

REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE

MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR

ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

UNIVERSITE SAAD DAHLEB DE BLIDA 1

Institut d'Aéronautique et des études spatiales

Département de construction Aéronautique



MEMOIRE DE FIN D'ETUDE

EN VUE DE L'OBTENTION DU DIPLOME MASTER EN AÉRONAUTIQUE

Option : Avionique

Thème :

**Commandes robustes -LQR et PRLQR-
dédiées à un système aéroélastique**

Présenté par :

Hamadi Nassim

Aissi Samira

Encadré par :

Mr/ DILMI Smain.

Promotion: 2014/2015

بِسْمِ اللَّهِ الرَّحْمَنِ الرَّحِيمِ

ملخص

مشروع تخرجنا يتلخص في النمذجة والتحكم في نظام ايروالستيكي. النموذج المدروس هو مقطع من جناح الطائرة بسطحين من أسطح التحكم، الحركة الديناميكية لهذا الأخير تتعلق بالحركة الانحرافية المائلة و الحركة العمودية.

بعد الحصول على النموذج، يتم تطبيقه على نموذج الجناح TAMU WING II. انظمة التحكم : LQR ، LQR مع ملاحظ لينبرغر, سوف تستخدم لقضاء على ظاهرة الاهتزازات (ايروسرفوالستيكي).

وأخيرا, يتم إعطاء تفسير للنمذجة التي تأخذ بعين الاعتبار مبدأ الارتياح في الأبعاد، ثم يتم تطبيق نظام التحكم (PRLQR) وسيتم دراسة متانته تجاه القضاء على ظاهرة الاهتزازات والحد من مستواها.

الكلمات الدلالية: نظام ايروالستيكي, اهتزازات, LQR, PRLQR, ملاحظ لينبرغر, ايروسرفوالستيكي, نظام تحكم متين, الجناح TAMU WING II.

Abstract

Our final project study is based on the modeling and the control of an aeroelastic system. The model studied is a 2D wing section with two control surfaces. The dynamics of the movement of this last relates to pitching and vertical displacement.

After obtaining the mathematical model, this last is applied to a model of wing called TAMU WING II. The optimal LQR and LQR with Luenberger observer, will be used for the suppression of flutter (aeroservoelasticity).

Finally, an interpretation of the modeling of the aeroelastic system is given which takes into account the parametric uncertainties, then the command (PRLQR) will be used and its robustness towards the suppression of flutter and the reduction of the level of vibration will be studied.

Keywords: aeroelastic system, Flutter, LQR, PRLQR, Luenberger observer, aeroservoelasticity, robust control, TAMU WING II.

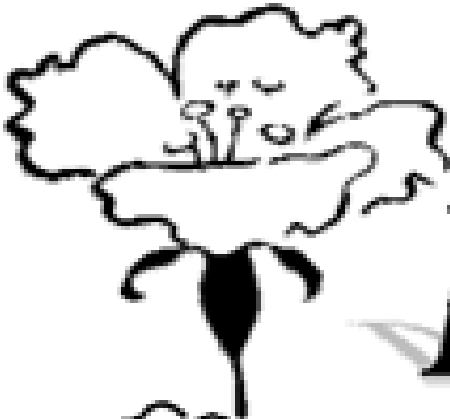
Résumé

Notre projet de fin d'étude est basé sur la modélisation et le contrôle d'un système aéroélastique. Le modèle à étudier est une section d'aile bidimensionnelle de deux degré de liberté avec deux surfaces de commande. La dynamique du mouvement de ce dernier concerne le tangage et le déplacement vertical.

Après avoir obtenu le modèle dynamique, ce dernier est appliqué sur un modèle d'aile appelé TAMU WING II. La commande LQR, LQR avec observateur de Luenberger, seront utilisées pour la suppression de flottement (l'aéroservoélasticité).

En fin, une interprétation de la modélisation de système aéroélastique est donnée qui prend en compte les incertitudes paramétriques, ensuite la commande (PRLQR) sera utilisée et sa robustesse vis-à-vis la suppression de flottement et la réduction du niveau de vibration sera étudiée.

Mots clés : *système aéroélastique, flottement, LQR, PRLQR, observateur de Luenberger, aéroservoélasticité, commande robuste, TAMU WING II.*



Dédicace

*Je dédie ce modeste travail à :
Mes chers parents pour leur soutien et leur
réconfort*

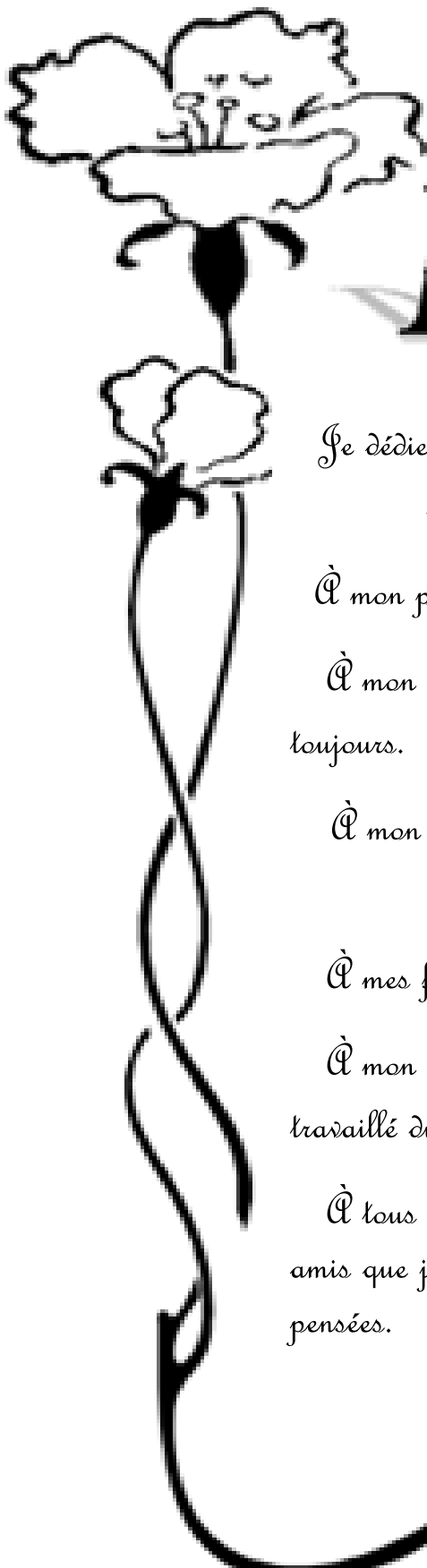
*À Mes Frères et Mes Sœurs,
Et à toute la famille Kamadi.*

À tous mes collègues de la promotion.

À mes amis Kamid, Ferhat et Mohammed.

*Enfin je le dédie à tous mes amis que je n'ai
pas cités et à tous ceux qui me connaissent.*

Nassim



Dédicace

*Je dédie ce modeste travail à ma deuxième âme et la
lumière de mes yeux, ma chère mère.*

À mon père qui attend de me voir dans ce jour.

*À mon grand-père Moustapha qui me soutiens
toujours.*

*À mon petit frère Oussama qui est la source du
bonheur de notre maison.*

À mes frères Billal, Razika et le miel Amel.

*À mon binôme KAMADJ Nassim avec qui j'ai
travaillé durant cette année.*

*À tous mes collègues de la promotion et à tous mes
amis que je n'ai pas cités et qui sont présents dans mes
pensées.*

Samira

Remerciement

Tout d'abord nous remercions Dieu Clément et Miséricordieux de nous avoir donné la connaissance, la force, la santé et la volonté durant la réalisation de ce mémoire.

Nous exprimons nos gratitudees à notre encadreur Monsieur DILMI SMAIN, pour sa disponibilité, ses conseils et ses orientations.

Nous remercions tous les enseignants et tout le personnel de l'institut d'aéronautique et des études spatiales pour la formation durant ces cinq années.

Nous tenons également à présenter nos sincères remerciements au président et aux membres de jury pour avoir accepté d'examiner et d'évaluer notre travail.

Nous remercions aussi tous ceux qui ont contribué de près ou de loin par leurs aides et conseils pour finaliser ce projet.

Table des matières

Résumé.....	I
Dédicace.....	III
Remerciement.....	V
Table des matières	VI
Nomenclature.....	IX
List des figures et tableaux.....	XIV
Introduction générale.....	01

Chapitre I : Généralités

Introduction	03
I.1 Notion d'aéroélasticité	04
I.2 Aspect historique	05
I.3. Les phénomènes d'aéroélasticité	09
I.3.1. Les phénomènes d'aéroélasticité statique.....	09
I.3.2 Les phénomènes d'aéroélasticité dynamique.....	10
I.4. Le flottement.....	11
I.4.1 Caractéristique du phénomène de flottement	12
I.4.2. Les types de flottement	12
I.4.2.1. Le flottement classique	13
I.4.2.2. Le flottement de décrochage	13
I.4.2.3. La divergence	13
I.4.3. La prévention contre le flottement	13
I.5. L'aéroservoélasticité	14

Chapitre II : le modèle mathématique de système aéroélastique

Introduction.....	17
II.1. Hypothèses du modèle	17
II.2. La modélisation structurelle	17
II.2.1. L'énergie potentielle	19
II.2.2. L'énergie cinétique	19
II.2.3. Les forces généralisées	21

II.3. La modélisation aérodynamique	24
II.4. Application sur le modèle d'aile TAMU WING II.....	25
II.4.1. Les paramètres de TAMU WING II	27
II.5. La représentation d'état de modèle TAMU WING II	28
II.6. Modélisation des incertitudes paramétriques	32
II.6.1. la transformation linéaire fractionnaire LFT	32
II.6.2. Le modèle mathématique du système incertain	34
II.6.3. Application sur le modèle TAMU WING II	39
Conclusion.....	40

Chapitre III : Commandes LQR et PRLQR

Introduction	41
III.1. Etude de la contrôlabilité de système	42
III.2. Commande Linéaire Quadratique Optimale	43
III.2.1. Commande LQR (Régulateur Quadratique Linéaire) avec un temps fini	43
III.2.2. La commande LQR avec un temps infini	46
III.2.3. Choix des matrices de pondération	47
III.3. La commande LQR avec l'observateur de Luenberger	47
III.3.1. Propriété d'un observateur	48
III.3.2. Observateur de Luenberger	48
III.3.3. Equation d'état de la commande LQR avec observateur	49
III.4. La commande PRLQR	50
III.4.1. Le rôle de γ	52

Chapitre IV : Simulation et Interprétation

Introduction.....	54
IV.1. Simulation en boucle ouverte	55
II.1.2. Interprétation	57

IV. 2. Simulation en boucle fermée pour le modèle linéaire	57
IV.2.1. Interprétation	62
IV.2.2. Le gain en vitesse	63
IV.2.2.1. Interprétation	64
IV.3. simulation pour le modèle non linéaire	64
IV.3.1. Interprétation	67
IV.3.2. Le gain en vitesse	67
IV.3.2.1. Interprétation	68
IV.4.simulation de la commande LQR avec l'observateur de Luenberger	69
IV.4.1. Interprétation	70
IV.4.2.Le gain en vitesse	71
IV.4.2.1. Interprétation	71
IV.5. Simulation de la commande PRLQR	72
IV.5.1. Interprétation	72
IV.5.2. simulation en boucle fermée	73
IV.5.2.1.Interprétation	74
IV.5.3. Simulation de la commande PRLQR avec saturateur	75
IV.5.3.1.Interprétation	75
IV.5.4. Le gain en vitesse	76
IV.6. Synthèse des résultats de simulation pour la commande LQR et PRLQR	76
IV.6.1. Interprétation	77
Conclusion	78
Conclusion générale et perspectives.....	79
Bibliographie	81
Annexes A.....	a
Annexes B	d
Annexes C	f
Annexes D	g
Annexes E	l
Annexes F	m

Nomenclatures

- **Lettres grecques**

Symbole	Unité
β : Angle de déflexion de volet de bord de fuite.	[rad]
γ : Angle de déflexion de volet de bord de d'attaque.	[rad]
α : Angle d'incidence.	[rad]
ρ : densité d'air.	[Kg /m ³]
δ : Variation normalisée d'incertitude.	[-]
λ : la valeur propre	[-]
ε : coefficient d'amortissement.	[-]

- **Lettres latines :**

Symbole	Unité
L : la force de portance.	[N]
M : le moment aérodynamique.	[kg.m ²]
T : l'énergie cinétique	[joule]
U : l'énergie potentielle	[joule]
Q_j : La composante des forces extérieures qui travaillent selon de degré de liberté	[Newton]
U_J : Le champ de déplacement	[m]
I_{cg} : Le moment de l'inertie autour du centre de gravité	[kg.m ²]
m : la masse de l'aile	[kg]

V_{cg} : La vitesse du centre de gravité	[m.s ⁻¹]
V_{ea} : La vitesse de centre élastique	[m.s ⁻¹]
δh : Le déplacement vertical virtuel	[m]
$\delta \alpha$: Le déplacement de tangage virtuel.	[rad]
δw_p : Le travail Virtual dû à la force de portance	[Nm]
δw_m : Le travail virtuel dû au moment M	[Nm]
δw : Le travail virtuel total	[Nm]
C_h : Le coefficient d'amortissement pour le mouvement vertical	[Kg/s]
C_α : Le coefficient d'amortissement pour le tangage	[Kg.m ² /s]
h : déplacement vertical.	[m]
b : demi cord moyen de profile d'aile	[m]
x_α : le paramètre de déséquilibre statique	[-]
m_T : La masse totale de l'aile et de sa structure de support	[kg]
m_w : La masse de l'aile seulement.	[Kg]
k_h : Le coefficient de rigidité structurel pour le mouvement vertical	[N/m]
k_α : Le coefficient de rigidité structurel pour le mouvement de tangage	[Nm/rad]
I_{ea} : Moment d'inertie autour de l'axe élastique.	[Kg .m ²]
c_{l_α} : La dérivé de coefficient de portance par rapport à α .	[-]
c_{l_β} : La dérivé de coefficient de portance par rapport à β .	[-]
c_{l_γ} : La dérivé de coefficient de portance par rapport à γ .	[-]
c_{m_α} : La dérivé de coefficient de moment par rapport à α	[-]

c_{m_β} : La dérivé de coefficient de moment par rapport à β	[-]
c_{m_γ} : La dérivé de coefficient de moment par rapport à γ	[-]
S : L'envergure de l'aile.	[m]
V : vitesse de l'écoulement	[m/s]
t : Temps	[s]
Q_h : La force généralisée selon h	[N]
Q_α : La force généralisée selon α	[N]
t_f : Le temps terminal	[s]
q_{nom} : La pression dynamique nominale.	[pa]
e : Erreur de pondération	
$e_o(t)$: erreur d'observation	
W : Pondération sur la perturbation associée à un paramètre	

- **Les matrices et les vecteurs :**

$x \in R^n$: Vecteur qui représente les n variables d'état (vecteur d'état).

$y \in R^q$: Vecteur qui représente les q sorties.

$u \in R^p$: Vecteur qui représente les p commandes.

$A \in R^{n \times n}$: Matrice d'état de système.

$B \in R^{n \times p}$: Matrice de commande.

$C \in R^{q \times n}$: Matrice d'observation.

$D \in R^{q \times p}$: Matrice d'action directe.

F : la matrice d'amortissement

$G \in R^{n \times p}$: matrice de gain de l'observateur

K : est une matrice constante de gain de la commande

Q : matrice de pondération pour les variables d'état.

\mathbf{R} : matrices de pondération pour les variables d'entrée.

\mathbf{S}_f : est la matrice de pondération pour les états terminaux

Δ : Matrice d'incertitude

\mathbf{I} : la matrice d'inertie

\mathbf{E} : la matrice de rigidité

$\hat{\mathbf{x}}(\mathbf{t})$: vecteur d'état estimé

$\mathbf{P}(\mathbf{t})$: est la solution de l'équation de Riccati.

\mathbf{w} : une entrée auxiliaire

\mathbf{z} : une sortie auxiliaire

- **Les fonctions :**

\mathbf{d} : la fonction de dissipation de Rayleigh

\mathbf{H} : La fonction Hamiltonienne

\mathbf{J} : est l'index d'optimalité

- **Les abréviations :**

ARE: l'équation algébrique de Riccati.

BIBO: Banded Input- Banded Output.

DRE : l'équation différentielle de Riccati.

LCO: Limit Cycle Oscillations.

LFT: Linear fractional transformation.

LQR : Linear Quadratic Regulator.

MIMO: Multi-Input_ Multi-Output.

PRLQR: Parameter Robust Linear Quadratic Regulator.

LTI : linéaire time invariant

cg : centre de gravité

ce : le centre élastique

ca : centre aérodynamique

Liste des figures et tableaux

- Liste des figures :

Chapitre I

Figure (I.1) : L'avion de Samuel Langley, le 8 décembre 1903, dont l'aile avant a été détruite par un phénomène de divergence	03
Figure (I.2) : diagramme de Colar	04
Figure (I.3) : Déformations du tablier de l'ancien pont de Tacoma Narrows en cours de flottement	05
Figure(I.4) : le bombardier Handley Page 0/400	06
Figure(I.5) : Fokker D-8	07
Figure (I.6) : l'avion XB-70 avec système de control actif a la partie avant de l'avion	09
Figure(I.7) : Photographie d'un planeur ash25-eb28 au sol	09
Figure(I.8) : Photographie du même planeur en vol de croisière	10
Figure (I.9): diagramme représente les interactions d'aéroservoélasticité	15
Figure (I.10) : organigramme de l'interaction structure-fluide-commande	15

Chapitre II

Figure (II.1) : la géométrie de la section d'aile bidimensionnelle	18
Figure (II.2) : le modèle aéroélastique d'une section d'aile bidimensionnelle avec les deux surfaces de commande de bord d'attaque et de bord de fuite	25
Figure(II.3): A) vue de face de la section d'aile avec les deux surfaces de commande défléchir de leur positions initiales B) vue de dessus de l'aile TAMU WING II avec revêtement transparent.	26
Figure (II.4) : la réponse de système en boucle ouverte pour le déplacement vertical h et l'angle de tangage α à une vitesse $V=13\text{m/s}$	33

Chapitre III

Figure (III.1) : principe de la commande LQR	44
Figure (III.2) : Schéma général d'un observateur de Luenberger	50

Chapitre VI

Figure (IV.1) : la réponse de système en boucle ouverte pour le déplacement vertical h et l'angle de tangage α à une vitesse $V=13m/s$	55
Figure (IV.2) : la réponse de système en boucle ouverte pour le déplacement vertical , et l'angle de tangage α à une vitesse $V=14m/s$	56
Figure(IV.3) : la réponse du système linéaire pour la commande LQR (1 er cas)	58
Figure (IV.4) : la réponse du système linéaire pour la commande LQR (2 ème cas)	59
Figure (IV.5) : la réponse du système linéaire pour la commande LQR (3 ème cas)	60
Figure (IV.6) : la réponse du système linéaire pour la commande LQR (4 ème cas)	61
Figure (IV.7) : la réponse du système linéaire pour la commande LQR à $V_1' = 24 m/s$ (a), à $V_2' = 25m/s$ (b)	63
Figure (IV.8) : simulation de la commande LQR pour le modèle non linéaire à $V_1 = 10 m/s$	65
Figure (IV.9) : simulation de la commande LQR pour le modèle non linéaire pour $V_2 = 11m/s$	66
Figure (IV.10) : simulation de la commande LQR pour le modèle non linéaire à $V_1' = 12m/s$ (a) et à $V_2 = 13 m/s$ (b)	68
Figure (IV. 11) : simulation de la commande LQR avec l'observateur de Luenberger pour le modèle linéaire à $V=14m/s$	70
Figure (IV.12) : réponse de système linéaire pour la commande LQR avec l'observateur de Luenberger à $V_1 = 20m/s$ (a), et $V_2 = 20.5 m/s$ (b)	71

Figure (IV.13) : réponse du système incertain en boucle ouverte pour $V_1 = 13m/s$ (a) et pour $V_2 = 14m/s$ (b)	72
Figure (IV.14): réponse de système incertain pour la commande PRLQR à $V=14$ m/s	74
Figure (IV.15) : Simulation de la commande PRLQR pour $V=14$ m/s avec saturateur	75
Figure (IV.16) : la réponse de système en utilisant la commande LQR et PRLQR, pour $V= 12$ m/s (a), pour $V=25$ m/s (b)	77

Annexes

Figure (B.1): le schéma d'une représentation d'état d'un système LTI	e
Figure (D.1). Schéma général d'une boucle de régulation	g
Figure (F.1) : implémentation de la commande LQR pour le système linéaire sur MATLAB SIMUNLINK	m
Figure(F.2) : Implimentation de la commande LQR avec l'observateur de lunberger sur MATLAB SIMUNLINK	n
Figure(F.3) : implémentation de la commande LQR pour le système non linéaire sur MATLAB SIMULINK	o
Figure (F.4) : Implémentation de la commande PRLQR sur MATLAB SIMULINK	p

- **Liste des tableaux**

Tableau (II.1) : les paramètres de TAMU Wing II	27
Tableau (IV.1) : les valeurs des gains de la commande PRLQR pour $V=13.95$ m/s, $\rho = 1$ et γ variable	73
Tableau (IV .1) : les caractéristiques du système en boucle ouverte, pour $V= 13$ m/s	55
Tableau (IV .2) : les caractéristiques du système en boucle ouverte, pour $V= 14$ m/s	56
Tableau (IV .3) : les caractéristiques du système en boucle fermée, pour 1 ^{er} cas	58

Tableau (IV .4) : les caractéristiques du système en boucle fermée, pour 2 ^{ème} cas	59
Tableau (IV .5) : les caractéristiques du système en boucle fermée, pour 3 ^{ème} cas	60
Tableau (IV .6) : les caractéristiques du système en boucle fermée, pour 4 ^{ème} cas	61
Tableau (IV.7) : les valeurs des gains de la commande PRLQR pour $V=13.95$ m/s, $\rho = 1$ et γ' variable	73
Tableau (IV.8) : résumé des résultats de simulation obtenus	78

Introduction générale

La sécurité des transports et la fiabilité des appareils sont des préoccupations majeures pour les constructeurs aéronautiques. L'enjeu est de prévenir toutes les situations accidentelles qui risquent de survenir au cours d'un vol.

L'un des principaux défis auxquels sont confrontés les concepteurs d'avions aujourd'hui est celui d'aéroélasticité. Les interactions complexes entre la dynamique, la mécanique des solides, et forces aérodynamiques peuvent créer des problèmes de la fatigue structurelle des aéronefs, l'inconfort des passagers, diminution de la performance, et même défaillance catastrophique [17].

Au début de l'histoire de l'aviation ce problème était minimal à des faibles vitesses de vol, des facteurs de la sécurité et des performances modérées sont exigés. Cependant, Les avions d'aujourd'hui, devraient repousser les limites physiques en termes de vitesse, d'altitude, de maniabilité, d'endurance, de portée et de coût. Les concepteurs sont se tourner vers des matériaux légers pour une utilisation avec les moteurs de forte puissance pour réduire le poids afin de transporter plus de carburant et les charge utiles. Ces matériaux légers induisent plus de souplesse que les matériaux d'aéronefs conventionnels qui, lorsqu'ils sont utilisés à des vitesses et des altitudes importantes posent des préoccupations aéroélastiques importantes.

Le flottement est l'un des phénomènes les plus importants et le plus dangereux dans lequel les surfaces aérodynamiques deviennent instables dans certaines conditions de vol. Cette instabilité peut conduire à la destruction de la structure d'où la nécessité de prévenir contre ce phénomène [5].

Avec les progrès de la technologie de contrôle. Le contrôle actif est devenu une solution à de nombreux problèmes de conception aérospatiale, y compris le problème de flottement. D'abord, les contrôleurs classiques ont été utilisés. Ensuite, avec l'amélioration des méthodes de commandes et des contrôleurs plus robustes ont commencé à être utilisés [12].

La suppression de flottement est l'un des sujets les plus importants, dont chaque constructeur d'avion doit prendre toutes les précautions nécessaires afin d'éviter ce phénomène tout en conservant les performances d'avion. Plusieurs techniques ont été proposées. Cependant, quelques méthodes restent inefficaces dû à leurs impacts négatifs sur les performances d'avion (augmentation de poids), mais avec le développement de concept de

l'aéroservoélasticité, il est possible maintenant de retarder et de supprimer ce phénomène tout en conservant les performances d'avion (le poids).

L'étude que nous présentons ici se situe dans le cadre d'exploiter une commande robuste, qui permet de limiter les vibrations et de retarder le phénomène de flottement.

Ce mémoire est composé de quatre chapitres à savoir :

Le premier chapitre est entièrement consacré pour donner une vision générale sur l'aéroélasticité et le phénomène de flottement ainsi que la solution proposée pour ce phénomène (l'aéroservoélasticité).

Le deuxième chapitre commencera en premier lieu à établir les équations aéroélastiques qui régissent le comportement de système aéroélastique par l'application des équations de Lagrange. Les équations non linéaires à deux degrés de liberté obtenues seront écrites sous forme d'une représentation d'état pour le système nominal, puis une modélisation pour le système incertain est effectuée, Ensuite une application numérique est faite sur le modèle d'aile appelé TAMU WING II afin de simuler son comportement dynamique.

Le troisième chapitre est consacré entièrement à l'étude des lois des commandes envisagées, il s'agit des lois de commande optimale LQR et PRLQR, ce chapitre se divise en trois parties :

Première partie : nous présentons la synthèse de la loi de la commande LQR.

Deuxième partie : nous présentons la synthèse de la loi de la commande LQR avec l'observateur de Luenberger où on suppose un système avec des états non mesurables.

Troisième partie : nous présentons la théorie de la commande PRLQR.

Le quatrième chapitre est consacré à la présentation des résultats de simulation et aux interprétations.

Introduction :

Dès l'aube de l'aviation, les pionniers de la conception aéronautique ont eu à se soucier des problèmes d'aéroélasticité. Ainsi, il est rapporté que les essais de Samuel Langley pour faire voler son avion en 1903 ont échoués à cause d'un phénomène d'aéroélasticité aujourd'hui connu sous le nom de 'divergence statique' [1] (voir Figure(I.1)).

Plus de cent ans après, le traitement des problèmes d'aéroélasticité est toujours un sujet important dans l'industrie aéronautique. En effet, pour réduire la masse et améliorer les performances des avions, la structure de ces derniers est de plus en plus légère et par conséquent de plus en plus souple. Cette souplesse croissante rend les phénomènes d'aéroélasticité de plus en plus significatifs, les problèmes aéroélastiques ne existeraient pas si la structure de l'avion était parfaitement rigide [2].

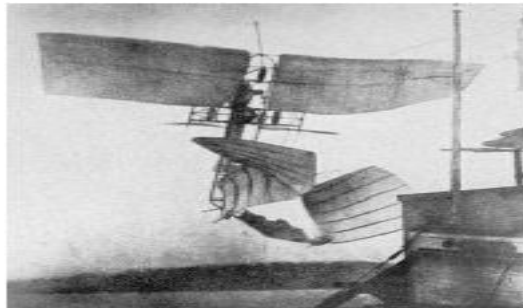


Figure (I.1) : L'avion de Samuel Langley, le 8 décembre 1903, dont l'aile avant a été détruite par le phénomène de divergence.

I.1. Notion d'aéroélasticité :

Le terme aéroélasticité a été appliqué par les ingénieurs aéronautiques à une classe importante des problèmes dans la conception d'avion, il est souvent définie comme une science qui étudie l'interaction mutuelle entre les forces aérodynamiques et les forces élastiques et l'influence de cette interaction sur la conception de l'avion [2].

Cependant le terme aéroélasticité n'est pas complètement descriptif car de nombreux phénomènes aéroélastiques importants impliquent les forces d'inertie ainsi que les forces aérodynamiques et élastiques, nous appliquerons une définition dans laquelle le terme aéroélasticité inclues les phénomènes impliquant l'interaction entre les forces

aérodynamiques, élastiques et inertielles et d'autres phénomènes impliquant une interaction entre les forces aérodynamiques et élastiques, l'ancien sera dénommé l'aéroélasticité dynamique et ce dernier en tant que aéroélasticité statique [3].

Les problèmes aéroélastiques n'existeraient pas si les structures des avions étaient des structures parfaitement rigides. Les structures des avions modernes sont très flexibles et cette flexibilité est fondamentalement responsable des différents types de phénomènes aéroélastiques.

Les phénomènes aéroélastiques surviennent lorsque des déformations structurelles induisent des forces aérodynamiques supplémentaires. Ces forces aérodynamiques supplémentaires peuvent produire des déformations structurelles supplémentaires qui induiront encore plus des forces aérodynamiques, ces interactions peuvent avoir tendance à devenir de plus en plus petits jusqu'à ce qu'une condition d'équilibre stable soit atteinte ou ils peuvent finir de s'écarter et de détruire la structure.

Le savant Collar a ingénieusement classé les problèmes dans aéroélasticité par moyen d'un triangle des forces comme il est montré sur la Figure (I.2) [4].

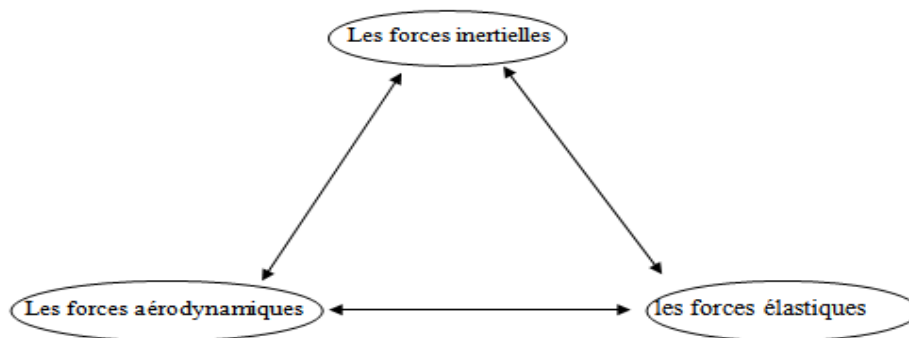


Figure (I.2) : diagramme de Collar [4]

Les phénomènes d'interaction entre un fluide et une structure sont nombreux. Ils peuvent être classés par la nature des échanges entre eux :

- couplage thermique : le fluide et la structure échangent de la chaleur.
- couplage chimique : un solide et un liquide réagissent entre eux.
- couplage mécanique.

