

Guy Binet  
Tarek Ahmed-Ali

# Traitement du signal

Représentation des signaux  
et systèmes continus



**La côte de l'ouvrage : 2-621-823**

# Table des matières

<b>Notations</b>	<b>xi</b>
<b>1 Les signaux</b>	<b>1</b>
1.1 MATHÉMATIQUES ET SIGNAL .....	1
1.2 CLASSIFICATION DES SIGNAUX.....	3
1.3 SIGNAUX CONTINUS DÉTERMINISTES .....	4
1.3.1 Définition . . . . .	4
1.3.2 Signaux élémentaires . . . . .	5
1.3.3 Causalité . . . . .	7
1.3.4 Signal stable . . . . .	8
1.4 ÉNERGIE ET PUISSANCE DES SIGNAUX .....	9
1.4.1 Signal à énergie finie . . . . .	9
1.4.2 Signal à puissance moyenne finie . . . . .	11
1.5 AUTOCORRÉLATION ET INTERCORRÉLATION.....	14
1.5.1 Signaux à énergie finie . . . . .	14
1.5.2 Signaux à puissance moyenne finie . . . . .	16
1.6 CONVOLUTION DES SIGNAUX.....	18
1.7 LA DISTRIBUTION DE DIRAC .....	20
1.7.1 « L'impulsion » de Dirac . . . . .	20
1.7.2 La distribution de Dirac . . . . .	21
<b>2 Analyse spectrale</b>	<b>27</b>
2.1 CAS DES SIGNAUX PÉRIODIQUES.....	28
2.1.1 Décomposition en série de Fourier sur $\mathbb{R}$ . . . . .	28
2.1.2 Pulsations « positives » et « négatives » . . . . .	29
2.1.3 Puissance moyenne et théorème de Parseval . . . . .	30
2.1.4 Notion de spectre . . . . .	32
2.2 CAS DES SIGNAUX À ÉNERGIE FINIE .....	33
2.2.1 Décomposition fréquentielle . . . . .	33
2.2.2 Énergie et théorème de Parseval . . . . .	33
2.2.3 Densité spectrale d'énergie et corrélation . . . . .	35
2.2.4 Relation d'incertitude . . . . .	36
2.3 CAS DES SIGNAUX À PUISSANCE MOYENNE FINIE .....	38
2.3.1 La transformée de Fourier et les distributions . . . . .	40
2.3.2 Densité spectrale et distributions . . . . .	43

2.3.3	Cas des signaux périodiques . . . . .	44
2.3.4	Cas d'un signal constant . . . . .	45
2.3.5	Cas de la fonction signe . . . . .	46
2.3.6	Cas de l'échelon d'Heaviside . . . . .	47
2.3.7	Signaux aléatoires . . . . .	48
<b>3</b>	<b>Les systèmes continus</b>	<b>49</b>
3.1	SYSTÈMES CONTINUS, FILTRES .....	49
3.2	SYSTÈMES LINÉAIRES INVARIANTS .....	51
3.2.1	Définition . . . . .	51
3.2.2	Systèmes de convolution et réponse impulsionnelle . . . . .	52
3.2.3	Causalité . . . . .	53
3.2.4	Réponses fondamentales d'un SLI . . . . .	54
3.2.5	Exemples de systèmes . . . . .	56
3.3	FONCTION DE TRANSFERT .....	59
3.3.1	Résolution des équations différentielles . . . . .	59
3.3.2	Solution générale des équations différentielles . . . . .	63
3.3.3	Fonction de transfert . . . . .	65
3.3.4	Stabilité d'un système . . . . .	66
3.3.5	Fonction de transfert et système réel stable . . . . .	68
3.3.6	Modes dominants et auxiliaires . . . . .	71
3.3.7	Exemples . . . . .	72
3.4	ASSOCIATIONS DE SYSTÈMES .....	84
3.5	SYSTÈME FONDAMENTAL DU 1 <sup>er</sup> ORDRE .....	87
3.5.1	Équation différentielle et fonction de transfert . . . . .	87
3.5.2	Réponses à des signaux élémentaires . . . . .	88
3.6	SYSTÈME FONDAMENTAL DU 2 <sup>e</sup> ORDRE .....	92
3.6.1	Équation différentielle et fonction de transfert . . . . .	92
3.6.2	Modes et régimes . . . . .	93
3.6.3	Réponses impulsionnelles et indicelles . . . . .	95
3.7	MODÈLE D'UN SIGNAL.....	103
<b>4</b>	<b>Analyse spectrale des systèmes</b>	<b>107</b>
4.1	PRINCIPE ET TRANSMITTANCE .....	107
4.2	GAIN, DÉCIBELS ET FRÉQUENCES DE COUPURE .....	108
4.2.1	Décibel et analyse spectrale . . . . .	108
4.2.2	Bande passante, pulsations et fréquences de coupure . . . . .	109
4.2.3	Comportements élémentaires . . . . .	111
4.3	PHASE MINIMALE - PHASE NON MINIMALE .....	112
4.3.1	Le théorème de Bayard-Bode pris en défaut . . . . .	112
4.3.2	Système à phase minimale . . . . .	114
4.4	ANALYSE FRÉQUENTIELLE RAPIDE .....	117
4.5	LE DIAGRAMME DE BODE .....	122
4.6	SYSTÈME FONDAMENTAL DU 1 <sup>er</sup> ORDRE .....	124

