92e année (1981-1982)

Janvier 1982 - Mensuel n° 5

RMS

REVUE DE MATHÉMATIQUES SPÉCIALES

Sciences humaines et mathématiques : deux exemples

par J. P. Desclés, U.E.R. de mathématiques, université Paris 7.

Lorsque les mathématiques investissent un domaine non mathématique (sciences de la nature, sciences de la vie, phénomènes d'organisation et... sciences humaines) on a coutume d'exiger que ce rapprochement produise des théorèmes qui éclairent d'un jour nouveau le domaine mathématisé. Dans le meilleur des cas, on voudrait que ces théorèmes mathématiques se transforment en propositions théoriques prenant en charge une partie des phénomènes empiriques. La mathématisation est pleinement réussie lorsque les propositions théoriques produites à partir des théorèmes n'auraient pas pu être trouvées, voire formulées, à partir de la seule analyse des faits observés. Comme on le sait, la mathématisation a pleinement réussie, selon le critère rappelé ci-dessus, en physique où de nombreux théorèmes purement mathématiques, s'intègrent en propositions de la cinématique, de la mécanique, de l'optique, de l'électromagnétisme, de la physique quantique et relativiste, etc.

Dans les domaines des sciences humaines, existent-ils des théorèmes de ce genre ? La réponse est « oui » bien que le nombre de théorèmes soit extrêmement peu élevé. Certains théorèmes ont été à l'origine de branches nouvelles des mathématiques et connaissent un réel développement. Prenons deux exemples : la « théorie des jeux » et la linguistique avec la « théorie des langages formels ».

1. Théorème du minimax en théorie des jeux.

La théorie des jeux a pris naissance avec les notes de E. Borel, en 1921. C'est J. von Neumann qui établit la démonstration du « théorème fondamental » (1928). C'est en 1944 que la théorie des jeux prit son autonomie avec l'ouvrage de J. von Neumann et O. Morgenstern. *Theory of games and economic behaviour*, Princeton, N. J., 1944.

1.1. Considérons un exemple très simple. Supposons que deux joueurs A et B choisissent, indépendamment l'un de l'autre, un des nombres suivants :

$$-1; \quad 0; \quad +1.$$

A ayant choisi un nombre a et B un nombre b, ils échangent un *réglement* entre eux.

Si le réglement est positif, A touche un *gain* qui est payé par B qui subit alors une perte.

Si le réglement est négatif, A subit une *perte* et doit payer la valeur absolue du réglement à B qui acquiert ce gain.

Supposons que, dans notre jeu, le réglement soit donné par l'expression :

$$r = a(b - a) + b(b + a).$$

Exemple : $a = -1$; $b = +1$; on en déduit que $r = -2$. A règle la somme $(-r)$ à B, soit, ici, $+2$.

Plaçons toutes les possibilités de réglement dans un tableau qui se présente ainsi :

		B choisit b		
		-1	0	$+1$
A choisit a	-1	2	-1	-2
	0	1	0	1
	$+1$	-2	-1	2

Quelque soit son choix, A ne peut être assuré du résultat puisque celui-ci dépend également du choix de B.

Dans le tableau précédent, nous avons les gains de A (et par conséquent les pertes de B) qui sont obtenus en fonction des choix a et b opérés par A et B. Chaque ligne exprime tous les gains attendus (une perte est un gain négatif) selon le choix de B.

Le joueur A essaiera de rendre le réglement maximum puisque son gain est égal à ce montant. Pendant ce temps-là, le joueur B essaiera de rendre le réglement aussi petit que possible puisque son gain est l'opposé de celui-ci.

Comme aucun des joueurs ne peut savoir ce que l'autre fera (on suppose qu'ils ne trichent pas), la théorie des jeux se place dans l'hypothèse où chacun des joueurs raisonne de la façon suivante : « pour un choix que j'ai fait, je dois envisager que mon adversaire fera un choix qui rendra mon gain

RMS

Comité de rédaction

Sommaire

Abonnements 1981-1982.

France : F 240. **Librairie Vuibert** (C.C.P. Paris 389-85 F).

Belgique : FB 2 000. **Éditions et diffusion**, 16, rue de Chambéry, 1040 Bruxelles.

Canada : S 66. **Le diffuseur**, CP 85 Boucherville J4 B5 E6.

Espagne : PTA 5 760. **Cientifico tecnica**, 27, Sandro Davila, Madrid 28.

Maroc : DH 240. **SMER**, 3, rue Ghazza, Rabat.

Suisse : FS 107. **Delachaux et Niestlé**, 79, route d'Oron 1000 Lausanne 21.

Autres Pays : Europe, Afrique, DOM, Moyen-Orient, Amérique, Asie, Océanie, Madagascar, TOM : FF 240. **Librairie Vuibert** (C.C.P. Paris 389-85 F).

Changement d'adresse : Les demandes doivent être accompagnées de la dernière bande d'envoi et de FF 5,00 pour frais.