

الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية
République Algérienne démocratique et populaire

وزارة التعليم العالي و البحث العلمي
Ministère de l'enseignement supérieur et de la recherche scientifique

جامعة سعد دحلب البليدة
Université SAAD DAHLAB de BLIDA

كلية التكنولوجيا
Faculté de Technologie

قسم الميكانيك
Département de mécanique



Mémoire de Fin d'Études

Présenté par

CHENATLIA Radhwen

pour l'obtention du diplôme master en génie mécanique

Option : système énergétique et thermique (appliqué)

Thème

**Etude de la stabilité linéaire d'un écoulement de
Taylor-Couette pour un fluide Newtonien**

Proposé et dirigé par :

Dr. ALIBENYAHIA Brahim

Année Universitaire 2013-2014



Dédicaces

Au-delà des personnes, des lieux et des temps, je dédie ce travail avec ma profonde conviction, à tous ceux qui ont toujours cru et sans doute à la science cette lumière qui éclaire les esprits et leur permet de transcender les limites installées par les sociétés et les cultures dans leurs périodes de dégénérescence.

Je le dédie aussi :

A ceux qui savent concrétiser leurs idées et savent réussir.

A ceux qui ne portent que du bien pour les autres.

A ceux qui ne vivent que dans et par la vérité.

Sans oublier mes chers parents.

Mon frère et à mes soeurs.

Mes collègues et amis. Med-h et Med-k ,S-m et bien sur Y ch-dj

Et tous les enseignants de Génie mécanique et étudiants de la promotion (2013-2014).

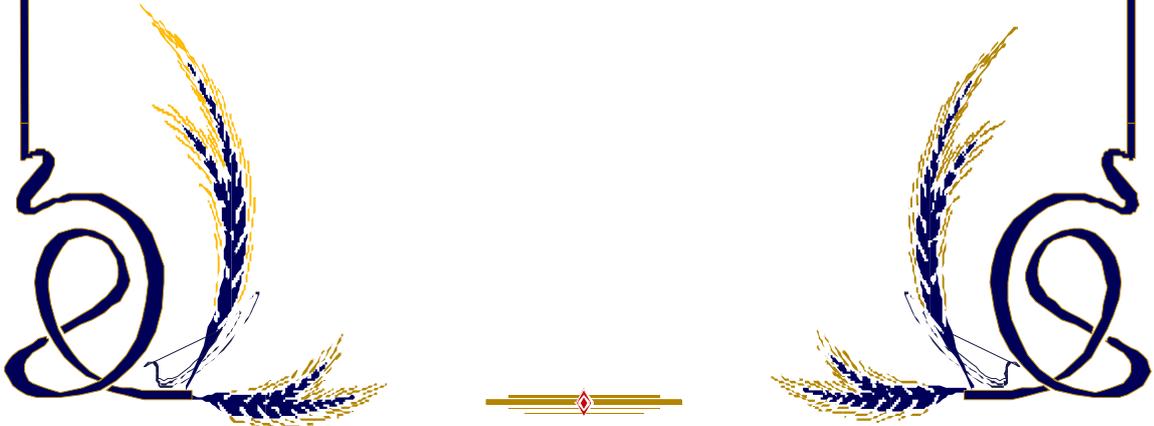


Remerciements

Au terme de ce Mémoire nous tenons à remercier tout naturellement en premier lieu **Dieu le tout Puissant** qui m'a donné la force, le courage et la patience de bien mener ce travail.

Ce travail a été réalisé sous la direction de Monsieur **Dr Ali benyahia**, Maître de Conférences (MCB) à université Saad Dahlab de Blida, qu'il trouve ainsi l'expression de ma profonde reconnaissance pour sa compétence, ses encouragements et ses précieux conseils durant le déroulement de ce travail.

Mes sentiments vont également à toutes les personnes qui ont contribué de près ou de loin à la réalisation de ce travail.



Résumé :

Une analyse linéaire de stabilité tridimensionnelle d'un écoulement entre deux cylindres coaxiaux en rotation connu sous le nom de type Taylor-Couette pour un fluide newtonien. L'influence des paramètres rhéologiques et géométriques sur les conditions critiques et la structure des rouleaux de Taylor est examinée. Les configurations étudiées sont: seul le cylindre intérieur est en rotation et les deux cylindres tournent en contre rotation et co-rotation. Les paramètres de contrôle du problème sont le rapport de rayon et le nombre de Reynolds basé sur la vitesse de rotation du cylindre extérieur.

La simulation a été effectuée à l'aide du code de calcul MATLAB par la méthode spectral

Abstract:

Digital study considering a Newtonian fluid flow between two concentric cylinders rotating known Couette-Taylor type. Configurations are considered: only the inner cylinder is in event of rotation and both of the two cylinders are in event of rotating center and co-rotating . The control parameters of the problem are the radial clearance, appearance and the Reynolds number based on the rotational speed of the outer cylinder. The simulation was performed using the computer code in MATLAB with spectral numerical method.

ملخص:

في هذا العمل نتطرق إلى الدراسة الرقمية لجريان سائل نيوتوني بين اسطوانتين متمركزتين في حالة دوران، والانتقال من حالة الاستقرار نحو حالة عدم الاستقرار الذي يعرف بسيلان تايلور كوات. أين تمت دراسة في ثلاث حالات: الاسطوانة الداخلية تدور بسرعة زاوية ثابتة والحالة الثانية كلا الاسطوانتين تدوران في اتجاهين متعاكسين. ثالثا الاسطوانتان تدوران في نفس الاتجاه العوامل التي تؤثر في الجريان وعلى شروط ظهور الاستقرار هي عامل الشكل، و سرعات الزاوية وعدد رينولدز .

الدراسة أجريت باستعمال برنامج ماتلاب طريقة عددية الطيفي. النتائج المتحصل عليها متوافقة مع النتائج التجريبية المتوفرة.

Method spectral

```
clear all
close all
zi=sqrt(-1);
N=;
nosmod=N;
k=;
er=;
Re1=;
%mean velocity

Nos=nosmod+1;
Nsq=nosmod+1;
vec=(0:1:nosmod)';

eta=;
R1=;
R2=;
Om1=;
Om2=;
Om=;
r=;
to=;

V=;

%initialize

num=round(abs(N));

%create D0

D0=[];
vec=(0:1:num)';
for j=0:1:num
    D0=[D0 cos(j*pi*vec/num)];
end;

%create higher derivative matrices

lv=length(vec);
D1=[zeros(lv,1) D0(:,1) 4*D0(:,2)];
D2=[zeros(lv,1) zeros(lv,1) 4*D0(:,1)];
D3=[zeros(lv,1) zeros(lv,1) zeros(lv,1)];
D4=[zeros(lv,1) zeros(lv,1) zeros(lv,1)];
for j=3:num
    D1=[D1 2*j*D0(:,j)+j*D1(:,j-1)/(j-2)];
    D2=[D2 2*j*D1(:,j)+j*D2(:,j-1)/(j-2)];
    D3=[D3 2*j*D2(:,j)+j*D3(:,j-1)/(j-2)];
    D4=[D4 2*j*D3(:,j)+j*D4(:,j-1)/(j-2)];
end;
```

```

A11=;

A12=;

B11=;

%set up Squire matrix and cross term matrix

A21=;

A22=;

B22=;

%combine all the blocks

A=[A11 A12; A21 A22];
B=[B11 zeros(Nos,Nsq); zeros(Nsq,Nos) B22];

A(1,:)=[(er-100)*D0(1,:) zeros(1,lv)];
B(1,:)=[D0(1,:) zeros(1,lv)];
A(2,:)=[(er+100)*D1(1,:) zeros(1,lv)];
B(2,:)=[D1(1,:) zeros(1,lv)];

A(lv-1,:)=[(er-300)*D1(end,:) zeros(1,lv)];
B(lv-1,:)=[D1(end,:) zeros(1,lv)];
A(lv,:)=[(er+300)*D0(end,:) zeros(1,lv)];
B(lv,:)=[D0(end,:) zeros(1,lv)];

% On remplace la premiere la derniere ligne portant sur omegaR par la
% condition aux limites : perturbation de vorticite nulle aux parois
en
% utilisant la methode Schmid et Henningson
A(lv+1,:)=[zeros(1,lv) (er-200)*D0(1,:)];
B(lv+1,:)=[zeros(1,lv) D0(1,:)];
A(end,:)=[zeros(1,lv) (er+200)*D0(end,:)];
B(end,:)=[zeros(1,lv) D0(end,:)];

d=inv(B)*A;

%ordered eigenvalues
[v,e]=eig(d);
y=imag(e);
[imag,is]=sort(-imag(e));
xs=v(:,is);
es=e(is);
lambdar=diag(real(e));
lambdai=diag(y);
%plot(lambdai,lambdar,'o');

%axis([-100 100 -200 10])
[es,is]=sort(-lambdar);
%grid on

I=find(lambdar<20000&lambdar>-20000&lambdai<20000&lambdai>-20000);
mmi=max(lambdar(I))

```


REFERENCES BIBLIOGRAPHIQUES

[1] G. I. TAYLOR, 1923 stability of viscous liquid contained between two rotating concentric cylinders. phil. Trans. Soc . A223, 289-343 .

[2] RANDALL TAGG , 1994 The Taylor Couette Problem Nonlinear science today. Vol.4. November, 1994.

[3] J.T.STUART, 1958 The non- linear mechanics of hydrodynamics stability J. Fluid Mech. Vol.4.

[4] R.C.DIPRIMA & H.L.SWINNEY, 1985. Instabilities and transition in flow between concentric rotating cylinders Hydrodynamic instabilities and the transition to turbulence: pages 139-180. 2^{ème} ed. Topics in applied physics, vol.45 Springer-Verlag, Berlin, 1985.

[5] AGATHE CHOUIPPE . Etude numérique de la réduction de traînée par injection de bulles en écoulement de Taylor-couette. doctorat de l' université de Toulouse le 12 juillet 2012

[6] ADNANE El-Mahfoud. Effets de la mise en regime des vitesses sur les conditions d'apparition des instabilites et de la turbulence entre deux cylindres coaxiaux. Université M'hamed BOUGARA Boumerdes 2006/2007

[7] P. MILLET & P. WEISS. Propriétés physiques des matériaux dentaires. Société Francophone de Biomatériaux Dentaires 2009-2010

[8] M. P. Landry, 2003 Taylor-Couette instability of a Bingham fluid the university of British Columbia December 2003.

[9] Olivier CZARNY. Contribution à l'étude numérique des écoulements en rotation avec parois. Application au système de Taylor-Couette ÉCOLE DOCTORALE Mécanique, Physique et Modélisation 2003

[10] J. P. Boin Etude des écoulements turbulents Ecole Nationale Supérieure de Bourges (ENSIB), (cours) année 2001/2002

[11] DJERAH FATEH Etude De L'instabilité Créée Par Une Contrarotation De Deux Cylindres Concentriques Université HADJ LAKHDAR – BATNA – 2011/2012.

[12] Ahmed ESMAEL Transition vers la turbulence pour un fluide à seuil en écoulement dans une conduite cylindrique Université Henri Poincaré – Nancy 1 le 14 novembre 2008

[13] B. alibenyahia et al Revisiting the stability of circular couette flow of shear-thinning fluids. j. non-Newtonian fluid Mech
(2012).<http://dx.doi.org/10.1016/j.jnnfm.2012.06.002>

[14] P. G. DRAZIN, W. H. REID, 2004. Hydrodynamique Stabilité Cambridge UNIVERSITY PRESS

[15] NADJIBA KABOUYA Influence de la contrainte seuil sur la stabilité de l'écoulement de poiseuille d'un fluide viscoplastique : études modal et non modale Université Henri Poincaré – Nancy1 2005

SOMMAIRE

Introduction générale

Chapitre I Ecoulement Taylor-Couette

I.1. Introduction :	1
I.2. écoulement de Taylor – Couette :	2
I.2.1 cas d'un fluide visqueux (critère de Rayleigh):	3
I.2.2 cas d'un fluide non visqueux :	5
I.2.3 La viscosité :	9
I.2.4. fluide newtonien :	11
I.2.5. Synthèse de l'étude bibliographique :	12
I.3. Différents régimes de l'écoulement de Taylor Couette :	14
I.3.1 Notion de paramètres de contrôle :	14
a) Nombre de Reynolds :	14
b) Nombre de Taylor :	14
I.3.2. Régime laminaire stable :	15
I.3.3. Régime laminaire perturbé ou instable :	16
a) Première instabilité (instabilité de Couette Taylor) :	16
b) deuxième instabilité :	17
I.3.4 Régime de pré turbulence ou chaos :	18
I.3.5. Régime de turbulence complètement développé :	20
I.4. Applications technologiques et industrielles :	21
I.5. Conclusion.....	22

Chapitre II Formulation mathématique :

Introduction :	22
II.1 Formulation mathématique	23
II. 1.1. L'équation de continuité :	23
II.1.2 L'équation de la quantité de mouvement :	23
a) Equation de quantité de mouvement azimutale :	23
b) Equation de quantité de mouvement radiale :	23
c) Equation de quantité de mouvement axiale:	24
II.1.3 écoulement de base :	24
II.1.4 Conditions aux limites :	24
II.2. équation adimensionnel :	25
II.3. Le profil de vitesse :	26
a) cas ou le cylindre extérieur est fixe ($\Omega_2=0$). :	28
b) cas ou les deux cylindres en contre-rotation :	30
c) cas on les cylindres est en Co-rotation :	32
Conclusion :	35

Chapitre III Stabilité linéaire

III.1 Introduction :	36
III.2. Formulation du problème :	36
III.3 La méthode des modes normaux :	38
III.4. Résolution numérique:	42

Chapitre IV Résultats et discussion

IV.1. Introduction :	44
IV.2. la convergence :	44
III.3. Les spectres de valeur propre pour écoulement Taylor-couette :	45

III.4. Condition critique :.....	47
IV.5 Nombre de Reynolds critique Re_{1c} :.....	50
IV.5.1 Cas ou le cylindre extérieur fixe :.....	50
IV.5.2 Cas ou contre-rotation pour les cylindres :.....	51
IV.5.3. Cas ou co-rotation pour les cylindres :.....	51
IV.6. Courbe de stabilité marginale :.....	54

Conclusion générale.

Chapitre I

Ecoulement Taylor-Couette

I.1. Introduction :

L'un des problèmes les plus intéressants de la physique consiste en l'examen de la stabilité du régime établi du phénomène étudié. En tant que branche de la physique, la mécanique des fluides n'échappe pas à ce genre de problème.

En mécanique des fluides, le problème peut être présenté de la même manière, sachant qu'il n'existe que peu d'écoulements qui dérivent d'une fonction de forces ou du moins, la recherche de cette fonction de forces constitue un problème qui n'est pas trop complexe. La méthode plus générale consiste à écarter le système de sa position d'équilibre en le perturbant et étudier ensuite les effets de cette perturbation

La notion de stabilité est très importante en mécanique des fluides pour les flux de fluides visqueux. Cette notion est basée sur l'amplification ou non de perturbations introduites dans le flux.

En effet, si une perturbation est introduite dans le flux de fluide visqueux, nous pouvons avoir deux cas:

1. la perturbation peut croître moins dans le temps: l'écoulement est dit **stable**
2. la perturbation peut se développer dans le temps: l'écoulement est dit **instable** et des instabilités peuvent apparaître et entraîner des turbulences.

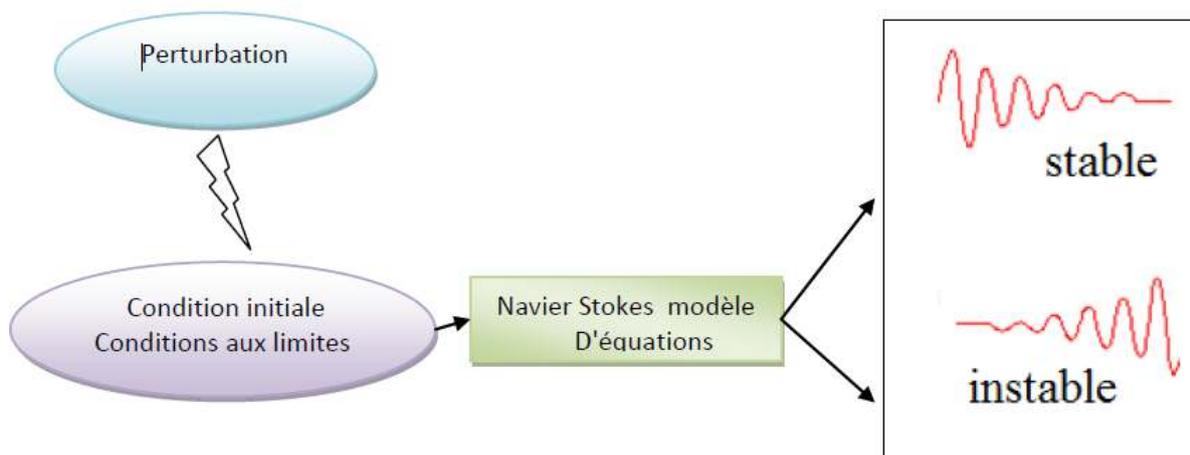


Fig. I.1 : Schème de principe d'étude de stabilité

I.2. écoulement de Taylor – Couette :

L'écoulement de Taylor-Couette est la version cylindrique de l'écoulement de Couette plan. C'est un écoulement cisailé, entre deux cylindres coaxiaux tournants, disposés verticalement, (**Fig.I.2.**) Les cylindres sont indépendants et peuvent tourner individuellement ou simultanément. D'ailleurs, les trois cas de rotation : contre-rotation, cylindre interne fixe , cylindre externe fixe correspondent à trois régimes d'écoulement différents , excepté à très grandes valeurs de vitesse de rotation[5].

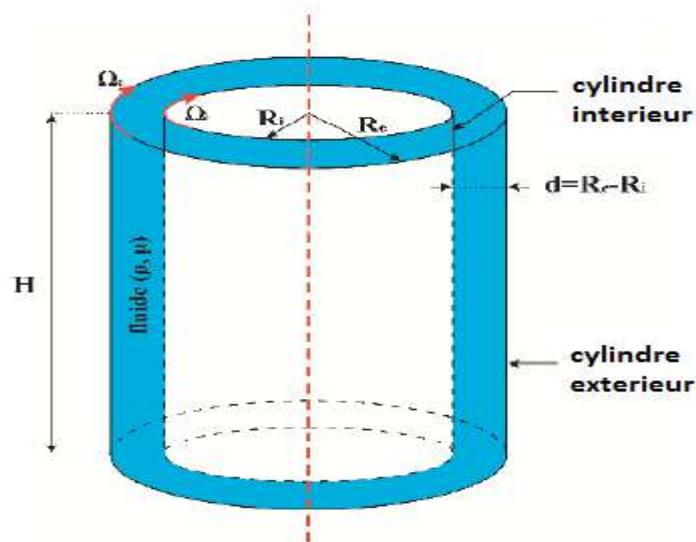


Fig.I.2 : Ecoulement de Taylor Couette

Cet écoulement de Taylor-Couette est un cas d'école pour l'étude des instabilités hydrodynamiques et de la transition vers la turbulence. Pour de faibles vitesses angulaires, l'écoulement de base est stationnaire, axisymétrique et invariant par translation verticale (**fig.I.3.a**). Au-delà d'une valeur seuil, on observe que cet écoulement de base devient instable, et il apparaît un motif de rouleaux toriques contrarotatifs qui s'étendent tout autour du cylindre (**fig. I.3.b**) ; l'écoulement reste toujours axisymétrique et stationnaire, mais cette fois la symétrie de translation verticale disparaît (elle est brisée). Si l'on continue à augmenter les vitesses en jeu, une deuxième instabilité apparaît et baisse encore la symétrie de l'écoulement.

Les rouleaux décrits plus hauts se mettent à osciller périodiquement (**fig. I.3.c**). En continuant à augmenter les vitesses on fait perdre à l'écoulement toute symétrie et on obtient un écoulement turbulent (**fig. I.3.d**) [11].

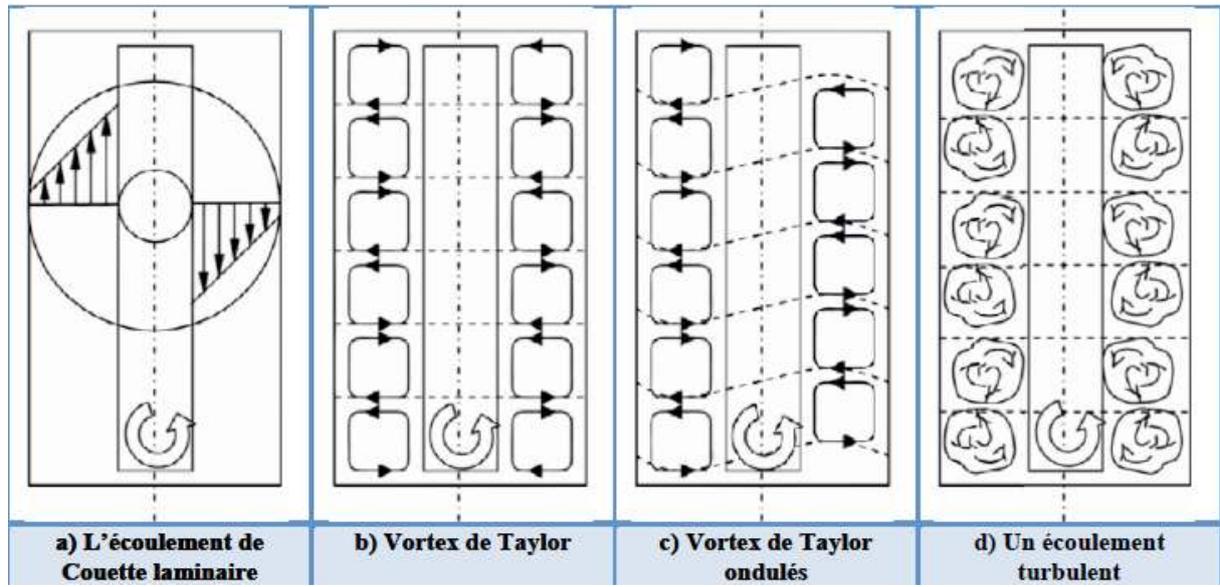


Fig. I.3: Différentes structures de l'écoulement de Taylor-Couette [11]

I.2.1 cas d'un fluide non visqueux (critère de Rayleigh):

Sur la base d'un raisonnement euristique, Rayleigh établit son célèbre critère de stabilité. Considérons un fluide non visqueux en rotation dans une cavité cylindrique infiniment longue, et supposons que la distribution vitesse-pression est purement radiale : $\Psi = (0, V\theta(r) = r\Omega(r), 0, p(r))$. Une particule fluide, située à la distance r_1 de l'axe de rotation, subit la force centrifuge $\rho r_2 \Omega^2(r_2)$. L'ensemble des particules fluides, éjectées vers l'extérieur, exercent alors une pression plus grande près de la paroi extérieure que près de l'axe de rotation, induisant, à travers la cavité, un gradient de pression centripète (Fig. I.4). Lorsque l'écoulement est stable, les forces centrifuge et centripète qui s'exercent sur la particule fluide se compensent [9]:

$$\left. \frac{\partial p}{\partial r} \right|_{r=r_2} = \rho \frac{v_\theta^2}{r_2} = \rho r_2^2 \Omega_2^2 \quad \text{I.1}$$

Supposons à présent que la même particule fluide subit un léger déplacement vers une nouvelle position $r_2 > r_1$. En l'absence de dissipation visqueuse, son moment cinétique est conservé, ce qui s'écrit :[9]

$$r_1^2 \Omega_1 = r_2^2 \Omega_2 \quad \text{I.2}$$

Où Ω_1 est la nouvelle vitesse de la particule à la position r_1 . La particule subit à présent une force centrifuge $\rho r_1 \Omega_1^2$. Cependant, le gradient de pression environnant est égal à ρr_1

$\Omega^2(r_1)$. Si ce gradient est supérieur à la nouvelle force centrifuge de la particule, cette dernière est repoussée vers sa position initiale r_2 l'écoulement est **stable**. A contrario, s'il est plus petit, la particule continuera son mouvement vers l'extérieur : l'écoulement est **instable**. La condition de stabilité peut donc s'écrire [9]:

$$\rho r_1^2 \Omega^2(r_1) \geq \rho r_2^2 \Omega^2(r_2) \quad \text{I.3}$$

Soit encore :

$$r_1^2 \Omega_1^2(r_1) \geq r_2^2 \Omega_2^2(r_2) \quad \text{I.4}$$

Ou, finalement :

$$\frac{\partial}{\partial r}(r^2 \Omega(r)) \geq 0 \quad \text{I.5}$$

Cette condition est connue sous le nom de **critère de Rayleigh**.

