

الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية
République Algérienne démocratique et populaire

وزارة التعليم العالي و البحث العلمي
Ministère de l'enseignement supérieur et de la recherche scientifique

جامعة البليدة 1
Université de BLIDA 1

كلية التكنولوجيا
Faculté de Technologie

قسم الإلكترونيك
Département d'Électronique



Mémoire de Projet de Fin d'Études

Pour l'obtention du diplôme Master en Électronique

Option

Télécommunication & Réseaux

Thème

**Etude et Simulation de la Prédiction
d'un Canal Radio-Mobile par le
Processus Autorégressif**

Présentées par :

SAKRI Assia

AHMEDOU Khadijetou

Proposé par : *Mr BERSALI Mahdi*

Année Universitaire : 2014-2015

Dédicace

À mon père et ma mère.

À mes frères : Zakaria, Ismail et Aymen.

À mes meilleurs amis : Imane, Soumya et Bechra.

À toute ma famille.

À tous ceux que j'aime.

À tous ceux qui m'aiment.

Assia

Je dédie ce modeste travail

À mes parents.

À mes sœurs : Meriem, Fatima et Naima.

À toute ma famille.

*À mon époux Mohamed Ali Sidi Brahim, pour son soutien et
ses aides inoubliables.*

À tous mes amis,

particulièrement à Aichetou Mohameden Salem.

Khadijetou ...

Remerciements

Avant tout, Merci à mon Dieu le Tout Puissant. C'est grâce à LUI que j'ai eu le foie et la force pour accomplir ce travail.

Ce travail a été réalisé au niveau de Laboratoire DIC (Détection Information & Communication) du département d'Electronique de l'université de Blida1.

Au terme de ce travail, nous tenons tout d'abord à remercier notre encadreur Monsieur M.BERSALI, de sa qualité d'encadrement et sa disponibilité sans parler de ses connaissances inépuisables sur le domaine, qu'il a bien voulu partager avec nous, nous lui avons reconnaissant pour tout le temps. Nous espérons de tout cœur que notre collaboration ne s'arrêtera pas ici.

Je remercie sincèrement, les membres de jury d'avoir bien voulu accepter de faire partie de la commission d'examineur. Nous tenons à remercier les membres du jury qui nous feront l'honneur d'accepter d'évaluer ce travail

Nous remercions vivement tous nos enseignants ayant contribué de près ou de loin à notre formation.

Nous remercions encore Dr Moustapha Aoun, pour l'aide et les conseils concernant les différentes étapes évoquées dans ce mémoire, qu'il nous a apporté lors des différents suivis.

Ces remerciements sont l'occasion de dire à nos parents que c'est leur soutien permanent qui nous a permis d'y arriver. Grâce à eux, nous avons pu non seulement continuer nos études mais aussi acquérir cette confiance en nous qui nous avons permis d'achever notre parcours ainsi que toute la famille.

Et enfin nous n'oublions pas nos amis.

Table des matières

Liste des figures

Liste des tableaux

Symboles

Notations

Sigles

Introduction	1
Chapitre 1 : Rappel sur les Phénomènes liés au Canal Radio-Mobile	4
1.1 Caractéristiques du canal physique	5
1.2 Modèle complexe équivalent du canal physique en bande de base	7
1.2.1 Signal de transmission	7
1.2.2 Réponse impulsionnelle de canal	10
1.3 Modèles de variation des paramètres	12
1.3.1 Modèle déterministe	13
1.3.2 Modèle aléatoire	15
1.3.2.1 Loi de distribution des gains complexes	16
1.3.2.2 Spectre Doppler associé à chaque trajet	17
1.3.3 La variation de gain et la fréquence Doppler normalisée $f_d T$	18
1.4 Conclusion	20
Chapitre 2 : Etude et Application du Processus AR au Canal Mono-trajet	21
2.1 Introduction	22
2.2 Historique	23
2.3 Processus autorégressif	23
2.3.1 Motivation	23
2.3.2 Caractérisation d'un modèle AR	25
2.3.2.1 Equations de Yule-Walker	26

2.3.2.2	Résolution des équations de Yule-Walker (YW)	27
2.3.3	Erreur de prédiction	28
2.4	Modèle générale et problème de prédiction	28
2.4.1	Prédicteur autorégressif	31
2.4.1.1	Prédiction basée sur un modèle AR1	32
2.4.1.2	Prédiction basée sur un modèle AR2	33
2.4.2	L'erreur quadratique moyenne EQM	35
2.5	Conclusion	37
	Chapitre 3 : Prédiction d'un Canal Multi-trajet dans les Systèmes OFDM	40
3.1	Introduction	41
3.2	Rappel sur l'OFDM	41
3.3	Notion de préfixe cyclique	42
3.4	Notion d'orthogonalité	45
3.5	Avantages et inconvénients de l'OFDM	45
3.6	Modèles mathématique de l'OFDM	46
3.6.1	Modèle analogique	47
3.6.2	Modèle discret	53
3.7	Prédiction d'un canal à trajets multiples	56
3.7.1	Modélisation de la variation temporelle des gains complexes	57
3.7.2	Prédicteur autorégressif (AR)	61
3.7.3.1	Modèle AR des coefficients $c^{(n)}$	62
3.7.4	L'erreur quadratique moyenne	63
3.8	Conclusion	64
	Chapitre 4 : Simulation	65
4.1	Introduction	66
4.2	Canal mono-trajet	66
4.3	Canal multi-porteuse (multi-trajet)	72

4.4 Conclusion	76
Conclusion générale et perspectives	77
Bibliographie	79
Annexe	82

Liste des figures

Figure 1.1: Scénario typique de propagation radio-mobile	6
Figure 1.2 : Puissance du signal reçue en fonction du l'éloignement du mobile	7
Figure 1.3 : Chaîne de transmission équivalente en bande de base.....	8
Figure 1.4 : Représentation de la réponse impulsionnelle d'un canal radio-mobile	11
Figure 1.5 : Représentation d'un canal variant dans le temps	12
Figure 1.6 : Le terminal mobile en mouvement	13
Figure 1.7 : Spectre Doppler de α pour un modèle isotrope	17
Figure 1.8 : La partie réelle des gains complexe durant 10 symboles OFDM consécutif	19
Figure 2.1 : Filtre autorégressif (AR)	26
Figure 2.2 : Filtre autorégressif (AR) d'ordre M	26
Figure 2.3 : Représentation du calcul de l'erreur $e(n)$	29
Figure 2.4 : Fonction d'autocorrélation continue d'un canal de Jakes pour différentes valeurs de f_d	30
Figure 3.1 : Insertion du préfixe cyclique	43
Figure 3.2 : Spectre des différentes porteuses	44
Figure 3.3 : Spectre en sortie du modulateur OFDM (32 porteuses)	44
Figure 3.4 : Système OFDM en bande de base à temps continu	47
Figure 3.5 : Système OFDM en bande de base à temps discret	53
Figure 4.1 : Chaîne de transmission mono-porteuse (SC)	67
Figure 4.2 : Chaîne de transmission mono-porteuse (SC) avec AR	67
Figure 4.3 : SER en fonction du SNR pour $f_d T = 10^{-3}$	68
Figure 4.4 : SER en fonction de SNR pour $f_d T = 10^{-4}$	69
Figure 4.5 : SER en fonction du SNR pour $f_d T = 0.09$	70

Figure 4.6 : SER en fonction du SNR pour un cas multi-trajet avec $f_d T = 10^{-2}$	71
Figure 4.7 : Chaine de transmission multi-porteuse (OFDM)	72
Figure 4.8 : SER en fonction du SNR pour $f_d T = 10^{-3}$	73
Figure 4.9 : SER en fonction du SNR pour $f_d T = 10^{-4}$	74
Figure 4.10 : SER en fonction du SNR pour $f_d T = 0.09$	75

Liste des tableaux

Tableau 4.1 : Valeurs de a et σ_e^2 pour les $f_d T$ concernées	70
---	----

Symboles

$s_{HF}(t)$: Signal haute fréquence.

$s(t)$: Signal continu émis en bande de base.

$r_{HF}(t)$: Signal reçu haute fréquence.

$r(t)$: Signal continu reçu en bande de base.

$h_{HF}(t)$: Canal de propagation physique haute fréquence.

$h(t, \tau)$: Réponse impulsionnelle de canal.

$b_{HF}(t)$: Bruit additif haute fréquence.

N_0 : Densité spectrale de puissance bilatérale du bruit blanc.

$H(f)$: Réponse fréquentielle du canal.

$H_{HF}(f)$: Réponse fréquentielle haute fréquence du canal.

$H_{HF}^+(f)$: Version haute fréquence d'une fonction fréquentielle $H(f)$ avec des composantes qui contiennent que des fréquences positives.

$b(t)$: Bruit Blanc additif Gaussien du canal continu.

f_0 : Fréquence porteuse centrale.

B_0 : Bande du système.

L : Nombre de trajets.

$\rho(t)$: Atténuation de propagation du canal.

ρ_l : Atténuation de propagation du l -ème trajet.

$\theta(t)$: Phase du signal reçu.

θ_l : Phase de l -ème trajet du signal reçu.

$\tau(t)$: Retard de transmission.

τ_l : Retard de propagation associé au l -ème trajet.

$\alpha(t)$: Gain (amplitude) complexe du canal.

α_l : Gain complexe du l -ème trajet.

φ_l : Angle d'arrivée du $l^{\text{ème}}$ trajet.

f_d : Fréquence Doppler maximale.

T : Durée symbole.

$f_d T$: Fréquence Doppler normalisée.

v_m : Vitesse du récepteur.

c : Célérité de l'onde radio-électrique.

$H(f, t)$: Réponse fréquentielle du canal à la fréquence f et à l'instant t .

$R_{HH}(\Delta f, \Delta t)$: Fonction d'autocorrélation temps-fréquence du canal.

$(\Delta t)_c$: Temps de cohérence du canal physique.

