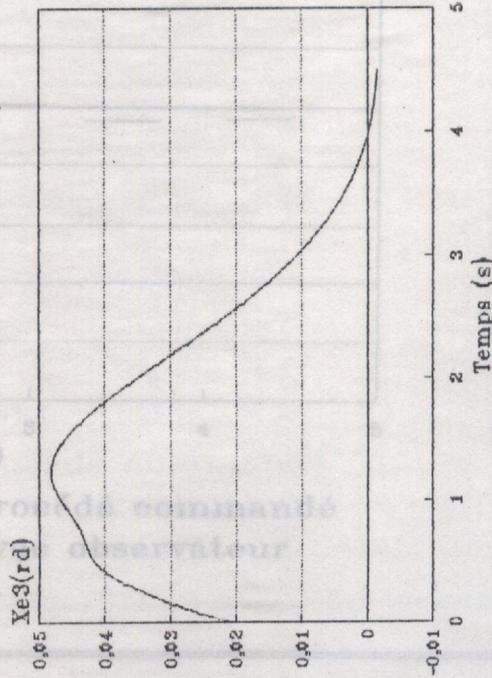
Position Angulaire



Vitesse Angulaire



Estimation de X3(t)



Estimation de X4(t)

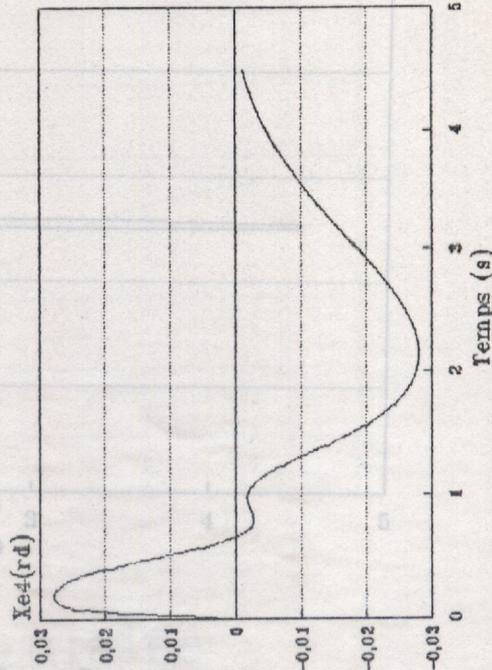
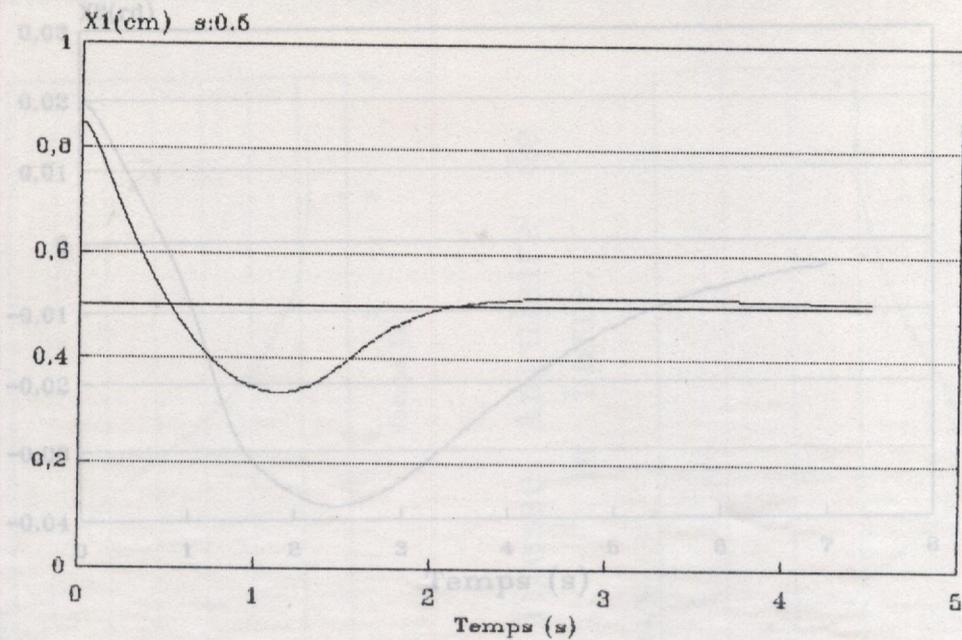


Fig.3-7-b Position et vitesse angulaire du processus.

Position Angulaire

Position de la barre



Vitesse Angulaire

Vitesse de la barre

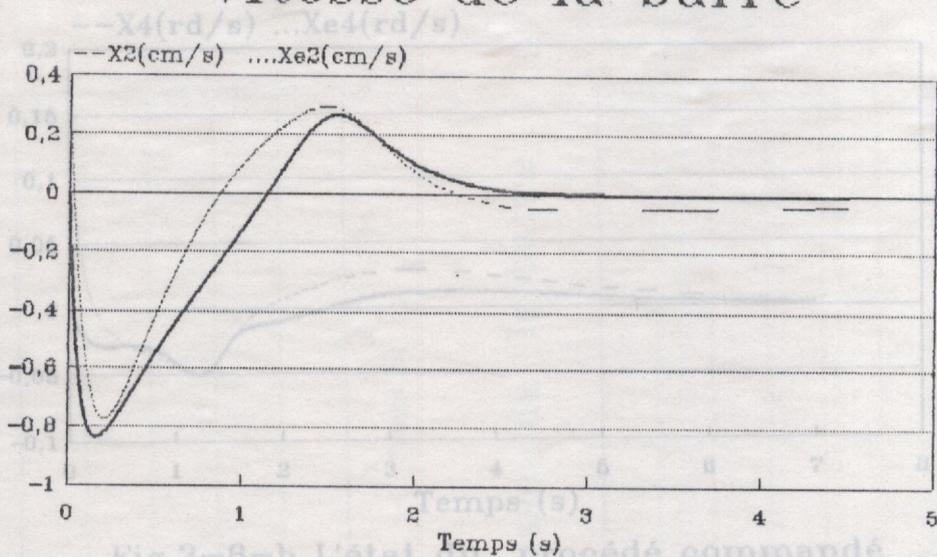
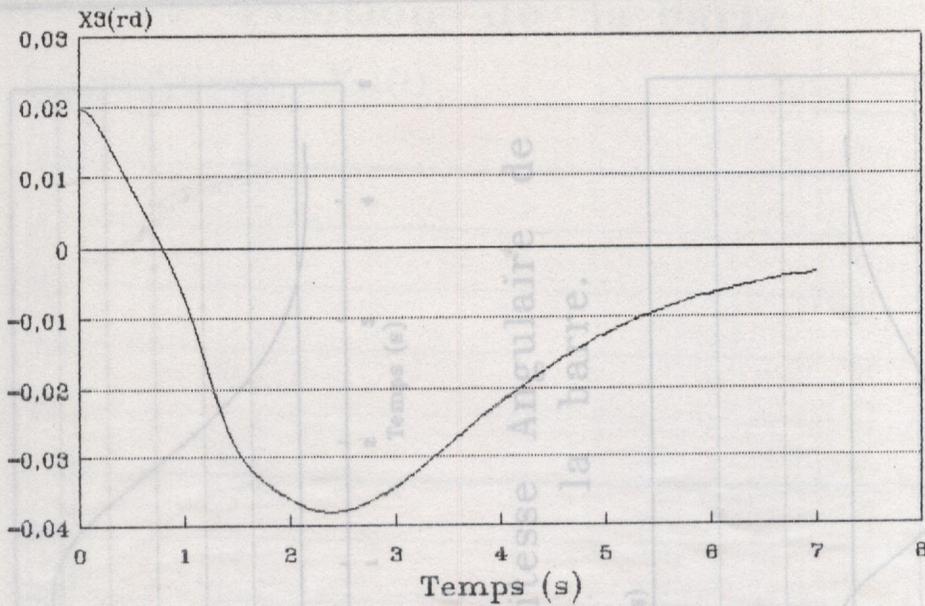


Fig.3-8-a L'état du procédé commandé par retour d'état avec observateur réduit.

Position Angulaire



Vitesse Angulaire

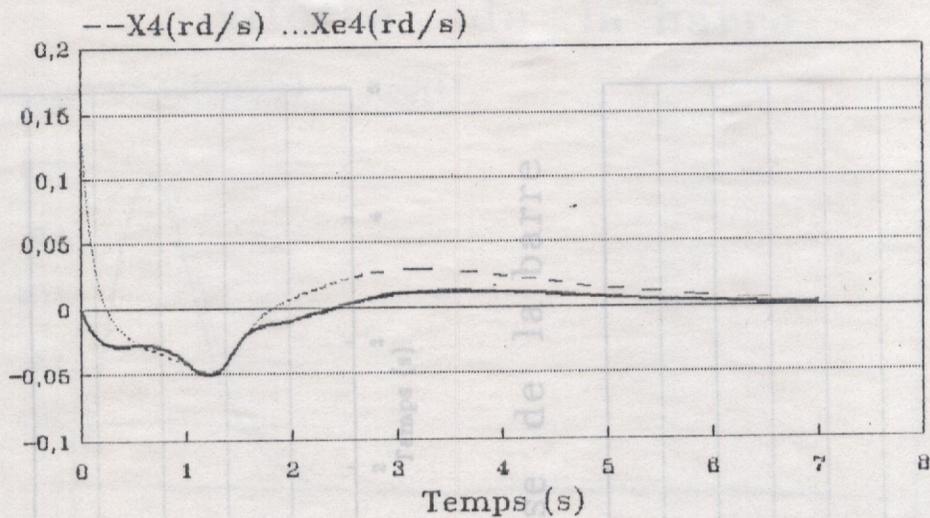
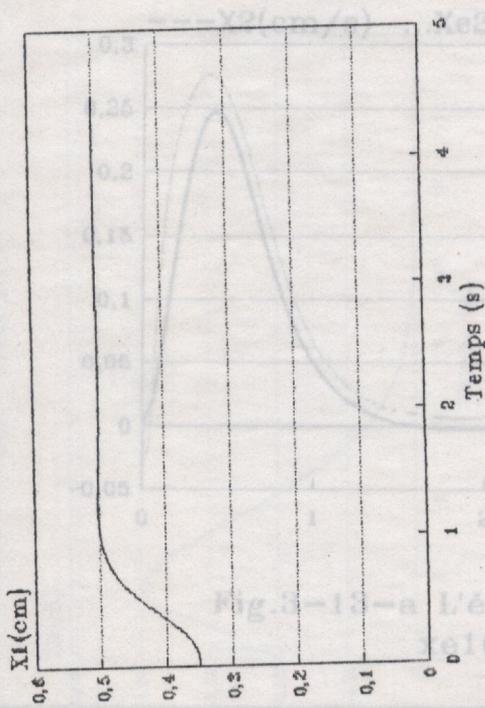


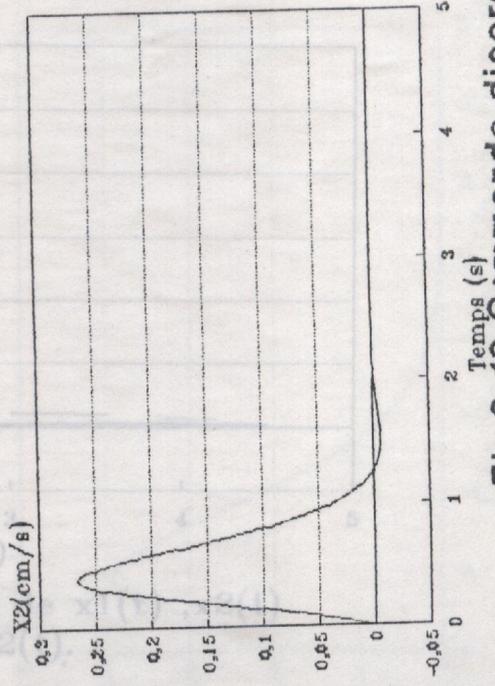
Fig.3-8-b L'état du procédé commandé par retour d'état avec observateur réduit.

Fig.3-12 Commande discrète par retour d'état du procédé.

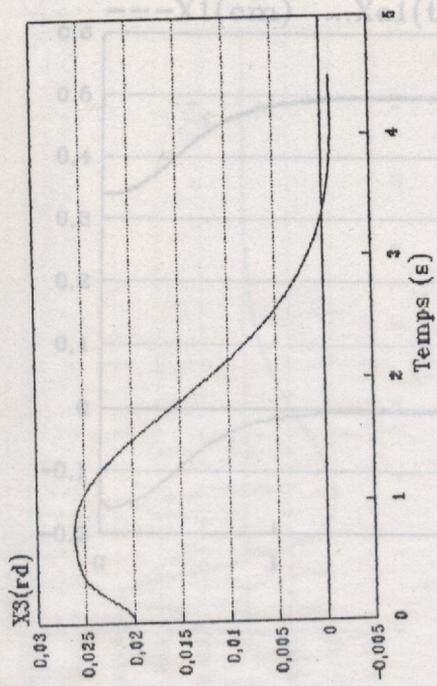
Position de la barre



Vitesse de la barre



Position Angulaire de la barre.



Vitesse Angulaire de la barre.

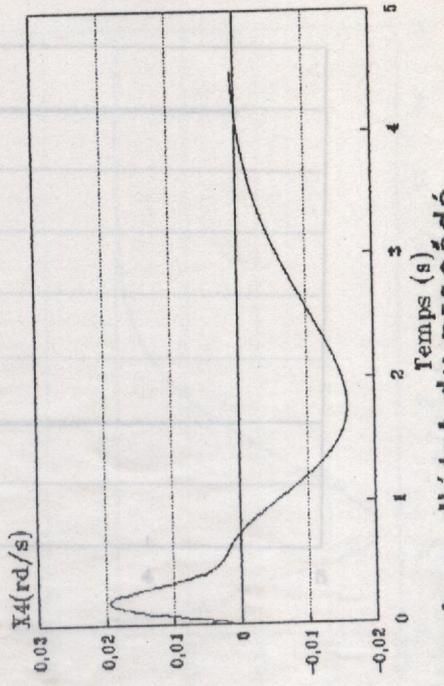
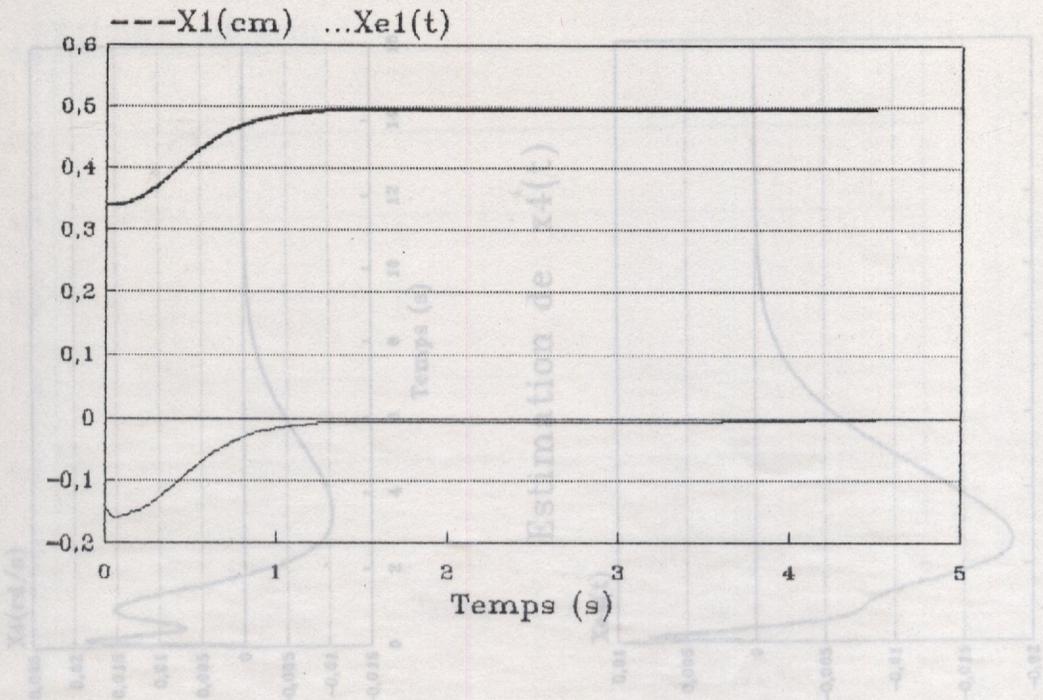


Fig.3-12 Commande discrète par retour d'état du procédé.

Position de la barre



Vitesse de la barre

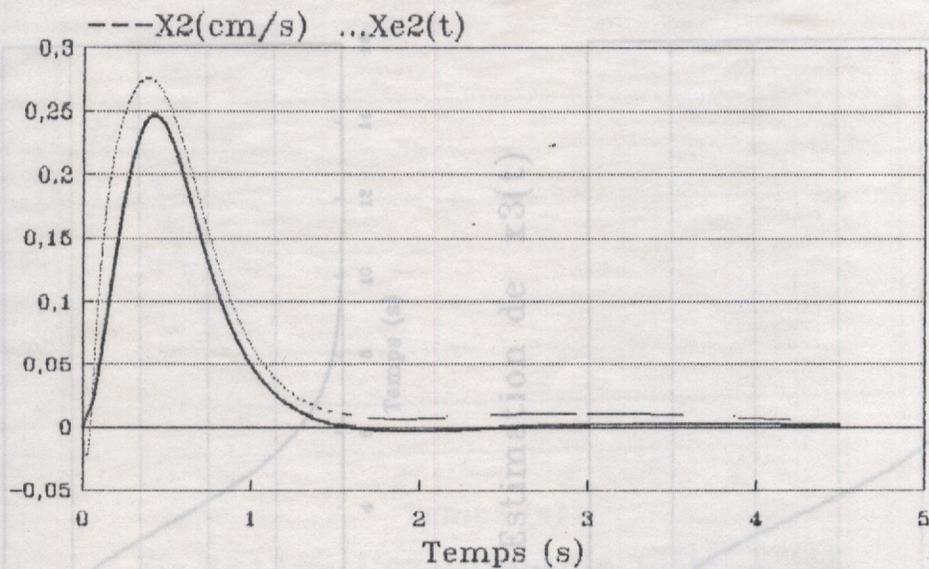
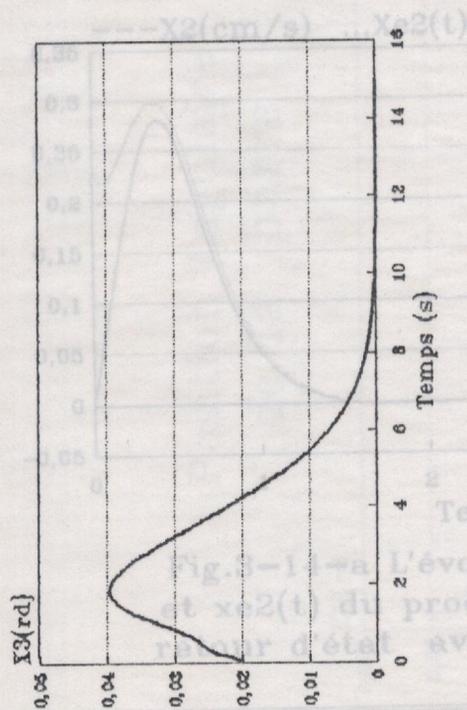
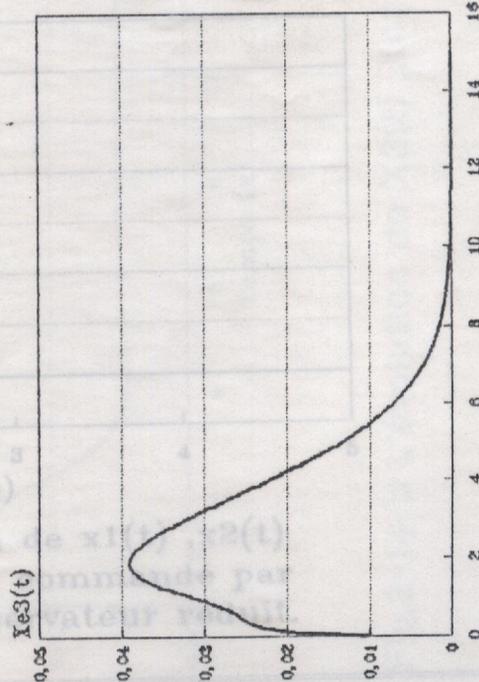


Fig.3-13-a L'évolution de $x_1(t)$, $x_2(t)$, $x_{e1}(t)$ et $x_{e2}(t)$.

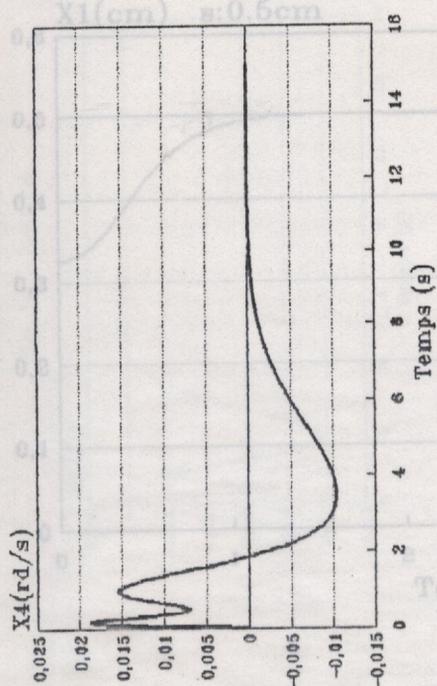
Position Angulaire de
la barre.



Estimation de $\hat{x}_3(t)$



Vitesse Angulaire de
la barre.