4.7	SYSTÈME FONDAMENTAL DU 2 <sup>e</sup> ORDRE .....	126
4.7.1	Cas des pôles complexes conjugués . . . . .	126
4.7.2	Cas des pôles réels . . . . .	130
4.8	AUTRES TERMES ÉLÉMENTAIRES .....	132
4.8.1	Zéros et réponse fréquentielle . . . . .	132
4.8.2	Intégrateurs et dérivateurs . . . . .	136
4.8.3	Le retard . . . . .	138
<b>5</b>	<b>Les systèmes élémentaires</b> .....	<b>139</b>
5.1	SYSTÈME GÉNÉRALISÉ ET SYSTÈME FONDAMENTAL .....	139
5.2	SYSTÈMES DU 1 <sup>er</sup> ORDRE .....	142
5.2.1	1 <sup>er</sup> ordre généralisé . . . . .	144
5.2.2	1 <sup>er</sup> ordre, système fondamental . . . . .	145
5.2.3	1 <sup>er</sup> ordre à avance de phase . . . . .	145
5.2.4	1 <sup>er</sup> ordre à retard de phase . . . . .	149
5.2.5	Système à phase non minimale . . . . .	151
5.2.6	Système intégrateur . . . . .	154
5.2.7	Système du 1 <sup>er</sup> ordre dérivateur . . . . .	154
5.3	SYSTÈMES DU 2 <sup>e</sup> ORDRE .....	156
5.3.1	Cas général . . . . .	156
5.3.2	Réponses temporelles . . . . .	158
5.3.3	Analyse spectrale . . . . .	160
<b>6</b>	<b>La représentation d'état</b> .....	<b>165</b>
6.1	LA NOTION D'ÉTAT .....	166
6.2	LES ÉQUATIONS D'ÉTAT .....	167
6.2.1	Définitions . . . . .	167
6.2.2	Matrice de transition d'état . . . . .	169
6.2.3	Calcul de la matrice de transition d'état . . . . .	170
6.2.4	Pluralité de la représentation d'état . . . . .	171
6.3	COMMANDABILITÉ .....	172
6.3.1	La notion de commandabilité . . . . .	172
6.3.2	Définitions . . . . .	172
6.3.3	Critère de Kalman . . . . .	173
6.3.4	Systèmes non commandables . . . . .	174
6.3.5	Décomposition de Kalman . . . . .	175
6.4	OBSERVABILITÉ .....	176
6.4.1	La notion d'observabilité . . . . .	176
6.4.2	Définitions . . . . .	176
6.4.3	Critère d'observabilité . . . . .	177
6.4.4	Décomposition de Kalman . . . . .	178
6.4.5	Dualité commandabilité-observabilité . . . . .	179
6.5	LA FONCTION DE TRANSFERT .....	180
6.5.1	Systèmes commandables et observables . . . . .	180
6.5.2	Systèmes non commandables ou non observables . . . . .	181

