

LICENCE 3 | MASTER 1 | ÉCOLES D'INGÉNIEURS

SCIENCES SUP

Cours  
25 exercices  
et problèmes  
corrigés

Ronan Lefort

# Ondes et vibrations

Fondamentaux et applications  
à l'acoustique et à la diffusion de la chaleur

DUNOD

# Table des matières

<b>Avant-propos</b>	<b>13</b>
<b>Liste des animations</b>	<b>17</b>
<b>Notations utilisées</b>	<b>21</b>

## Partie I Les fondamentaux

<b>1 Oscillateurs harmoniques et anharmoniques</b>	<b>25</b>
I Mouvements autour d'un équilibre : relaxation, oscillation . . . . .	25
A Minimum d'énergie et écart à l'équilibre . . . . .	25
B Période des oscillations . . . . .	27
II Oscillations de faible amplitude : l'approximation harmonique . . . . .	28
A L'oscillateur harmonique . . . . .	28
A.1 Oscillations libres sans frottement . . . . .	28
A.2 Relaxation de l'oscillateur harmonique . . . . .	30
B Approximation harmonique de systèmes plus complexes . . . . .	31
B.1 L'approximation harmonique dans le cas général . . . . .	31
B.2 Exemple : le pendule simple . . . . .	33
III Oscillations de forte amplitude : le rôle des non-linéarités . . . . .	38
<b>2 Vibrations moléculaires</b>	<b>41</b>
I Hypothèse harmonique, ordres de grandeur . . . . .	42
A Potentiel interatomique . . . . .	42
B Représentation vectorielle . . . . .	44
II Modes de vibration moléculaires . . . . .	46
A Exemples . . . . .	46
A.1 Exemple 1 : Une partie mobile à deux dimensions . . . . .	46
A.2 Exemple 2 : Plusieurs parties mobiles . . . . .	51
B Méthode générale . . . . .	57
B.1 Équation du mouvement . . . . .	57
B.2 Notion de mode de vibration . . . . .	59
B.3 Matrice dynamique, pulsations propres, modes propres . . . . .	60
B.4 Mouvement de vibration général . . . . .	62

TABLE DES MATIÈRES

C	Approche énergétique . . . . .	62
C.1	Énergie potentielle . . . . .	62
C.2	Énergie cinétique . . . . .	63
C.3	Énergie mécanique . . . . .	63
C.4	Application aux systèmes moléculaires . . . . .	63
III	Un exemple : la molécule de $\text{CO}_2$ . . . . .	64
A	Molécule isolée (en phase gaz) . . . . .	65
A.1	Interprétation de la forme des modes . . . . .	66
A.2	Coordonnées normales . . . . .	66
A.3	Amplitude quadratique moyenne . . . . .	67
B	Molécule en phase condensée . . . . .	68
IV	Classification de la symétrie des modes de vibration . . . . .	68
A	Symétrie des modes propres . . . . .	69
B	Outils de classification . . . . .	69
B.1	Théorie des groupes et de leurs représentations . . . . .	69
B.2	Application aux vibrations moléculaires . . . . .	70
B.3	Règles de sélection en spectroscopie . . . . .	72
C	Exemples . . . . .	72
C.1	$\text{H}_2\text{O}$ . . . . .	72
C.2	Retour sur $\text{CO}_2$ . . . . .	74
<b>3</b>	<b>Systèmes de grande dimension</b>	<b>77</b>
I	Systèmes fermés et ondes stationnaires . . . . .	77
A	La chaîne plombée unidimensionnelle . . . . .	78
A.1	Modes longitudinaux et transverses . . . . .	78
A.2	Observations expérimentales . . . . .	79
A.3	Matrice dynamique . . . . .	80
A.4	Fréquences propres de la chaîne . . . . .	81
A.5	Vecteurs propres des modes de la chaîne . . . . .	86
B	Onde stationnaire . . . . .	86
C	Corde vibrante continue . . . . .	87
C.1	Équation d'onde . . . . .	88
C.2	Fréquences de vibration, relation de dispersion . . . . .	88
C.3	Mélange de modes . . . . .	89
II	Systèmes ouverts et propagation . . . . .	90
<b>4</b>	<b>Ondes</b>	<b>93</b>
I	Ondes tridimensionnelles usuelles dans un milieu non dispersif . . . . .	94
A	Ondes planes . . . . .	94
B	Ondes sphériques . . . . .	95
C	Atténuation, évanescence . . . . .	96
II	Puissance transportée et impédance . . . . .	97
A	Densité de puissance et impédance . . . . .	97
A.1	Densité de puissance . . . . .	98