Estimation de $\hat{x}_4(t)$

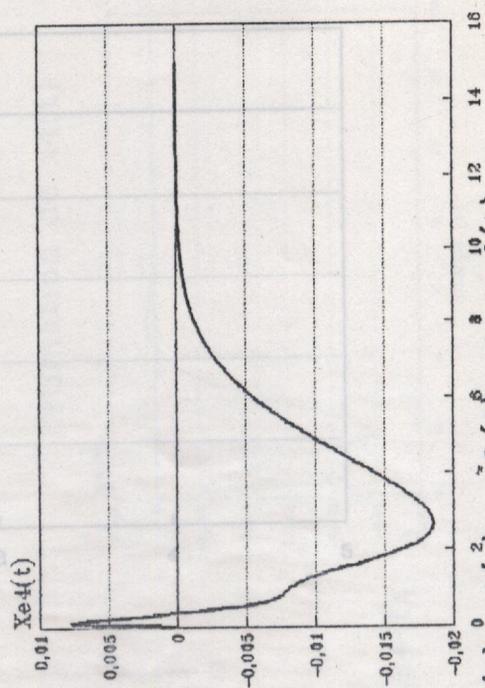
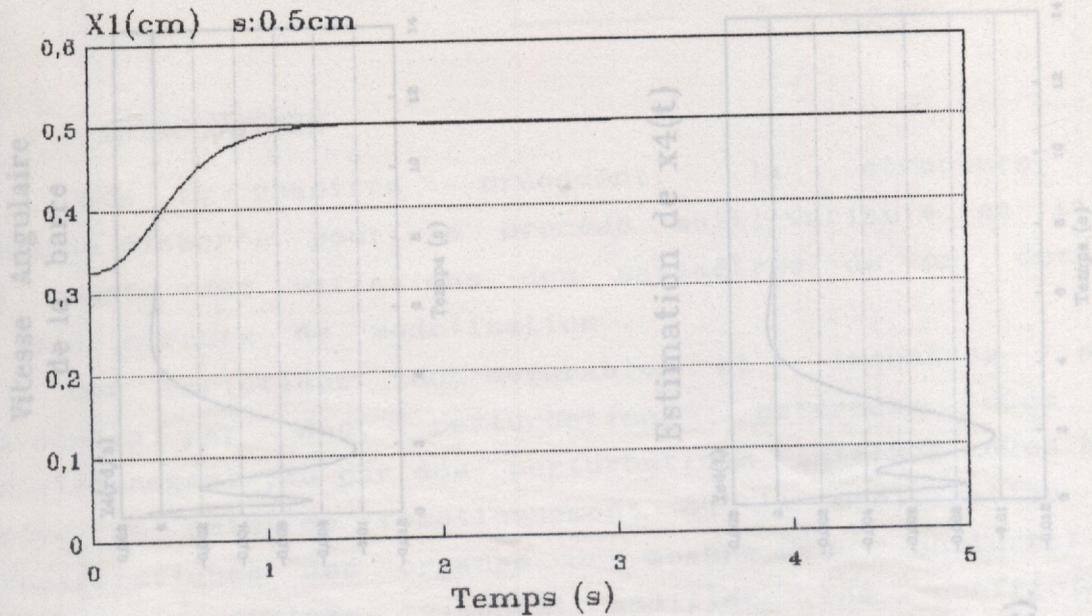


Fig 3-13-b L'évolution de $x_3(t), x_4(t), \hat{x}_3(t)$ et $\hat{x}_4(t)$

Position de la barre



Vitesse de la barre

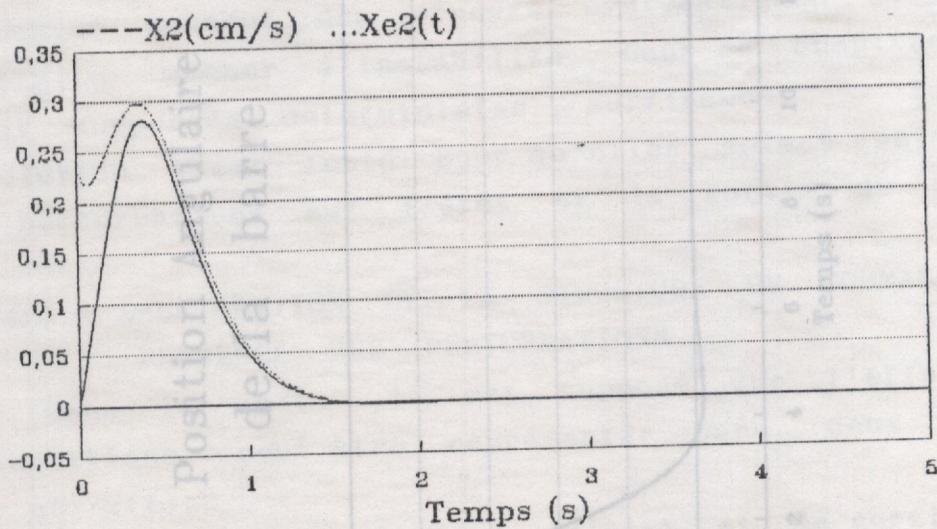
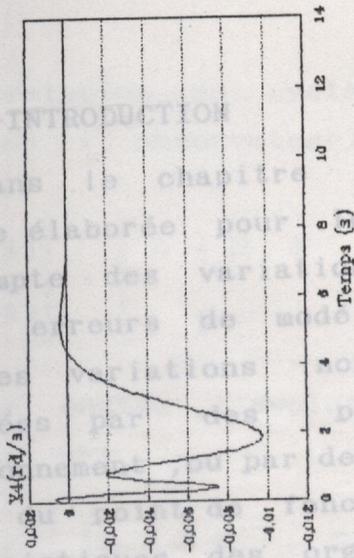


Fig.3-14-a L'évolution de $x_1(t)$, $x_2(t)$ et $x_e(t)$ du processus commandé par retour d'état avec observateur réduit.

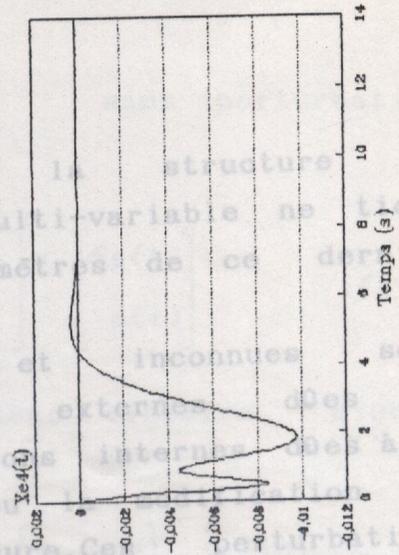
Fig.3-14-b L'évolution de $X_3(t)$, $X_4(t)$ et $X_e(t)$.

PERTURBE

Vitesse Angulaire de la barre



Estimation de $x_4(t)$



Position Angulaire de la barre

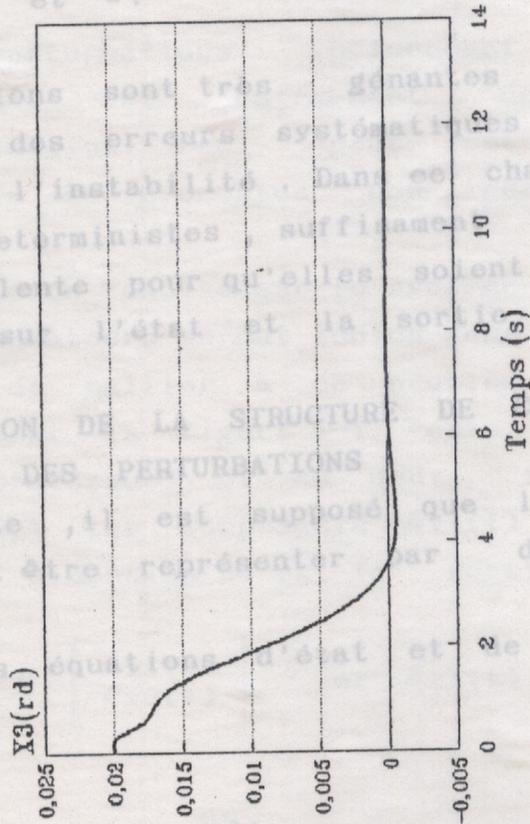


Fig.3-14-b L'évolution de $X_3(t)$, $X_4(t)$ et $Xe_4(t)$.

CHAPITRE 4 : ETUDE DU PROCESSUS MULTI-VARIABLE

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = A x(t) + B u(t) + v(t) \\ y(t) = C x(t) + w(t) \end{cases} \quad (4-1)$$

4-1-INTRODUCTION

Dans le chapitre précédent, la structure de commande élaborée pour le procédé multi-variable ne tient pas compte des variations des paramètres de ce dernier et des erreurs de modélisation.

Ces variations non-mesurables et inconnues sont provoquées par des perturbations externes dues à l'environnement, ou par des perturbations internes dues à la dérive du point de fonctionnement ou la modification des caractéristiques des organes de mesure. Ces perturbations internes au système viennent modifier les coefficients des matrices A , B et C .

Ces perturbations sont très gênantes car leurs influences causent des erreurs systématiques et peuvent à la limite amener l'instabilité. Dans ce chapitre, elle seront supposées déterministes, suffisamment faibles et d'évolution assez lente pour qu'elles soient assimilable à des perturbations sur l'état et la sortie du système.

4-2 - AMELIORATION DE LA STRUCTURE DE COMMANDE EN

PRESENCE DES PERTURBATIONS

Dans la suite, il est supposé que l'effet de ces perturbations peut être représenté par deux vecteurs $v(t)$ et $w(t)$.

Modifiant les équations d'état et de sortie de la manière suivante :

$$\begin{cases} \dot{\delta x}(t) = A \delta x(t) + B \delta u(t) + v(t) \\ y(t) = C \delta x(t) + w(t) \end{cases} \quad (4-1)$$

L'évolution du système global sans perturbations (commande + observateur) est :

$$\begin{bmatrix} \dot{\delta x}(t) \\ \dot{e}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A + B K & -B K \\ 0 & A - L C \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta x(t) \\ e(t) \end{bmatrix} \quad (4-2)$$

Par contre, l'évolution du système linéaire global perturbé est :

$$\begin{bmatrix} \dot{\delta x}(t) \\ \dot{e}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A + B K & -B K \\ 0 & A - L C \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta x(t) \\ e(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} I & 0 \\ I & -L \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v(t) \\ w(t) \end{bmatrix} \quad (4-3)$$

Ainsi, les perturbations influencent directement l'état du procédé et entraînent des erreurs systématiques d'estimation. Ceci peut restreindre le domaine de stabilité du processus non-linéaire.

D'après l'expérience requise sur le système mono-variable (chapitre 2), des intégrateurs seront inclus dans la boucle de commande [16] afin de pallier à ce problème. Le système élargi représenté sur la figure 4-1 est composé du système de base (processus) et de deux intégrateurs, dont les entrées sont les composants $\delta x_1(t)$ et $\delta x_3(t)$. $x_i(t)$ (vecteurs de dimension 2) est la sortie de ces deux intégrateurs.

avec $\delta x_p(t) = \begin{bmatrix} \delta x_1(t) \\ \delta x_3(t) \end{bmatrix}$ et $\delta x_i(t) = \delta x_p(t)$

4-2-a- Commande analogique du système élargi

Le système composé de deux intégrateurs a pour équation :

$$\dot{\delta x_i(t)} = \delta x_p(t) \longrightarrow \begin{cases} \dot{\delta x_0(t)} = (x_1(t) - x_{e1}) = \delta x_1(t) \\ \dot{\delta x_5(t)} = \delta x_3(t) \end{cases} \quad (4-4)$$

soit $\dot{\delta x_i(t)} = \mathbb{D} \delta x(t)$

$$\text{où : } \mathbb{D} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

et l'état du système devient :

$$\delta x_e(t) = \left[\delta x_0(t) \quad \delta x_1(t) \quad x_2(t) \quad \delta x_3(t) \quad x_4(t) \quad \delta x_5(t) \right]^T$$

Les équations dynamiques du système élargi s'écrivent :

$$\begin{cases} \dot{\delta x_e(t)} = \mathbb{A}_e \delta x_e(t) + \mathbb{B}_e \delta u_e(t) \\ y_e(t) = \mathbb{C}_e \delta x_e(t) \end{cases} \quad (4-5)$$

où :

$$\mathbb{A}_e = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{k I_0^2}{M s} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{k \cdot I_0^2 \cdot L^2}{J \cdot s} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} ; \mathbb{B}_e = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ -\frac{2k I_0}{M s} & -\frac{2k I_0}{M s} \\ 0 & 0 \\ -\frac{2k L I_0}{J s} & \frac{2k L I_0}{J s} \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

4-2-2- SIMULATION ET RESULTATS

Modèle de perturbation : la grandeur de perturbation a été modélisée par une fonction bornée $p(t)$ sinusoïdale. Il est supposé que cette perturbation n'affecte que le mouvement rectiligne de la barre de manière additive sur l'état.

La commande par retour d'état du système élargi s'écrit :

$$\delta u_e(k) = K_e \delta x_e(t) \quad (4-7)$$

où K_e est la matrice de contre-réaction de dimension (2×6)

Il est nécessaire que le système linéaire élargi (4-5) obtenu à partir du système de base (4-1) soit complètement contrôlable afin de changer la dynamique du procédé par retour d'état.

Comme vu précédemment le système linéaire de base est complètement contrôlable. Donc pour que ce système élargi le soit aussi, il suffit de vérifier que [17.21]:

$$\text{Rang } \Gamma_e = \text{Rang} \begin{bmatrix} B & A \\ 0 & D \end{bmatrix} = n + p = 6$$

$$\text{où } D = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Ce qui est le cas.

Les états inaccessibles ($x_2(t)$ et $x_4(t)$) seront estimés par un observateur réduit d'ordre deux (Annexe B-2).

La figure 4-2 illustre la commande par retour d'état du processus non-linéaire augmenté des deux intégrateurs.

4-2-b SIMULATION ET RESULTATS

■ Modèle de perturbation : la grandeur de perturbation a été simulée par une fonction bornée $p(t)$ sinusoidale. Il est supposé que cette perturbation n'affecte que le mouvement rectiligne de la barre de manière additive sur l'état.

Donc $p(t) = c + a \cos(\omega t) + b \sin(\omega t)$
 où $c = \text{constante} = 1$, $a = 2$ et $b = 0.5$
 ω : pulsation en rd/s réglant la vitesse de variation de la perturbation

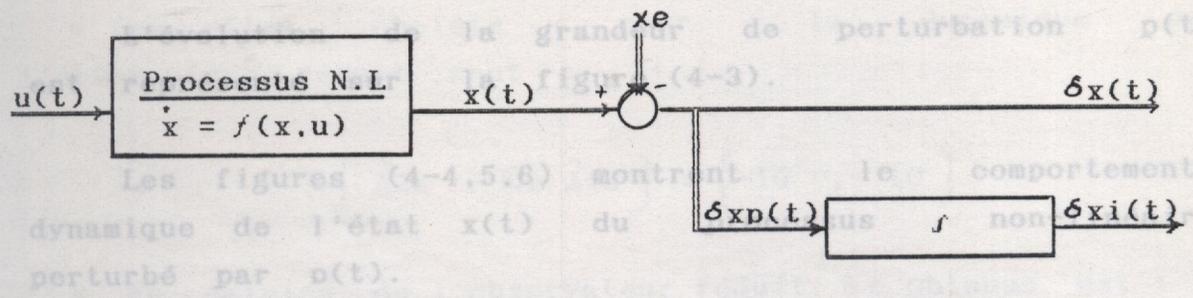


Fig.4-1

Il faut constater que l'état du processus ne converge pas vers le point d'équilibre désiré $x_e = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

Le système linéaire élargi est décrit par les matrices :

$$A_e = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}; B_e = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ -2 & -2 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

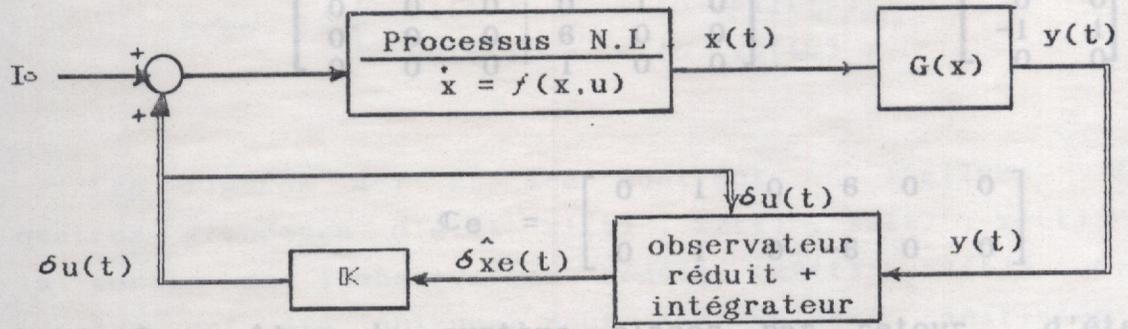


Fig .4-2

Les pôles du système placés par retour d'état sont:
 $\sigma(A_e + B_e K_e) = \{-4, -2 \pm j2, -2, -1 \pm j1\}$

Donc $p(t) = c + a \cos(\omega t) + b \sin(\omega t)$
 où $c = \text{constante} = 1$, $a = 2$ et $b = 0.5$
 ω : pulsation en rd/s réglant la vitesse de variation de la perturbation

L'évolution de la grandeur de perturbation $p(t)$ est représenté sur la figure (4-3).

Les figures (4-4,5,6) montrent le comportement dynamique de l'état $x(t)$ du processus non-linéaire perturbé par $p(t)$.

Il faut constater que l'état du processus ne converge pas vers le point d'équilibre désiré $x_e = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$.

Le système linéaire élargi est décrit par les matrices :

$$A_e = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} ; B_e = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ -2 & -2 \\ \hline 0 & 0 \\ -1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Les figures 4-7 et 4-8 montrent les quatre grandeurs d'entrée $x_1(t)$, $x_2(t)$, $x_3(t)$, $x_4(t)$ et la sortie de l'observateur réduit $x_2(t)$, $x_4(t)$.

Les pôles du système placés par retour d'état sont :

$$\sigma(A_e + B_e K_e) = \left\{ -4, -2 \pm j 2, -2, -1 \pm j 1 \right\}$$

■ La matrice de contre-réaction obtenue est :

$$K_e = \begin{bmatrix} 8 & 6.52 & 2 & 6 & 2 & 2 \\ 8 & 6.52 & 2 & -6 & -2 & -2 \end{bmatrix}$$

■ Les pôles choisis pour la dynamique de l'observateur réduit sont :

$$\sigma(\hat{A}_{22} - L_e \hat{A}_{12}) = \{-10, -10\}$$

■ La matrice de l'observateur réduit L_e obtenue est :

$$L_e = \begin{bmatrix} 0 & 10 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 10 & 0 \end{bmatrix} \quad (4-8)$$

■ L'équation dynamique de l'observateur réduit est :

$$\begin{cases} \dot{w}_1 = -10 w_1 - 98 \delta x_1 - 2 (\delta u_1 + \delta u_2) \\ \dot{w}_2 = -10 w_2 - 93 x_3 - \delta u_1 + \delta u_2 \\ \hat{x}_2 = w_1 + 10 \delta x_1 \\ \hat{x}_4 = w_2 + 10 x_3 \end{cases} \quad (4-9)$$

avec : $\begin{cases} w_1(t_0) = -10 \delta x_1(t_0) \\ w_2(t_0) = -10 x_3(t_0) \end{cases}$

avec $D = \begin{bmatrix} T & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & T & 0 \end{bmatrix}$ et T : période d'échantillonnage

Les figures 4-7 et 4-8 montrent l'allure des quatre grandeurs d'état $x_1(t)$, $x_2(t)$, $x_3(t)$, $x_4(t)$ et la sortie de l'observateur réduit ($\hat{x}_2(t)$, $\hat{x}_4(t)$). Ces courbes ont été obtenues pour les valeurs initiales :

$$\begin{array}{lll} x_1(0) = 0.35 \text{ cm} & ; x_2(0) = 0 \text{ cm/s} & ; x_3(0) = 0.015 \text{ rd} \\ x_4(0) = 0 \text{ rd/s} & ; w_1(0) = 1.5 & ; w_2(0) = -0.15 \end{array}$$

Il y a lieu de remarquer que l'erreur systématique d'état due à la perturbation $p(t)$ est annulée par l'introduction des deux intégrateurs dans la boucle de commande, bien que la position $x_1(t)$ présente un dépassement assez important de 15%.

4-2-c COMMANDE DISCRETE PAR RETOUR D'ETAT [16]

L'évolution du procédé linéaire entaché de bruit d'état est décrit par les équations dynamiques discrètes suivantes:

$$\begin{cases} \delta x[(k+1)T] = \Phi(T) \delta x(kT) + \theta(T) \delta u(kT) + v(kT) \\ y(kT) = C \delta x(kT) \end{cases} \quad (4-8)$$

Pour éliminer les erreurs stationnaires de l'état $x(kT)$, la commande par retour d'état est complétée par deux intégrateurs numériques, dont les équations sont:

$$\begin{cases} x_0[(k+1)T] = x_0(kT) + T \delta x_1(kT) \\ x_5[(k+1)T] = x_5(kT) + T \delta x_3(kT) \end{cases} \quad (4-9)$$

où $x_i[(k+1)T] = x_i(kT) + D \delta x(kT)$

avec $D = \begin{bmatrix} T & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & T & 0 \end{bmatrix}$ et T : période d'échantillonnage

Comme souligné au paragraphe précédent, il est nécessaire que le système discret élargi, obtenu à partir du système de base (4-8) et des équations des deux intégrateurs (4-9) soit complètement contrôlable pour qu'on puisse lui appliquer la théorie de la commande par retour d'état.

Les équations d'état du système élargi peuvent être écrites :

$$\begin{bmatrix} \delta x(k+1) \\ x_i(k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Phi(T) & 0 \\ \mathbb{D} & \mathbb{I}_z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta x(k) \\ x_i(k) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \theta(T) \\ 0 \end{bmatrix} \delta u(k) \quad (4-10)$$

Ce système discret élargi est complètement contrôlable si [17,21] :

$$\text{Rang } \Gamma_d = \text{Rang} \begin{bmatrix} \Phi(T) - \mathbb{I}_n & \theta(T) \\ \mathbb{D} & 0 \end{bmatrix} = n + p = 6$$

En effet, le rang de la matrice Γ_d est égal à six, par conséquent le système élargi est complètement contrôlable.

La commande par retour d'état du système élargi s'écrit :

$$\delta u(k) = \mathbb{K}_e \delta x_e(k)$$

où \mathbb{K}_e est la matrice de contre-réaction de dimension (2×6) .

La figure (4-9) montre la structure générale du processus non-linéaire élargi commandé par retour d'état avec observateur réduit.

Il faut noter que l'algorithme d'observation et l'algorithme de commande d'état avec la présence des intégrateurs sont élaborés par le calculateur numérique.

Remarque: Si la grandeur de sortie $y(t)$ du système à régler présente un certain bruit de mesure $w(kT)$, alors, l'utilisation d'un observateur réduit peut influencer négativement la commande du processus. (Cette remarque est aussi valable pour le cas continu).

En effet, si :

$$y(k) = C \delta x_e(k) + w(k)$$

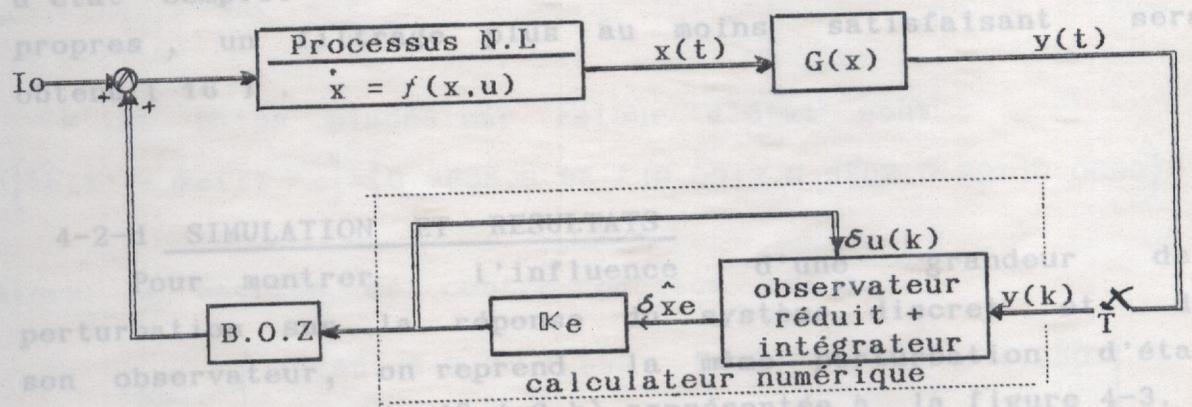
L'état partiel estimé devient :

$$\hat{x}_p(k) = \begin{bmatrix} \hat{x}_2 \\ \hat{x}_4 \end{bmatrix} = z(k) + L y(k) = z(k) + L C \delta u(k) + L w(k)$$

et la commande par retour d'état s'écrit :

$$\delta u(k) = K_e \delta \hat{x}_e(k)$$

Il est clair que le signal de commande est affecté par le bruit $w(k)$ et il est amplifié par le gain $K_e L$. Dans ce cas, il est recommandé d'utiliser un observateur d'état complet avec un choix approprié de ses valeurs propres, un gain K_e au moins satisfaisant sera



4-2 SIMULATION

pour montrer l'influence de la perturbation sur son observateur, on reprend la vue dans la partie (b) 4-2-b) représentée à la figure 4-3.