L'aéroélasticité fait partie de cette dernière famille de type d'interaction.

Il convient également de distinguer les phénomènes pour lesquels le fluide est au repos (vibrations de fusée contenant des réservoirs de liquides et de gaz) et les phénomènes pour lequel le fluide est en mouvement. Dans ce type de cas, l'écoulement est susceptible d'apporter une énergie infinie à la structure. L'aéroélasticité se classe dans cette famille [3].

I.2. Aspect historique :

L'histoire de l'aéroélasticité est plus ancienne que l'histoire humaine, parce que l'aéroélasticité ne se limite pas à des structures artificielles. Les phénomènes aéroélastiques sont également observés en biomécanique, sur l'aile des oiseaux, sur les plantes, etc., et l'homme peut être résolu les problèmes aéroélastiques de manière empirique. Cependant, la première preuve de l'amélioration de l'aéroélasticité artificiel a été trouvée dans le 16ème siècle, où les problèmes aéroélastiques d'un moulin à vent ont été résolus de manière empirique dans le Pays-Bas, par déplacement des longerons des lames de la moitié de la corde à la position quart de corde [5].

En génie civil, en 20ème siècle les problèmes aéroélastiques ont été rencontrés sur les ponts. Le 7 Novembre 1940, le Pont Tacoma Narrows effondré aux Etats-Unis à une vitesse de vent de 42 mph (68 km / h), ce qui est bien en dessous de la vitesse de conception statique de 100 mph (161 km / h). La défaillance de ce pont est généralement considérée comme étant due au flottement de décrochage [6].



Figure (I.3) : Déformations du tablier de l'ancien pont de Tacoma Narrows en cours de flottement.

Dans le domaine de l'aviation, des problèmes aéroélastiques ont surgis avec le début d'essais en vol des avions. Le professeur Samuel. Langley de l'institut de Smithsonian a volé ses aérodromes par des modèles réduits jusqu'à 300 mètres. Mais le modèle pleine échelle a

échoué deux fois, le dernier le 8 Décembre, 1903. Le Deuxième échec a été généralement considéré comme étant due à la divergence. En 1914, Curtis a volé l'aérodrome de Langley avec une légère modification, ainsi avant que le problème de divergence de l'aile a été résolu en théorie [5].

Neuf jours après le deuxième échec de Langley, en 17 Décembre 1903, Les frères Wright ont fait leur vol historique. La rigidité en torsion d'aile de biplan des frères Wright était supérieure à celle de mono-aile de Langley. Etant donné que la vitesse de divergence est directement liée à la rigidité de torsion, le biplan Wright n'a pas souffert de problème de divergence.

Grâce au succès des frères Wright, les premiers avions étaient exclusivement presque biplans. Le problème aéroélastique le plus répandu apparu dans ces jours était le problème de flottement de l'empennage. Un des premiers cas documentés du flottement a eu lieu dans l'empennage horizontal de bombardier bimoteur Handley Page 0/400, au début de la première guerre mondiale les symptômes étaient des oscillations violentes de fuselage et des surfaces de l'empennage. Après l'enquête, il a été découvert que le fuselage et l'empennage avaient deux principaux modes de vibration basse fréquence. Dans un mode, les gouvernes de profondeur gauches et droites oscillent autour de leurs articulations avec une différence de phase de 180 degrés. Les gouvernes de profondeur ont été reliées au manche de commande avec des câbles de commande longue séparées qui avaient de faibles raideurs. Le second mode est l'oscillation de torsion de fuselage. Il a été conclu que les vibrations étaient dues à des oscillations auto-excitées impliquant le couplage entre ces modes. Ce problème était résolu en reliant les deux gouvernes de profondeurs par un tube de torsion. Des problèmes similaires ont été expérimentés sur les avions DH-9 [5].



Figure(I.4) : le bombardier Handley Page 0/400

Dans la Première Guerre mondiale, les Allemands ont aussi rencontrés des problèmes aéroélastiques. Fokker D-8, un monoplane, avait des grandes performances mais a souffert des défaillances sur les ailes. Les premiers monoplans avaient une insuffisance de rigidité en torsion provoquant le flottement de l'aile, la divergence, le flottement des ailerons de l'aile, et la perte de l'efficacité de l'aileron. Ces problèmes sont généralement résolus par l'augmentation de la rigidité en torsion et par l'équilibrage de la masse. Toutefois, le problème dans Fokker D-8 était légèrement différent. Après de nombreuses pertes des avions et leurs meilleurs pilotes, la Luftwaffe a effectué des tests de résistance statique. Par ces tests de l'avion, il a été constaté que les ailes avaient assez de résistance avec un facteur de sécurité de 6. La Société Fokker a déclaré que le prototype de l'aile n'a aucune défaillance structurelle. La seule différence entre les ailes de prototype et l'aile de production était le renforcement du longeron arrière. Cela a été ordonné par la Luftwaffe, en raison des règlements sur les fils entrecroisés des ailes paradoxalement, le renforcement des longerons arrière a déplacé vers l'arrière les axes élastiques qui ont abouti à une diminution de la vitesse de divergence, qui a finalement causé la perte des avions Fokker D-8 [5].



Figure(I.5) : Fokker D-8

Après la première guerre mondiale de nombreux phénomènes de flottement ont été observés; en 1923 un flottement des ailerons a été observé sur l'Hydravion (monoplane) Von Berkel, qui était résolu par Baumhauer et Koning par la technique d'équilibrage de masse de l'aileron. En 1924-1925, un flottement des ailerons a été observé sur l'avion Gloster Grebe et Gloster Gamecock. Le problème a été résolu en augmentant la rigidité et en réduire la surface déséquilibrée près de l'extrémité [5].

Pendant la période entre 1923- 1929, de nombreux phénomènes de flottement eu lieu partout dans le monde sur des différents types d'avions; les avions de transport, les bombardiers et les avions d'attaque. Différents types de flottement ont été observés.

Avec l'augmentation des incidences de phénomène de flottement, les tests en vol de flottement sont devenus importants. Les premiers tests consistent à pousser l'avion à sa vitesse maximale et nous espérons le meilleur. En 1935, en Allemagne, Von Schippe a utilisé les techniques de test de résonance pendant le vol. La technique de schippe consiste à obtenir la réponse en fréquence lorsque la vitesse augmente. A cette méthode, on prévoit que le flottement de se produire lorsque l'amplitude de résonance tend à augmenter asymptotiquement avec l'augmentation de la vitesse. Cependant, le flottement était un phénomène soudain et dans ces jours la technologie exige les ingénieurs de test d'être dans l'avion pour vérifier les données. Les réussites de teste ont terminés en 1938, dans le test d'un Junker JU90. Un flottement inattendu de l'aile était rencontré. L'avion a s'écrasé avec des ingénieurs à bord [5].

Les fabricants sont devenus hésitants pour les vols d'essais de flottement, en raison de leurs dangers. Cependant, il serait plus dangereux d'utiliser un avion, qui n'a pas été testé. Avec l'amélioration des méthodes d'essai, les appareils de communication et les moyens d'essais, les vols d'essais de flottement ont commencés à gagner l'acceptation par la fin des années 1940.

En 1960, les concepts de contrôle ont été introduits dans des modèles analytiques, suivie par des modèles de soufflerie de contrôle actif aéroélastiques qui ont été utilisés pour vérifier les modèles analytiques. Lors de la dernière moitié de cette décennie, les essais en vol de B-52 et les avions XB-70 ont été menés avec succès, qui ont démontrés le concept de l'utilisation des commandes de vol pour modifier les caractéristiques dynamiques de la structure de l'aéronef. Le 2 Août 1973, un avion d'essai CCV B-52 a volé 10 nœuds plus vite que sa vitesse de flottement [5].



Figure (I.6) : l'avion XB-70 avec un système de control actif à la partie avant de l'avion

I.3. Les phénomènes d'aéroélasticité :

I.3.1. Les phénomènes d'aéroélasticité statique :

Les phénomènes d'aéroélasticité statique se caractérisent par une absence d'évolution du système aéroélastique au cours du temps. Le meilleur exemple de ce type de phénomène est la forme d'un avion en vol de croisière. La forme d'un avion en croisière ne varie pas pendant de grands intervalles de temps, elle peut donc être considérée comme statique. Cette forme dépend des efforts aérodynamiques qui s'exercent sur l'avion. Or ces efforts aérodynamiques dépendent de la forme de l'avion [1].



Figure(I.7) : Photographie d'un planeur ash25-eb28 au sol

Les phénomènes d'aéroélasticité statiques peuvent également causer l'endommagement et la rupture du système. Tout d'abord, si les déformations imposées génèrent des contraintes structurelles supérieures à celles acceptées par la structure, le système se déformera de manière irréversible (déformation plastique) ou se rompra. Ensuite, la modification de la forme de l'avion peut modifier la position du foyer aérodynamique de l'avion et donc

perturber l'équilibre et la stabilité de l'avion: il est donc important de connaître la forme de l'avion en vol.



Figure(I.8) : Photographie du même planeur en vol de croisière

Enfin, un phénomène d'aéroélasticité statique peut diverger : il s'agit alors d'une divergence statique. Dans ce cas, la position d'équilibre entre le fluide et la structure est instable : les efforts génèrent des déformations qui modifient la forme de l'avion, cette nouvelle forme provoque des efforts plus importants qui régénèrent des déformations plus grandes. L'exemple illustrant ce phénomène est l'aventure de Samuel Langley en 1903 : le mouvement de torsion des ailes avait divergé et causé leur destruction [1].

I.3.2. Les phénomènes d'aéroélasticité dynamique :

Les phénomènes d'aéroélasticité dynamique se caractérisent par une évolution dans le temps du système aéroélastique. Parmi ces phénomènes, on peut distinguer deux familles :

- ➔ Les phénomènes autodéterminés dans lesquels l'évolution du système au cours du temps est provoquée par une instabilité propre au système. Ce type de phénomène correspond au flottement.
- ➔ Les phénomènes forcés dans lesquels l'évolution temporelle du système est provoquée par une action extérieure [1].

I.4. Le flottement :

Il existe plusieurs phénomènes aéroélastiques, parmi ces phénomènes, le flottement d'aile. Le flottement est le phénomène aéroélastique le plus connu car il est présent dans des nombreux domaines tels que :

- les turbomachines : flottement d'aubes de compresseur ou de turbines.
- le génie civil : pont de Takoma, 1940.
- l'aéronautique : flottement des ailes d'avion.

Physiquement, sont des oscillations d'aile se produit dans une structure flexible à travers d'un fluide. Ce phénomène implique les forces aérodynamiques, l'élasticité de la structure (déformation) et la dynamique des structures (mouvement du système). Ces oscillations sont auto-entretenues et s'amplifient puisque le fluide en mouvement est susceptible de fournir de l'énergie à la structure en quantité infinie. Le mouvement du système s'oriente alors vers deux issues possibles :

- les oscillations augmentent jusqu'à la rupture du système.
- les oscillations atteignent une amplitude limite au-dessous des limites de la structure et elles deviennent périodiques. On parle alors de LCO (limit cycle oscillations).

Même si les oscillations limites générées sont faibles, ce phénomène reste problématique puisque :

- il peut gêner le confort des passagers.
- l'avion peut devenir impossible à piloter (lisibilité des instruments, manipulation des commandes).
- les oscillations limites peuvent entraîner une fatigue prématurée de la structure et des équipements qu'elle porte.
- à fréquence du cycle limite élevée, des nuisances sonores peuvent apparaître [1].

Mathématiques : le flottement se produit lorsqu'au moins un pôle (valeurs propres) a une partie réelle égale à zéro ou positive, qui se traduit lorsque le coefficient d'amortissement tend vers Zéro ou devient négatif au moment de flottement [8].

Quand le coefficient d'amortissement d'un système à structure flexible devient égale ou inférieur à zéro à certaine vitesse d'écoulement, les oscillations commence à être auto-excitées et divergentes, par conséquence, la vitesse d'écoulement correspond à coefficient d'amortissement nul est définie comme une vitesse de flottement critique.

On résume que le terme de « flottement » est un terme générique pour des phénomènes de couplage aéroélastique [7]. Il se manifeste par une oscillation aéroélastique instable caractérisé par la perte d'amortissement de système à cause de la présence d'une instabilité des charges aérodynamiques.

I.4.1. Caractéristique du phénomène de flottement:

Le flottement est caractérisé par une vitesse anémométrique spécifique appelée vitesse de flottement. Au-dessus de la vitesse de flottement, l'amplitude d'oscillations augmente jusque à la défaillance de la structure. D'autre part, dans un système non-linéaire les oscillations peuvent converger à une amplitude limite avec une fréquence fixe. Ce phénomène est appelé comme oscillation de cycle de limite au lieu de flottement et elle est stable.

Cette vitesse critique appelée la vitesse de flottement elle est une fonction de:

- paramètres structuraux d'avion tel que : La géométrie, distribution de masse, distribution de rigidité, et le coefficient d'amortissement structural.
- les paramètres de vol tel que : la vitesse anémométrique, altitude, nombre de Mach, et angle d'incidence [5].

I.4.2. Les types de flottement :

Il existe plusieurs types de flottement :

- Le flottement classique ou flottement des modes couplés dans lequel les fréquences des oscillations de deux ou plusieurs convergent vers la même valeur provoquant ainsi l'instabilité de la structure, ce type de flottement est le plus fréquent sur la structure des avions.
- Le flottement de décrochage qui se produit lorsqu'il y a le décollage de la couche limite. En particulier à un grand angle d'incidence.
- La divergence ou flottement a fréquence nulle [9].

I.4.2.1. Le flottement classique :

Le flottement classique du profil d'aile est une instabilité par couplage de mode, de flexion et de torsion, qui se produit par un mécanisme de confusion de fréquence. De façon simple, l'instabilité est possible lorsque le chargement aérodynamique engendre une raideur ajoutée sur l'un des modes (ou les deux), de sorte que pour une vitesse d'écoulement critique les fréquences des modes se rejoignent, rendant le système instable au-delà. C'est un mécanisme dangereux qui conduit généralement à la destruction rapide de la structure ou à un élément de la structure. Les comportements diffèrent en fonction des paramètres structuraux et aérodynamiques mais les principales applications concernées sont aéronautiques. En génie civil ce phénomène pose rarement problème car souvent d'autres types de flottements se déclenchent avant, à vitesse plus faible, comme le cas de flottement de décrochage [10].

I.4.2.2. Le flottement de décrochage :

Cette instabilité sur un mouvement de torsion simple résulte d'un déséquilibre entre l'amortissement structural et un amortissement aérodynamique négatif. C'est ce mécanisme qui est à l'origine de la destruction du pont de Tacoma (Scanlan 1971), et non une résonance avec le détachement tourbillonnaire comme on le lit parfois. La vitesse critique est déterminée lorsque l'amortissement total du système s'annule. Dans le cas des tabliers de pont, seuls les essais de soufflerie sont aujourd'hui pertinents pour étudier ce phénomène [10].

I.4.2.3. La divergence:

Le phénomène de divergence est d'une perte de raideur en torsion simple, Bien que théoriquement possible il reste en pratique très rare. Il conduit à la destruction très rapide de la structure dont la raideur totale devient négative au-dessus de la vitesse critique [10].

I.4.3. La prévention contre le flottement :

Aujourd'hui, deux stratégies existent pour empêcher ce phénomène:

La stratégie passive : comme l'équilibrage de la masse et le renforcement local, qui sont utilisées jusqu'aujourd'hui. Ces techniques sont habituellement inefficaces (parce qu'elles ajoutent le poids à la structure) aussi bien que non systématique, et elles ne réussissent pas toujours [11].

La stratégie active : cette méthode a été mise au point par l'U.S. Air Force et testée sur un B-52 en 1973. Il s'agit d'utiliser un système actif qui amortit le mouvement de flottement au lieu de le laisser diverger. Le bombardier a été capable de voler 10 nœuds au-dessus de la vitesse limite théorique de déclenchement du flottement.

Cependant, ces applications sont restées expérimentales et n'ont pas été appliquées à des systèmes civils, cette dernière technique dénommée 'aéroservoélasticité' [1].

I.5. L'aéroservoélasticité :

Historiquement la conception des avions a subi d'importantes modifications suite à des progrès significatifs dans l'efficacité structurale des avions, notamment le rapport de la résistance des nouveaux matériaux (composites) à leur poids et à l'utilisation de systèmes de commande de vol avec une réponse rapide et une grande autorité, les concepteurs d'avion, en essayant de réduire le poids structurel de chaque nouvel avion. Ont fait augmenter la flexibilité de la structure d'un autre côté, les ingénieurs de la commande de vol ont développés de nouvelles fonctionnalités pour le système de commande automatique de vol qui ont amélioré la performance de l'avion, la stabilité et les qualités du vol, malheureusement, ces efforts ont été généralement indépendants les uns des autres jusqu'à ce que les premières analyses aéroservoélastiques furent effectuées[12].

L'aéroservoélasticité ou commande active de stabilité aéroélastique a été l'un des domaines de recherche aéronautique les plus actifs pendant les dernières années. C'est une technologie multidisciplinaire issue de l'interaction entre la structure flexible de l'avion, les forces aérodynamiques qui résultent de mouvement de l'avion et les systèmes de commande de vol [2], Donc l'aéroservoélasticité est une théorie qui traite des interactions entre :

- Les forces aérodynamiques : aéro.
- Le système de commande : servo.
- Les forces structurelles : élasticité.

On peut illustrer l'interaction de ces disciplines par la figure suivante : [13]

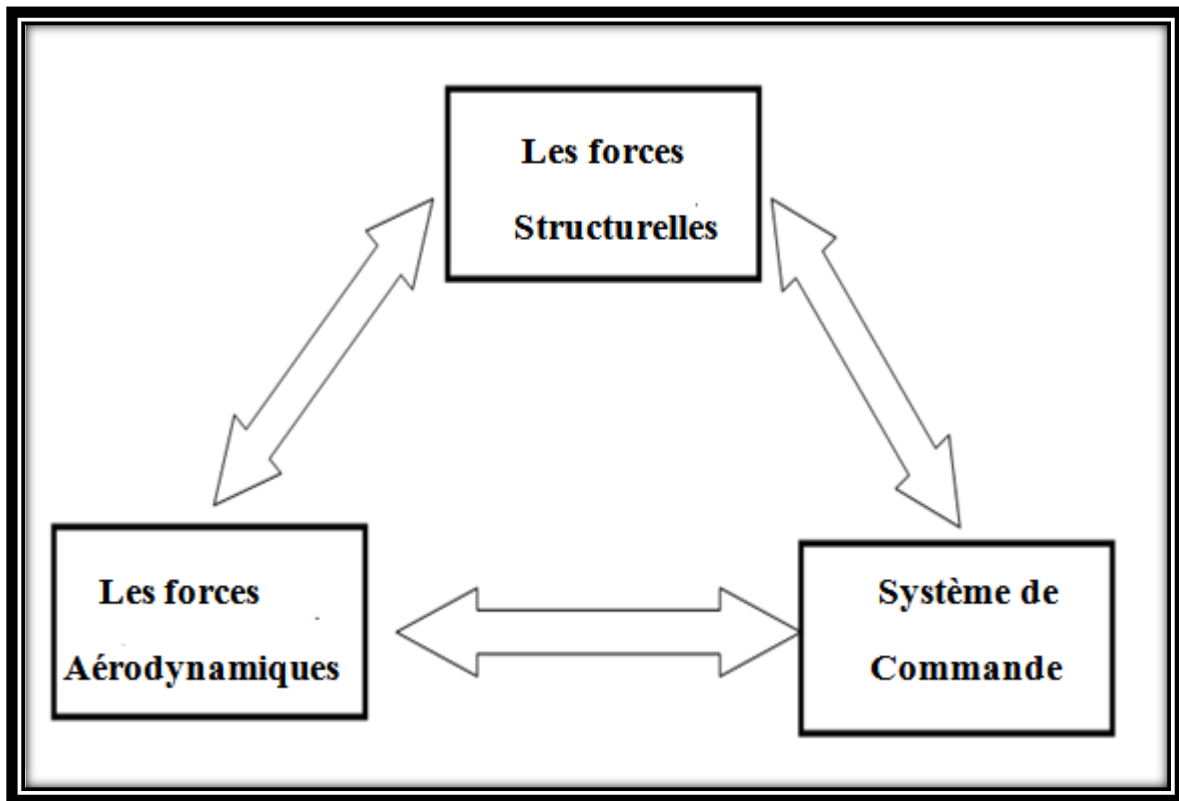


Figure (I.9): diagramme représente les interactions d'aéroservoélasticité.

Le digramme bloc d'un système aéroservoélastique est comme suit :

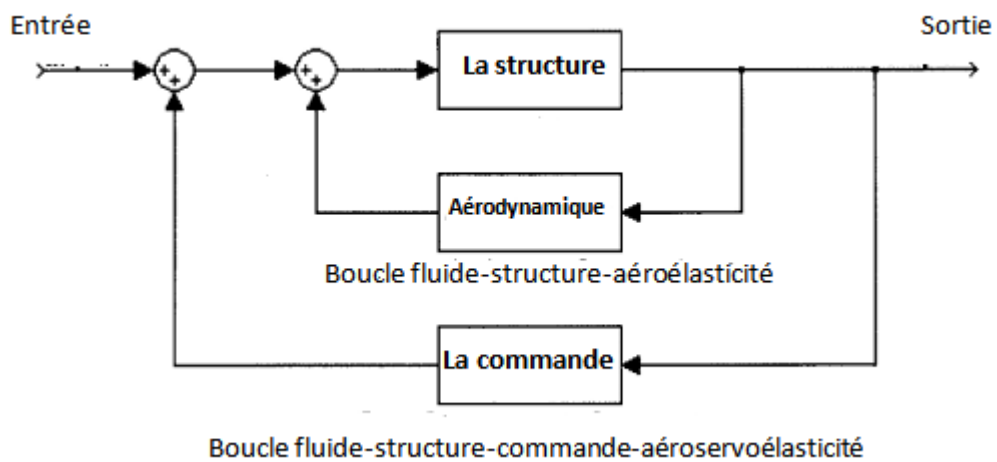


Figure (I.10) : organigramme de l'interaction structure-fluide-commande [8].

La Figure (I.10) est le schéma fonctionnel de concept d'un système aéroservoélastique. Les deux blocs principaux qui sont à l'intérieur représentent la boucle du système aéroélastique, le bloc de contrôleur est ajouté pour former de la boucle d'un système aéroservoélastique, le système pourrait être un système de multi_input/multi_output (MIMO).

Il peut voir qu'un modèle aéroservoélastique considérera les interactions aérodynamiques inertielles, et les forces structurales qui représentent le modèle aéroélastique et avec les interactions additionnelles résultant d'inclure la dynamique de système de commande avec ce modèle aéroélastique.

L'aéroservoélasticité est le fruit de fusion de deux grandes théories s'intéressant à des aspects bien différents de la dynamique d'un avion, l'aéroélasticité d'une part porte son attention sur la nature flexible d'un avion, La dynamique du vol d'autre part considère l'avion comme un solide rigide en configuration de rétroaction. Rétroaction exercée par les lois de commandes, et étudie l'influence du système de commande sur la dynamique de l'avion, Ce qui permet d'élargir le domaine de vol sans ajouter des masses importantes sur la structure [14].

Introduction :

Lorsqu'on envisage la commande d'un système, la première étape consiste à le modéliser. Modéliser un système cela peut consister à élaborer un objet mathématique qui permet de décrire et prédire le comportement dynamique du système lorsque ce dernier est soumis à des influences externes [15].

Afin d'obtenir ce modèle mathématique on applique des formalismes tels que le formalisme de Newton ou le formalisme de Lagrange, ce dernier est un outil particulièrement adapté et très puissant pour mettre sous équations les systèmes les plus complexes. Il nous donne une procédure pour obtenir les équations du mouvement, en calculant seulement les énergies cinétiques et potentielles du système.

Dans ce chapitre on va appliquer le formalisme de Lagrange sur une section d'aile bidimensionnelle afin d'obtenir les équations de mouvement qui régissent sur le comportement de système aéroélastique.

Au début le modèle obtenu est un modèle nominal, puis en introduisant des incertitudes paramétriques sur ce dernier pour avoir un modèle incertain. Une fois les modèles mathématiques sont obtenus, une application numérique est faite sur le modèle d'aile dénommé TAMU WING II.

II.1. Hypothèses du modèle :

Afin de faciliter l'étude de notre système on effectue des hypothèses afin d'éliminer les effets physiques de faible importance, les hypothèses considérées dans notre cas sont :

- l'effet de la gravité est négligé,
- l'angle de tangage α est supposé faible,
- La force de portance L et le moment M sont calculés en régime quasi-stationnaire.

II.2. La modélisation structurelle :

On utilise le modèle étudié dans la référence [16], Les équations de mouvement qui régissent sur le mouvement d'une aile bidimensionnelle peuvent être tirées à partir des équations de Lagrange (voir l'**Annexe A**).

L'aile a deux degrés de liberté, mouvement de tangage α (la torsion) et mouvement vertical h (la flexion). L'aile peut faire un mouvement de tangage autour d'un axe élastique qui est défini comme étant l'axe perpendiculaire au l'axe de cisaillement. La rigidité structurale pour les deux mouvements est modélisée par deux ressorts de rigidité K_α et K_h respectivement, Avec :

$$K_\alpha = \sum_{i=1}^n C_i \alpha^{i-1} \text{ et } C_i \in R \quad (\text{II.1})$$

K_h : est supposé constant.

Comme montre la Figure (II.1), les points remarquables sur l'aile incluent le centre de la gravité « cg », le centre élastique « ce », et centre aérodynamique « ca ».

Les paramètres b et e tel que $-1 < b < 1$ et $-1 < e < 1$ déterminent la position de centre de gravité « cg » et l'axe élastique.

Le repère \vec{i} représente le repère inertiel, tandis que le repère \vec{b} est fixé à l'aile, son origine est fixée au centre élastique « ce » et orientée comme indiqué ci-dessous avec l'axe \vec{b}_1 est dirigé vers le bord d'attaque. La portance L et le moment M sont mesurés au centre aérodynamique.

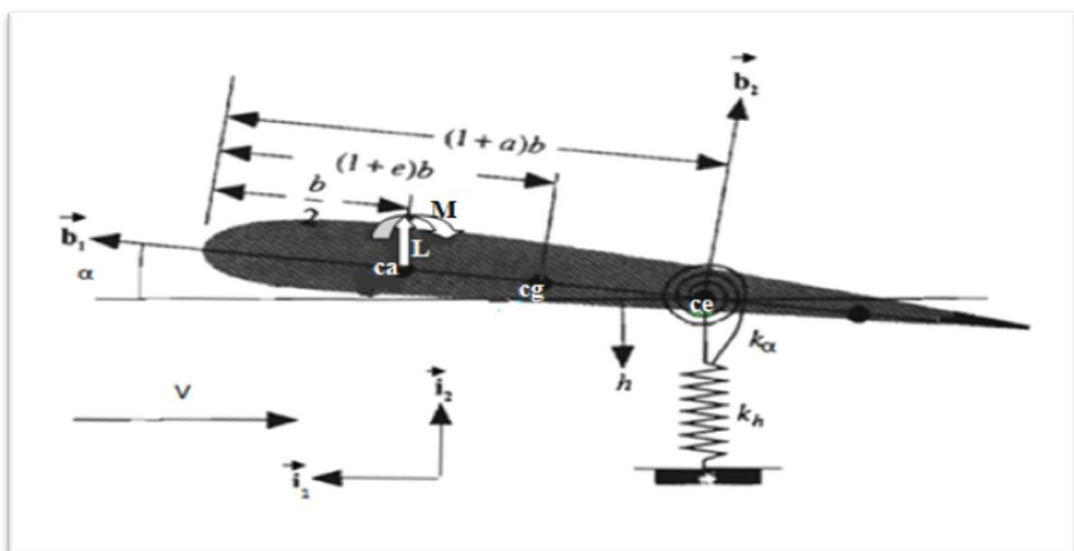


Figure (II.1) : la géométrie de la section d'aile bidimensionnelle. [16]

Les équations de mouvement vertical et de tangage peuvent être obtenues en utilisant les équations de Lagrange en calculant l'énergie potentielle et cinétique du système.

II.2.1. L'énergie potentielle :

L'énergie potentielle consiste entièrement en énergie élastique, elle représente seulement l'énergie élastique emmagasinée sur les deux ressorts, l'effet de la gravité est négligé. L'énergie potentielle totale est donnée par cette équation [16] :

$$U = \frac{1}{2} K_h h^2 + \frac{1}{2} k_\alpha (\alpha)^2 \quad (\text{II.2})$$

Où : K_h et k_α sont les coefficients de rigidité de mouvement vertical et mouvement de tangage, respectivement.

II.2.2. L'énergie cinétique :

L'énergie cinétique totale du système est donnée par [16] :

$$T = \frac{1}{2} m \overrightarrow{V_{cg}} \cdot \overrightarrow{V_{cg}} + \frac{1}{2} I_{cg} \dot{\alpha}^2 \quad (\text{II.3})$$

Avec :

I_{cg} : est le moment d'inertie autour du centre de gravité.

m : représente la masse de l'aile.

V_{cg} : C'est la vitesse du centre de gravité, qui est calculée à travers la formule suivante [17] :

$$\overrightarrow{V_{cg}} = \overrightarrow{V_{ce}} + \dot{\alpha} \overrightarrow{b_3} \times b[(1+a) - (1+e)] \overrightarrow{b_1} \quad (\text{II.4})$$

Avec :

$\overrightarrow{V_{ce}}$: La vitesse de centre élastique.

α : l'angle d'incidence.