6.6	FORMES DE LA REPRÉSENTATION D'ÉTAT .....	182
6.6.1	Forme modale . . . . .	182
6.6.2	Forme cascade . . . . .	185
6.6.3	Forme canonique commandable . . . . .	187
6.6.4	Forme canonique observable . . . . .	192
6.7	MODÉLISATION D'UN SIGNAL.....	194
6.8	LES OBSERVATEURS.....	195
6.8.1	Principe et définitions . . . . .	196
6.8.2	Mise au point et propriétés d'un observateur . . . . .	198
<b>7</b>	<b>Les systèmes bouclés</b>	<b>205</b>
7.1	BOUCLE OUVERTE - BOUCLE FERMÉE .....	205
7.1.1	Boucle fermée . . . . .	205
7.1.2	Stabilité du système bouclé . . . . .	206
7.2	ÉTUDE ALGÈBRIQUE DE LA STABILITÉ .....	207
7.2.1	Équation caractéristique . . . . .	207
7.2.2	Le critère de Routh-Hurwitz . . . . .	208
7.2.3	Le lieu des racines . . . . .	212
7.2.4	Exemples simples . . . . .	215
7.3	MÉTHODE FRÉQUENTIELLE.....	227
7.3.1	Le critère de Nyquist . . . . .	228
7.3.2	Le diagramme de Black . . . . .	231
7.3.3	Les marges de stabilité . . . . .	232
7.4	LES OSCILLATEURS À DÉPHASAGE .....	235
7.4.1	L'oscillateur à pont de Wien . . . . .	235
7.4.2	L'oscillateur « phase-shift » . . . . .	237
7.5	ASSERVISSEMENT.....	240
7.5.1	Asservissement avec retour unitaire . . . . .	240
7.5.2	Signaux particuliers . . . . .	244
7.5.3	Problème de régulation . . . . .	245
7.5.4	La poursuite . . . . .	246
7.5.5	Dynamiques de régulation et de poursuite . . . . .	247
7.5.6	Problème de la commande . . . . .	247
7.5.7	Cahier des charges et hypothèses simplificatrices . . . . .	247
7.6	CORRECTEUR PROPORTIONNEL .....	250
7.7	CORRECTEUR PI .....	255
7.7.1	Analyse et synthèse du correcteur PI . . . . .	255
7.7.2	Insuffisances du correcteur PI . . . . .	259
7.8	CORRECTEUR PI AVEC AVANCE DE PHASE.....	262
7.8.1	Conception d'un correcteur PI avec avance de phase . . . . .	262
7.8.2	Analyse des résultats . . . . .	264