Les figures (4-10, 4-11) montrent l'effet de cette perturbation sur la réponse du processus non-linéaire commandé par retour d'état discret et sur la réponse de l'observateur.

Fig 4-9

Il est clair que l'erreur sur l'état est assez importante et ne permet pas une bonne estimation des grandeurs $x_2(t)$ et $x_4(t)$.

En effet, si :

$$y(k) = C \delta x_e(k) + w(k)$$

L'état partiel estimé devient :

$$\hat{x}_p(k) = \begin{bmatrix} \hat{x}_2 \\ \hat{x}_4 \end{bmatrix} = z(k) + \mathbb{L} y(k) = z(k) + \mathbb{L} C \delta u(k) + \mathbb{L} w(k)$$

et la commande par retour d'état s'écrit :

$$\delta u(k) = K_e \delta \hat{x}_e(k)$$

Il est clair que le signal de commande est affecté par le bruit $w(k)$ et il est amplifié par le gain $K_e \mathbb{L}$. Dans ce cas, il est recommandé d'utiliser un observateur d'état complet avec un choix approprié de ses valeurs propres, un filtrage plus au moins satisfaisant sera obtenu [16] .

4-2-d SIMULATION ET RESULTATS

Pour montrer l'influence d'une grandeur de perturbation sur la réponse du système discret et de son observateur, on reprend la même perturbation d'état vue dans la partie (§ 4-2-b) représentée à la figure 4-3.

Les figures (4-10, 4-11) montrent l'effet de cette perturbation sur la réponse du processus non-linéaire commandé par retour d'état discret et sur la réponse de l'observateur.

Il est clair que l'erreur sur l'état est assez importante et ne permet pas une bonne estimation des grandeurs $x_2(t)$ et $x_4(t)$.

Les équations de l'observateur réduit sont :

Pour éliminer ces erreurs, deux intégrateurs numériques sont introduits dans la boucle de commande.

Ainsi, le système linéaire discret élargi est décrit par les matrices :

$$\Phi_e(T) = \begin{bmatrix} 1 & 0.01 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1.0001 & 0.01 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.02 & 1.0001 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1.0003 & 0.01 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.05 & 1.0003 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.01 & 0 & 1 \end{bmatrix} ; \Theta_e(T) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -1E-4 & -1E-4 \\ \hline -0.02 & -0.02 \\ -5E-5 & 5E-5 \\ -0.01 & 0.01 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

La figure (4-12) et (4-13) montre l'évolution de l'état du système perturbé et de son estimateur. Ainsi l'introduction de deux intégrateurs dans la boucle de commande a permis d'éliminer les erreurs systématiques de la figure (4-10) et (4-11). Là aussi, il faut constater le dépassement

Les pôles placés par retour d'état sont :
 $\sigma[\Phi_e(T) + \Theta_e(T) K_e] = \{0.9608, 0.98 \pm j0.0019, 0.9802, 0.99 \pm j0.0099\}$

Ces courbes ont été obtenues pour les valeurs initiales suivantes :
 Alors la matrice de contre-réaction est :

$$K_e = \begin{bmatrix} 12.65 & 6.312 & 1.953 & 5.960 & 1.990 & 1.950 \\ 12.65 & 6.312 & 1.953 & -5.960 & -1.990 & -1.950 \end{bmatrix}$$

Les pôles de l'observateur réduit sont :

$$\sigma[\hat{A}_{22} - L \hat{A}_{12}] = \{0.6703 ; 0.8187\}$$

Les résultats obtenus par simulation montrent qu'en augmentant la structure de la commande par deux intégrateurs (continu ou numérique), il est possible d'atténuer l'effet de perturbation de la structure, qui perturbe directement l'état de l'observateur.

$$L = \begin{bmatrix} 0 & -32.978 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -18.160 & 0 \end{bmatrix}$$

Les équations de l'observateur réduit sont:

$$z(k+1) = \begin{bmatrix} 0.670 & 0 \\ 0 & 0.818 \end{bmatrix} z(k) + \begin{bmatrix} 0 & -10.853 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -3.238 & 0 \end{bmatrix} v_1(k) + \begin{bmatrix} -0.0167 & -0.0167 \\ -0.0091 & 0.0091 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta u_1(k) \\ \delta u_2(k) \end{bmatrix}$$

$$\hat{x}_2(k) = z_1(k) + 32.978 \delta x_1(k)$$

$$\hat{x}_4(k) = z_2(k) + 18.160 \delta x_3(k)$$

La figure (4-12) et (4-13) montre l'évolution de l'état du système perturbé et de son estimateur. Ainsi l'introduction des deux intégrateurs dans la boucle de commande a éliminé les erreurs systématiques de la figure (4-10) et (4-11). Là aussi, il faut constater le dépassement important de la position $x_1(t)$ qui atteint 16% au régime transitoire.

Ces courbes ont été obtenues pour les valeurs initiales suivantes:

$$\begin{array}{lll} x_1(0) = 0.38 \text{ cm} & ; x_2(0) = 0 \text{ cm/s} & ; x_3(0) = 0.01 \text{ rd} \\ x_4(0) = 0 \text{ rd/s} & ; z_1(0) = 3.957 & ; z_2(0) = -0.182 \end{array}$$

4-3- CONCLUSION

Les résultats obtenus par simulation montrent qu'en augmentant la structure de la commande par deux intégrateurs (continu ou numérique), il est possible d'atténuer l'effet de la perturbation de structure, qui perturbe directement l'état du procédé.

Nous avons apprécié en outre ,la robustesse de cette loi aux variations des paramètres du système linéaire.En effet ,pour un modèle mathématique de la force magnétique inversement proportionnel au carré de la position ,l'évolution de l'état reste stable au voisinage du point d'équilibre .

Enfin , le placement de pôles robustes a augmenté l'insensibilité du procédé à ces perturbations.

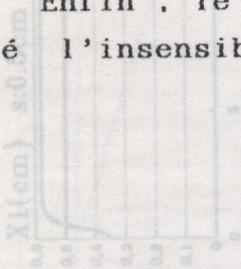


Fig.4-4 L'état $X_1(t)$ $s=0.5\text{cm}$

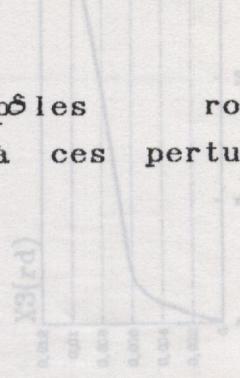


Fig.4-5 L'état $X_3(t)$ d'un procédé perturbé

Perturbation $P(t)$

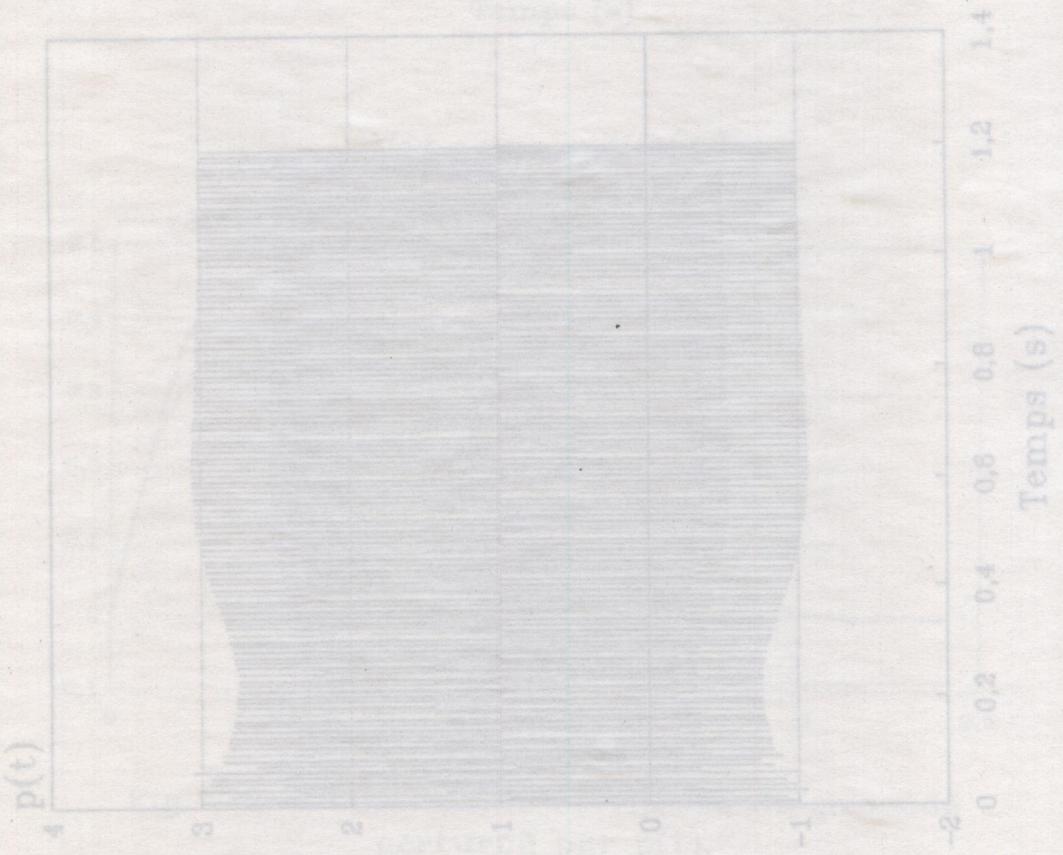


Fig 4-3 Perturbation d'état

Perturbation $P(t)$

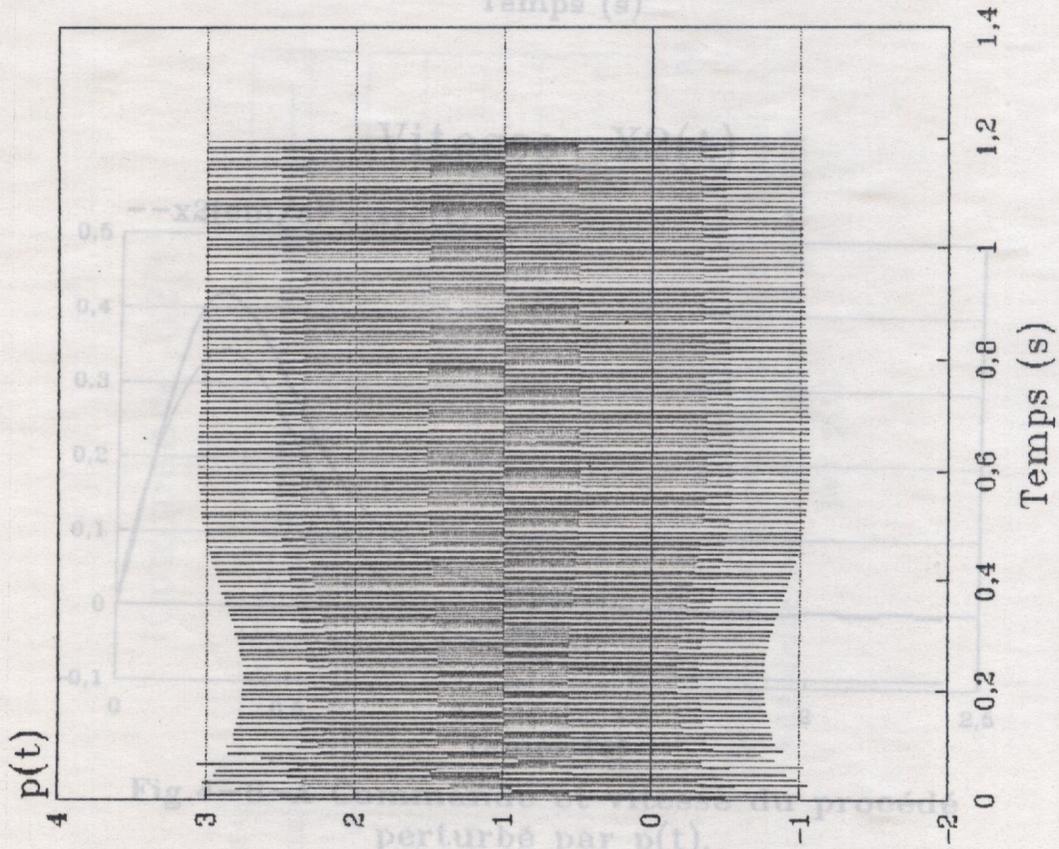


Fig 4-3 Perturbation d'état

Position de la barre perturbé

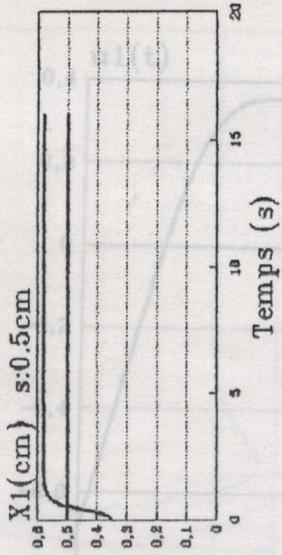


Fig.4-4 L'état $X_1(t)$ du procédé perturbé

Position Angulaire de la barre

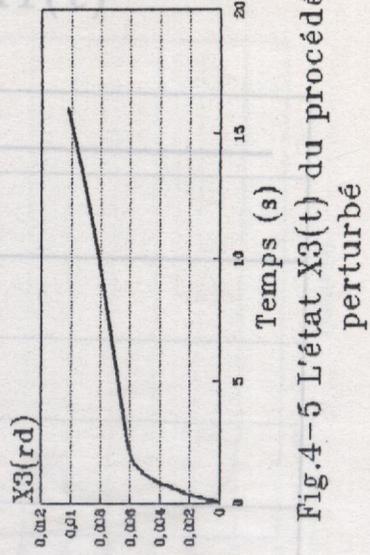
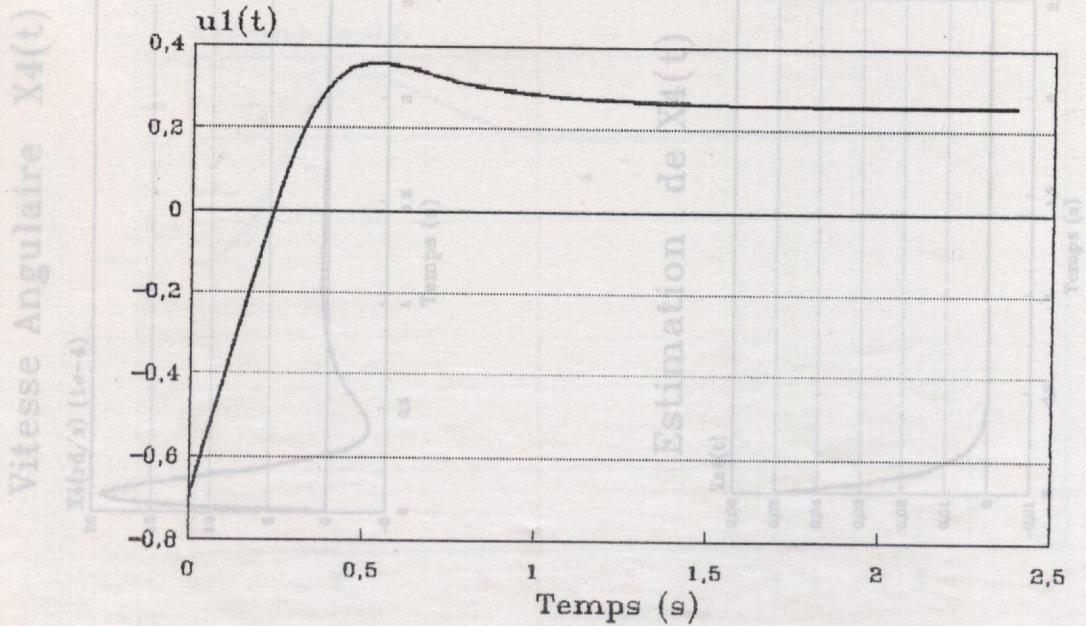


Fig.4-5 L'état $X_3(t)$ du procédé perturbé

Commande $u_1(t)$



Vitesse $X_2(t)$

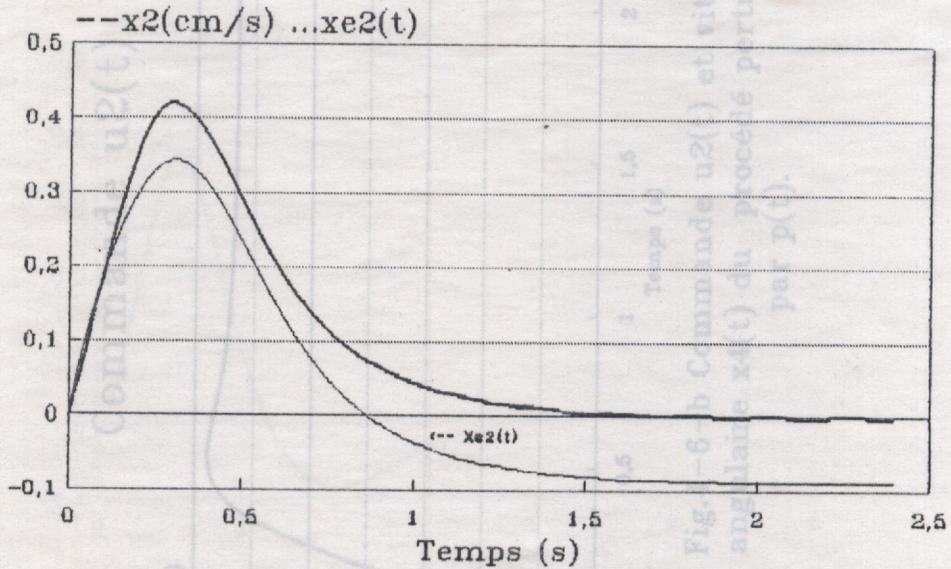
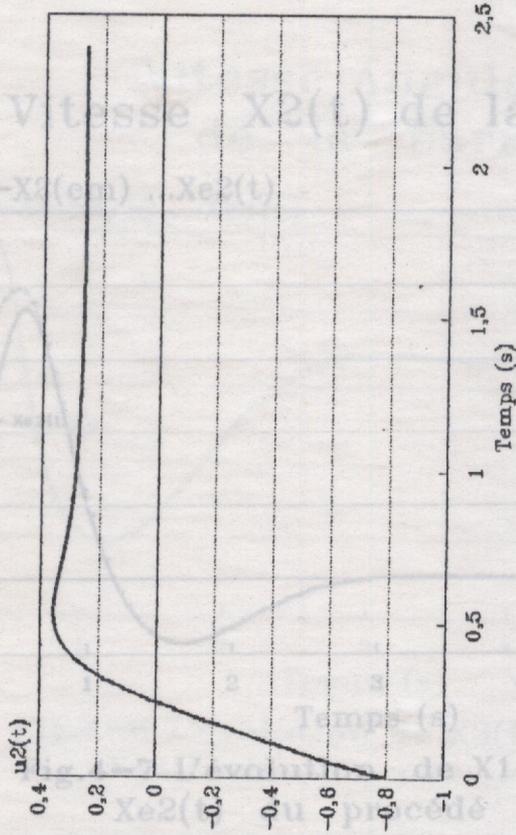
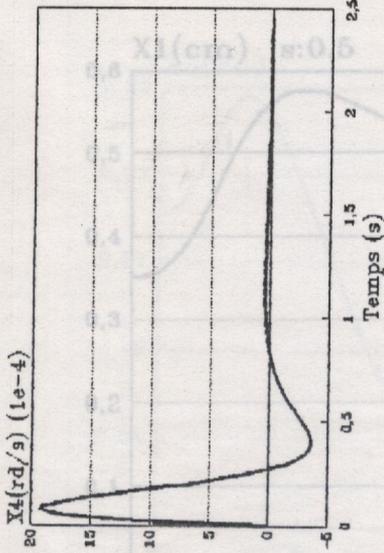


Fig.4-6-A Commande et vitesse du procédé perturbé par $p(t)$.

Commande $u_2(t)$



Vitesse Angulaire $X_4(t)$



Estimation de $X_4(t)$

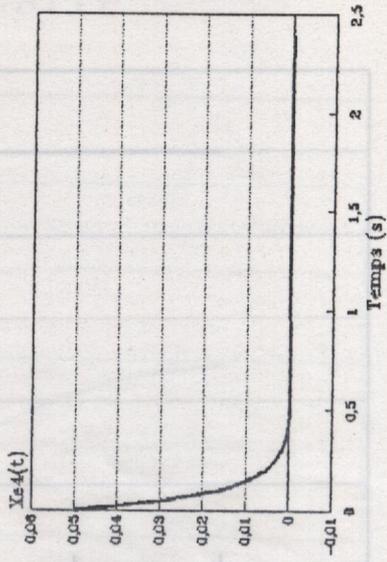
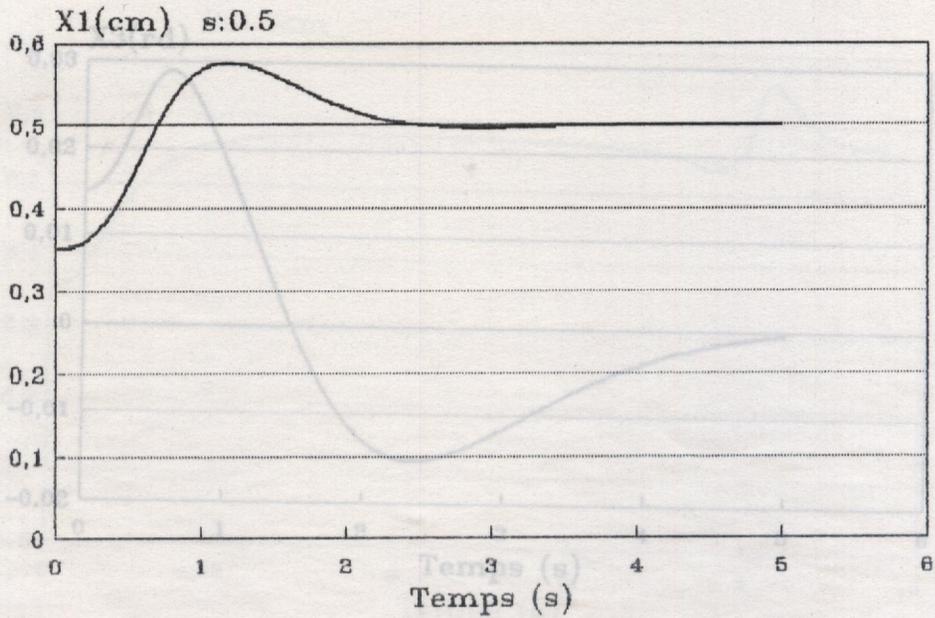


Fig.4-6-b Commande $u_2(t)$ et vitesse angulaire $x_4(t)$ du procédé perturbé par $p(t)$.

Position $X_1(t)$ de la barre.



Vitesse $X_2(t)$ de la barre.