	A.2	Impédance spécifique du milieu . . . . .	99
B		Cas d'une impédance complexe : la puissance réactive . . . . .	100
	B.1	Exemple d'une onde atténuée . . . . .	102
	B.2	Exemple d'une onde stationnaire . . . . .	102
C		Relation de continuité et densité volumique d'énergie . . . . .	103
D		Remarques et exemples . . . . .	104
	D.1	Remarques sur les ondes planes . . . . .	104
	D.2	Remarques sur les ondes sphériques . . . . .	104
	D.3	Le câble coaxial . . . . .	104
	D.4	Onde de déformation élastique dans un solide . . . . .	105
III		Réflexion et transmission . . . . .	106
	A	Coefficients de réflexion et transmission en amplitude . . . . .	106
		A.1 Définitions . . . . .	106
		A.2 Relation avec les impédances . . . . .	107
	B	Coefficients de réflexion et transmission en énergie . . . . .	108
IV		Phénomènes ondulatoires particuliers . . . . .	109
	A	Battements . . . . .	109
	B	Vitesses de phase et de groupe, paquet d'ondes . . . . .	109
	C	Effet Doppler . . . . .	113
		C.1 La source est en mouvement . . . . .	113
		C.2 La source et le récepteur sont en mouvement . . . . .	114
	D	Onde de choc . . . . .	115
		D.1 « Bang » supersonique en aviation . . . . .	115
		D.2 Effet Cerenkov . . . . .	116
<b>5</b>		<b>Relaxations et phénomènes de transport</b>	<b>119</b>
I		Ondes suramorties . . . . .	120
	A	Ondes stationnaires . . . . .	121
	B	Ondes propagatives . . . . .	124
		B.1 Amortissement faible ( $\gamma \ll \omega$ ) . . . . .	124
		B.2 Amortissement fort ( $\gamma \gg \omega$ ) . . . . .	125
II		Processus incohérents . . . . .	126
	A	Polarisation d'orientation . . . . .	126
		A.1 Processus aléatoire . . . . .	127
		A.2 Équation différentielle . . . . .	128
		A.3 Quelques solutions . . . . .	128
	B	Marche au hasard 1D . . . . .	131
		B.1 Concentration de particules . . . . .	131
		B.2 Flux de particules : loi de Fick . . . . .	131
		B.3 Conservation de la matière et équation d'onde . . . . .	132
	C	Extension du modèle à 3D . . . . .	133
	D	Étude d'une diffusion unidimensionnelle . . . . .	133
		D.1 Solution d'onde plane . . . . .	133
		D.2 Condition initiale particulière . . . . .	134