Pour un écoulement cisailé entre deux parois cylindriques en rotation et de longueur infinie, les équations de Navier-Stokes, qui régissent la dynamique du fluide, admettent une solution analytique axisymétrique et stationnaire, dépendant uniquement de r : c'est le **profil de Couette**, défini par :

$$V(r) = A + \frac{B}{r^2} \quad \text{I.6}$$

Le cylindre interne (1, pour « in ») étant caractérisé par son rayon r_1 et sa vitesse de rotation Ω_1 , le cylindre externe (2, pour « out ») par son rayon r_2 et sa vitesse Ω_2 . Les cylindres peuvent tourner dans le même sens (**co-rotation**), ou en sens opposé (**contra-rotation**). Si l'un des deux cylindres est immobile, le système est dit **rotor-stator**. Appliqué à la distribution de vitesse (I.6), le critère de Rayleigh donne : $\Omega^3 \eta \geq 0$, où $\Omega = \Omega_2 / \Omega_1$ et $\eta = r_1/r_2$ (η est appelé **rapport des rayons**). En configuration rotor-stator, l'écoulement est stable si $\Omega_1 = 0$ et $\Omega_2 \neq 0$, $\forall \Omega_2$ (configuration stator interne, rotor externe, noté $S_1 - R_2$), et instable si $\Omega_2 = 0$ et $\Omega_1 \neq 0$, $\forall \Omega_1$ (rotor interne/stator externe, noté $R_2 - S_1$) Il suffit donc, selon ce modèle, que le cylindre interne tourne à n'importe quelle vitesse angulaire pour générer une situation d'instabilité.

Lorsque les cylindres tournent en sens opposés (contra rotation), il existe un rayon r_c^* pour lequel la vitesse angulaire s'annule ; ce rayon sépare deux couches de fluide tournant en sens contraire (**Fig. I-4-c**). La portion de cavité comprise entre le cylindre interne et la surface cylindrique de rayon r_2 est assimilable à un système $R_1 - S_2$, instable donc, nous venons de le

voir, Ω_1 . Le modèle prédit par conséquent que la situation contrarotative est **toujours instable**

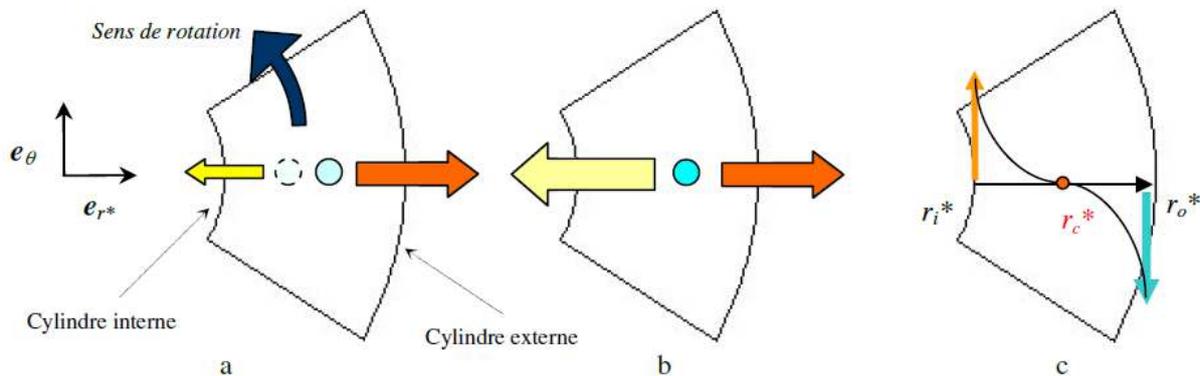


Fig. I.4 - Mécanisme de l'instabilité centrifuge (les schémas représentent une vue de dessus d'une section cylindrique du système inter-cylindre) : **a**) la particule est déplacée depuis sa position initiale (en pointillés) jusqu'à la position bleue ; si la force d'inertie qu'elle conserve (en rouge) est plus grande que le gradient de pression ambiant, elle continue son déplacement : la position est instable ; **b**) si le gradient de pression est plus grand que la force d'inertie de la particule, celle-ci revient à sa position initiale : le système est stable ; **c**) profil radial de la vitesse azimutale en régime contrarotatif : V_θ s'annule en $r = r_c^*$, la zone comprise entre $r = r_i$ et $r = r_c^*$ est instable[9].

Des résultats postérieurs à la modélisation de Rayleigh vont cependant en montrer les limites : négligée dans le bilan des forces, la viscosité contribue en fait à dissiper une part de l'énergie de la particule fluide, ce qui ne conserve pas le moment cinétique et retarde l'apparition de l'instabilité centrifuge. Ce n'est donc qu'à partir d'une certaine vitesse de rotation du cylindre que cette instabilité peut se développer.

I.2.2 cas d'un fluide visqueuse :

Les équations régissant la dynamique d'un fluide visqueux furent établies par Claude Navier (1823) et George Stokes (1845). L'introduction de la notion de viscosité (notée ν) rendit nécessaire la mise au point d'appareils capables de la mesurer le plus précisément possible (Donnelly)[9].

En 1881 à Vienne, l'Autro-hongrois Max Mergules proposa un modèle de viscosimètre constitué de deux cylindres concentriques (Meyer-Späche). En 1890, le Français Maurice Couette reprit cette technique et mesura la viscosité de l'eau au moyen d'un appareil de type S_1 - R_2 (voir **Fig. I.5-a**). Il remarqua que la mesure de la viscosité demeurait

constante pour de faibles vitesses de rotation, puis changeait brusquement au-delà d'un certain seuil critique. Couette attribua ce comportement à l'apparition d'un régime turbulent.

Indépendamment, en Anglais, Mallock mener des expérimentations similaires à celle de Couette (1888, 1896), en étendant son étude à la configuration $R_1 - S_2$ (**Fig. I.5 -b**). Dans ce dernier cas, ses résultats mirent en évidence un régime instable quelles que furent les vitesses de rotation qu'il utilisa, ce qui était en totale adéquation avec le critère de Rayleigh. Mais dans le cas $S_1 - R_2$, il trouva des seuils de stabilité, ce qui contredisait le critère.

En 1923, dans un article fondateur, Taylor reprit les résultats de Mallock en combinant approche théorique et approche expérimentale. Par une étude de stabilité linéaire du fluide visqueux (linéarisation des équations de Navier- Stokes par méthode des petites perturbations autour d'un écoulement de base, en supposant les cylindres de longueur infinie), Taylor montra que le profil de Couette, valable pour de faibles vitesses de rotation, se révélait instable face à de petites perturbations axisymétriques au delà de certains seuils de rotation : il prouva l'existence d'un seuil de transition dans le cas R_1-S_2 (à l'inverse des résultats de Mallock qui n'en trouva pas); quant à la configuration S_1-R_2 , elle devait rester stable dans tous les cas (contrairement aux observations de Couette et Mallock). Comment dès lors interpréter les résultats de Couette et Mallock ?

Taylor suggéra une liste de sources d'erreur dans le dispositif de Mallock. D'une part, une rigidité insuffisante du système était susceptible d'engendrer des vibrations parasites. D'autre part, le rapport $G = H/d$ (**rapport d'aspect**) entre la hauteur des cylindres H et l'épaisseur de la couche de fluide entre les cylindres $d = R_2 - R_1$ ne devait pas être trop petit, sinon les effets des parois terminales (qui limitent la cavité en haut et en bas) pouvaient perturber les zones de mesure. Mallock était déjà conscient de ces effets de bord, au point qu'il inclut des couches de mercure en guise de paroi inférieure, pour tenter de supprimer le frottement du fluide sur la paroi et les vortex engendrés par ces frottements; malgré tout, cette précaution était insuffisante pour les limiter. Taylor conçut un dispositif de grand rapport d'aspect pour réduire au maximum l'influence des effets des bords au centre du système (et se rapprocher ainsi de l'hypothèse de cylindres infiniment longs qu'il avait supposée dans son analyse théorique); en outre, l'appareillage fut solidement arrimé aux murs du laboratoire afin de supprimer les vibrations (**Fig. I.5- c**)[9].

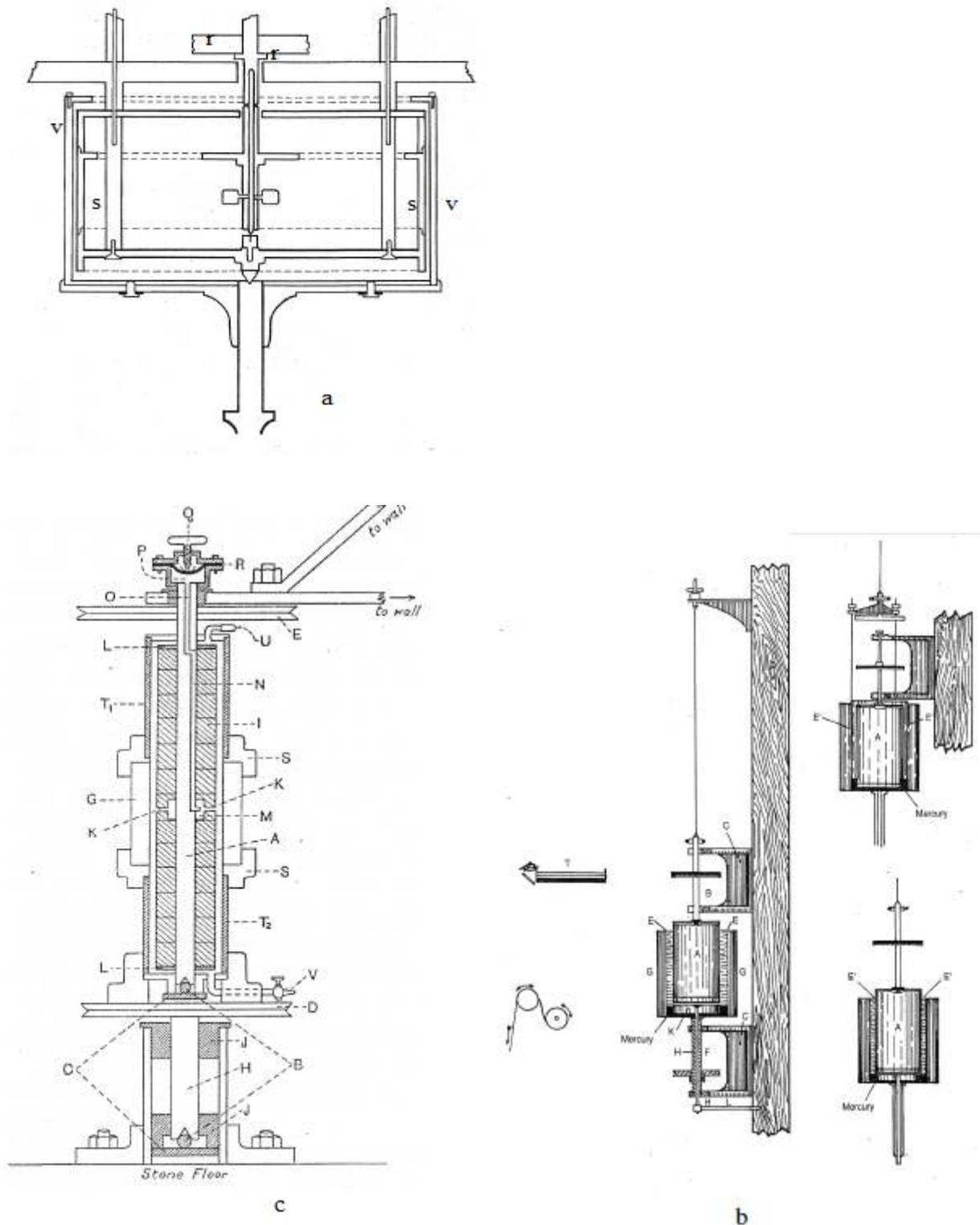


Fig. I.5 – Quelques schémas techniques : a)viscosimètre de Couette : la rotation du cylindre extérieur « v » entraîne par viscosité le cylindre « s », suspendu par un fil de torsion « r »; la déviation correspondante, mesurée en « r », donne une mesure du couple exercé sur « s » par le fluide. En supposant que l'écoulement entre « s » et « v » suit le profil de Couette (qui est une solution analytique des équations de Navier- Stokes), le couple C s'écrit :

$C = 4\pi h r_1 \nu \Omega_2 / (1 - \eta^2)$, où h est la hauteur de « s » en contact avec le fluide; on peut donc déduire de cette formule la viscosité ν . b) Viscosimètres de Mallock, basé sur le même principe : configurations S_1-R_2 (à gauche, et en bas à droite) et R_1-S_2 (en haut à droite). c) Dispositif expérimental de Taylor[9].

Au final, Taylor obtint une très bonne concordance entre les courbes de transition théoriques et les courbes de transition expérimentales (**Fig. I.6**). Taylor reporta sur ses graphes le critère de Rayleigh (en pointillés sur la **Fig. I.6**). On peut noter que dans le cas de cylindres co-rotation, le critère de Rayleigh correspond à une asymptote de la courbe de stabilité, ce qui n'est pas du tout le cas pour des cylindres contrarotatifs.

Si les effets de bords et les vibrations parasites étaient, comme le suggérait Taylor, susceptibles d'expliquer les conclusions erronées de Mallock dans la configuration S_1-R_2 , il apparut rétrospectivement que la plus petite des vitesses de rotation utilisée par Mallock lors de ses mesures en R_1-S_2 (2 tours / min) se situait, compte tenu du rapport de rayons du dispositif et de la viscosité du fluide utilisé, au-dessus du seuil de transition de l'instabilité centrifuge... Mallock ne s'est ainsi jamais trouvé en situation de pouvoir observer le régime stable (Donnelly)[9].

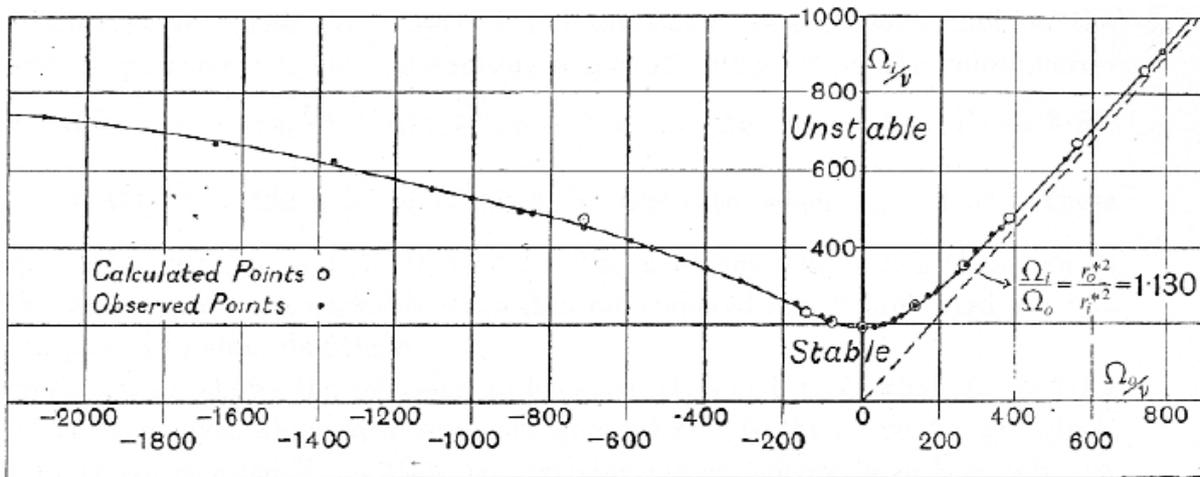


Fig. I.6 - Diagramme de stabilité de l'écoulement de Couette dans le plan $(\Omega_2/\nu, \Omega_1/\nu)$, $\eta = r_2/r_1 = 0.9418$ (d'après Taylor); Ω_1 est la vitesse de rotation du cylindre intérieur, Ω_2 celle du cylindre extérieur. En pointillés, la droite de stabilité donnée par le critère de Rayleigh [9].

I.2.3 La viscosité :

La viscosité est définie comme la résistance à l'écoulement d'un fluide. Beaucoup de matériaux utilisés par les dentistes passent de l'état liquide à l'état solide dans la bouche du patient. Leurs propriétés à l'état liquide sont importantes à connaître afin d'ajuster leur comportement à leur application. Sous l'influence de forces faibles, comme celle de la gravité, certains matériaux vont pouvoir s'écouler : ce sont les liquides. La gravité a permis de rompre les forces liant les molécules. Ces mêmes forces se rétablissent ensuite lorsque le système sera à nouveau en équilibre. [7]

Parfois l'écoulement est très facile car les forces sont extrêmement faibles (l'eau, le mercure, l'alcool...).

Si ces forces sont plus importantes et plus nombreuses, alors l'écoulement devient plus lent et la viscosité du liquide est plus élevée.

D'après la théorie des écoulements laminaires, les liquides sont considérés comme un empilement de couches de liquides. Chaque couche est animée d'un mouvement relatif par rapport à la couche voisine. Des forces de frottement F tangentiels apparaissent et sont appelées forces de cisaillement [7].

Par définition, la viscosité dynamique ou apparente est le rapport entre la contrainte de cisaillement sur le taux de cisaillement. Le système le plus courant fait appel à la rotation d'un cylindre (principe de Searle) dans le liquide dont on souhaite évaluer la viscosité.

Il est possible de réguler soit le taux de cisaillement, soit d'imposer la contrainte de cisaillement.

Soit deux cylindres circulaires coaxiaux, de rayons peu différents et dont l'entrefer est rempli d'un fluide (**fig. I.7.a**). Le cylindre intérieur étant maintenu fixe (grâce au couple C de sens opposé à celui de Ω), et le cylindre extérieur est entraîné par un moteur avec une vitesse angulaire Ω constante. La distance de l'entrefer e étant petite devant le rayon R_1 . Ainsi, on peut schématiser l'expérience en considérant le fluide entre deux plaques parallèles distantes de d , dont l'une est mobile (A) et l'autre fixe (A'). La plaque mobile (A) se déplace à la vitesse $V=R_1 \Omega$, et la plaque fixe (A') a une surface $S=2\pi R_1 h$ (**fig.I. 7.b**) [12].