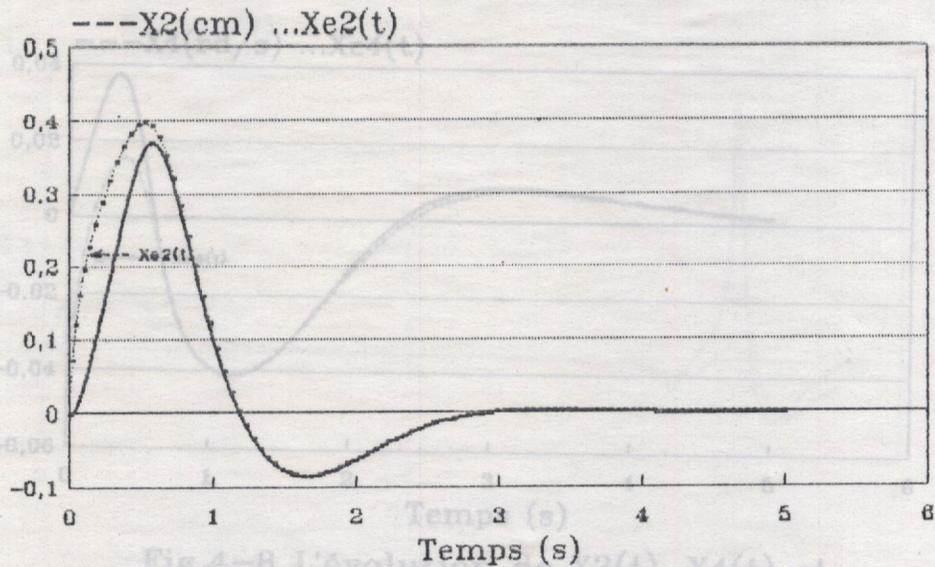
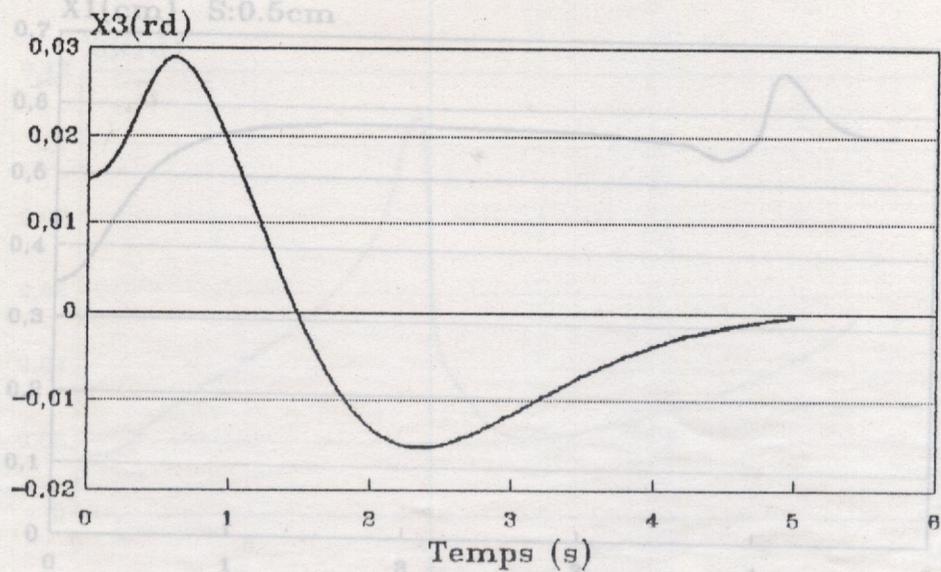


Fig.4-7 L'évolution de $X_1(t)$, $X_2(t)$ et $X_{e2}(t)$ du procédé élargi.

Position Angulaire de la barre



Vitesse Angulaire de la barre

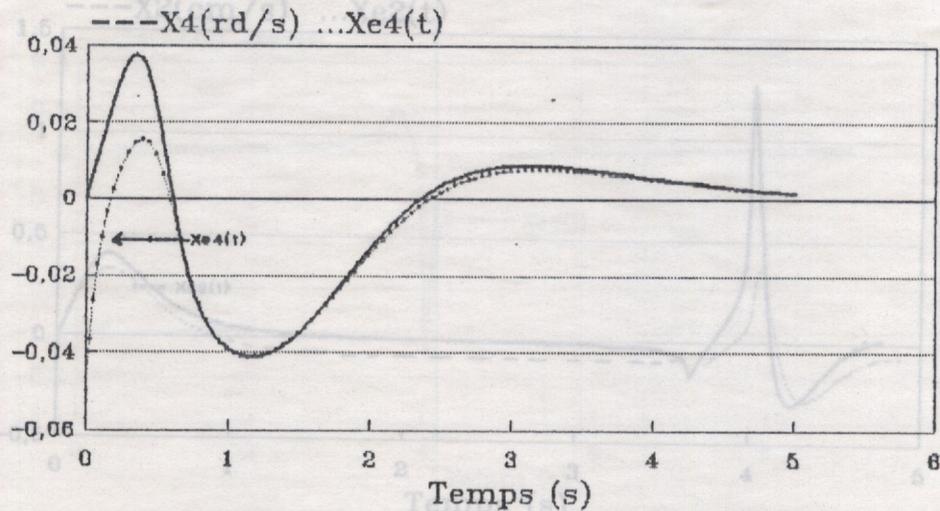
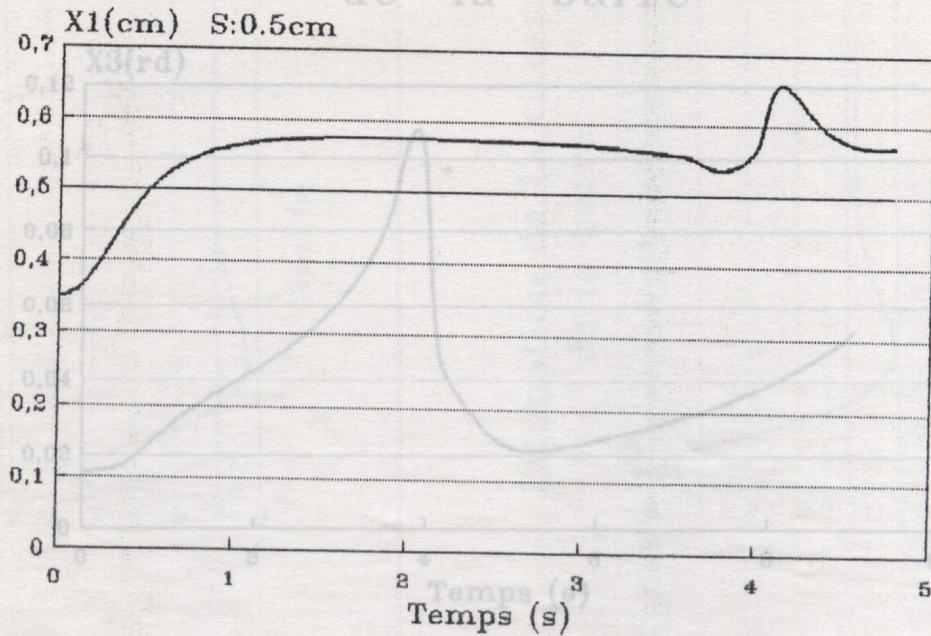


Fig.4-8 L'évolution de $X3(t)$, $X4(t)$ et $Xe4(t)$ du procédé élargi.

Position $X_1(t)$ de la barre



Vitesse $X_2(t)$ de la barre

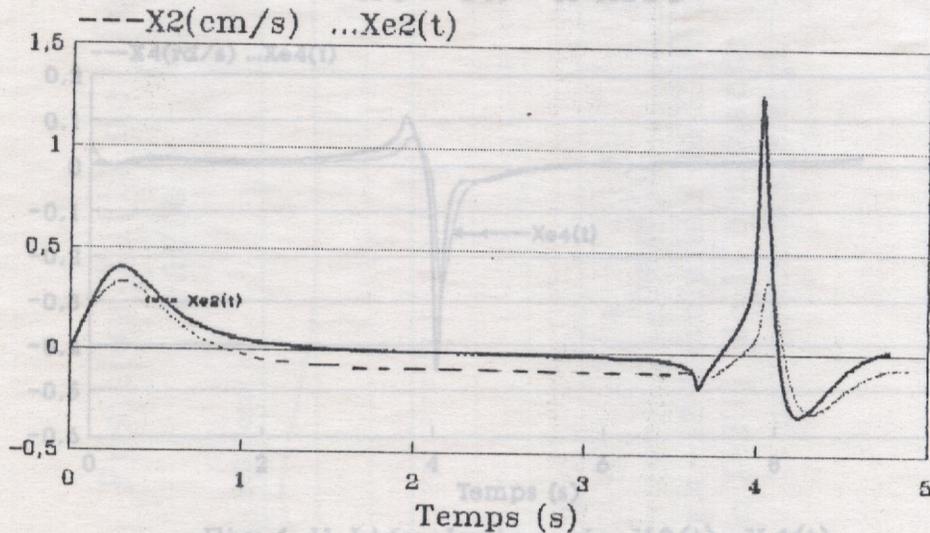
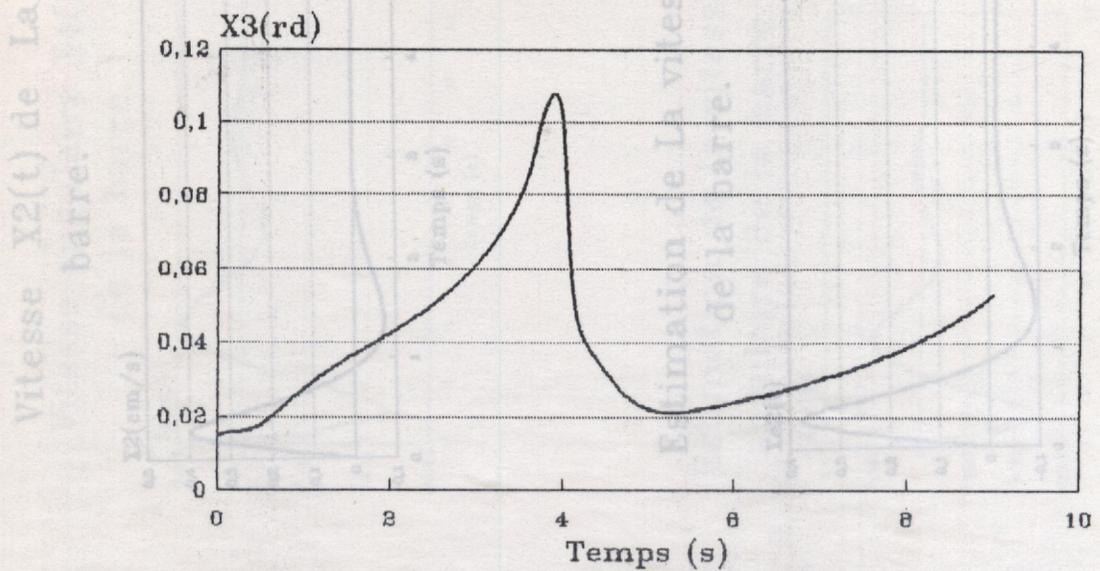


Fig.4-10 L'évolution de $X_1(t)$, $X_2(t)$ et $X_{e2}(t)$ de la commande discrète du processus perturbé.

Position Angulaire de la barre



Vitesse Angulaire de la barre

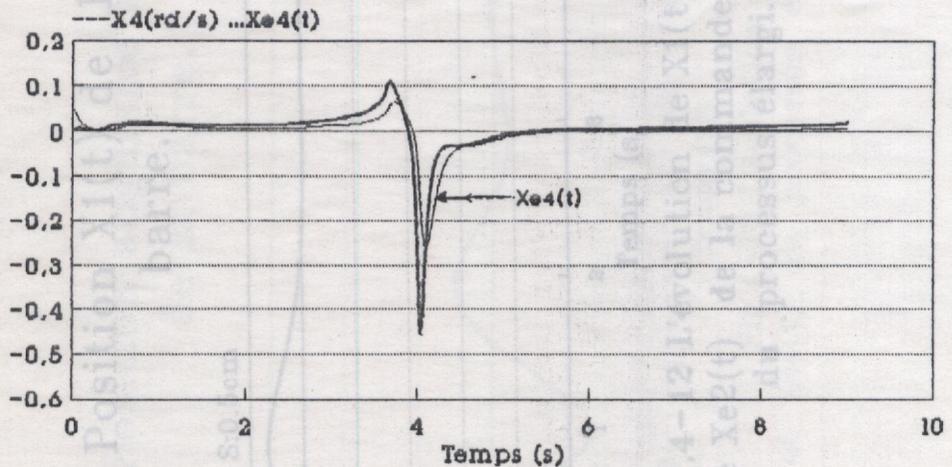
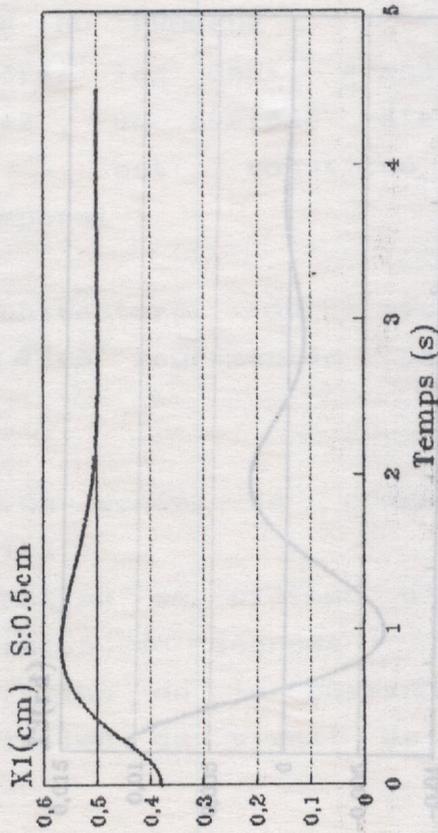
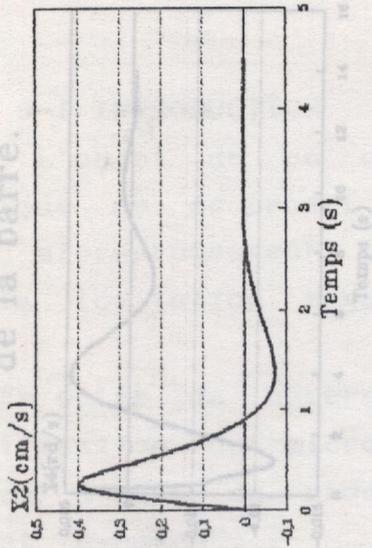


Fig.4-11 L'évolution de $X_3(t)$, $X_4(t)$
et $X_{e4}(t)$ de la commande discrète du
processus perturbé par $p(t)$

Position $X1(t)$ de La barre.



Vitesse $X2(t)$ de La barre.



Estimation de La vitesse de la barre.

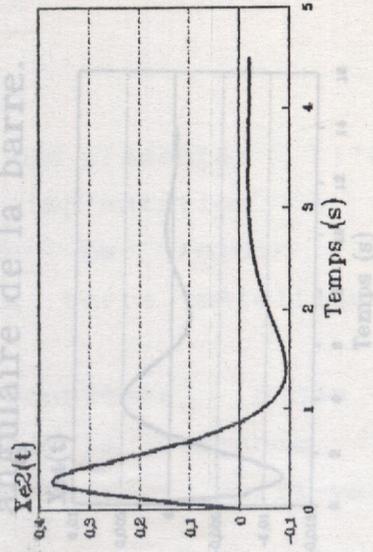
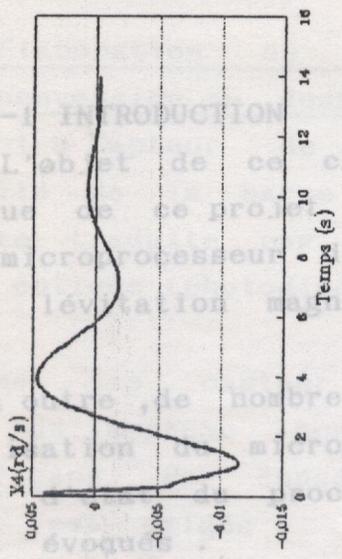
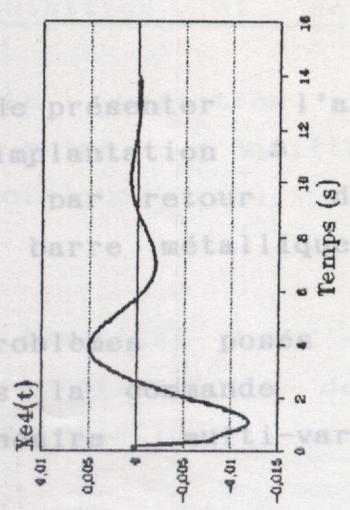


Fig.4-12 L'évolution de $X1(t)$, $X2(t)$
et de $Xe2(t)$ de la commande discrète
du processus élargi.

Vitesse angulaire $X_4(t)$ de la barre.



Estimation de la vitesse angulaire de la barre.



Position angulaire $X_3(t)$ de la barre.

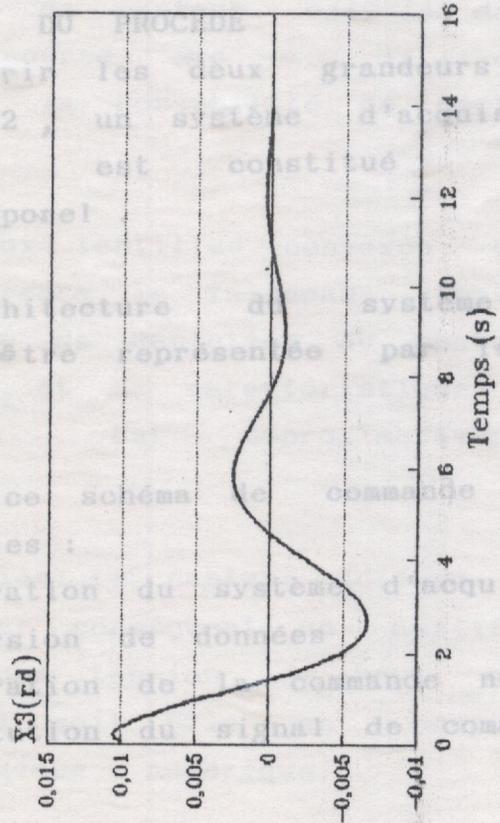


Fig.4-13 L'évolution de $X_3(t)$, $X_4(t)$ et $X_{e4}(t)$ du processus élargi.

CHAPITRE:5 ETUDE D'UNE IMPLANTATION A BASE D'UN MICROPROCESSEUR DE LA COMMANDE DU PROCÉDÉ MULTI-VARIABLE

5-1 INTRODUCTION

L'objet de ce chapitre est de présenter l'aspect pratique de ce projet, à savoir l'implantation à base d'un microprocesseur de la commande par retour d'état de la lévitation magnétique de la barre métallique.

En outre, de nombreux problèmes posés par l'utilisation du microprocesseur dans la commande par retour d'état du processus non-linéaire multi-variable seront évoqués.

5-2 ETUDE DU SCHEMA SYNOPTIQUE DE LA COMMANDE NUMERIQUE DU PROCÉDÉ

Pour acquérir les deux grandeurs de sortie du procédé y_1 et y_2 , un système d'acquisition de données à deux voies est constitué à l'aide d'un multiplexage temporel.

Ainsi, l'architecture du système de commande numérique peut être représentée par le schéma dans la figure 5-1.

L'étude de ce schéma de commande est constitué de trois parties :

- élaboration du système d'acquisition et de conversion de données
- élaboration de la commande numérique
- restitution du signal de commande analogique

Les précautions pratiques pour la mise en oeuvre de ces opérations seront mis en relief.

5-2-1 Elaboration du système d'acquisition et de conversion de données

5-2-1-a Capteur de position : La variation de l'extrémité de la barre autour du point d'équilibre peut être traduite par un signal électrique issu d'un capteur optique (photodiode) [23].

Comme le capteur a un rôle essentiel dans la commande du système non-linéaire, son utilisation doit être efficace. Par conséquent une caractéristique assez linéaire est exigée.

Par ailleurs, le problème pratique rencontré en utilisant ce genre de capteur est la dérive de la luminosité de la source due à la sensibilité du capteur, entraînant la possibilité de déstabilisation du processus.

L'usage de deux lentilles convexes (fig-5-2) avec ce capteur optique forcera le faisceau lumineux incident d'atteindre la zone de déplétion du photoconducteur sans dispersion notable, et sa caractéristique autour du point d'équilibre est approximativement linéaire (fig-5-3) [23].

5-2-1-b Amplification: Le capteur délivre un signal de faible puissance. Par conséquent un amplificateur est associé délivrant une tension de haut niveau (fig-5-3) pour que ce signal soit pris en compte par le convertisseur analogique - numérique.