Et on a :

$$\overrightarrow{V_{ea}} = -\dot{h}\vec{l}_2 \quad (\text{II.5})$$

Avec : h c'est le déplacement vertical.

Ainsi que :

$$\vec{b}_2 = \vec{b}_3 \times \vec{b}_1$$

Donc la vitesse de centre de gravité devient :

$$\overrightarrow{V_{cg}} = -\dot{h}\vec{l}_2 + \dot{\alpha}b(a - e)\vec{b}_2 \quad (\text{II.6})$$

La relation entre le repère \vec{b} et le repère \vec{l} est donnée par la relation matricielle suivante [16] :

$$\begin{bmatrix} \vec{b}_1 \\ \vec{b}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\alpha) & \sin(\alpha) \\ -\sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \vec{l}_1 \\ \vec{l}_2 \end{bmatrix} \quad (\text{II.7})$$

On utilise la relation (II.7) et on suppose que l'angle de tangage est faible c-à-d que $\cos(\alpha) \approx 1$ et $\sin(\alpha) \approx 0$, pour calculer $\overrightarrow{V_{cg}} \cdot \overrightarrow{V_{cg}}$ on aura :

$$\overrightarrow{V_{cg}} \cdot \overrightarrow{V_{cg}} = \dot{h}^2 + b^2 x_\alpha^2 \dot{\alpha}^2 + 2bx_\alpha \dot{h}\dot{\alpha} \quad (\text{II.8})$$

Avec : $x_\alpha = (e - a)$ est le paramètre de déséquilibre statique.

On substitue la relation (II.8) dans (II.3) on obtient :

$$T = \frac{1}{2}m(\dot{h}^2 + b^2 x_\alpha^2 \dot{\alpha}^2 + 2bx_\alpha \dot{h}\dot{\alpha}) + \frac{1}{2}I_{cg}\dot{\alpha}^2 \quad (\text{II.9})$$

La relation entre le moment d'inertie autour de l'axe élastique I_{ea} et le moment d'inertie autour de centre de gravité I_{cg} est donnée par [17] :

$$I_{ea} = I_{cg} + mb^2 x_\alpha^2 (\cos(\alpha))^2 \cong I_{cg} + mb^2 x_\alpha^2 \quad (\text{II.10})$$

On remplace la valeur de I_{cg} dans (II.9) on trouve :

$$T = \frac{1}{2}m(\dot{h}^2 + 2x_\alpha b h \dot{\alpha}) + \frac{1}{2}I_{ea}\dot{\alpha}^2 \quad (\text{II.11})$$

II.2.3. Les forces généralisées :

Les forces généralisées sont calculées en utilisant la méthode de travail virtuel où le travail donné par un déplacement virtuel dû aux forces externes.

Le travail virtuel total effectué par la force de portance L et le moment M est donné par :

$$\delta w = Q_h \delta h + Q_\alpha \delta \alpha \quad (\text{II.12})$$

Avec :

δh : Le déplacement vertical virtuel.

$\delta \alpha$: Le déplacement de tangage virtuel.

Pour calculer le déplacement virtuel dû à la force de portance, la vitesse du centre aérodynamique est nécessaire [17].

$$\vec{V}_{ca} = -\dot{h}\vec{i}_2 + \dot{\alpha}b\left(\frac{1}{2} + a\right)\vec{b}_2 \quad (\text{II.13})$$

Puis, le déplacement virtuel dû à la portance peut être obtenu tout simplement en remplaçant le point au-dessus de chaque variable dans l'équation (II.13) par δ devant lui.

$$\vec{\delta P}_{ca} = -\delta h\vec{i}_2 + b\delta\alpha\left(\frac{1}{2} + a\right)\vec{b}_2 \quad (\text{II.14})$$

Donc le travail virtuel dû à la force de portance est :

$$\delta w_p = L \left[-\delta h + b\left(\frac{1}{2} + a\right)\delta\alpha \right]$$

Avec : L est la force de portance.

La vitesse angulaire de l'aile est $\dot{\alpha}\vec{b}_3$ ce qui donne la rotation virtuelle due au moment [17]

$$\delta R_{ca} = -\delta\alpha\vec{b}_3$$

Donc le travail virtuel dû au moment M est :

$$\delta w_m = M\delta\alpha$$

Le travail virtuel total effectué par la force de portance L et le moment M est donc :

$$\delta w = \delta w_p + \delta w_m = L \left[-\delta h + b \left(\frac{1}{2} + a \right) \delta\alpha \right] + M\delta\alpha \quad (\text{II.15})$$

Par correspondance de deux équations (II.12) et (II.15), les forces généralisées deviennent :

$$Q_h = -L \quad (\text{II.16})$$

$$Q_\alpha = M + x_\beta \cdot L$$

Avec

$$x_\beta = b \left(\frac{1}{2} + a \right)$$

Maintenant les équations du mouvement peuvent être obtenues en combinant tous les morceaux, et en utilisant les équations de Lagrange comme suit :

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial(T-U)}{\partial \dot{h}} \right) - \frac{\partial(T-U)}{\partial h} = Q_h \quad (\text{II.17})$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial(T-U)}{\partial \dot{\alpha}} \right) - \frac{\partial(T-U)}{\partial \alpha} = Q_\alpha$$

Après dérivation, les équations de mouvements deviennent :

$$m\ddot{h} + m x_\alpha b \ddot{\alpha} + k_h h = -L \quad (\text{II.18})$$

$$m b x_\alpha \ddot{h} + I_{ea} \ddot{\alpha} + k_\alpha \alpha = M$$

Pour modéliser les effets de l'amortissement visqueux, la fonction de dissipation de Rayleigh utilisée est [16] :

$$d = \frac{1}{2} C_h \dot{h}^2 + \frac{1}{2} C_\alpha \dot{\alpha}^2 \quad (\text{II.19})$$

Où : C_h et C_α sont des coefficients d'amortissement pour les deux mouvements, vertical et de tangage respectivement.

La relation (II.19) est incluse dans les équations de Lagrange comme suit :

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial(T-U)}{\partial \dot{h}} \right) + \frac{\partial d}{\partial \dot{h}} - \frac{\partial(T-U)}{\partial h} = Q_h \quad (\text{II.20})$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial(T-U)}{\partial \dot{\alpha}} \right) + \frac{\partial d}{\partial \dot{\alpha}} - \frac{\partial(T-U)}{\partial \alpha} = Q_\alpha$$

En substituant des équations (II.2), (II.11), (II.16) et (II.19), dans les équations (II.20) on obtient finalement les équations aéroélastiques de mouvement à deux degrés de liberté pour le mouvement vertical et mouvement de tangage.

$$m \ddot{h} + m x_\alpha b \ddot{\alpha} + C_h \dot{h} + k_h h = -L \quad (\text{II.21})$$

$$m b x_\alpha \ddot{h} + I_{ea} \ddot{\alpha} + k_\alpha(\alpha) \alpha + C_\alpha \dot{\alpha} = M \quad (\text{II.22})$$

Ces deux équations ci-dessus peuvent être écrites sous forme matricielle comme suit :

$$I \begin{bmatrix} \ddot{h} \\ \ddot{\alpha} \end{bmatrix} + F \begin{bmatrix} \dot{h} \\ \dot{\alpha} \end{bmatrix} + R \begin{bmatrix} h \\ \alpha \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -L \\ M \end{bmatrix}$$

$$\text{Avec : } I = \begin{bmatrix} m & m x_\alpha b \\ m b x_\alpha & I_{ea} \end{bmatrix} \quad F = \begin{bmatrix} C_h & 0 \\ 0 & C_\alpha \end{bmatrix} \quad E = \begin{bmatrix} k_h & 0 \\ 0 & k_\alpha(\alpha) \end{bmatrix}$$

I : la matrice d'inertie

F : la matrice d'amortissement

E : la matrice de rigidité

II.3. Le modèle aérodynamique :

La force aérodynamique quasi stationnaire L et le moment M pour une aile avec les deux surfaces de commande de bord de fuite et de bord d'attaque (voir Figure (II.2)) qu'on a utilisée est comme suit [8] :

$$L(t) = \rho V^2 b s C_{l_\alpha} \left[\alpha + \left(\frac{h}{V} \right) + \left(\frac{1}{2} - a \right) b \left(\frac{\dot{\alpha}}{V} \right) \right] + \rho V^2 b s C_{l_\beta} \beta + \rho V^2 b s C_{l_\gamma} \gamma \quad (\text{II.23})$$

$$M(t) = \rho V^2 b^2 s C_{m_\alpha} \left[\alpha + \left(\frac{h}{V} \right) + \left(\frac{1}{2} - a \right) b \left(\frac{\dot{\alpha}}{V} \right) \right] + \rho V^2 b^2 s C_{m_\beta} \beta + \rho V^2 b^2 s C_{m_\gamma} \gamma \quad (\text{II.24})$$

Avec :

C_{l_α} : La dérivé de coefficient de portance par rapport à α .

C_{l_β} : La dérivé de coefficient de portance par rapport à β .

C_{l_γ} : La dérivé de coefficient de portance par rapport à γ .

C_{m_α} : La dérivé de coefficient de moment par rapport à α .

C_{m_β} : La dérivé de coefficient de moment par rapport à β .

C_{m_γ} : La dérivé de coefficient de moment par rapport à γ .

β : L'angle de déflexion de surface de commande de bord de fuite.

γ : L'angle de déflexion de surface de commande de bord d'attaque.

s : L'envergure de la section l'aile.

ρ : densité d'air.

V : vitesse de l'écoulement

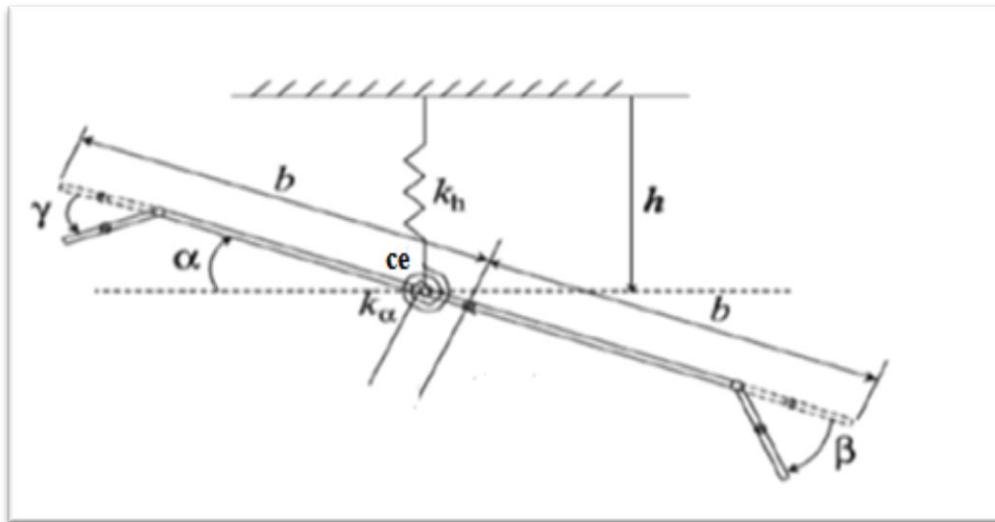


Figure (II.2) : le modèle aéroélastique d'une section d'aile bidimensionnelle avec les deux surfaces de commande de bord d'attaque et de bord de fuite [18].

II.4. Application sur le modèle d'aile TAMU WING II :

Le modèle utilisé pour notre étude est appelé TAMU WING II, il a été établi dans l'université de Texas, ce modèle est testé dans une soufflerie à faible vitesse pour étudier l'efficacité de la suppression de LCO (limite cycle oscillations) sur le système aéroélastique non linéaire.

La Figure (II.3) montre le modèle utilisé, deux servomoteurs de FUTABA S9402 actionnent les gouvernes, chaque moteur étant capable de produire un couple de 0,654 N.m à 5 V, avec des déflexions des gouvernes linéairement proportionnelles à la tension appliquée.

En outre, deux encodeurs optiques d'E2-1024-375-h sont montés sur les axes de rotation des surfaces de commande de bord d'attaque et de bord de fuite pour permettre la mesure des angles de braquages de gouverne de sorte qu'ils puissent être comparés aux entrées commandées [19].

La longueur des surfaces de bord d'attaque et de bord de fuite sont 15 et 20% de la longueur de la corde moyenne respectivement.

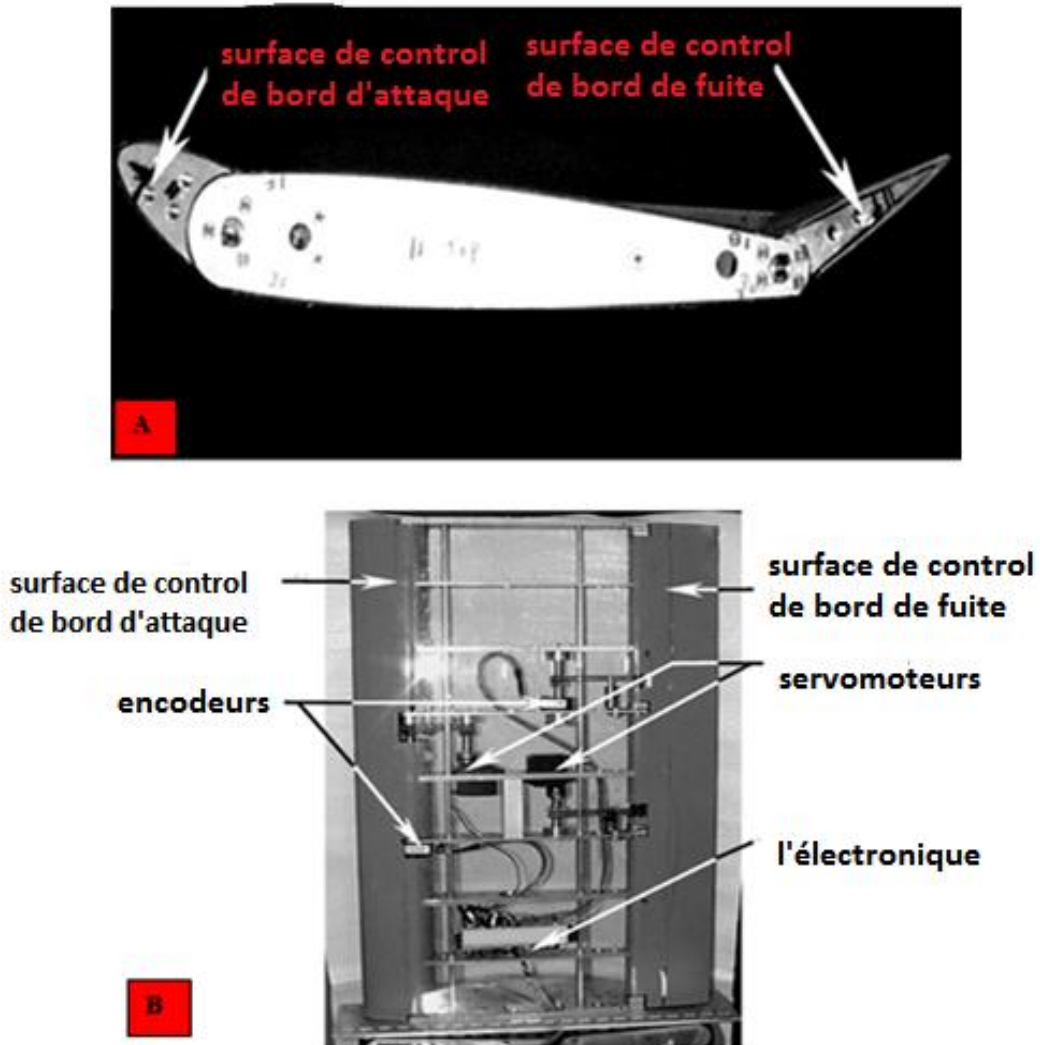


Figure (II.3) : A) vue de face de la section d’aile avec les deux surfaces de commande défléchir de leurs positions initiales. B) vue de dessus de l’aile TAMU WING II avec revêtement transparent [19].

Les équations de mouvement (II.21) et (II.22) pour ce modèle sont données comme suit [8] :

$$m_T \ddot{h} + m_w x_\alpha b \ddot{\alpha} + C_h \dot{h} + k_h h = -L \tag{II.25}$$

$$m_w b x_\alpha \ddot{h} + I_{e\alpha} \ddot{\alpha} + k_\alpha(\alpha) \alpha + C_\alpha \dot{\alpha} = M \tag{II.26}$$

Avec: m_T : La masse totale de l'aile et de sa structure de support

m_w : La masse de l’aile seulement.

II.4.1. Les paramètres de TAMU WING II :

Pour réaliser une application numérique sur les équations de mouvement, les valeurs utilisées sont données dans le tableau suivant :

Le paramètre	La valeur	L'unité
ρ	1.225	Kg /m ³
a	-0.6719	Sans unité
b	0.1905	m
x_α	$-(0.0998 + a)$	Sans unité
s	0.5945	m
k_h	2844.4	N/m
k_α	3.525	Nm/rad
C_h	27.43	Kg/s
C_α	0.0360	Kg. m ² /s
m_w	5.230	Kg
m_T	15.57	Kg
I_{ea}	0,14193	Kg m ²
C_{l_α}	6.757	Sans unité
C_{m_α}	$(0.5+a) c_{l_\alpha}$	Sans unité
C_{l_β}	3.774	Sans unité
C_{m_β}	-0.6719	Sans unité
C_{l_γ}	-0.1566	Sans unité
C_{m_γ}	-0.1005	Sans unité

Tableau (II.1) : les paramètres de TAMU WING II [8].

II.5. La représentation d'état de modèle TAMU WING II (voir l'Annexe B) :

Pour obtenir la représentation d'état de notre système, On substitue l'équation (II.23) dans (II.25) on obtient :

$$m_T \ddot{h} + m_w x_\alpha b \ddot{\alpha} + C_h \dot{h} + k_h h = -\rho V^2 b s C_{l_\alpha} \left[\alpha + \left(\frac{\dot{h}}{V} \right) + \left(\frac{1}{2} - a \right) b \left(\frac{\dot{\alpha}}{V} \right) \right] - \rho V^2 s C_{l_\beta} - \rho V^2 b s C_{l_\gamma} \gamma \quad (\text{II.27})$$

Et on substitue M par sa valeur donnée par l'équation (II.24) dans (II.26) on aura :

$$m_w b x_\alpha \ddot{h} + I_{ea} \ddot{\alpha} + k_\alpha(\alpha) \alpha + C_\alpha(\dot{\alpha}) \dot{\alpha} = \rho V^2 b^2 s C_{m_\alpha} \left[\alpha + \left(\frac{\dot{h}}{V} \right) + \left(\frac{1}{2} - a \right) b \left(\frac{\dot{\alpha}}{V} \right) \right] \rho V^2 b^2 s C_{m_\beta} + \rho V^2 b^2 s C_{m_\gamma} \gamma \quad (\text{II.28})$$

On combine l'équation (II.27) avec l'équation (II.28) pour éliminer $\ddot{\alpha}$ on aura :

$$\begin{aligned} & \ddot{h} \left[\frac{(m_w x_\alpha b)^2 - m_T I_{ea}}{m_w x_\alpha b} \right] + \dot{h} \left[\frac{-\rho V^2 b^2 s C_{m_\alpha} m_w x_\alpha b - I_{ea} [C_h + \rho V^2 b s C_{l_\alpha}]}{m_w x_\alpha b} \right] + \\ & \dot{\alpha} \left[\frac{C_\alpha(\dot{\alpha}) m_w x_\alpha b - \rho V^2 b^2 s C_{m_\alpha} \left(\frac{1}{2} - a \right) b m_w x_\alpha b - \rho V^2 b s C_{l_\alpha} \left(\frac{1}{2} - a \right) b I_{ea}}{m_w x_\alpha b} \right] + \\ & \alpha \left[\frac{k_\alpha(\alpha) m_w x_\alpha b - \rho V^2 b^2 s C_{m_\alpha} m_w x_\alpha b - \rho V^2 b s C_{l_\alpha} I_{ea}}{m_w x_\alpha b} \right] - \frac{k_h h I_{ea}}{m_w x_\alpha b} \\ & + \beta \left[\frac{-\rho V^2 b^2 s C_{m_\beta} m_w x_\alpha b - \rho V^2 b s C_{l_\beta} I_{ea}}{m_w x_\alpha b} \right] + \gamma \left[\frac{-\rho V^2 b^2 s C_{m_\gamma} m_w x_\alpha b - \rho V^2 b s C_{l_\gamma} I_{ea}}{m_w x_\alpha b} \right] = 0 \end{aligned}$$

On divise par $\frac{(m_w x_\alpha b)^2 - m_T I_{ea}}{m_w x_\alpha b}$, L'équation ci-dessus devient :

$$\begin{aligned} \ddot{h} = & \dot{h} \left[\frac{-\rho V^2 b^2 s C_{m_\alpha} m_w x_\alpha b - I_{ea} [C_h + \rho V^2 b s C_{l_\alpha}]}{m_T I_{ea} - (m_w x_\alpha b)^2} \right] + \\ & \dot{\alpha} \left[\frac{C_\alpha(\dot{\alpha}) m_w x_\alpha b - \rho V^2 b^2 s C_{m_\alpha} \left(\frac{1}{2} - a\right) b m_w x_\alpha b - \rho V^2 b s C_{l_\alpha} \left(\frac{1}{2} - a\right) b I_{ea}}{m_T I_{ea} - (m_w x_\alpha b)^2} \right] - \\ & \frac{k_h h I_{ea}}{m_T I_{ea} - (m_w x_\alpha b)^2} + \alpha \left[\frac{k_\alpha(\alpha) m_w x_\alpha b - \rho V^2 b^2 s C_{m_\alpha} m_w x_\alpha b - \rho V^2 b s C_{l_\alpha} I_{ea}}{m_T I_{ea} - (m_w x_\alpha b)^2} \right] + \\ & \beta \left[\frac{-\rho V^2 b^2 s C_{m_\beta} m_w x_\alpha b - \rho V^2 b s C_{l_\beta} I_{ea}}{m_T I_{ea} - (m_w x_\alpha b)^2} \right] + \gamma \left[\frac{-\rho V^2 b^2 s C_{m_\gamma} m_w x_\alpha b - \rho V^2 b s C_{l_\gamma} I_{ea}}{m_T I_{ea} - (m_w x_\alpha b)^2} \right] \end{aligned}$$

On peut écrire l'équation ci-dessus comme suit :

$$\ddot{h} = a_{31} h + a_{32} \alpha + a_{33} \dot{h} + a_{34} \dot{\alpha} + b_{31} \beta + b_{32} \gamma \quad (\text{II.29})$$

Avec :

$$d = m_T I_{ea} - (m_w x_\alpha b)^2 \quad a_{31} = \frac{-k_h I_{ea}}{d}$$

$$a_{32} = \frac{k_\alpha(\alpha) m_w x_\alpha b - \rho V^2 b^3 s C_{m_\alpha} m_w x_\alpha b - \rho V^2 b s C_{l_\alpha} I_{ea}}{d}$$

$$a_{33} = \frac{-\rho V^2 b^3 s C_{m_\alpha} m_w x_\alpha b - I_{ea} [C_h + \rho V^2 b s C_{l_\alpha}]}{d}$$

$$a_{34} = \frac{C_\alpha m_w x_\alpha b - \rho V^2 b^4 s C_{m_\alpha} \left(\frac{1}{2} - a\right) m_w x_\alpha b - \rho V^2 b^2 s C_{l_\alpha} \left(\frac{1}{2} - a\right) I_{ea}}{d}$$

$$b_{31} = \frac{-\rho V^2 b^3 s C_{m_\beta} m_w x_\alpha b - \rho V^2 b s C_{l_\beta} I_{ea}}{d}$$

$$b_{32} = \frac{-\rho V^2 b^3 s C_{m_\gamma} m_w x_\alpha b - \rho V^2 b s C_{l_\gamma} I_{ea}}{d}$$

En combinant aussi l'équation (II.27) avec l'équation (II.28) en éliminant cette fois \ddot{h} on obtient :

$$\ddot{\alpha} \left[m_w x_\alpha b - \frac{m_T I_{ea}}{m_w x_\alpha b} \right] + \dot{h} \left[c_h + \frac{\rho V^2 b s C_{l_\alpha}}{V} + \frac{m_T \rho V^2 b^2 s C_{m_\alpha}}{V m_w x_\alpha b} \right] + \dot{\alpha} \left[\frac{\rho V^2 b s C_{l_\alpha}}{V} \left(\frac{1}{2} - a \right) b - \frac{m_T C_\alpha}{m_w x_\alpha b} + \frac{m_T \rho V^2 b^2 s C_{m_\alpha}}{V m_w x_\alpha b} \left(\frac{1}{2} - a \right) b \right] + \alpha \left[\rho V^2 b s C_{l_\alpha} - \frac{m_T k_\alpha(\alpha)}{m_w x_\alpha b} + \frac{m_T \rho V^2 b^2 s C_{m_\alpha}}{m_w x_\alpha b} \right] + k_h h + \beta \left[\rho V^2 b s C_{l_\beta} + \frac{\rho V^2 b^2 s C_{m_\beta} m_T}{m_w x_\alpha b} \right] + \gamma \left[\rho V^2 b s C_{l_\gamma} + \frac{\rho V^2 b^2 s C_{m_\gamma} m_T}{m_w x_\alpha b} \right] = 0$$

On divise l'équation ci-dessus par $x_\alpha b - \frac{m_T I_{ea}}{m_w x_\alpha b}$ et on calcule $\ddot{\alpha}$ on le trouve comme suit :

$$\ddot{\alpha} = \dot{h} \left[\frac{c_h m_w x_\alpha b + \rho V^2 b s C_{l_\alpha} m_w x_\alpha b + m_T \rho V^2 b^2 s C_{m_\alpha}}{m_T I_{ea} - (m_w x_\alpha b)^2} \right] + \dot{\alpha} \left[\frac{\rho V^2 b s C_{l_\alpha} \left(\frac{1}{2} - a \right) b m_w x_\alpha - m_T C_\alpha (\dot{\alpha}) + m_T \rho V^2 b^2 s C_{m_\alpha} \left(\frac{1}{2} - a \right) b}{m_T I_{ea} - (m_w x_\alpha b)^2} \right] + \frac{k_h h m_w x_\alpha b}{m_T I_{ea} - (m_w x_\alpha b)^2} + \alpha \left[\frac{\rho V^2 b s C_{l_\alpha} m_w x_\alpha b - m_T k_\alpha(\alpha) + m_T \rho V^2 b^2 s C_{m_\alpha}}{m_T I_{ea} - (m_w x_\alpha b)^2} \right] + \beta \left[\frac{\rho V^2 b s C_{l_\beta} m_w x_\alpha b + \rho V^2 b^2 s C_{m_\beta} m_T}{m_T I_{ea} - (m_w x_\alpha b)^2} \right] + \gamma \left[\frac{\rho V^2 b s C_{l_\gamma} m_w x_\alpha b + \rho V^2 b^2 s C_{m_\gamma} m_T}{m_T I_{ea} - (m_w x_\alpha b)^2} \right].$$

L'équation ci-dessus peut être écrite comme suit :

$$\ddot{\alpha} = a_{41} h + a_{42} \alpha + a_{43} \dot{h} + a_{44} \dot{\alpha} + b_{41} \beta + b_{42} \gamma \quad (\text{II.30})$$

Avec :

$$d = m_T I_{ea} - (m_w x_\alpha b)^2$$

$$a_{41} = \frac{k_h m_w x_\alpha b}{d}$$

$$a_{42} = \frac{\rho V^2 b^2 s C_{l_\alpha} m_w x_\alpha - m_T k_\alpha(\alpha) + m_T \rho V^2 b^2 s C_{m_\alpha}}{d}$$

$$a_{43} = \frac{c_h m_w x_\alpha b + \rho V^2 b^2 s C_{l_\alpha} m_w x_\alpha + m_T \rho V^2 b^2 s C_{m_\alpha}}{d}$$

$$a_{44} = \frac{\rho V^2 b^3 s C_{l\alpha} \left(\frac{1}{2}-a\right) m_w x_\alpha - m_T C_\alpha + m_T \rho V^2 b^3 s C_{m\alpha} \left(\frac{1}{2}-a\right)}{d}$$

$$b_{41} = \frac{\rho V^2 b^2 s C_{l\beta} m_w x_\alpha + \rho V^2 b^2 s C_{m\beta} m_T}{d}$$

$$b_{42} = \frac{\rho V^2 b^2 s C_{l\gamma} m_w x_\alpha + \rho V^2 b^2 s C_{m\gamma} m_T}{d}$$

Les équations (II.29) et (II.30) peuvent être écrites sous la forme :

$$\dot{x} = Ax + Bu$$

Avec : x est le vecteur d'état donné par :

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} h \\ \alpha \\ \dot{h} \\ \dot{\alpha} \end{bmatrix}$$

u : est le vecteur de commande donnée par : $u = \begin{bmatrix} \beta \\ \gamma \end{bmatrix}$

A et B sont les matrices d'état et de commande données respectivement :

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ a_{31} & a_{32}(\alpha) & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42}(\alpha) & a_{43} & a_{44} \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ b_{31} & b_{32} \\ b_{41} & b_{42} \end{bmatrix}$$

On remarque que notre système aéroélastique est de 4^{ème} ordre et il est décrit par un modèle mathématique à paramètres variables non linéaire.