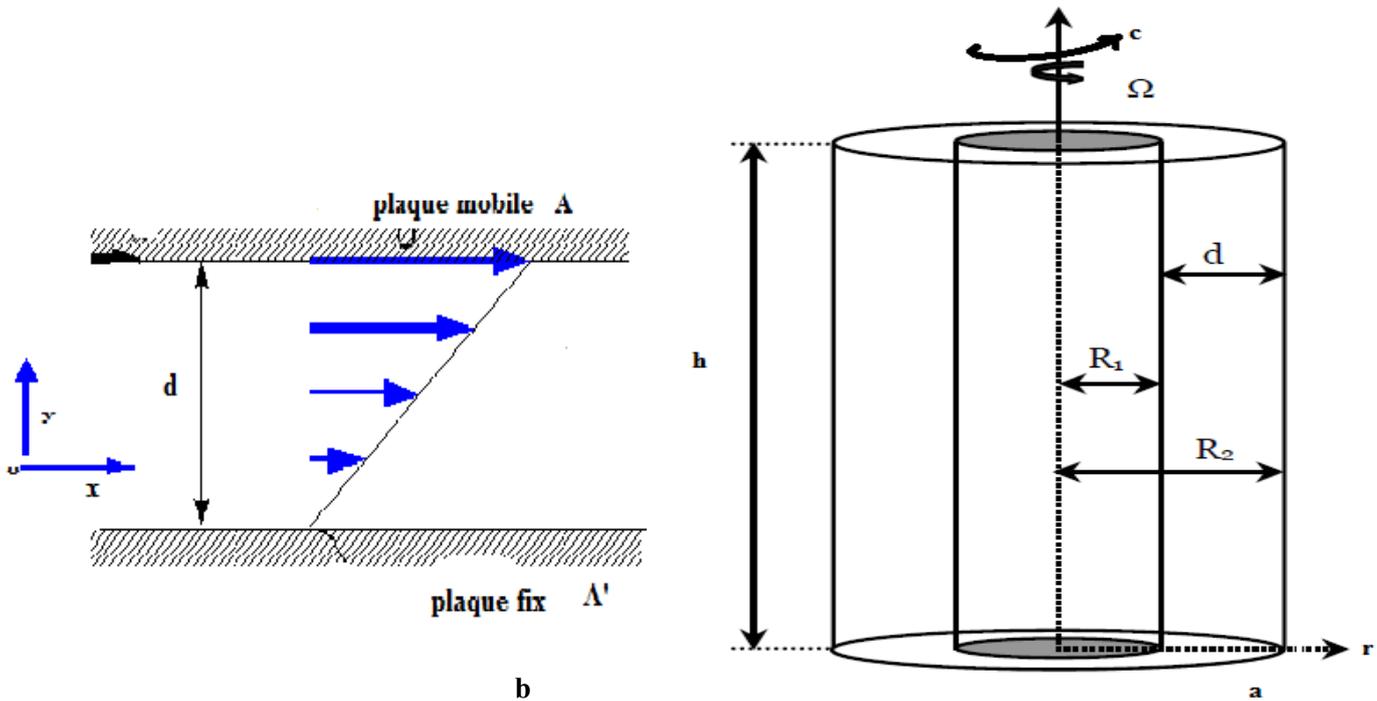


Fig. I.7 Schéma du principe de la mesure de la viscosité

Sur la plaque fixe (A') s'applique une force F qui est parallèle à (A'). C'est une force de frottement due à la présence du fluide intermédiaire. Tant que Ω reste inférieure à une vitesse angulaire critique Ω_c . L'expérience montre que F s'écrit :

$$F = \mu \frac{SV}{d} \quad \text{Où la viscosité dynamique } \mu \text{ ne dépend que du fluide et de la température.}$$

La contrainte tangentielle de cisaillement à la paroi de la plaque (A') s'écrit :

$$\tau = \mu \frac{V}{d} \tag{I.7}$$

La vitesse du fluide entre les deux plaques varie de 0 à V quand y croît de 0 à d . Comme la distance d est faible devant R_1 , le profil des vitesses dans l'entrefer peut se confondre avec sa tangente de sorte que $\frac{V}{d}$ représente le gradient de vitesse transversal $\frac{dU}{dy}$ D'où :

$$\tau = \mu \frac{dU}{dy} = \mu \dot{\gamma} \tag{I.8}$$

A l'équilibre, le moment de la force de frottement est :

$$c = R_1 \cdot s \cdot \tau = R_1 \cdot s \cdot \mu \frac{V}{d} \tag{I.9}$$

Finalement, on obtient l'expression de la viscosité dynamique μ : [12]

$$\mu = \frac{c}{2\pi R_1^2 h \Omega} \quad \text{I.10}$$

I.2.4. fluide newtonien :

Un corps Newtonien est un fluide qui présente une viscosité constante (quelque soit la vitesse de cisaillement ou la contrainte appliquée). L'eau est un corps newtonien.

Une autre expression des caractéristiques rhéologiques d'un fluide newtonien est obtenue par la formule [7] :

$$\tau = k \dot{\gamma}^n \quad \text{I.11}$$

où K et n sont des constantes (à température et pression fixes)

Si n est égal à 1, alors la contrainte de cisaillement est directement proportionnelle au taux de cisaillement. Dans ce cas, la viscosité est constante. Le liquide possède alors un comportement Newtonien [7].

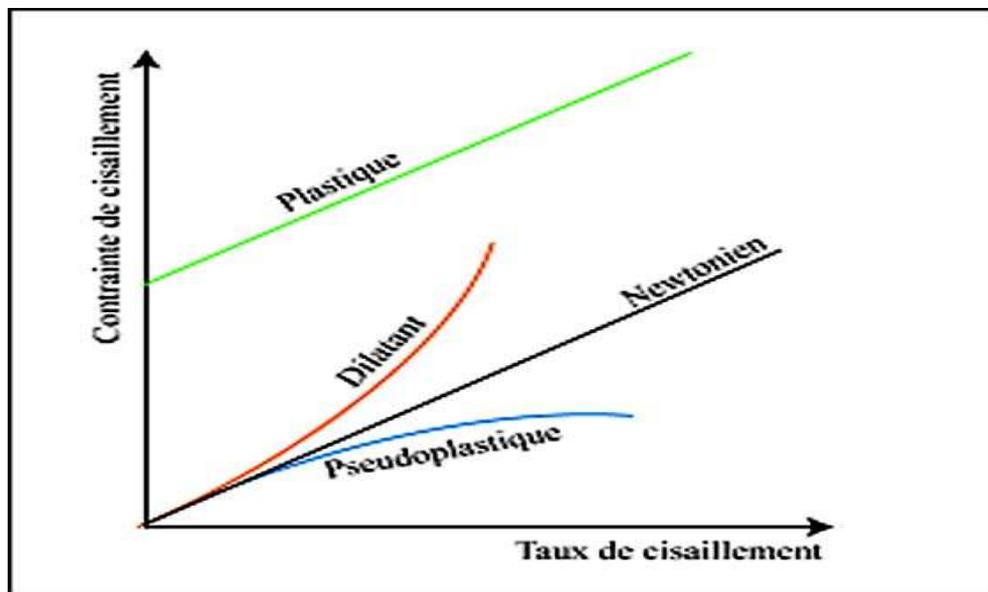


Fig. I.8. loi de comportement des fluides

I.2.5. Synthèse de l'étude bibliographique :

L'écoulement de Taylor-Couette tient une place importante dans l'histoire de la dynamique des fluides. C'est en effet le premier cas d'écoulement pour lequel l'analyse de stabilité fut confirmée par une expérience de laboratoire (Taylor 1923[1]).

La première référence enregistrée concernant cet écoulement, remonte au 17^{ème} siècle ; il s'agit de l'étude effectuée par NEWTON en 1786. Il fut le premier qui remarqua la symétrie de ce mouvement et supposa l'aspect concentrique des lignes de courant. Plus tard, en 1848 STOKES a prévu la formation des tourbillons au sein d'un tel écoulement, lorsque le cylindre intérieur tourne avec une vitesse plus grande que celle du cylindre extérieur. Il a aussi proposé l'utilisation des grains pour visualiser l'écoulement et confirmer ses hypothèses.

En 1881, MARGULSE a prouvé que ce type d'écoulement pourrait être utilisé pour mesurer la viscosité des fluides, et autour de 1888 MALLOCK a construit un viscosimètre avec deux cylindres coaxiaux tournants. Il a remarqué que l'écoulement est toujours instable lorsque le cylindre intérieur tourne plus vite que le cylindre extérieur. Mais quand le cylindre intérieur est maintenu fixe, l'écoulement est stable jusqu'à une valeur critique de la vitesse de rotation du cylindre extérieur, au-delà de laquelle la turbulence se déclenche. Dans la même période, COUETTE a fabriqué un viscosimètre à cylindre intérieur fixe (connu aujourd'hui sous le nom de viscosimètre de COUETTE). Loin des parois horizontales l'écoulement est circulaire et obéit à la loi suivante : $V_{\theta}(r)=Ar +B/r$. Par la mesure du couple résistant appliqué sur l'un des deux cylindres, on peut ainsi remonter à la viscosité du fluide. COUETTE a remarqué que, contrairement au cas de la rotation du cylindre extérieur, le domaine de validité de sa solution est beaucoup moins étendu lorsque le cylindre intérieur tourne dans une gamme de vitesse croissante à partir du repos. Les travaux de MALLOCK et ceux de COUETTE ont été axés sur la mesure de viscosité valable seulement pour le cas laminaire. Néanmoins, ils furent les premiers à observer le début des instabilités dues à l'augmentation de la vitesse de rotation de l'un des cylindres.

La première attention donnée à la possibilité de l'instabilité hydrodynamique dans l'écoulement de COUETTE a été faite par Lord RAYLEIGH [1917]. Il a justifié ultérieurement les remarques de COUETTE et MALLOCK pour le cas non visqueux. A partir de son critère déjà mentionné, il est arrivé à la condition de stabilité suivante : $\Omega_e R_e^2 > \Omega_i R_i^2$

où Ω_i et Ω_e sont les vitesses angulaires de rotation, R_i et R_e sont les rayons des cylindres intérieur et extérieur respectivement.

G.I. TAYLOR 1923[1] a repris cette étude pour un fluide visqueux ; il a représenté la première approche méthodologique, expérimentale et analytique de l'apparition et du développement des instabilités entre cylindres concentriques tournants. Expérimentalement il a mis en évidence l'existence d'un écoulement secondaire succédant à l'écoulement laminaire de base, pour une valeur particulière de la vitesse de rotation du cylindre tournant. Il a en outre résolu les équations de Navier- Stokes et de continuité pour l'écoulement de Couette ; la solution est donnée sous forme de série de Bessel-Fourier. Cette étude analytique est basée sur une théorie linéaire qui consiste à superposer à la solution du régime laminaire une perturbation infinitésimale et négliger les termes non linéaires. Basé sur les observations de COUETTE et MALLOCK, TAYLOR a supposé une symétrie axiale de l'écoulement, un espace annulaire étroit, les effets de la gravité sont négligés et il supposé également une perturbation axialement périodique.

La théorie linéaire développée par TAYLOR, a permis de prévoir l'apparition de l'instabilité et de déterminer le seuil de vitesse de rotation correspondant à cette transition. Pour des vitesses plus élevées, les termes quadratiques ne sont plus négligeables. J.T.STUART (1958 [3]) fut le premier à tenir compte des termes quadratiques pour étudier par une théorie non linéaire, l'évolution et l'amplification de la perturbation au voisinage de la première instabilité. il a déterminé l'amplitude de ces perturbations à partir d'une équation de bilan énergétique écrite sous forme intégrale.

Après ces travaux novateurs, le phénomène physique qui est désormais connu sous le nom d'« écoulement de Couette Taylor », n'a cessé d'attirer l'attention de nombreux chercheurs, qui par leurs travaux analytiques, numériques et expérimentaux, ont contribué à une meilleure compréhension de cette classe d'écoulements complexes. Il a été bien documenté dans la revue classique publiée par DIPRIMA & SWINNEY 1985 [4]. En outre, l'article de TAGG 1994 [2] est l'une des références les plus exhaustives concernant l'historique et les avancées de la recherche sur ce sujet. Depuis l'époque des travaux fondateurs de Taylor, plus de 2000 publications scientifiques sont parues concernant le Taylor Couette. On notera également l'existence d'un colloque biannuel entièrement consacré à cette expérience « COUETTE –TAYLOR WORKSHOP » - dont la 13^{ème} édition s'est tenue en Juillet 2003 à Barcelone (Espagne).

I.3 Différents régimes de l'écoulement de Taylor Couette :

L'écoulement de Taylor Couette est l'écoulement de fluide contenu entre deux cylindres coaxiaux de rayon R_1 pour le cylindre intérieur et R_2 pour le cylindre extérieur, lorsque ces cylindres sont mis en rotation (**Fig.I.2.**) aux vitesses angulaires respectives Ω_1 et Ω_2 . Les paramètres géométriques utilisés généralement pour caractériser les dispositifs étudiés sont :

$$\text{rapport entre les rayons :} \quad \eta = R_1/R_2 . \quad \text{I.12}$$

$$\text{et le rapport d'aspect :} \quad \Gamma = \frac{H}{(R_2 - R_1)} \quad \text{I.13}$$

$$\text{et la distance entre les deux cylindres} \quad d = R_2 - R_1 \quad \text{I.14}$$

η permet alors de quantifier l'importance de la courbure de la géométrie, tandis que Γ quantifie la hauteur relative du dispositif et caractérise l'influence des effets de bord.

L'écoulement de Taylor-Couette présente la particularité de voir différents régimes se développer. Si l'on considère dans un premier temps le cas des très faibles vitesses de rotation, on observe que l'écoulement reste invariant dans la direction axiale z et dans la direction azimutale θ , et qu'il est stationnaire. L'écoulement de Couette cylindrique répondant à ces hypothèses peut être calculé analytiquement en résolvant les équations de Navier Stokes.

I.3.1 Notion de paramètres de contrôle :

Il s'agit essentiellement de deux paramètres d'influence régissant l'écoulement:

a) Nombre de Reynolds :

$$\text{Le nombre de Reynolds est défini par le rapport suivant: } Re = \frac{V_1 d}{\nu} \quad \text{I.15}$$

$$\text{Où } V_1 \text{ désigne : La vitesse du cylindre intérieur tournant : } V_1 = R_1 \Omega_1 \quad \text{I.16}$$

$$\nu : \text{Viscosité cinématique : } \nu = \frac{\mu}{\rho} \quad \text{I.17}$$

Ce nombre compare la prépondérance des effets des deux forces, l'une stabilisante qui est la force visqueuse et, l'autre, déstabilisante est imposée par la force centrifuge [6].

b) Nombre de Taylor :

Il est souvent utilisé comme un nombre caractéristique de la géométrie cylindrique liée aux systèmes tournants. Il apparaît comme une combinaison du nombre de Reynolds Re et du facteur géométrique $\delta = \frac{d}{R_1}$. Ainsi, le nombre de Taylor Ta de l'écoulement apparaît comme le rapport entre deux temps caractéristiques [6] :

$$Ta = \frac{\tau_s}{\tau_{des}} \quad \text{I.18}$$

Où $\tau_s = t_d = \frac{d^2}{\nu}$ indique le temps de la diffusion visqueuse dûe au transfert de vorticité sur la distance d (temps de stabilisation).

τ_{des} est le temps caractéristique d'advection du fluide sous l'action de la force centrifuge sur une distance d dans la direction radiale (temps de déstabilisation).

Ainsi, cette dernière peut être évaluée à partir de la loi fondamentale de la dynamique exprimant la force centrifuge exercée sur une particule dans la direction radiale telle que :

$$m \frac{d^2 r}{dt^2} = m \frac{V_1^2}{r} \quad \text{I.19}$$

En faisant apparaître les caractéristiques temporelles et spatiales de la vitesse V_1 exprimées à l'aide de τ_{des} et d dans (1.19) on a :

$$\frac{d}{\tau_{des}^2} = \frac{V_1^2}{R_1} \quad \text{I.20}$$

Dès lors le paramètre de contrôle pour les géométries courbes donné par (I.18) peut être évalué en fonction des caractéristiques de l'écoulement [10]:

$$Ta = \frac{V_1 d}{\nu} \sqrt{d/R_1} = Re \sqrt{d/R_1}$$

Qui permet d'indiquer selon les valeurs du jeu radial $\delta = d/R_1$ les principaux domaines de l'écoulement.

En fait, ce résultat est surtout valable dans le cas du petit espace annulaire ($d/R_1 \ll 1$) [6].

I.3.2. Régime laminaire stable :

Pour de faibles vitesses de rotation, le fluide est animé d'un mouvement dans la direction tangentielle θ (fig. I.7). L'écoulement de base est stable, stationnaire, axisymétrique et invariant par translation verticale. Il est possible de déterminer la solution analytique d'un tel écoulement [11]:

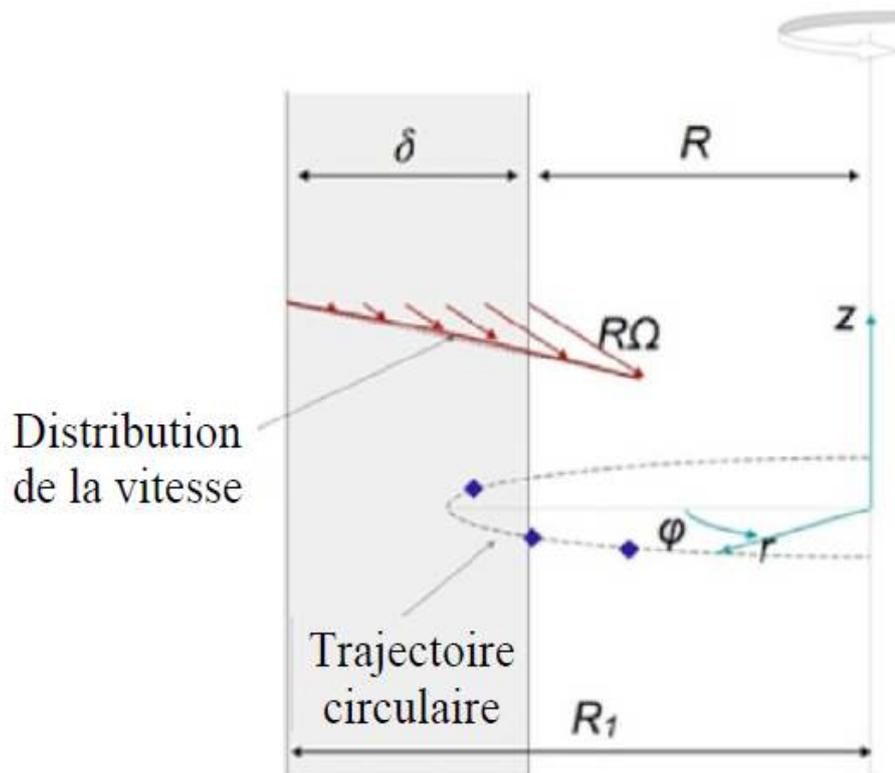


Fig. I.7: Représentation schématique de l'écoulement de Couette laminaire

Dans un système réel où la longueur des cylindres est finie, cet écoulement est modifié par le pompage d'Ekman en haut et en bas des cylindres qui introduit une circulation non azimutale sous la forme de faibles vortex horizontaux [11]

I.3.3 Régime laminaire perturbé ou instable :

Il comporte plusieurs régimes d'instabilités qu'on peut recenser comme suit :

a) Première instabilité (instabilité de Couette Taylor) :

En étudiant l'écoulement d'un fluide entre deux cylindres coaxiaux en rotation (écoulement de Couette) dont, le cylindre extérieur est fixe, le cylindre intérieur tourne à une vitesse Ω_1 et à certaines valeurs de Ω_1 , R_1 et R_2 il est observé des trajectoires d'ondes circulaires, l'apparition de ces formes circulaires est caractérisée par le paramètre du nombre de Taylor. Cette onde correspond à l'onde axiale ou cellules de Taylor.

G .I .Taylor [1] a montré en 1923, théoriquement et il a confirmé expérimentalement que le régime laminaire de base devient instable pour une valeur critique de la vitesse de rotation du

cylindre intérieur correspondant à une valeur critique de nombre de Taylor ($Ta_c = 41.2$, et expérimentalement $Ta_c = 41.32$).

Par la suite, ce même résultat a été vérifié théoriquement par R.C Düring $Ta_c = 41.61$ et ensuite par S. Chandrasekhar $Ta_c = 41.41$ à l'aide de deux méthodes de calculs différentes.

A partir de la valeur $Ta = Ta_c$, le liquide s'organise en un empilement de tourbillons toriques contra-rotatifs qui occupent la largeur de l'espace annulaire d et se propagent suivant l'axe z .

Ce type de configuration cellulaire est appelé vortex de Taylor ou perturbation axisymétrique qui reste stable dans la gamme du nombre de Taylor : $41,2 \leq Ta \leq 48$. [11]

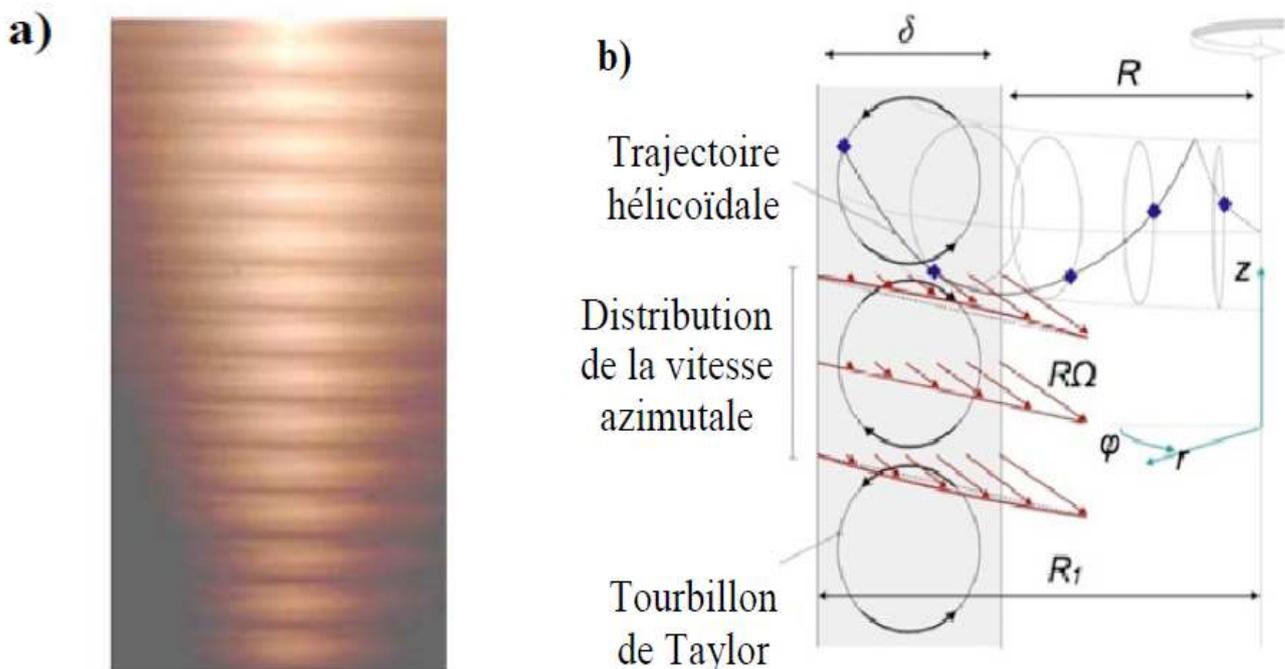


Fig.I.7 : Représentation de la première instabilité (TVF) [7]

a) Visualisation expérimentale de TVF, b) Représentation schématique de TVF [11]

b) deuxième instabilité :

En augmentant encore la vitesse de rotation, il apparaît pour un nombre de Reynolds critique Rec_2 , un mouvement comportant des tourbillons ondulés en direction azimutale. Il s'agit de l'onde azimutale qui se propage dans la direction angulaire (θ) avec une fréquence d'oscillation ω qui donne lieu à un système d'ondes instationnaire se superposant aux cellules de Taylor.

L'ensemble de l'écoulement est décrit selon un mouvement secondaire doublement périodique en z et θ . Ce système d'ondes est caractérisé par un nombre d'onde axiale n et un

nombre d'onde azimutal m . Ainsi D. Coles a montré que ce régime présente plusieurs états stables pour une même valeur de nombre de Taylor et chaque état est identifié par le couple (n,m) caractérisant ce qu'on appelle « non – unicité de l'écoulement ».