<b>6</b>	<b>Oscillations forcées et ondes avec source</b>	<b>137</b>
I	Oscillations forcées de chaînes fermées . . . . .	138
A	Oscillateur harmonique forcé . . . . .	138
B	Oscillateur paramétrique . . . . .	140
C	Oscillations forcées de chaînes fermées . . . . .	141
C.1	Bilan des forces pour une chaîne d'oscillateurs forcés	142
C.2	Équation du mouvement et solution formelle en régime permanent . . . . .	143
C.3	Recherche de la base adaptée . . . . .	144
C.4	Aspects méthodologiques . . . . .	145
D	Exemples . . . . .	147
D.1	Filtrage mécanique . . . . .	147
D.2	Règles de sélection en spectroscopie infra-rouge (du point de vue de la physique classique) . . . . .	149
II	Ondes avec source . . . . .	151
A	Équation de d'Alembert dans un système ouvert avec source	152
A.1	Avec condition aux limites . . . . .	153
A.2	Avec force extérieure . . . . .	156
B	Système continu fermé . . . . .	159
B.1	Application à la corde de violon . . . . .	160
B.2	Force périodique ponctuelle . . . . .	162
B.3	Exemple d'une force périodique étendue . . . . .	163
 <b>Partie II Quelques applications</b>		
<b>7</b>	<b>Ondes acoustiques</b>	<b>167</b>
I	Pression et flux acoustiques . . . . .	167
II	Ondes sonores dans un fluide . . . . .	168
A	Équation d'onde . . . . .	169
B	Énergie et impédances acoustiques . . . . .	170
III	Ondes sonores dans un solide . . . . .	171
A	Approximation unidimensionnelle . . . . .	171
B	Ondes longitudinales et transverses dans un solide isotrope .	172
B.1	Onde élastique longitudinale . . . . .	173
B.2	Onde élastique transverse . . . . .	173
B.3	Exemple d'application . . . . .	173
IV	Quelques instruments de musique . . . . .	175
A	Étude simplifiée des vibrations d'une membrane de timbale .	175
B	Quelques instruments à cordes . . . . .	179
<b>8</b>	<b>Acoustique technique</b>	<b>181</b>
I	L'oreille humaine . . . . .	181
A	Perception auditive . . . . .	182

	B	Échelle sonore et décibels . . . . .	183
	C	Éléments subjectifs d'écoute . . . . .	184
II	Acoustique des salles . . . . .		185
	A	Coloration et réverbération . . . . .	185
		A.1 Réflexion, Absorption, Modes de salle . . . . .	186
		A.2 Échos, filtrage par réflexion . . . . .	187
		A.3 Champs acoustiques . . . . .	187
		A.4 Réverbération . . . . .	189
	B	Concepts architecturaux . . . . .	190
	C	Exemples . . . . .	191
		C.1 Les théâtres antiques . . . . .	191
		C.2 Le Royal Albert Hall . . . . .	191
		C.3 La salle Pleyel . . . . .	192
		C.4 La Philharmonie de Paris . . . . .	192
	D	Éléments et matériaux actifs d'une salle d'écoute . . . . .	193
		D.1 Absorbeurs . . . . .	193
		D.2 Diffuseurs . . . . .	194
III	Isolation phonique . . . . .		194
	A	Bruit et atténuation du bruit . . . . .	195
	B	Mesures et normes . . . . .	195
		B.1 Indice d'exposition sonore . . . . .	196
		B.2 Isolation des bruits aériens . . . . .	196
		B.3 Isolation des bruits de choc . . . . .	197
		B.4 Réglementation actuelle . . . . .	197
	C	Matériaux et assemblages . . . . .	198
		C.1 Lois des masses et des fréquences . . . . .	198
		C.2 Quelques exemples . . . . .	199
<b>9</b>	<b>Transferts thermiques</b>		<b>201</b>
I	Mécanismes de transfert thermique . . . . .		202
	A	La chaleur . . . . .	202
	B	Flux thermiques . . . . .	203
	C	Conduction . . . . .	203
	D	Convection . . . . .	204
	E	Rayonnement . . . . .	204
II	Quelques situations élémentaires . . . . .		205
	A	Régimes stationnaires . . . . .	205
		A.1 Paroi simple . . . . .	205
		A.2 Échangeur à ailettes . . . . .	206
	B	Transferts hors équilibre . . . . .	208
		B.1 Diffusion de la chaleur à travers une paroi semi-infinie	208
		B.2 Température de contact entre deux milieux . . . . .	210
III	Introduction à la thermique des bâtiments . . . . .		212
	A	Grandeurs techniques et parois réelles . . . . .	212