On calcule les variables de la matrice A et B en utilisant les paramètres mentionnés dans le Tableau (II.1) à une vitesse d'écoulement $V=13$ m/s et on néglige les paramètres non linéaires dans le coefficient de rigidité k_α on trouve :

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -214.1696 & -9.2941 & -2.8623 & -0.1670 \\ 860.0497 & -24.0620 & 8.6826 & -0.2106 \end{bmatrix}$$

Et

$$B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ -5.7551 & 0.4122 \\ 1.9681 & -4.8177 \end{bmatrix}$$

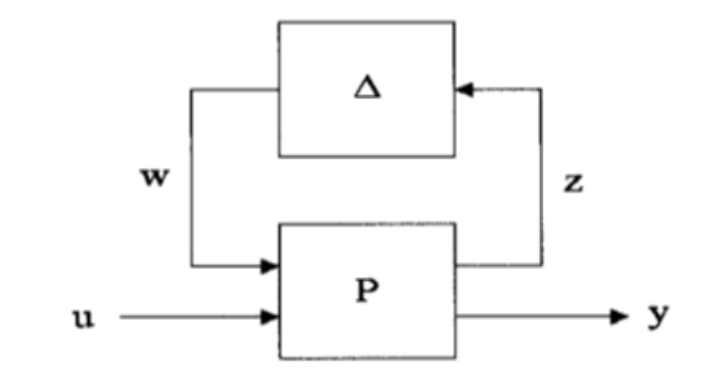
II.6. Modélisation des incertitudes paramétriques :

Dans cette section on considère la modélisation du système aéroélastique où le système est soumis uniquement à des perturbations de type structuré (les perturbations paramétriques), les paramètres affectés par ces incertitudes sont le coefficient d'amortissement C_h et le coefficient de rigidité K_α et la pression dynamique quasi stationnaire q .

II.6.1. la transformation linéaire fractionnaire LFT (linear fractional transformation) :

La représentation des incertitudes paramétriques qui intervient sur le modèle, peut être traduite par la transformation linéaire fractionnaire (LFT).

Considérant une boucle fermée soumise à des incertitudes paramétriques, la première étape consiste à transformer cette boucle fermée de façon à se ramener au schéma d'interconnexion standard P - Δ de la Figure(II.4) [29].



Figure(II.4) : mise sous forme de LFT d'un processus incertain [29].

La matrice (Δ) contient les incertitudes de modèle (P), elle est de la forme :

$$(\Delta) = \text{diag}(\delta_i I_{q_i})$$

Avec $\delta_i \in [-1; 1]$ représente la variation normalisée de $i^{\text{ème}}$ paramètre incertain et I_q est la matrice identité.

Les deux variables (vectorielles) w et z sont introduits respectivement comme une entrée et une sortie auxiliaires, connectées par une boucle de retour sur un gain Δ selon la relation suivante :

$$w = \Delta \times z$$

Le système P s'écrit :

$$\dot{x} = Ax + B_1 w + B_2 u \quad (\text{II.31})$$

$$z = C_1 x + D_{11} w + D_{12} u \quad (\text{II.32})$$

$$y = C_2 x + D_{21} w + D_{22} u \quad (\text{II.33})$$

Les équations ci-dessus peuvent être écrite sous forme matricielle :

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ z \\ y \end{bmatrix} = P \begin{bmatrix} x \\ w \\ u \end{bmatrix} \quad \text{Avec :} \quad P = \begin{bmatrix} A & B_1 & B_2 \\ C_1 & D_{11} & D_{12} \\ C_2 & D_{21} & D_{22} \end{bmatrix}$$

II.6. 2. Le modèle mathématique du système incertain :

Pour s'adapter dans le cadre de la synthèse de la commande PRLQR, une interprétation pour modéliser le système aéroélastique qui tient compte les incertitudes paramétriques du modèle sur la pression dynamique, la rigidité et l'amortissement est donnée comme suit :

Les charges aérodynamiques L et M sont données par [8] :

$$L(t) = q \left\{ 2bsC_{l_\alpha} \left[\alpha + \left(\frac{h}{V} \right) + \left(\frac{1}{2} - a \right) b \left(\frac{\dot{\alpha}}{V} \right) \right] + 2bsC_{l_\beta} \beta + 2bsC_{l_\gamma} \gamma \right\} \quad (\text{II.34})$$

$$M(t) = q \left\{ 2b^2sC_{m_\alpha} \left[\alpha + \left(\frac{h}{V} \right) + \left(\frac{1}{2} - a \right) b \left(\frac{\dot{\alpha}}{V} \right) \right] + 2b^2sC_{m_\beta} \beta + 2b^2sC_{m_\gamma} \gamma \right\} \quad (\text{II.35})$$

Avec q c'est la pression dynamique donnée par :

$$q = \frac{1}{2} \rho V^2$$

La pression dynamique peut être défini comme étant une combinaison de la pression dynamique quasi-stationnaire nominale, et une perturbation associée suivant la relation [8].

$$q = q_{nom} + \delta_q \quad (\text{II.36})$$

Où :

q_{nom} : est la pression dynamique nominale

δ_q : est la perturbation associée à la pression dynamique.

En substituant (II.36) dans (II.23) et (II.24) respectivement, on trouve les charges aérodynamiques perturbées données par (II.37) et (II.39) : [39] [40]

$$L(t) = q_{nom} 2bsC_{l_\alpha} \left[\alpha + \left(\frac{\dot{h}}{V} \right) + \left(\frac{1}{2} - a \right) b \left(\frac{\dot{\alpha}}{V} \right) \right] + q_{nom} 2bsC_{l_\beta} \beta + q_{nom} 2bsC_{l_\gamma} \gamma + w_1 \quad (\text{II.37})$$

$$z_1 = 2bsC_{l_\alpha} \left[\alpha + \left(\frac{\dot{h}}{V} \right) + \left(\frac{1}{2} - a \right) b \left(\frac{\dot{\alpha}}{V} \right) \right] + 2bsC_{l_\beta} \beta + 2bsC_{l_\gamma} \gamma \quad (\text{II.38})$$

$$M(t) = q_{nom} 2b^2 s C_{m_\alpha} \left[\alpha + \left(\frac{\dot{h}}{V} \right) + \left(\frac{1}{2} - a \right) b \left(\frac{\dot{\alpha}}{V} \right) \right] + q_{nom} 2b^2 s C_{m_\beta} \beta + q_{nom} 2b^2 s C_{m_\gamma} \gamma + w_2 \quad (\text{II.39})$$

$$z_2 = 2b^2 s C_{m_\alpha} \left[\alpha + \left(\frac{\dot{h}}{V} \right) + \left(\frac{1}{2} - a \right) b \left(\frac{\dot{\alpha}}{V} \right) \right] + 2b^2 s C_{m_\beta} \beta + 2b^2 s C_{m_\gamma} \gamma \quad (\text{II.40})$$

Avec :

$$w_1 = \delta_q z_1 = \delta_1 z_1$$

$$w_2 = \delta_q z_2 = \delta_2 z_2$$

Le coefficient d'amortissement perturbé pour le mouvement vertical peut être défini comme [8] :

$$C_h = C_{h-nom} + W_3 \delta_3 \quad (\text{II.41})$$

Où :

δ_3 : est la perturbation liée au coefficient d'amortissement C_{h-nom} pour le mouvement vertical

$$\delta_3 \in R \quad \text{et} \quad |\delta_3| \leq 1$$

$$W_3 = e_3 C_{h-nom}$$

W_3 : est la pondération sur la perturbation associée au coefficient d'amortissement pour le mouvement vertical C_{h-nom} et e_3 est l'erreur de pondération.

Pour les buts semblables, le coefficient de rigidité pour le mouvement de tangage peut être exprimé comme [8] :

$$k_{\alpha} = k_{\alpha-nom} + W_4 \delta_4 \quad (\text{II.42})$$

Avec :

δ_4 : est la perturbation associée au coefficient de rigidité de mouvement de tangage $k_{\alpha-nom}$

$$\delta_4 \in R \quad \text{et} \quad |\delta_4| \leq 1$$

$$W_4 = e_4 K_{\alpha-nom}$$

W_4 : est la pondération sur la perturbation associée au coefficient de rigidité pour le mouvement de tangage $k_{\alpha-nom}$

On pose :

$$z_3 = W_3 \dot{h} \quad (\text{II.43})$$

$$z_4 = W_4 \alpha \quad (\text{II.44})$$

On a :

$$w_3 = \delta_3 z_3 \quad (\text{II.45})$$

$$w_4 = \delta_4 z_4 \quad (\text{II.46})$$

On substitue (II.41) dans (II.25) et en combinant avec (II.43) et en substituant (II.42) dans (II.26) et en combinant avec (II.44) on obtient respectivement :

$$m_T \ddot{h} + m_w x_{\alpha} b \ddot{\alpha} + C_{h\ nom} \dot{h} + k_h h + \delta_3 z_3 = -L \quad (\text{II.47})$$

$$m_w b x_{\alpha} \ddot{h} + I_{ea} \ddot{\alpha} + k_{\alpha nom} \alpha + c_{\alpha} \dot{\alpha} + \delta_4 z_4 = M \quad (\text{II.48})$$

Ces deux équations ci-dessus peuvent être écrites comme suit on substitue w_3 et w_4 par leurs valeurs :

$$m_T \ddot{h} + m_w x_\alpha b \ddot{\alpha} + C_{h\ nom} \dot{h} + k_h h + w_3 = -L \quad (\text{II.49})$$

$$m_w b x_\alpha \ddot{h} + I_{ea} \ddot{\alpha} + k_{\alpha\ nom} \alpha + C_\alpha \dot{\alpha} + w_4 = M \quad (\text{II.50})$$

On combine l'équation (II.49) avec l'équation (II.37) et l'équation (II.50) avec (II.39) on aura respectivement :

$$m_T \ddot{h} + m_w x_\alpha b \ddot{\alpha} + C_{h\ nom} \dot{h} + k_h h + w_3 = -q_{nom} \left\{ 2bs C_{l_\alpha} \left[\alpha + \left(\frac{\dot{h}}{V} \right) + \left(\frac{1}{2} - a \right) b \left(\frac{\dot{\alpha}}{V} \right) \right] + 2bs C_{l_\beta} \beta + 2bs C_{l_\gamma} \gamma \right\} - w_1 \quad (\text{II.51})$$

$$m_w b x_\alpha \ddot{h} + I_{ea} \ddot{\alpha} + k_{\alpha\ nom} \alpha + c_\alpha \dot{\alpha} + w_4 = q_{nom} \left\{ 2b^2 s C_{m_\alpha} \left[\alpha + \left(\frac{\dot{h}}{V} \right) + \left(\frac{1}{2} - a \right) b \left(\frac{\dot{\alpha}}{V} \right) \right] + 2b^2 s C_{m_\beta} \beta + 2b^2 s C_{m_\gamma} \gamma \right\} + w_2 \quad (\text{II.52})$$

On combine ces deux équations ci-dessus pour éliminer $\ddot{\alpha}$ et \ddot{h} on obtient respectivement :

$$\ddot{h} = a_{31} h + a_{32} \alpha + a_{33} \dot{h} + a_{34} \dot{\alpha} + b_{31} w_1 + b_{32} w_2 + b_{33} w_3 + b_{34} w_4 + b_{35} \beta + b_{36} \gamma \quad (\text{II.53})$$

$$\ddot{\alpha} = a_{41} h + a_{42} \alpha + a_{43} \dot{h} + a_{44} \dot{\alpha} + b_{41} w_1 + b_{42} w_2 + b_{43} w_3 + b_{44} w_4 + b_{45} \beta + b_{46} \gamma \quad (\text{II.54})$$

Avec :

$$d = m_T I_{ea} - (m_w x_\alpha b)^2 \quad a_{31} = \frac{-k_h I_{ea}}{d}$$

$$a_{32} = \frac{k_{\alpha\ nom} m_w x_\alpha b - q_{nom} 2bs (C_{l_\alpha} I_{ea} + C_{m_\alpha} m_w x_\alpha b^2)}{d}$$

$$a_{33} = \frac{-I_{ea} C_{h\ nom} - q_{nom} 2bs [C_{l_\alpha} I_{ea} + C_{m_\alpha} m_w x_\alpha b^2] \left(\frac{1}{V} \right)}{d}$$

$$a_{34} = \frac{C_\alpha m_w x_\alpha b - q_{nom} 2bs (C_{l_\alpha} I_{ea} + C_{m_\alpha} m_w x_\alpha b^2) \left(\frac{1}{2} - a \right) \left(\frac{b}{V} \right)}{d} \quad b_{31} = \frac{-I_{ea}}{d} \quad b_{33} = \frac{-I_{ea}}{d}$$

$$b_{32} = \frac{-m_w x_\alpha b}{d} \quad b_{34} = \frac{m_w x_\alpha b}{d}$$

$$b_{35} = \frac{-q_{nom} 2bs (C_{l_\beta} I_{ea} + C_{m_\beta} m_w x_\alpha b^2)}{d} \quad b_{36} = \frac{-q_{nom} 2bs (C_{l_\gamma} I_{ea} + C_{m_\gamma} m_w x_\alpha b^2)}{d}$$

$$a_{41} = \frac{k_h m_w x_\alpha b}{d} \quad a_{42} = \frac{-m_T k_\alpha \text{nom} + q_{\text{nom}} 2bs(m_T b C_{m_\alpha} + m_w x_\alpha b C_{l_\alpha})}{d}$$

$$a_{43} = \frac{m_T x_\alpha b C_{h \text{nom}} + q_{\text{nom}} 2bs(m_T b C_{m_\alpha} + m_w x_\alpha b C_{l_\alpha}) \left(\frac{1}{V}\right)}{d}$$

$$a_{44} = \frac{-m_T C_\alpha + q_{\text{nom}} 2bs(m_T b C_{m_\alpha} + m_w x_\alpha b C_{l_\alpha}) \left(\frac{1}{2} - a\right) \left(\frac{b}{V}\right)}{d}$$

$$b_{41} = \frac{m_w x_\alpha b}{d}$$

$$b_{42} = \frac{m_T}{d}$$

$$b_{43} = \frac{m_w x_\alpha b}{d}$$

$$b_{44} = \frac{-m_T}{d}$$

$$b_{45} = \frac{q_{\text{nom}} 2bs(m_T b C_{m_\beta} + m_w x_\alpha b C_{l_\beta})}{d}$$

$$b_{46} = \frac{q_{\text{nom}} 2bs(m_T b C_{m_\gamma} + m_w x_\alpha b C_{l_\gamma})}{d}$$

Réarrangeant l'équation (II.38) et (II.40), nous avons :

$$z_1 = c_{12}\alpha + c_{13}\dot{h} + c_{14}\dot{\alpha} + d_{15}\beta + d_{16}\gamma \quad (\text{II.55})$$

$$z_2 = c_{22}\alpha + c_{23}\dot{h} + c_{24}\dot{\alpha} + d_{25}\beta + d_{26}\gamma \quad (\text{II.56})$$

Avec :

$$c_{12} = 2bsc_{l_\alpha} \quad c_{13} = \frac{2bsC_{l_\alpha}}{V} \quad c_{14} = 2bsc_{l_\alpha} \left(\frac{1}{2} - a\right) \left(\frac{b}{V}\right) \quad d_{15} = 2bsC_{l_\beta}$$

$$d_{16} = 2bsC_{l_\gamma} \quad c_{22} = 2b^2sC_{m_\alpha} \quad c_{23} = \frac{2b^2sC_{m_\alpha}}{V} \quad c_{24} = 2b^2sC_{m_\alpha} \left(\frac{1}{2} - a\right) \left(\frac{b}{V}\right)$$

$$d_{25} = 2b^2sC_{m_\beta} \quad d_{26} = 2b^2sC_{m_\gamma}$$

À partir de l'équation (II.43) et (II.44) les pondérations sont définies comme suit :

$$z_3 = W_3\dot{h} = c_{33}\dot{h} \quad (\text{II.57})$$

$$z_4 = W_4\dot{h} = c_{42}\dot{h} \quad (\text{II.58})$$

Avec : $c_{33} = W_3$ et $c_{42} = W_4$

Les équations (II.53), (II.54), (II.55), (II.56), (II.57) et (II.58) peuvent être écrites sous forme matricielle comme suit :

$$\begin{bmatrix} \dot{h} \\ \dot{\alpha} \\ \ddot{h} \\ \ddot{\alpha} \\ z_1 \\ z_2 \\ z_3 \\ z_4 \\ h \\ \alpha \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h \\ \alpha \\ \dot{h} \\ \dot{\alpha} \\ w_1 \\ w_2 \\ w_3 \\ w_4 \\ \beta \\ \gamma \end{bmatrix} \quad (\text{II.59})$$

$$\text{Avec : } A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} & b_{34} & b_{35} & b_{36} \\ b_{41} & b_{42} & b_{43} & b_{44} & b_{45} & b_{46} \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} 0 & c_{12} & c_{13} & c_{14} \\ 0 & c_{22} & c_{23} & c_{24} \\ 0 & 0 & w_3 & 0 \\ 0 & w_4 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad D = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & d_{15} & d_{16} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & d_{25} & d_{26} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

II.6. 3. Application numérique sur le modèle TAMU WING II :

En utilisant les paramètres mentionnés dans le Tableau (II.1) et on prend $V= 13\text{m/s}$, les variables des matrices A, B, C, D de l'équation (II.59) sont données comme suit :

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -214.1696 & -9.2941 & -2.8623 & -0.1670 \\ 860.0497 & -24.0620 & 8.6826 & -0.2106 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -0.0753 & -0.3024 & -0.0753 & 0.3024 & -5.7551 & 0.4122 \\ 0.3024 & 8.2595 & 0.3024 & -8.2595 & 1.9681 & -4.8177 \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} 0 & 1.5305 & 0.1177 & 0.0263 \\ 0 & -0.0501 & -0.0039 & -0.0009 \\ 0 & 0 & 10.9720 & 0 \\ 0 & 1.7625 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad D = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0.8584 & -0.0355 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -0.0290 & -0.0043 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Conclusion

Dans ce chapitre, deux étapes ont été élaborées le développement mathématique de modèle nominal en premier, ensuite le développement de modèle incertain.

La modélisation est basée sur le formalisme de Lagrange qui est un outil puissant permet d'arriver au modèle mathématique d'une manière simplifiée ; il tient en compte que les forces ayant un travail.

Le modèle nominal obtenu ce ni qu'une approximation de modèle réel ; des dynamiques ont été négligées lors de la synthèse tel que l'effet de la gravité.

Le modèle réel est obtenu approximativement en développant le modèle nominal en introduisant des paramètres incertains.

Introduction :

Le contrôle d'un système ou d'un processus est conventionnellement subdivisé en deux problèmes qui sont la poursuite et la régulation. Le problème de base de la poursuite est de permettre à un système de suivre le mouvement d'une cible avec un minimum d'erreur, tant que la régulation est de permettre à un processus de délivrer une production donnée en corrigeant toute tendance à dévier loin du point désiré [21].

Pendant plusieurs années les développeurs ont eu un intérêt particulier sur la sécurité et la stabilité des avions en vol, c'est l'un des sujets de recherche importants en aéronautique pour assurer un vol stable et pour éviter toute action néfaste pour la structure de l'appareil et le confort des utilisateurs, les systèmes du contrôle doivent fournir la stabilité et les performances d'un modèle donné. Ces objectifs font un grand défi, grâce à la compréhension de dynamique et de contrôle améliorée, ils ont été capables de développer des nouveaux modèles qui sont plus rapides, ayez la plus grande performance et fonctionnent robustement dans des intervalles de vols très grandes [22].

Le contrôle optimal sert à concevoir un contrôle pour minimiser l'index de la performance, en général, le problème du contrôle optimal est difficile à résoudre, à l'exception des systèmes linéaires avec un index de performance du second degré.

L'utilisation de la théorie du contrôle optimale développe une méthode pour aboutir à des paramètres qui sont capables à accomplir la performance désirée et la stabilité dans le système du contrôle et la robustesse. La question qui se pose pour ces système de contrôle, c'est bien la robustesse face aux différentes perturbations et les pannes qui peuvent présenter un danger d'instabilité conduisant au problème de destruction de la structure et bien évident un décrochage, dans notre cas étudié dans ce projet, le flottement d'aile doit être contrôlé avec une commande robuste pour garantir le bon fonctionnement de l'appareil en tout sécurité.

La robustesse peut se définir par le bon fonctionnement du système dans ces conditions : Perturbations internes, Perturbation externes et les pannes.

Les commandes utilisées dans ce projet sont :

- La commande LQR ((Linear Quadratic Regulator).
- La commande LQR avec l'observateur de Luenberger.
- La commande PRLQR (Parameter Robust Linear Quadratic Regulator).

Dans ce chapitre on commence par l'étude de la contrôlabilité de système, puis on présente la loi de la commande LQR, ensuite on suppose que le vecteur d'état est inaccessible et on expose la commande LQR avec l'observateur de Luenberger et on termine par une étude théorique de la commande PRLQR.

III.1. Etude de la contrôlabilité de système (voir l'annexe C) :

Avant de présenter les commandes utilisées dans notre projet nous devons vérifier d'abord une propriété importante, qui est la contrôlabilité. La propriété de contrôlabilité est nécessaire pour garantir que nous avons l'autorité pour conduire l'état du système d'un état arbitraire à un état désiré.

La matrice de contrôlabilité est défini comme suit :

$$c = [B, AB, \dots, A^{n-1}B]$$

Dans notre cas l'ordre de système est 4 ($n = 4$) donc la matrice de contrôlabilité devient pour notre système :

$$c = [B, AB, A^2B, A^3B]$$

À l'aide de la fonction 'ctrb' du MATLAB, on peut vérifier que le système s'il est contrôlable.

$\text{rank}[\text{Ctrb}(A,B)] = 4 = \mathbf{n}$, alors : 'le système aéroélastique est contrôlable' .

III.2 Commande Linéaire Quadratique Optimale :

LQR « Linear Quadratic Regulator », est l'une des méthodes de conception la plus largement répondue pour le contrôle et la stabilité de système selon les différents critères (voir Annexe D).

Des études ont réalisées comparant des propriétés des contrôleurs (exécution, robustesse, utilisation de contrôle) dans des différentes applications. On parle de la commande linéaire quadratique lorsque le système est linéaire et le critère à minimiser est quadratique, cette commande est définie comme étant une commande optimale par retour d'état, le principe de la commande LQR est présenté dans la figure suivante [23] :

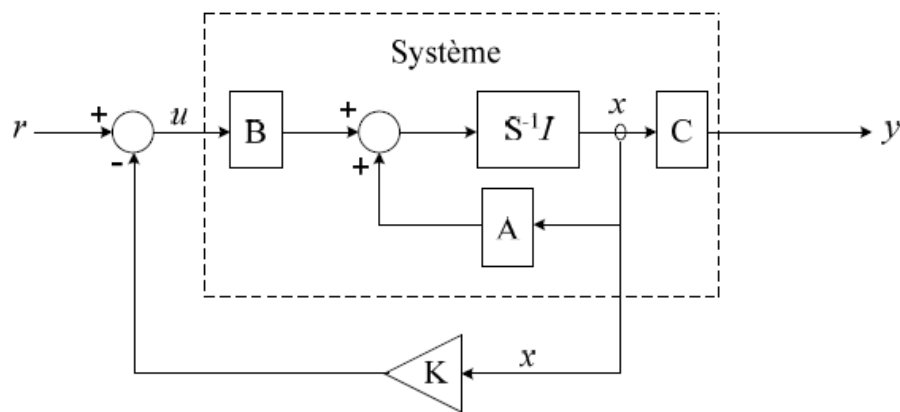


Figure (III.1) : principe de la commande LQR [23].

III.2.1. Commande LQR (Régulateur Quadratique Linéaire) avec un temps fini :

Hypothèses :

- le système est contrôlable.
- le vecteur d'état est mesurable.

On considère le système linéaire suivant:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax(t) + B u(t) \\ y(t) &= C x(t) + D u(t) \end{aligned} \tag{III.1}$$

Où :

$x \in R^n$: Appelé vecteur d'état du système.

$A \in R^{n \times n}$: Matrice d'état de système.

$B \in R^{n \times p}$: Matrice de commande.

$C \in R^{q \times n}$: Matrice d'observation.

$D \in R^{q \times p}$: Matrice d'action directe.

Le problème LQR est défini comme suit: trouvez le signal d'entrée de contrôle $u(t)$, $t \in [0, \infty[$ qui permet d'avoir le critère suivant le plus petit que possible :

$$J = \int_0^{\infty} \|y(t)\|^2 + \mu \|u(t)\|^2 \quad (\text{III.2})$$

Où :

μ : est une constante positive.

$\int_0^{\infty} \|y(t)\|^2$: est l'énergie des sorties contrôlées.

$\int_0^{\infty} \|u(t)\|^2$: est l'énergie du signal d'entrée.

Dans la commande LQR on cherche un contrôleur qui minimise les deux énergies. Cependant, diminuer l'énergie de la sortie contrôlée exigera un grand contrôle du signal et un petit signal du contrôle conduit aux grands signaux de sortie contrôlés.

Le rôle de la constante μ est pour établir un équilibre entre ces buts [24].

L'index quadratique de performance peut s'écrire comme suit :

$$J = \frac{1}{2} x_f^T S_f x_f + \frac{1}{2} \int_{t_0}^{t_f} [x^T Q(t)x + u^T R(t)u] dt \quad (\text{III.3})$$

Où :

→ Q et R : présentent des matrices de pondération pour les variables d'état et les variables d'entrée, respectivement

- t_f : est le temps terminal pour l'action de commande, qui signifie que l'action de la commande est dans un intervalle de temps fini.
- $S_f \geq 0$: est la matrice de pondération pour les états terminaux.

Ainsi que :

(Q, R) sont symétriques et positives semi-définis, positives définis, respectivement (voir Annexe E).

Pour avoir un problème bien proposé, on exige que les matrices (A, B) soient contrôlables, et on doit d'abord construire une fonction dite Hamiltonienne (H).

La valeur optimale peut être résolue en prenant la dérivée de H par rapport à u. Puis trouver la solution de l'équation de Riccati.

La fonction Hamiltonienne de la commande LQR est donnée par : [25]

$$H = x^T Q x + u^T R u + \frac{\partial J}{\partial x} (A(t)x + B(t)u) \quad (\text{III.4})$$

Où : J est l'index d'optimalité.

La dérivée de H par rapport à 'u' :

$$\frac{\partial H}{\partial u} = -Ru(t) + B^T I(t) = 0 \quad (\text{III.5})$$

$$-\dot{P}(t) = P(t)A + A^T P(t) + Q - P(t)B R^{-1} B^T P(t) \quad (\text{III.6})$$

Avec sa valeur finale :

$$P(t_f) = S$$

L'équation (III.6) est l'équation différentielle de Riccati (DRE), La solution de cette équation nous donne :

$$u(x, t) = -R^{-1} B^T P(t)x = -K(t)x \quad (\text{III.7})$$

Avec :

$$K = R^{-1} B^T P(t) \quad (\text{III.8})$$

On substitue le contrôle optimal dans le système pour avoir le système en boucle fermée:

$$\dot{x} = A(t)x + B(t)u \quad (\text{III.9})$$

$$u(t) = -K(t)x \quad (\text{III.10})$$

$$\dot{x} = (A(t) - B(t)K(t))x \quad (\text{III.11})$$

Dans ce cas, K varie en fonction du temps, même dans le cas d'un système et d'un critère à temps invariant c'est-à-dire si les matrices A , B , Q et R ne dépendent pas du temps. En effet, la matrice $P(t)$ reste dépendant du temps dans le cas d'un critère temps fini [23].

III.2.2. La commande LQR avec un temps infini :

Quand t_f est fini, résoudre le problème de la commande conduit à résoudre l'équation DRE (l'équation différentielle de Riccati (III.6)) ce qu'il est très difficile à résoudre.

Dans le problème de LQR, le $t_f \rightarrow \infty$ et le système en boucle fermée sera asymptotiquement stabilisé.

La solution de l'équation de Riccati (matrice $P(t)$) tendra à une matrice constante, c-à-d : $\dot{P}(t) = 0$. Dans ce cas-ici, l'équation différentielle de Riccati (DRE) réduit à l'équation algébrique de Riccati prétendu ARE (l'équation algébrique de Riccati).

Puis, le problème de LQR peut être résolu en utilisant un retour linéaire d'état avec une matrice constante de gain ; c-à-d le problème est de trouver un retour d'état stabilisant, il s'agit donc de trouver la matrice de gain de retour d'état K .

L'équation d'état du système est :

$$\dot{x} = Ax + Bu \quad (\text{III.12})$$

Où : A et B sont des matrices constantes.

L'équation de Riccati (III.6) avec la condition limite suivante:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} P(t) = 0$$

Elle a une solution unique, de plus, lorsque la limite $t \rightarrow \infty$, la solution tend vers à une matrice constante positive symétrique, la quelle peut être trouvée par la solution algébrique de l'équation de Riccati (ARE) :

$$PA + A^T P - PB R^{-1} B^T P + Q = 0 \quad (\text{III.13})$$

Avec la philosophie du control optimale LQR:

$$u = -R^{-1} B^T P x = -K x \quad (\text{III.14})$$

$$K = R^{-1} B^T P \quad (\text{III.15})$$

Où K : est une matrice constante de gain de la commande optimale LQR.

III.2.3.Choix des matrices de pondération :

La synthèse des matrices de gain du contrôleur optimale repose directement sur les matrices de pondération Q et R . On peut trouver deux méthodes pour les choisir :

- La première méthode est la règle de Bryson qui suggère de choisir des matrices de pondération diagonales, dont les coefficients diagonaux sont égaux au carré de l'inverse de l'écart maximum souhaité sur la variable correspondante. Bryson indique également que cette règle ne fournit que des valeurs initiales, que l'on peut ensuite améliorer par simulations successives.
- Dans la deuxième méthode les matrices de pondération Q et R peuvent être choisies symétriques, diagonales. Au départ, on choisit généralement des pondérations égales aux matrices identités que l'on peut ensuite améliorer par simulation successives jusqu'à obtenir un correcteur satisfaisant.

Le choix des matrice de pondération favoris nettement l'économie d'énergie [26].

III.3. La commande LQR avec l'observateur de Luenberger :

Dans tout ce qui précède, nous sommes partis du principe que nous avons accès à toutes les composantes du vecteur d'état. Nous avons donc supposé que le système soit complètement instrumenté. En réalité, les systèmes physiques sont très peu instrumentés, les raisons sont [27]:

- le coût
- la difficulté d'accéder à certaines variables
- la fiabilité

→ L'encombrement, ...

Nous allons donc voir comment obtenir le vecteur d'état x ?