En outre il montre que lorsqu'on augmente ou l'on diminue Re , le mouvement peut changer de manière discontinue et irréversible. En particulier, D. Coles retrouve le phénomène d'hystérésis de l'écoulement de Taylor Couette. Ce dernier mentionne également que l'onde axiale ou cellules de Taylor persiste en turbulence complètement développée [11]

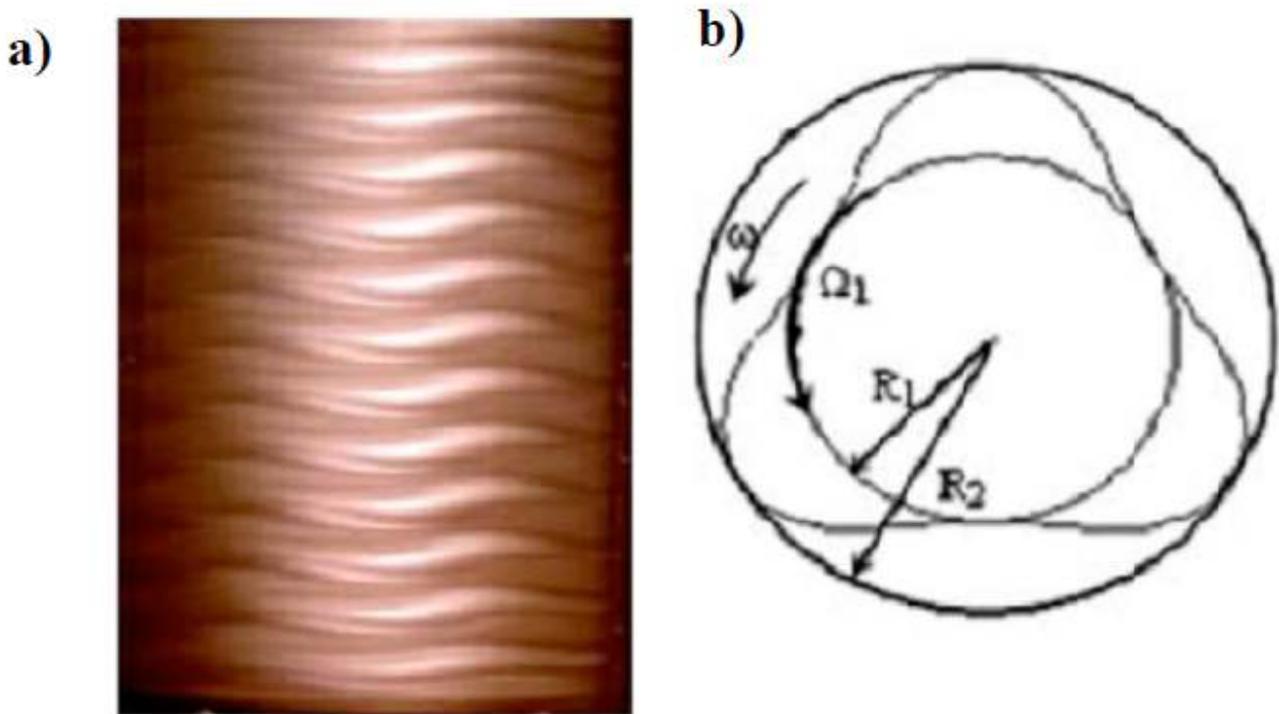


Fig. I.8 : Représentation de la deuxième instabilité (WVF) [7]

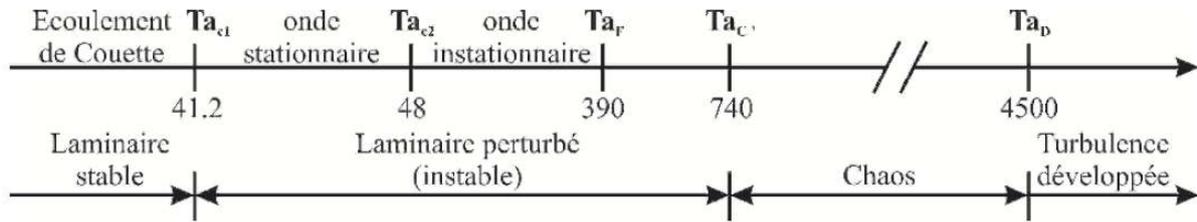
a) Visualisation de wavy mode, b) structure ondulatoire pour mode $m = 3$

I.3.4 Régime de pré turbulence ou chaos :

Au-delà de $Tc_2 = 48$, l'écoulement se complique et il apparaît très vite que la prévision des états d'instabilités ultérieures à l'onde azimutale devient quasi inextricable et le mouvement devient de plus en plus complexes et le régime de fluctuation s'installe à $Ta \approx 400$.

Le régime chaotique ou pré turbulent s'établit avec la disparition l'onde azimutale vers $Ta \approx 740$. Au-delà de cette valeur, on observe l'établissement de la turbulence complètement développée à $Ta=4500$ qui est elle-même marquée par la persistance de l'onde axiale qui se maintient toujours malgré la vitesse de rotation très élevée imposée sur le cylindre intérieur.

Les différents régimes de transition sont résumés dans le diagramme suivant à l'aide du nombre de Taylor Ta lui (J. J Stuart) [11].



$0 \leq Ta \leq Ta_{c1}$: Ecoulement circulaire de couette.

$Ta = Ta_{c1}$: Apparition de l'onde axiale stationnaire (cellules de Taylor).

$Ta = Ta_{c2}$: Apparition de l'onde azimutale instationnaire (wavy mode).

$Ta = Ta_F$: Apparition des fluctuations Chaotiques (fréquence à spectre large).

$Ta = Ta_{C'}$: Disparition de l'onde azimutale.

$Ta = Ta_D$: Disparition des fréquences à spectre large.

$Ta \geq Ta_D$: Régime de turbulence développée

Dans le cas général où les vitesses Ω_1 et Ω_2 varient de façon quelconque, la prévision des instabilités en milieu visqueux a été synthétisée expérimentalement par Andereck et al. sous la forme d'un diagramme (fig. I.9) dans le plan des nombres de Reynolds. [11]

Avec :

$$Re_1 = \frac{R_1 \Omega_1 d}{\nu} \quad \text{et} \quad Re_2 = \frac{R_2 \Omega_2 d}{\nu}$$

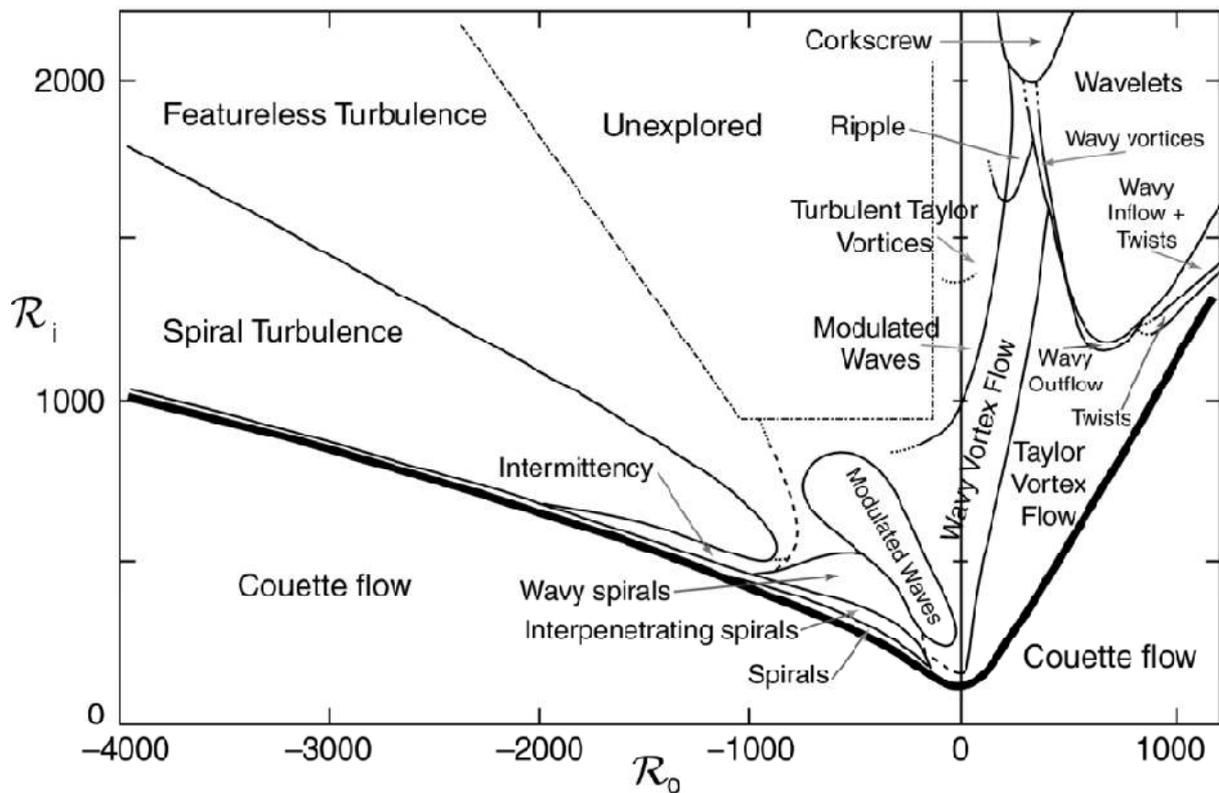


Fig. I.10 Diagramme des états observés dans un écoulement de Taylor-Couette en Co- ou Contra-rotation (d'après D.J. Triton)[11]

I.4. Applications technologiques et industrielles

Les écoulements de Taylor-Couette trouvent des applications en génie des procédés pour la filtration membranaire, en géophysique pour la convection dans le manteau terrestre et surtout dans le domaine des turbomachines. On peut citer aussi la technique utilisant les turbines qui s'intègrent dans les alternateurs des centrales électriques, les turbines que l'on rencontre dans les turboréacteurs en Avionique, les centrifugeuses, la fabrication des produits chimiques et pharmaceutiques et les viscosimètres. Egalement, il existe un autre domaine de grande importance qui concerne son utilisation systématique en tribologie pour établir des conditions optimales de lubrification des paliers de transmission de vitesses dans l'industrie automobile, en aéronautique et les centrales de production de l'énergie électrique, etc....

I.5. CONCLUSION

Dans ce chapitre, nous avons essayé de regrouper les résultats concernant les conditions d'apparition des instabilités au sein de l'écoulement Taylor Couette.

Ces conditions dépendent de la vitesse de rotation du cylindre intérieur et extérieur, ainsi que du rapport des rayons des deux cylindres.

L'intérêt accordé à ce type d'écoulement dans l'industrie explique la richesse des études expérimentales et la diversité des approches théoriques et numériques.

Les études théoriques a vu les méthodes numériques prendre le pas sur les méthodes analytiques classiques. En fait, l'option pour une approche numérique implique, pour la méthode utilisée, qu'elle soit instationnaire, puisque les perturbations sont entraînées par l'écoulement

Liste de tableau

Tableau. IV.1 : la convergence de fluide newtonien a $\eta=0.3$

Tableau. IV .2: la convergence de fluide newtonien a $\eta=0.5$

Tableau. IV.3 : la convergence de fluide newtonien a $\eta=0.883$

Liste des figures

Fig. I.1 : Schème de principe d'étude de stabilité

Fig.I.2 : Ecoulement de Taylor Couette

Fig. I.3: Différentes structures de l'écoulement de Taylor-Couette

Fig.I.4 - Mécanisme de l'instabilité centrifuge (les schémas représentent une vue de dessus d'une section cylindrique du système intercylindre)

Fig. I4 Schéma du principe de la mesure de la viscosité

Fig. I.5. Courbes de comportement de différents liquides

Fig. I.6: Représentation schématique de l'écoulement de Couette laminaire

Fig.I.7 : Représentation de la première instabilité (TVF) [7].

Fig. I.8 : Représentation de la deuxième instabilité (WVF) [7]

Fig. I.10 Diagramme des états observés dans un écoulement de Taylor-Couette en
Co- ou Contra-rotation

Fig. II 1 : profil de vitesse pour $\eta=0.3$ et $\Omega_2=0$

Fig. II 2: : profil de vitesse pour $\eta=0.5$ et $\Omega_2=0$

Fig. II 3 : profil de vitesse pour $\eta=0.883$ et $\Omega_2=0$.

Fig. II 4 : profil de vitesse pour Ω est variable et $\eta=0.3$

Fig. II 5 : profil de vitesse pour Ω est variable et $\eta=0.5$

Fig. II 6 : profil de vitesse pour Ω_2 est variable et $\eta=0.883$

Fig. II 7: profil de vitesse pour Ω est variable et $\eta=0.3$

Fig. II 8 : profil de vitesse pour Ω est variable et $\eta=0.5$

Fig. II 9 : profile de vitesse pour Ω est variable et $\eta=0.883$

Fig.IV.1. Spectre pour un fluide newtonien a rapport de rayon $\eta=0.5$, $\Omega_2=0$ et $R_1=50$

Fig.IV.2. Spectre pour un fluide newtonien a rapport de rayon $\eta=0.5$, $\Omega_2=0$ et $R_1=55$

Fig.IV.3. Spectre pour un fluide newtonien a rapport de rayon $\eta=0.5$, $\Omega_2=0$ et $R_1=63$

Fig.IV.4. Spectre pour un fluide newtonien a rapport de rayon $\eta=0.5$, $\Omega_2=0$ et $R_1=75$

Fig.IV.5.les valeurs critique (λ_c , $Re1_c$, k_c) en $\eta=0.3$

Fig.IV.6.les valeurs critique (λ_c , $Re1_c$, k_c) en $\eta=0.5$

Fig.IV.7.les valeurs critique (λ_c , $Re1_c$, k_c) en $\eta=0.883$

Fig.IV.8 : Le nombre de Reynolds critique pour fluide newtonien a la rapport de rayon η pour $\Omega_2=0$.

Fig.IV.9 : Le nombre de Reynolds critique pour fluide newtonien au rapport de rayon η pour $\Omega_2=-1$.

Fig.IV.10. Le nombre de Reynolds critique pour fluide newtonien a la rapport de rayon η pour $\Omega_2=0.1$.

Fig.IV.11. Courbe de stabilite marginale pour un rapport de rayon $\eta=0.883$. (____) nos résultantes, (●) résultats de Laundry [8]

Fig.IV.12. Courbe de stabilite marginale pour un rapport de rayon $\eta=0.5$. (____) nos résultantes, (●) résultats de Laundry [8]

Chapitre III

Stabilité linéaire

III.1 Introduction :

Pour déterminer quelle valeur de Re_1 l'instabilité primaire survient, nous allons suivre la méthode de [8] en ajoutant une petite perturbation d'écoulement de base, et de déterminer si cette perturbation croît ou décroît avec le temps. En supposant un mode normal solution pour cette perturbation, la perturbation linéaires équations devenue un système d'ordinaire plutôt que partielle différentia équations, qui mène à une valeur propre problème. En outre, les conditions aux limites pour la perturbation sera dérivée. En plus de l'absence de patinage conditions aux limites sur les parois du cylindre.

III.2. Formulation du problème:

De manière classique, à l'écoulement de base on superpose une perturbation infinitésimale:[8]

$$u = u + \epsilon u', \quad v = v + \epsilon v', \quad w = w + \epsilon w' \quad \text{III.1}$$

Et de la pression

$$p = p + p'$$

Où $\epsilon \ll 1$ est un petit paramètre sans dimension. L'écoulement perturbé est alors décrit par $\mathbf{U} + \epsilon \mathbf{u}'$, $\mathbf{P} + \epsilon \mathbf{p}'$ avec $U = (0, U(r), 0)$. Les équations de conservation de la masse et de la quantité de mouvement sont données par:

$$\nabla \cdot (U + u') = 0 \quad \text{III.2}$$

$$u'_t + Re_1(U + u') \cdot \nabla(U + u') = -\nabla(P + p') + \nabla \cdot \tau(U + u') \quad \text{III.3}$$

En soustrayant les équations (II.10) et (II.11) de (III.2) et (III.3), et en ne retenant que les termes d'ordre 1 en ϵ , on obtient

$$\nabla \cdot u' = 0 \quad \text{III.4}$$

$$(u'_t + Re_1[(u' \cdot \nabla)U + (U \cdot \nabla)u']) = -\nabla p' + \nabla \cdot (\tau(U + u') - \tau(U)). \quad \text{III.5}$$

Nous avons ensuite:

$$\tau_{ij}(U + \epsilon u') - \tau_{ij}(U) = \mu_e(U + \epsilon u') \dot{\gamma}_{ij}(U + \epsilon u') - \mu_e(U) \dot{\gamma}_{ij}(U) \quad \text{III.6}$$

Avec $\mu_e = 1$

et

$$\dot{\gamma}_{ij}(U + \epsilon u') = \dot{\gamma}_{ij}(U) + \epsilon \dot{\gamma}_{ij}(u') \quad \text{III.7}$$

Après certains l'algèbre, nous constatons que

$$u' \cdot \nabla U + U \cdot \nabla u' = \frac{v}{r} \left(\frac{\partial u'}{\partial \theta} - 2v' \right) e_r + \left(u' \frac{dv}{dr} + u' \frac{v}{r} + \frac{v}{r} \frac{\partial v'}{\partial \theta} \right) e_\theta + \left(\frac{v}{r} \frac{\partial w'}{\partial \theta} \right) e_z \quad \text{III.8}$$

En remplaçant les développements (III.6 et III.7) dans (III.4. et III.5), on déduit les équations aux perturbations linéarisées, soit:

$$\frac{\partial w'}{\partial r} + \frac{u'}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial v'}{\partial \theta} + \frac{\partial w'}{\partial z} = 0 \quad \text{III.9}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial u'}{\partial t} + Re_1 \frac{v}{r} \left(\frac{\partial u'}{\partial \theta} - 2v' \right) &= -\frac{\partial p'}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r \dot{\gamma}_{rr}(u')) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} (\dot{\gamma}_{r\theta}(u')) + \\ \frac{\partial}{\partial z} (\dot{\gamma}_{rz}(U)) - \frac{1}{r} \dot{\gamma}_{\theta\theta} & \end{aligned} \quad \text{III.10}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial v'}{\partial t} + Re_1 \left(u' \frac{dv}{dr} + u' \frac{v}{r} + \frac{v}{r} \frac{\partial v'}{\partial \theta} \right) &= -\frac{1}{r} \frac{\partial p'}{\partial \theta} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 \dot{\gamma}_{r\theta}) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} (\dot{\gamma}_{\theta\theta}) + \\ \frac{\partial}{\partial z} (\dot{\gamma}_{\theta z}) & \end{aligned} \quad \text{III.11}$$

$$\frac{\partial w'}{\partial t} + Re_1 \left(\frac{v}{r} \frac{\partial w'}{\partial \theta} \right) = -\frac{\partial p'}{\partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r \dot{\gamma}_{zr}) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} (\dot{\gamma}_{z\theta}) + \frac{\partial}{\partial z} (\dot{\gamma}_{zz}) \quad \text{III.12}$$

Avec

$$\begin{aligned} \dot{\gamma}_{rr}(u') &= 2 \frac{\partial u'}{\partial r} \\ \dot{\gamma}_{r\theta}(u') &= \frac{1}{r} \left(\frac{\partial u'}{\partial \theta} - v' \right) + \frac{\partial v'}{\partial r} \\ \dot{\gamma}_{rz}(u') &= \frac{\partial u'}{\partial z} + \frac{\partial w'}{\partial r} \end{aligned}$$

$$\dot{\gamma}_{\theta\theta}(u') = \frac{2}{r} \left(\frac{\partial v'}{\partial \theta} + u' \right)$$

$$\dot{\gamma}_{\theta z}(u') = \frac{1}{r} \frac{\partial w'}{\partial \theta} + \frac{\partial v}{\partial z}$$

$$\dot{\gamma}_{zz}(u') = 2 \frac{\partial w'}{\partial z}$$

On remplace $\dot{\gamma}_{ij}$ a les equations III.9- III.11

$$\frac{\partial u'}{\partial r} + \frac{u'}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial v'}{\partial \theta} + \frac{\partial w'}{\partial z} = 0 \quad \text{III.13}$$

$$\frac{\partial u'}{\partial t} + \text{Re}_1 \frac{V}{r} \left(\frac{\partial u'}{\partial \theta} - 2v' \right) = -\frac{\partial p'}{\partial r} + \nabla^2 u' - \frac{2}{r^2} \frac{\partial v'}{\partial \theta} - \frac{u'}{r^2} \quad \text{III.14}$$

$$\frac{\partial v'}{\partial t} + \text{Re}_1 \left(u' D_* V + \frac{V}{r} \frac{\partial v'}{\partial \theta} \right) = -\frac{1}{r} \frac{\partial p'}{\partial \theta} + \nabla^2 v' - \frac{2}{r^2} \frac{\partial u'}{\partial \theta} - \frac{v'}{r^2} \quad \text{III.15}$$

$$\frac{\partial w'}{\partial t} + \text{Re}_1 \left(\frac{V}{r} \frac{\partial w'}{\partial \theta} \right) = -\frac{\partial p'}{\partial z} + \nabla^2 w' \quad \text{III.16}$$

Où $D_* = \frac{d}{dr} + \frac{1}{r}$ Et $\dot{\gamma} = \gamma(U) = |\dot{\gamma}_{r\theta}| = \frac{|\tau_l| R_1^2}{r^2}$

III.3 La méthode des modes normaux

Les équations aux perturbations linéarisées (III.13-III.16) étant invariante dans la direction angulaire, il s'en suit que toute solution peut être écrite sous la forme d'une superposition de modes de Fourier complexes :

$$(u', v', w', p') = e^{\lambda t + i(m\theta + kz)} (u(r), v(r), w(r), p(r)) \quad \text{III.17}$$

Avec

u, v, w et p des amplitudes complexes.

m : : sont le nombre d'onde dans les directions longitudinale.

k : sont le nombre d'onde dans les directions azimutale.

Ou $\lambda = \lambda_r + i\lambda_i$

λ_r : c'est la partie réelle représentant le taux d'amplification.

