92e année (1981-1982) Avril 1982 - Mensuel nº 8

RMS

REVUE DE MATHÉMATIQUES SPÉCIALES

Un exercice sur les groupes

par J. Bouteloup, Professeur de spéciales honoraire.

Il me fut récemment posé la question de savoir si la relation classique $ab = dm$, entre deux entiers positifs, leur p.g.c.d. et leur p.p.c.m. se généralise à un groupe quelconque, en la considérant comme reliant les nombres d'éléments de $\mathbb{Z}/H$, $\mathbb{Z}/K$, $\mathbb{Z}/H + K$, $\mathbb{Z}/H \cap K$, supposés finis (en posant $H = a\mathbb{Z}$ et $K = b\mathbb{Z}$). J'avoue que j'ignorais certains des résultats, pourtant très simples, que je fus amené à mettre en évidence lors de cette étude; ils m'apparurent suffisamment intéressants pour faire l'objet de cette note.

En ne supposant pas le groupe G commutatif, et en utilisant en conséquence la notation multiplicative, nous ferons correspondre à deux sous-groupes H et K l'ensemble

$$HK = \{hk/h \in H, k \in K\}.$$

On vérifie aisément que

$$hk = h'k' \Leftrightarrow \exists u \in H \cap K, \quad h' = hu, \quad k' = u^{-1}k$$

et que cette relation est une relation d'équivalence $\mathcal{R}$ sur $H \times K$; toute classe d'équivalence, caractérisée par un couple (h, k) est en correspondance bijective avec $H \cap K$, et HK est en correspondance bijective avec $H \times K/\mathcal{R}$. *Si nous supposons* H *et* K *finis*, de p et q éléments, $H \times K$ comporte pq éléments; $H \cap K$ comportant i éléments, il y a pq/i classes d'équivalences; c'est le nombre d'éléments r de HK, et

$$pq = ri.$$

Un sous-groupe H de G caractérise deux relations d'équivalence, pour lesquelles les classes de x sont xH et Hx; les deux ensembles quotients sont en bijection, *et nous désignerons dans toute la suite par* G/H *l'ensemble des classes* xH. Mais, dans le cas général, HK n'est pas un sous-groupe de G; un contre-exemple élémentaire est obtenu avec le groupe à 6 éléments défini dans le plan euclidien par 3 droites faisant entre elles des angles de $\frac{\pi}{3}$, et constitué de l'identité, des symétries orthogonales par rapport à ces 3 droites, des rotations de $\frac{2\pi}{3}$ et $\frac{4\pi}{3}$; il suffit de prendre

$$H = \{\text{identité, une symétrie}\}$$

et

$$K = \{\text{identité, une autre symétrie}\}.$$

Dans ce cas, HK ne caractérise pas de relations d'équivalences, et *l'on ne peut parler d'ensemble quotient* G/HK. Cependant, si l'un des sous-groupes, soit K, est *distingué*, alors $HK = KH$ (puisque, $\forall h \in H$, $hK = Kh$) et *c'est un sous-groupe*, $hkh'k'$ pouvant s'écrire $hh'k''k'$ $((h, h') \in H^2$, $(k, k', k'') \in K^3)$.

Supposons G *fini, de* n *éléments;* toute classe d'équivalence xH est en bijection avec H, et comporte un nombre d'éléments égal au cardinal p de H; le nombre de classes, cardinal de G/H est donc n/p; la relation $pq = ri$ nous donne

$$\frac{n}{p}\cdot\frac{n}{q} = \frac{n}{r}\cdot\frac{n}{i},$$

soit

$$\operatorname{card}(G/H)\cdot\operatorname{card}(G/K) = \operatorname{card}(G/HK)\cdot\operatorname{card}(G/H \cap K).$$

Mais ce raisonnement n'est évidemment plus valable lorsque G n'est pas fini. Plaçons-nous dans ce cas général, en supposant toujours K *sous-groupe distingué*, et H sous-groupe quelconque. K est alors un sous-groupe distingué de HK, et HK/K est un groupe; H est un sous-groupe de HK. Pour la relation d'équivalence caractérisée par K, une classe de HK est de la forme hkK $((h, k) \in H \times K)$; mais $kK = K$; elle est donc de la forme hK, et nous

RMS

Comité de rédaction

Librairie Vuibert, 63, bd Saint-Germain, 75015 Paris.

A. Warusfel, ancien élève de l'École normale supérieure, agrégé des sciences mathématiques, professeur en classe de mathématiques spéciales M' au lycée Louis-le-Grand.

J. Chevallet, ancien élève de l'École normale supérieure de Saint-Cloud, agrégé des sciences mathématiques, professeur en classe de mathématiques spéciales M' au lycée Henri IV.

G. Flory, ancien élève de l'École normale supérieure, agrégé des sciences mathématiques, professeur en classe de mathématiques spéciales M' au lycée Louis-le-Grand.

Sommaire

Un exercice sur les groupes, par J. Bouteloup 349
Une généralisation du théorème de Césaro, par A. Warusfel 350
C.A.P.E.S. (solution de la question 6 303) 351
École polytechnique (solution de la question 6 315) 359
École polytechnique (solution de la question 6 316) 363
Concours commun mines, ponts et chaussées (solution de la question 6 320) 367
Questions et Réponses 370
Les livres du mois 371
Annonce 372

Abonnements 1981-1982

France : F 240. Librairie Vuibert (C.C.P. Paris 389-85 F).

Belgique : FB 2 000. Éditions et diffusion, 16, rue de Chambéry, 1040 Bruxelles.

Canada : $ 66. Le diffuseur, CP 85 Boucherville J4 B5 E6.

Espagne : PTAS 5 760. Cientifico-tecnica, 27, Sandro Davila. Madrid 28.

Maroc : DH 240. SMER, 3, rue Ghazza, Rabat.

Suisse : FS 107. Delachaux et Niestlé, 79, route d'Oron 1000 Lausanne 21.

Autres Pays : Europe, Afrique, DOM, Moyen-Orient, Amérique, Asie, Océanie, Madagascar, TOM : FF 240. Librairie Vuibert (C.C.P. Paris 389-85 F).

Changement d'adresse : Les demandes doivent être accompagnées de la dernière bande d'envoi et de FF 5,00 pour frais.