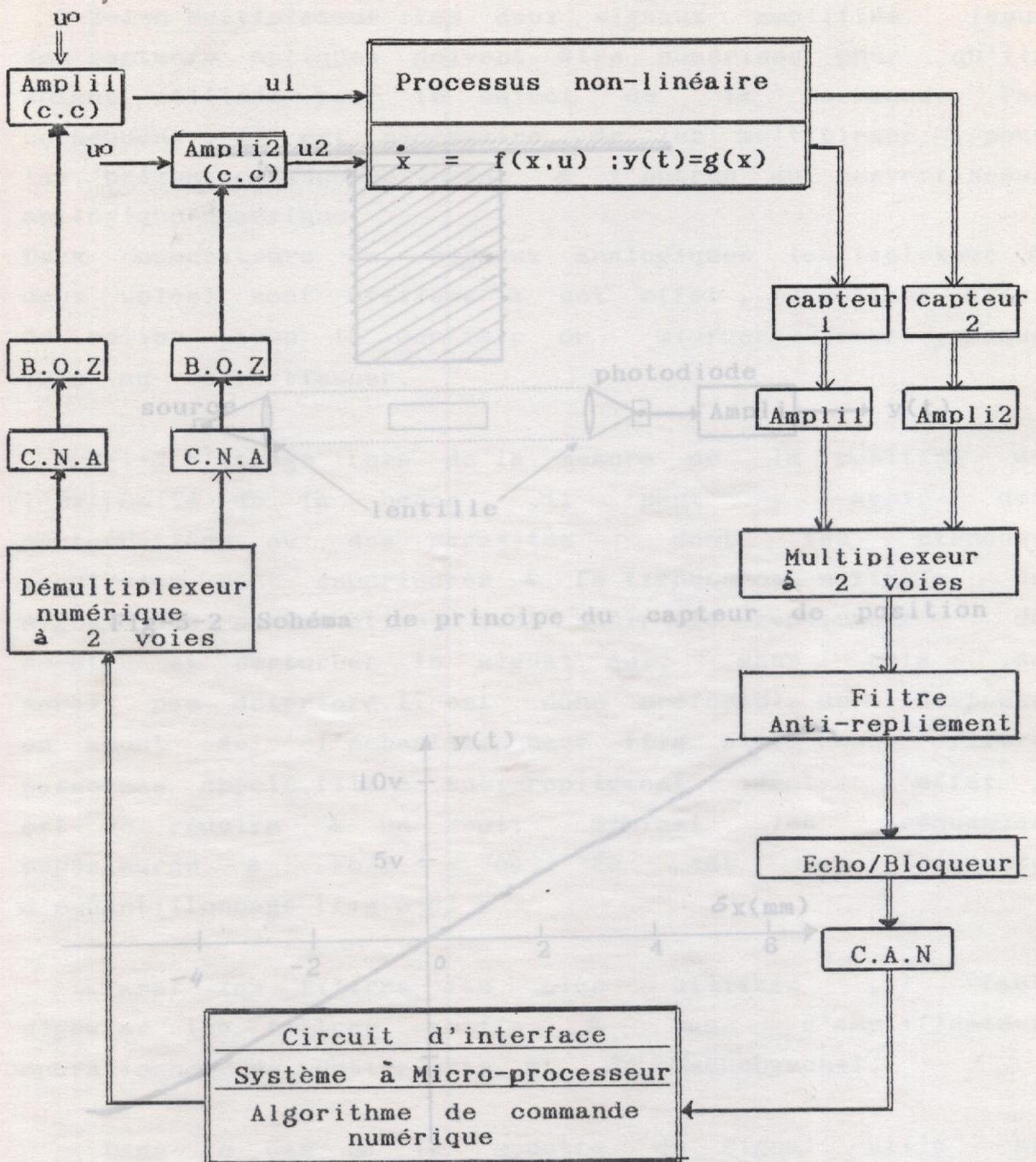
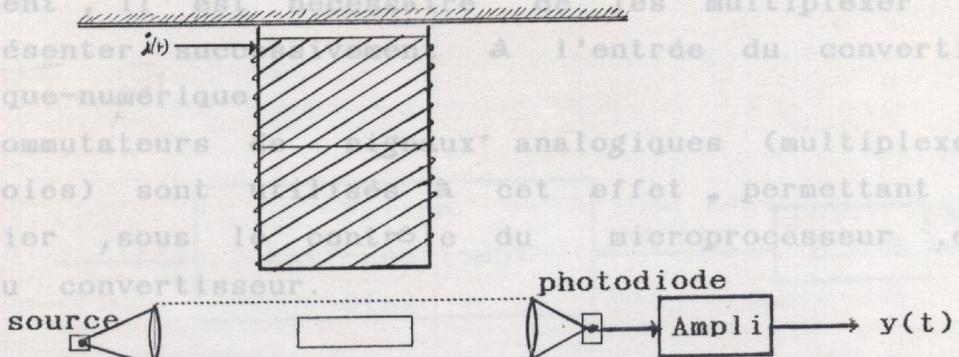


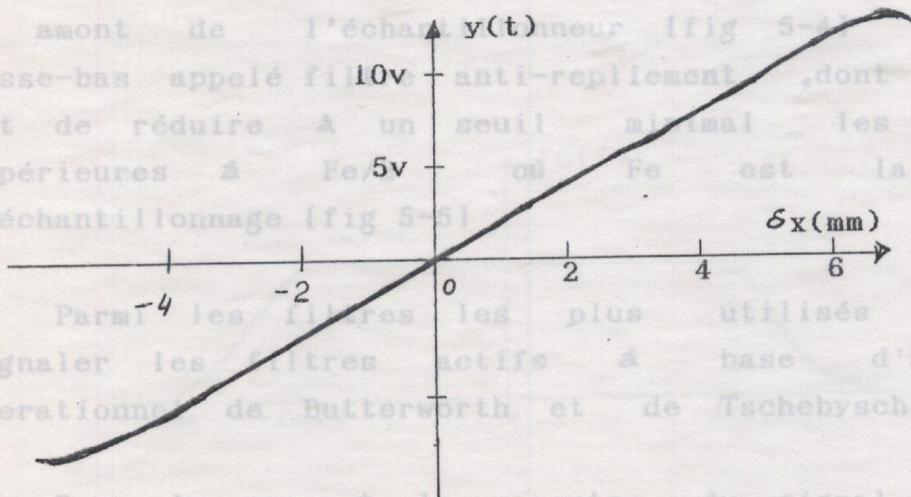
Fig 5-1 Schéma de la commande numérique de la lévitation magnétique d'une barre métallique

5-2-1-c Multiplexeur : Les deux signaux amplifiés issus des capteurs optiques doivent être numérisés pour qu'ils soient utilisés pour le calcul de la commande. Par conséquent, il est nécessaire de les multiplexer pour les présenter à l'entrée du convertisseur analogique-numérique. Deux commutateurs analogiques (multiplexeur à deux voies) sont utilisés à cet effet, permettant ainsi de relier, sous le contrôle du microprocesseur, chaque voie au convertisseur.



5-2-1-d Filtrage : Lors de la mesure de la position de l'extrémité de la barre, il peut y avoir des perturbations ou, des parasites dont les étendues spectrales sont supérieures à F_m (fréquence maximale du signal).

Fig-5-2 Schéma de principe du capteur de position du spectre et perturber le signal qui, sans cela, ne serait pas détérioré. Il est donc préférable de disposer en amont de l'échantillonneur (fig 5-4) un filtre passe-bas appelé filtre anti-repliement, dont l'effet est de réduire à un seuil minimal les fréquences supérieures à F_e où F_e est la fréquence d'échantillonnage (fig 5-5).



Parmi les filtres les plus utilisés, il faut signaler les filtres actifs à base d'amplificateur opérationnel de Butterworth et de Tschebyschef.

Dans le cas où le spectre du signal utile se trouve noyé dans un bruit dont la densité spectrale couvre une bande passante plus large, deux approches sont possibles, l'une d'entre elle conduit à un filtre optimal [26].

Fig -5-3 Caractéristique du capteur

5-2-1-c Multiplexeur : Les deux signaux amplifiés issus des capteurs optiques doivent être numérisés pour qu'ils soient utilisés pour le calcul de la commande. Par conséquent, il est nécessaire de les multiplexer pour les présenter successivement à l'entrée du convertisseur analogique-numérique.

Deux commutateurs de signaux analogiques (multiplexeur à deux voies) sont utilisés à cet effet, permettant ainsi de relier, sous le contrôle du microprocesseur, chaque voie au convertisseur.

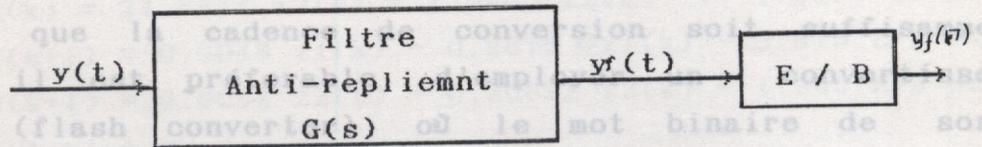
5-2-1-d Filtrage : Lors de la mesure de la position de l'extrémité de la barre, il peut y avoir des perturbations ou, des parasites dont les étendues spectrales sont supérieures à F_m (fréquence maximale du signal). Ces perturbations vont subir le repliement du spectre et perturber le signal qui, sans cela, ne serait pas détérioré. Il est donc préférable de disposer en amont de l'échantillonneur [fig 5-4] un filtre passe-bas appelé filtre anti-repliement, dont l'effet, est de réduire à un seuil minimal les fréquences supérieures à $F_e/2$ où F_e est la fréquence d'échantillonnage [fig 5-5].

Parmi les filtres les plus utilisés, il faut signaler les filtres actifs à base d'amplificateur opérationnel de Butterworth et de Tschebyschef.

Dans le cas où le spectre du signal utile se trouve noyé dans un bruit dont la densité spectrale couvre une zone beaucoup plus large, alors plusieurs approches sont possibles, l'une d'entre elle conduit à un filtre optimal [26].

5-2-1-c Numérisation du signal de mesure [22]: Le signal mesuré n'est connu qu'à des instants déterminés et cela grâce à l'échantillonneur-bloqueur qui offre la possibilité d'échantillonner le signal à ces instants et de bloquer la valeur prélevée pendant toute la durée de la conversion analogique-numérique.

Pour que la cadence de conversion soit suffisamment rapide, il est préférable d'appliquer un filtre anti-repliement parallèle (flash convertisseur) où le mot binaire de sortie est déterminé presque instantanément.



Lors du calcul de la période d'échantillonnage, il faut prendre en considération le temps d'ouverture (transition échantillonnage-blocage) appelé (aperture time) et du temps de conversion.

Fig 5-4

5-2-2 Elaboration de la commande numérique

L'algorithme de la commande du procédé multivariable est composé de deux sous-programmes, un pour l'estimateur réduit et l'autre pour le calcul de la commande par retour d'état. Pour élaborer un algorithme satisfaisant, il faut minimiser le nombre d'opérations (addition, multiplication, transfert ...) et cela pour réduire le temps de traitement des données. Par conséquent, les équations de la commande par retour d'état et de l'observateur réduit vus au chapitre 3 s'écrivent :

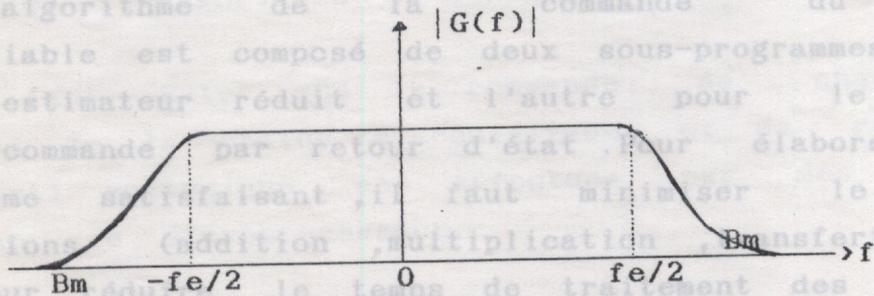


Fig 5-5 Bande passante du filtre anti-repliement

5-2-1-c Numérisation du signal de mesure [22]: Le signal mesuré n'est connu qu'à des instants déterminés et cela grâce à l'échantillonneur-bloqueur qui offre la possibilité d'échantillonner le signal à ces instants et de bloquer la valeur prélevée pendant toute la durée de la conversion analogique-numérique.

Pour que la cadence de conversion soit suffisamment rapide, il est préférable d'employer un convertisseur parallèle (flash converter) où le mot binaire de sortie est déterminé presque instantanément.

Lors du calcul de la période d'échantillonnage, il faut prendre en considération le temps d'ouverture (transition échantillonnage-blocage) appelé (aperture time) et du temps de conversion.

5-2-2 Elaboration de la commande numérique

L'algorithme de la commande du procédé multivariable est composé de deux sous-programmes, un pour l'estimateur réduit et l'autre pour le calcul de la commande par retour d'état. Pour élaborer un algorithme satisfaisant, il faut minimiser le nombre d'opérations (addition, multiplication, transfert) et cela pour réduire le temps de traitement des données. Par conséquent, les équations de la commande par retour d'état et de l'observateur réduit vus au chapitre 3 s'écrivent :

est représenté par l'algorithme de la fig 5-6 :

INITIALISATION

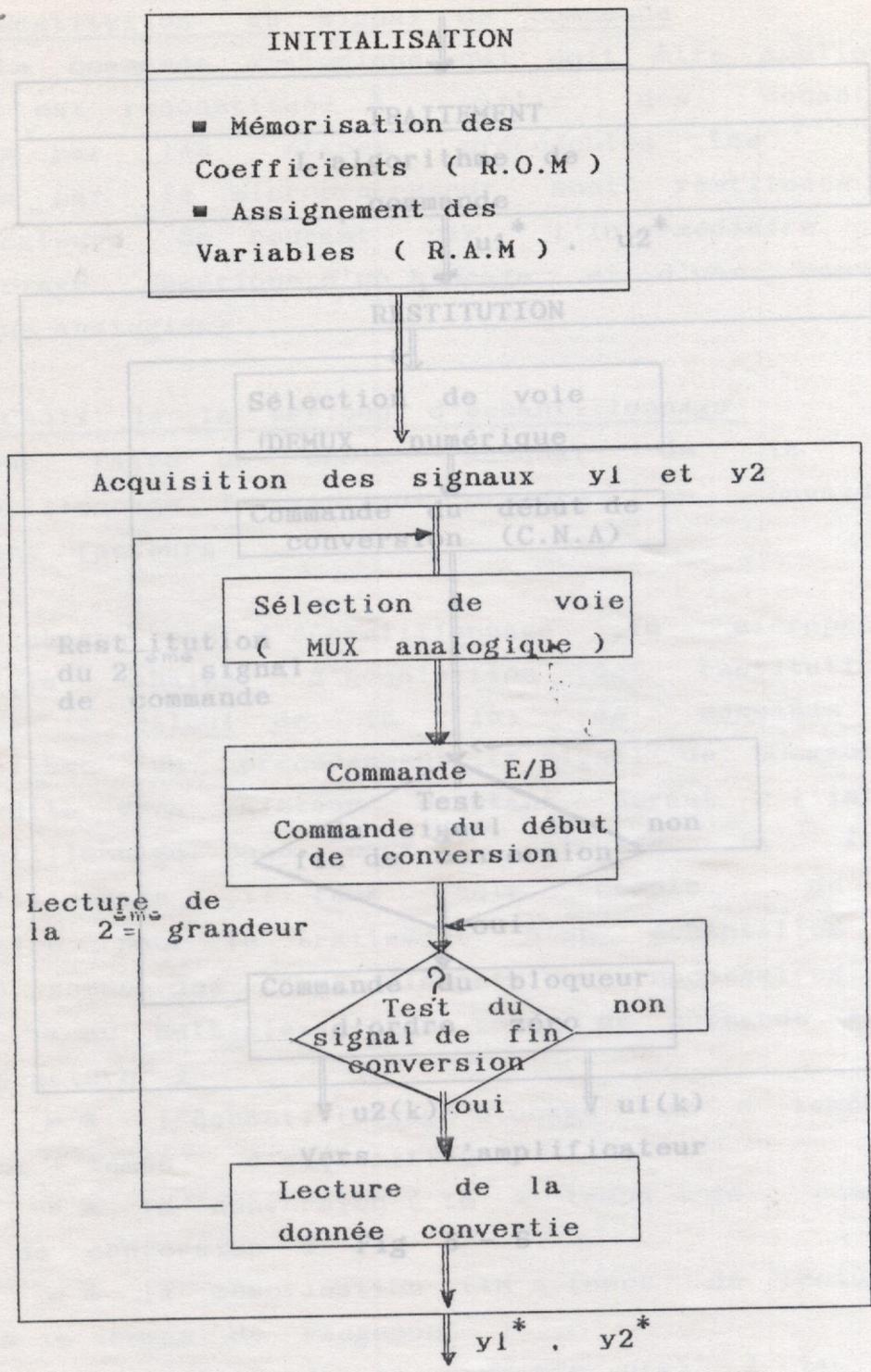
$$\left\{ \begin{array}{l} \delta x_1(k) = [y_1(k) + y_2(k)]/2 \\ x_3(k) = [y_1(k) - y_2(k)]/2 \\ x_0(k+1) = x_0(k) + 0.01 \delta x_1(k) \\ x_5(k+1) = x_5(k) + 0.01 x_3(k) \\ p_1(k) = 12.6500 x_0(k) + 24.9304 \delta x_1(k) + 1.9533 z_1(k) \\ p_2(k) = 24.5844 x_3(k) + 1.9905 z_2(k) + 1.9500 x_5(k) \\ z_1(k+1) = 0.9048 z_1(k) - 0.8875 \delta x_1(k) - 3.815 E-2 p_1 \\ z_2(k+1) = 0.9048 z_2(k) - 0.90612 x_3(k) - 1.905 E-2 p_2 \\ u_1 = p_1 + p_2 \\ u_2 = p_1 - p_2 \end{array} \right.$$

avec l'état initial : $\begin{cases} z_1(t_0) = - 9.53016 \delta x_1(t_0) \\ z_2(t_0) = - 9.55 x_3(t_0) \end{cases}$

L'emploi d'un microprocesseur à 16 bits peut diminuer considérablement le nombre d'instructions de transfert et augmenter la précision de traitement des données de l'algorithme ci-dessus.

Il faut noter que la commande de chacun des ensembles de la chaîne d'acquisition et de restitution du signal analogique est effectuée par des signaux émis par le microprocesseur.

Cette fonction de pilotage de la chaîne de mesure et de la restitution du signal analogique est représenté par l'algorithme de la fig 5- 6 :



5-2-3 Restitution du signal de commande

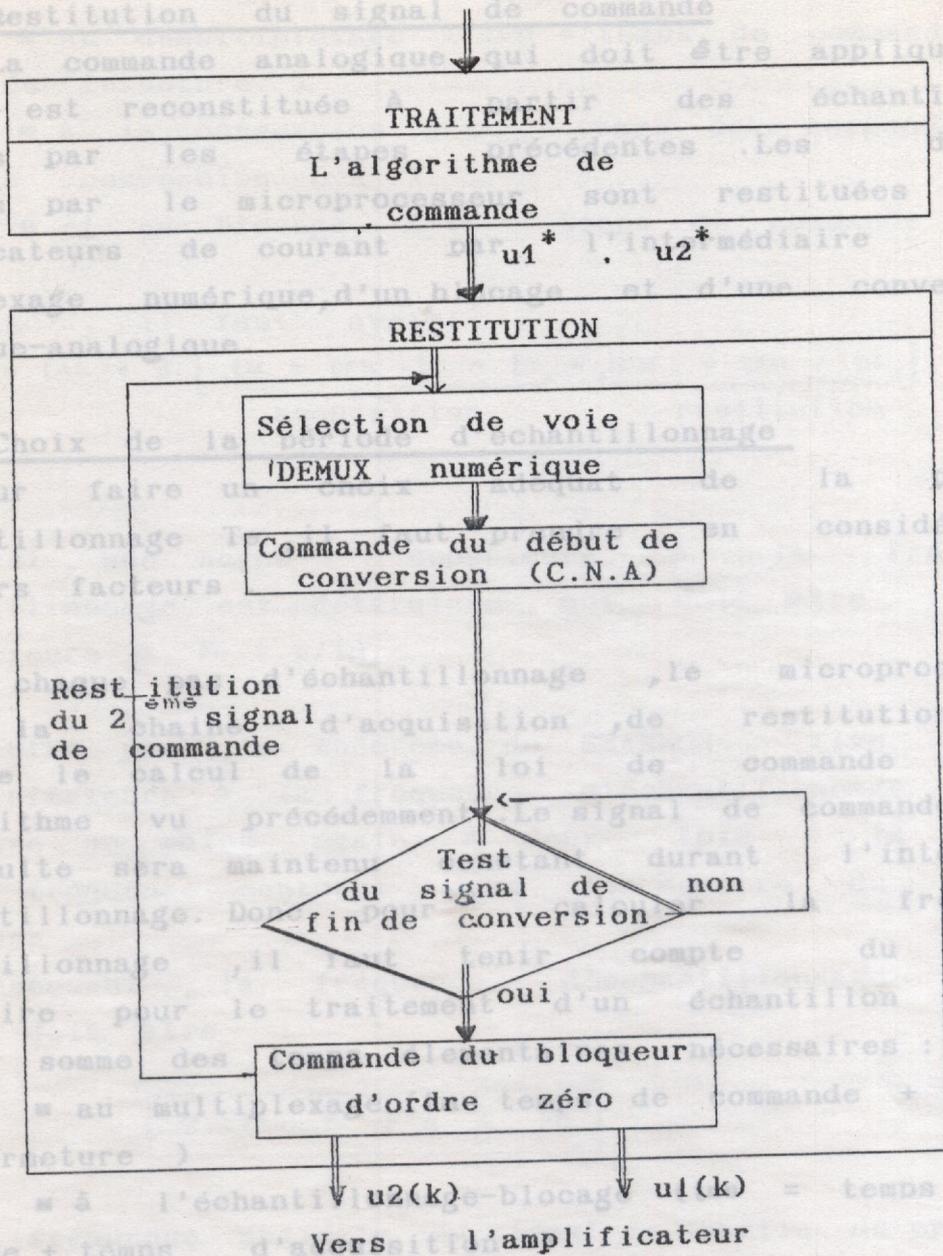
La commande analogique qui doit être appliquée au procédé est reconstituée à partir des échantillons élaborés par les circuits précédentes. Les données traitées par le microprocesseur sont restituées aux amplificateurs de courant par un médiaire d'un multiplexage numérique d'un blocage et d'une conversion numérique-analogique.

5-2-4 Choix de la période d'échantillonnage

Pour faire un choix adéquat de la période d'échantillonnage, il faut tenir compte de la période de plusieurs facteurs.

A la restitution d'échantillonnage, le microprocesseur pilote le signal d'acquisition, de restitution et effectue le calcul de la loi de commande selon l'algorithme vu précédemment. Le signal de commande qui en résulte sera maintenu constant durant l'intervalle d'échantillonnage. Donc, pendant l'intervalle de fréquence d'échantillonnage, il faut tenir compte du temps nécessaire pour le traitement d'un échantillon qui est la somme des temps nécessaires :

- * au multiplexage (t_m = temps de lecture des données + temps de rangement)
- * à l'échantillonnage-blocage (t_b = temps de commande + temps d'acquisition)
- * à la conversion (t_c = temps de commande + temps de conversion)
- * à la mémorisation (t_m = temps de lecture des données + temps de rangement)
- * au calcul de la commande $u(k)$ (t_{ca})



5-2-3 Restitution du signal de commande

La commande analogique qui doit être appliquée au procédé est reconstituée à partir des échantillons élaborés par les étapes précédentes. Les données traitées par le microprocesseur sont restituées aux amplificateurs de courant par l'intermédiaire d'un multiplexage numérique, d'un blocage et d'une conversion numérique-analogique.

5-2-4 Choix de la période d'échantillonnage

Pour faire un choix adéquat de la période d'échantillonnage T_e , il faut prendre en considération plusieurs facteurs.

A chaque pas d'échantillonnage, le microprocesseur pilote la chaîne d'acquisition, de restitution et effectue le calcul de la loi de commande selon l'algorithme vu précédemment. Le signal de commande qui en résulte sera maintenu constant durant l'intervalle d'échantillonnage. Donc pour calculer la fréquence d'échantillonnage, il faut tenir compte du temps nécessaire pour le traitement d'un échantillon qui est la somme des temps élémentaires nécessaires :

- au multiplexage ($t_m =$ temps de commande + temps de fermeture)
- à l'échantillonnage-blocage ($t_{eb} =$ temps de commande + temps d'acquisition)
- à la conversion ($t_c =$ temps de commande + temps de conversion)
- à la mémorisation ($t_m =$ temps de lecture des données + temps de rangement)
- au calcul de la commande $u(k)$ (t_{al})

■ au démultiplexage (t_{DM} = temps de commande + temps de fermeture)
 ■ à la conversion (t_{RD} = temps de commande + temps de conversion D-A)
 ■ et au blocage (t_B = temps de commande)

Donc, il faut avoir :

$$T_e \geq T_d = t_{AL} + 2 \cdot \left(\underbrace{t_M + t_{EB} + t_C + t_m}_{\text{acquisition}} + \underbrace{t_{DM} + t_{RD} + t_B}_{\text{restitution}} \right)$$

Il faut noter que l'augmentation de la période d'échantillonnage réduit la région de stabilité. Ainsi, une borne supérieure à la fréquence d'échantillonnage est déterminée, qui doit être égale ou inférieure à $F_D = 1/T_d$.

En conclusion, le choix de la période d'échantillonnage dépend de la fréquence du signal de mesure. D'autre part, le théorème de SHANNON fixe une borne inférieure à la fréquence d'échantillonnage qui doit être au moins égale à deux fois la plus grande fréquence contenue dans le spectre du signal de mesure.