TABLE DES MATIÈRES

	A.1	Résistance thermique d'une paroi . . . . .	212
	A.2	Pont thermique . . . . .	214
	A.3	Spécificité des parois vitrées . . . . .	215
	A.4	Inertie thermique . . . . .	215
	B	Réglementation . . . . .	216
	B.1	La conception bioclimatique . . . . .	217
	B.2	La consommation d'énergie primaire . . . . .	218
<b>10 Vagues</b>			<b>219</b>
I		Introduction . . . . .	219
II		Forme de vagues de faible amplitude . . . . .	221
	A	Observations . . . . .	221
	B	Forme de l'onde . . . . .	222
	B.1	Référentiel et conditions aux limites . . . . .	222
	B.2	Lois de l'hydrodynamique . . . . .	223
	B.3	Discussion de la forme . . . . .	225
III		Relation de dispersion . . . . .	226
	A	Établissement de la loi . . . . .	226
	B	Discussion des cas limites . . . . .	229
	B.1	Longueur capillaire . . . . .	229
	B.2	Ondes de gravité en eaux profondes . . . . .	229
	B.3	Ondes de gravité en eaux peu profondes . . . . .	230
	B.4	Tsunamis . . . . .	230
IV		Vagues de grande amplitude : les solitons . . . . .	230
	A	Équation d'onde . . . . .	231
	A.1	Dispersion . . . . .	231
	A.2	Non-linéarités . . . . .	231
	A.3	Introduction dans l'équation d'onde . . . . .	232
	B	Solution . . . . .	233
<b>11 Propagation de la lumière dans un matériau diélectrique</b>			<b>235</b>
I		Ondes électromagnétiques dans la matière . . . . .	235
	A	Champs électromagnétiques dans la matière . . . . .	236
	A.1	Interaction rayonnement – matière . . . . .	236
	A.2	Réponses électriques d'un matériau . . . . .	237
	A.3	Réponses magnétiques d'un matériau . . . . .	238
	B	Les équations de Maxwell . . . . .	239
	C	Dispersion dans un matériau neutre et isolant . . . . .	240
	D	Puissance et impédance électromagnétique . . . . .	241
II		Propriétés optiques des diélectriques . . . . .	241
	A	Champ local et polarisabilité . . . . .	242
	A.1	Milieus dilués . . . . .	242
	A.2	Milieus denses . . . . .	243
	B	Le modèle de l'électron élastiquement lié . . . . .	243

C	Propriétés optiques . . . . .	244
C.1	Indice optique . . . . .	244
C.2	Loi de dispersion . . . . .	246

**Partie III Problèmes et exercices**

**12 Énoncés . . . . . 249**

I	Outils mathématiques . . . . .	250
A	Changement de coordonnées . . . . .	250
B	Le choix des axes . . . . .	250
C	La classique cycliste . . . . .	251
II	Oscillateurs à un degré de liberté . . . . .	252
A	Oscillations verticales d'un iceberg . . . . .	252
B	Résonateur de Helmholtz . . . . .	252
C	Le salaire de la peur . . . . .	252
III	Oscillateurs à $N$ degrés de liberté . . . . .	253
A	Molécule de biphényle . . . . .	253
B	La molécule d'ammoniaque . . . . .	253
IV	Oscillateurs à grand nombre de degrés de liberté . . . . .	254
A	Phonons . . . . .	254
B	Étude d'une chaîne d'oscillateurs électriques couplés . . . . .	255
C	Corde de guitare . . . . .	258
D	Corde de piano . . . . .	259
V	Zones de dispersion réactives, ondes évanescentes . . . . .	259
A	Chaîne de pendules couplés . . . . .	259
B	Barrière tunnel . . . . .	260
VI	Lignes de transmission . . . . .	260
A	Câble coaxial sans pertes . . . . .	260
B	Réflexion, impédance caractéristique ou de ligne . . . . .	260
VII	Acoustique . . . . .	261
A	Pavillon d'un instrument à vent . . . . .	261
B	Le monde du silence . . . . .	262
C	Champ direct et champ réverbéré . . . . .	262
D	Isolation phonique . . . . .	262
VIII	Thermique . . . . .	262
A	Chauffer le café . . . . .	262
B	Cuire les pâtes . . . . .	263
IX	Vagues . . . . .	263
A	Forme des ondes de surface . . . . .	263
B	Dispersion des ondes de surface . . . . .	264
X	Optique . . . . .	265
A	Propriétés optiques de miroirs métalliques . . . . .	265