La solution : générer un vecteur \hat{x} qui est l'estimé de $x(t)$ et l'utiliser ensuite par la commande et pour ce but on utilise un observateur [28].

III.3.1. Propriété d'un observateur :

La logique de l'observation est simple. Il est idéal de vouloir construire un observateur tel que :

$$\hat{x}(t) = x(t) \quad \forall t$$

On peut espérer l'obtention de cette égalité en régime permanent. Ainsi si l'on définit l'écart vectoriel :

$$e_o(t) = x - \hat{x} \quad (\text{III.16})$$

La propriété fondamentale que doit satisfaire un observateur est de répondre à un modèle tel que :

$$\lim_{t \rightarrow \infty} e_o(t) = \mathbf{0}$$

III.3.2. Observateur de Luenberger :

On appelle observateur de Luenberger du système définis par les équations (III.1), un système qui est décrit par le schéma fonctionnel de la Figure (III.2).

La structure de l'observateur de Luenberger s'écrit comme suit [39] :

$$\begin{cases} \dot{\hat{x}} = f\hat{x} + ju + GY \\ \hat{Y} = C\hat{x} \end{cases} \quad (\text{III.17})$$

Avec $f \in R^{n \times n}$, $j \in R^{n \times p}$ et $G \in R^{n \times p}$

L'erreur d'estimation est défini par :

$$e_o(t) = x - \hat{x}$$

\hat{x} : est une bonne estimation lorsque $\lim_{t \rightarrow \infty} e_o(t) = \mathbf{0}$

$$e_o(\dot{t}) = \dot{x} - \dot{\hat{x}} = Ax + Bu - f\hat{x} - Ju - GY = f\hat{x} + (A - f - GC)x + (B - j)u \quad (\text{III.18})$$

Le but est d'obtenir $e(t) = 0$, lorsque $t \rightarrow \infty$ quelque soit u et x , donc on choisit :

$B = j$ et déterminer f et G de tel sorte que :

$$A - f - GC = 0$$

L'équation (III.18) devient donc :

$$\dot{e}_o(t) = fe(t) = (A - GC)e(t)$$

Donc pour que $e(t) = 0$, lorsque $t \rightarrow \infty$ il faut que les valeurs propres de f soient à partie réel négative.

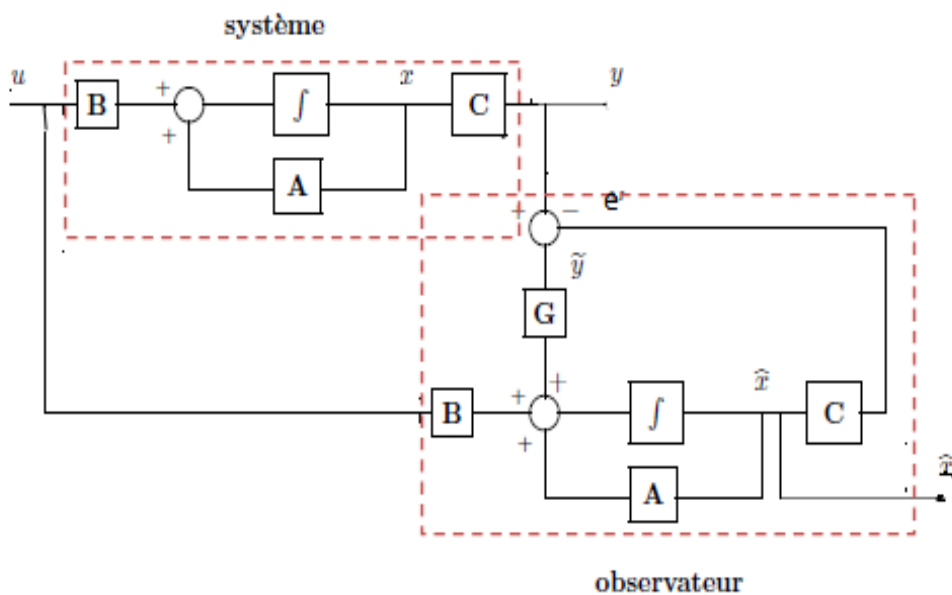


Figure (III.2) : Schéma général d'un observateur de Luenberger [27]

III.3.3. Equation d'état de la commande LQR avec observateur :

Hypothèses :

- Le système est contrôlable et observable
- Le vecteur d'état x est supposé n'est pas mesurable.

La commande LQR avec présence de l'observateur est définie comme suivant :

$$u = -k\hat{x} \tag{III.19}$$

Avec : k est le gain optimal de la commande.

On remplace (III.19) dans (III.1) on obtient :

$$\dot{x} = Ax - Bk\hat{x} \quad (\text{III.20})$$

On utilise l'équation (III.16) dans (III.20) on aura :

$$\dot{x} = (A - BK)x + BKe \quad (\text{III.21})$$

Alors le système en boucle fermée avec présence de l'observateur s'écrit comme suit :

$$\begin{bmatrix} \dot{x}(t) \\ \dot{e}_o(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A - BK & Bk \\ 0 & A - GC \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(t) \\ e_o(t) \end{bmatrix}$$

III.4. La commande PRLQR :

En Automatique, la synthèse d'une loi de commande se fait généralement sur un modèle nominal simplifié qui ne prend pas en compte toute la complexité du système ; des dynamiques sont négligées, les valeurs des paramètres du modèle sont considérées égales à leurs valeurs nominales.

Du fait de ces approximations, il est généralement nécessaire de recourir à une étape de validation a posteriori de la loi de commande. On parle d'analyse de la robustesse ; il s'agit en effet d'analyser la robustesse du comportement du système asservi face aux perturbations externes (variation des conditions de fonctionnement, comme la température) ou internes (variation des paramètres du système) [29].

On peut distinguer deux principales sources de perturbations susceptibles de déstabiliser un système asservi ou de diminuer ses performances : les variations de ses paramètres et les dynamiques négligées.

Considérant un système LTI (Linéaire Time Invariant) incertain dont le modèle nominal est donné par :

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + Bu \\ Y &= Cx + Du \end{aligned} \quad (\text{III.22})$$

Et le model perturbé décrit par :

$$\dot{X} = \tilde{A}x + \tilde{B}u \quad (\text{III.23})$$

$$Y = \tilde{C}x + \tilde{D}u$$

Où :

$x \in R^n$ $u \in R^m$ et $y \in R^p$ représentent respectivement l'état, la commande et la mesure du système.

Pour ce système la synthèse PRLQR permet d'obtenir un gain de retour d'état, robuste aux incertitudes paramétriques bornées. Ce retour d'état est défini par [31] :

$$u(t) = -K_c x(t) \quad (\text{III.24})$$

Avec :

$$K_c = \frac{1}{\rho'} B^T P \quad (\text{III.25})$$

P est la solution définie positive ($P = P^T > 0$), si elle existe, de l'équation de Riccati suivante :

$$PA + A^T P + (Q_{X0} + \gamma N^T N) - P \left(\frac{1}{\rho'} B B^T - \frac{1}{\gamma} M M^T \right) P = 0 \quad (\text{III.26})$$

Où :

Q_{X0} et ρ' sont respectivement les pénalisations sur l'état et la commande, choisies pour le système nominal, et γ une constante positive choisie a priori et suffisamment élevée pour que P existe.

Revenons sur l'expression de la fonction coût que la commande PRLQR cherche à minimiser :

$$j = \int_0^{\infty} \left(x^T Q_{X0} x + x^T \gamma N^T N x + x^T \frac{1}{\gamma} P M M^T P x + \rho u^T u \right) dt \quad (\text{III.27})$$

L'expliciter revient à la décomposition en quatre termes pénalisants :

Le premier d'entre eux $x^T Q_{X0} x$, est la pondération sur la performance choisie pour le système nominal.

Le second terme, $x^T \gamma N^T N x$, traduit l'énergie incertaine, c'est-à-dire l'énergie du système vue par les directions incertaines (les plus sensibles) de l'espace d'état.

Le terme $x^T \frac{1}{\gamma} P M M^T P x$ est en fait un terme, permettant de prendre en compte une perturbation pire cas dans la direction M définie par les paramètres incertains.

Enfin, $\rho u^T u$ est le terme de pondération sur la commande. Il permet de limiter l'amplitude de u, et selon la valeur de ρ' , la bande passante du système diffère.

Nous avons donc augmenté la garantie de robustesse de stabilité par rapport aux incertitudes modélisées et les garanties de robustesse de performance en ajoutant des termes au critère LQR. Les effets de ces termes sont de minimiser l'influence de l'énergie incertaine stockée par le système et de réaliser une barrière aux perturbations pire-cas agissant dans la direction des paramètres incertains M. Leur importance relative est pondérée par γ .

III.4.1. Le rôle de γ :

Le rôle de γ est de réaliser un compromis entre la minimisation de l'énergie incertaine ($\gamma N^T N$) et la désensibilisation aux perturbations pire-cas orientées dans la direction des paramètres incertains ($\frac{1}{\gamma} P M M^T P$). Si γ est très grand, l'énergie incertaine du système est fortement pondérée. Cette pondération suffit à rendre le système robuste aux incertitudes paramétriques, mais les performances sont dégradées dès que $\gamma N^T N \gg Q_{x0}$.

En revanche, quand γ tend vers 0, plus aucune perturbation n'est permise dans la direction M. Autrement dit, les paramètres incertains ne doivent pas influencer la réponse du système.

Pour un meilleur compromis, il est préférable de prendre une valeur intermédiaire de γ .

Le second rôle de γ est, de fait, d'influencer la bande passante du système en boucle fermée. Il est facile de vérifier que la commande PRLQR donne une bande passante plus grande que la commande LQR, puisqu'on désensibilise le système aux variations paramétriques. Par ailleurs, plus la bande passante n'est large et moins le système est robuste aux incertitudes hautes fréquences non modélisées. C'est la contrepartie « redoutable » de la bonne robustesse aux incertitudes paramétriques [31].

Les matrices M et N sont tirées à partir des matrices d'état B et C du modèle aéroélastique nominal respectivement, elles sont données par :

$$M = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} & b_{34} \\ b_{41} & b_{42} & b_{43} & b_{44} \end{bmatrix} \quad N = \begin{bmatrix} 0 & c_{12} & c_{13} & c_{14} \\ 0 & c_{22} & c_{23} & c_{24} \\ 0 & 0 & w_3 & 0 \\ 0 & w_4 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

En utilisant les paramètres mentionnées dans le Tableau (II.1) et on prend $V= 13\text{m/s}$ et après l'obtention des matrices d'état B et C , les matrices M et N de système s'écrivent comme suit :

$$M = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -0.0753 & -0.3024 & -0.0753 & 0.3024 \\ 0.3024 & 8.2595 & 0.3024 & -8.2595 \end{bmatrix}$$

$$N = \begin{bmatrix} 0 & 1.5305 & 0.1177 & 0.0263 \\ 0 & -0.0501 & -0.0039 & -0.0009 \\ 0 & 0 & 10.9720 & 0 \\ 0 & 1.7625 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Introduction:

Dans ce chapitre, nous allons appliquer différentes commandes pour notre système aéroélastique, et nous présentons notre résultat numérique et graphique de simulation en utilisant: MATLAB/SIMULINK® (voir Annexe F).

Les résultats obtenus sont étudiés en boucle fermée et comparés avec ceux qui ont été obtenus en boucle ouverte pour deux valeurs différentes de vitesse afin de voir l'effet de la commande sur notre système, et sa robustesse.

Le déplacement vertical (h), l'angle d'incidence (α), l'angle de déflexion de volet de bord de fuite (β) et l'angle de déflexion de volet de bord d'attaque (γ), sont observés et montrés par des graphes ; la vitesse de flottement en boucle fermée sera repérée pour chaque commande.

Ce chapitre se compose de trois parties :

- La première partie consiste à appliquer la commande LQR pour deux modèles, le premier est le modèle linéaire, et le deuxième est le modèle non linéaire. Pour chaque modèle le gain de la commande sera calculé pour deux pondérations différentes
- La deuxième partie consiste à appliquer la loi de la commande LQR avec observateur de Luenberger pour notre système en supposant que le vecteur d'état est inaccessible.
- La troisième partie consiste à appliquer la loi de la commande PRLQR pour un système avec des paramètres incertains, les paramètres concernés sont: le coefficient d'amortissement pour le mouvement vertical C_h , Le coefficient de rigidité structurel pour le mouvement de tangage K_α et la pression dynamique q .

IV.1.Simulation en boucle ouverte :

Dans cette section, on va étudier la stabilité du modèle de l'aile, en simulant le système en boucle ouverte tout en observant les valeurs propres de la matrice A pour savoir la stabilité du système, sachant que le modèle dépend de la vitesse d'écoulement, donc on va prendre deux valeurs différentes de la vitesse.

Pour une vitesse d'écoulement $V=13$ m/s, le modèle mathématique calculé est donné comme suit :

$$\begin{bmatrix} \dot{h} \\ \dot{\alpha} \\ \dot{h} \\ \dot{\alpha} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -214.1696 & -9.2941 & -2.8623 & -0.1670 \\ 860.0497 & -24.0620 & 8.6826 & -0.2106 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h \\ \alpha \\ \dot{h} \\ \dot{\alpha} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ -5.7551 & 0.4122 \\ 1.9681 & -4.8177 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \beta \\ \gamma \end{bmatrix} \quad (\text{IV.1})$$

Le système possède les valeurs propres λ , les coefficients d'amortissement ε , et les fréquences ω suivants:

λ	ε	ω (rad/s)
$-0.9829 \pm 12.2530i$	0.08	12.29
$-0.5536 \pm 9.3112i$	0.0594	9.32

Tableau (IV .1) : les caractéristiques du système en boucle ouverte, pour $V= 13$ m/s.

Les résultats de simulation obtenus en boucle ouverte avec les conditions initiales $[h \ \alpha \ \dot{h} \ \dot{\alpha}]^T = [0.01 \ 0.1 \ 0 \ 0]^T$ sont présentés sur la **Figure (IV.1)**:

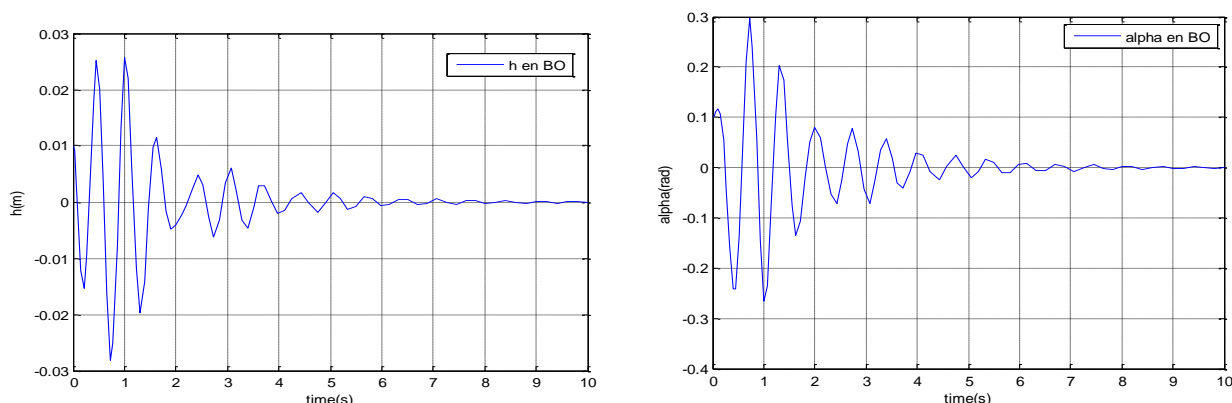


Figure (IV.1) : la réponse de système en boucle ouverte pour le déplacement vertical h et l'angle de tangage α à une vitesse $V=13$ m/s.

Pour une autre vitesse d'écoulement $V=14\text{m/s}$, le modèle mathématique calculé est donné comme suit :

$$\begin{bmatrix} \dot{h} \\ \dot{a} \\ \ddot{h} \\ \ddot{a} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -214.1696 & -10.9493 & -2.9236 & -0.1807 \\ 860.0497 & -23.2548 & 8.7125 & -0.2039 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h \\ a \\ \dot{h} \\ \dot{a} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ -6.6746 & 0.4780 \\ 2.2825 & -5.5874 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \beta \\ \gamma \end{bmatrix}$$

En boucle ouverte, ce procédé a les valeurs propres λ , les coefficients d'amortissement ε et les fréquences ω suivants :

λ	ε	ω (rad/s)
$-1.6403 \pm 11.0062i$	0.1474	11.1278
$0.0766 \pm 10.7826i$	-0.0071	10.78

Tableau (IV .2) : les caractéristiques du système en boucle ouverte, pour $V= 14 \text{ m/s}$.

La réponse de système est montrée dans la **Figure (IV.2) :**

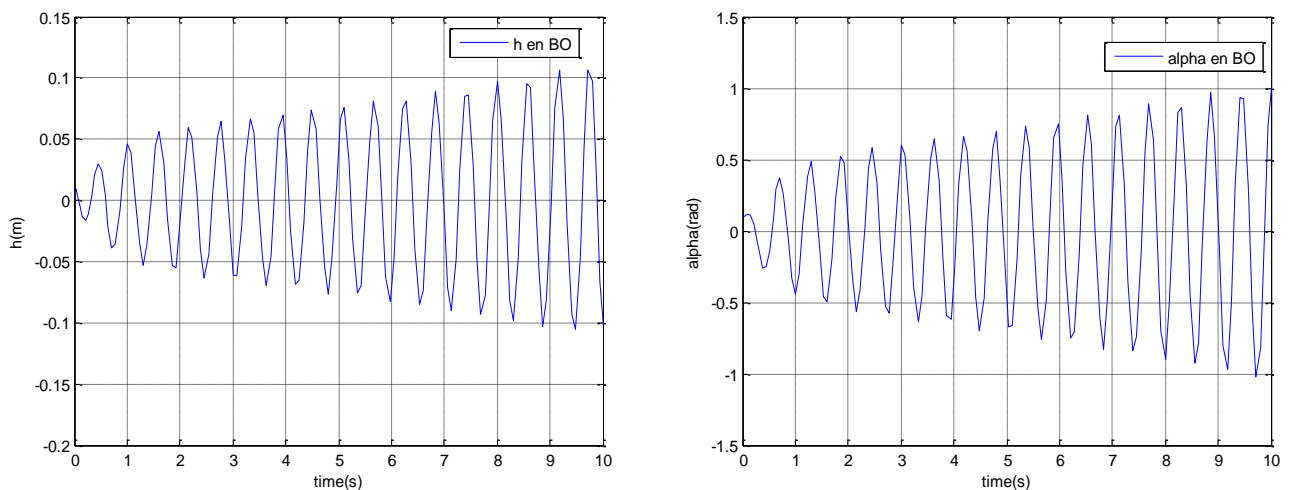


Figure (IV.2) : la réponse de système en boucle ouverte pour le déplacement vertical h , et l'angle de tangage α à une vitesse $V=14\text{m/s}$

II.1.2. Interprétation:

Les résultats de simulation en boucle ouverte montrent qu'à la vitesse 13m/s (**Figure (IV.1)**), le système possède des oscillations de faible amplitude qui convergent lentement vers le zéro (le système prend 5s pour les amortir), car le système possède des coefficients d'amortissement positifs ($\varepsilon_1 = 0.08, \varepsilon_2 = 0.0594$), ce qui lui permet d'amortir ces oscillations.

À la vitesse $V=14$ m /s, le modèle devient instable comme le montre la **Figure (IV.2)**, les valeurs propres de la matrice A montrent que le système possède un coefficient d'amortissement négatif ($\varepsilon_2 = -0.0071$) ce qui illustre le phénomène de flottement.

Donc il existe une vitesse de transition s'appelle la vitesse de flottement, qui conduit le système de la stabilité vers l'instabilité. Avec des simulations successives, cette vitesse est repérée à :

$$V_{\text{flottement en BO}} = 13.954\text{m/s.}$$

IV. 2. Simulation en boucle fermée pour le modèle linéaire :

Les résultats de simulation en boucle fermée en appliquant la commande LQR sont obtenus pour les cas suivants :

→ **1^{er} cas :** pour une vitesse $V_1=13$ m/s, et les deux pondérations $Q_1 = [1\ 0\ 0\ 0; 0\ 1\ 0\ 0; 0\ 0\ 0\ 0; 0\ 0\ 0\ 0]$, $R = I_{2 \times 2}$.

Le gain de la commande calculé est comme suit:

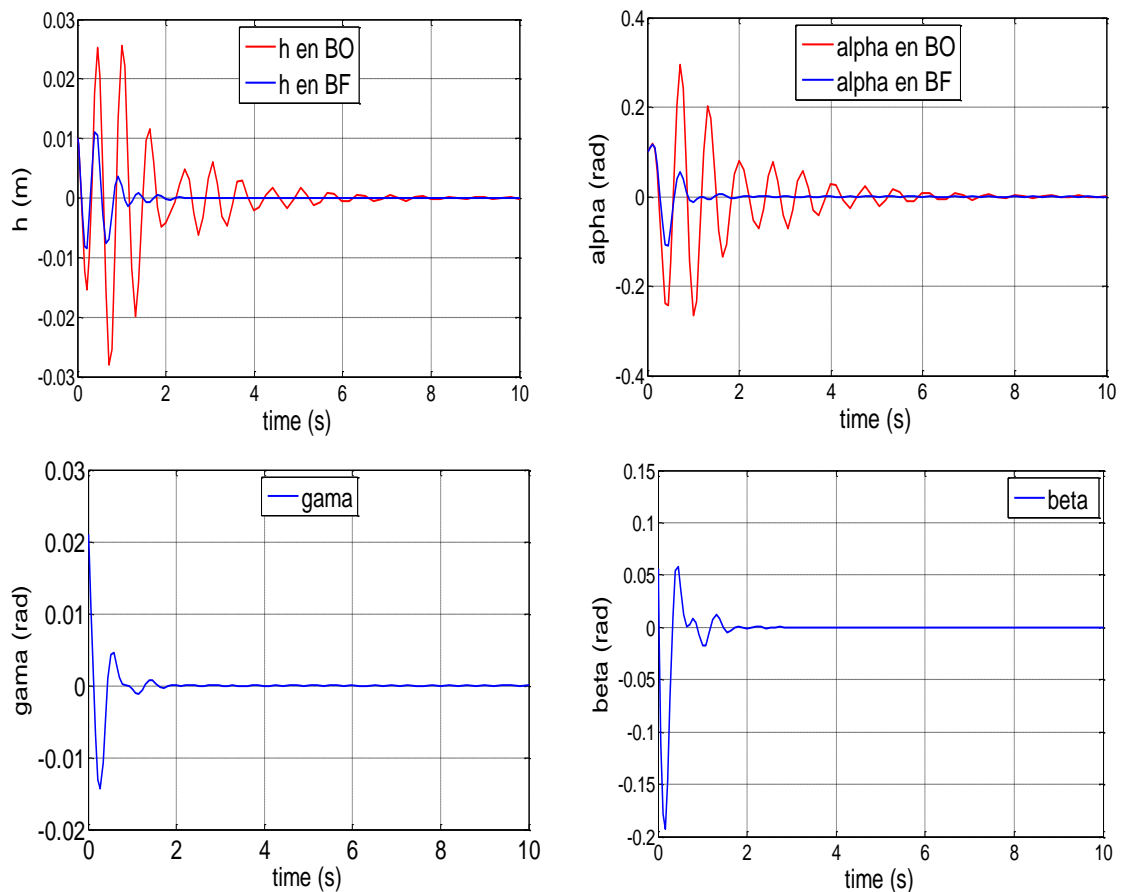
$$K = \begin{bmatrix} -5.8827 & 0.0290 & -1.1599 & -0.1670 \\ -0.9984 & -0.1100 & -0.0624 & -0.0167 \end{bmatrix}$$

Les valeurs propres, les coefficients d'amortissement et les fréquences correspondantes sont donnés comme suit :

λ	ε	ωr (rad/s)
$-2.1259 \pm 13.5037i$	0.1555	13.67
$-2.6113 \pm 8.2444i$	0.3020	8.64

Tableau (IV.3) : les caractéristiques du système en boucle fermée, pour 1^{er} cas

La réponse de système est montrée dans la **Figure (IV.3)** :



Figure(IV.3) : la réponse du système linéaire pour la commande LQR (1^{er} cas).

→ 2^{ème} cas, pour une $V_1=13$ m/s, et les pondérations $Q_2=I_{4 \times 4}$ et $R=I_{2 \times 2}$

Le gain de la commande calculé est :

$$K = \begin{bmatrix} -51.5082 & 1.8008 & -4.2177 & -0.8796 \\ -17.8803 & -0.4720 & -0.6053 & -0.5003 \end{bmatrix}$$

Les valeurs propres, les coefficients d'amortissement et les fréquences correspondantes sont donnés comme suit :

λ	ε	$\omega(\text{rad/s})$
$-7.5271 \pm 18.5695 i$	0.3757	20.03
$-3.9601 ; -8.7615$		

Tableau (IV.4) : les caractéristiques du système en boucle fermée, pour 2^{ème} cas

La réponse de système est montrée dans la **Figure (IV.4) :**

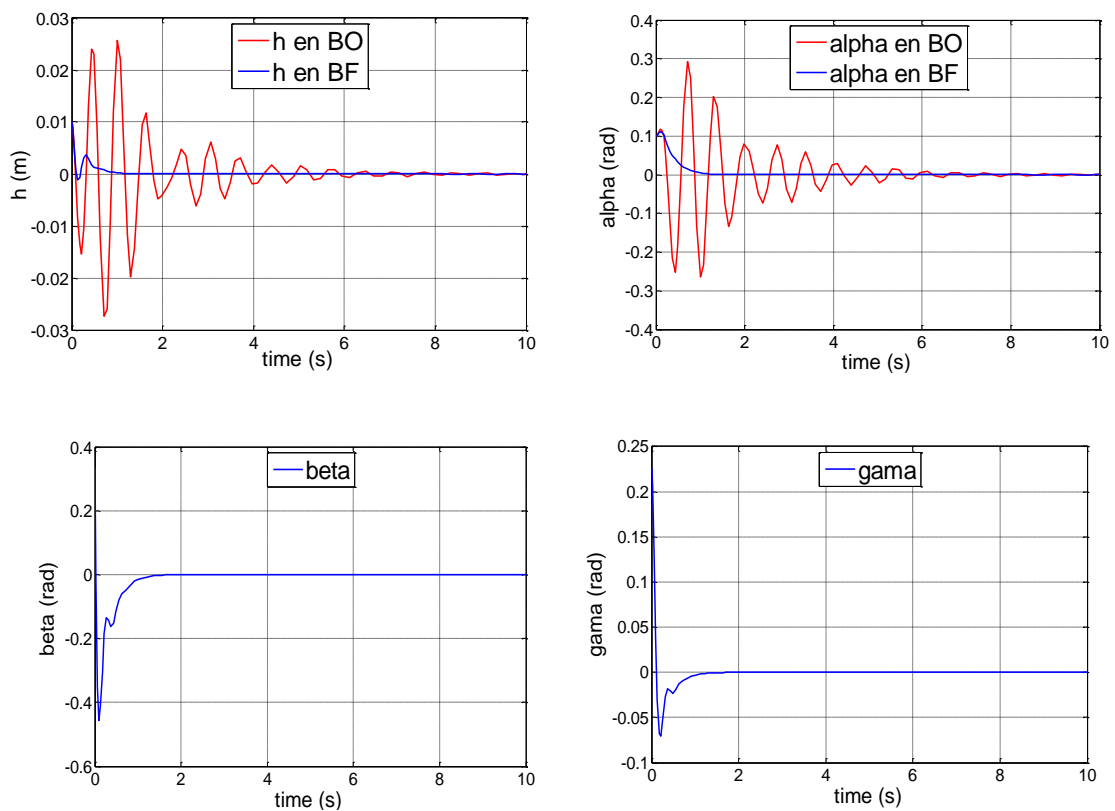


Figure (IV.4) : la réponse du système linéaire pour la commande LQR (2^{ème} cas).

→ 3^{ème} cas, $V_1=14$ m/s, $Q_1 = [1\ 0\ 0\ 0; 0\ 1\ 0\ 0; 0\ 0\ 0\ 0; 0\ 0\ 0\ 0]$ et $R= I_{2 \times 2}$: **Figure (IV.5)**

Le gain de la commande calculé est :

$$K = \begin{bmatrix} -5.8827 & 0.0290 & -1.1599 & -0.1670 \\ -0.9984 & -0.1100 & -0.0624 & -0.0167 \end{bmatrix}$$

Les valeurs propres, les coefficients d'amortissement et les fréquences correspondantes sont donnés comme suit :

λ	ε	ω (rad/s)
$-2.1619 \pm 12.8255 i$	0.1662	13
$-3.3974 \pm 9.1334 i$		

Tableau (IV .5) : les caractéristiques du système en boucle fermée, pour 3^{ème} cas

La réponse de système est montrée dans la **Figure (IV.5) :**

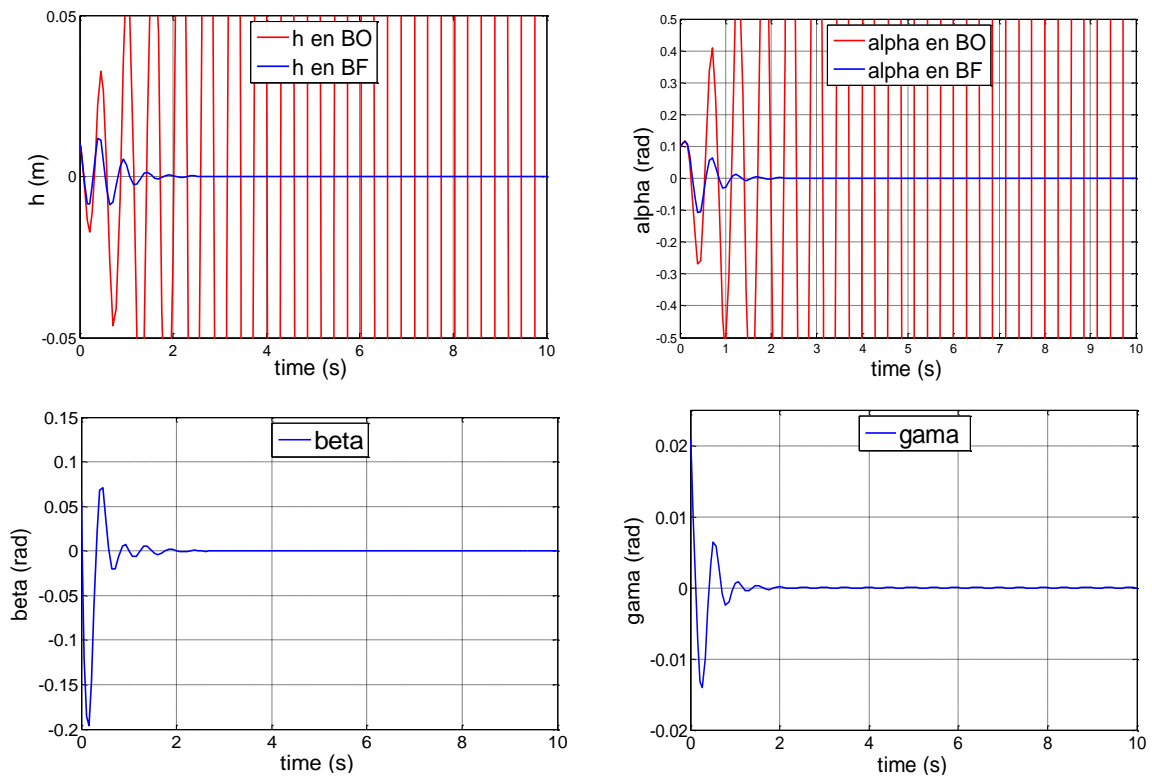


Figure (IV.5) : la réponse du système linéaire pour la commande LQR (3^{ème} cas).