Par conséquent, la fréquence d'échantillonnage F_s à choisir doit être :

$$2 \cdot f_{\max} \leq F_s \leq F_D$$

La fréquence maximale du signal de sortie du procédé multivariable bouclé par retour d'état est de 10 Hz. Donc pour la simulation de l'évolution du processus non-linéaire commandé par retour d'état discret :

$f_s = 10 f_{\max} = 100 \text{ Hz}$ d'où $T_e = 0.01 \text{ s}$

(on suppose que $f_D \gg f_s$)

5-3-1 Erreurs de quantification

En plus de ces considérations, on doit tenir compte de la qualité de réglage et du comportement dynamique du processus en boucle fermée. Ainsi, le choix de la période d'échantillonnage dépend aussi des performances désirées (temps de réponse ou bande passante du système bouclé et surtout le domaine de stabilité ...).

Il faut noter que l'augmentation de la période d'échantillonnage réduit la région de stabilité.

Ainsi pour $T_e = 0.1$ s le domaine de stabilité se confond uniquement avec le point d'équilibre Xe.

En conclusion, le choix de la période d'échantillonnage pose un problème important et dépend principalement du spectre du signal à échantillonner, des performances désirées, ainsi que le temps d'occupation qui est nécessaire pour le microprocesseur dans la tâche de commande.

5-3 PROBLEMES POSES PAR L'UTILISATION D'UN MICROPROCESSEUR DANS LA COMMANDE DU PROCÉDE [24]

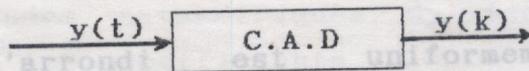
L'utilisation d'un microprocesseur dans la boucle de commande du procédé de lévitation magnétique d'une barre métallique pose un certain nombre de problèmes théoriques et techniques, qui sont analysés dans ce paragraphe. Ils sont dus essentiellement à la façon dont le microprocesseur traite l'information. Il manipule des nombres, d'où le problème de quantification et de codage.

5-3-1 Erreurs de quantification

La quantification, c'est à dire la représentation d'une grandeur par un nombre multiple d'un quantum ou pas d'échantillonnage, introduit des erreurs. Ces dernières apparaissent non seulement au niveau de la numérisation des mesures par le convertisseur analogique-numérique, mais aussi lors du traitement de ces nombres (erreurs de troncature et d'arrondi, plus ou moins accentuées par la nature de la structure de l'algorithme de la commande numérique).

On distingue trois sources d'erreurs numériques :

a) source 1: Erreur due à la numérisation du signal de mesure (voir fig 5-7).



où:

q : pas de quantification

T : période d'échantillonnage

ϵ_T : erreur de troncature

ϵ_R : erreur d'arrondi

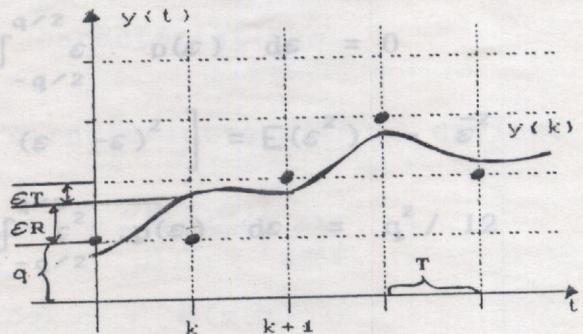


Fig 5 - 7

b) source 2: Erreur de troncature ou d'arrondi lors du traitement des nombres (multiplication, addition ...).

c) source 3: Erreur de troncature ou d'arrondi lors du stockage des coefficients de l'estimateur et du régulateur.

L'erreur instantanée de quantification ε est évidemment fonction du pas de quantification :

$$\varepsilon = \phi(y) - y = \varepsilon(y, q, t)$$

où $\phi(y)$ est la représentation numérique du nombre y par $q = V_{\max}/2^c$ est le pas d'échantillonnage où c est la longueur du mot binaire.

L'erreur de troncature est uniformément distribuée le long de l'intervalle : $[0, q]$ avec

- une moyenne $\bar{\varepsilon}_T = \int_0^q \varepsilon \cdot p(\varepsilon) \, d\varepsilon = q/2$
 - une variance $\sigma_T^2 = E[(\varepsilon - \bar{\varepsilon})^2] = E(\varepsilon^2) - \bar{\varepsilon}^2$
- $$\sigma_T^2 = \int_0^q \varepsilon^2 \cdot p(\varepsilon) \, d\varepsilon - q^2/2 = q^2/12$$

L'erreur d'arrondi est uniformément distribuée le long de l'intervalle : $[-q/2, q/2]$ avec

- une moyenne $\bar{\varepsilon}_r = \int_{-q/2}^{q/2} \varepsilon \cdot p(\varepsilon) \, d\varepsilon = 0$
 - une variance $\sigma_r^2 = E[(\varepsilon - \bar{\varepsilon})^2] = E(\varepsilon^2) - \bar{\varepsilon}^2$
- $$\sigma_r^2 = \int_{-q/2}^{q/2} \varepsilon^2 \cdot p(\varepsilon) \, d\varepsilon = q^2/12$$

Il faut noter que la variance σ de l'erreur de quantification peut être amplifiée par l'algorithme de commande avec une cadence d'échantillonnage élevée. Ainsi, pour réduire la variance σ , il faut de toute évidence diminuer le quantum q , autrement dit il faut augmenter le nombre de bit du mot binaire.

5- 3-2- L'effet des erreurs de quantification sur la dynamique du procédé

La quantification est un phénomène non-linéaire qui pose des problèmes de stabilité au procédé contrôlé par une commande discrète. Ainsi, les erreurs de quantification peuvent conduire le système bouclé par retour d'état à des cycles limites, voire même à l'instabilité [25].

La dynamique du procédé bouclé par retour d'état (processus + retour d'état + intégrateurs + observateur réduit) est décrit par l'équation caractéristique suivante:

$$P(z, \alpha) = z^8 + \alpha_1 z^7 + \alpha_2 z^6 + \dots + \alpha_7 z + \alpha_8 = 0 \quad (5-1)$$

Les erreurs de quantification vues précédemment ou même les incertitudes paramétriques du modèle du procédé, peuvent varier les coefficients α_k de l'équation caractéristique $P(z, \alpha)$. Ainsi, une variation de $\delta\alpha_k$ du coefficient α_k du polynôme (5-1) entraîne une variation des racines de l'équation caractéristique.

Pour un pôle λ_j , l'équation caractéristique (5-1) devient :

$$P(\lambda_j + \delta\lambda_j, \alpha_k + \delta\alpha_k) = P(\lambda_j, \alpha_k) + \left. \frac{\partial P(z, \alpha)}{\partial z} \right|_{z=\lambda_j} \delta\lambda_j +$$

$$\left. \frac{\partial P(z, \alpha)}{\partial \alpha_k} \right|_{z=\lambda_j} \delta\alpha_k + \theta(z, \alpha)$$

Alors, il suffit d'avoir une variation de 0.005 avec : $P(\lambda_j, \alpha_k) = 0$ et en négligeant $\theta(z, \alpha)$, alors la variation du pôle λ_j est donnée par :

$$\delta\lambda_j = - \frac{\left[\frac{\partial P(z, \alpha)}{\partial \alpha_k} \right]}{\left[\frac{\partial P(z, \alpha)}{\partial z} \right]} \Bigg|_{z=\lambda_j} \delta\alpha_k \quad (5-2)$$

5-4 CONCLUSION

A partir de l'équation (5-1) :

$$\frac{\partial P(z, \alpha)}{\partial \alpha_k} \Bigg|_{z=\lambda_j} = z^{\theta-k} \Bigg|_{z=\lambda_j} = \lambda_j^{\theta-k} \quad (5-3)$$

Le polynôme caractéristique peut s'écrire :

$$P(z, \alpha) = (z - \lambda_1)(z - \lambda_2) \dots (z - \lambda_\theta)$$

alors on a :

$$\frac{\partial P(z, \alpha)}{\partial z} \Bigg|_{z=\lambda_j} = \prod_{i \neq j}^{\theta} (\lambda_j - \lambda_i) \quad (5-4)$$

La variation du pôle devient :

$$\delta\lambda_j = - \frac{\lambda_j^{\theta-k}}{\prod_{i \neq j}^{\theta} (\lambda_j - \lambda_i)} \delta\alpha_k \quad (5-5)$$

Ainsi donc les erreurs de quantification des coefficients de la commande discrète influent sur la dynamique du procédé bouclé par retour d'état.

Par exemple, un choix du pôle de l'observateur réduit à $S_j = -5$ avec une cadence d'échantillonnage de 1kHz donne : $\lambda_j = 0.995$

Alors, il suffit d'avoir une variation de 0.005 pour que le système oscille ou même se déstabilise. Pour cela, il est recommandé de choisir des pôles légèrement éloignées du pôle $z = 1$.

CONCLUSION GENERALE

5- 4 CONCLUSION

La lévitation magnétique supprimant les contacts physiques a été vue comme une solution radicale au problème. On a évoqué dans ce chapitre, l'aspect pratique de la commande discrète par retour d'état de la lévitation magnétique d'une barre métallique, ainsi que les précautions à prendre en ce qui concerne le choix des pôles de contrôle et la longueur du mot binaire à utiliser. En effet, les erreurs de quantification peuvent conduire le processus non-linéaire à l'instabilité. Le point d'équilibre forme un noeud instable.

Enfin, il faut noter que plusieurs facteurs doivent être pris en considération pour le calcul de la fréquence et d'échantillonnage. La commande qui stabilise le processus dans une région de l'espace d'état satisfaisant, entourant le point d'équilibre.

L'analyse du processus de lévitation magnétique d'objet métallique a abouti à un modèle mathématique non-linéaire avec un seul point d'équilibre instable. Ainsi donc, le choix de la commande par retour d'état a été motivé par la nécessité du changement de la dynamique du procédé autour du point d'équilibre, en plaçant des pôles stables avec un temps de réponse adéquat.

On a traité dans cette thèse deux cas de lévitation électro-magnétique d'objet métallique :

- * lévitation magnétique d'une balle métallique (système mono-variable).
- * lévitation magnétique d'une barre métallique (système multi-variable).

CONCLUSION GENERALE

La lévitation magnétique supprimant les contacts physiques a été vue comme une solution radicale au problème de l'interaction rail/voie des trains à grande vitesse.

La méthode de suspension électro-magnétique, utilisant des électro-aimants alimentés par le courant continu, peut réduire le coût d'infrastructure pour son exploitation. En revanche le système résultant est instable et son point d'équilibre forme un noeud instable.

La présente étude a été entreprise dans le but de synthétiser une loi de commande qui stabilise le processus dans une région de l'espace d'état satisfaisant, entourant le point d'équilibre.

L'analyse du processus de lévitation magnétique d'objet métallique a aboutit à un modèle mathématique non-linéaire avec un seul point d'équilibre instable. Ainsi donc, le choix de la commande par retour d'état a été motivé par la nécessité du changement de la dynamique du procédé autour du point d'équilibre, en plaçant des pôles stables avec un temps de réponse adéquat.

On a traité dans cette thèse deux cas de lévitation électro-magnétique d'objet métallique :

- lévitation magnétique d'une balle métallique (système mono-variable).
- lévitation magnétique d'une barre métallique (système multi-variable).

Les résultats que nous avons obtenus en simulation, ont permis de mettre plus particulièrement en évidence les points suivants:

1- La représentation d'état de l'évolution du processus présente des avantages intéressants tels que:

- la connaissance à priori du domaine de stabilité du processus commandé par retour d'état.
- la commande du système multi-variable est effectuée en tenant compte du couplage des deux chaînes du procédé.

2- L'introduction d'observateur (réduit) dans la boucle de commande réduit l'espace de la région de stabilité du système mono-variable.

3- Le domaine de l'espace d'état où le processus est stabilisé, dépend :

- des pôles placés par retour d'état (temps de réponse et l'amortissement).
- de la période d'échantillonnage pour le cas discret.

4- L'introduction de deux intégrateurs (continu et discret) dans la boucle de commande réduit l'influence des perturbations et des erreurs d'identification sur l'évolution du procédé.

Il est à noter que la commande par placement de pôles stables a été utilisée dans le but d'accroître le domaine de stabilité du processus non-linéaire et d'améliorer la robustesse du système.

Enfin , nous avons terminé notre travail par l'étude d'une implantation à base d'un microprocesseur de la commande par retour d'état du procédé multi-variable . En outre , nous avons insisté sur les précautions à prendre pour sa mise en oeuvre.

En ce qui concerne les perspectives de ce travail, nous pouvons citer :

- Amélioration du domaine de stabilité du processus multi-variable contrôlé par une commande non-linéaire ou adaptative .

- Réalisation du procédé de lévitation .

- Etude du cas de plusieurs électro-aimants (avec déplacement linéaire de l'objet à suspendre) .

- Mise en exploitation réelle de cette technique de lévitation magnétique dans divers domaines de l'industrie (robotique ,récupération des objets métalliques ,transport urbain).

BIBLIOGRAPHIE

1. Braunbeck, W.
"Free suspension of bodies in electric and magnetic fields". Zeitschrift für Physik, 112, 11, pp:753-83 (1939).
2. Arkadiev, V.
"Hovering of magnet over superconductor". Journal of physics, Moscow, 9, 2, pp:148 (1945).
3. Lashwaite, E.R.
"Electrostatic suspension of a magnet". Proc. IEE, 112, 12, pp:2361-75 (1965).
4. Pfann, W.G. and Hagelbarger
"Electromagnetic Suspension of mother zone". Journal of applied physics, 27, 2, pp:12-8 (1956).
5. Knobel, H.W.
"Electric Vacuum gyro". Control Engineering, 11, 2, pp:70-3, Feb 1964).
6. Hagihara, S.
"The performance and stability of magnetic suspension device using a tuned L.C.R. circuit". Proc. IEE, 125, 2, pp: 153-6 (1978).

7. Kaplan, B. ZITBLIOGRAPHIE

- "Dynamic stabilisation of tuned circuit levitators" Trans. IEE on magnetic, 12, 5, pp: 753-63 (1976)
1. Braunbeck, W. (1976)
"Free suspension of bodies in electric and magnetic fields" Zeitschrift fur physik, 112, 11, pp: 753-63 (1939) Rea, D.P.
"New electromagnetic suspension and its stabilisation" Proc. IEE, vol 115, N° 4, pp: 941-8 (1976)
2. Arkadiev, V. (April 1968)
"Hovering of magnet over superconductor" Journal of physics, Moscow, 9, 2, pp: 148 (1945)
9. Jayawant, B.V.; Sinha, P.K.; Wheeler, A.R.; Whorlow, R and Willsher, S.
3. Laithwaite, E.R. et al. of a 1 ton magnetically "Electromagnetic Levitation" using controlled DC Proc. IEE, 112, 12, pp: 2361-75 (1965) 9, pp: 941-8 (1976).
4. Pfann, W.G. and Hagelbarger
10. "Electromagnetic Suspension of mother zone" Journal of applied physics, 27, 2, pp: 12-8 (1956)
UKAEA Cuthan lab reprint N° CLM P458 (May 1974).
5. Knobel, H.W.
"Electric Vacuum gyro" Control Engineering, 11, 2, pp: 70-3, Feb 1964
"Champs et ondes électromagnétiques" chap: 8, 9, Edition Armand Collin (1979).
6. Hagihara, S.
12. "The performance and stability of magnetic suspension device using a tuned L.C.R. circuit". Proc. IEE, 125, 2, pp: 153-6 (1978)

7. Kaplan , B . Z
 "Dynamic stabilisation of tuned circuit levitators" Trans.IEEE on magnetic , 12 , 5 . pp: 556-69 (1976)
8. Jayawant , B.V and Rea , D.P
 "New electromagnetic suspension and its stabilisation " Proc .IEE , vol 115 , N° 4 . pp: 549-54 (April 1968)
9. Jayawant , B.V ;Sinha , P.K ; Wheeler , A.R ; Whorlow, R and Willsher ,S .
 "The development of a 1 ton magnetically suspended vehicle using controlled DC electromagnetic". Proc. IEE , 123 , 9 pp:941 -8 (1976).
10. Bevir , M.K.
 "The stability of electromagnetic levitation system for solid bodies ". UKAEA Cuthan.lab reprint N° CLM P458 (May 1974).
11. P.Lorrain et D.R Corson.
 "Champs et ondes électromagnétiques " chap:8,9. Edition Armand Collin (1979).
12. Jean-charles Gille.
 "Introduction aux systèmes asservis non-linéaires". Dunod 2^{ème} edition (1984).



19. Jayawant .B.V .

13. Jordan .D.W and Smith .P.
 "Non-linear ordinary differential equations ".
 OXFORD UNIVERSITY PRESS (1977).

20. Cleve Moler , John Little , Steve Barget and
 14. Hilding Elmqvist ,Karl Johan Aström and Tomas
 shönheral.
 "SIMNON user's guide for MS-DOS Computer ".
 Version 1.0 August 1986.

15. Benjamin C. Kuo .
 "Digital control system ".
 Holt-Saunders International Edition hs (1980).

16. C.Foulard . S.Gentil . J.P Sanderaz .
 "Commande et régulation par calculateur
 numérique : de la théorie aux
 applications". pp:72 Edition Eyrolles (1977).

17. John .J D'azzo and Constantine H.Houpis .
 "Linear control system :Analysis and design".
 Mc GRAW-HILL (1981)

23. P.N Murgatroyd . A.T Carmichael and J.P Thomas .
 18. P.M Silson .R.W Dunn .B.A White.
 "Modelling and control of linear synchronous
 motor driver levited vehicle".
 Proc. IEE control'85 conf.Pub N° 252 pp:540-544.

19. Jayawant .B.V .
24. "Are we in control ?". H.Try Nagre Jr.
Proc .IEE Part D VOL.135 N° 4 (Jan 1988).
by Prentice-Hall, Inc (1984)
20. Cleve Moler , John Little ,Steve Barget ,and
25. Steve Klerman. and Bjorn Wittenmark .
"PC-MATLAB for MS-DOS Personal Computer Design user
guide". Version 1.2.2 January 1986. (1984).
The Math-Works ,Inc.
26. Paul Katz.
21. D.Fondal "control using microprocessors".
"Contribution à la synthèse de (ila) commande
dynamique de système multi-dimensionnels".
Thèse Docteur-Ingénieur ,Université Scientifique
27. et Médicale de Grenoble (1971).
"An Introduction to observers".
IEEE Trans. on Automatic-control ,vol :AC :16 N° 6
22. Takeshi Tsuchiy. (Dec 1971).
"Improved direct digital control algorithm for
microprocessor Implementation".
28. IEEE Trans. Automatic-Control , vol AC:27 N°2
pp:295-306 (April 1982).
IEEE Trans. On Automatic-control ,vol : AC :11 N°2
pp: 190-7 (April 1966).
23. P.N Murgatroyd , A.T Carmichael and J.P Thomas .
"Improved differential optical position detector
for magnetic suspension system".
Rev.Sci Instrum . 56(8) pp: 1666-8 (August 85)

24. Charles L. Phillips and H. Try Nagre Jr.
"Digital control systems .Analysis and design".
by Prentice-Hall. Inc (1984)
25. Karl .J. Astrom and Bjorn Wittenmark .
"Computer controlled systems ,Theory and Design ".
Prentice Hall ,Inc Englewood cliffs (1984).
26. Paul Katz.
"Digital control using microprocessors ".
Prentice . Hall International ,Inc (1981).
27. David G.Luenberger .
"An Introduction to observers ".
IEEE Trans. on Automatic-control ,vol :AC :16 N° 6
pp : 596-602 (Dec 1971).
28. David G.Luenberger.
"Observer for multivariable systems ".
IEEE Trans. On Automatic-control ,vol : AC :11 .N°2
pp: 190-7 (April 1966).

A-1 OBSERVATEUR D'ETAT COMPLET :

En principe, l'observateur d'état est un modèle de système linéaire à régler et la différence intervient par une contre réaction interne à l'observateur sur ce dernier afin d'adapter son état à l'état du système de commande.

Le modèle du système linéaire est donné par l'équation dynamique:

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = A x(t) + B u(t) \\ y(t) = C x(t) \end{cases} \quad (A-1-1)$$

ANNEXE

Un observateur d'état complet est un système dynamique linéaire dont l'état est $\hat{x}(t)$ ($n \times 1$) tel que [27.38]:

$$\begin{cases} \dot{\hat{x}}(t) = A \hat{x}(t) + B u(t) + L [y(t) - \hat{y}(t)] \\ \text{avec } \hat{y}(t) = C \hat{x}(t) \end{cases} \quad (A-1-2)$$

L'erreur d'estimation est définie par :

$$e(t) = x(t) - \hat{x}(t)$$

Ainsi, l'équation dynamique de l'erreur est:

$$\dot{e}(t) = \left[A - L C \right] e(t) \quad (A-1-3)$$

Cette équation représente l'évolution dynamique de l'erreur d'estimation du système (A-1-1)

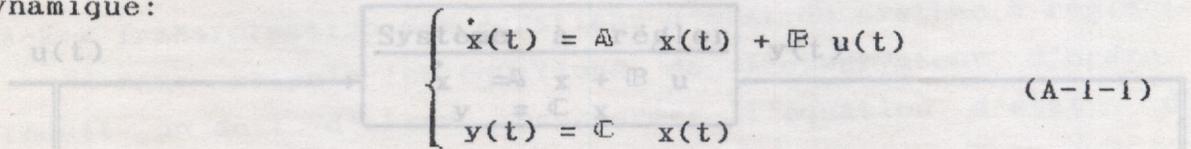
A-OBSERVATEUR D'ETAT CONTINU

est observable, on peut trouver une matrice L ($n \times n$) de telle sorte que toutes les valeurs propres de la matrice $[A - L C]$ aient une valeur inférieure à zéro, l'erreur d'estimation converge vers zéro, avec une dynamique fixée par les valeurs propres de l'équation (A-1-3)

A-1 OBSERVATEUR D'ETAT COMPLET :

En principe, l'observateur d'état est un modèle du système linéaire à régler et la différence intervient par une contre réaction interne à l'observateur sur ce dernier afin d'adapter son état à l'état du système de commande.

Le modèle du système linéaire est donné par l'équation dynamique:



Un observateur d'état complet est un système dynamique linéaire d'ordre n dont l'état est $\hat{x}(t)$ ($n \times 1$) tel que [27,28]:

$$\begin{cases} \dot{\hat{x}}(t) = A \hat{x}(t) + B u(t) + L [y(t) - \hat{y}(t)] \\ \text{avec } \hat{y}(t) = C \hat{x}(t) \end{cases} \quad (A-1-2)$$

L'erreur d'estimation est définie par :

$$e(t) = x(t) - \hat{x}(t)$$

Ainsi, l'équation dynamique de l'erreur est:

$$\dot{e}(t) = \begin{bmatrix} A & -L C \end{bmatrix} e(t) \quad (A-1-3)$$

Cette équation représente l'évolution dynamique de l'erreur d'estimation. Par conséquent, si le système (A-1-1) est observable, on peut trouver une matrice \mathbb{L} ($n \times m$) de telle sorte que toutes les valeurs propres de la matrice $[\mathbb{A} - \mathbb{L} \mathbb{C}]$ aient une valeur inférieure à zéro, l'erreur d'estimation tendra asymptotiquement vers zéro, avec une dynamique fixée par les valeurs propres de l'équation (A-1-3).

