92e année (1981-1982) Mars

RMS

REVUE DE MATHÉMATIQUES SPÉCIALES

Étude des suites de réels cos $n!x$ et sin $n!x$.

par B. Ballet, professeur au Centre universitaire d'Avignon.

En utilisant la structure des sous-groupes additifs de $\mathbb{R}$, on montre que l'ensemble des valeurs d'adhérence des suites $(\cos nx)$ et $(\sin nx)$ est tout l'intervalle $[-1, +1]$, quand $\dfrac{x}{2\pi}$ est irrationnel. Rappelons brièvement la démonstration pour la suite $(\cos nx)$ par exemple.

Soit $a \in [-1, +1]$ et $\alpha \in [0, \pi]$ tel que $\cos \alpha = a$. Le sous-groupe additif de $\mathbb{R}$ engendré par x et 2π n'est pas monogène car $\dfrac{x}{2\pi}$ est irrationnel : il est donc partout dense. Si maintenant ε est un nombre positif donné, par continuité, il existe $\eta > 0$ tel que

$$|u - \alpha| < \eta \Rightarrow |\cos u - a| < \varepsilon.$$

Alors d'après ce qui précède, il existe des entiers n et m (avec $n \geqslant 0$) tels que

$$|nx + 2m\pi - \alpha| < \eta$$

donc

$$|\cos(nx + 2m\pi) - a| = |\cos nx - a| < \varepsilon.$$

On se propose d'étudier l'ensemble des valeurs d'adhérence des suites extraites des précédentes : $(\cos n!x)$ et $(\sin n!x)$, pour $\dfrac{x}{2\pi}$ irrationnel $\left(\text{si } \dfrac{x}{2\pi}\right.$ est rationnel, ces suites sont constantes à partir d'un certain rang). Il va être commode d'utiliser la notion de développement « factoriel » d'un nombre réel :

1° *Tout nombre réel x de l'intervalle $[0, 1]$ est la somme d'une série convergente de la forme*

$$\sum_{n \geqslant 2} \frac{a_n}{n!}$$

où pour tout n, a_n est un entier compris entre 0 et $n - 1$ (égalités possibles). Si x est irrationnel, cette écriture est unique.

2° *Inversement toute série de cette forme est convergente et sa somme est un réel de l'intervalle* $[0, 1]$.

Démontrons d'abord 2° : On a pour $p \geqslant 2$,

$$\sum_{n=2}^{p} \frac{a_n}{n!} \leqslant \sum_{n=2}^{p} \frac{n-1}{n!} = \sum_{n=2}^{p} \left(\frac{1}{(n-1)!} - \frac{1}{n!}\right) = 1 - \frac{1}{p!},$$

d'où le résultat.

1° Pour $n \geqslant 2$, désignons par p_n la partie entière de $n!x$:

$$p_n \leqslant n!x < p_n + 1,$$

alors

$$(n+1)p_n \leqslant (n+1)!x < (p_n + 1)(n + 1),$$

d'où

$$(n+1)p_n \leqslant p_{n+1} \quad \text{et} \quad p_{n+1} + 1 \leqslant (n+1)(p_n + 1).$$

Il en résulte

$$\frac{p_n}{n!} \leqslant \frac{p_{n+1}}{(n+1)!} \leqslant \frac{p_n}{n!} + \frac{1}{n!} - \frac{1}{(n+1)!}.$$

Soit alors a_{n+1} l'entier défini par l'égalité

$$\frac{p_{n+1}}{(n+1)!} = \frac{p_n}{n!} + \frac{a_{n+1}}{(n+1)!}.$$

De la double inégalité ci-dessus résulte que a_{n+1} est positif et au plus égal à n et on a immédiatement par récurrence,

$$\frac{p_{n+1}}{(n+1)!} = \frac{a_2}{2!} + \ldots + \frac{a_{n+1}}{(n+1)!}$$

avec $a_2 = p_2 = [2x]$ et si $x < 1$, $a_2 = 0$ ou 1 et comme $\dfrac{p_{n+1}}{(n+1)!} \to x$ on a bien

$$x = \sum_{n \geqslant 2} \frac{a_n}{n!},$$

RMS

Comité de rédaction

Sommaire

Abonnements 1981-1982.

France : F 240. **Librairie Vuibert** (C.C.P. Paris 389-85 F).

Belgique : FB 2 000. **Éditions et diffusion**, 16, rue de Chambéry, 1040 Bruxelles.

Canada : $ 66. **Le diffuseur**, CP 85 Boucherville J4 B5 E6.

Espagne : PTA 5 760. **Cientifico tecnica**, 27, Sandro Davila. Madrid 28.

Maroc : DH 240. **SMER**, 3, rue Ghazza, Rabat.

Suisse : FS 107. **Delachaux et Niestlé**, 79, route d'Oron 1000 Lausanne 21.

Autres Pays : Europe, Afrique, DOM, Moyen-Orient, Amérique, Asie, Océanie, Madagascar, TOM : FF 240. **Librairie Vuibert** (C.C.P. Paris 389-85 F).

Changement d'adresse : Les demandes doivent être accompagnées de la dernière bande d'envoi et de FF 5,00 pour frais.