$(\Delta f)_c$: Bande de cohérence du canal physique.

$\sigma_{\alpha_l}^2$: Variance du gain complexe du l -ème trajet.

$\Gamma_\alpha(f), \Gamma_{\alpha_l}(f)$: Spectre Doppler de α (mono-trajet) et de α_l du $l^{\text{ème}}$ trajet (multi-trajet).

$R_\alpha(\Delta t), R_{\alpha_l}(\Delta t)$: Fonction d'autocorrélation de α (mono-trajet) et de α_l du $l^{\text{ème}}$ trajet.

$v(n)$ (ou $e(n)$) : Bruit blanc complexe gaussien du modèle AR.

w_k, a_k (ou a_m) : Coefficient numéro k (ou m) du modèle AR.

σ_v^2 (σ_e^2) : Variance d'erreur du modèle AR.

R_{uu} : Fonction d'autocorrélation associée au modèle AR.

R_{cont_α} : Fonction d'autocorrélation continue du gain complexe.

R_{disc_α} : Fonction d'autocorrélation discrète du gain complexe.

R_{xx} : Fonction d'autocorrélation de l'approximation x de α par le modèle.

r_k : Echantillon d'observation numéro k .

b_k : Echantillon du bruit blanc complexe d'observation.

e_k : Echantillon numéro k du modèle complexe gaussien.

σ_b^2 : variance du bruit.

σ_ε^2 : Variance d'erreur de prédiction.

σ_{mod}^2 : Variance d'erreur de modèle.

α_n : Echantillon numéro k du gain complexe

$\widehat{\alpha}_n$: Prédit numéro k du gain complexe.

\mathbf{I}_k : Matrice d'identité $k \times k$.

\mathbf{R}_b : Matrice d'autocorrélation du vecteur bruit.

T_g : Durée du préfixe cyclique.

T_u : Durée utile du symbole OFDM.

T_s : Période d'échantillonnage OFDM.

W : Largeur de bande du système OFDM.

$\phi_b(t)$: Forme d'onde (filtre d'émission) du modulateur OFDM continu.

N_g : Longueur du préfixe cyclique.

$w_{(n)}$: Bruit complexe durant le n -ème symbole OFDM.

$g_e(t)$: Filtre d'émission.

$g_r(t)$: Filtre de réception.

$IEP_{(n)}[b]$: IEP sur la b -ème sous-porteuse durant le n -ème symbole OFDM.

$x_{(n)}$: n -ème symbole OFDM émis.

$y_{(n)}$: n -ème symbole OFDM reçu.

N_c : Nombre de coefficients polynomiaux.

N_d : Nombre de sous-porteuses de donnée.

N : Nombre de sous-porteuses du système OFDM.

$v = N + N_g$: Nombre d'échantillons dans un symbole OFDM.

$\psi_b(t)$: Réponse impulsionnelle du filtre de réception.

L_t : Nombre de coefficients pour le canal discret équivalent.

$\delta_{k,m}$: Symbole de Kronecker.

$s(t)$: Signal OFDM continu émis.

$r(t)$: Signal OFDM continu reçu.

$\mathbf{H}_{(n)}$: Matrice du canal durant le n -ème symbole OFDM.

$\mathbf{0}_N$: Matrice de $N \times N$ de Zéros.

σ^2 : Variance de bruit après démodulation OFDM.

$[\mathbf{X}]_{k,m}$: $[k, m]$ -ème élément de la matrice \mathbf{X} .

$\mathbf{diag}\{\mathbf{x}\}$: Matrice diagonale avec \mathbf{x} sur sa diagonale principale.

n : Symbole numéro n .

k : Sous-porteuse numéro k .

b', \mathbf{b} : Symboles numéro b', b .

$\epsilon_{(n)}$: Erreur due à l'approximation.

$\xi_l^{(n)}$: L'erreur du modèle.

$\mathbf{c}_l^{(n)}$: Approximation du gain complexe $\alpha_l^{(n)}$.

$\boldsymbol{\kappa}_{(n)}$: Matrice construite à partir des symboles de données et des retards des trajets.

$\mathbf{u}_l^{(n)}$: Bruit du modèle AR.

\mathbf{U}_l : Matrice de covariance du bruit $u_l^{(n)}$ du modèle AR.

Notations

$\text{Re}\{\cdot\}$: Partie réelle d'un nombre complexe.

$\text{BF}\{\cdot\}$: Opération de translation en bande de base.

$\text{TF}\{\cdot\}$: Transformée de Fourier.

$J\{\cdot\}$: Fonction de Bessel de première espèce d'ordre 0.

$L\{\cdot\}$: Fonction de transfert.

$T\{\cdot\}$: Fonction de transfert entre le vrai paramètre bruité et le paramètre estimé.

$(\cdot)^*$: Opérateur de conjugaison.

$(\cdot)^T$: Opérateur de transposition.

$(\cdot)^H$: Opérateur de transposition-conjugaison (Hermitien).

$\text{CN}(\mu, \sigma)$: Loi de distribution complexe gaussienne circulaire de moyenne μ et de variance σ .

Sigles

WIFI : Wireless Fidelity.

UMTS : Universal Mobile Telecommunications System.

WIMAX : Worldwide Interoperability for Microwave Access.

4G : 4^{ème} Génération.

LTE : Long Term Evolution.

AR-p : Modèle Auto-Régressif d'ordre p.

OFDM : Orthogonal Frequency Division Multiplexing.

MLE : Maximum Likelihood Estimator.

LES : Least Square Estimator.

MMSE : Minimum Mean Square Error Estimator.

MAP : Maximum a Posteriori.

NLOS : No Line Of Sight.

LOS : Line Of Sight.

DSP : Densité Spectrale de Puissance.

LMDS : Local Multipoint Distribution Systems.

RI : Réponse Impulsionnelle.

WSS : Wide Sense Stationary.

US : Uncorrelated Scatters.

WSSUS : Wide Sense Stationary Uncorrelated Scatters.

TF : Transformée de Fourier.

IES : Interférence Entre Symboles.

MA : Moving Average (moyenne mobile).

ARMA : Auto-Régressif with Moving Average (Auto-Régressif Moyenne Mobile).

ARIMA : Auto-Régressif Integrated Moving Average.

SARIMA : Seasonal Auto-Régressif Integrated Moving Average.

LP : Linear Prédiction.

EQM : Erreur Quadratique Moyenne.

FFT : Fast Fourier Transform.

TFDI : Transformée de Fourier Discrète Inverse.

TFD : Transformée de Fourier Discrète.

DAB : Digital Audio Braodcasting.

ISI : Inter Symbol Interférence.

IEP : Interférence Entre Porteuses.

ICI : Inter Carrier Interférence.

AWGN : Additif White Gaussien Noise.

SNR : Rapport signal sur bruit.

SER : Symbol Error Rate.

QAM : Quadratique Amplitude Modulation.

SC : Single Carrier.

QoS : Qualité of Service.

MIMO : Multiple Input Multiple Output.

Résumé

La prédiction du canal de propagation est une technique fondamentale dans les systèmes de communication sans fil, en particulier en cas de mobilité où les paramètres du canal varient avec le temps. La prédiction permet dans ce cas de connaître les valeurs futures des gains complexes du canal à partir de valeurs passées. Parmi les techniques proposées dans la littérature, celle basée sur le processus autorégressif (AR), utilisée généralement pour la prédiction et l'estimation des séries temporelles a été choisie pour ce travail. Les performances de cette technique du point de vue taux d'erreur par symbole en fonction du rapport signal au bruit ont été étudiées et analysées dans le cas des transmissions mono-porteuse et multi-porteuses à vitesse variable où le canal de propagation est du type Rayleigh Jakes.

Mots clés : AR, Fréquence Doppler, Rayleigh, OFDM, Yule-Walker, EQM.

ملخص

التنبؤ بقناة الانتشار هي تقنية اساسية في انظمة الاتصالات اللاسلكية على وجه الخصوص في حالة التنقل حيث تختلف معاملات القناة مع مرور الوقت. التنبؤ يسمح في هذه الحالة بمعرفة قيم مستقبلية للمكاسب المعقدة للقناة انطلاقا من قيم سابقة. من بين التقنيات المقترحة في هذا المجال انه استنادا الى عملية ارتدادية, تستعمل عادة للتنبؤ و تقدير السلاسل الزمنية تم اختيارها لهذا العمل. دراسة اداء هذه التقنية من حيث نسبة الاخطاء في الرموز وفق نسبة الاشارة الى التشويش لهذه التقنية تمت دراستها و معالجتها في حالة الارسال بناقلة واحدة و بعدة ناقلات في سرعة متغيرة حيث قناة الانتشار هي من نوع رايلي جاكس.

الكلمات المفاتيح : ذاتي الترددي, تردد دوبلر, رايلي, مضاعفة تقسيم التردد المتعامد , يول والكر, معدل الخطأ التربيعي.

Abstract :

The propagation channel prediction is a fundamental technique in Wireless communications systems, in particular in case of mobility where the channel parameters vary with time. Prediction allows, in this case, to know the future values of complex channel gains from past values. Among the techniques proposed in the littérature, the one which is based on the autoregressive process (AR), generally used for the prediction and estimation of time series, was chosen for this work. The performance of this technique with point of view of symbol error rate versus signal to noise ratio has been studied and analyzed in the case of single carrier and multi-carrier transmission with variable speed where the propagation channel is Rayleigh Jakes type.

Key-words : AR, Doppler frequency, Rayleigh, OFDM, Yule-Walker, MSE.

Introduction

Au cours des dernières décennies, les systèmes de communication ont réalisé une révolution véritable. L'un des événements les plus spectaculaires est que la connexion câblée traditionnelle est, dans une large mesure sinon totalement, remplacée par la connexion sans fil à une vitesse exponentielle.