STRUCTURE DE L'OBSERVATEUR: La structure de l'observateur d'état est représentée à la figure A-1.

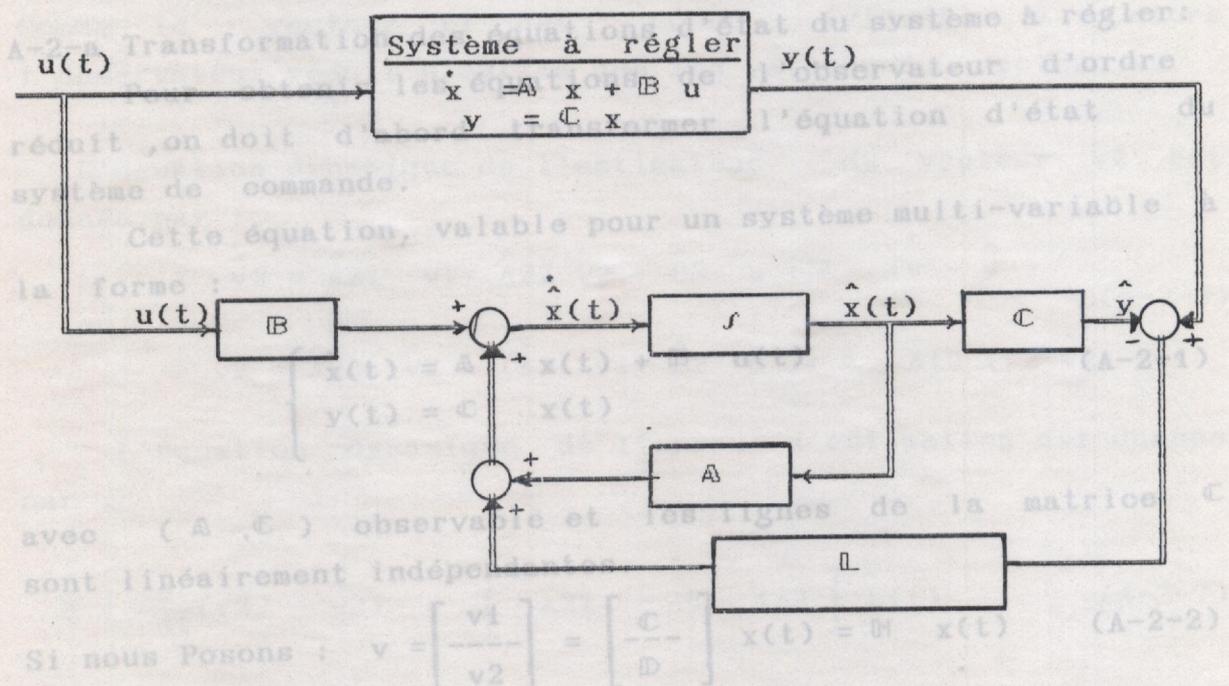


Fig A-1 Diagramme structurel du système à contrôler et de son observateur d'état

La matrice \mathbb{D} est choisie de manière à ce que la matrice \mathbb{M} soit "non-singulière".

L'équation (A-2-1) se transformera en :

A-2-OBSERVATEUR D'ORDRE REDUIT

Lors de la définition du vecteur d'état de l'observateur complet, on ne tient pas compte de l'information fournie par le système à régler (le vecteur de sortie $y(t)$). Il est judicieux d'utiliser cette grandeur pour déterminer partiellement le vecteur d'état. On peut alors construire un observateur d'ordre réduit, c'est à dire avec un ordre inférieur à n (l'ordre du système), pour estimer les valeurs restantes du vecteur d'état.

A-2-a Transformation des équations d'état du système à régler :

Pour obtenir les équations de l'observateur d'ordre réduit, on doit d'abord transformer l'équation d'état du système de commande.

Cette équation, valable pour un système multi-variable à la forme :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = A x(t) + B u(t) \\ y(t) = C x(t) \end{cases} \quad (A-2-1)$$

avec (A, C) observable et les lignes de la matrice C sont linéairement indépendantes.

Si nous posons :

$$v = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C \\ D \end{bmatrix} x(t) = M x(t) \quad (A-2-2)$$

Le couple (A, C) est observable si et seulement si (A, C) est observable.

La matrice D est choisie de manière à ce que la matrice M soit "non-singulière".

Le calcul des coefficients de la matrice de contre-réaction L s'effectue en utilisant la relation (A-2-2). L'équation (A-2-1) se transformera en :

$$\text{Pour } \dot{v}(t) = M \hat{A} M^{-1} v(t) + M \left(\frac{d}{dt} B \right) u(t) \quad (\text{A-2-3})$$

variable suivante :

$$\text{où } \dot{v}(t) = \hat{A} v(t) + \hat{B} u(t) \quad (\text{A-2-8})$$

On obtient avec $\hat{A} = M \hat{A} M^{-1}$ et $\hat{B} = M B$ observateur réduit :

Cette équation peut être écrite sous la forme :

$$\dot{v} = G_1 v + G_2 y + G_3 u \quad (\text{A-2-9})$$

$$\text{soit } \begin{cases} \dot{v}_1 = \hat{A}_{11} v_1 + \hat{A}_{12} v_2 + \hat{B}_1 u \\ \dot{v}_2 = \hat{A}_{21} v_1 + \hat{A}_{22} v_2 + \hat{B}_2 u \end{cases} \quad (\text{A-2-4})$$

Les équations de l'observateur réduit sont :
Comme le vecteur v_1 est connu ($v_1 = y(t)$), alors l'observateur réduit n'estime que les valeurs du vecteur v_2 .

$$\dot{\hat{v}}_2 = \hat{A}_{21} y + \hat{A}_{22} \hat{v}_2 + \hat{B}_2 u + L (y - \hat{y}) \quad (\text{A-2-10})$$

L'équation dynamique de l'estimateur du vecteur v_2 est donnée par :

$$\dot{\hat{v}}_2 = \hat{A}_{21} v_1 + \hat{A}_{22} \hat{v}_2 + \hat{B}_2 u + L (y - \hat{y}) \quad (\text{A-2-6})$$

$$\text{ou } \dot{\hat{v}}_2 = \hat{A}_{22} \hat{v}_2 + (\hat{A}_{21} v_1 + \hat{B}_2 u) + L \hat{A}_{12} (v_2 - \hat{v}_2)$$

L'équation dynamique de l'erreur d'estimation est donnée par :

$$\dot{e} = \frac{d}{dt} (v_2 - \hat{v}_2) = \left[\hat{A}_{22} - L \hat{A}_{12} \right] e(t) \quad (\text{A-2-7})$$

Le couple $(\hat{A}_{22}, \hat{A}_{12})$ est observable si et seulement si (A, C) est observable [27,28].

Dans ce cas, on peut trouver la matrice L qui fixe la dynamique de l'observateur réduit et de l'erreur d'estimation $e(t)$.

Le calcul des coefficients de la matrice de contre-réaction \mathbb{L} s'effectue en utilisant la relation $[\hat{A}_{22} - \mathbb{L} \hat{A}_{12}]$ et les méthodes classiques de placement de pôles.

Pour éviter le calcul de \dot{y} ($\frac{dy}{dt}$), on introduit la variable suivante:

$$\hat{W} = \hat{V}_2 - \mathbb{L} v_1 \quad (\text{A-2-8})$$

On obtient l'équation dynamique de l'observateur réduit:

$$\dot{\hat{W}} = G_1 \hat{W} + G_2 y + G_3 u \quad (\text{A-2-9})$$

où : $G_1 = \hat{A}_{22} - \mathbb{L} \hat{A}_{12}$, $G_2 = \hat{A}_{21} - \mathbb{L} \hat{A}_{11} + (\hat{A}_{22} - \mathbb{L} \hat{A}_{12}) \mathbb{L}$

$G_3 = \hat{B}_2 - \mathbb{L} \hat{B}_1$

Les équations de l'observateur réduit sont :

$$\begin{cases} \dot{\hat{W}} = G_1 \hat{W} + G_2 y + G_3 u \\ \hat{v}_2 = \hat{W} + \mathbb{L} y \\ \hat{x} = \mathbb{M}^{-1} \begin{bmatrix} y \\ \hat{v}_2 \end{bmatrix} \end{cases} \quad (\text{A-2-10})$$

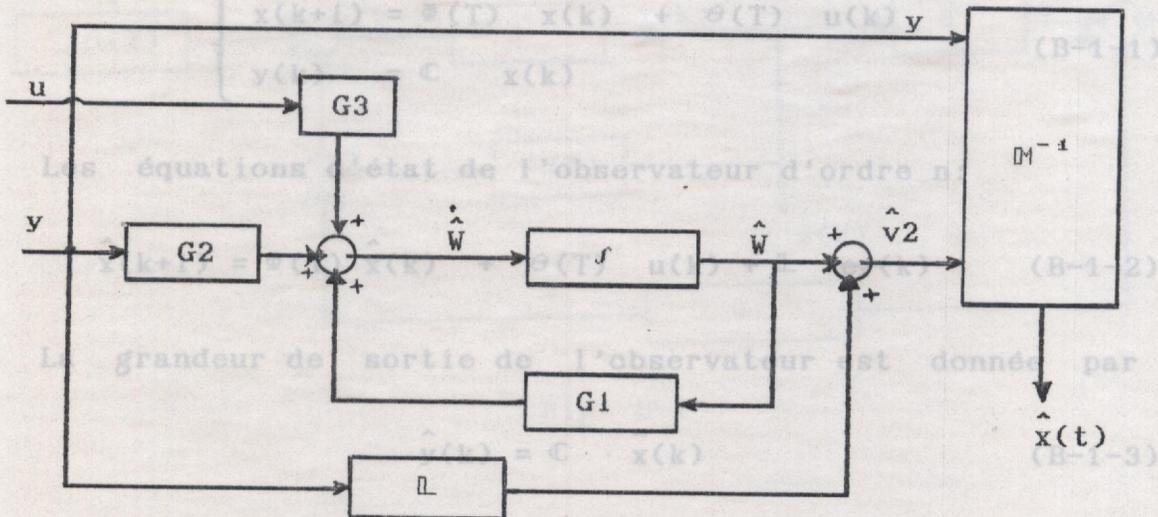


Fig A-2 Structure de l'observateur réduit

A partir des expressions (B-1-1) et (B-1-2) l'équation dynamique de l'erreur d'estimation s'écrit :

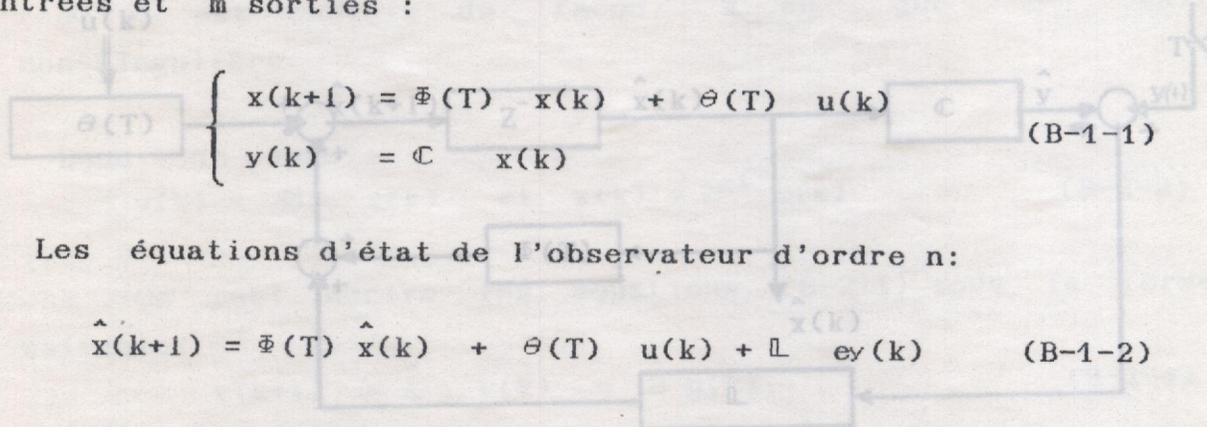
B - OBSERVATEUR D'ETAT DISCRET

B-1 OBSERVATEUR D'ETAT DISCRET D'ORDRE n:

La nécessité de connaître à chaque instant les valeurs $x(k)$ du vecteur d'état, apparaît clairement lorsqu'on réalise une commande discrète par retour d'état.

Puisqu'on a accès qu'aux entrées $u(k)$ et aux sorties $y(k)$, il faut reconstruire l'état $x(k)$ à partir de ces données avec un estimateur d'état d'ordre n .

Soit à régler le système discret d'ordre n ayant r entrées et m sorties :



$$\begin{cases} x(k+1) = \Phi(T) x(k) + \theta(T) u(k) \\ y(k) = C x(k) \end{cases} \quad (B-1-1)$$

Les équations d'état de l'observateur d'ordre n :

$$\hat{x}(k+1) = \Phi(T) \hat{x}(k) + \theta(T) u(k) + L e_y(k) \quad (B-1-2)$$

La grandeur de sortie de l'observateur est donnée par :

$$\hat{y}(k) = C \hat{x}(k) \quad (B-1-3)$$

et l'écart d'observation découle de :

$$e_y(k) = y(k) - \hat{y}(k) \quad (B-1-4)$$

À partir des expressions (B-1-1) et (B-1-2) l'équation dynamique de l'erreur d'estimation s'écrit :

$$e(k+1) = x(k+1) - \hat{x}(k+1) = [\Phi(T) - \mathbb{L} \mathbb{C}] e(k) \quad (B-1-5)$$

Cette relation décrit le comportement dynamique de l'erreur d'estimation. Si le système (B-1-1) est observable, alors on peut choisir la matrice \mathbb{L} de telle façon que toutes les valeurs propres de l'équation dynamique de l'erreur (B-1-5) soient des pôles stables, par conséquent, l'erreur d'estimation converge asymptotiquement vers zéro.

Structure de l'observateur d'état discret :

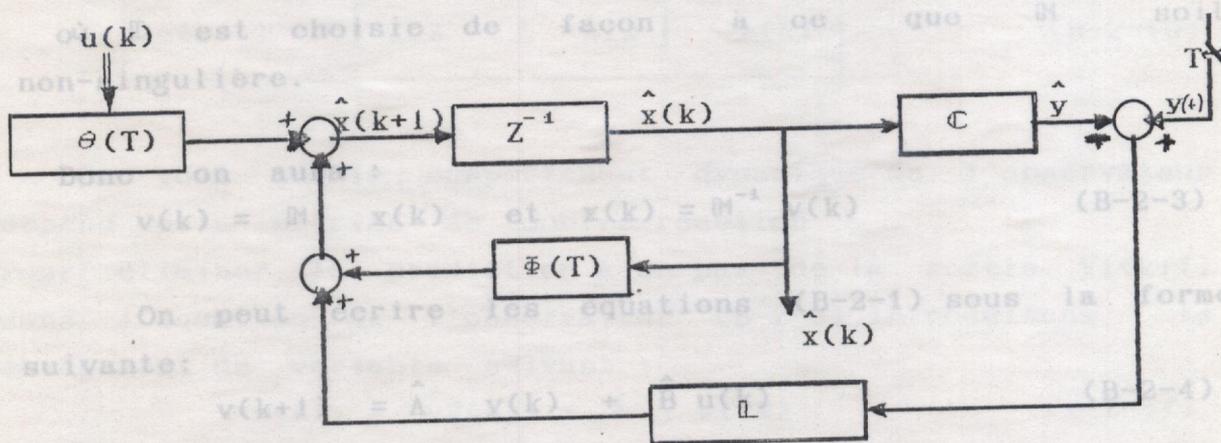


Fig B-1

Ainsi, il est possible de décomposer l'équation d'état (B-2-4) en deux équations d'état, à savoir :

$$\begin{cases} v_1(k+1) = \hat{A}_{11} v_1(k) + \hat{A}_{12} v_2(k) + \hat{B}_1 u(k) & (B-2-6) \\ v_2(k+1) = \hat{A}_{21} v_1(k) + \hat{A}_{22} v_2(k) + \hat{B}_2 u(k) & (B-2-7) \end{cases}$$

B- 2 Observateur d'état discret d'ordre réduit

A partir des informations fournies par la sortie du système discret (B-1-1), on peut construire un observateur d'ordre réduit (inférieur à n) qui détermine partiellement le vecteur d'état.

B-2-a Transformation des équations d'état du système :

Soit le vecteur v , formé de deux vecteurs :

$$v = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} \quad (B-2-1)$$

Posons : $v(k) = \begin{bmatrix} -v_1(k) \\ v_2(k) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\mathbb{C} \\ \mathbb{D} \end{bmatrix} x(k) = \mathbb{M} x(k) \quad (B-2-2)$

où \mathbb{D} est choisie de façon à ce que \mathbb{M} soit non-singulière.

Donc on aura : $v(k) = \mathbb{M} x(k)$ et $x(k) = \mathbb{M}^{-1} v(k) \quad (B-2-3)$

On peut écrire les équations (B-2-1) sous la forme suivante:

$$v(k+1) = \hat{A} v(k) + \hat{B} u(k) \quad (B-2-4)$$

avec $\hat{A} = \mathbb{M} \Phi(T) \mathbb{M}^{-1}$ et $\hat{B} = \mathbb{M} \Theta(T) \quad (B-2-5)$

Ainsi, il est possible de décomposer l'équation d'état (B-2-4) en deux équations d'état, à savoir :

$$\begin{cases} v_1(k+1) = \hat{A}_{11} v_1(k) + \hat{A}_{12} v_2(k) + \hat{B}_1 u(k) \\ v_2(k+1) = \hat{A}_{21} v_1(k) + \hat{A}_{22} v_2(k) + \hat{B}_2 u(k) \end{cases} \quad (B-2-6)$$

La grandeur $v_1(k)$ est connue :

$$v_1(k) = y(k) = \mathbb{C} x(k)$$

donc, pour estimer la grandeur restante, à savoir $v_2(k)$, on peut utiliser l'équation dynamique de l'observateur vue précédemment :

$$\hat{v}_2(k+1) = \hat{A}_{21} v_1(k) + \hat{A}_{22} \hat{v}_2(k) + \hat{B}_2(k) u(k) + \mathbb{L} (v_1(k+1) - \hat{v}_1(k+1)) \quad (\text{B-2-8})$$

$$\hat{v}_2(k+1) = \hat{A}_{22} \hat{v}_2(k) + \hat{A}_{21} v_1(k) + \hat{B}_2 u(k) + \mathbb{L} \hat{A}_{12} (v_2(k) - \hat{v}_2(k)) \quad (\text{B-2-9})$$

L'équation dynamique de l'erreur d'estimation de l'observateur réduit est :

$$e(k+1) = v_2(k+1) - \hat{v}_2(k+1) = \left[\hat{A}_{22} - \mathbb{L} \hat{A}_{12} \right] [v_2(k) - \hat{v}_2(k)]$$

$$e(k+1) = \left[\hat{A}_{22} - \mathbb{L} \hat{A}_{12} \right] e(k) \quad (\text{B-2-10})$$

On voit que le comportement dynamique de l'observateur dépend de la matrice de contre-réaction \mathbb{L} .

Pour éliminer la prédiction à un pas de la sortie $v_1(k+1)$ dans l'équation de l'observateur (B-2-8), introduisons le changement de variable suivant :

$$z(k) = \hat{v}_2(k) - \mathbb{L} v_1(k) \quad (\text{B-2-11})$$

En reportant cette expression dans l'équation dynamique de l'observateur réduit (B-2-8), on obtient :

$$z(k+1) = \left[\hat{A}_{22} - \mathbb{L} \hat{A}_{12} \right] z(k) + \left[\hat{B}_2 - \mathbb{L} \hat{B}_1 \right] u(k) + \left[(\hat{A}_{21} - \mathbb{L} \hat{A}_{11}) + (\hat{A}_{22} - \mathbb{L} \hat{A}_{12}) \mathbb{L} \right] v_1(k) \quad (\text{B-2-12})$$

Les équations dynamiques de l'observateur réduit discret sont :

$$\begin{cases} z(k+1) = H1 \ z(k) + H3 \ u(k) + H2 \ v1(k) \\ \hat{v}2(k) = z(k) + \Delta \ v1(k) \\ \hat{x}(k) = M^{-1} \ v(k) = M^{-1} \begin{bmatrix} y1(k) \\ \hat{v}2(k) \end{bmatrix} \end{cases} \quad (B-2-13)$$

où $H1 = \hat{A}22 - \Delta \hat{A}12$; $H2 = (\hat{A}21 - \Delta \hat{A}11) + (\hat{A}22 - \Delta \hat{A}12) \Delta$
 $H3 = \hat{B}2 - \Delta \hat{B}1$

La structure de l'observateur réduit discret :

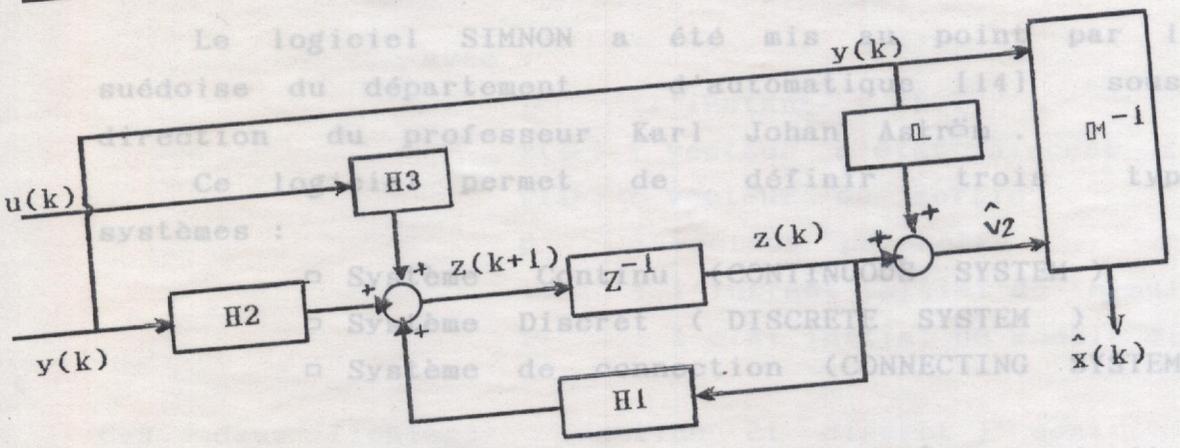


Fig B-2

Le système continu décrit le modèle mathématique continu suivant (représentation d'état) :

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= f(x(t), t, u(t), p) \\ y(t) &= g(x(t), t, u(t), p) \\ x(t_0) &= x_0 \end{aligned}$$

SIMULATION

En général, toute entreprise expérimentale en commande de procédés physiques, doit passer par l'étape de simulation, pour une analyse, une synthèse et une mise en oeuvre rationnelle et correcte de la loi de commande.

Dans ce contexte, nous avons utilisé le logiciel SIMNON (version 2.10) pour la simulation de l'évolution du procédé de lévitation magnétique d'objet métallique contrôlé par retour d'état.

Le logiciel SIMNON a été mis au point par l'école suédoise du département d'automatique [14] sous la direction du professeur Karl Johan Aström.

Ce logiciel permet de définir trois types de systèmes :

- Système Continu (CONTINUOUS SYSTEM)
- Système Discret (DISCRETE SYSTEM)
- Système de connection (CONNECTING SYSTEM)

Ces deux fichiers (continu et discret) sont écrits de la façon suivante : Ces trois types de systèmes peuvent être écrits par n'importe quel éditeur de texte avec une extension t.