λ_i : partie imaginaire est liée à la vitesse de phase λ

Pour :

$$\alpha = \lambda t + i(m\theta + kz)$$

Permettez $\mathbf{D} = \frac{d}{dr}$ et la remplacer au-dessus de chaque souche composant $\dot{\gamma}_{ij}$ pour obtenir :

$$\dot{\gamma}_{rr}(u') = 2 \frac{\partial u'}{\partial r} = 2D u e^\alpha \quad \text{III.18}$$

$$\dot{\gamma}_{r\theta}(u') = \frac{1}{r} \left(\frac{\partial u'}{\partial \theta} - v' \right) + \frac{\partial v'}{\partial r} = \left(\frac{1}{r} (i m u - v) + D v \right) e^\alpha \quad \text{III.19}$$

$$\dot{\gamma}_{rz}(u') = \frac{\partial u'}{\partial z} + \frac{\partial w'}{\partial r} = (i k u + D w) e^\alpha \quad \text{III.20}$$

$$\dot{\gamma}_{\theta\theta}(u') = \frac{2}{r} \left(\frac{\partial v'}{\partial \theta} + u' \right) = \frac{2}{r} (i m v + u) e^\alpha \quad \text{III.21}$$

$$\dot{\gamma}_{\theta z}(u') = \frac{1}{r} \frac{\partial w'}{\partial \theta} + \frac{\partial v}{\partial z} = \left(\frac{1}{r} i m w + i k v \right) e^\alpha \quad \text{III.22}$$

$$\dot{\gamma}_{zz}(u') = 2 \frac{\partial w'}{\partial z} = 2 i k w e^\alpha \quad \text{III.23}$$

Avec :

$$\frac{\partial u'}{\partial r} = D u e^\alpha \quad , \quad \frac{\partial v'}{\partial r} = D v e^\alpha \quad , \quad \frac{\partial w'}{\partial r} = D w e^\alpha \quad \text{III.24}$$

$$\frac{\partial u'}{\partial \theta} = i m u e^\alpha \quad , \quad \frac{\partial v'}{\partial \theta} = i m v e^\alpha \quad , \quad \frac{\partial w'}{\partial \theta} = i m w e^\alpha \quad \text{III.25}$$

$$\frac{\partial u'}{\partial z} = i k u e^\alpha \quad , \quad \frac{\partial v'}{\partial z} = i k v e^\alpha \quad , \quad \frac{\partial w'}{\partial z} = i k w e^\alpha \quad \text{III.26}$$

On remplace III.24-III.26 a équation de continuité III.13 :

$$D u' e^\alpha + \frac{u'}{r} e^\alpha + \frac{1}{r} i m v e^\alpha + i k w e^\alpha = 0 \Leftrightarrow \left[D u' + \frac{u'}{r} + \frac{1}{r} i m v + i k w \right] e^\alpha = 0$$

$$\Leftrightarrow D_* u' + \frac{1}{r} i m v + i k w = 0 \quad \text{III.27}$$

Réécrire les équations (III.14.-III.16) à la forme suivante :

$$\frac{\partial u'}{\partial t} = -Re_1 \frac{V}{r} \left(\frac{\partial u'}{\partial \theta} - 2v' \right) - \frac{\partial p'}{\partial r} + \nabla^2 u' - \frac{2}{r^2} \frac{\partial v'}{\partial \theta} - \frac{u'}{r^2} \quad \text{III.28}$$

$$\frac{\partial v'}{\partial t} = -Re_1 \left(u' D_* V + \frac{V}{r} \frac{\partial v'}{\partial \theta} \right) - \frac{1}{r} \frac{\partial p'}{\partial \theta} + \nabla^2 v' - \frac{2}{r^2} \frac{\partial u'}{\partial \theta} - \frac{v'}{r^2} \quad \text{III.29}$$

$$\frac{\partial w'}{\partial t} = -Re_1 \left(\frac{V}{r} \frac{\partial w'}{\partial \theta} \right) - \frac{\partial p'}{\partial z} + \nabla^2 w' \quad \text{III.30}$$

Avec

$$\frac{\partial u'}{\partial t} = \lambda u' e^\alpha, \quad \frac{\partial v'}{\partial t} = \lambda v' e^\alpha, \quad \frac{\partial w'}{\partial t} = \lambda w' e^\alpha \quad \text{III.31}$$

$$\frac{\partial p'}{\partial r} = D p e^\alpha, \quad \frac{\partial p'}{\partial \theta} = i m p e^\alpha, \quad \frac{\partial p'}{\partial z} = i k p e^\alpha \quad \text{III.32}$$

On remplace les équations (III.18-III.26) et (III.31-III.32) en (III.28-III.30) pour devenir

$$\begin{aligned} \lambda u' e^\alpha = & -Re_1 \frac{V}{r} (i m u' e^\alpha - 2v' e^\alpha) - D p' e^\alpha + D^2 u' e^\alpha + \frac{D u'}{r} e^\alpha + \\ & (i k)^2 u' e^\alpha + (i m)^2 u' e^\alpha - \frac{2}{r^2} i m u' e^\alpha - \frac{u' e^\alpha}{r^2} \end{aligned} \quad \text{III.33}$$

$$\begin{aligned} \lambda v' e^\alpha = & -Re_1 \left(D_* V u' e^\alpha - \frac{V}{r} i m v' e^\alpha \right) - \frac{1}{r} i m p' e^\alpha + D^2 v' e^\alpha + \frac{D v'}{r} e^\alpha \\ & + (i k)^2 v' e^\alpha + (i m)^2 v' e^\alpha - \frac{2}{r^2} i m u' e^\alpha - \frac{v' e^\alpha}{r^2} \end{aligned} \quad \text{III.34}$$

$$\begin{aligned} \lambda w' e^\alpha = & -Re_1 \left(\frac{V}{r} i m w' e^\alpha \right) - \frac{1}{r} i k p' e^\alpha + D^2 w' e^\alpha + \frac{D w'}{r} e^\alpha + \\ & (i k)^2 w' e^\alpha + (i m)^2 w' e^\alpha \end{aligned} \quad \text{III.35}$$

Cas axisymétrique

Pour nos problème si $m=0$ donc on obtenir :

L'équation de continuité III.27 est :

$$D_* u + ikw = 0 \quad \text{III.36}$$

Les équations de quantité mouvement (III.33-III.35) est :

$$\lambda u - 2Re_1 \left(\frac{V}{r} \right) v = -Dp + D^2 u + \frac{Du}{r} - K^2 u - \frac{u}{r^2} \quad \text{III.37}$$

$$\lambda v + Re_1 u D_* v = D^2 v + \frac{Dv}{r} - K^2 v - \frac{v}{r^2} \quad \text{III.38}$$

$$\lambda w = -ikp + D^2 w + \frac{Dw}{r} - K^2 w \quad \text{III.39}$$

En utilisant le fait que $DD_* = \frac{d^2}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d}{dr} - \frac{1}{r^2}$ et $D_* D = \frac{d^2}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d}{dr}$ nous pouvons réécrire les équations (III.36) à (III.39) comme :

$$D_* u = -ikw \quad \text{III.40}$$

$$(DD_* - k^2 - \lambda)u + 2Re_1 \left(\frac{V}{r} \right) v = -Dp \quad \text{III.41}$$

$$(DD_* - k^2 - \lambda)v = Re_1 u (D * V) \quad \text{III.42}$$

$$(DD_* - k^2 - \lambda)w = ikp \quad \text{III.43}$$

On élimine w et la pression p . ces manipulations conduisent aux équations suivantes formulées seulement en u et v .

Par combinaison entre l'équation (III.40) et (III.43) on obtenir

$$(DD_* - k^2 - \lambda)D_* u = -ik(ikp) = k^2 p \quad \text{III.44}$$

Alor
$$Dp = \frac{1}{k^2} D(D_*D - K^2 - \lambda)D_*u \quad \text{III.45}$$

Substituer l'expression ci-dessus pour la Dp en équation (III.41) pour obtenir

$$(DD_* - k^2 - \lambda)u + 2\text{Re}_1\left(\frac{V}{r}\right)v = \frac{1}{k^2} D(D_*D - K^2 - \lambda)D_*u \quad \text{III.46}$$

Noter

$$\frac{1}{k^2} D(D_*D - K^2 - \lambda)D_*u - (DD_* - k^2 - \lambda)u = \frac{1}{k^2} (D_*D - K^2 - \lambda)(D_*D - K^2)u$$

III.47

Afin que nous puissions obtenir les équations différentielles

$$(D_*D - K^2 - \lambda)(DD_* - k^2)u = 2k^2\text{Re}_1\left(\frac{V}{r}\right)v \quad \text{III.48}$$

$$(DD_* - k^2 - \lambda)v = \text{Re}_1(D_*V)u \quad \text{III.49}$$

Qui peut être réécrite comme le système linéaire

$$A = \lambda * B$$

$$\begin{pmatrix} (DD_* - k^2)^2 & -2k^2\text{Re}_1\left(\frac{V}{r}\right) \\ -\text{Re}_1(D_*V) & (DD_* - k^2) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} DD_* - k^2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \quad \text{III.50}$$

$$A = \begin{pmatrix} (DD_* - k^2)^2 & -2k^2\text{Re}_1\left(\frac{V}{r}\right) \\ -\text{Re}_1(D_*V) & (DD_* - k^2) \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} DD_* - k^2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

III.4. résolution numérique:

III.4.1. Introduction :

Pour la résolution numérique de problème aux les valeurs propres, nous utilisons la méthode numérique spectrale.

Pendant longtemps les méthodes aux différences finies (en espace et en temps) ont été préférées aux méthodes spectrales. Avec l'augmentation des résolutions accessibles et l'apparition d'algorithmes plus efficaces (exemple : transformée de fourier Rapide) les méthodes spectrales sont devenues véritablement compétitives.

III.4.2. Méthode spectral :

L'application de méthode numériques spectrales aux simulations numérique est apparie au début des années 1970 [15].L'usage des méthodes spectrales se réelle partailierement efficace pour les problèmes non linéaires. Le principe consiste a utiliser des fonctions d'essai ,approchant assez bien la fonction inconnue , qui se décomposent sur des fonction des base ,L'équitation différentielle initiale se trait allais par la méthode des résidus pondères (MRP)qui conduit a des dérivées sur les fonction d'essai ,qui traite de façon classique (méthode de ronge-kutta, par exemple)

Les fonction de base peuvent être des polynômes de tchebycheff, des polynômes de Legendre ,ou des fonction trigonométrique (série de fouiner),si le phénomène Adenet des solution périodiques dons centrais cas ou peut leur appliquer la transformation fouiner rapide (FFT) .

Un avantage des méthodes spectrales est que l'ordre d'erreur maximale... plus rapidement que $1/N^\alpha$, pour tout α ou N représente le rang de troncature dans les fonctions d'essai. Grace aux méthodes spectrale, ou peut aux :étudier le phénomène dans le plan réel et dans le Plon spectral, ce qui est spécialement intéressant dans l'étude de la turbulence.

Mais les méthodes spectrales présentent les difficultés suivantes : Efficacité limitée aux géométries simples (mais ou surmonta cette difficulté en utilisant la transformation conformes).Algorithme de programmation plus compliques que pour aux des différences finis par exemple. Aboutissement a des équations linéaire dont les matrice associées n but pas toujours une fourme simple. problèmes de conditionnement numérique et de stabilité.

Chapitre II

Formulation mathématique

Introduction :

Dans ce chapitre on cherche à modéliser les phénomènes hydrodynamiques résultants de l'écoulement d'un fluide visqueux entre deux cylindres concentriques de rayons (R_1 , R_2) respectivement.

Le problème physique posé par les configurations précédentes est décrit par les équations aux dérivées partielles de continuité et des quantités de mouvement, dites l'équations de Navier-Stokes, ainsi que par leurs conditions initiales et aux limites. Ces équations seront écrites dans les coordonnées cylindriques, ce qui permettra une meilleure analyse des résultats et une facilité de calcul étant donné la nature géométrique du domaine de travail. Un schéma descriptif du système à étudier est donné dans la figure II.1.

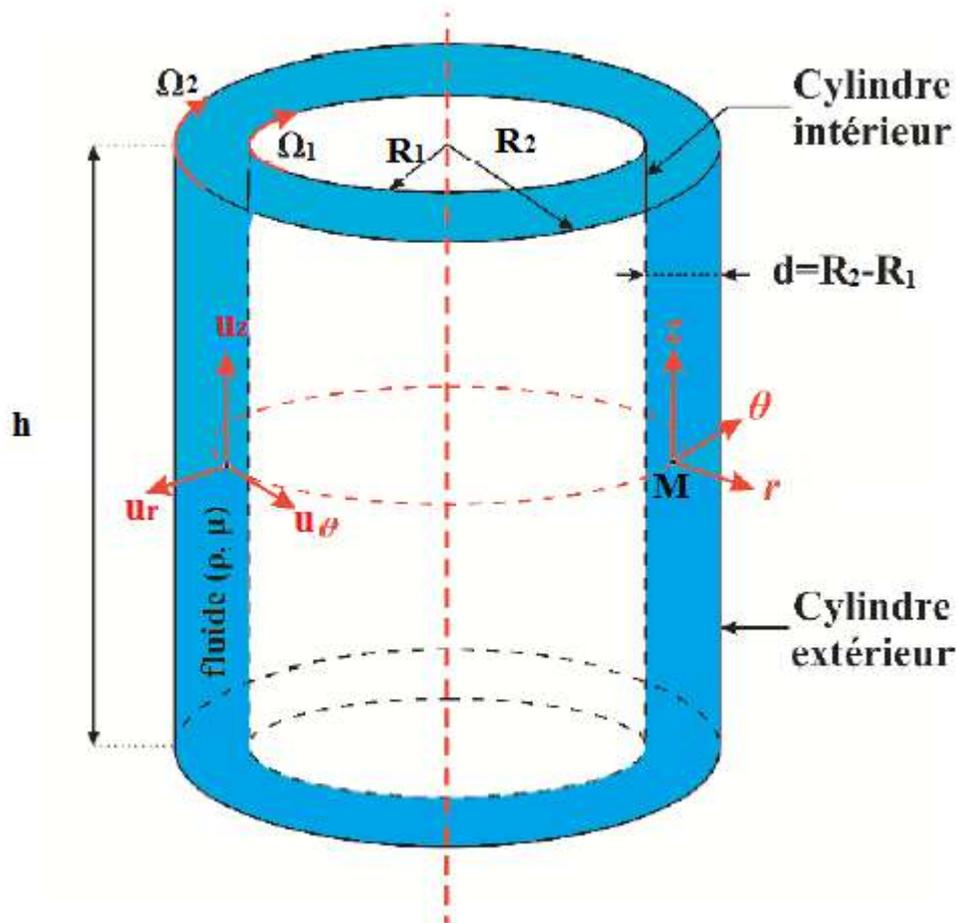


Fig. II.1: Schéma descriptif du problème

II.1 Formulation mathématique

Nous présentons la formulation mathématique d'un l'écoulement de Taylor-Couette pour un fluide newtonien.

Pour décrire cet écoulement, il suffit de déterminer les variables d'Euler qui sont : la vectrice vitesse et la pression \mathbf{P} .

La description du champ de vitesse \vec{V} de composantes (u_r, u_θ, u_z) et celui de pression \mathbf{P} s'effectuent en fonction de l'espace et du temps \mathbf{t} . Ils sont représentées dans un système de coordonnées cylindriques au point $M(r, \theta, z)$ (voir fig. II.1) de façon que \vec{V} et le champ de pression \mathbf{P} vérifient les équations hydrodynamiques, tel que:

II.1.1. L'équation de continuité :

Pour un écoulement incompressible, l'équation de continuité en coordonnées cylindriques se présente sous la forme suivante:

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r u_r) + \frac{1}{r} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial u_z}{\partial z} = 0 \quad \text{II.1}$$

II.1.2 L'équation de la quantité de mouvement :

En coordonnées cylindriques à symétrie axiale, les équations projetées suivant les directions radiale, azimutale et axiale s'écrivent alors :

a) Equation de quantité de mouvement azimutale :

$$\begin{aligned} \frac{\partial u_r}{\partial t} + u_r \frac{\partial u_r}{\partial r} + \frac{u_\theta}{r} \frac{\partial u_r}{\partial \theta} + u_z \frac{\partial u_r}{\partial z} - \frac{u_\theta^2}{r} \\ = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial r} + \nu \left[\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial u_r}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u_r}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 u_r}{\partial z^2} - \frac{u_r}{r^2} - \frac{2}{r^2} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} \right] \end{aligned} \quad \text{II.2}$$

b) Equation de quantité de mouvement radiale :

$$\begin{aligned} \frac{\partial u_\theta}{\partial t} + u_r \frac{\partial u_\theta}{\partial r} + \frac{u_\theta}{r} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + u_z \frac{\partial u_\theta}{\partial z} - \frac{u_r u_\theta}{r} \\ = -\frac{1}{\rho r} \frac{\partial p}{\partial \theta} + \nu \left[\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial u_\theta}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u_\theta}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 u_\theta}{\partial z^2} - \frac{u_\theta}{r^2} + \frac{2}{r^2} \frac{\partial u_r}{\partial \theta} \right] \end{aligned} \quad \text{II.3}$$

c) **Equation de quantité de mouvement axiale:**

$$\frac{\partial u_z}{\partial t} + u_r \frac{\partial u_z}{\partial r} + \frac{u_\theta}{r} \frac{\partial u_z}{\partial \theta} + u_z \frac{\partial u_z}{\partial z} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} + \nu \left[\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial u_z}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u_z}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 u_z}{\partial z^2} \right]$$

II.4

Ou

\mathbf{u}_r la vitesse azimutale, \mathbf{u}_θ la vitesse radial, \mathbf{u}_z vitesse axiale, \mathbf{p} la prissions.

II.1.3 écoulement de base :

L'écoulement de bas est suppose stationnaire et incompressible avec un champ de vitesse est permanente azimutale. $V = (0, V(r), 0)$

La contrainte de cisaillement $\tau_{r\theta}$ est donnée par la formule (I.9) :

$$\tau_{r\theta} = \mu \dot{\gamma}_{r\theta}$$

II.5

On combinaison entre les équations (II.3 et II.5) L'équation de mouvemente écrit en coordonne cylindrique en forme :

$$\theta: \quad 0 = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 \tau_{r\theta})$$

II.6

II.1.4 Conditions aux limites :

Le domaine d'étude est défini par : $R_1 < r < R_2$.

Les conditions aux limites sont en général les conditions d'adhérence aux parois, comme suit :

Il existe deux conditions aux limites possibles qui peuvent être appliqués au cylindre intérieur.

$$\tau_{r\theta}(R_1) = \tau_1$$

II.7

Ou une vitesse interne

$$V(R_1) = \Omega_1 R_1$$

II.8

Pour la cylindre extérieur condition aux limites la vitesse est :

$$V(R_2) = \Omega_2 R_2$$

II.10

II.2. équation adimensionnel :

Pour permettre d'avoir des informations généralisées à une variété des problèmes ayant les mêmes ordres du grandeurs des coefficient de similitude d'un coté, et d'un autre coté, réduire le nombre de paramètres d'un problème, on emploi de la variable adimensionnelle permet d'exprimer la réalité des phénomènes physiques indépendamment des systèmes de mesures. En effet, pour faire apparaître les paramètres de contrôle du problème étudié, il est nécessaire d'introduire les grandeurs de référence.

On définit les grandeurs caractéristiques introduites dans nos équations du modèle mathématique comme suit [8] :

$$V = \frac{1}{\hat{\Omega}_1 \hat{R}_1} \hat{V} \quad , r = \frac{1}{d} \hat{r} \quad , \quad Z = \frac{1}{d} \hat{Z} \quad , \quad t = \frac{1}{\hat{T}} \hat{t} \quad , \quad P = \frac{1}{P_0} \hat{P} \quad , \quad \tau = \frac{1}{P_0} \hat{\tau} \quad ,$$

avec $\hat{d} = R_2 - R_1 \quad , \hat{T} = \frac{\rho d^2}{\mu_P}$ et $P_0 = \frac{\hat{\mu}_P \hat{R}_1 \hat{\Omega}_2}{d}$,

L'équation de Navier-Stokes Adimensionnelement donne :

$$\nabla \cdot U = 0 \tag{II.10}$$

$$U_t + Re_1 (U, \nabla) U = -\nabla P + \nabla \tau \tag{II.11}$$

Avec

$$Re_1 = \frac{\hat{\rho} \hat{R}_1 \hat{\Omega}_1 \hat{d}}{\hat{\mu}_P} \tag{II.12}$$

Re_1 :c'est le nombre de Reynolds défini ou niveaux de la paroi intérieur

$$Re_2 = \frac{\hat{\rho} \hat{R}_2 \hat{\Omega}_2 \hat{d}}{\hat{\mu}_P} \tag{II.13}$$

Re_2 :c'est le nombre de Reynolds défini ou niveaux de la paroi intérieur

Soit $\eta = \hat{R}_1 / \hat{R}_2$ Puis \hat{R}_1 et \hat{R}_2 se redimensionné à ;

$$R_1 = \frac{\eta}{1-\eta} \tag{II.14}$$

$$R_2 = \frac{1}{1-\eta} \tag{II.15}$$

Respectivement. Notez que cette mise à l'échelle, la largeur d'espace $\hat{\mathbf{d}} = \mathbf{1}$. Lors du cylindre intérieur, nous pouvons appliquer la condition à la limite du stress interne.

$$\tau_{r\theta}(R_1) = \tau_i \quad \text{II.17}$$

II.3. Le profil de vitesse :

Nous utilisons l'équation de quantité mouvement en coordonne cylindrique (II.6) et les conditions aux limite pour détermine l'équation de profil de vitesse .

la condition aux limites au niveau de cylindre intérieur :

$$V(R_1) = 1 \quad \text{II.18}$$

la condition aux limite au niveau de cylindre externe :

$$V(R_2) = \frac{\Omega R_2}{R_1} = \frac{\Omega}{\eta} \quad \text{II.19}$$

Où $\Omega = \Omega_2/\Omega_1$.

Ω_1 Vitesse de rotation du cylindre intérieur

Ω_2 Vitesse de rotation du cylindre extérieur

Pour un fluide newtonien l'équation (II.5) et (II.6) donne :

$$\dot{\gamma}_{r\theta} = \tau_{r\theta} = \frac{\tau_i R_1^2}{r^2} \quad \text{II.20}$$

Avec
$$\dot{\gamma}_{r\theta} = \frac{dV}{dr} - \frac{V}{r} = r \frac{d}{dr} \left(\frac{V}{r} \right) \quad \text{II.21}$$

La combinaison entre les équations (II.20 et II.21) donne :

$$r \frac{d}{dr} \left(\frac{V}{r} \right) = \frac{\tau_i R_1^2}{r^2} \quad \text{II.22}$$

Après manipulation on a :

$$V = -\frac{1}{2} \frac{\tau_i R_1^2}{r} + Cr \quad \text{II.23}$$

On utilisé les conditions aux limites (II.19) pour déterminer la constant C

$$\Omega \frac{R_2}{R_1} = -\frac{1}{2} \frac{\tau_i R_1^2}{R_2} + C R_2 \quad \text{II.24}$$

Après le calcul on trouve :

$$C = \frac{\Omega}{R_1} + \frac{1}{2} \frac{\tau_i R_1^2}{R_2^2} \quad \text{II.25}$$

On remplace II.25 en II.23

La formule de profil de vitesse est :

$$V = \frac{\Omega}{R_1} r + \frac{1}{2} \tau_i R_1^2 r \left(\frac{1}{R_2^2} - \frac{1}{r^2} \right) \quad \text{II.27}$$

pour calculer τ_i on utilise la condition II.18 :

$$V(R_1) = 1 = \Omega + \frac{1}{2} \tau_i R_1 \left(\frac{R_1^2}{R_2^2} - 1 \right) = \Omega + \frac{1}{2} \tau_i \frac{\eta}{1-\eta} (\eta^2 - 1)$$

Donc :

$$\tau_i = 2 \left(\frac{1-\Omega}{\eta^2-1} \right) \left(\frac{1-\eta}{\eta} \right) \quad \text{II.28}$$

Le profil de vitesse pour écoulement de Taylor-couette pour un fluide newtonien est donné par

$$V = \frac{\Omega}{\left(\frac{\eta}{1-\eta} \right)} r + \frac{1}{2} 2 \left(\frac{1-\Omega}{\eta^2-1} \right) \left(\frac{1-\eta}{\eta} \right) \left(\frac{\eta}{1-\eta} \right)^2 r \left(\frac{1}{\left(\frac{1}{1-\eta} \right)^2} - \frac{1}{r^2} \right) \quad \text{II.29}$$

a) cas ou le cylindre extérieur est fixe ($\Omega_2=0$).