Les systèmes de communication sans fil ont gagné une énorme popularité par rapport aux systèmes câblés, principalement parce qu'ils sont utilisés dans de nombreuses applications (WIFI, UMTS, WIMAX, 4G, LTE, ...etc.) et sont beaucoup moins coûteux à mettre en œuvre. Par ailleurs, dans des endroits où l'environnement entrave le déploiement du câble, la connexion radio reste le seul moyen de communication. En gardant le meilleur pour la fin, les systèmes de communication sans fil permettent l'utilisation des mobiles.

En revanche, il est plus difficile pour un système d'ingénierie de maintenir une communication fiable sur les canaux sans fil (transmission radio-fréquence) que sur les canaux avec câble à cause des phénomènes liés à l'environnement qui sont le siège de propagation multi-trajets.

Suite à l'augmentation de la mobilité et du débit de transmission, la prédiction du canal radio-mobile joue un rôle de plus en plus important dans un système de télécommunication sans fils d'où l'intérêt porté à ce travail ayant fait l'objet de multiples investigations dans le domaine de la recherche scientifique.

Dans le cadre de travaux de recherche du laboratoire DIC (Détection Information et Communication) de l'université de Blida 1, il nous a été demandé de faire une étude sur la prédiction du canal radio-mobile de type Rayleigh à spectre Doppler de Jakes. Cette prédiction est basée sur un modèle autorégressif d'ordre p (AR- p) [1] [2] et qui est utilisé le plus souvent avec $p=1$ et ce afin de mieux approcher le canal et faciliter sa manipulation. Cette technique de prédiction a été largement utilisée par les chercheurs en télécommunication numérique.

Les méthodes de prédiction sont principalement classées en deux catégories [3] : les méthodes classiques et les méthodes Bayésiennes. Les méthodes classiques consistent à faire

prédire des paramètres à partir des observations, comme l'estimateur au sens de maximum de vraisemblance MLE (Maximum Likelihood Estimator), l'estimateur des moindres carrés LSE (Least Square Estimator) ... etc.

Les méthodes Bayésiennes sont utilisées lorsque des propriétés statistiques du paramètre à prédire sont disponibles, ce qui permet d'augmenter les performances de la prédiction. Les estimateurs Bayésiens les plus connus sont MMSE (Minimum Mean Square Error Estimator) et l'estimateur MAP (Maximum a Posteriori). Pour ce qui est de la technique AR-p, cette dernière est classée comme méthode de prédiction classique.

D'autre part, la modulation OFDM a été mise en avant comme une solution supérieure pour lutter contre la propagation à trajets multiples [4] [6], et elle est adoptée dans de nombreux protocoles de communication contemporains. Malgré ses nombreux avantages, la performance de l'OFDM est beaucoup moins satisfaisante dans un scénario de communication à grande mobilité. Nous nous sommes donc intéressées à l'étude de la prédiction du canal par le processus AR-p dans ce type d'accès canal (OFDM).

Afin de bien présenter notre travail de recherche, nous avons organisé ce manuscrit de la manière suivante :

Dans le chapitre 1, nous allons rappeler les principales caractéristiques du canal radio-mobile (modèle de Rayleigh) et ce en mettant en évidence le phénomène liés à la mobilité tel que l'effet Doppler.

Pour ce qui est du chapitre 2, nous ferons une description de la technique de prédiction autorégressive d'ordre p (AR-p) et son application pour la prédiction du canal radio-mobile.

En chapitre 3, la technique de prédiction AR-p ($p=1$) sera appliquée aux systèmes d'accès canal OFDM, systèmes couramment utilisés de nos jours.

Dans le chapitre 4, les performances du point de vue SER en fonction du SNR de la technique AR-p ($p=1,2$) seront mises en évidence par des simulations dans les cas de transmissions numériques de type mono-porteuse (SC) et multi-porteuse (OFDM) et ce dans les cas mono-trajet et multi-trajet.

Enfin, nous terminons notre travail par une conclusion où seront résumés les résultats obtenues et où seront données quelques perspectives à ce projet.

Chapitre 1
Rappel sur les
Phénomènes liés au
Canal Radio-Mobile

1.1 Caractéristiques du canal physique :

Un système de transfert d'information sur la voix radio dans les systèmes mobiles exploite un rayonnement électromagnétique soit depuis une station de base vers des mobiles (liaison descendante), soit depuis des mobiles vers la station de base (liaison montante). Un canal de propagation sans fil fluctue dans le temps du fait du mouvement des antennes ou des modifications de l'environnement.

Lors de la propagation entre un émetteur et un récepteur, le signal émis est souvent soumis à plusieurs phénomènes liés à l'environnement [25] :

Réflexion : elle se produit lorsqu'une onde électromagnétique rencontre des surfaces lisses de très grande dimension par rapport à sa longueur d'onde.

Diffraction : elle génère des sources secondaires lorsqu'un obstacle épais et de grande dimension par rapport à sa longueur d'onde obstrue l'onde électromagnétique entre l'émetteur et le récepteur. Dans ce cas, le récepteur peut recevoir le signal même s'il se situe derrière l'obstacle ou s'il subit l'effet de masque "shadowing".

Diffusion : elle se produit lorsque l'onde rencontre un obstacle dont l'épaisseur est de l'ordre de sa longueur d'onde. Dans ce cas, l'énergie se trouve dispersée dans toutes les directions.

La propagation en espace libre représente un cas idéal. Mais en réalité, le canal de propagation est l'endroit de multi-trajets à cause des obstacles qui entourent l'émetteur et le récepteur (Fig1.1). Le signal transmis subit les pertes de propagation dues à la distance, les atténuations induites par les obstacles qu'il trouve sur son parcours et les évanouissements suscités par l'existence de trajets multiples. Ces phénomènes typiques de propagation sont illustrés sur la figure 1.1.

De ce fait, le signal reçu est une combinaison de plusieurs trajets dont les amplitudes, les déphasages, les décalages doppler et les retards différents.

D'une manière générale, le phénomène se traduit par une variation de la puissance du signal mesurée à la réception, en fonction du temps ou de la distance qui sépare l'émetteur du récepteur. Il est connu sous le nom d'évanouissement (fading). D'après cette définition, il est possible de classer les phénomènes d'évanouissement des canaux radio-mobiles en deux catégories [5]: « évanouissement à long terme » et « évanouissement à court terme ».

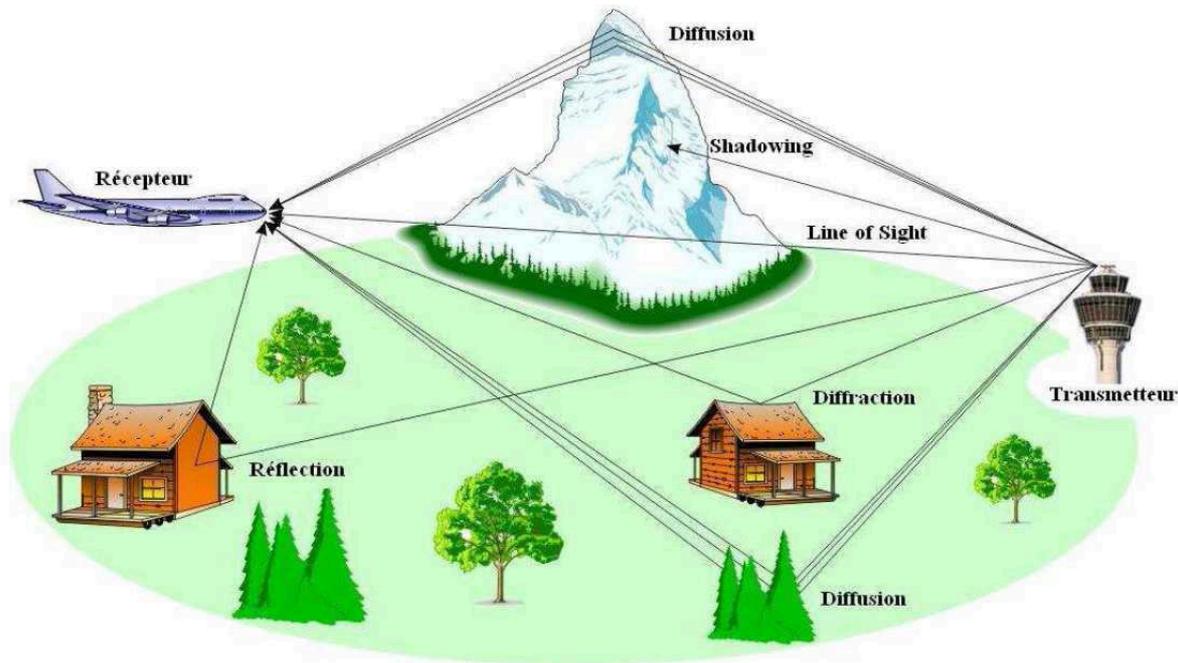


Figure 1.1: Scénario typique de propagation radio-mobile [6].

L'évanouissement à long terme : représente la fluctuation de la puissance moyenne reçue lorsque la distance qui sépare l'émetteur de récepteur est importante (de quelques dizaines à quelques milliers de mètres). Il est généralement causé par les obstacles (immeubles, forêts, ...etc.) ou par la forme du terrain. En pratique, cet évanouissement est modélisé d'après les équations qui déterminent l'affaiblissement de parcours (path-loss). Statistiquement, de nombreuses études le caractérisent comme une variable aléatoire qui vient apporter une certaine incertitude à l'atténuation.

L'évanouissement à court terme: se réfère à l'évolution rapide de l'amplitude et de la phase du signal sur une courte période de temps. Cette variation rapide due aux trajets multiples générés par les divers réflecteurs et fortes fluctuations d'amplitude de l'enveloppe du signal reçu (Fig1.2). D'un point de vue statistique, ces fluctuations de l'enveloppe du signal à court terme sont généralement caractérisées par une loi de Rayleigh ou de Rice [7]. La première correspond généralement au milieu urbain, quand il n'y a pas une ligne visuelle directe (NLOS : No-Line-Of Sight), tandis que la seconde correspond au milieu rural, quand il y a une ligne visuelle directe (LOS : Line-Of-Sight). La figure1.2 illustre les différents types d'évanouissements.