Le système continu décrit le modèle mathématique continu suivant (représentation d'état) :

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= f [x(t), t, u(t), p] \\ y(t) &= g [x(t), t, u(t), p] \\ x(t_0) &= x_0 \end{aligned}$$

où :

t : temps (variable indépendante).
> DISCRETE SYSTEM (nom)
> Déclarations
x : vecteur d'état .
y : vecteur de sortie .
> Assignations (modèle mathématique discret)
p : vecteur paramètre.
> END
to : l'instant initial de simulation.
xo : l'état initial du modèle.

Dans la partie déclaration , on indique les
différents types de variables du procédé tels que :
Le système discret est décrit par les équations
aux différences suivantes (représentation d'état
discrète) :

INPUT " variable d'entrée ex : commande u.
> OUTPUT " variable de sortie ex : signal de
sortie du système
x(tk+1) = f [x(tk) , tk , u(tk) , p]
y(tk) = g [x(tk) , tk , u(tk) , p]
> TIME " temps
x(to) = xo
> STATE " variable d'état x(t) ,
> DER " la dérivée de l'état x(t) (cette
commande est utilisée uniquement
pour le système continu)
NEW " variable d'état initiale pour
t = to
to : l'instant initial de simulation.
xo : l'état initial du modèle discret.

Les paramètres du modèle continu ou discret sont
Ces deux fichiers (continu et discret) sont écrits
de la façon suivante : (valeur)

ou directement du logiciel par la commande :

> CONTINUOUS SYSTEM [nom] (valeur)
> Déclarations

L'état > Assignations (modèle mathématique discret)
est assigné > END de la manière suivante :

[variable d'état] : (valeur)

ou directement à partir du logiciel par la commande :

> INIT (l'état) : (valeur)

et

Pour utiliser un système hybride (continu et discret) le système de connection qui permet de connecter les différentes entrées-sorties des deux systèmes (continu et discret) La structure du système de connection est :

- > DISCRETE SYSTEM [nom]
- > Déclarations
- > Assignations (modèle mathématique discret)
- > END

Dans la partie déclaration , on indique les différents types de variables du procédé , tels que :

> CONNECTING SYSTEM [nom]
> Déclaration
> Section de connection

- > INPUT " variable d'entrée ex : commande u.
- > OUTPUT " variable de sortie ex : signal de sortie ou mesuré .
- Exemple : Simulation de la commande par retour d'état du procédé de lévitation magnétique d'une barre métallique
- > TIME " temps.
- > STATE " variable d'état $x(t)$.
- > DER " la dérivée de l'état $\dot{x}(t)$ (cette commande est utilisée uniquement pour le système continu) .
- > NEW " Variable d'état discrète pour $t = (k+1).T$
- > TSAMP " période d'échantillonnage .

Les paramètres du modèle continu ou discret sont assignés de la manière suivante :

[paramètre] : (valeur)
ou directement du logiciel par la commande :

- > PAR (paramètre) : (valeur)

L'état initial du système (continu ou discret) est assigné de la manière suivante :

[variable d'état] : (valeur)
ou directement à partir du logiciel par la commande :

- > INIT (l'état) : (valeur)

CONTINUOUS SYSTEM sibir
 simulation de la lévitation magnétique
 d'une barre métallique par deux électro-aimants

INPUT u1 u2

OUTPUT y1 y2

STATE Pour utiliser un système hybride (continu et discret), on doit ajouter le système de connection qui permet de connecter les différentes entrées-sorties des deux systèmes (continu et discret).

Modelé du procédé

La structure du système de connection est :

dx1=x2

dx3=x4

f1=(1+u1)*(1+u2)/(x1+sin(x3))

f2=(1+u2)*(1+u1)/(x2+sin(x3))

dx2=-f1-f2+1

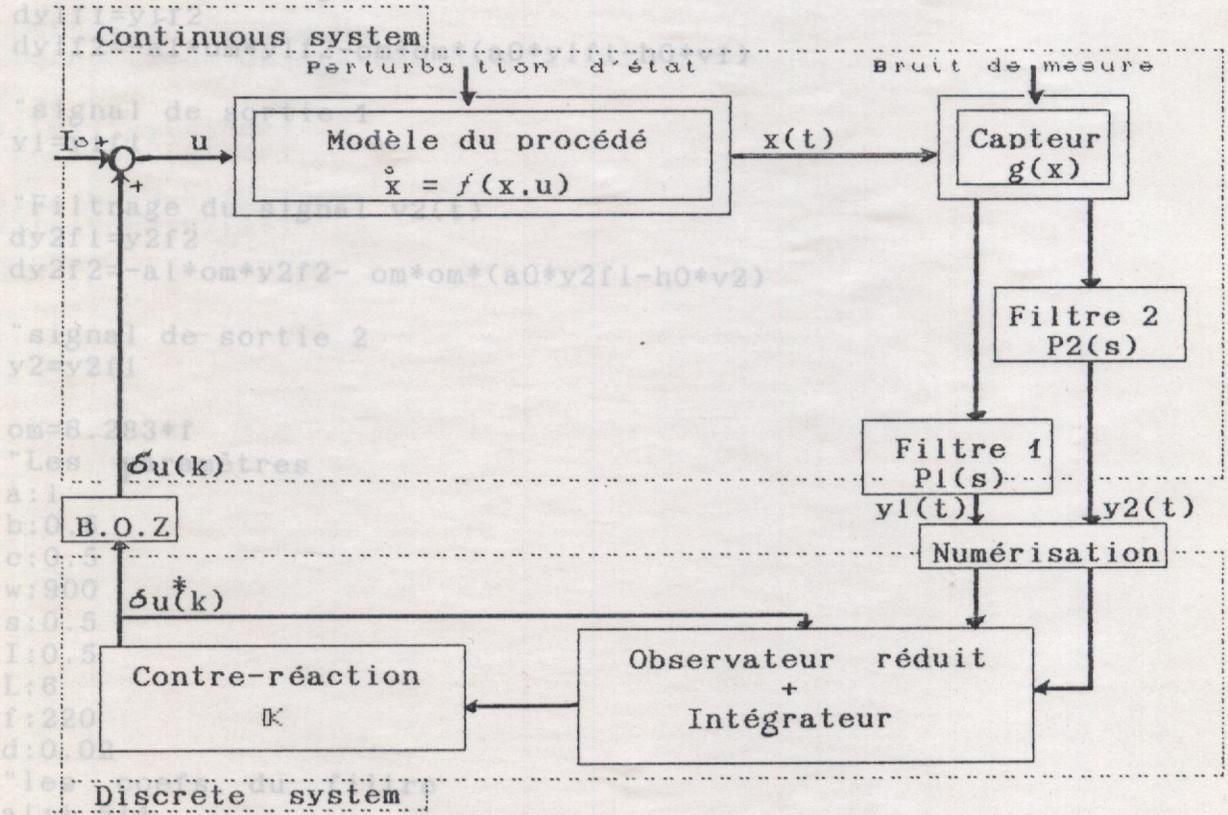
dx4=-0.5*f1*cos(x3)+0.5*f2*cos(x3)

Mesure du signal vi(t)

v1=x1-s+L*sin(x3)+d*sin(3*w*t)

Exemple : Simulation de la commande par retour d'état du procédé de lévitation magnétique d'une barre métallique .

Filtrage du signal vi(t)



signal de sortie 2
 y2 y2f1
 dy f1=y2f2
 dy f2=-a1+om*y2f2- om*om*(a0+y2f1-h0+v2)

om 6.283*f
 Les delta u*(k) tres

a:
 b:
 c:
 w: 900
 s: 0.5
 I: 0.5
 L: 0.5
 f: 20
 d: 0.0

al: 1.019
 a0: 0.846
 h0: 0.838

END

```

CONTINUOUS SYSTEM sibor
"simulation de la lévitation magnétique
"d'une barre métallique par deux électro-aimants
INPUT u1 u2
OUTPUT y1 y2
STATE x1 x2 x3 x4 y1f1 y1f2 y2f1 y2f2
DER dx1 dx2 dx3 dx4 dy1f1 dy1f2 dy2f1 dy2f2
Time t
"Perturbation p(t)
pe=c+a*cos(w*t)+b*sin(w*t)
"Modèle du procédé
dx1=x2
dx3=x4
f1=(I+u1)*(I+u1)/(x1+L*sin(x3))
f2=(I+u2)*(I+u2)/(x1-L*sin(x3))
dx2=-f1-f2+1+pe
dx4=-0.5*f1*cos(x3)+0.5*f2*cos(x3)

"Mesure du signal v1(t)
v1=x1-s+L*sin(x3)+d*sin(3*w*t)

"Mesure du signal v2(t)
v2=x1 - s - L*sin(x3)+d*cos(3*w*t)

"Filtrage du signal v1(t)
dy1f1=y1f2
dy1f2=-a1*om*y1f2-om*om*(a0*y1f1-h0*v1)

"signal de sortie 1
y1=y1f1

"Filtrage du signal v2(t)
dy2f1=y2f2
dy2f2=-a1*om*y2f2- om*om*(a0*y2f1-h0*v2)

"signal de sortie 2
y2=y2f1

om=6.283*f
"Les paramètres
a:1
b:0.5
c:0.5
w:900
s:0.5
I:0.5
L:6
f:220
d:0.02
"les coefs. du filtre
a1:1.514
a0:0.646
h0:0.638
END

```

```
DISCRETE SYSTEM si
INPUT y1 y2
OUTPUT u1 u2
STATE x0 x5 z1 z2
NEW nx0 nx5 nz1 nz2
TIME t
TSAMP ts
```

```
xe1=(y1+y2)/2
xe3=(y1-y2)/12
p1=8*x0+6.31*xe1+1.953*xe2
p2=5.96*xe3+1.99*xe4+1.95*x5
```

```
"Commande U1(t)
u1=p1+p2
"Commande U2(t)
u2=p1-p2
```

```
"Intégrateurs
nx0=x0+h*xe1
nx5=x5+h*xe3
```

```
"Observateur Réduit
nz1=0.9512*z1-0.466*xe1-0.02*p1
nz2=0.9512*z2-0.4452*xe3-0.01*p2
xe2=z1+9.75*xe1
xe4=z2+9.75*xe3
```

```
"Période d'échantillonnage
ts=t+h
h:0.005
END
```

```
CONNECTING SYSTEM bor
"Connection du système hybride SIBOR-SI
```

```
Time t
y1[si]=y1[sibor]
y2[si]=y2[sibor]
u1[sibor]=u1[si]
u2[sibor]=u2[si]
END
```

```
split 2 2
sinu 0 7
ashow v1
text 'signal mesuré v1'
ashow y1f1
text 'signal filtré v1'
ashow 5 5.02 v2
text 'signal mesuré v2'
ashow 5 5.05 y2f1
text 'signal filtré v2'
END
```

MACRO FIGC1

MACRO FIGC3

syst sibor si bor

store u1[si] u2[si] x2 xe2[si] x4 xe4[si]

store x1 x3

init x3:0.01

"L'état Initial

init x1:0.40975

init x3:0.01

init z1:0.99048

init z2:-0.097536

ashow u1

split 2 1 'mande u1(t)'

ashow x2

simu 0 10 'essai x2(t)'

ashow xe2

ashow x1 'estimation de x2(t)'

text 'Position x1(cm)'

text 'Commande u2(t)'

ashow x3

text 'Position angulaire x3(rd)'

END

ashow x4

text 'Estimation de x4(t)'

END

MACRO FIGC2

syst sibor si bor

store v1[sibor] v2[sibor] y1f1 y2f1

init x1:0.4

init x3:0.01

init z1:0.975

init z2:-0.0975

split 2 2

simu 0 7

ashow v1

text 'signal mesuré v1'

ashow y1f1

text 'signal filtré y1'

ashow 5 5.02 v2

text 'signal mesuré v2'

ashow 5 5.05 y2f1

text 'signal filtré y2'

END

```

MACRO.FIGC3
syst sibor si bor
store u1[si] u2[si] x2 xe2[si] x4 xe4[si]
init x1:0.4
init x3:0.01
init z1:0.975 x1(ow)
init z2:-0.0975

split 3 2
simu 0 5
ashow u1
text 'Commande u1(t)'
ashow x2
text 'Vitesse x2(t)'
ashow xe2
text 'Estimation de x2(t)'
ashow u2
text 'Commande u2(t)'
ashow x4
text 'Vitesse x4(t)'
ashow xe4
text 'Estimation de x4(t)'
END

```

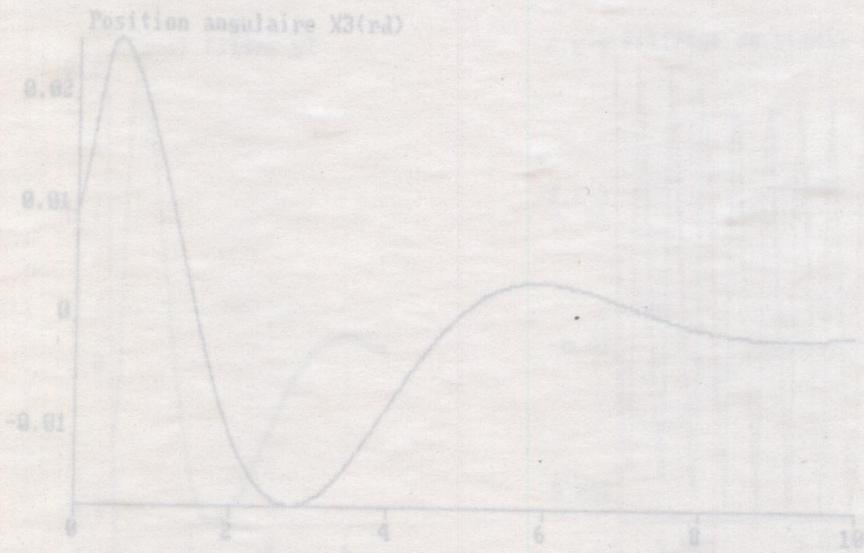


Fig. c-1 L'évolution de $x_1(t)$ et $x_3(t)$

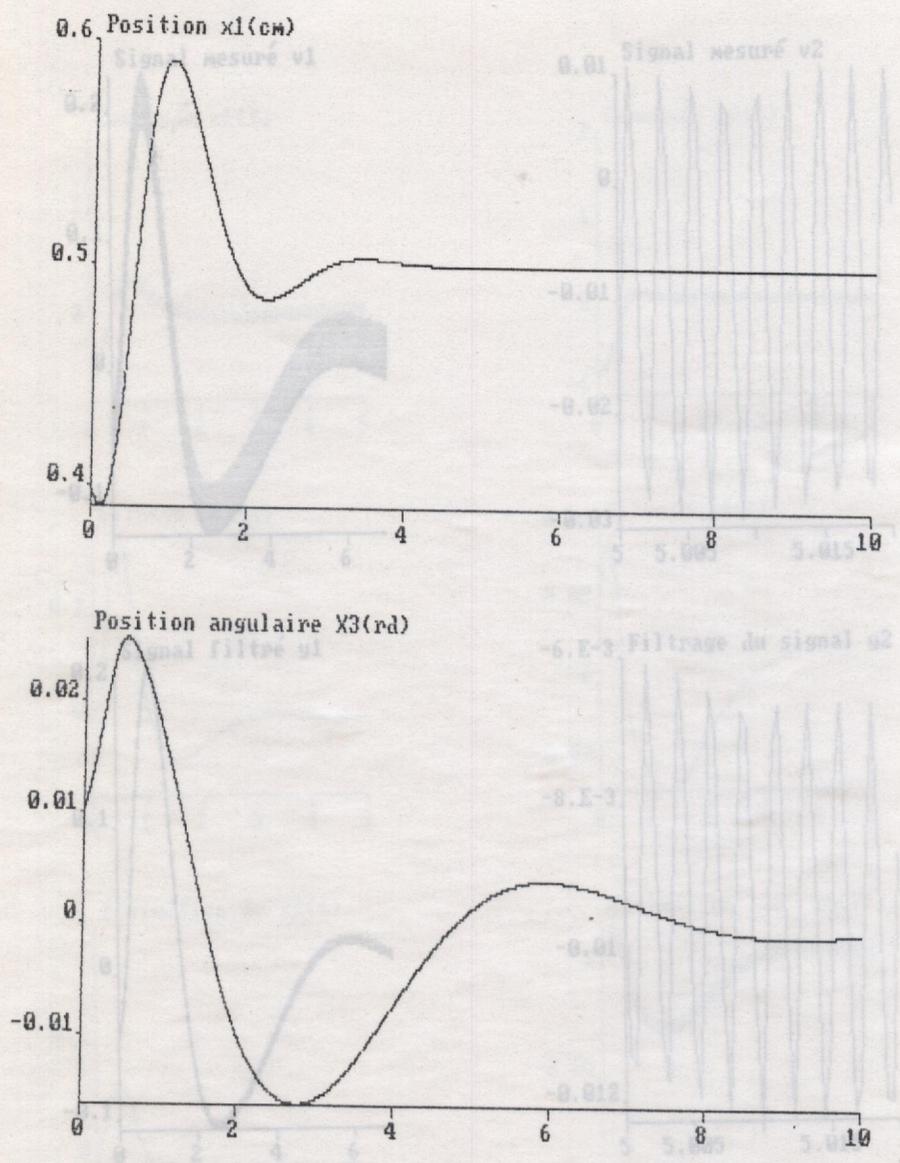


Fig. c-2

Fig. c-1 L'évolution de $x_1(t)$ et $x_3(t)$

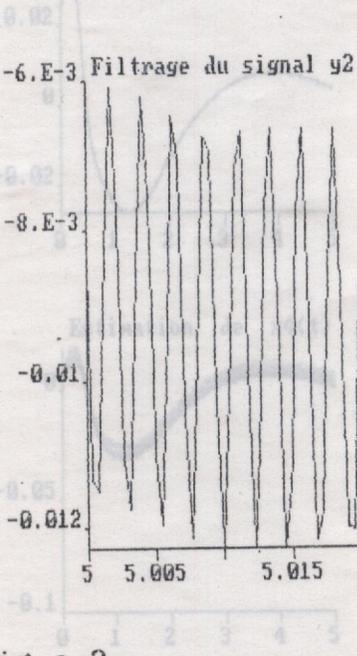
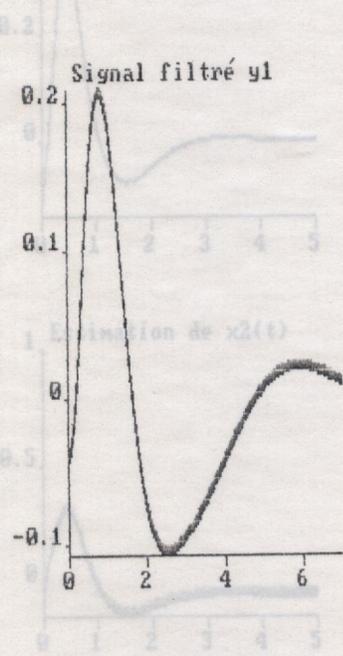
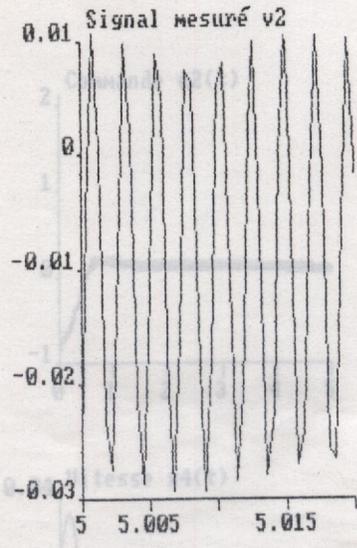
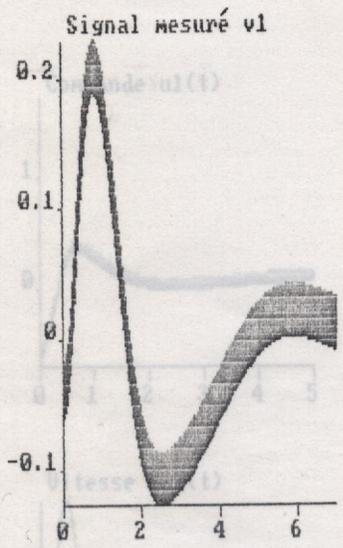


Fig.c-2

Fig. c-3

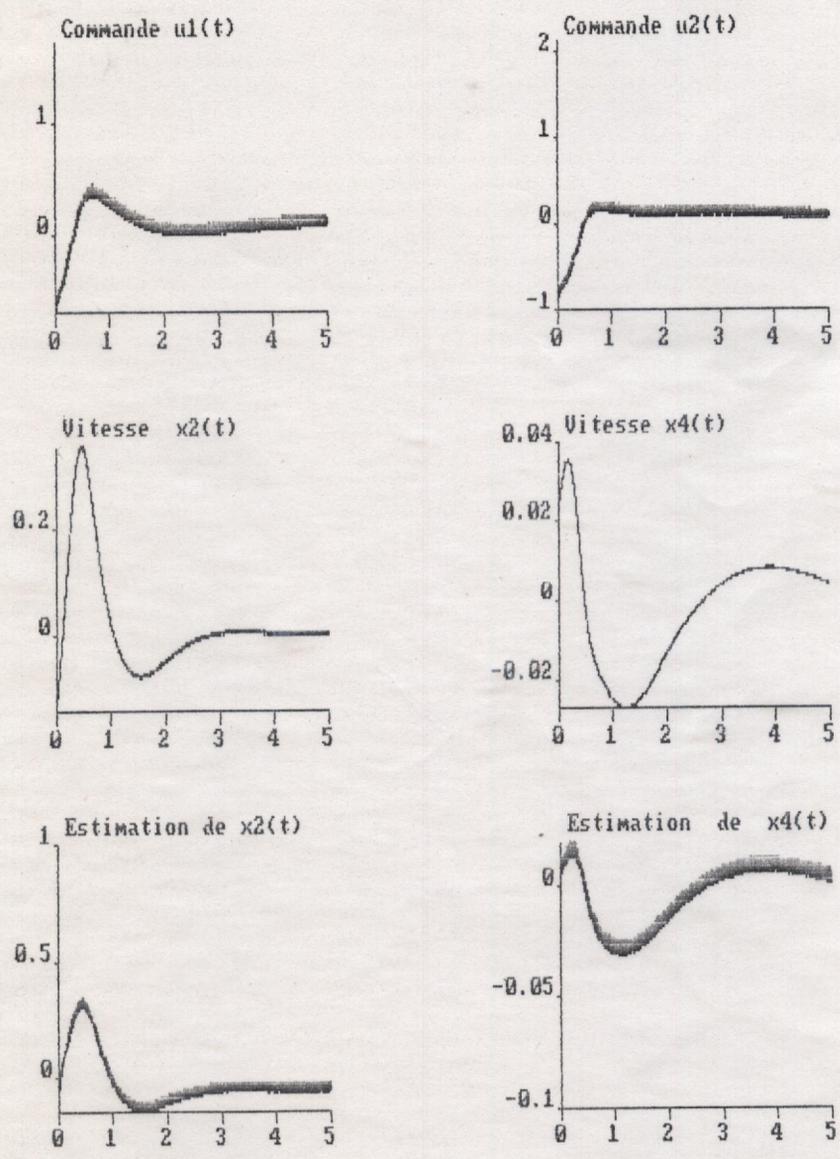


Fig. c-3