On trace les profils de vitesse pour différents rapport de rayon η ($\eta=0.3$, $\eta=0.5$, $\eta=0.883$) dans le cas où le cylindre extérieur est fixe.

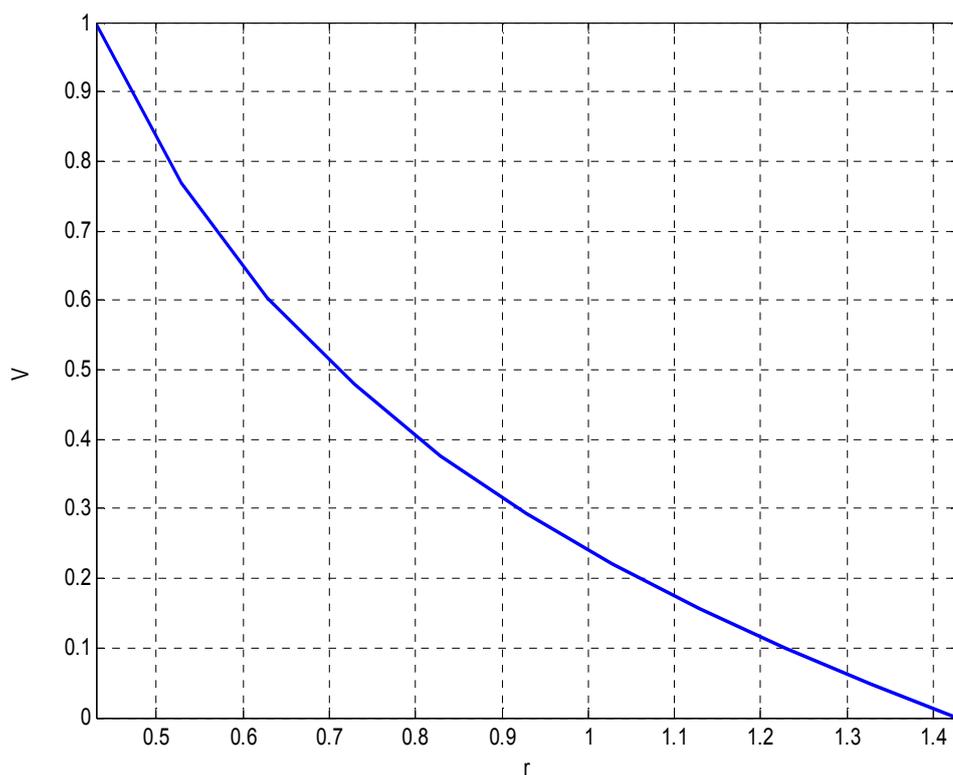


Fig. II 2 : profil de vitesse pour un rapport de rayon $\eta=0.3$ et vitesse angulaire de cylindre extérieur $\Omega_2=0$

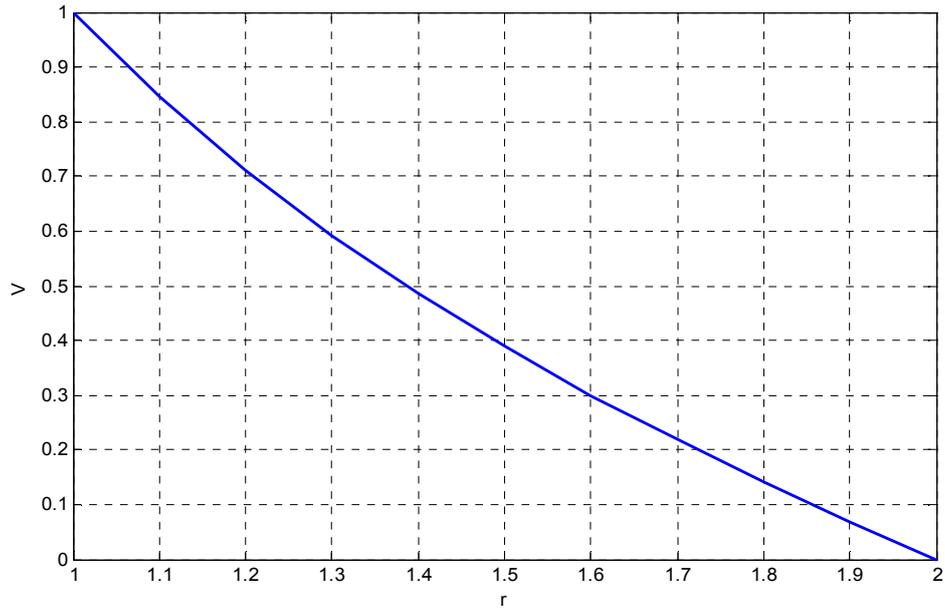


Fig. II 3 : profil de vitesse pour un rapport de rayon $\eta=0.5$ et vitesse angulaire de cylindre extérieur $\Omega_2=0$

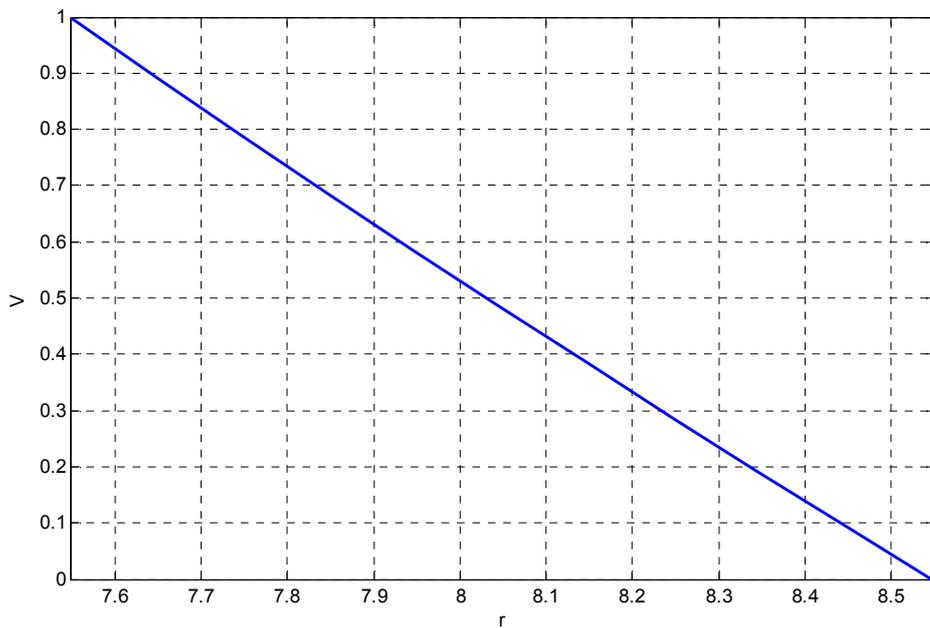


Fig. II 4 : profil de vitesse pour un rapport de rayon $\eta=0.883$ et vitesse angulaire de cylindre extérieur $\Omega_2=0$

Les figures (II.2, II.3, II.4) montrent que la variation de la vitesse est important au niveau de la paroi de cylindre intérieur puis diminuer jusque a niveau de la paroi de cylindre extérieur

b) Cas ou les deux cylindres en contre-rotation :

On trace les profils de vitesse pour différents rapport de rayon η ($\eta=0.3$, $\eta= 0.5$, $\eta=0.883$). Dans cette partie en chaque figure nous traçons plusieurs graphes varient par rapport la vitesse angulaire de cylindre extérieur Ω_2 avec la cylindre extérieur est tournée a sens inverse.

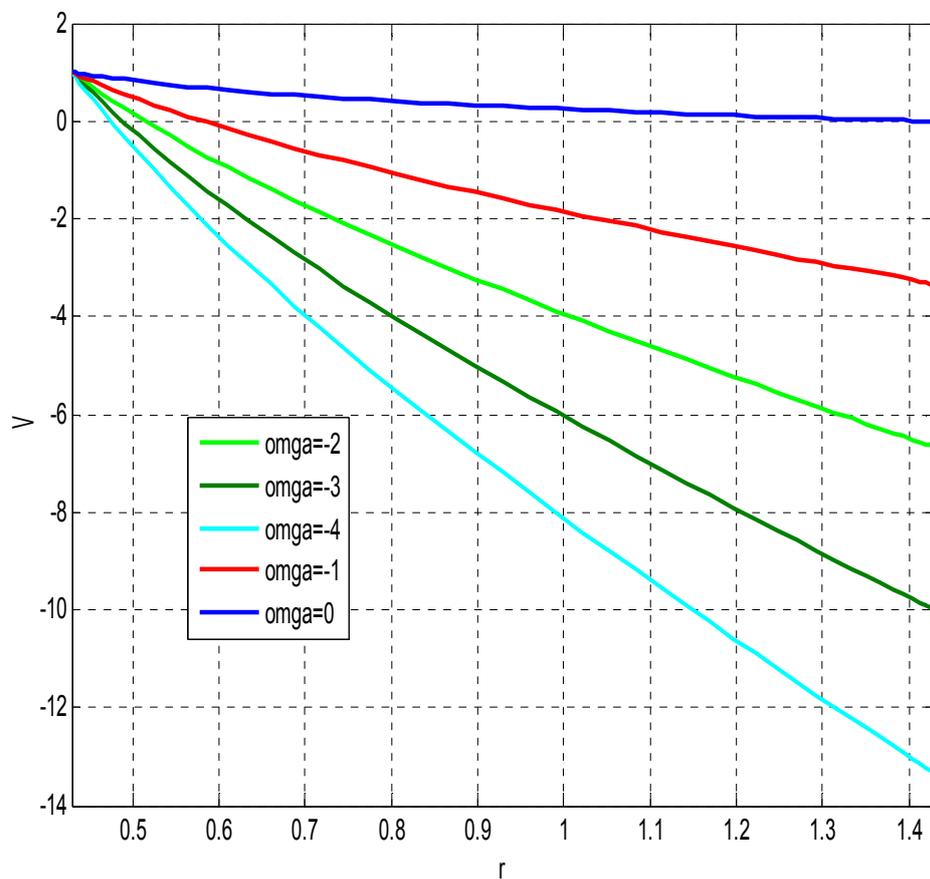


Fig. II.5: profil de vitesse pour un rapport de rayon $\eta=0.3$ et vitesse angulaire de cylindre extérieur $\Omega_2=0, \Omega_2= -1, \Omega_2= -2, \Omega_2= -3, \Omega_2= -4$,

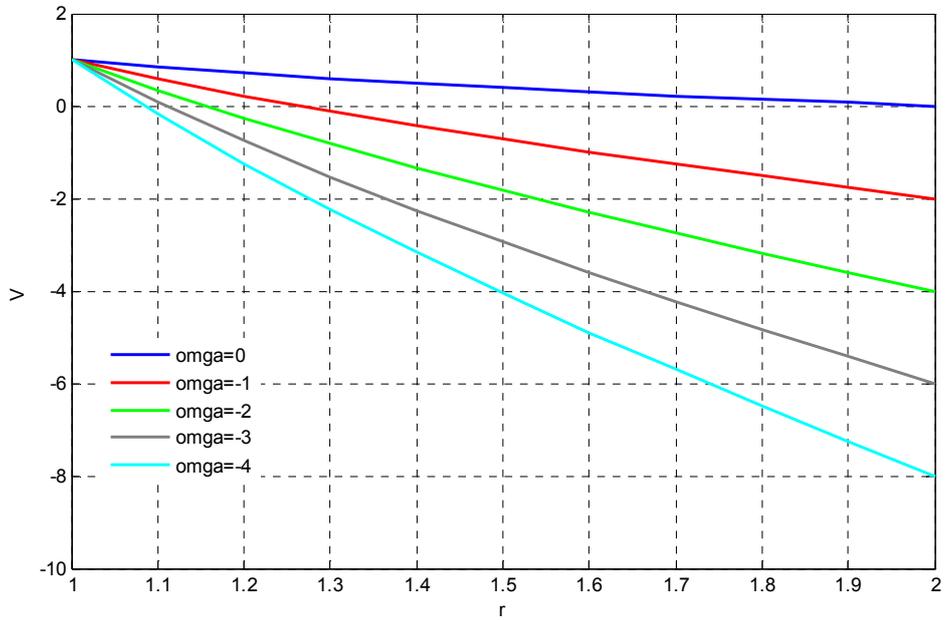


Fig. II 6: profil de vitesse pour un rapport de rayon $\eta=0.5$ et vitesse angulaire de cylindre extérieur $\Omega_2=0, \Omega_2=-1, \Omega_2=-2, \Omega_2=-3, \Omega_2=-4,$

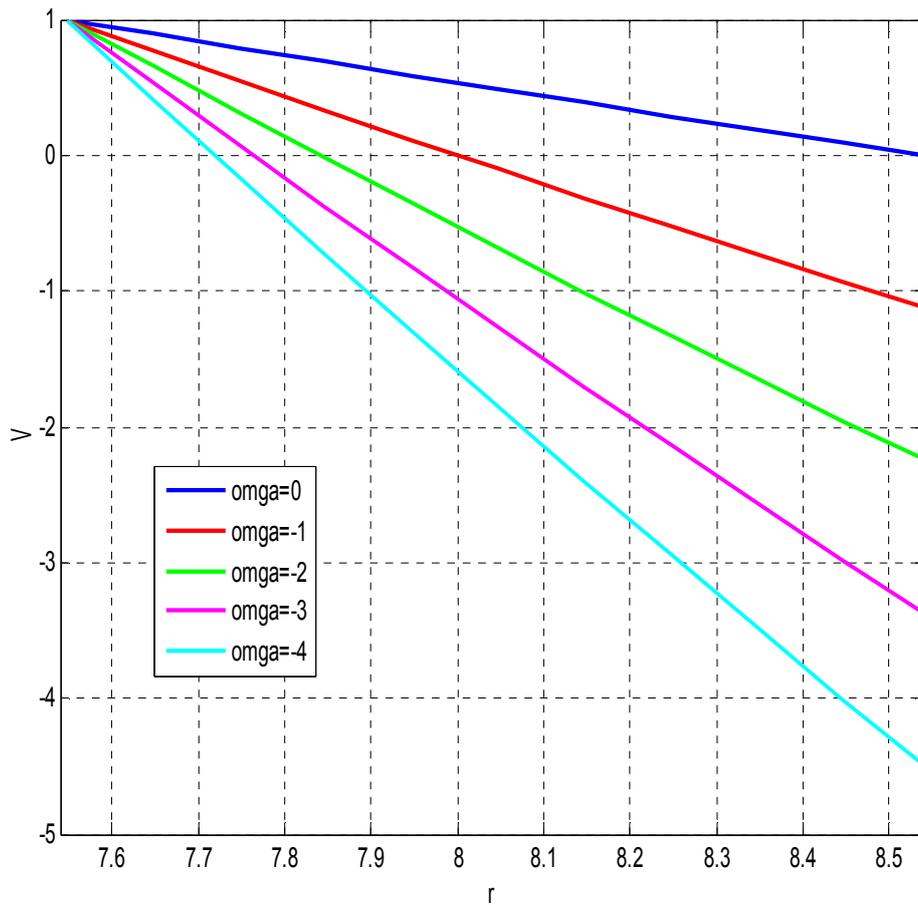


Fig. II 7 : profil de vitesse pour un rapport de rayon $\eta=0.883$ et vitesse angulaire de cylindre extérieur $\Omega_2=0, \Omega_2= -1, \Omega_2= -2, \Omega_2= -3, \Omega_2= -4,$

Dans ce cas la vitesse au niveau de la paroi extérieure $V_2 = \frac{\Omega}{\eta}$ on signe négatif c.-à-d la cylindre extérieur est tournée a sens inverse. Pour des faibles vitesses de rotation au niveau de paroi extérieur (Ω_2) la vitesse est importante au niveau de la paroi intérieur .si on augmente vitesse de rotation au niveau de paroi extérieur (Ω_2) la vitesse devient important ou niveau de paroi extérieur. donc ce cas le fluide est divise par deux parties : un partie tourne avec la cylindre intérieur et un partie tourne avec la cylindre extérieur.

c) Cas on les cylindres est en Co-rotation :

On trace les profils de vitesse pour différents rapport de rayon η ($\eta=0.3$, $\eta= 0.5$, $\eta=0.883$). Dans cette partie en chaque figure nous traçons plusieurs graphes varient par rapport la vitesse angulaire de cylindre extérieur Ω_2 . Nous augmentons chaque fois la vitesse angulaire de cylindre extérieur en même sens de rotation du cylindre intérieur.

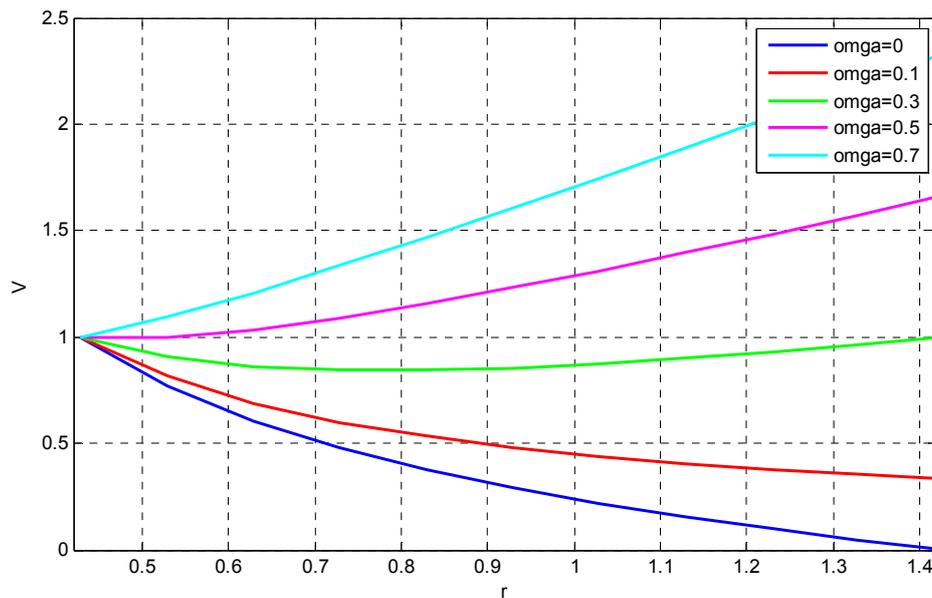


Fig. II 8: profil de vitesse pour un rapport de rayon $\eta=0.3$ et vitesse angulaire de cylindre extérieur $\Omega_2=0, \Omega_2= 0.1, \Omega_2=0.3, \Omega_2= 0.5, \Omega_2= 0.7$,

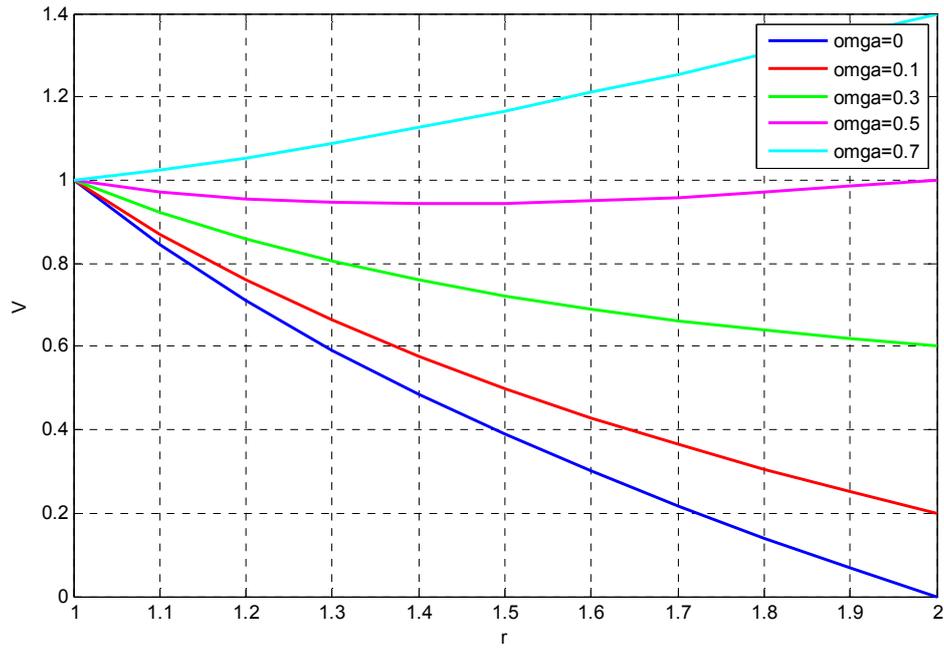


Fig. II 9 : profil de vitesse pour un rapport de rayon $\eta=0.5$ et vitesse angulaire de cylindre extérieur $\Omega_2=0, \Omega_2= 0.1, \Omega_2=0.3, \Omega_2= 0.5, \Omega_2= 0.7,$

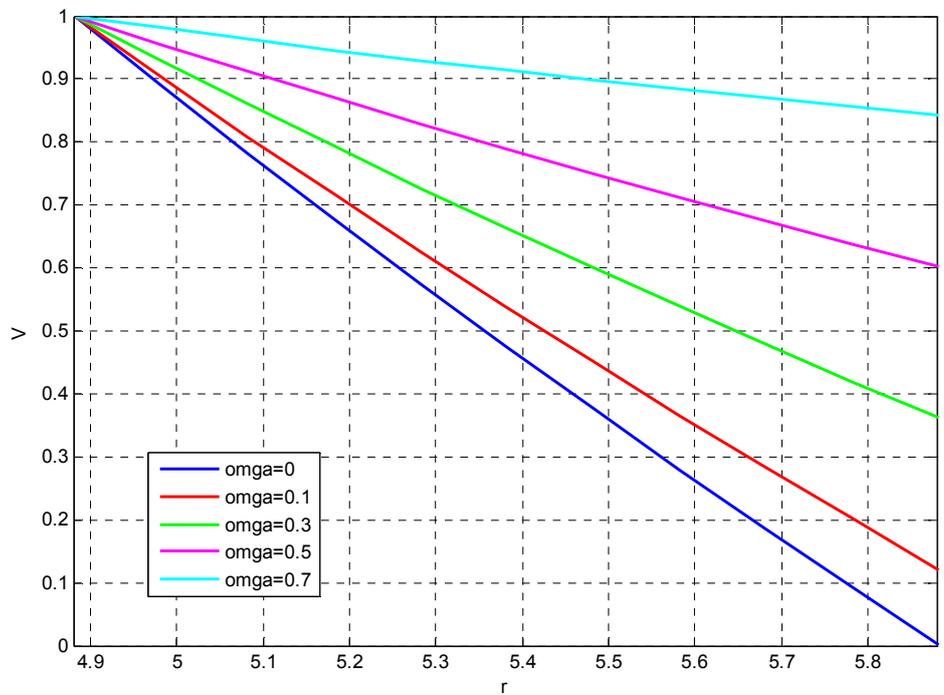


Fig. II 10 : profil de vitesse pour un rapport de rayon $\eta=0.883$ et vitesse angulaire de cylindre extérieur $\Omega_2=0, \Omega_2= 0.1, \Omega_2=0.3, \Omega_2= 0.5, \Omega_2= 0.7,$

Puisque on a une rotation du cylindre extérieur .pour des faibles vitesses de rotation au niveau de la paroi extérieur (Ω_2) la vitesse est important au niveau de la paroi intérieur .si on augment la vitesse au niveau de la paroi extérieur (Ω_2) la vitesse est important au niveau de la paroi extérieur.