Dans le contexte de ce travail, nous nous intéressons qu'à l'évanouissement à court terme avec une loi de densité de probabilité de type de Rayleigh.

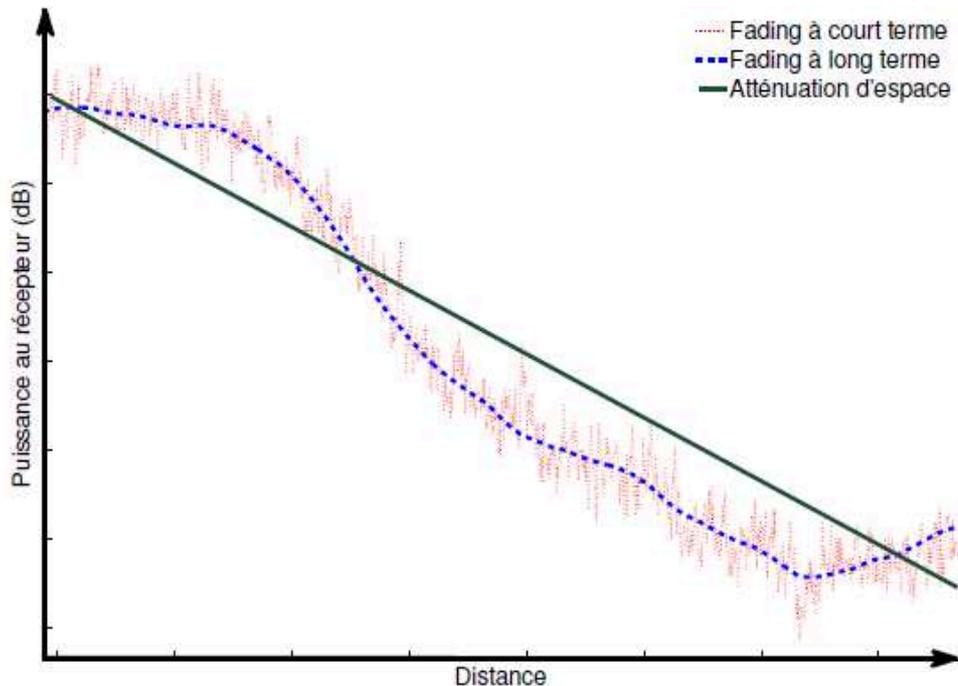


Figure 1.2 : Puissance du signal reçue en fonction de l'éloignement du mobile [3].

1.2 Modèle mathématique des signaux en bande de base

1.2.1 Signal de transmission

Nous décrivons dans ce paragraphe la modélisation mathématique du canal [8]. En pratique, la transmission des signaux numériques est réalisée en bande portée. La translation du spectre autour de la porteuse f_0 conduit au signal haute fréquence $s_{HF}(t)$, avec la bande du système B_0 relativement « étroite », soit $B_0 \ll f_0$. Le signal d'émission en haute fréquence $s_{HF}(t)$ s'écrit :

$$s_{HF}(t) = s_I(t) \cos(2\pi f_0 t) + s_Q(t) \cos(2\pi f_0 t + \frac{\pi}{2}) \quad (1.1)$$

avec $s_I(t)$ (voie en phase "I") et $s_Q(t)$ (voie en quadrature "Q") les messages numériques à transmettre en bande de base. $s_I(t)$ et $s_Q(t)$ modulent respectivement en phase et en quadrature la porteuse $\cos(2\pi f_0 t)$ à l'émission.

$s_{HF}(t)$ peut aussi s'écrire à partir de son enveloppe complexe :

$$s_{HF}(t) = \text{Re} \{s(t) \cdot e^{j2\pi f_0 t}\} \tag{1.2}$$

Soit $r_{HF}(t)$ le signal reçu "Haute Fréquence". Les composantes en quadrature relatives à f_0 de $r_{HF}(t)$ s'obtiennent par démodulation et filtrage passe-bas.

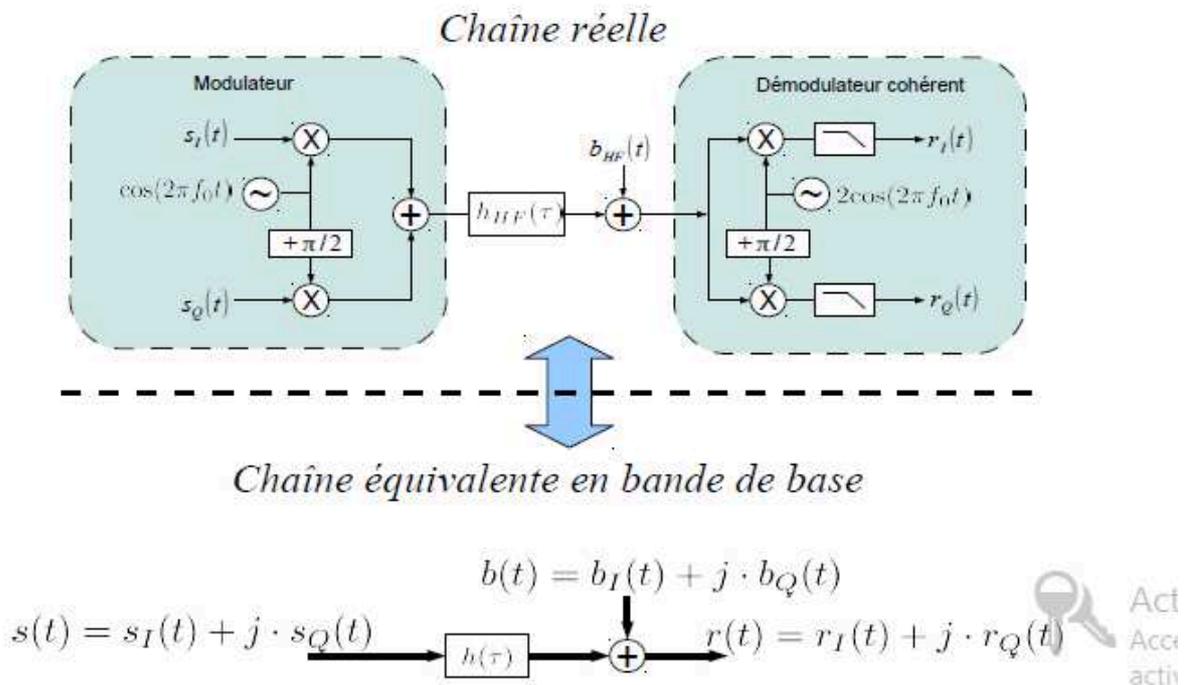


Figure 1.3 : chaîne de transmission équivalente en bande de base [3].

La porteuse utilisée pour la démodulation est la même que celle utilisé pour la modulation multipliée par un facteur 2, soit $2 \cos(2\pi f_0 t)$. Les composantes en quadratures s'écrivent alors :

$$r_I(t) = BF \{r_{HF}(t) \cdot 2 \cos(2\pi f_0 t)\} \tag{1.3}$$

$$r_Q(t) = BF \{r_{HF}(t) \cdot 2 \cos(2\pi f_0 t + \frac{\pi}{2})\} \tag{1.4}$$

où $BF\{\cdot\}$: est l'opération de translation en bande de base qui ne conserve que les composantes $\ll f_0$.

L'enveloppe complexe du signal reçu peut alors s'écrire :

$$r(t) = r_I(t) + j r_Q(t) = BF \{r_{HF}(t) \cdot 2e^{-j2\pi f_0 t}\} \quad (1.5)$$

Le signal reçu $r_{HF}(t)$ s'exprime comme le filtrage du signal émis par la réponse impulsionnelle du canal de propagation physique $h_{HF}(\tau)$ et d'un bruit additif $b_{HF}(t)$:

$$r_{HF}(t) = (h_{HF} * s_{HF})(t) + b_{HF}(t) \quad (1.6)$$

Le bruit $b_{HF}(t)$ est modélisé par un processus aléatoire gaussien de moyenne nulle, il est stationnaire, indépendant du signal émis et de DSP (Densité Spectrale de Puissance) bilatérale $\frac{N_0}{2}$ autour de f_0 .

L'équivalent de $h_{HF}(\tau)$ en bande de base $h(\tau)$ est alors défini de façon unique de la manière suivante :

Soit $H(f)$ et $H_{HF}(f)$ respectivement la transformée de Fourier de la réponse impulsionnelle du canal en bande de base $h(\tau)$ et celle du canal en bande portée $h_{HF}(\tau)$.

$$H(f) = TF \{h(\tau)\},$$

$$H_{HF}(f) = TF \{h_{HF}(\tau)\},$$

nous définissons :

$$H_{HF}^+(f) = \begin{cases} H_{HF}(f) & f \geq 0 \\ 0 & f < 0 \end{cases} \quad (1.7)$$

La réponse en fréquence du filtre en bande de base $H(f)$ se déduit de celle du filtre en bande portée $H_{HF}(f)$ par une translation de $-f_0$, en ne considérant que la partie des fréquences positives du filtre, soit :

$$H(f) = H_{HF}^+(f + f_0) \quad (1.8)$$

Le signal reçu en bande de base $r(t)$ s'exprime alors par le filtrage du signal émis en bande de base $s(t)$ par la réponse impulsionnelle du canal en bande de base $h(t)$:

$$r(t) = (h * s)(t) + b(t) \quad (1.9)$$

où $b(t) = BF \{b_{HF}(t) \cdot 2e^{-j2\pi f_0 t}\}$ est l'enveloppe complexe relative à f_0 du bruit réel physique. La DSP bilatérale de $b(t)$ est égale à $2N_0$ et les deux composantes en quadrature $b_I(t)$ et $b_Q(t)$ sont indépendantes, gaussien, centrées, avec chacune pour DSP bilatérale.