<b>Annexes</b>	<b>267</b>
<b>A Espaces vectoriels <math>L^1</math> et <math>L^2</math></b>	<b>267</b>
A.1 ENSEMBLES NÉGLIGEABLES.....	268
A.1.1 Ensembles négligeables . . . . .	268
A.1.2 Propriété presque partout . . . . .	268
A.1.3 Théorèmes . . . . .	269
A.2 ESPACES DE HILBERT ET PROJECTIONS.....	269
A.2.1 Espaces préhilbertiens . . . . .	269
A.2.2 Espaces de Hilbert . . . . .	272
A.3 ESPACES $L^1$ et $L^2$ .....	274
A.3.1 Définitions . . . . .	274
A.3.2 Produit scalaire et norme dans $L^2(I)$ . . . . .	275
A.3.3 Inégalité de Schwartz dans $L^2(I)$ . . . . .	277
<b>B Convolution</b>	<b>279</b>
B.1 INTÉGRALES À PARAMÈTRES.....	279
B.1.1 Théorème de la convergence dominée . . . . .	279
B.1.2 Dérivation sous le signe somme . . . . .	280
B.2 PRODUIT DE CONVOLUTION.....	280
B.2.1 Définition . . . . .	280
B.2.2 Propriétés . . . . .	281
B.2.3 Convolution dans $L^1(\mathbb{R})$ . . . . .	283
B.2.4 Convolution dans $L^2(\mathbb{R})$ . . . . .	284
<b>C Séries de Fourier</b>	<b>285</b>
C.1 DÉFINITIONS.....	285
C.1.1 Série de Fourier réelle dans $L^2(0, T)$ . . . . .	285
C.1.2 Série de Fourier à termes complexes dans $L^2(0, T)$ . . . . .	287
C.1.3 Relations entre les formes de décomposition . . . . .	287
C.1.4 Translation temporelle . . . . .	288
C.1.5 Théorème de Parseval sur $L^2(0, T)$ . . . . .	289
C.2 CAS DES FONCTIONS PÉRIODIQUES SUR $\mathbb{R}$ .....	289
C.2.1 Périodicité des séries de Fourier . . . . .	289
C.2.2 Propriétés . . . . .	290
C.2.3 Dérivation des séries de Fourier . . . . .	291
C.3 CONVERGENCES DES SÉRIES.....	292
C.3.1 Approximation, notion de limites . . . . .	292
C.3.2 Convergence ponctuelle . . . . .	293
C.3.3 Convergence uniforme . . . . .	294
C.3.4 Convergence dans $L^1(I)$ et $L^2(I)$ . . . . .	296
C.4 CONVERGENCE DES SÉRIES DE FOURIER DANS $L^2(\mathbb{R})$ .....	297
C.4.1 Expérience . . . . .	297
C.4.2 Convergence ponctuelle . . . . .	299
C.4.3 Convergence uniforme et phénomène de Gibbs . . . . .	299

C.5	SÉRIES DE FOURIER USUELLES .....	303
C.5.1	Signaux du type « rectangle » . . . . .	303
C.5.2	Signaux du type « triangle » . . . . .	304
C.5.3	Signaux du type « dents de scie » . . . . .	306
C.5.4	Signaux du type « sinusoïde » . . . . .	308
<b>D</b>	<b>La transformée de Fourier</b> .....	<b>311</b>
D.1	DÉFINITION .....	311
D.2	PROPRIÉTÉS ÉLÉMENTAIRES.....	312
D.2.1	Linéarité . . . . .	312
D.2.2	Symétrie et conjugaison complexe . . . . .	313
D.2.3	Changement d'échelle . . . . .	313
D.2.4	Translation temporelle . . . . .	314
D.2.5	Modulation . . . . .	314
D.2.6	Signaux réels . . . . .	315
D.3	TRANSFORMATION INVERSE.....	316
D.3.1	Transformation inverse . . . . .	316
D.3.2	Condition d'existence . . . . .	317
D.3.3	Convergence . . . . .	317
D.3.4	Propriétés de la transformation inverse . . . . .	317
D.3.5	Représentation spectrale . . . . .	318
D.4	PROPRIÉTÉS FONDAMENTALES.....	318
D.5	TRANSFORMÉES USUELLES.....	321
D.5.1	Fonction rectangle . . . . .	321
D.5.2	Fonction triangle . . . . .	321
D.5.3	Fonction exponentielle décroissante causale . . . . .	322
D.5.4	Fonction sinus cardinal . . . . .	323
D.5.5	Fonction gaussienne . . . . .	324
<b>E</b>	<b>La transformée de Laplace</b> .....	<b>327</b>
E.1	DÉFINITIONS DE LA TRANSFORMÉE DE LAPLACE.....	328
E.1.1	Principe . . . . .	328
E.1.2	Définitions . . . . .	329
E.2	CONDITIONS D'EXISTENCE.....	330
E.2.1	La convergence . . . . .	330
E.2.2	La convergence en valeur absolue . . . . .	332
E.2.3	Lien avec la transformée de Fourier . . . . .	335
E.3	PROPRIÉTÉS .....	336
E.3.1	Dérivée de la transformée de Laplace . . . . .	336
E.3.2	Propriétés élémentaires . . . . .	338
E.3.3	Transformées de primitives et de dérivées . . . . .	340
E.3.4	Valeurs initiale et finale . . . . .	343
E.3.5	Produit de convolution . . . . .	346
E.3.6	Fonctions périodiques sur $\mathbb{R}^+$ . . . . .	347