→ 4^{ème} cas, $V_1=14$ m/s, $Q_2=R = I_{4 \times 4}$. et $R = I_{2 \times 2}$. **Figure (IV.6)**

$$K = \begin{bmatrix} -51.5082 & 1.8008 & -4.2177 & -0.8796 \\ -17.8803 & -0.4720 & -0.6053 & -0.5003 \end{bmatrix}$$

Les valeurs propres, les coefficients d'amortissement et les fréquences correspondantes sont donnés comme suit :

λ	ε	ω (rad/s)
$-9.2474 \pm 8.0238 i$ -3.2237 ; -12.1690	0.7553	12.24

Tableau (IV .6) : les caractéristiques du système en boucle fermée, pour 4^{ème} cas

La réponse de système est montrée dans la **Figure (IV.6)** :

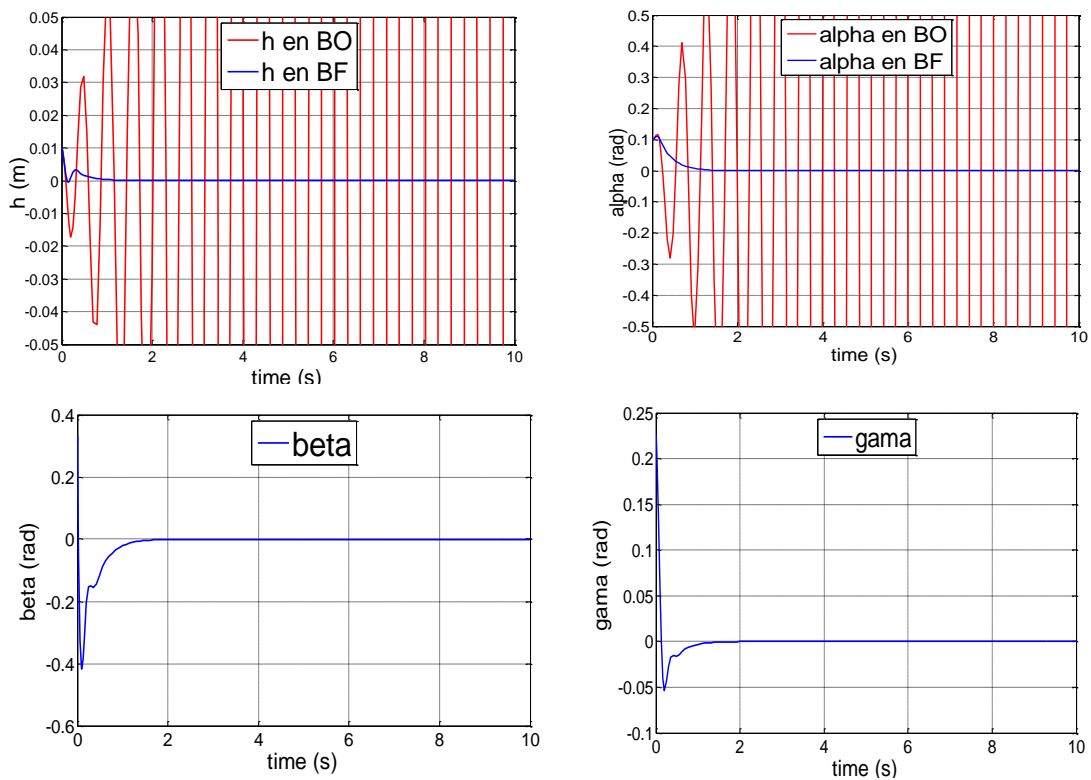


Figure (IV.6) : la réponse du système linéaire pour la commande LQR (4^{ème} cas).

IV.2.1. Interprétation:

Les résultats de simulation obtenues en boucle fermée présentés sur les **Figures (IV.3), (IV.4), (IV.5), (IV.6)** montrent que :

→ **Pour $V_1=13$ m/s :**

Le système en boucle ouverte est stable, le mouvement de tangage et de déplacement verticale du profile convergent lentement avec des oscillations vers la valeur 'zéro'.

En appliquant la commande LQR, on a une convergence plus rapide de 2 secondes avec des amplitudes moins importantes, notamment si on augmente les valeurs de pondération comme dans le 2^{ème} cas avec Q_2 , on constate aussi une amélioration dans le coefficient d'amortissement ε de 0.08 à 0.15 avec Q_1 , et à 0.3 avec Q_2 , ce qui rend le système bien amortie. Les angles de déflexions des surfaces de commande sont acceptables.

→ **Pour $V_2=14$ m/s :**

Le système en boucle ouverte est instable, d'où la nécessité de faire appel à un contrôleur pour stabiliser le système.

En appliquant la commande LQR, on obtient un système stable avec une amélioration de coefficient d'amortissement ε (d'une valeur négative de -0.06 qui traduit la perte d'amortissement à une valeur positive de 0.16 avec la pondération Q_1 et à 0.75 avec la pondération Q_2), et la convergence des états observés se faites avec des déflexion des surfaces de commande acceptables.

La commande LQR sert à contrôler le mouvement de tangage 'alpha' et le déplacement vertical 'h', avec des petits oscillations dans le 1^{er} cas de pondération Q_1 qui sont indésirables, pour cela la 2^{ème} pondération Q_2 est préférable, car elle enlève ses oscillations avec fort amortissement, et un temps de réponse de 1 seconde et une erreur statique nulle, mais avec un gain important.

IV.2.2. Le gain en vitesse :

On sait que la stabilité du système dépend fortement de la pression dynamique (vitesse d'écoulement). Pour calculer le gain en vitesse, on applique la commande calculé à la vitesse $V = 13.954 \text{ m/s}$ sur des systèmes à des vitesses supérieures ($V_1 = 24 \text{ m/s}$, $V_2 = 25 \text{ m/s}$).

Les résultats de simulation sont présentés sur la **Figure (IV.7)**.

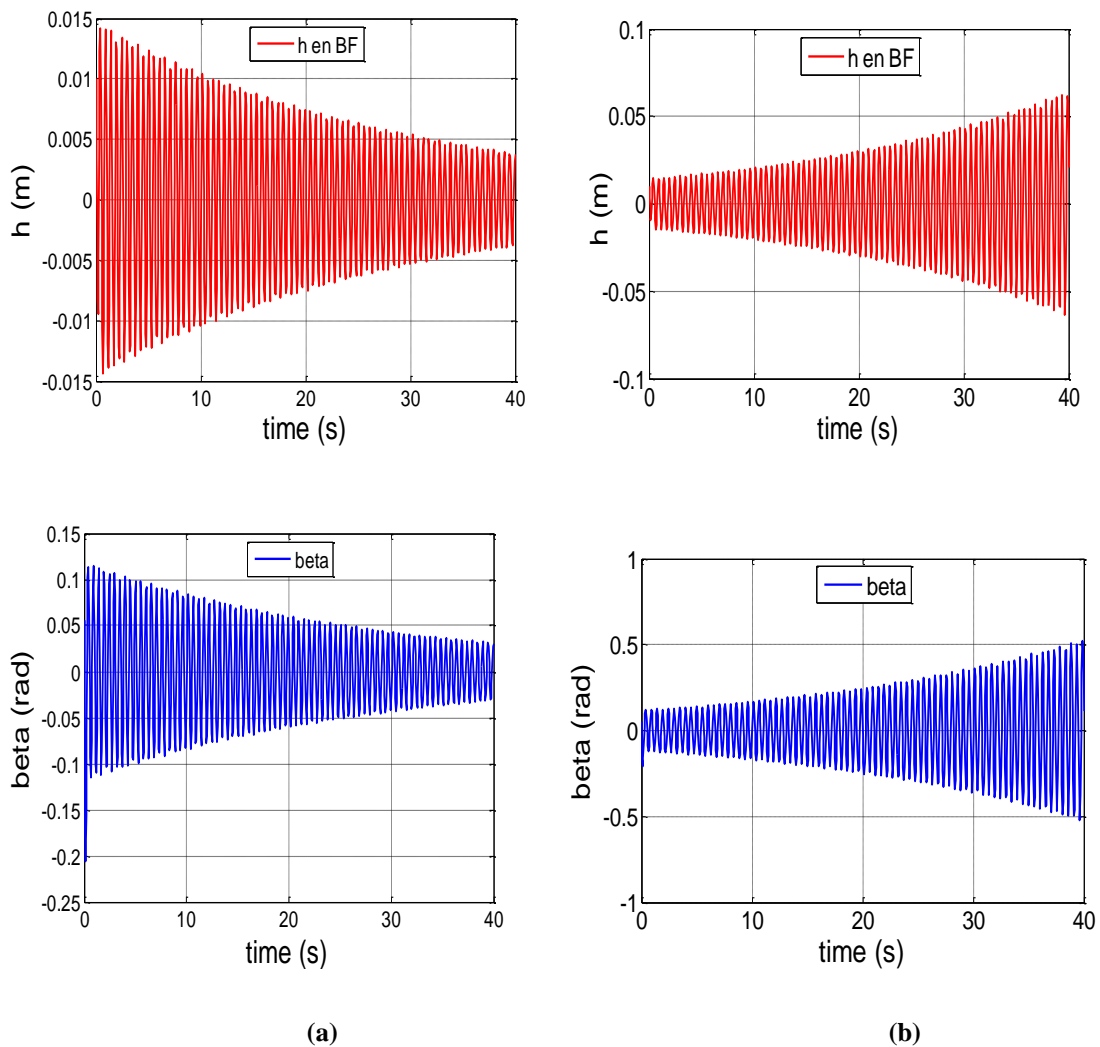


Figure (IV.7) : la réponse du système linéaire pour la commande LQR à $V_1' = 24 \text{ m/s}$ (a), à $V_2' = 25 \text{ m/s}$ (b)

IV.2.2.1. Interprétation:

A partir de la **Figure (IV.7)**, la réponse du système n'est plus convergente à une vitesse $V_2' = 25$ m/s comme dans le cas à la vitesse $V_1' = 24$ m/s, et l'angle de déflexion de volet de bord de fuite ' β ' ne sont pas acceptables, donc ce changement indique l'existence d'une vitesse critique, avec la simulation successive, cette vitesse est repérée à :

$$V_{\text{flottement en BF}} = 24.42 \text{ m/s}$$

On a retardé la vitesse de flottement à 24.42 m/s, donc on a un gain en vitesse égale à : **10.47 m/s** (de 13.95 m/s jusqu'à 24.42 m/s).

A partir des résultats précédents, on peut dire que la commande LQR conçue nous conduirons a des résultats satisfaisants en terme de gain en vitesse, la rapidité d'amortir les oscillations, notamment avec l'utilisation des matrices de pondération adéquates. Ces résultats sont obtenus avec un modèle dont ses paramètres structurels sont supposés linéaires, cependant des non linéarités structurelles et aérodynamiques peuvent exister, donc il est très important de tester la robustesse de cette commande vis-à-vis ces non linéarités.

IV.3. simulation pour le modèle non linéaire :

Dans cette section, on va étudier la robustesse de la commande LQR vis-à-vis la non linéarité, pour cela on prend la variable non linéaire K_α :

$$K_\alpha = 12.77 + 53.47 \alpha + 1003 \alpha^2 \text{ Nm/rad} \quad \text{Pour obtenir le modèle non linéaire.}$$

En utilisant le même gain de la commande calculé pour $V=13.954$ m/s, et on observe l'évolution du mouvement de tangage et le déplacement vertical, ainsi que la déflexion des surfaces de commande β et γ , les résultats de simulation sont montrés sur les **Figure (IV.8)** **(IV.9)**.

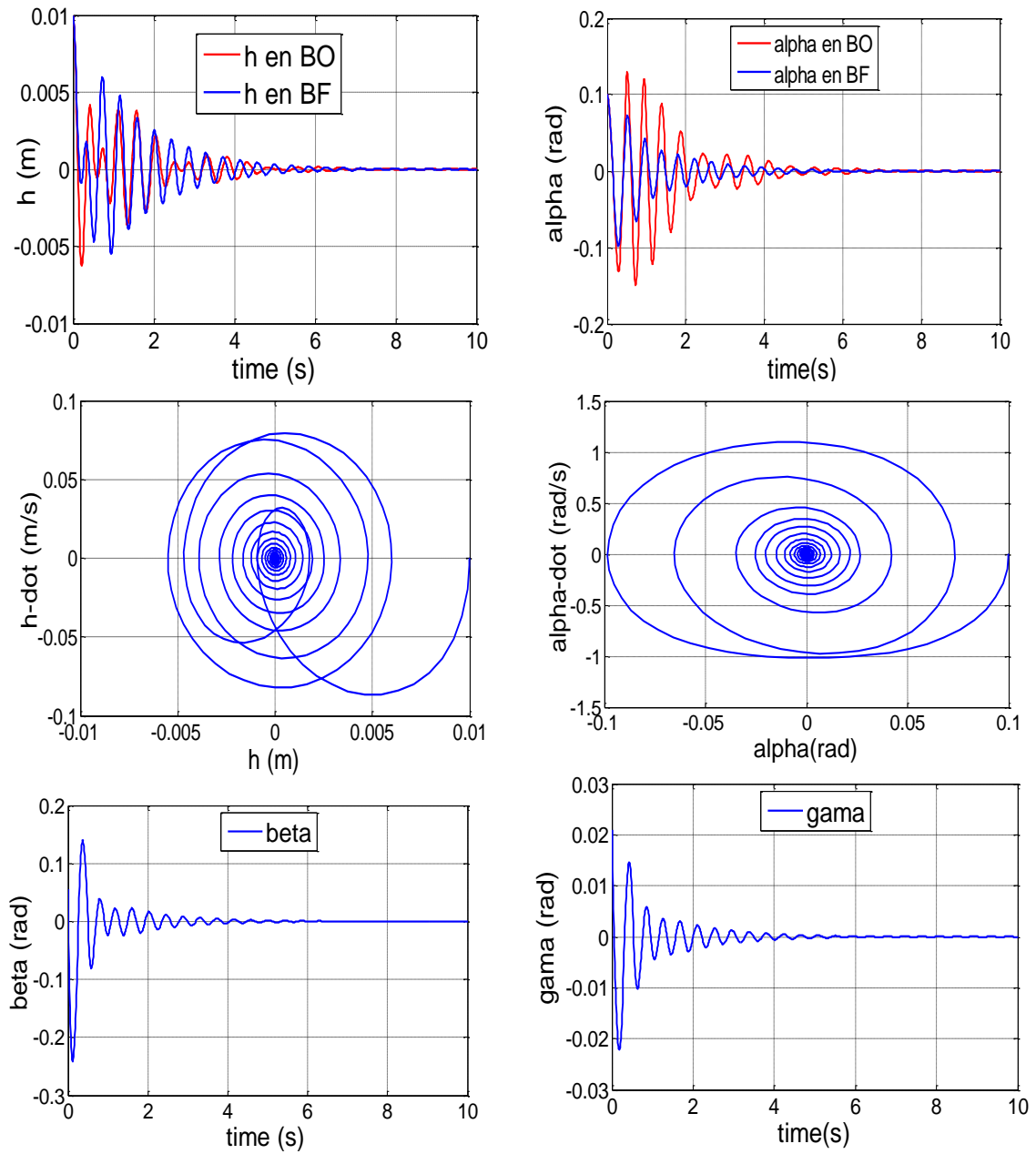


Figure (IV.8) : simulation de la commande LQR pour le modèle non linéaire à $V_1 = 10 \text{ m/s}$.

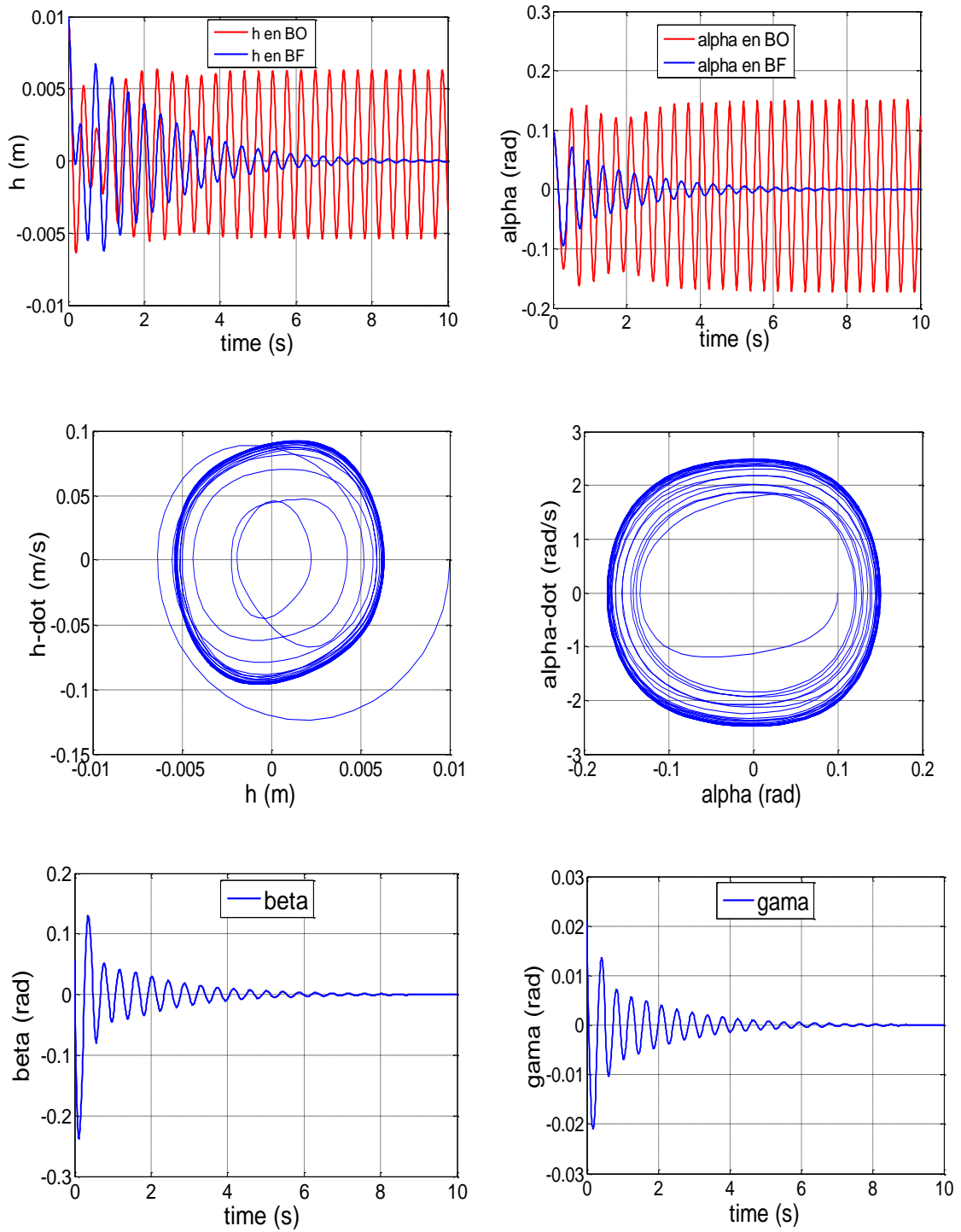


Figure (IV.9) : simulation de la commande LQR pour le modèle non linéaire pour $V_2 = 11m/s$.

On constate que le système converge à $V_1 = 10 \text{ m/s}$ et diverge à $V_2 = 11 \text{ m/s}$, donc la vitesse de flottement du modèle non linéaire compris entre ces deux vitesses et avec des simulations successives, on a trouvé :

$$V_{\text{flottement en BO}} = 10.65 \text{ m/s}$$

IV.3.1. Interprétation :

Dans le cas d'un modèle linéaire, on a trouvé une vitesse de flottement égale à 13.954 m/s, et dans le cas d'un modèle non linéaire, on constate que l'effet de la non-linéarité considéré dans le coefficient de rigidité K_α a réduit la vitesse de flottement de 3.30 m/s par rapport à celle de modèle calculé précédemment (changement de la dynamique du système).

À une vitesse supérieure à la vitesse de flottement pour un système en boucle ouverte, on remarque que les oscillations convergent vers une valeur constante (à 0.06 m pour h et 0.15 radian pour α), ce qui illustre le phénomène de LCO dû à l'existence de non linéarité structurelle. Le diagramme de phase dans la **Figure (IV.9)** montre ce phénomène.

Après l'application de la commande LQR calculé pour le modèle linéaire sur le modèle non linéaire à la vitesse de flottement, on remarque que les états de système convergent vers le zéro, et le phénomène LCO est supprimé rapidement.

IV.3.2. Le gain en vitesse :

Dans cette section on va étudier la robustesse de la commande vis-à-vis le changement de la vitesse d'écoulement ; On prend un gain de la commande calculé à la vitesse de flottement du modèle nominal ($V=13.954$), pour l'utiliser comme un gain statique en boucle fermée.

Afin d'avoir le gain en vitesse il suffit d'observer une seule variable d'état (on prend le déplacement vertical ' h ') pour repérer la vitesse de flottement en boucle fermée de système non linéaire, les résultats obtenus sont montrés dans la **Figure (IV.10)**.

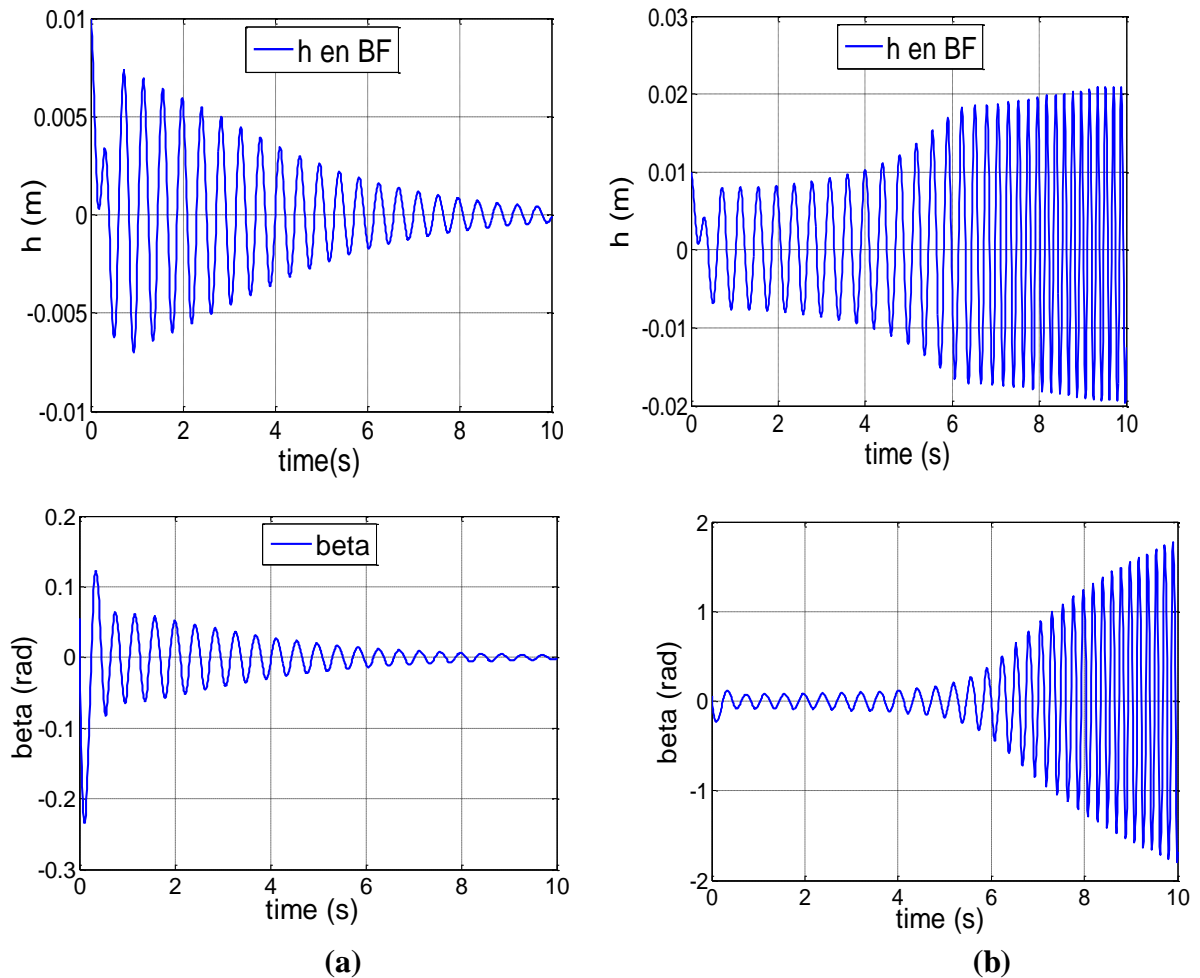


Figure (IV.10) : simulation de la commande LQR pour le modèle non linéaire à

$$V_1' = 12 \text{ m/s (a) et à } V_2 = 13 \text{ m/s (b)}$$

IV.3.2.1. Interprétation :

D'après la **Figure (IV.10)**, le système n'est plus convergent à $V_2' = 13 \text{ m/s}$, et la déflexion des surfaces de commande (graphes b) ne sont pas acceptables, contrairement dans le cas à $V_1' = 12 \text{ m/s}$ ou le système est convergent et la déflexion de surfaces de commande est acceptable (graphes a), donc la vitesse de flottement compris entre ces deux vitesses, avec la simulation successive on a trouvé :

$$V_{\text{flottement en BF}} = 12.74 \text{ m/s}$$

Donc le gain en vitesse égale à **2.09 m/s** (de 10.65 m/s jusqu'à 12.74 m/s)

Ces résultats montrent que la commande LQR est moins robuste sur des systèmes où il existe des non linéarité ce qui justifié par un gain en vitesse faible.

IV.4.simulation de la commande LQR avec l'observateur de Luenberger :

On suppose dans cette section que le vecteur d'état de notre système n'est pas globalement mesurable et pour appliquer la commande LQR à ce système on conçoit un observateur de Luenberger afin d'estimer le vecteur d'état, et avant de passer à cette étape on doit vérifier une propriété très importante qu'est l'observabilité de système.

À l'aide de la fonction 'obsv' du MATLAB, on peut vérifier que le système s'il est observable.

$\text{rank}[\text{obsv}(A,C)] = 4 = n$, alors le système aéroélastique est observable.