Conclusion générale

Ce travail concerne l'étude de la stabilité hydrodynamique dans le cas d'un écoulement de Taylor Couette pour un fluide newtonien.

Une étude bibliographique a permis de regrouper les résultats concernant les conditions d'apparition d'instabilités au sein de l'écoulement.

Le comportement hydrodynamique est étudié à travers le profile de vitesse et la pression, pour des différentes valeurs du nombre de Reynolds, correspondant à la transition de régime laminaire vers la 1ère et la 2ème instabilité. Le seuil de la transition du régime stable au régime turbulent instable est caractérisé par le nombre de Reynolds critique. Nous avons étudié également l'influence du rapport de rayon sur le seuil de la transition entre différents régimes. Pendant le changement de la vitesse de rotation nous notons que: pour une faible vitesse, l'écoulement entre les deux cylindres est laminaire, les lignes de courant sont des cercles concentriques. Si l'on augmente la vitesse de rotation du cylindre intérieur, les effets de l'inertie deviennent trop forts et la viscosité ne peut plus empêcher la création d'une instabilité. On observe l'apparition de rouleaux dans l'écoulement. L'écoulement est dit Taylor-couette. Si l'on continue à augmenter la vitesse de rotation, une deuxième instabilité apparaît et baisse encore la symétrie de l'écoulement. Les rouleaux décrits plus hauts se mettent à osciller périodiquement. En continuant à augmenter les vitesses font perdre à l'écoulement toute symétrie et on obtient un écoulement turbulent.

Les résultats sont en bon accord avec les résultats existants talque Landry et Chaudras khan.

INTRODUCTION GENERALE

Pour la compréhension des phénomènes d'instabilités et de transitions vers la turbulence, la mécanique des fluides s'intéresse plus particulièrement à des systèmes relativement simples, tel que, les cylindres tournants, qui sont l'objectif de notre étude, les sphères tournantes, les cônes tournants, disques tournants, etc.....

L'étude de l'instabilité de l'écoulement entre deux cylindres concentriques en rotation connue sous le nom de « Taylor-Couette » a suscité un grand intérêt depuis les travaux initiaux de G.I. Taylor [1]. Bien que cette instabilité soit aujourd'hui bien connue théoriquement, expérimentalement et numériquement, des effets extérieurs peuvent être ajoutés à cet écoulement qui le rend alors plus complexe: champ magnétique, parois complantes, fluide viscoélastique, flux thermique, effet de la stratification, etc. En outre, des facteurs influencent la stabilité de l'écoulement : facteur de forme, rapport d'aspect, l'angle de l'inclinaison, les vitesses de rotation des cylindres ainsi que la viscosité du fluide utilisé dans l'espace annulaire. L'inertie du fluide en mouvement, notamment la force centrifuge créée par la rotation a tendance à faire croître les instabilités (effet déstabilisant), alors que la viscosité du fluide a tendance à gommer les instabilités (effet stabilisant).

A faible vitesse, l'écoulement entre les deux cylindres est laminaire, les lignes de courant sont des cercles concentriques. La viscosité arrive à contenir les effets déstabilisant de l'inertie. C'est l'écoulement de Couette.

Si l'on augmente la vitesse de rotation du cylindre intérieur, les effets de l'inertie deviennent trop forts et la viscosité ne peut plus empêcher la création d'une instabilité. On observe l'apparition de rouleaux dans l'écoulement. L'écoulement est dit Taylor-couette.

Si l'on continue à augmenter la vitesse de rotation, une deuxième instabilité apparait et baisse encore la symétrie de l'écoulement. Les rouleaux décrits plus hauts se mettent à osciller périodiquement.

En continuant à augmenter les vitesses font perdre à l'écoulement toute symétrie et on obtient un écoulement turbulent.

Ce genre d'écoulement est lié à un grand nombre d'applications. Citons par exemple les machines rotatives et centrifuges, les paliers de butée, les viscosimètres, le pompage des métaux liquides à hautes températures de fusion, la production des

cristaux, la rotation des disques durs d'ordinateurs : cet empilement de disques en rotation rapide entraîne une mince couche d'air interstitielle, dont les instabilités peuvent induire des vibrations, et donc un risque d'endommagement par contact avec la tête de lecture.

Le présent travail comporte quatre chapitres. Le premier est consacré à une recherche bibliographique sur l'écoulement Taylor-Couette et les principales études théoriques, expérimentales concernant cet écoulement.

La description de l'écoulement et la formulation mathématique du problème avec les caractéristiques géométriques et physiques dans la 2^{ème} chapitre.

En troisième partie par étude de stabilité linéaire nous déterminons le système linéaire pour la résolution numérique. On y présente les étapes de la démarche numérique. Les résultats et leurs discussions seront présentés dans le quatrième chapitre.

Chapitre I

Écoulement Taylor-Couette

NOMENCLATURE

Symboles latins :

R1	Rayon du cylindre intérieur
R2	Rayon du cylindre extérieur
H	Hauteur du dispositif de Couette
d	Espace entre les deux cylindres coaxiaux ou espace annulaire
U	Composante radiale de la vitesse d'écoulement du fluide
V	Composante tangentielle de la vitesse d'écoulement du fluide
W	Composante axiale de la vitesse d'écoulement du fluide
r	Composante cylindrique de la direction radiale
z	Composante cylindrique de la direction axiale
P	Pression
g	Accélération de la pesanteur
Mc	Moment cinétique
Re	Nombre de Reynolds
Ta	Nombre de Taylor
Fr	Nombre de Froude
Re 1	Nombre de Reynolds de l'écoulement a cylindre intérieur
Re2	Nombre de Reynolds de l'écoulement
Re _c	Nombre de Reynolds critique de l'écoulement a cylindre extérieur
t	temps
Ri-Si	rotor-stator

u' , v' , w' Composantes radiale, azimutale, axiale de la vitesse

Abbreviations:

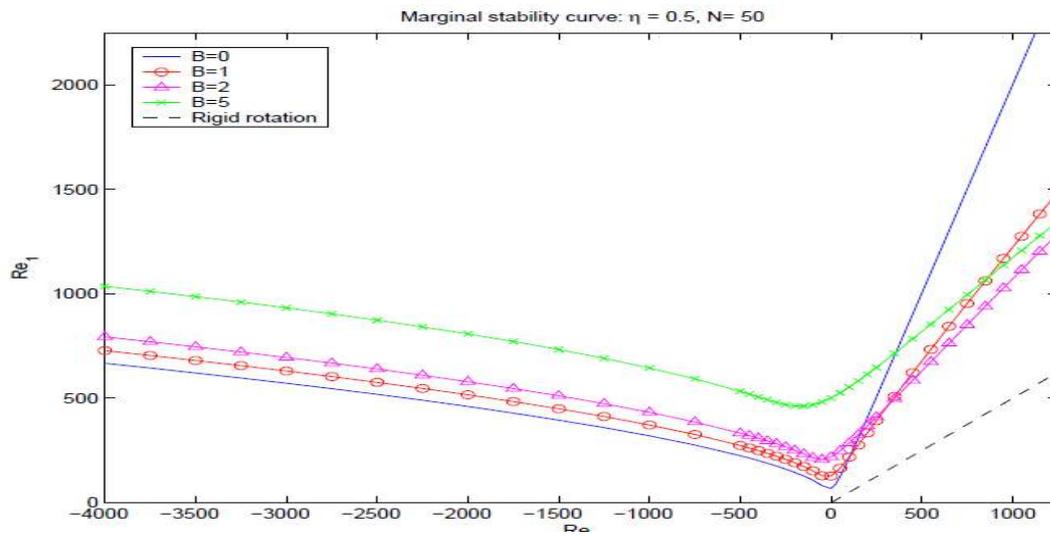
TVF:	Turbulent Vortex Flow
WVF:	Wavy Vortex Flow
MWVF:	Modulated Wavy Vortex Flow
CWVF:	Chaotic Wavy Vortex Flow

TTVF: Turbulent Taylor Vortex Flow

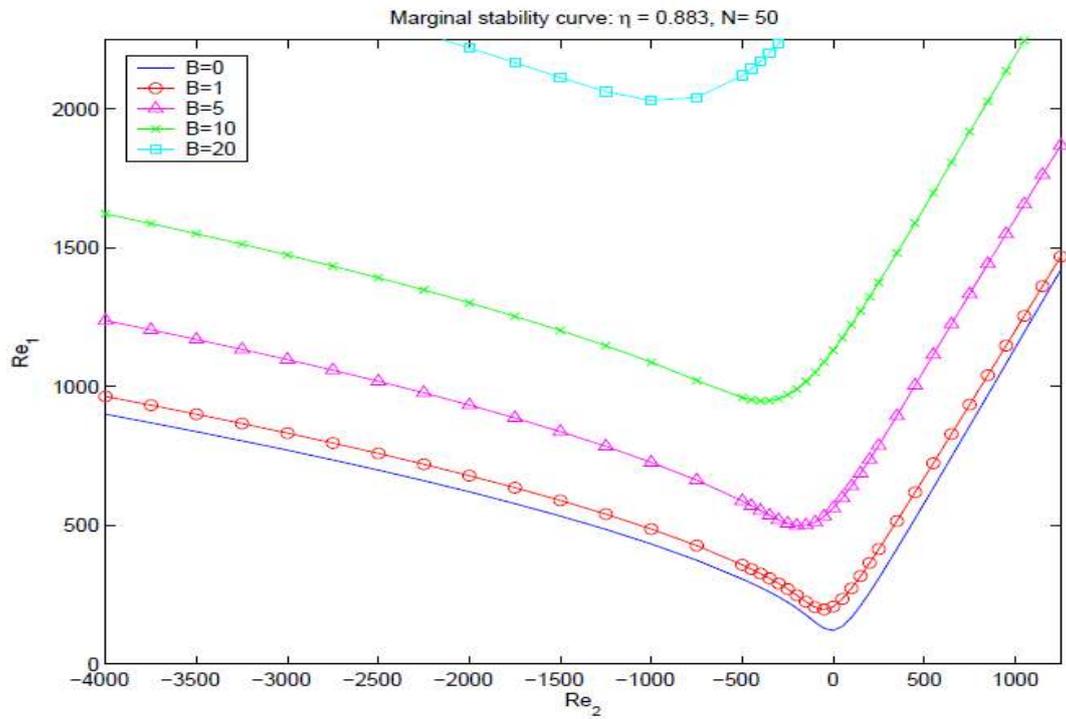
Symboles grecs :

Ω_1	Vitesse de rotation du cylindre intérieur
Ω_2	Vitesse de rotation du cylindre extérieur
θ	Composante cylindrique de la direction tangentielle
μ	Viscosité dynamique
Γ	Rapport d'aspect
η	Rapport des rayons
δ	Jeu radial
Δ	le laplacien
ν	Viscosité cinématique
ρ	Masse volumique
τ	Contrainte de cisaillement
ω	Vitesse angulaire
γ	Coefficient de diffusion
k	Longueur d'onde de l'écoulement
\vec{V}	Vecteur Vitesse $\vec{V}(u, v, w)$

Annexe



Résultats de Laundry [8] Courbe de stabilité marginale pour un rapport de rayon $\eta=0.5$. (—) fluide newtonien.



Résultats de Laundry [8] du Courbe de stabilité marginale pour un rapport de rayon $\eta=0.883$. () fluide newtonien .

Chapitre IV

Résultats discussions

IV.1. INTRODUCTION

Dans ce chapitre, on présente les résultats de notre étude obtenus par la simulation numérique.

Ces résultats numériques sont présentés graphiquement sous plusieurs formes dans les trois cas traité :

- cylindre intérieur en rotation et cylindre extérieur fixe.
- la rotation est co-rotation pour les cylindres.
- la rotation est contre-rotation pour les cylindres.

Pour bien présenter notre travail on a divisé ce chapitre en deux parties :

La première partie porte sur l'étude de l'écoulement entre deux cylindres concentriques avec le cylindre intérieur en rotation et le cylindre extérieur maintenue fixe. La deuxième partie concerne l'écoulement entre deux cylindres tournant dans le même sens et en sens inverse.

Nous terminons ce travail par courbe de stabilité marginale avec la validation des résultats .

IV.2. La convergence :

Pour tester la convergence de la méthode numérique, le calcul de l'état critique sont faits pour différentes valeurs de N. Les tests numériques sont faits pour assurer la convergence et de la précision.

N	10	20	30	40	50
Re _{lc}	66.7262	66.7169	66.7169	66.7169	66.7169
kc	3.9916	3.9925	3.9930	3.9930	3.9930

Tableau. IV.1 : la convergence de fluide newtonien a $\eta=0.3$

N	10	20	30	40	50
Re _{lc}	62.5015	62.5016	62.5017	62.5017	62.5017
kc	3.9259	3.9160	3.9159	3.9159	3.9159

Tableau. IV .2: la convergence de fluide newtonien a $\eta=0.5$

Chapitre IV résolution de problème

N	10	20	30	40	50
Re _{lc}	112.5469	112.5476	112.5476	112.5476	112.5476
kc	3.8458	3.8458	3.8485	3.8485	3.8485

Tableau. IV.3 : la convergence de fluide newtonien a $\eta=0.883$

Le résultat sont illustrés dans les tableaux IV.1, IV.2, et IV.3 pour fluide newtonien. On observe que trente points de collocation fournissent une précision suffisante pour les paramètres rhéologiques considérées les résultats donnés dans le document ont été obtenues avec $N = 50$ périodiquement.

IV.3 Les spectres de valeur propre pour écoulement Taylor-couette :

Pour définir λ_c Nous fixons η , ensuite pour chaque ensemble de valeur (Re_l,k) nous obtenir un spectre de valeur propre λ . la valeur négatif le plus proche a 0 est la valeur de λ_c .

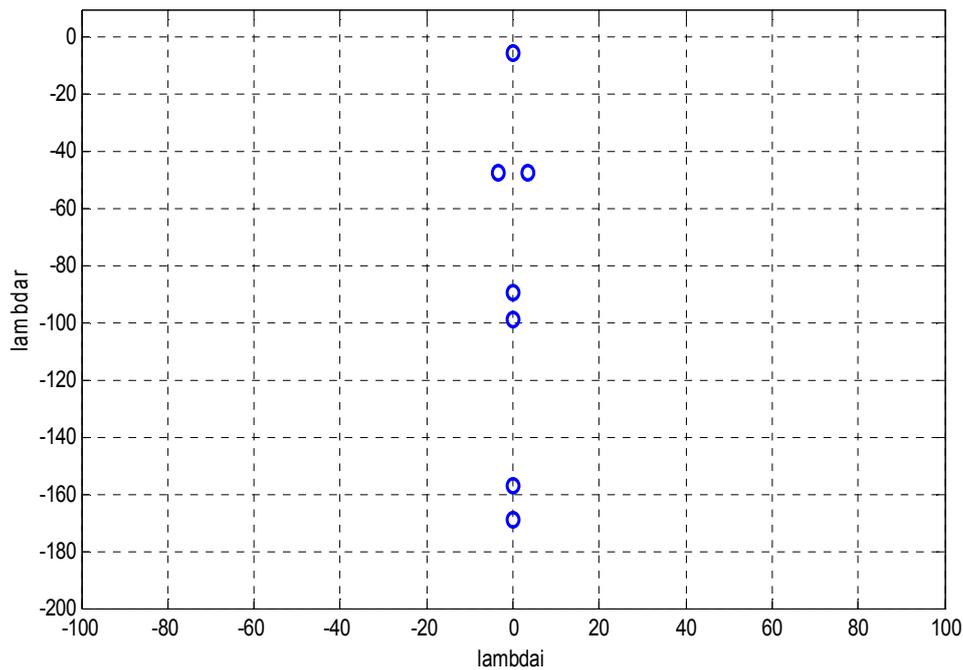


Fig.IV.1. Spectre pour un fluide newtonien pour un rapport de rayon $\eta=0.5$, $\Omega_2=0$ et $R_1=50$ et $k=3.4$ $\lambda_{\text{real (max)}} = -5.47$

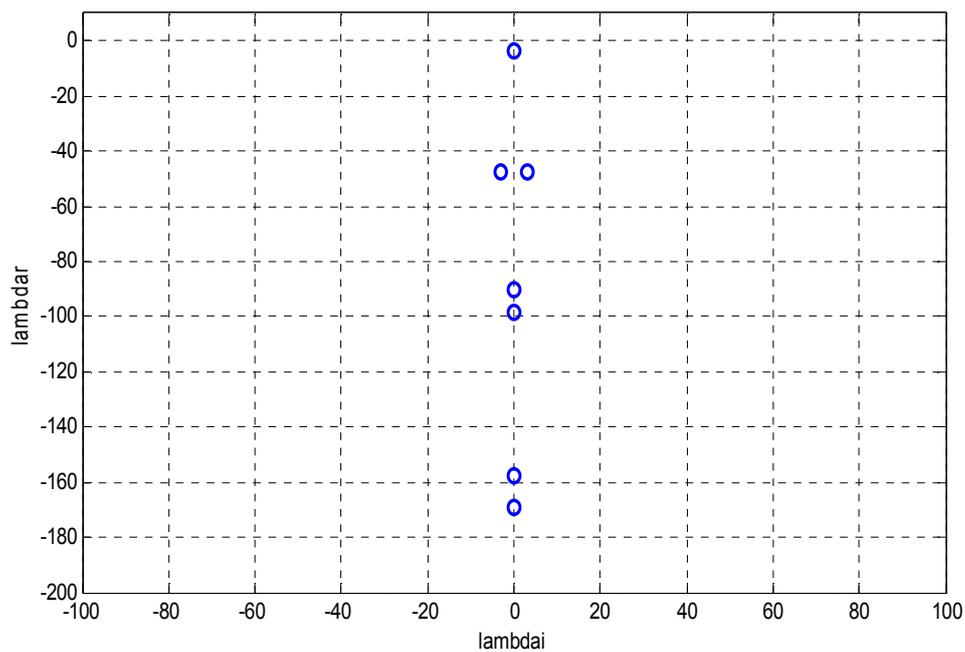


Fig.IV.2. Spectre pour un fluide newtonien pour un rapport de rayon $\eta=0.5$ et $\Omega_2=0$ et $R_1=55$ et $k=3.4$ $\lambda_{\text{real (max)}}=-3.93$

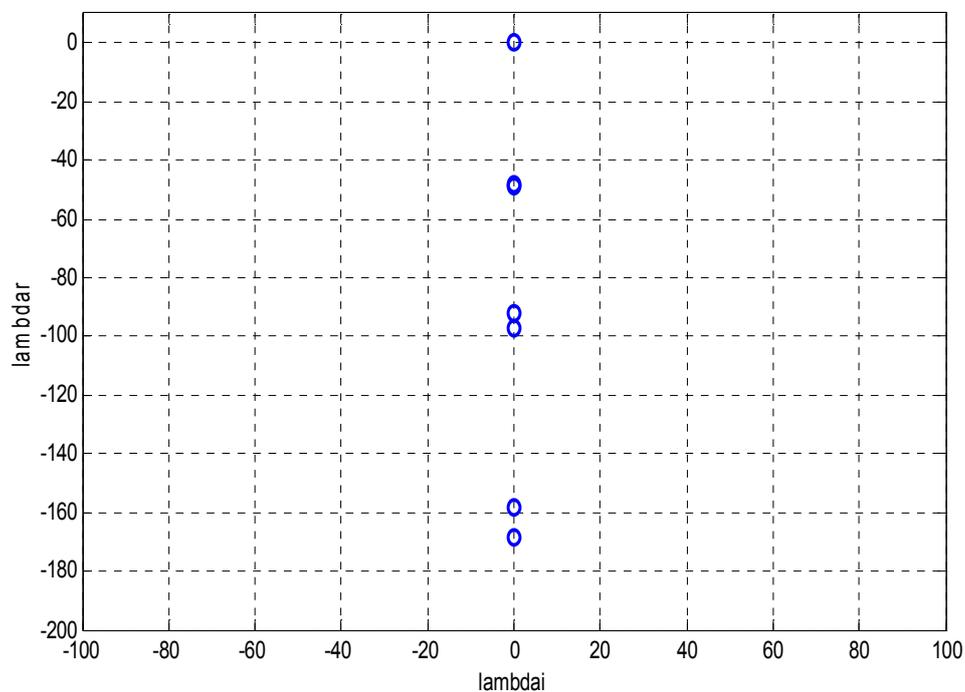


Fig.IV.3. Spectre pour un fluide newtonien pour un rapport de rayon $\eta=0.5$ et $\Omega_2=0$ et $R_1=63$ et $k=3.4$ $\lambda_{\text{real (max)}}=-0.035$

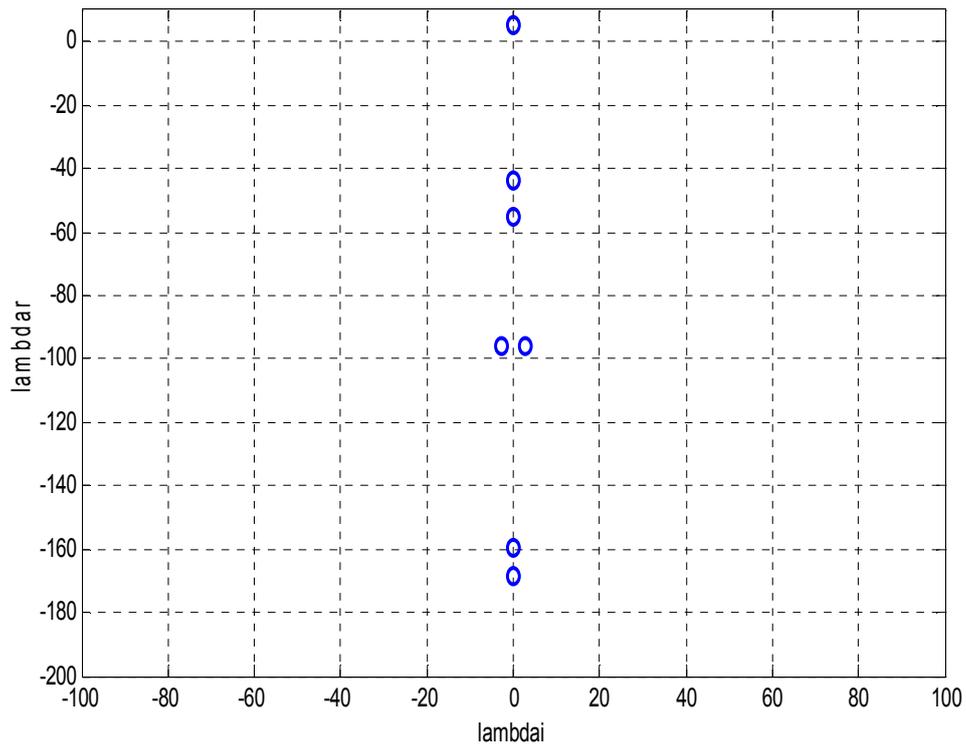


Fig.IV.4. Spectre pour un fluide newtonien pour un rapport de rayon $\eta=0.5$ et $\Omega_2=0$ et $R_1=75$ et $k=3.4$ $\lambda_{\text{real (max)}}=5.05$

D'après les figure (IV.1, IV.2, IV.3, IV.4) on déterminer la valeur $\lambda_{\text{real (max)}}=-0.001$. À cas critique est la valeur critique de λ parce que est la valeur négatif le plus proche a 0. La valeur de λ_{max} est important pour déterminer les conditions critique.