Cette équation (1.9) donne ainsi une représentation équivalente en bande de base de la transmission en introduisant une réponse impulsionnelle de canal complexe et un bruit complexe. La chaîne de communication numérique qui comporte un modulateur, un canal et un démodulateur peut donc être modéliser comme une source de signaux complexe en bande de base, filtré par la réponse impulsionnelle complexe du canal illustré sur la figure (1.3).

Dans ce modèle équivalent en bande de base, la porteuse n'intervient plus. Le filtrage équivalent en bande de base permet donc de décrire directement la transformation subie par le spectre du signal en restant en bande de base.

1.2.2 Réponse impulsionnelle du canal

En raison des dispersions et des réflexions sur les obstacles du milieu de propagation, le signal reçu est composé de la somme de plusieurs versions atténuées et retardées du signal transmis. Le signal reçu en bande portée s'écrit donc :

$$r_{HF}(t) = \sum_{l=1}^L \rho_l s_{HF}(t - \tau_l) + b_{HF}(t) \quad (1.10)$$

où :

- ✓ L est le nombre de trajets.
- ✓ $\tau_l, l = 0 \dots L-1$ sont les retards de propagation associés aux différents trajets.

✓ $\rho_l, l = 0 \dots L-1$ sont les atténuations de propagation. Ce sont des nombres réels positifs.

En injectant (1.2) dans (1.10), on obtient :

$$r_{HF}(t) = \text{Re}\{(\sum_{l=1}^L \rho_l e^{-j2\pi f_0 \tau_l} s(t - \tau_l)) \cdot e^{j2\pi f_0 t}\} + b_{HF}(t) \quad (1.11)$$

Le canal équivalent en bande de base s'écrit donc, en accord avec l'équation (1.11) :

$$h(\tau) = \sum_{l=1}^L \rho_l e^{j\theta_l} \delta(\tau - \tau_l) \quad (1.12)$$

avec le coefficient $\alpha_l \stackrel{\text{def}}{=} \rho_l e^{j\theta_l}$ est dénommé gain complexe du trajet l , avec un module ρ_l égale à l'atténuation physique du trajet et une phase θ_l traduisant le déphasage de la porteuse dû au retard de propagation de ce trajet :

$$\theta_l = -2\pi f_0 \tau_l \quad (1.13)$$

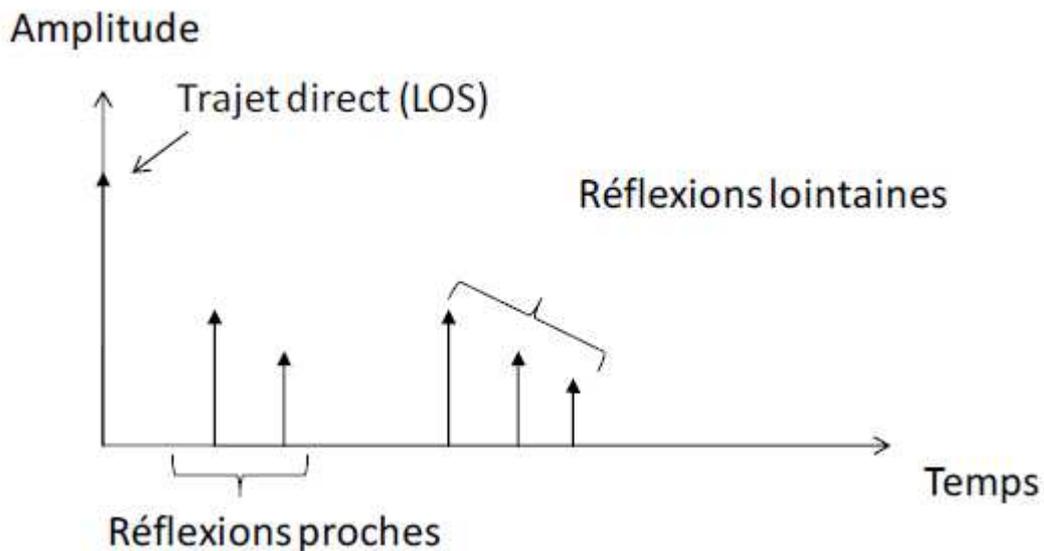


Figure 1.4: Représentation de la réponse impulsionnelle d'un canal radio-mobile [21].

Notons que, dans la pratique, les phases et les retards des trajets sont traités indépendamment malgré la relation linéaire théorique qui les lie dans le modèle idéal. Ce fait est principalement dû au rapport très important entre la fréquence porteuse f_0 et la bande du signal transmis B_0 . En effet, une erreur du retard $\Delta\tau$ entrainerait pour la phase déduite une erreur $\Delta\theta = 2\pi f_0 \Delta\tau$. Cette erreur sera beaucoup trop grand lorsque $\frac{f_0}{B_0} \gg 1$. Par exemple : pour un système avec une bande $B_0 = 3\text{MHz}$ et la fréquence porteuse $f_0 = 3\text{GHz}$, $\Delta\theta > 200\pi$.

Le canal de propagation est alors représenté par un filtre à coefficient complexe et un bruit additif, le filtre étant décrit par les variables $\{\rho_l, \theta_l, \tau_l\}$, $l=1\dots L$. Le signal reçu en bande de base $r(t)$ peut être réécrit comme :

$$r(t) = \sum_{l=1}^L \alpha_l s(t - \tau) + b(t). \quad (1.14)$$

1.3 Modèles de variation des paramètres

Le modèle de canal en bande de base décrit au précédent est valable lorsque le mobile est fixe. Lorsque le mobile se déplace, le modèle du canal devient un filtre évolutif $h(t, \tau)$ au cours du temps, c'est-à-dire que les paramètres du canal varient en fonction du temps : $\{\rho_l(t), \theta_l(t), \tau_l(t)\}$, $l = 0\dots L-1$. Par conséquent le gain, α_l devient alors :

$$\alpha_l = \rho_l(t) e^{j\theta_l(t)}, \quad (1.15)$$

et le modèle de canal s'écrit :

$$h(t, \tau) = \sum_{l=1}^L \alpha_l(t) \delta(\tau - \tau_l(t)). \quad (1.16)$$

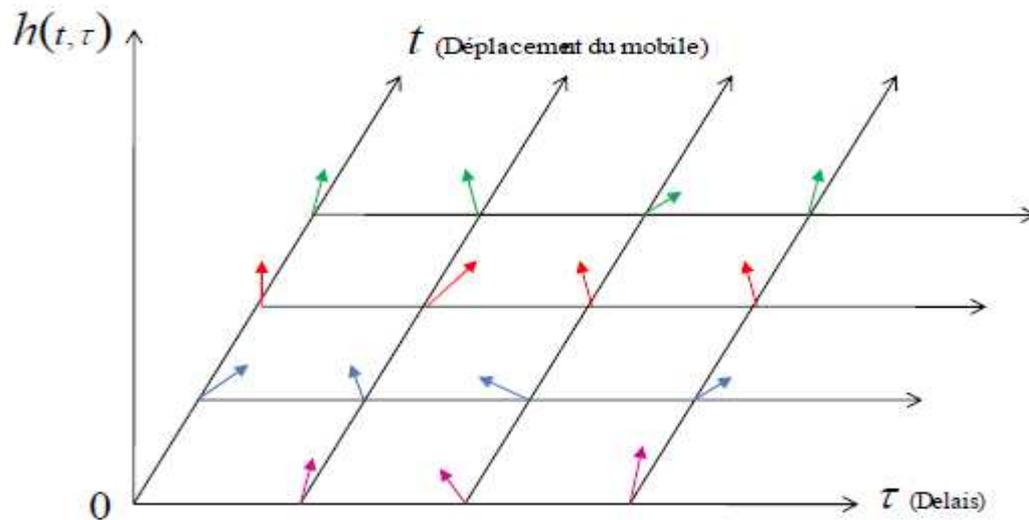


Figure 1.5 : Représentation d'un canal variant dans le temps [21].

1.3.1 Modèle déterministe

Pour étudier la variation des paramètres en fonction du temps, le plus simple est de supposer un mouvement uniforme pour le terminal mobile, avec une vitesse constante v_m sur la durée du symbole entre l'émetteur et le récepteur, en associant un angle d'arrivée φ_l par rapport à la direction du déplacement pour chaque trajet. Ce modèle ne décrit pas vraiment la réalité d'une transmission radio-mobile (le modèle aléatoire, détaillé à la section suivante, est beaucoup plus proche des phénomènes observés). Le modèle déterministe présente en plus l'avantage de donner un ordre de grandeur de variation des paramètres.

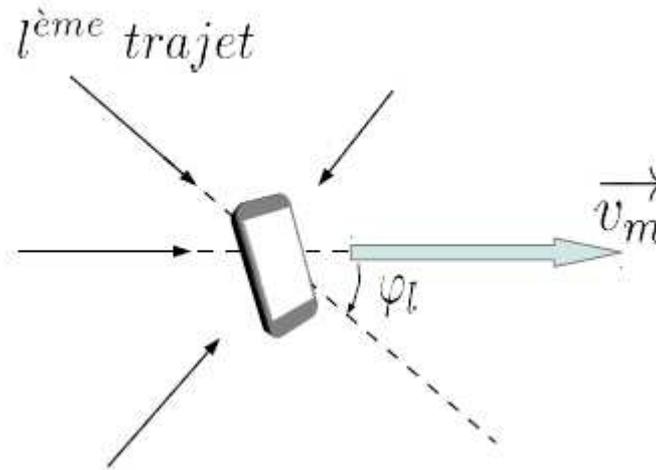


Figure 1.6 : le terminal mobile en mouvement [3].

