92e année (1981-1982) Septembre 19..

RMS
REVUE DE MATHÉMATIQUES SPÉCIALES

Ce premier numéro de la 92e année de la *Revue de Mathématiques spéciales* propose un choix de sujets donnés en 1981 aux concours d'Agrégation et du CAPES et aux concours d'entrée aux grandes Écoles.

Cette documentation exceptionnelle sera complétée par la parution dans des prochains numéros de questions orales proposées à différents concours d'entrée aux grandes Écoles.

Les énoncés précédés d'un numéro seront résolus dans le courant de l'année 1981-1982, selon les prévisions de parution figurant en page 2 de couverture. Les abonnés à la *Revue* peuvent nous faire parvenir des solutions de ces problèmes; la Rédaction examinera celles lui parvenant un mois avant la date de parution prévue.

Agrégation de mathématiques

Mathématiques générales

Première partie.

6300. Soit G un groupe fini, noté multiplicativement, n le cardinal de G et e son élément neutre. Si A est un anneau commutatif unitaire, d'unité ε, on désigne par $A[G]$ l'ensemble des fonctions de G dans A et on définit dans $A[G]$ deux opérations de la façon suivante :

$$(u+v)(g) = u(g) + v(g) \qquad \text{et} \qquad (uv)(g) = \sum_{\substack{h,\, k \in G \\ hk = g}} u(h)v(k)$$

pour tous $u, v \in A[G]$ et $g \in G$. On définit enfin $X_g \in A[G]$ par $X_g(h) = \varepsilon$ (resp. 0) si $g = h$ (resp. $g \neq h$).

1° *a*) Montrer que $A[G]$ est un anneau unitaire et que l'application $g \longmapsto X_g$ permet d'identifier, ce qu'on fera désormais, G à un sous-groupe du groupe des éléments inversibles de $A[G]$. Est-il possible d'identifier, de manière analogue, A à un sous-anneau de $A[G]$? Quelle est la condition nécessaire et suffisante pour que $A[G]$ soit commutatif ?

b) Établir que $A[G]$ n'est jamais intègre, sauf dans un cas particulier qu'on précisera.

2° Soit K un corps commutatif de caractéristique nulle.

a) Vérifier que $K[G]$ est muni canoniquement d'une structure de K-espace vectoriel, pour laquelle G est une base de $K[G]$.

b) Pour tout $u \in K[G]$, on note f_u l'application $v \longmapsto uv$ de $K[G]$ dans lui-même et on pose $\theta(u) = \operatorname{trace}(f_u)$. Démontrer que $\theta(u) = n \cdot u(e)$.

c) La forme bilinéaire $(u, v) \longmapsto \theta(uv)$ est-elle symétrique, non dégénérée ?

3° On suppose, dans cette question, que G est abélien et on prend pour K le corps $\mathbb{C}$ des nombres complexes.

a) Démontrer que chaque f_u est diagonalisable, puis qu'il existe une base B de $\mathbb{C}[G]$ dans laquelle chacun des f_u, $u \in \mathbb{C}[G]$, est représenté par une matrice diagonale, de la forme :

$$\begin{pmatrix} \lambda_1(u) & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n(u) \end{pmatrix}$$

b) Établir que l'application $u \longmapsto (\lambda_1(u), \ldots, \lambda_n(u))$ est un isomorphisme de $\mathbb{C}$-algèbres entre $\mathbb{C}[G]$ et $\mathbb{C}^n$.

Deuxième partie.

Les notations sont celles de la première partie et on suppose G abélien. P est l'ensemble formé de 1 et de tous les nombres premiers; pour $g \in G$ et $s \in P$, on pose

$$[g, s] = 1 - g \quad (\text{resp.} = 1 + g + g^2 + \cdots + g^{s-1})$$

si $s = 1$ (resp. si s est un nombre premier), $[g, s]$ est un élément de $\mathbb{Z}(G)$, $\mathbb{Z}$ désignant l'anneau des entiers relatifs.

1° *a*) Soit $S = \{u_1, \ldots, u_k\}$ une partie finie de $\mathbb{Z}[G]$, montrer qu'il existe un sous-groupe H de G, minimum pour l'inclusion, tel que $S \subset \mathbb{Z}[H]$; lorsque $S \subset G$, vérifier que H est le sous-groupe de G engendré par S. On

RMS

Comité de rédaction

LIBRAIRIE VUIBERT, 63, bd Saint-Germain, 75015 Paris.

A. WARUSFEL, ancien élève de l'École normale supérieure, agrégé des sciences mathématiques, professeur en classe de mathématiques spéciales M′ au lycée Louis-le-Grand.

J. CHEVALLET, ancien élève de l'École normale supérieure de Saint-Cloud, agrégé des sciences mathématiques, professeur en classe de mathématiques spéciales M′ au lycée Henri IV.

G. FLORY, ancien élève de l'École normale supérieure, agrégé des sciences mathématiques, professeur en classe de mathématiques spéciales au lycée Louis-le-Grand.

Sommaire