E.4	INVERSION DE LA TRANSFORMÉE DE LAPLACE .....	349
E.4.1	Définitions . . . . .	349
E.4.2	Décomposition en éléments simples . . . . .	350
E.4.3	Méthode des résidus . . . . .	353
E.4.4	Un exemple simple . . . . .	356
<b>F</b>	<b>Sommaire sur les distributions</b> .....	<b>359</b>
F.1	PRINCIPE DES DISTRIBUTIONS.....	359
F.1.1	L'idée de base . . . . .	359
F.1.2	Espace $\mathbb{D}$ des fonctions test . . . . .	360
F.1.3	Définition indirecte d'une fonction . . . . .	361
F.1.4	Définition des distributions . . . . .	362
F.2	PROPRIÉTÉS ÉLÉMENTAIRES.....	363
F.2.1	Causalité . . . . .	363
F.2.2	Linéarité . . . . .	363
F.2.3	Translation . . . . .	364
F.2.4	Facteur d'échelle . . . . .	364
F.2.5	Produit des distributions . . . . .	365
F.3	DISTRIBUTIONS DU TRAITEMENT DU SIGNAL .....	367
F.3.1	Échelon d'Heaviside . . . . .	367
F.3.2	Constante K . . . . .	367
F.3.3	Distribution de Dirac . . . . .	367
F.3.4	Peigne de Dirac . . . . .	370
F.3.5	Valeur principale $VP(1/s)$ . . . . .	371
F.4	DÉRIVATION .....	372
F.4.1	Définition . . . . .	372
F.4.2	Exemples . . . . .	374
F.4.3	Propriétés de la dérivation . . . . .	375
F.4.4	Dérivées de la distribution de Dirac . . . . .	377
F.4.5	Formules de Poisson . . . . .	377
F.5	PRODUIT DE CONVOLUTION .....	379
F.5.1	Condition d'existence et définition . . . . .	379
F.5.2	Translation et distribution de Dirac . . . . .	380
F.5.3	Corrélation . . . . .	380
F.5.4	Conditions suffisantes d'existence . . . . .	381
F.5.5	Propriétés . . . . .	381
<b>G</b>	<b>Distributions et transformées</b> .....	<b>385</b>
G.1	TRANSFORMÉE DE FOURIER .....	385
G.1.1	Cas des fonctions . . . . .	385
G.1.2	Les distributions tempérées . . . . .	386
G.1.3	La transformée de Fourier des distributions . . . . .	387
G.1.4	Propriétés des distributions tempérées . . . . .	388
G.1.5	Propriétés de la $TF$ des distributions tempérées . . . . .	389
G.1.6	Les transformées utiles . . . . .	392

G.2 TRANSFORMÉE DE LAPLACE MONOLATÉRALE .....	396
G.2.1 Cas des fonctions . . . . .	396
G.2.2 Définition . . . . .	397
G.2.3 Propriétés . . . . .	397
<b>H RELATIONS DE « KK » ET DE « BB »</b>	<b>399</b>
H.1 RELATIONS DE KRAMERS-KRÖNIG .....	399
H.1.1 Les relations . . . . .	399
H.1.2 Démonstration . . . . .	400
H.2 RELATION DE BAYARD-BODE.....	401
H.2.1 Relation générale . . . . .	401
H.2.2 Relation simplifiée . . . . .	404
H.2.3 Qualité de la méthode . . . . .	405
<b>Bibliographie</b>	<b>409</b>
<b>Index</b>	<b>411</b>