En raison du déplacement uniforme, le retard de propagation relatif du $l^{\text{ème}}$ trajet varie linéairement en fonction du temps comme :

$$\tau_l(t) = \tau_l(0) + \frac{v_m \cos(\varphi_l)}{c} t, \quad (1.17)$$

avec c la célérité de l'onde radio-électrique. La variation linéaire du retard entraîne un déphasage linéaire de la phase d'après (1.13) :

$$\theta_l(t) = \theta_l(0) - 2\pi f_d \cos(\theta) t, \quad (1.18)$$

avec

$$f_d = \frac{v_m}{c} f_0 \quad (1.19)$$

la fréquence Doppler maximale.

Utiliser le modèle de déplacement uniforme du mobile comme modèle d'évolution permet de décrire les variations des paramètres de retard et de phase mais ne tient pas compte des variations de l'atténuation d'espace du trajet en champ lointain. Ces variations sont considérées comme négligeables tant que la durée d'étude de mouvement est courte, soit de l'ordre d'une durée symbole, dans ce cas nous avons $\rho_l(t) \approx \rho_l$.

Étudions maintenant les ordres de grandeur des variations du retard τ_l et de la phase $\theta_l(t)$ [23] :

Retard : pour une émission de plusieurs centaines de symboles, le décalage apporté par le canal est négligeable devant la durée symbole T en raison d'une vitesse de déplacement du mobile très faible par rapport à la célérité de l'onde radio-électrique. En effet, $\frac{v_m \cos(\varphi_l)}{c} t \ll T$.

Phase : les systèmes développés en télécommunications fonctionnent à des fréquences porteuses de plus en plus élevées. De nombreux systèmes de distribution radio large bande de porteuses de 2.3 à 3.5 GHz, se sont développés ces dernières années. De même, des systèmes radio de type LMDS (Local Multipoint Distribution systems en anglais) à des fréquences porteuses supérieures à 10 GHz ont vu le jour.

D'une manière générale, la multiplicité des services proposés et la rareté des ressources spectrales font que nous nous orientons vers des systèmes fonctionnant à des fréquences de plus en plus élevées (> 10 GHz). Compte tenu de cette fréquence porteuse élevée, les décalages apportés sur la phase sont non négligeables. À titre d'exemple, avec les ordres de grandeur du WIMAX Mobile [9], par exemple pour $f_0 = 3.5$ GHz avec la bande de transmission de 11.2 MHz et pour une vitesse de mobile $v_m = 300$ km/h, la fréquence Doppler est égale à $f_d = 972.2$ Hz, ce qui entraîne une variation de la phase de 36° sur un slot de communication d'une durée de $102.9 \mu\text{s}$.

Il est donc possible de conclure que, pour une émission de plusieurs centaines de symboles sur laquelle est réalisée la prédiction de canal, les retards des trajets pourront toujours être considérés comme fixes (vis-à-vis de la résolution temporelle), en raison d'une vitesse de déplacement du mobile très faible par rapport à la célérité de l'onde radio-électrique. En revanche, compte tenu de la fréquence porteuse élevée, un déplacement infime pourra entraîner des variations non négligeables de phase, et par conséquent des variations non négligeables de gain complexe.

Suite aux remarques précédentes, lorsque la vitesse des véhicules est élevée, les retards des trajets sont considérés comme fixes, mais ce n'est pas le cas des gains complexes. Pour la prédiction du canal par slot de communication il faudra donc réaliser une première prédiction des retards au début de la communication, mais il ne sera pas forcément nécessaire de prévoir

une mise à jour de cette prédiction. En revanche, un suivi des gains complexes du canal devra être mis en place. Le modèle dynamique de la Réponse Impulsionnelle (RI) du canal au cours du temps en bande de base devient ainsi :

$$h(t, \tau) = \sum_{l=1}^L \alpha_l(t) \delta(\tau - \tau_l(t)) = \sum_{l=1}^L \rho_l(t) e^{j\theta_l(0) - 2\pi f_d \cos(\theta) t} \delta(\tau - \tau_l(t)) \quad (1.20)$$

1.3.2 Modèle aléatoire

La modélisation la plus classique du canal est de considérer que la réponse impulsionnelle est stationnaire au sens large (WSS : Wide Sens Stationary) et que les diffuseurs sont non corrélés (US : Uncorellated Scatterers). Ce modèle WSSUS a été introduit par P.A. Bello en 1963 [10]. Il caractérise bien les variations à court terme pour des déplacements de l'ordre de quelques dizaines de longueurs d'onde.

Ce modèle s'appuie sur les quatre fonctions d'autocorrélation à deux paramètres de Bello. Ces fonctions sont liées deux à deux par des transformées de Fourier. Parmi ces fonctions, nous présentons la fonction d'autocorrélation temps-fréquence, fonction à partir de laquelle sont définies les notions de temps de cohérence $(\Delta t)_c$ et de la bande de cohérence $(\Delta f)_c$. Cette fonction est définie à partir de la TF (Transformée de Fourier) sur les retards de la réponse impulsionnelle du canal $H(f, t) = TF\{h(t, \tau)\}$:

$$R_{HH}(\Delta f, \Delta t) = E \{H(f, t)H^*(f - \Delta f, t - \Delta t)\} \quad (1.21)$$

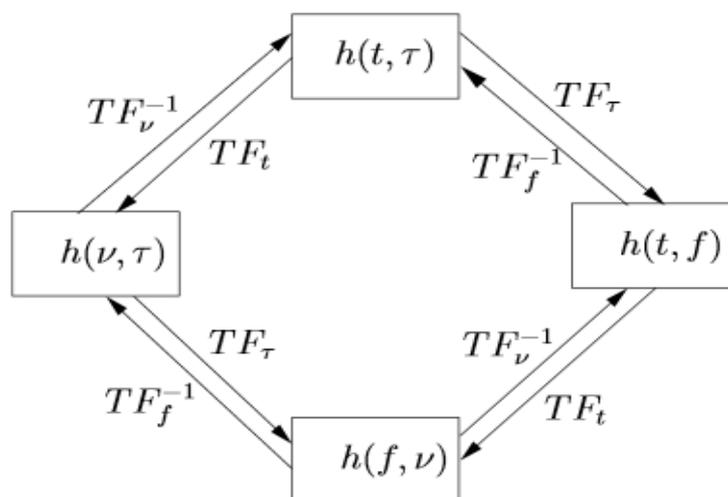


Figure 1.7 : Système de Bello [21].

- ✓ **Le temps de cohérence** $(\Delta t)_c$ est égal à la séparation temporelle minimale pour laquelle les échantillons du signal reçu en réponse à l'émission d'une fréquence pure sont dé-corrélés. Si la durée du symbole transmis T est plus grande que le temps de cohérence $(\Delta t)_c$, le canal est dit sélectif en temps. A l'inverse, si T est moins grande que $(\Delta t)_c$, le canal est dit non-sélectif en temps.
- ✓ **La largeur de la bande cohérence** $(\Delta f)_c$ d'un canal radio-mobile est égale à la séparation minimale pour laquelle les réponses du canal à l'émission de deux fréquences pures sont dé-corrélées. Le canal est dit sélectif en fréquence si la largeur de bande B_0 du signal est plus large que la largeur de la bande de cohérence $(\Delta f)_c$. Inversement, si B_0 est plus petite que $(\Delta f)_c$, le canal est dit non sélectif en fréquence ou "plat".

Nous décrivons maintenant de manière plus précise la modélisation aléatoire appliquée au canal multi-trajets considéré.

1.3.2.1 Loi de distribution des gains complexes

Afin d'obtenir la loi des coefficients $\alpha_l(t)$ associée au trajet l , il est nécessaire d'introduire la notation de "cluster" (groupe de micro-trajets) associé à un retard τ_l . En effet, la zone de réception du terminal mobile comprend souvent des diffuseurs proches transformant un trajet donné en un groupe de micro-trajets ayant des différences de marche très faible et donc quasiment le même retard τ_l mais avec des différences de phase quelconques. Ainsi, le coefficient de chaque trajet l correspond à la superposition de tous les coefficients des micro-trajets du cluster l [11] :

$$\alpha_l = \rho_l(t) \cdot e^{j\theta_l(t)} = \sum_n \rho_{l,n} \cdot e^{j\theta_{l,n}(t)}, \quad (1.22)$$

où $\rho_{l,n}$ et $\theta_{l,n}$ sont respectivement le module et la phase du $n^{\text{ème}}$ micro-trajet du cluster l ($\alpha_l(t)$).

Lorsqu'un trajet l correspond à une multitude de micro-trajets incohérents, la densité de probabilité du coefficient correspondant $\alpha_l(t) = \rho_l(t) \cdot e^{j\theta_l(t)}$ est gaussienne complexe en application du théorème de la limite centrale. Nous en déduisons que :

- ✓ les parties réelles et imaginaires de $\alpha_l(t)$ sont des variables gaussienne non corrélées de variance $\sigma_{\alpha_l}^2$,
- ✓ le module (enveloppe) ρ_l des coefficients suit alors une loi de Rayleigh donnée par :

$$p(\rho_l) = \begin{cases} \frac{\rho_l^2}{\sigma_{\alpha_l}^2} e^{-\frac{\rho_l^2}{2\sigma_{\alpha_l}^2}} & \text{pour } \rho_l \geq 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad (1.23)$$

où $2\sigma_{\alpha_l}^2$ est le gain en puissance associé au trajet l.