IV.4 Conditions critique :

Pour déterminer les condition critique (Re_c, k_c) on fixe Re et on varie $k=1$ a 9 et on déterminer ($\lambda_{\text{real max}}$) et on trace le graphe ($k, \lambda_{\text{real max}}$). Ensuite, nous prenons une autre valeur de Re . Pour la valeur (\max de $\lambda_{\text{real max}}$) ≤ 0 êtes les condition critique (Re_c, k_c).

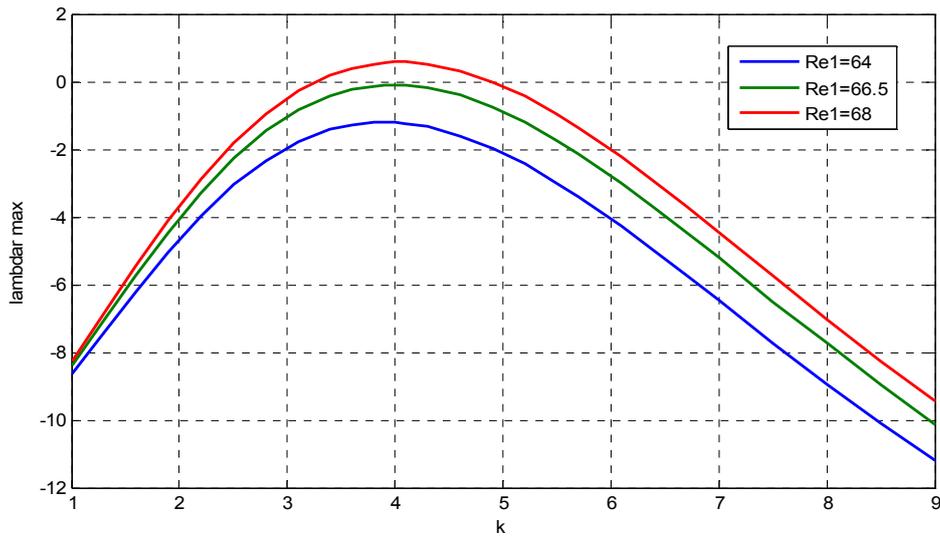


Fig.IV.5. les condition critique (λ_c , $Re1_c$, k_c) en $\eta=0.3$

Pour la figure(IV.5) on remarque que pour un $Re_1=64$ l'écoulement est stable et même chose pour un $Re_1=66.5$ avec un max de λ plus proche que le premier , mais pour un $Re_1 =68$ l'écoulement est instable. Donc on peut dire que pour un rapport de rayon $\eta=0.3$ et $\Omega_2=0$ le Reynolds critique $Re1_c=66.5$.

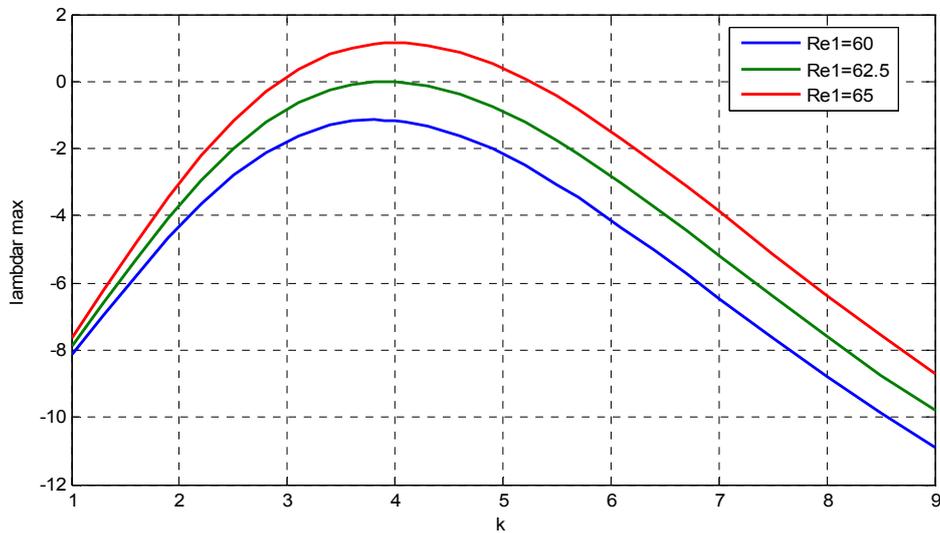


Fig.IV.6. les condition critique (λ_c , $Re1_c$, k_c) en $\eta=0.5$

Pour la figure(IV.6) on remarque que pour un $Re_1=60$ l'écoulement est stable et même chose pour un $Re_1=62.5$ avec un max de λ plus proche que le premier , mais pour un $Re_1 =65$ l'écoulement est instable. Donc on peut dire que pour un rapport de rayon $\eta=0.5$ et $\Omega_2=0$ le Reynolds critique $Re1_c=62.5$.

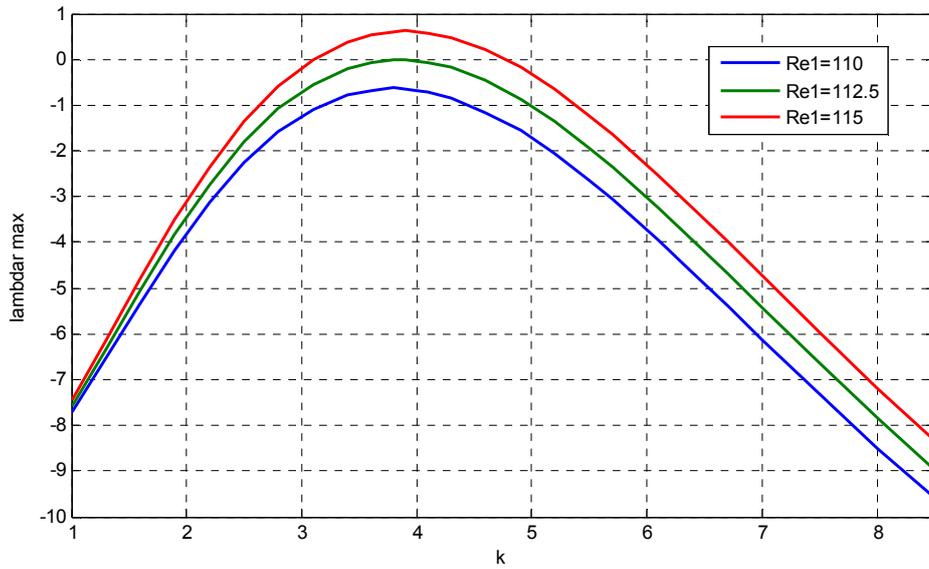


Fig.IV.7. les condition critique (λ_c , Re_{1c} , k_c) en $\eta=0.883$

Pour la figure(IV.7) on remarque que pour un $Re_1=110$ l'écoulement est stable et même chose pour un $Re_1=112.5$ avec un max de λ plus proche que le premier , mais pour un $Re_1 =115$ l'écoulement est instable. Donc on peut dire que pour un rapport de rayon $\eta=0.883$ et $\Omega_2=0$ le Reynolds critique $Re_{1c}=112.5$

La valeur de Re_{1c} est le point de limite de stabilité c.-à-d.

$$Re_1 \leq Re_{1c} \quad \text{si écoulement stable.}$$

$$Re_1 \geq Re_{1c} \quad \text{si écoulement instable.}$$

IV.5 Nombre de Reynolds critique Re_{1c} pour différents vitesses angulaire Ω_2 :

Pour déterminer les valeurs de nombre de Reynolds Re_{1c} pour chaque rapport de rayon η à plusieurs vitesses angulaire de cylindre extérieur Ω_2 . On fixe la vitesse de rotation Ω_2 et détermine les valeurs de Re_{1c} en fonction au η . Ensuite, nous prenons une autre valeur Ω_2 .

IV.5.1. Cas ou le cylindre extérieur fixe.

Dans ce cas on fixe la cylindre extérieur et déterminer les valeurs de Re_{1c} et trace le graphe Re_{1c} en fonction le rapporte de rayon η

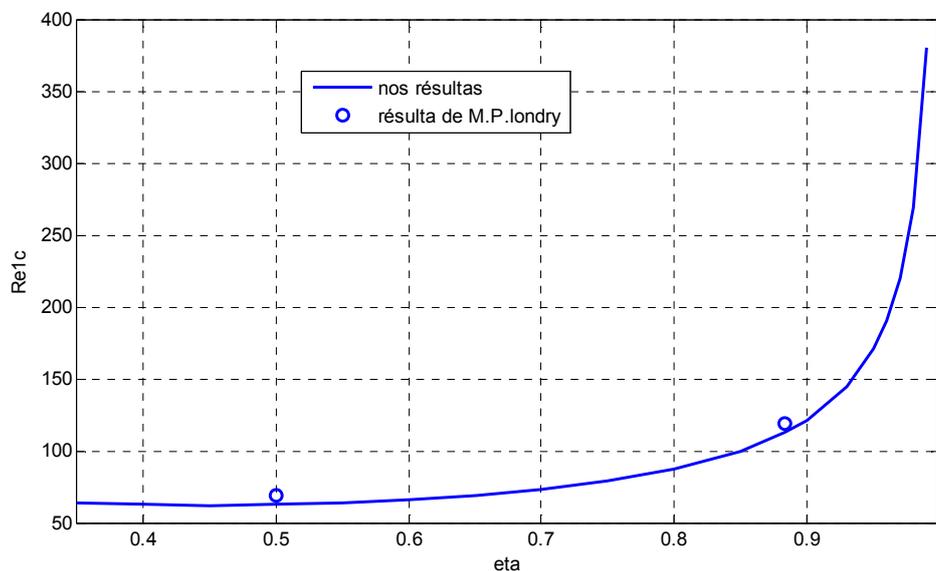


Fig.IV.8 : Le nombre de Reynolds critique pour un fluide newtonien en fonction le rapport de rayon η pour $\Omega_2=0$. (—) est Nos résultats, (o) résultats de M.P Landry[8] pour $\eta=0.5, 0.883$

IV.5.2. Cas ou contre-rotation des cylindres :

Dans ce cas les cylindres est on **contre-rotation**. On déterminer les valeurs de Re_{1c} et trace le graphe Re_{1c} en fonction le rapporte de rayon η .

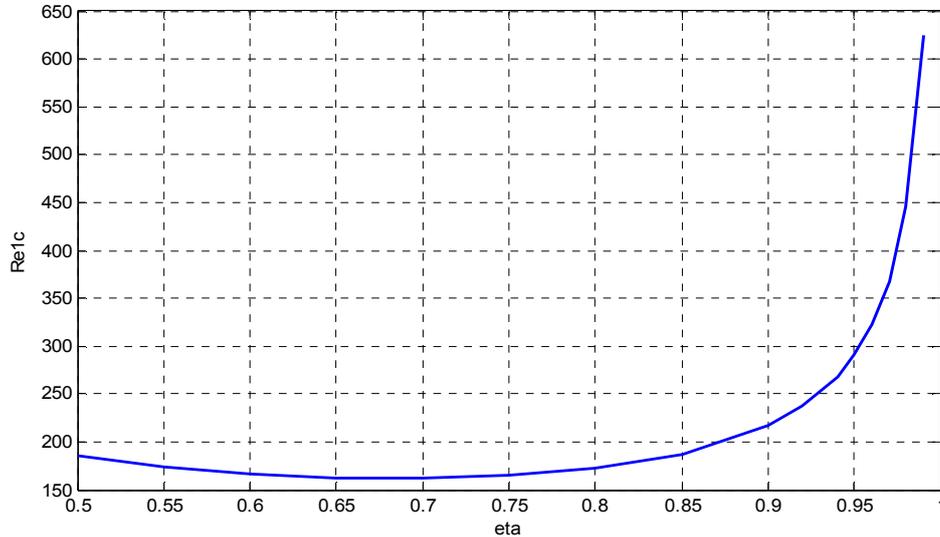


Fig.IV.9 : Le nombre de Reynolds critique pour fluide newtonien en fonction le rapport de rayon η pour $\Omega_2 = -1$.

IV.5.3. cas ou co-rotation pour les cylindres :

Dans ce cas les cylindres est **co-rotation** on On déterminer les valeurs de Re_{1c} et trace le graphe Re_{1c} en fonction le rapporte de rayon η .

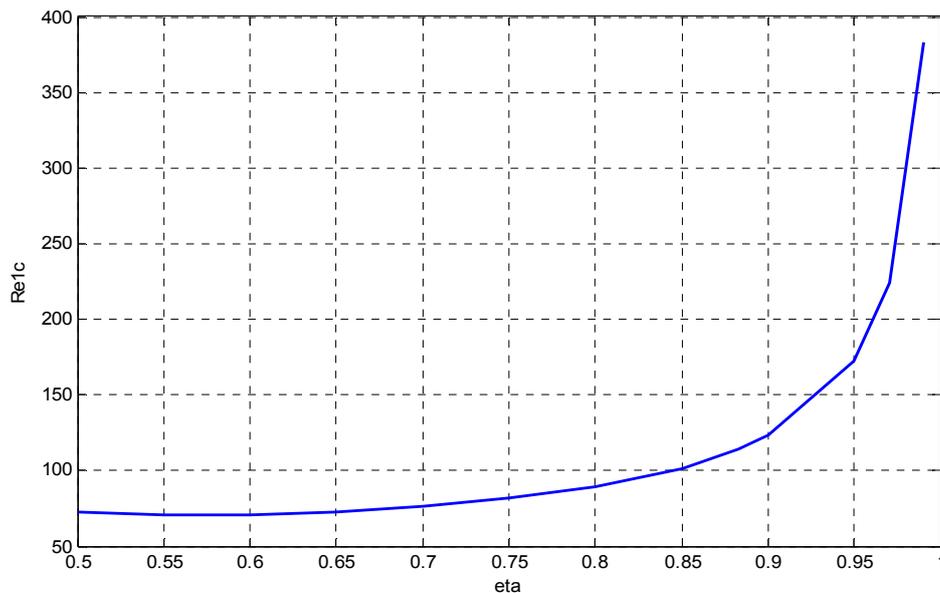


Fig.IV.10. Le nombre de Reynolds critique pour un fluide newtonien en fonction le rapport de rayon η pour $\Omega_2 = 0.1$.

En examinant la figure (IV.7), nous pouvons constater que nos résultats numériques sont en bon accord tant qualitatif que quantitatif avec les résultats expérimentaux de Landry [8], et toutes ces comparaisons valident notre code de calcul en lui attribuant la confiance désirée pour l'utilisation.

IV.5. Courbe de stabilité marginale :

Pour tracer la courbe de stabilité marginale nous prenons les valeurs de Re_1 de chaque rapport de rayon η qui déterminent par les étapes précédentes et on détermine le nombre de Reynolds de 2^{ème} cylindre Re_2 .

On donne Re_{1c} et on calcule Re_2

$$Re_1 = \frac{\rho R_1 \Omega_1 d}{\mu}$$

$$Re_2 = \frac{\rho R_2 \Omega_2 d}{\mu}$$

On obtient la relation suivante :

$$Re_2 = Re_{1c} \frac{\Omega}{\eta}$$

On trace la courbe (Re_2 , Re_1).

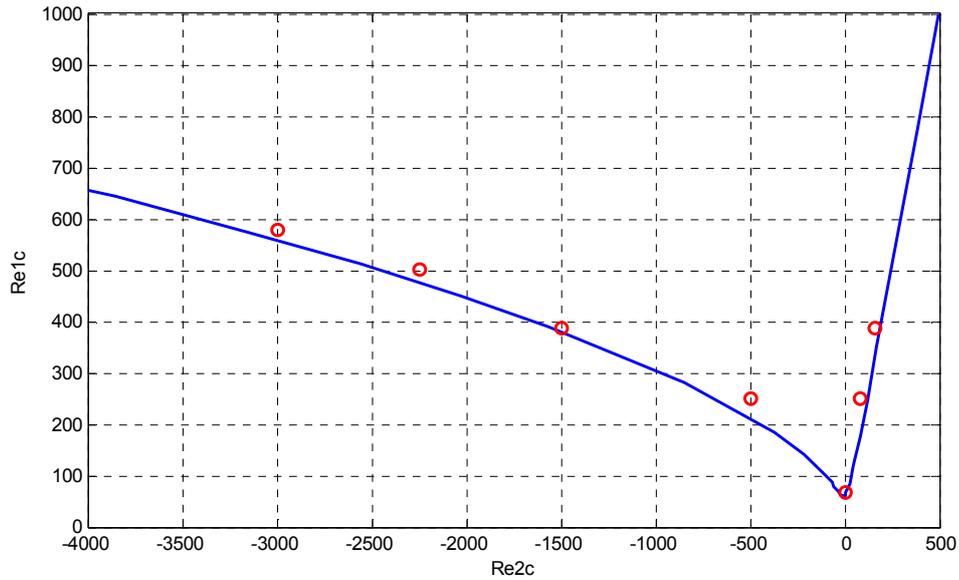


Fig. IV.11. Courbe de stabilité marginale pour un rapport de rayon $\eta=0.5$.
(—) nos résultantes, (○) résultats de Laundry [8]

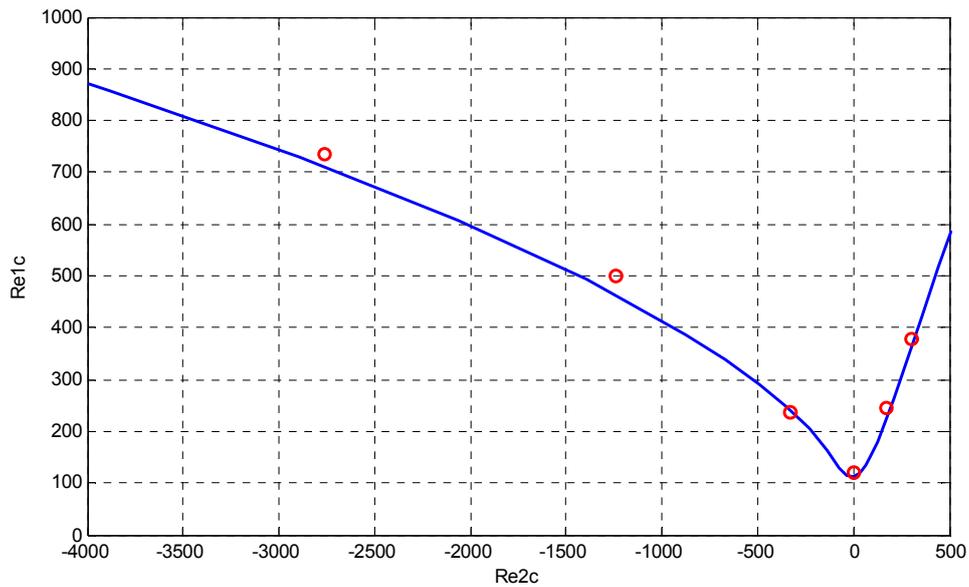


Fig.IV.12. Courbe de stabilité marginale pour un rapport de rayon $\eta=0.883$.
(—) nos résultantes, (○) résultats de Laundry[8]

Interprétation :

La Courbe de stabilité marginale montre un état de stabilité de l'écoulement. Où la courbe montre l'état de transition de l'écoulement vers la turbulence. qui change en fonction de Re_2 . Une situation où $Re_1 > Re_{1c}$ est l'écoulement à l'état stable. La situation dans laquelle où $Re_1 < Re_{1c}$ l'écoulement est instabilité.

les figures (IV.4,IV.5), montrent les courbes de stabilité marginale dans plan (Re_1, Re_2) pour un fluide newtonien, pour deux rapports de rayon $\eta=0.883$ et $\eta=0.05$ respectivement, pour chaque rapport de rayon il y a une courbe de stabilité marginale différente.

Pour valider nos résultats, nous avons comparé nos **courbes de stabilité marginale** pour un fluide newtonien avec des **courbes de stabilité marginale** de Landry [8]. On remarque qu'on trouve presque la même chose.