92e année (1981-1982)

Février 1

RMS

REVUE DE MATHÉMATIQUES SPÉCIALES

Un critère d'irréductibilité dans $\mathbb{Z}[X]$

par A. Monestier, professeur en Mathématiques spéciales au lycée Chaptal.

L'objet de cet article est de donner une condition suffisante pour qu'un polynôme appartenant à $\mathbb{Z}[X]$ soit irréductible. Une application simple de ce critère permet de démontrer ensuite le théorème suivant : tout polynôme de $\mathbb{Z}[X]$ est la somme de deux polynômes irréductibles (théorème analogue au théorème de Goldbach, non encore démontré, pour les entiers naturels).

Énoncé du critère d'irréductibilité ($\mathscr{C}$) :

$$\mathscr{P} \in \mathbb{Z}[X], \qquad \mathscr{P} = a_m x^m + a_{m-1}x^{m-1} + \cdots + a_0$$

$a_0 \neq 0$, $a_m \neq 0$, $m > 1$. Il existe une fonction K de m variables telle que

$$|a_{m-1}| > \mathrm{K}(a_0, a_1, \ldots, a_{m-2}, a_m) \Rightarrow \mathscr{P} \text{ irréductible.}$$

Théorème 1. — *Si ($\mathscr{C}$) est vrai pour les polynômes tels que $a_m = 1$ il est vrai pour les polynômes de $\mathbb{Z}[X]$ quelconques.*

$$\mathscr{P}(x) = a_m x^m + a_{m-1}x^{m-1} + \cdots + a_1 x + a_0 .$$

Posons $X = a_m x$

$$(a_m)^{m-1}\mathscr{P}(x) = X^m + a_{m-1}X^{m-1} + a_{m-2}a_m X^{m-2} + \cdots + a_1 a_m^{m-2}X + a_0(a_m)^{m-1}$$

$(a_m)^{m-1}\mathscr{P}(x) = \mathscr{Q}(X)$ avec $\mathscr{Q} \in \mathbb{Z}[X]$.

De façon évidente

$$\mathscr{P} \text{ irréductible} \Leftrightarrow \mathscr{Q} \text{ irréductible.}$$

Si ($\mathscr{C}$) est vrai pour $\mathscr{Q}$ il vient

$$|a_{m-1}| > \mathrm{K}(a_0 a_m^{m-1}, a_1 a_m^{m-2}, \ldots, a_{m-2}a_m, 1) \Rightarrow \mathscr{Q} \text{ irréductible}$$

donc en posant

$$\mathrm{K}'(a_0, a_1, a_2, \ldots, a_{m-2}, a_m) = \mathrm{K}(a_0 a_m^{m-1}, a_1 a_m^{m-2}, \ldots, a_{m-2}a_m, 1)$$

$$|a_{m-1}| > \mathrm{K}'(a_0, a_1, \ldots, a_{m-2}, a_m) \Rightarrow \mathscr{P} \text{ irréductible.}$$

Théorème 2. — *$a_0, a_1, a_2, \ldots, a_{m-2}$ fixés dans $\mathbb{Z}$ et $a_0 \neq 0$; il existe $\mathrm{K}_1 \in \mathbb{Z}$ tel que $|a_{m-1}| > \mathrm{K}_1$ implique $\mathscr{P}$ n'admet pas de diviseurs du premier degré à coefficients $\in \mathbb{Z}$.*

Dorénavant, en utilisant le théorème 1, nous supposerons $a_m = 1$. Soit $\{1, d_1, d_2, \ldots, a_0\}$ l'ensemble des diviseurs de a_0. Les racines rationnelles de $\mathscr{P}$ appartiennent à l'ensemble $\{\pm 1, \pm d_1, \pm d_2, \ldots, \pm a_0\}$ (noté ε).

Les seules valeurs de a_{m-1} pour lesquelles $\mathscr{P}$ admet un diviseur du premier degré appartenant à $\mathbb{Z}[X]$ sont

$$a_{m-1} = -\frac{1}{r^{m-1}}\left[r^m + a_{m-2}r^{m-2} + \cdots + a_1 r + a_0\right]$$

r étant choisi dans ε et a_{m-1} étant entier. Il y en a nécessairement un nombre fini, éventuellement nul. Posons

$$\mathrm{K}_1 = \sup_{r \in \varepsilon}\left|\frac{1}{r^{m-1}}\left[r^m + a_{m-2}r^{m-2} + \cdots + a_1 r + a_0\right]\right|$$

et r tel que $\dfrac{1}{r^{m-1}} \times [\ \ ] \in \mathbb{Z}$

$$|a_{m-1}| > \mathrm{K}_1 \Rightarrow \mathscr{P} \text{ n'a pas de diviseur du premier degré} \in \mathbb{Z}[X].$$

Théorème 3. — *$a_0 = \alpha_0\beta_0 \neq 0$, $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_{m-2}$ fixés dans $\mathbb{Z}$. $1 \leqslant p \leqslant \dfrac{m}{2}$, $p \in \mathbb{Z}$, alors il existe K_{p,β_0} tel que $|a_{m-1}| > \mathrm{K}_{p,\beta_0}$ implique $\mathscr{P}$, n'a pas de diviseurs de degré p, de terme constant égal à β_0 et appartenant à $\mathbb{Z}[X]$.*

RMS

Comité de rédaction

Librairie Vuibert, 63, bd Saint-Germain, 75015 Paris.

A. Warusfel, ancien élève de l'École normale supérieure, agrégé des sciences mathématiques, professeur en classe de mathématiques spéciales M' au lycée Louis-le-Grand.

J. Chevallet, ancien élève de l'École normale supérieure de Saint-Cloud, agrégé des sciences mathématiques, professeur en classe de mathématiques spéciales M' au lycée Henri IV.

G. Flory, ancien élève de l'École normale supérieure, agrégé des sciences mathématiques, professeur en classe de mathématiques spéciales M' au lycée Louis-le-Grand.

Sommaire

Abonnements 1981-1982.

France : F 240. **Librairie Vuibert** (C.C.P. Paris 389-85 F).

Belgique : FB 2 000. **Éditions et diffusion**, 16, rue de Chambéry, 1040 Bruxelles.

Canada : S 66. **Le diffuseur**, CP 85 Boucherville J4 B5 E6.

Espagne : PTA 5 760. **Cientifico tecnica**, 27, Sandro Davila. Madrid 28.

Maroc : DH 240. **SMER**, 3, rue Ghazza, Rabat.

Suisse : FS 107. **Delachaux et Niestlé**, 79, route d'Oron 1000 Lausanne 21.

Autres Pays : Europe, Afrique, DOM, Moyen-Orient, Amérique, Asie, Océanie, Madagascar, TOM : FF 240. **Librairie Vuibert** (C.C.P. Paris 389-85 F).

Changement d'adresse : Les demandes doivent être accompagnées de la dernière bande d'envoi et de FF 5,00 pour frais.