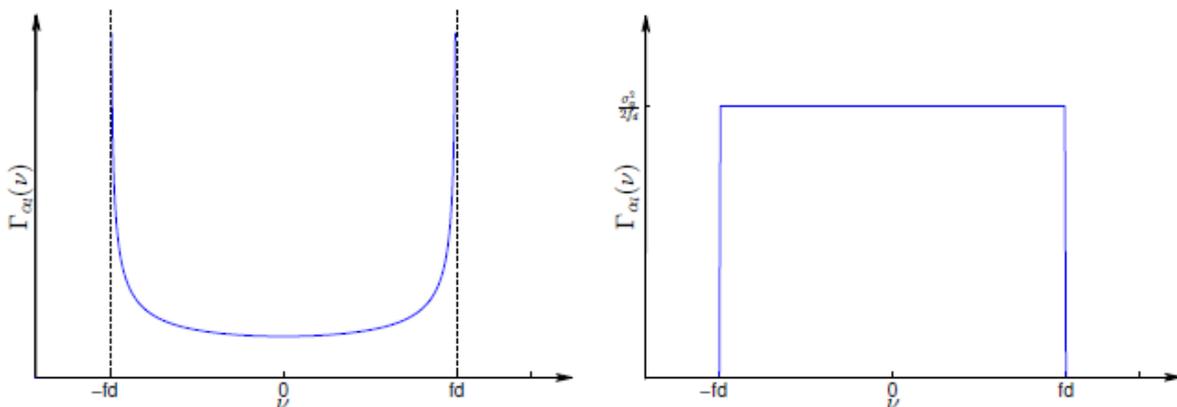
- ✓ la phase $\theta_l(t)$ des coefficients est uniformément distribuée entre 0 et 2π .

Lorsque la liaison directe est disponible, l'enveloppe du signal reçu en réponse à une porteuse non modulée suit une loi de Rice au lieu d'une loi de Rayleigh. Cette situation correspond généralement au milieu rural, alors que l'absence de trajet directe est la situation la plus courante dans les milieux urbains.

1.3.2.2 Spectre Doppler associé à chaque trajet

Le caractère dynamique de chaque trajet est mesuré par sa fonction d'autocorrélation temporelle :

$$R_{\alpha_l}(\Delta t) = E \{ \alpha_l(t) \alpha_l^*(t - \Delta t) \}. \quad (1.24)$$



(a) modèle en 2D, spectre en "U"

(b) modèle en 3D

Figure 1.8 : Spectre Doppler de α pour un modèle isotrope [3]

Un spectre Doppler est associé à chaque trajet, et est lié à la fonction d'autocorrélation via la transformée de Fourier :

$$\Gamma_{\alpha_1}(v) = TF_{\Delta t}\{R_{\alpha_1}(\Delta t)\}.$$

Déterminons maintenant la fonction d'autocorrélation pour le trajet l pour le cas particulier de l'environnement isotrope. Dans un environnement isotrope, les micro-trajets proviennent de toutes les directions avec une équi-probabilité : l'angle φ a une distribution uniforme sur $[0, 2\pi]$, avec $P(\varphi) = \frac{1}{2\pi}$. Il s'en suit, après calcul, que [12] :

$$R_{\alpha_1}(\Delta t) = \sigma_{\alpha_1}^2 J_0(2\pi f_d(\Delta t)), \quad (1.25)$$

où $J_0(\cdot)$ est la fonction de Bessel de première espèce d'ordre 0. Le spectre Doppler de α exprimé en bande de base s'écrit alors :

$$\Gamma_{\alpha_1}(v) = \begin{cases} \frac{\sigma_{\alpha_1}^2}{\pi f_d \sqrt{1 - (\frac{v}{f_d})^2}} & \text{pour } |v| \leq f_d \\ 0 & \text{pour } |v| > f_d \end{cases} \quad (1.26)$$

Ce spectre Doppler est appelé spectre de "Jakes", ou spectre de "Clarck Jakes", ou encore spectre en "U", en raison de sa forme donnée par la figure 1.5(a). Le canal introduit donc une modulation "parasite" en amplitude et en phase. La transmission d'une fréquence f_0 à travers un canal soumis à l'évanouissement de Rayleigh (mono-trajet ou multi-trajets) dans un environnement isotrope correspond en réception à un élargissement de fréquence $\pm f_d$ sous forme d'un DSP donnée par l'équation (1.26).

Le raisonnement ci-dessus est fait dans un contexte de mouvement en deux dimensions (2-D). Le spectre de Jakes à partir d'un modèle de diffusion en deux dimensions est utile pour calculer les statistiques du signal reçu dans un scénario d'échelle large, à titre d'exemple : radio-mobile dans un milieu rural. Cependant, pour la réception des communications dans un bâtiment (scénario Indoor), un modèle de diffusion en trois dimensions (3-D) peut être plus approprié [13]. Le spectre Doppler, dans un champ isotrope dispersé en 3-D, avec un récepteur isotrope, est uniforme sur le support des fréquences Doppler maximales (positive et négative), centrés sur la fréquence porteuse (figure 1.5(b)). Le spectre Doppler exprimé en bande de base sur chaque trajet s'écrit alors :

$$\Gamma_{\alpha_1(3D)}(v) = \begin{cases} \frac{\sigma_{\alpha_1}^2}{2f_d} & \text{pour } |v| \leq f_d \\ 0 & \text{pour } |v| > f_d \end{cases} \quad (1.27)$$

1.3.3 La variation de gain et la fréquence Doppler normalisée $f_d T$

Comme mentionné précédemment, la fréquence Doppler f_d est une fonction linéaire de la vitesse du récepteur. Nous allons utiliser la notion de fréquence Doppler normalisée $f_d T$ dépend de f_d (qui dépend donc de la fréquence porteuse et la vitesse du récepteur), et aussi de la durée symbole T .

Par exemple [3], pour un système mono-porteuse fonctionnant sur la radio-fréquence du GSM ($f_0 = 900\text{MHz}$) avec une bande de $B_0 = 0.2\text{MHz}$, la durée symbole est supposé de $\frac{1}{B_0} = 5\mu\text{s}$, une faible vitesse de 10 km/h correspond à $f_d T = 4.17 \cdot 10^{-5}$, et une forte vitesse de 500 km correspond à $f_d T = 2.08 \cdot 10^{-3}$.

Néanmoins, la nouvelle génération de télécommunication utilise des fréquences porteuses de plus en plus élevées, de plus, dans des systèmes multi-porteuse, comme des systèmes à modulation OFDM, la durée symbole est beaucoup plus importante que l'inverse de la bande du système pour éviter l'interférence entre symboles (IES), par exemple, la bande de WiMAX mobile est de 1.25 MHz (avec 128 sous-porteuse), mais avec la durée d'un symbole de 102.9 μs . Dans ce cas, avec une fréquence porteuse $f_0 = 3.5\text{GHz}$, nous avons pour une faible vitesse de 10 km/h, $f_d T = 3.33 \cdot 10^{-3}$, et une forte vitesse de 120 km/h correspond à $f_d T = 0.04$. De ce fait, l'étude sur $f_d T$ entre la gamme 10^{-3} et 0.1 s'avère une tâche de plus en plus intéressante aujourd'hui avec des communications à large bande.

L'ordre de grandeur de $f_d T$ donne une référence sur la rapidité de variation des gains du canal. La figure 1.6 montre deux réalisations de la partie réelle de gain sur six symboles OFDM (chaque symbole comporte 144 échantillons) transmis consécutif pour deux récepteurs, à faible vitesse ($f_d T = 10^{-3}$) et à vitesse élevée ($f_d T = 0.3$). Nous observons que le canal est quasi-invariant dans une durée symbole pour une faible vitesse, l'amplitude de gain montre une forte tendance linéaire pendant les symboles consécutifs. En revanche pour une vitesse élevée, le canal varie à l'intérieure d'un symbole OFDM. Dans le cadre de cette thèse, nous nous concentrons sur une gamme de vitesse modérée, i.e. $f_d T < 10^{-1}$.

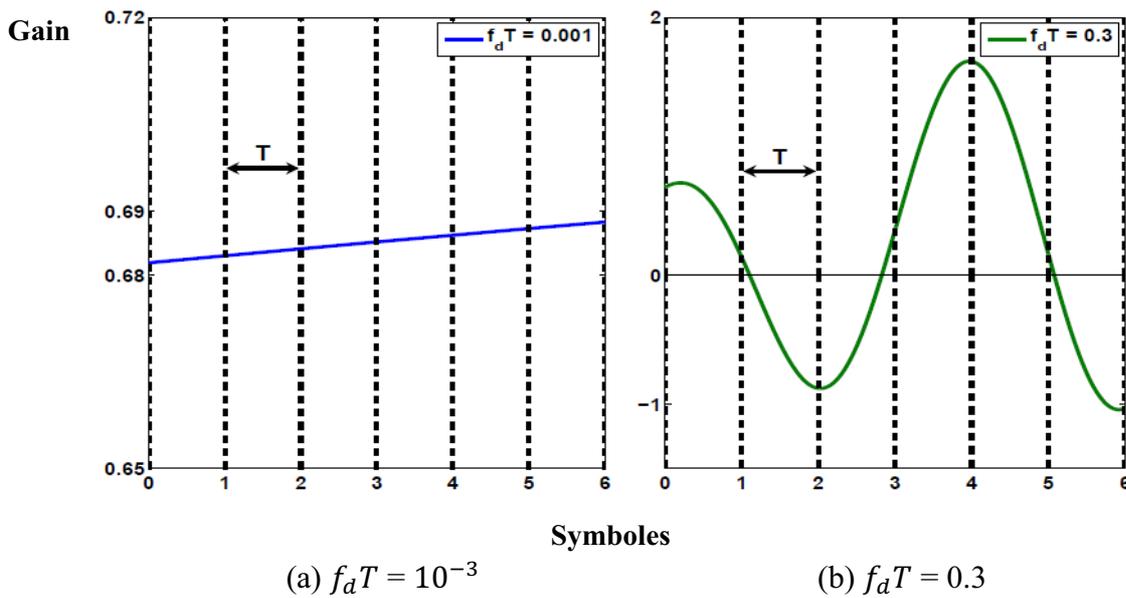


Figure 1.9 : La partie réelle des gains durant 6 symboles OFDM consécutif (T : durée symbole) [14].