La simulation de la commande avec l'observateur est faite avec les conditions initiales suivantes :

- Pour le système aéroélastique on prend comme conditions initiales :

$$[h \ \alpha \ \dot{h} \ \dot{\alpha}]^T = [0.01 \ 0.1 \ 0 \ 0]^T$$

- pour l'observateur :

$$[\hat{h} \ \hat{\alpha} \ \hat{\dot{h}} \ \hat{\dot{\alpha}}]^T = [0.005 \ 0.05 \ 0 \ 0]^T$$

Le gain de la commande est calculé pour $R=I_{2 \times 2}$, $Q = [1 \ 0 \ 0 \ 0; 0 \ 1 \ 0 \ 0; 0 \ 0 \ 0 \ 0; 0 \ 0 \ 0 \ 0]$ à une vitesse de 13.954 m/s :

$$K = \begin{bmatrix} -5.8827 & 0.0290 & -1.1599 & -0.1670 \\ -0.9984 & -0.1100 & -0.0624 & -0.0167 \end{bmatrix}$$

On calcule le gain de l'observateur on le trouve comme suit :

$$G = \begin{bmatrix} 0.1978 & -0.8086 \\ -0.8086 & 9.5525 \\ -0.1535 & -12.9324 \\ 5.0479 & 45.4524 \end{bmatrix}$$

Les résultats de simulation sont montrés par la figure (IV.11) :

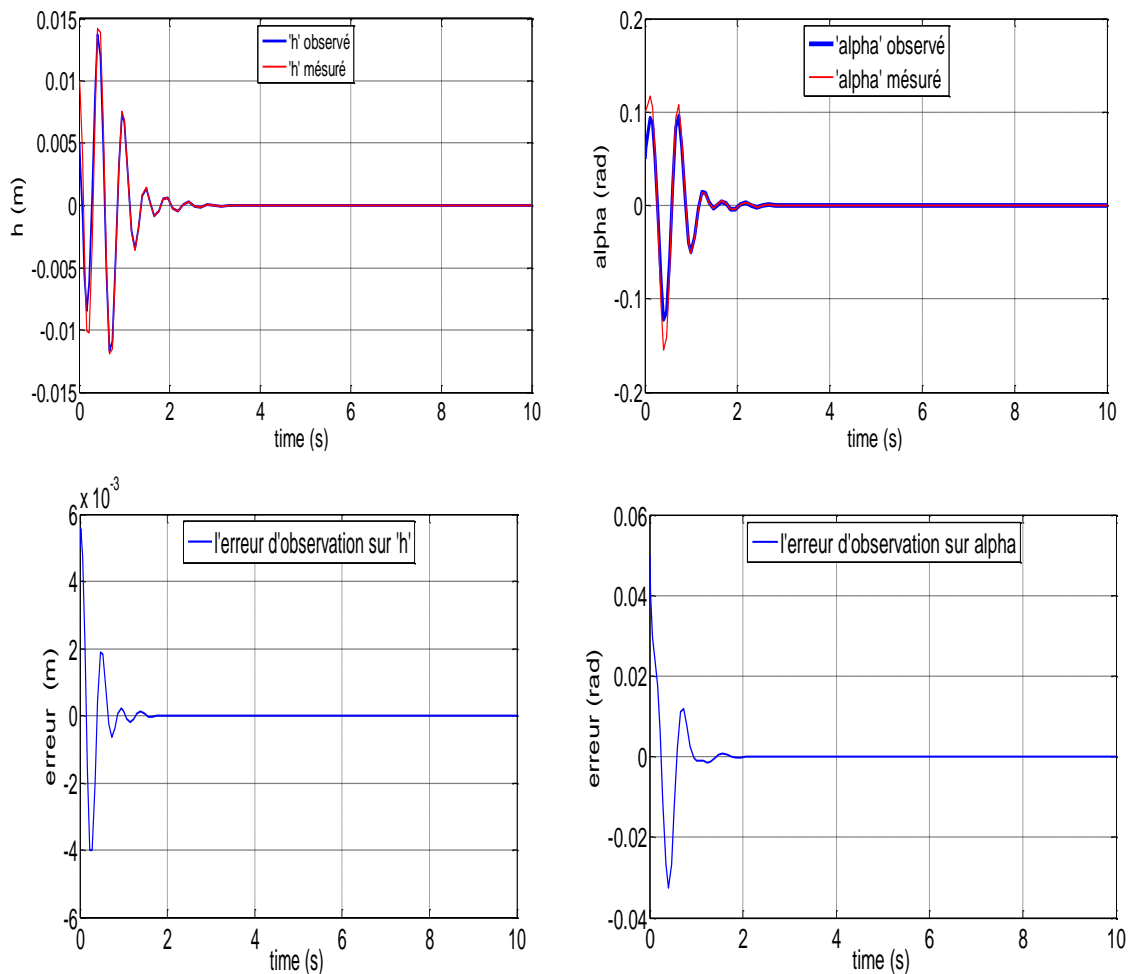


Figure (IV. 11) : simulation de la commande LQR avec l'observateur de Luenberger pour le modèle linéaire à $V=14\text{m/s}$.

IV.4.1. Interprétation :

A partir de la **Figure (IV.11)**, les résultats de simulation montrent que les variables états ' h ' et ' α ' mesurés et celles observées varient presque d'une manière identique, avec une erreur d'observation de l'ordre de 10^{-2} et 10^{-3} pour ' α ' et ' h ' respectivement, cette erreur diminue et converge vers le zéro; l'observateur possède de bons performances de point de vue précision.

On peut remarquer aussi que le choix des matrices de pondération Q et R influe sur le placement des pôles de l'observateur et de système donc sur la rapidité de l'observateur par rapport à la commande.

IV.4.2. Le gain en vitesse :

On cherche la vitesse de flottement en boucle fermée, pour cela on suit la même philosophie, on prend deux vitesses $V_1 = 20 \text{ m/s}$ et $V_2 = 20.5 \text{ m/s}$, en surveillant la variable d'état h , les résultats de simulation sont montrés par la **Figure (IV.12)**

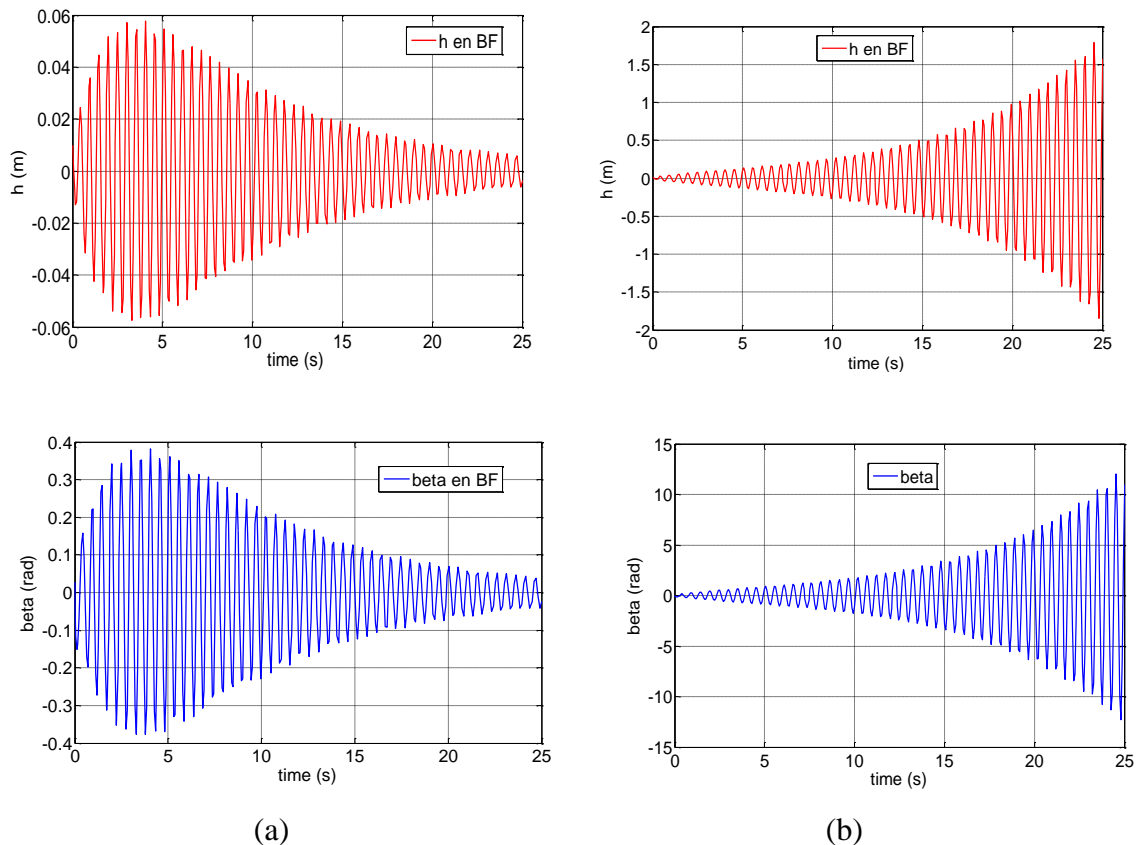


Figure (IV.12) : réponse de système linéaire pour la commande LQR avec l'observateur de Luenberger à $V_1 = 20 \text{ m/s}$ (a), et $V_2 = 20.5 \text{ m/s}$ (b)

IV.4.2.1. Interprétation :

D'après la **Figure (IV.12)**, le système n'est plus convergent à $V_2 = 20.5 \text{ m/s}$, et la déflexion des surfaces de commande est acceptable (graphes (b)), contrairement dans le cas à $V_1 = 20 \text{ m/s}$ ou le système est convergent et la déflexion de surfaces de commande n'est pas acceptable (graphes (a)), donc la vitesse de flottement comprise entre ces deux vitesses, avec la simulation successive on a trouvé :

$$V_{\text{flottement}} = 20.24 \text{ m/s}$$

Donc le gain en vitesse égale à **6.28 m/s** (de 13.954 m/s jusqu'à 20.24 m/s)

Ces résultats montrent que la commande LQR avec observateur de Luenberger est moins robuste par rapport à l'utilisation de la commande sans observateur.

IV.5. Simulation de la commande PRLQR :

Dans cette section on applique la commande PRLQR pour un modèle incertain ; les paramètres affectés par les incertitudes sont le coefficient d'amortissement C_h , de rigidité K_α et la pression dynamique q , les résultats de simulation sont montrés sur des graphes.

On effectue une simulation du système en boucle ouverte à deux vitesses différentes ($V_1 = 13 \text{ m/s}$ et $V_2 = 14 \text{ m/s}$), pour déterminer la vitesse de flottement en boucle ouverte de nouveau modèle incertain, il suffit de surveiller un seul paramètre d'état (le déplacement verticale 'h'), les résultats de simulation sont montrés par la **figure (IV.13)** :

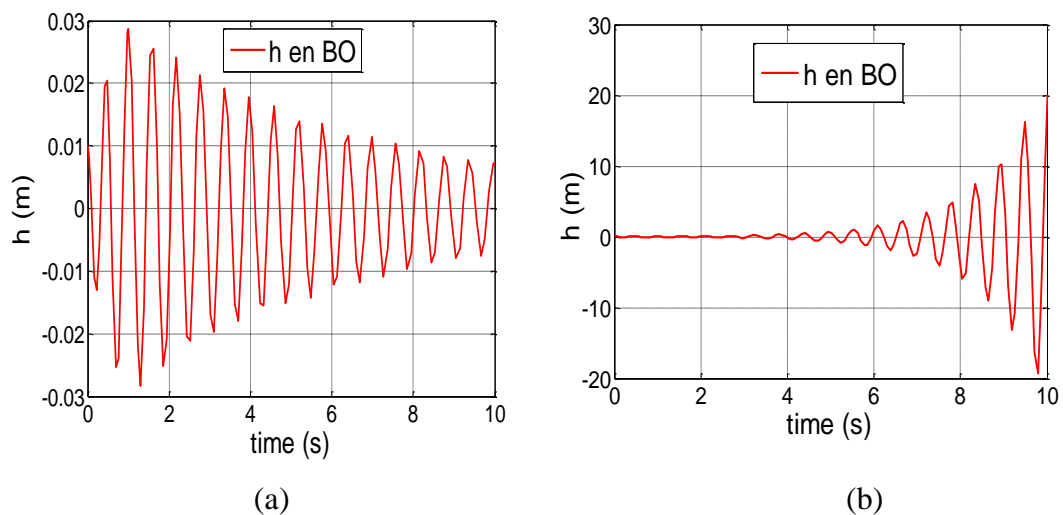


Figure (IV.13) : réponse du système incertain en boucle ouverte pour $V_1 = 13 \text{ m/s}$ (a) et pour $V_2 = 14 \text{ m/s}$ (b)

IV.5.1. Interprétation :

D'après la **Figure (IV.13)**, le système converge à $V_1 = 13 \text{ m/s}$, et il diverge à $V_2 = 14 \text{ m/s}$, donc la vitesse de flottement comprise entre ces deux vitesses, avec la simulation successive, on a trouvé :

$$V_{\text{flottement en BO}} = 13.2 \text{ m/s}$$

Dans le cas d'un modèle nominal, on a trouvé une vitesse de flottement égale à 13.954 m/s, et dans le cas d'un modèle incertain, la vitesse de flottement a dégradée jusqu'à 13.2 m/s, car on a tenu en compte des incertitudes paramétriques.

IV.5.2. simulation en boucle fermée :

En appliquant la commande PRLQR sur le système incertain, Les valeurs des gains sont regroupées dans le Tableau (IV.1) avec ρ fixe, $\rho = 1$ et γ' variable pour une vitesse $V=13.954$ m/s :

γ'	P	K
1	$P > 0$	$\begin{bmatrix} -1.2847 & 14.2879 & -9.8813 & 3.4869 \\ 53.1291 & -3.8587 & 1.5171 & -0.3105 \end{bmatrix}$
2	$P > 0$	$\begin{bmatrix} 952.5617 & -1.8890 & -1.8291 & 11.3575 \\ 860.6070 & -7.3890 & 12.7022 & 8.9587 \end{bmatrix}$
5	$P > 0$	$\begin{bmatrix} -181.8843 & 3.2762 & -25.7001 & -1.2415 \\ -139.2052 & -2.9137 & 0.0747 & -2.1250 \end{bmatrix}$
10	$P > 0$	$\begin{bmatrix} -140.9596 & 2.5496 & -35.1255 & -0.7416 \\ -109.1462 & -4.6788 & 1.2465 & -1.8962 \end{bmatrix}$
100	$P > 0$	$\begin{bmatrix} -124.3299 & 0.5390 & -109.3558 & -0.3960 \\ -113.2084 & -19.2800 & 6.5263 & -2.8489 \end{bmatrix}$

Tableau (IV.7) : les valeurs des gains de la commande PRLQR pour $V=13.95$ m/s, $\rho = 1$ et γ' variable

Remarque:

On note qu'une valeur importante de gain conduit à des meilleures réponses de système en termes d'amortissement des oscillations, mais avec une grande énergie délivrée par la commande, pour résoudre ce problème, il est préférable de choisir à partir du Tableau (IV.7) un gain intermédiaire qui permet de combiner ces deux objectifs.

Pour des valeurs de gain intermédiaire, on choisit $\rho = 1$ et $\gamma = 5$, le gain correspondant est :

$$K = \begin{bmatrix} -181.8843 & 3.2762 & -25.7001 & -1.2415 \\ -139.2052 & -2.9137 & 0.0747 & -2.1250 \end{bmatrix}$$

Les résultats obtenus sont montrés sur la figure (IV.14)

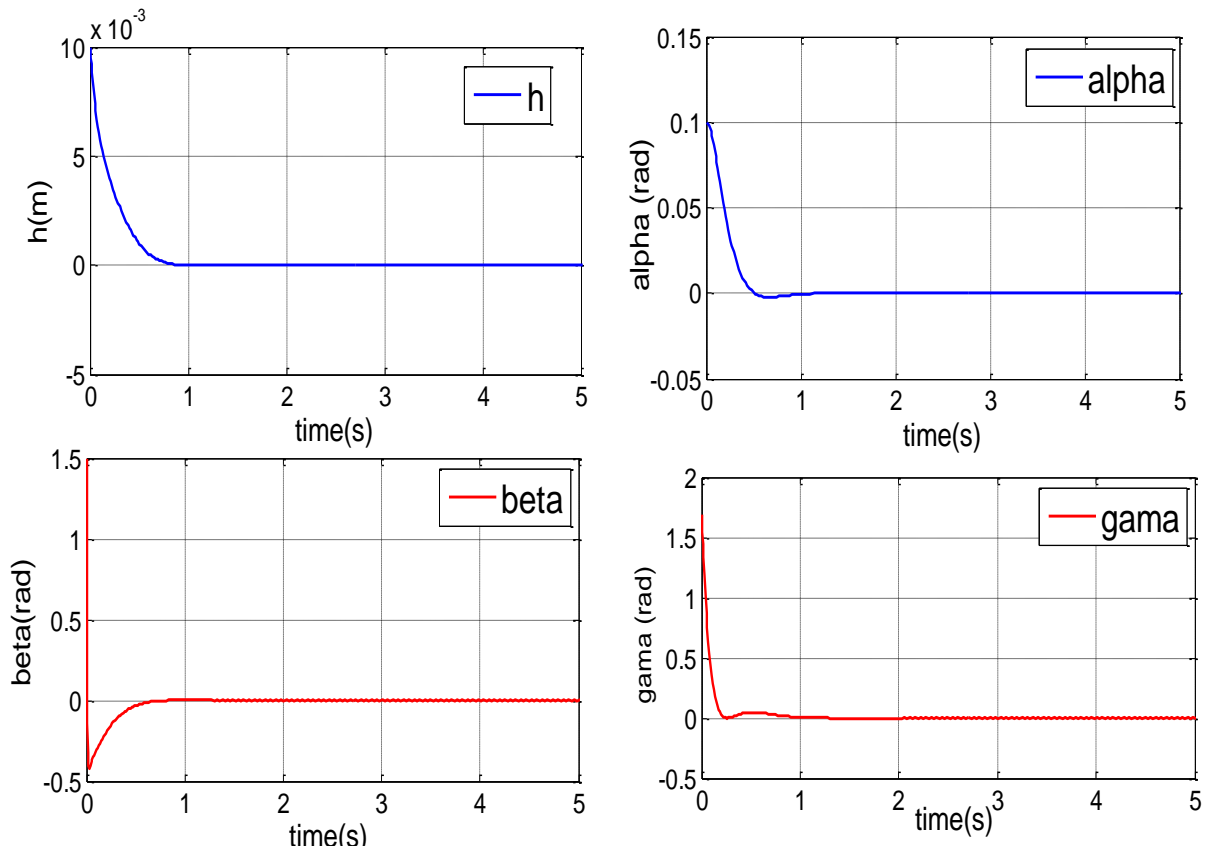


Figure (IV. 14) : réponse de système incertain pour la commande PRLQR à $V=14$ m/s.

IV.5.2.1. Interprétation :

En utilisant la commande PRLQR, on obtient un système bien amorti dont la convergence se fait sans oscillations avec un temps de réponse de 1 s.

On remarque que les angles de la déflexion des volets β et γ ne sont pas acceptables, car la valeur initiale de $\beta = 1.5 \text{ rad}$ et $\gamma = 1.6 \text{ rad}$, pour résoudre ce problème, on ajoute des saturateurs pour rendre cette déflexion acceptable.

IV.5.3. Simulation de la commande PRLQR avec saturateur :

Après l'utilisation des saturateurs, la réponse du système incertain est montrée sur la figure (IV.15) :

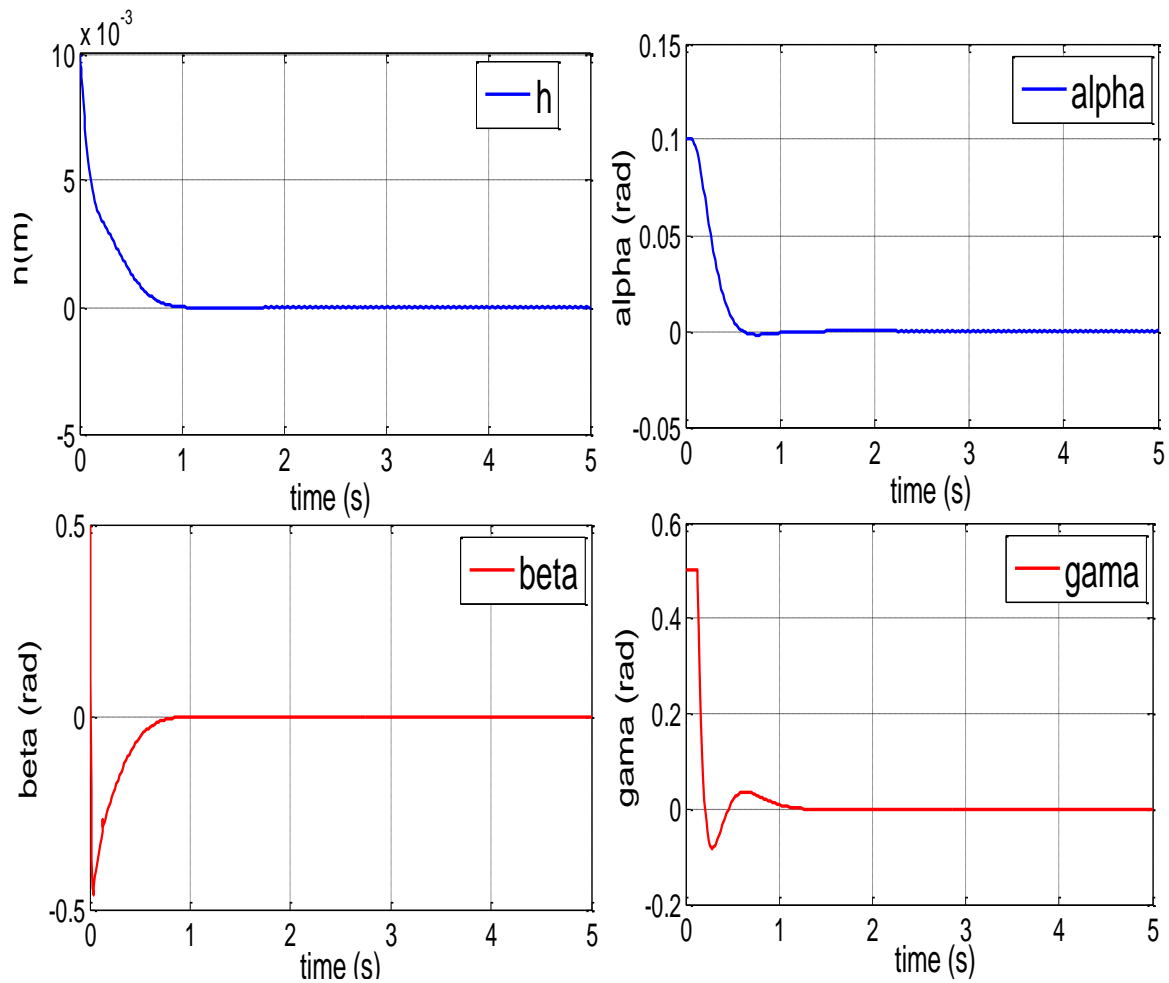


Figure (IV.15) : Simulation de la commande PRLQR pour $V=14$ m/s avec saturateur.

IV.5.3.1. Interprétation :

La **Figure (IV.15)** ci-dessus illustre la réponse du système en utilisant des saturateurs, on constate que la déflexion des surfaces de commande a été réglée dans la limite autorisée, cette modification a sans effet important sur la réponse de système.

IV.5.4. Le gain en vitesse:

On prend un gain statique à une vitesse de 13.954 m/s, et on observe la réponse du système en changeant la vitesse d'écoulement, avec la simulation successive on a trouvé :

$$V_{\text{flottement en BF}} = 69 \text{ m/s.}$$

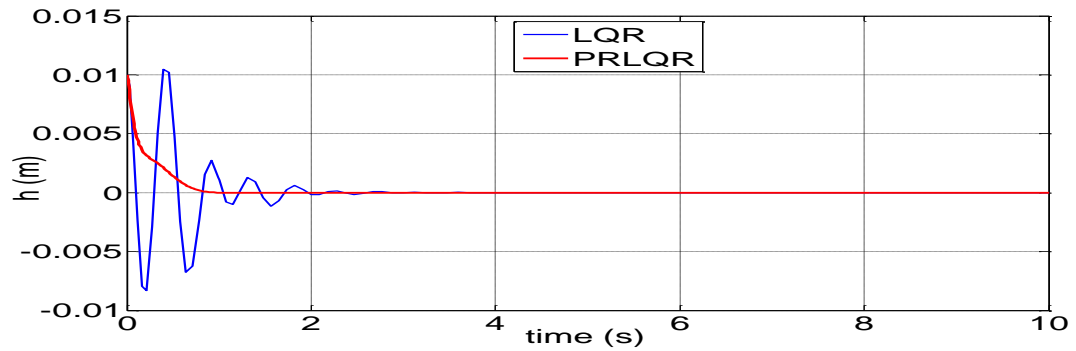
Donc on a une marge considérable, de **55 m/s**, qui prouve la robustesse de la commande.

A partir des résultats obtenus, on peut dire que la commande PRLQR permet d'avoir des résultats très satisfaisants en termes de la robustesse vis-à-vis le changement de la vitesse d'écoulement, et les incertitudes paramétriques, mais ces résultats ne sont plus pratiques, et pour remédier ce problème, des saturateurs peuvent être employés.

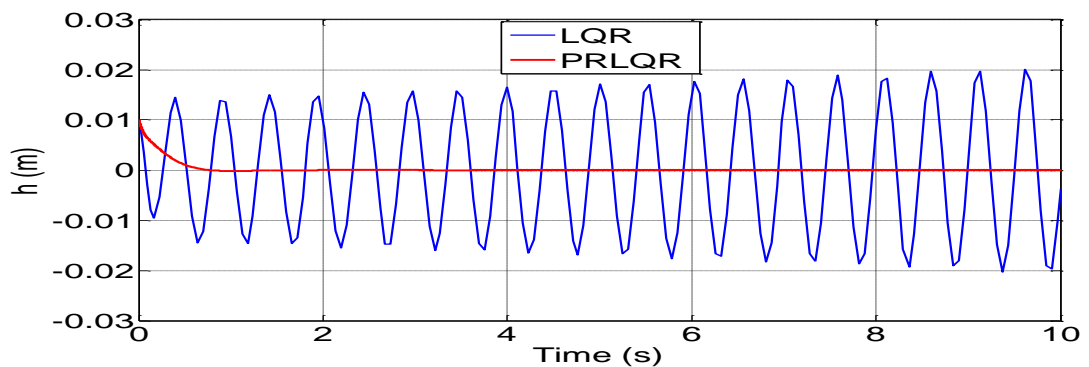
IV.6. Synthèse des résultats de simulation pour la commande LQR et PRLQR:

Afin de comparer les deux commandes utilisées LQR et PRLQR de point de vue amélioration de performance de système, on prend une vitesse inférieure à la vitesse de flottement du modèle nominal égale à 12m/s et une autre vitesse supérieure égale à 25 m/s.

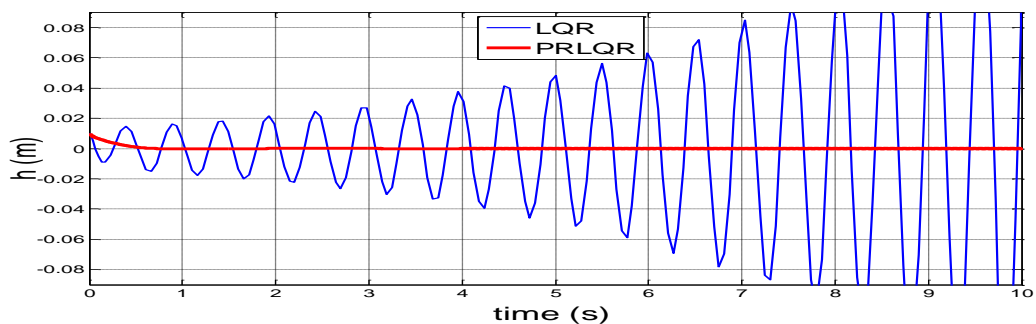
Les résultats de simulation sont montrés dans la figure (IV.16)



(a)



(b)



(c)

Figure (IV.16) : la réponse de système en utilisant la commande LQR et PRLQR, pour $V=12$ m/s (a), pour $V=25$ m/s (b), pour $V=30$ m/s (c).

IV.6.1. Interprétation :

On constate que les deux commandes arrivent à stabiliser le système pour la vitesse de 12 m/s, avec une amélioration notable pour la deuxième commande en terme de la rapidité de convergence, tandis que le système diverge pour la première commande dans les deux autres vitesses (25 m/s et 30 m/s) et converge rapidement pour la deuxième commande, ce qui justifie la robustesse de cette dernière.

Conclusion :

Les résultats numériques de simulation sont résumés dans le tableau suivant :

La commande utilisée	La vitesse de flottement en boucle ouverte (m/s)	La vitesse de flottement en boucle fermée (m/s)	Le gain en vitesse (m/s)
LQR pour le modèle linéaire	13.954	24.42	10.47
LQR pour le modèle non linéaire	10.65	12.74	2.09
LQR avec observateur de Luenberger	13.954	20.24	6.28
PRLQR pour le modèle incertain	13.2	69	55

Tableau (IV.8) : résumé des résultats de simulation obtenus.

Les valeurs numériques présentées dans le tableau ci-dessus résultent des remarques suivantes :

- Un gain en vitesse important dans l'application de la commande LQR sur le modèle linéaire qui prouve la robustesse de la commande vis-à-vis le changement de la vitesse d'écoulement ou la variation des paramètres internes de système, ceci n'est plus vrai dans le deuxième cas (l'application de la commande LQR sur un modèle non linéaire), ce qui justifié par un gain en vitesse faible, et un gain moins important résultant de la commande LQR avec l'observateur de Luenberger confirme que cette dernière est moins robuste.
- Pour la commande PRLQR, un gain en vitesse important résultant de l'application de la commande PRLQR sur le modèle incertain montre la robustesse de la commande vis-à-vis le changement de la vitesse de l'écoulement ainsi que les incertitudes paramétriques qui affectent le système.

Les valeurs différentes de la vitesse de flottement pour les différents systèmes (nominal linéaire, nominal non linéaire, et modèle perturbé) indiquent que la vitesse de flottement est liée aux paramètres internes de système.

Conclusion générale et perspectives:

L'objectif des travaux présentés dans ce mémoire est basé sur la modélisation mathématique d'une section d'aile aéroélastique et l'application d'une commande robuste pour la suppression des vibrations instables et le phénomène de flottement.

Pour le système physique, une partie essentielle de notre étude est le développement mathématique du modèle dynamique basé sur l'application de la méthode de Lagrange.

Ce modèle nous permet de simuler son comportement dynamique de point de vue mouvement de tangage et déplacement vertical, la simulation nous a permis aussi de détecter le phénomène de flottement qui correspond à une vitesse critique appelée vitesse de flottement.

Afin d'aboutir à un modèle proche du réel, on a utilisé deux techniques, la première consiste à injecter dans le modèle nominal un paramètre non linéaire dont le coefficient de rigidité structurelle pour le mouvement de tangage, et la seconde est basée sur l'insertion des incertitudes linéaires dans les paramètres de système concernant la pression dynamique, le coefficient d'amortissement, et de rigidité ; Cela nous a conduit à prévoir des vitesses de flottement différentes de celle du modèle nominal.

Afin de faire face au phénomène de flottement, on a opté d'utiliser deux types de commande, il s'agit de la commande optimale linéaire quadratique (LQR) et la commande paramétrique robuste linéaire quadratique (PRLQR).

L'application de la commande LQR nous a conduit à éloigner d'une manière significative la vitesse de flottement pour le modèle nominal, cette amélioration va être dégradée d'une manière significative pour le modèle non linéaire et pour le cas où le vecteur d'état est non mesurable.