TABLE DES MATIÈRES

<b>13</b>	<b>Corrigés</b>	<b>267</b>
I	Outils mathématiques . . . . .	268
	A Changement de coordonnées . . . . .	268
	B Le choix des axes . . . . .	268
	C La classique cycliste . . . . .	269
II	Oscillateurs à un degré de liberté . . . . .	269
	A Oscillations verticales d'un iceberg . . . . .	269
	B Résonateur d'Helmholtz . . . . .	270
	C Le salaire de la peur . . . . .	270
III	Oscillateurs à $N$ degrés de liberté . . . . .	270
	A Molécule de biphenyle . . . . .	270
	B La molécule d'ammoniaque . . . . .	271
IV	Oscillateurs à grand nombre de degrés de liberté . . . . .	272
	A Phonons . . . . .	272
	B Étude d'une chaîne d'oscillateurs électriques couplés . . . . .	274
	C Corde de guitare . . . . .	279
	D Corde de piano . . . . .	281
V	Zones de dispersion réactives, ondes évanescentes . . . . .	282
	A Chaîne de pendules couplés . . . . .	282
	B Barrière tunnel . . . . .	283
VI	Lignes de transmission . . . . .	285
	A Câble coaxial sans pertes . . . . .	285
	B Réflexion, impédance caractéristique ou de ligne . . . . .	286
VII	Acoustique . . . . .	287
	A Pavillon d'un instrument à vent . . . . .	287
	B Le monde du silence . . . . .	289
	C Champ direct et champ réverbéré . . . . .	289
	D Isolation phonique . . . . .	290
VIII	Thermique . . . . .	292
	A Chauffer le café . . . . .	292
	B Cuire les pâtes . . . . .	294
IX	Vagues . . . . .	296
	A Forme des ondes de surface . . . . .	296
	B Dispersion des ondes de surface . . . . .	298
X	Optique . . . . .	299
	A Propriétés optiques de miroirs métalliques . . . . .	299

**Partie IV Annexes**

<b>A</b>	<b>Rappels sur le théorème du moment cinétique</b>	<b>303</b>
<b>B</b>	<b>Représentations complexes d'ondes</b>	<b>305</b>
I	Représentation complexe d'une fonction sinusoïdale du temps . . . . .	305

A	Construction . . . . .	305
B	Traitement de la phase constante . . . . .	306
C	Calculs linéaires en représentation complexe . . . . .	306
	C.1 Somme de représentations . . . . .	306
	C.2 Produit par un scalaire complexe . . . . .	306
II	Représentation complexe d'une onde . . . . .	307
	A Représentation complexe d'une onde plane propagative . . .	307
	B Représentation complexe d'une onde stationnaire . . . . .	307
	C Représentation complexe de la puissance d'une onde . . . . .	307
<b>C</b>	<b>Groupes ponctuels de symétrie</b>	<b>309</b>
I	Quelques tables de caractères . . . . .	309
<b>D</b>	<b>Séries et transformées de Fourier et Laplace</b>	<b>311</b>
I	Série de Fourier . . . . .	311
II	Transformée de Fourier . . . . .	312
	A Définitions . . . . .	312
	B Quelques transformées de Fourier usuelles . . . . .	312
III	Transformée de Laplace . . . . .	313
	A Définition . . . . .	313
	B Quelques transformées de Laplace usuelles . . . . .	313
IV	Produit de convolution . . . . .	314
	A Définition . . . . .	314
	B Relation avec les transformées . . . . .	314
V	Application à la résolution d'équations différentielles, fonctions de Green	314
	A Réponse impulsionnelle, fonction de Green . . . . .	315
	B Réponse générale . . . . .	315
	<b>Bibliographie</b>	<b>316</b>
	<b>Index</b>	<b>317</b>