Par la suite nous avons adapté le modèle incertain à la commande PRLQR afin d'améliorer d'une manière très significative les performances de ce dernier, et avoir une marge très importante en terme de vitesse de flottement.

Perspectives :

Pour les futures études dans le domaine de l'aéroservoélasticité, on propose pour la phase de modélisation d'introduire d'autre facteur de non linéarité concernant la structure ou bien l'aérodynamique, et étaler l'étude sur une aile complète, ou bien un avion flexible.

De point de vue commande, on propose d'utiliser d'autres types de commandes adaptées, pour améliorer les performances, tel que la commande H_2 et H_∞ .

Références bibliographique

- [1] **FLORIAN BLANC**, Méthodes numériques pour l'aéroélasticité des surfaces de contrôle des avions, thèse du doctorat de l'université de Toulouse, 16 décembre 2009.
- [2] **RAYMONDE BISPLINGHOFF HOLT ASHLEY** and **ROBERT L.HALFMAN** aeroelasticity, Dover edition, 1996.
- [3] **BENJAMIN FRANÇOIS**, Couplage fluide/structure par une approche modale, rapport de stage de fin d'études, novembre 2009.
- [4] **JAN R. WRIGHT, JONATHAN E. COOPER**, Introduction to Aircraft Aeroelasticity and Loads, AIAA education series Aerospace series, 2007.
- [5] **ALPER AKMEŞE**, aeroservoelastic analysis and robust controller synthesis for flutter suppression of air vehicle control actuation systems, THÈSE de graduation des sciences naturelle appliqué, juin 2006.
- [6] **G. DIMITRIADIS**, Aeroelasticity and Experimental Aerodynamics, Université de Liège, Lecture 1.
- [7] **DAIYUTING, WU ZHIGANG & YANG CHAO**, Identification and robust limit-cycle-oscillation analysis of uncertain aeroelastic system, school of aeronautic Science and Engineering, Nanjing University of Aeronautics and Astronautics, 2011.
- [8] **YING TENG**, Modeling and simulation of aeroservoelastic control with multiple control surfaces using μ - method, Phd, California University, 2005.
- [9] **MAHI AMEL**, aéroélasticité, cours structure, institut d'aéronautique et étude spatial, université Blida, 2013/2014.
- [10] **Pascal HEMON**, comportements aéroélastique de structures flexibles en écoulement transverse, mémoire d'habilitation à diriger des recherches, 19 mars 2013.
- [11] **Y.H.Zhao**, Flutter suppression of a high aspect-ratio wing with multiple control surfaces, institute of Vibration Engineering Research, Nanjing University of Aeronautics and Astronautics, 2009.

- [12] **ALEXANDER DOIN**, analyse des systèmes aéroélastiques bouclés en configuration de rétroaction application au phénomène de battement, département génie électrique école polytechnique, Montréal, 2001.
- [13] **BARIEFD.A.F ,FELT,L.R**, Aeroelasticity a merge of technologies , society of flight test engineers 7th Annual Symposium, 1976.
- [14] **COSMAS PANDIT PAGWIWOKO**, vibrations aéroélastique des surfaces portantes, phd, Ecole centrale de LYON, 1990-1991.
- [15] **F. ROTELLA**, Commande des systèmes linéaires à plusieurs entrées, Ecole Nationale d'Ingénieurs de Tarbes ,2003.
- [16] **DEWEY H. HODGES, G.ALVIN PIERCE**, Introduction to structural dynamics and aeroelasticity, Cambridge aerospace series, 2002.
- [17] **THOMAS WOODROW SUKUT**, Nonlinear aeroelastic analysis of UAVs: Deterministic and stochastic Approaches, 2d Lt USAF , RICE University HOUSTON, TEXAS, April 2012.
- [18] **Z. WANG, A. BEHAL, P. MARZOCCA**, Adaptive and Robust Aeroelastic Control of Nonlinear Lifting Surfaces with Single/Multiple Control Surfaces, Department of Electrical Engineering and Computer Science, University of Central Florida, 2010.
- [19] **GEORGE .PLATANITIS, THOMAS W. STRGANAC**, Control of a Nonlinear Wing Section Using Leading and Trailing Edge Surfaces, Texas A&M University, January–February 2004.
- [20] **OLIVIER BACHELIER**, Représentations d'état linéaires des systèmes mono-variables, Cours d'Automatique, 2ème année ESIP, spécialité AGE, 18 mars 2008.
- [21] **Mr. KHEBBACHE Hicham**, Tolérance aux défauts via la méthode backstepping des systèmes non linéaires, phd, Université FERHAT ABBAS de Setif, 2012.
- [22] **Edouard Laroche**, Robust control, Université de STRASBOURG, 2011-2012
- [23] **EDOUARD. LAROCHE**, cours de commande optimale ENSPS ,Université de STRASBOURG, 2009-2010.

- [24] **Joao. Hespanha**, Lecture notes LQR / LQG controller design, February 27, 2005.
- [25] **D. Alazard**, régulation LQ/ LQG Notes de cours, SUPAERO.
- [26] **M^{elle} BOUSSALEM Chahira**, Analyse et correction des Systèmes linéaires continus ou échantillonnés à l'aide des variables d'état, université MOLOUD MAMMERI, mémoire de magister, université MOLOUD MAMMERI TIEI-OUZOU, 2012.
- [27] **GONZALO CABODEVILA**, Analyse et correction des systèmes linéaires continus ou échantillonnés à l'aide des variables d'état, 2010.
- [28] **HACINE BENCHOUBENE**, Support cours automatique, institut d'aéronautique et des études spatiales, université Saad Dahleb Blida, 2013/2014.
- [29] **EDOUARD LAROCHE**, Commande robuste analyse de la robustesse des systèmes asservis, Université de Strasbourg, 2008-2009.
- [30] **PIERRE APKARIAN**, Eléments de la théorie de la commande robuste, Hypertext PDF document, 1993.
- [31] **ANDRIANARISON MAHERIZO VALINAINA**, commande robuste des systèmes linéaires par les approches PRLQG/PRLQR, mémoire de fin d'études en vue de l'obtention du diplôme d'études approfondies, Université d'ANTANANARIVO, 2008-2009.
- [32] **Yves Granjon**, Automatique systèmes linéaires non linéaire à temps continu, à temps discret, DUNOD.
- [33] **Olivier BACHELIER**, Cours d'Automatique : Représentation d'état linéaire des systèmes monovariables, 19 octobre 2013.
- [34] **D. Arzelier**, notes de cours : Représentation et analyse des systèmes linéaires, 2010
- [35] **Ph. Mullhaupt**, introduction à l'analyse et à la commande des systèmes non linéaires, Lausanne, Juin 2007
- [36] **DAVID SENECHAL**. mécanique II phq 310, Département de physique Faculté des sciences Université de Sherbrooke ,1^{er} décembre 2013.
- [37] **Luc Jaulin**, Commande par espace d'état, ENSTA-Bretagne, 6 janvier 2012.

[38] **Mr.TAREK BENMILOUD**, Commande du moteur asynchrone avec compensation des effets des variables paramétriques, thèse présentée comme exigence partielle à la maîtrise en génie.

[39] **Dilmi.S, Bouzouia.B**, Modeling and control of flexible wing with trailing and leading edge control surfaces, Fourth European Modelling Symposium on Computer Modelling and Simulation , Italia 2010.

[40] **Dilmi.S, Bouzouia.B**, Dynamic and control of flexible wing with two control surfaces, International journal of simulation systems science and technology, vol 11 No.6, pp 1-8 ISSN 1473-8031.

Introduction :

Quand nous voulons utiliser les lois de Newton pour développer les équations du mouvement d'une particule ou d'un système, il faut faire attention à inclure toutes les forces du système. La Forme de Lagrange des équations du mouvement que nous tirons ici a l'avantage que nous pouvons ignorer toutes les forces qui ne font aucun travail (par exemple, les forces de frottement, les forces des connexions inextensibles)[36].

Dans le cas des systèmes conservateurs (par exemple, des systèmes pour lesquels l'énergie totale reste constante), la méthode de Lagrange nous donne une procédure automatique pour obtenir les équations du mouvement, il suffit seulement de calculer l'énergie cinétique et potentielle du système.

A.1. Degrés de liberté :

Avant de procéder à développer les équations de Lagrange, nous devons caractériser nos Systèmes dynamiques d'une manière systématique. La propriété la plus importante pour notre but actuel est le nombre de coordonnées indépendantes que nous devons connaître pour spécifier complètement la position ou la configuration de notre système. On dit qu'un système a n degrés de liberté si exactement les n coordonnées servent à définir complètement sa configuration [36].

A.2. Les coordonnées généralisées :

Nous pensons généralement aux coordonnées longueurs ou angles. Cependant, tout ensemble de paramètres qui nous permet de spécifier uniquement la configuration du système peut servir comme coordonné. Lorsque nous généralisons le sens de l'expression de cette manière, nous appelons ces nouvelles quantités "les coordonnées généralisées."

La forme générale des équations de Lagrange pour n'importe quel système (conservateur ou non conservateur) est comme suite :

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_i} = Q_i$$

Avec T est l'énergie cinétique de système et Q_i : Représentant la composante des forces extérieures qui travaillent selon de degré de liberté q_i .

A.3. Les équations de Lagrange pour les systèmes conservateurs :

Si un système est conservateur, le travail effectué par les forces peut être calculé à partir de l'énergie potentielle U . Nous définissons le changement de l'énergie potentielle pendant un petit déplacement comme le négatif du travail effectué par les forces du système pendant le déplacement [36].

Puisque $Q_1\delta q_1 + Q_2\delta q_2$ est le travail effectué par les forces, nous avons

$$\delta P = -Q_1\delta q_1 - Q_2\delta q_2$$

Nous avons souligné que q_1 et q_2 sont indépendants et, par conséquent, peuvent être variés arbitrairement.

Si $\delta q_1 = 0$ alors on a $\delta P = -Q_2\delta q_2$ donc :

$$Q_2 = -\frac{\partial P}{\partial q_2}$$

De même, on peut voir que

$$Q_1 = -\frac{\partial P}{\partial q_1}$$

On remplace Q_2 et Q_1 par leur valeur dans l'équation on obtient :

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_1} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_1} + \frac{\partial U}{\partial q_1} = 0$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_2} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_2} + \frac{\partial U}{\partial q_2} = 0$$

A.4 Les équations de Lagrange pour les systèmes non conservateurs :

Pour les systèmes non conservateurs on définit le Lagrangien L comme suivant :

$$L = T - U$$

Où :

- T : est l'énergie cinétique du système en mouvement
- U : est l'énergie potentielle de système

Ce Lagrangien L vérifie pour chacune des coordonnées généralisées q_j :

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} + \frac{\partial d}{\partial q_j} - \frac{\partial L}{\partial q_j} = Q_j$$

d : représente la fonction de dissipation.

Q_j : Représentant la composante des forces extérieures qui travaillent selon de degré de liberté q_j .

Et pouvant s'obtenir en dérivant le travail virtuel W des forces extérieures :

$$W = \sum_j Q_j U_j \quad \text{Soit} \quad Q_j = \frac{\partial w}{\partial u_j}$$

Avec U_j désignant le champ de déplacement [36].

Introduction :

En automatique, une représentation d'état permet de modéliser un système dynamique sous forme matricielle en utilisant des variables d'état. On se place alors dans un espace d'état. Cette représentation, qui peut être linéaire ou non-linéaire, doit rendre compte de l'état du système à n'importe quel instant futur si l'on possède les valeurs initiales. Cette représentation peut être continue ou discrète [36].

B.1. Variables d'état :

Un système peut être entièrement décrit à l'aide d'un ensemble de variables minimal. Les variables d'état sont des grandeurs physiques continues du système (elles doivent être dérivables) et doivent être indépendantes les unes des autres. Elles sont généralement rassemblées dans un vecteur X [36].

La connaissance de toutes les variables d'état à un instant t doit permettre de connaître toutes les valeurs du système à un instant $t+dt$. Un même système peut être décrit avec des variables d'état différentes mais leur nombre est toujours le même. Ce nombre, désigné par la lettre n , représente l'ordre du système.

La représentation d'état la plus générale pour les systèmes linéaires est la suivante

$$\dot{x} = Ax + Bu$$

$$y = Cx + Du$$

$x \in R^n$: Vecteur qui représente les n variables d'état (vecteur d'état).

$y \in R^q$: Vecteur qui représente les q sorties.

$u \in R^p$: Vecteur qui représente les p commandes.

$A \in R^{n \times n}$: Matrice de dynamique (matrice d'état).

$B \in R^{n \times p}$: Matrice de commande.

$C \in R^{q \times n}$: Matrice d'observation.

$D \in R^{q \times p}$: Matrice d'action directe.

Ceci est le cas le plus général. Les matrices A, B, C, D sont souvent invariantes selon le temps, elles deviennent alors des matrices constantes et on parle de représentation d'état continue indépendante du temps ou LTI (linear time invariant).

Cette représentation d'état se représente sous forme de schéma-bloc :

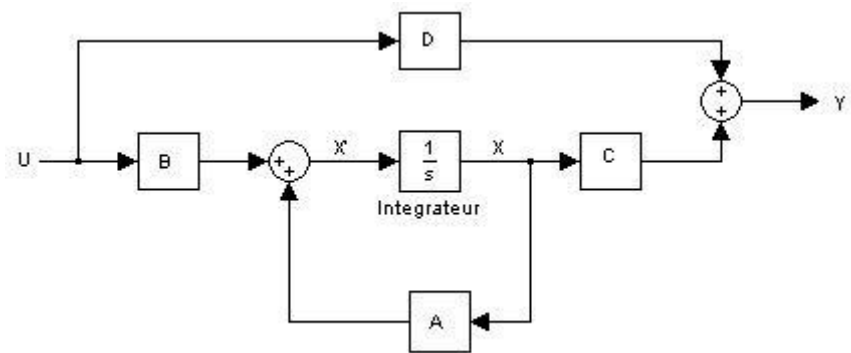


Figure (B.1): le schéma d'une représentation d'état d'un système LTI.

C.1. Définition de la contrôlabilité :

Un système défini par la représentation d'état suivant :

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + Bu \\ y &= Cx \end{aligned} \tag{C.1}$$

Il est commandable ou gouvernable si pour toute instance, il existe un signal d'entrée $u(t)$ d'énergie finie qui permet au système de passer de l'état x_0 à l'état x_1 en un temps fini [20].

Mathématiquement un système est contrôlable si la matrice de contrôlabilité 'C' est de rang n . Avec n c'est l'ordre de système et 'C' appelée matrice de Kalman ou matrice de contrôlabilité, et la condition 'rank C = n'. appelée condition de Kalman, la matrice de Kalman est défini comme suit :

$$C = [B, AB, \dots, A^{n-1}B]$$

C.2. Définition de l'observabilité :

Le système linéaire décrit par les équations (C.1) est dit observable si la connaissance de $y(t)$ et de $u(t)$ pour $t \in \mathbb{R}$ nous permet de déterminer de façon unique l'état $x(t)$, pour tout instant 't' [37].

C.3. Condition d'observabilité d'un système :

Il est proposé, sans démonstration, une condition nécessaire et suffisante de l'observabilité d'un système. Cette dernière est très simple :

Un système décrit par les équations (C.1) est observable si et seulement si la paire (A;C) est observable.

Mathématiquement si la matrice $O = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ CA^2 \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{bmatrix}$ est de rang n .

Avec n est l'ordre de système [37].

D.1.Énoncé du critère de stabilité :

Un système bouclé est stable si et seulement si sa sortie, autrement dit la grandeur physique réelle à réguler reste bornée lorsque l'on injecte un signal borné à son entrée. Dans la pratique, on exige que le signal de sortie converge effectivement vers une valeur finie. D'une manière plus générale, aucun signal dans la boucle de régulation, ne doit osciller ou tendre vers l'infini [32].

Remarque : Dans certains cas, notamment celui des systèmes non linéaires, on peut tolérer la présence d'oscillations dans les signaux, du moment qu'elles restent d'amplitudes limitées.

La stabilité d'un système asservi est une condition obligatoire : l'instabilité est en général synonyme de destruction du système.

Analyser la stabilité d'un système revient donc à rechercher ses états d'équilibre et à déterminer leur stabilité. Pour ce faire, il faut disposer de critères de stabilité.

La condition mathématique de stabilité s'énonce ainsi :

Un système asservi est stable si et seulement si sa fonction de transfert en boucle fermée ne possède aucun pôle à partie réelle positive.

Considérons le schéma général d'un système asservi représenté sur la **Figure (D.1)**. Sa fonction de transfert en boucle fermée est :

$$H(p) = \frac{A(p)}{1+A(p)B(p)} \quad (\text{D.1})$$

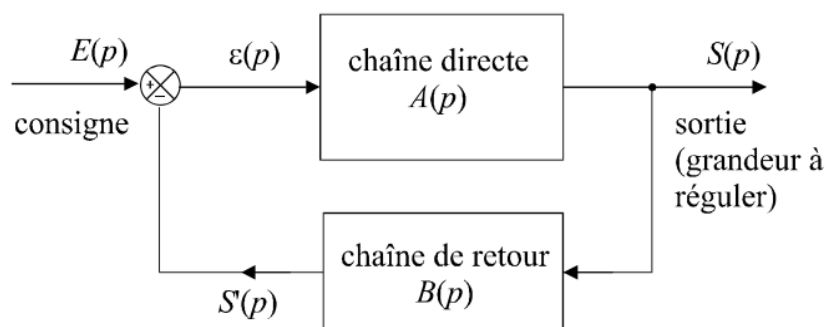


Figure (D.1).Schéma général d'une boucle de régulation.

Cette fonction de transfert est une fraction rationnelle de deux polynômes en p , factorisables dans le corps des complexes :

$$H(p) = \frac{N(p)}{D(p)} = \frac{\alpha \prod_{j=1}^m (p - z_j)}{\prod_{i=1}^n (p - p_i)} \quad (\text{D.2})$$

Les p_i sont les n pôles de $h(p)$. Les z_j sont ses m zéros. Ces pôles et zéros peuvent être réels ou complexes.

Si un échelon de consigne unitaire est placé à l'entrée du système, on a :

$$S(p) = \frac{H(p)}{p} = \frac{\alpha \prod_{j=1}^m (p - z_j)}{p \prod_{i=1}^n (p - p_i)} \quad (\text{D.3})$$

Imaginons une décomposition en éléments simples de cette fraction rationnelle et séparons, dans cette décomposition, les termes correspondant à des pôles réels r et ceux correspondant à des pôles complexes: $\tau_K + j \omega_K$

$$S(p) = \frac{a}{p} + \sum_i \frac{b_i}{p - r_i} + \sum_k \frac{b_k}{p - (\tau_k + j\omega_k)} \quad (\text{D.4})$$

La transformée inverse de $S(p)$ est :

$$s(t) = au(t) + \sum_i b_i e^{r_i t} + \sum_k b_k e^{(\tau_k + j\omega_k)t} \quad (\text{D.5})$$

Cette expression nous montre déjà que la présence d'un pôle réel positif r_i introduit dans le signal de sortie, une exponentielle croissante tendant vers l'infini lorsque t tend vers l'infini. Le système ne peut donc pas être stable s'il existe un pôle réel positif.

Par ailleurs, les termes $b_k e^{(\tau_k + j\omega_k)t}$ peuvent s'écrire :

$$b_k e^{(\tau_k + j\omega_k)t} = b_k e^{\tau_k t} b_k e^{j\omega_k t} \quad (\text{D.6})$$

Ces termes, en se recombinaient avec les termes $b_k e^{(\tau_k + j\omega_k)t}$ (la présence d'un pôle complexe entraîne obligatoirement la présence de son conjugué), vont donner naissance à des termes de la forme :

$$e^{\tau_k t} (A_k \cos \omega_k t + B_k \sin \omega_k t) \quad (\text{D.7})$$

Les termes de ce type ne peuvent converger vers une valeur finie que si la partie réelle τ_k des pôles correspondant est négative. La présence d'un pôle complexe à partie réelle positive entraîne donc l'instabilité du système.

En rassemblant les deux cas, on montre bien que le système ne peut être stable que si tous ses pôles sont à partie réelle négative [32].

D.2. Critère algébrique de Routh/Hurwitz :

Le critère de Routh-Hurwitz permet d'attester ou non de la stabilité 'asymptotique' d'un modèle grâce au polynôme caractéristique $D(p)$. Ce critère algébrique est plutôt utilisé lorsqu'une approche fréquentielle est privilégiée puisque $D(p)$ est le dénominateur de la fonction de transfert. Cependant, il convient de rappeler que $D(p)$ s'exprime aussi $D(p) = \det(pI - A)$ et qu'il peut, de ce fait, être déduit de A . En outre, si A est de forme compagne, les coefficients de $D(p)$ sont directement lisibles sur la dernière ligne ou la première colonne de A ce qui permet de dresser directement la table de Routh et d'appliquer ainsi le critère. [33]

D.3. Une approche quasi intuitive : la stabilité BIBO (bounded input-bounded output)

Un système est stable au sens BIBO (ou encore au sens entrée/sortie) si et seulement si, quelle que soit l'état : $x_0 = x(0)$, pour toute entrée 'u' bornée, la sortie 'y' est bornée.

Une autre définition de la BIBO-stabilité, peut être donnée : en notant $y^*(t)$ la réponse impulsionnelle du modèle, ce dernier est BIBO-stable si et seulement s'il existe un scalaire 'k' vérifiant :

$$0 < k < \infty \text{ Et } \int_0^{\infty} y^*(\tau) d\tau \leq k \quad (\text{D.8})$$

D.4. Notion sur la stabilité de Laypunov :

Puisqu'on s'intéresse à la stabilité des systèmes non linéaires autour d'un point d'équilibre, il est indispensable de définir cette notion.

Pour cela, il faut étudier le comportement des solutions dans un petit voisinage du point d'équilibre. En absence de commande et de perturbations.

Dans ce cas d'un système $\dot{x}(t) = f(x(t), u(t))$ les points d'équilibre sont la solution de l'équation algébrique :

$$0 = f(x(t), 0) \quad (\text{D.9})$$

D.5.Méthode directe de Laypunov :

Pour l'étude de la stabilité des systèmes non linéaires, la méthode la plus classique est basée sur la linéarisation et l'utilisation des valeurs propres du système linéarisé.

Laypunov a proposé une seconde méthode, en s'inspirant de l'idée de l'énergie mécanique de Lagrange qui a formulé le principe de stabilité des systèmes mécaniques qui stipule que :

« Un système qui est dans un état où son énergie potentielle possède un minimum isolé est dans un état d'équilibre stable »

Cette méthode, appelée méthode directe de Laypunov, est basée sur la recherche d'une fonction scalaire de signe défini à valeur réelles. Quand sa dérivée par rapport au temps est définie de signe opposé, la vitesse d'un point p_1 ($p_1 \in R^n$) est toujours dirigée vers l'intérieur, alors ce point finira par arriver à l'origine, dans le cas contraire, le point p_1 s'écartera davantage. Dans quelques classes de systèmes physiques, la fonction du Laypunov V peut être choisie comme étant l'énergie du système [34].

D.6.Définitions :

- **Candidat de Laypunov:** Une fonction définie positive continue notée $V(x)$ est un candidat de Laypunov
- **Fonction de Laypunov :** Une fonction de Laypunov est un candidat de Laypunov, à savoir une fonction continue $V(x)$ telle que :

$$V(x) > 0 \quad \forall x \neq 0 \quad (\text{D.10})$$

$$V(x) = 0 \quad x = 0$$

Ayant la propriété :

$$\dot{V}(x) \leq 0 \quad \forall x \neq 0 \quad (\text{D.11})$$

$$\dot{V}(x) = 0 \quad x = 0$$

La dérivée s'écrit :

$$\dot{V}(x) = \left[\frac{\partial V}{\partial x} \right]^T \frac{dx}{dt} \quad (\text{D.12})$$

Où :

$\left[\frac{\partial V}{\partial x} \right]$: est le gradient de V

Le théorème dit : Si une fonction de Laypunov existe pour un système donné alors ce système est stable.

Si la fonction de Laypunov est strictement décroissante, c'est-à-dire que

$$\dot{V}(x) < 0; \quad \forall x \neq 0 \quad (\text{D.13})$$

Alors la stabilité est en plus asymptotique [35].

E. Rappel sur les matrices :

Soit A une matrice symétrique $n \times n$.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

- **Les mineurs principaux:**

Une sous-matrice $k \times k$ formée, à partir de A; en éliminant $n - k$ colonnes, disons les colonnes i_1, i_2, \dots, i_{n-k} et les mêmes $n - k$ lignes i_1, i_2, \dots, i_{n-k} , est appelée une sous-matrice de A, d'ordre principal k . Le déterminant d'une sous-matrice principale $k \times k$ est appelée le mineur principal d'ordre k de la matrice A:

Exemple: Soit A une matrice

- **Les mineurs principaux dominant:**

Une sous-matrice $k \times k$ formée, à partir de A; en éliminant $n - k$ dernières colonnes, les mêmes $n - k$ lignes i_1, i_2, \dots, i_{n-k} , est appelée une sous-matrice de A, d'ordre principal dominant k . Le déterminant d'une sous-matrice principale dominante $k \times k$ est appelée le mineur principal dominant d'ordre k de la matrice A:

Exemple: Soit A une matrice

Définition 1 : Fonction définie positive

- Une matrice $A_{n \times n}$ est définie positive, si chacun de ces 'n' mineurs principaux dominants de A est > 0 .
- Une matrice $A_{n \times n}$ est définie négative, si chacun de ces 'n' mineurs principaux dominants alternent en signe de la manière suivante :

$$a_{11} < 0, \quad \det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} > 0, \quad \det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} < 0, \text{ etc ...}$$

Définition 2 : Fonction semi-définie positive

- Une matrice $A_{n \times n}$ est semi-définie positive, si chacun des mineurs principaux dominants de A est ≥ 0 .
- Une matrice $A_{n \times n}$ est semi-définie négative, si chacun des mineurs principaux dominants d'ordre impair de A est ≤ 0 , et chacun des mineurs principaux d'ordre pair de A est ≥ 0 .

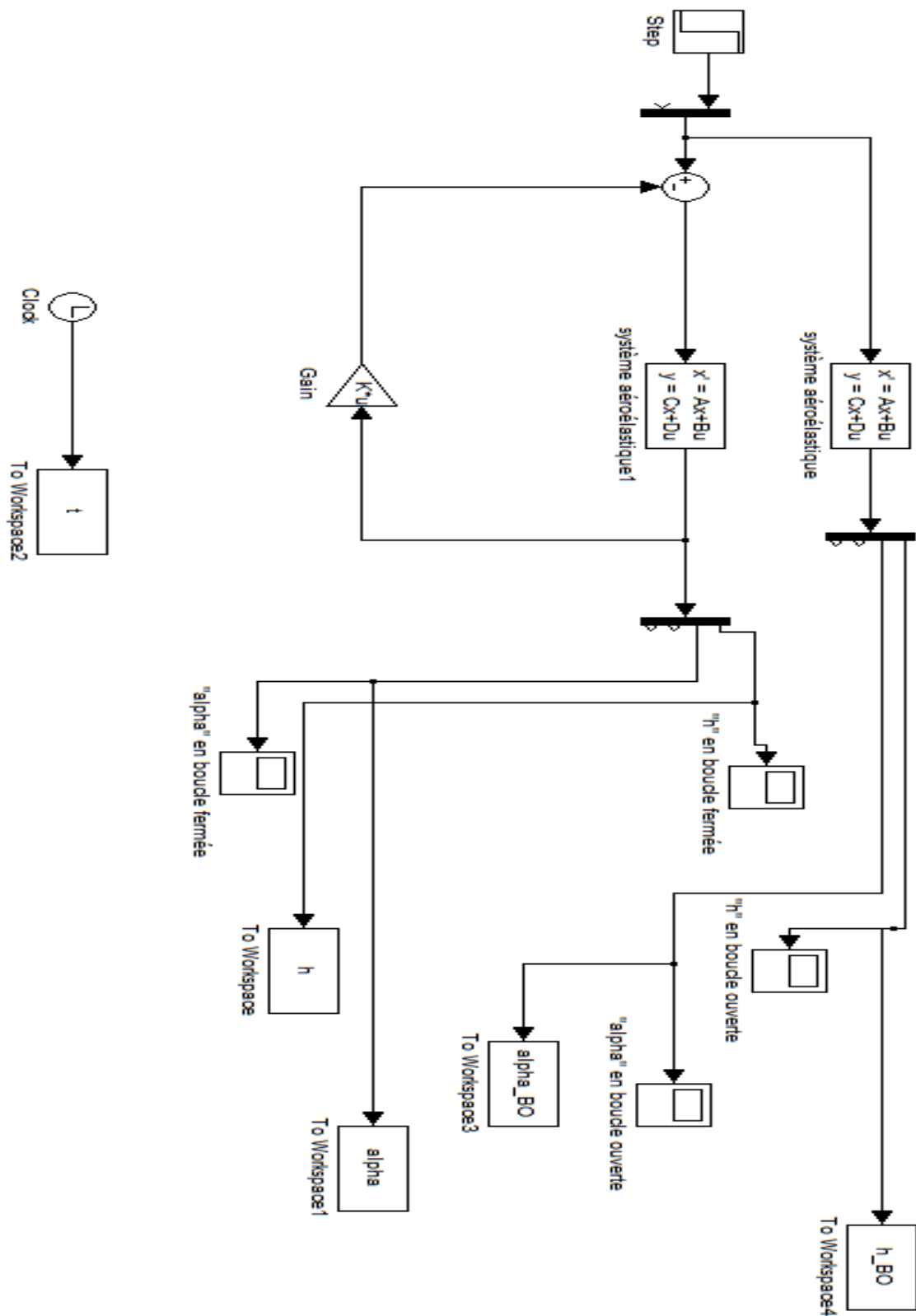


Figure (F.1) : implémentation de la commande LQR pour le système linéaire sur MATLAB SIMUNLINK