1.4 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons introduit le modèle mathématique du canal de propagation après une courte description des phénomènes liés à l'environnement, ainsi que la représentation de la réponse impulsionnelle du canal en bande de base. En cas de mobilité, les retards peuvent être considérés comme constants sur la durée d'une transmission, ce qui n'est pas le cas pour les gains complexes. Par conséquent, nous supposons qu'une procédure d'acquisition des retards est mise en place, et nous nous intéresserons à la prédiction des gains au moyen d'un algorithme de prédiction. Les gains des trajets suivent une loi Rayleigh pour un scénario en milieu urbain où il n'y a pas de liaison directe (NLOS). Le spectre des gains complexes des trajets est décrit par le modèle de Clarke-Jakes, qui a une allure en "U" pour le modèle isotrope en 3-D. Pour la suite de ce travail, nous allons considérer le canal de type Rayleigh associé à un spectre de Jakes en deux dimensions.

Chapitre 2

Etude et Application du processus AR au Canal Mono-trajet

2.1 Introduction

Une série temporelle est une suite finie (x_1, \dots, x_n) de données indexées par le temps. L'indice temps peut être selon les cas : la minute, l'heure, le jour, l'année, ...etc. La discipline qui traite ce type de quantités est l'analyse des séries temporelles. L'analyse des séries temporelles en question consiste en opération de prédiction, de modélisation et caractérisation. L'objectif de prédiction est de prévoir avec précision l'évolution à courts termes de séries temporelles, et la modélisation vise la détermination des caractéristiques du comportement à long terme, la caractérisation a comme but de déterminer les propriétés fondamentales d'une série temporelle. La prédiction est le sujet de ce travail.

La prédiction de l'évolution future des phénomènes a reçu depuis très longtemps un intérêt spécial ce qui a accéléré le développement des techniques de prédiction et aussi donné une variété des valeurs scientifiques entre ces techniques. Les domaines d'application de prédiction sont très large tel que : économie, atmosphère, astrologie, communication, ...etc.

La prédiction traditionnelle exige la connaissance des informations précédentes [15] sur le comportement du système à prédire. Si le calcul du comportement futur est exact, une telle méthode de prédiction est entièrement déterministe. Mais en réalité, plusieurs facteurs rend le calcul exact du comportement futur impossible. Cependant il est possible de générer un modèle qui peut être utilisé pour calculer la probabilité de futur comportement entre deux limites spécifiées. Tel modèle est appelé modèle stochastique ou processus stochastique. Une importante classe de modèles stochastiques est utilisée pour la description des séries temporelles stationnaires appelée la classe des modèles stochastiques stationnaires.

Ces modèles supposent que les propriétés de série temporelle sont invariantes par la translation temporelle; parmi ces modèles il y a [15] [16] [28] : AR, MA, ARMA. Les processus utilisés pour la description des séries temporelles non stationnaires (en moyenne, en variance, cessionnaire) sont: ARIMA, SARIMA. Finalement, le calcul des filtres introduits en prédiction, ou prédicteurs, introduit une classe de filtres très intéressants connus sous le nom de filtres en treillis. Bien que ces filtres puissent être étudiés indépendamment, ils ont une explication naturelle dans le cadre de la prédiction.

Et pour la construction des modèles quelles que soient leurs classes, Box et Jenkins ont introduit une méthodologie utilisée pour l'obtention d'un modèle linéaire qui s'ajuste au mieux

à une série temporelle. Cette méthodologie se décompose en trois étapes : l'identification du modèle, l'estimation des paramètres et la validation du modèle.

2.2 Historique

A partir du 20^{ème} siècle, l'aléatoire est pris en compte, notamment à l'aide des travaux de Yule (1927). Ces travaux sont issus de l'observation du mouvement oscillatoire d'un pendule bombardé de petits pois lancés par un enfant. Il y a ensuite de nombreux contributeurs aux méthodes aléatoires. En (1926) Yule démontre que le fait de différencier un bruit aléatoire introduit des autocorrélations artificielles. Dans la même veine, indépendamment de Yule, Slutsky (1927, 1933, 1938) montre qu'en calculant une moyenne mobile à partir d'un bruit blanc, on obtient une série dont les observations ne sont pas indépendantes [9].

En 1927, Yule propose le modèle autorégressif [15] et trouve qu'un modèle autorégressif d'ordre 2 représente assez bien le comportement des données de Walker sur les taches solaires. Yule montre que le modèle autorégressif peut conduire à l'apparition de fluctuations cycliques. Toutefois, les caractéristiques d'amplitude et de phase de ces cycles sont variables.

Fin des années 60, la prédiction linéaire (LP) pour les filtres. Méthode Box et Jenkins, 1970, méthode Burg, 1975, les deux méthodes pour calculer les coefficients du filtre de prédiction et la puissance d'erreur de prédiction. Ces deux méthodes consistent à extrapoler les valeurs d'auto-covariance.

2.3 Processus autorégressif

2.3.1 Motivation

De tel processus seront notés AR.

Un signal $\{u(n)\}$ est la réalisation d'un processus autorégressif d'ordre M si $u(n)$ s'écrit [16] [28] :

$$u(n) = \sum_{k=1}^M w_k u(n-k) + v(n) \quad (2.1)$$

où w_k , $k = 1, \dots, M$ sont les coefficients du modèle et $v(n)$ est un bruit blanc (supposé Gaussien complexe et centré de variance σ_v^2).

□

On peut aussi écrire :

$$u(n) - \sum_{k=1}^M w_k u(n-k) = v(n) \quad (2.2)$$

ou bien, on posant $a_0 = 1$ et $a_k = -w_k$ $k = 1, \dots, M$

$$\sum_{k=0}^M a_k u(n-k) = v(n) \quad (2.3)$$

Enfin, en utilisant l'opérateur de retard z^{-1} , on peut écrire :

$$u(n) = \sum_{k=1}^M w_k z^{-k} u(n) + v(n) \quad (2.4)$$

$$v(n) = u(n)[1 - \sum_k w_k z^{-k}] \quad (2.5)$$

soit en utilisant les notations a_k

$$u(n)[1 - \sum_k w_k z^{-k}] = v(n)$$

$$H_A(z) u(n) = v(n) \quad (2.6)$$

$$\text{avec : } H_A(z) = \sum_{k=0}^M a_k z^{-k} \quad (2.7)$$

Cette équation donne la relation entre un échantillon $v(n)$ et $u(n)$. Pour les séquences $\{v(n)\}$ et $\{u(n)\}$, en notant :

$$U(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} u(n)z^{-n} \quad \text{et} \quad V(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} v(n)z^{-n} \quad (2.8)$$

on a :

$$H_A(z)U(z) = V(z) \quad (2.9)$$

On peut interpréter ce résultat de deux façons :

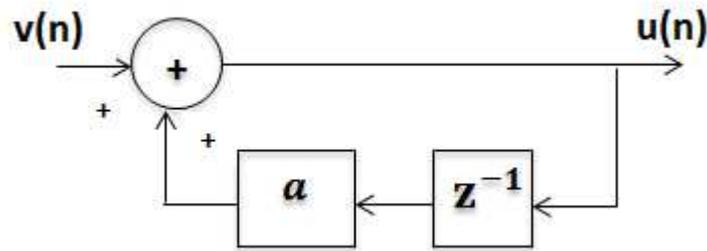


Figure 2.1 : Filtre autorégressif AR d'ordre 1 [16].

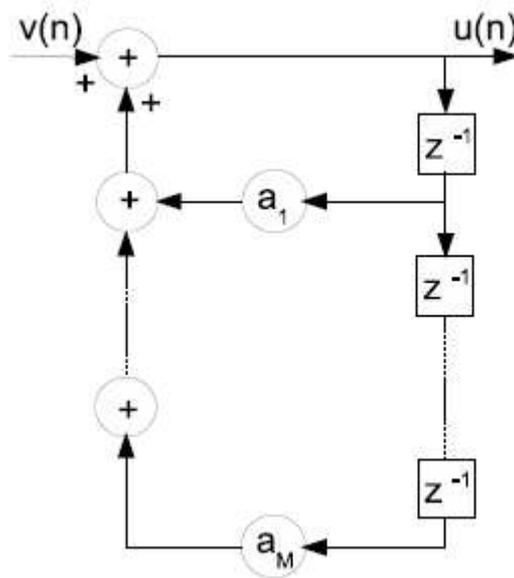


Figure 2.2 : Filtre autorégressif d'ordre M [16].

Etant donné le bruit blanc $\{v(n)\}$, on peut générer le signal autorégressif $\{u(n)\}$ par la relation :

$$U(z) = \frac{V(z)}{H_A(z)} = H_G(z)V(z) \tag{2.10}$$

où $H_G(z)$, inverse du filtre RIF $H_A(z)$, est donc un filtre "générateur" à réponse impulsionnelle infinie (RII ou IIR en anglais).

Le filtre $H_G(z) = \frac{1}{H_A(z)}$ est un filtre tout-pôle (all-pole filter). Ce filtre est stable si et seulement si tous les pôles de $H_G(z)$ sont situés à l'intérieur du cercle unité.

2.3.2 Caractérisation d'un modèle AR

Un modèle (ou un processus) AR est complètement caractérisé par :

- ✓ la variance du bruit blanc $v(n)$ qui excite le filtre, notée σ_v^2 ,
- ✓ les coefficients AR : a_1, a_2, \dots, a_M (rappelons que $a_0 = 1$).

On a alors l'équation :

$$u(n)(1 + \sum_{k=1}^M a_k z^{-k}) = v(n) \quad (2.11)$$

ou bien sous la forme développée :

$$u(n) + a_1 u(n-1) + \dots + a_M u(n-M) = v(n), \quad (2.12)$$

où $v(n)$ est un bruit blanc de variance σ_v^2 .

2.3.2.1 Equations de Yule-Walker

Multiplions l'équation précédente par $u(n-p)$, $p > 0$, et calculons l'espérance :

$$E[\sum_{k=0}^M a_k u(n-k) u(n-p)] = E[v(n) u(n-p)], \quad p = 1, \dots, M. \quad (2.13)$$

On voit apparaître les autocorrélations de u , et les intercorrélations sont nulles sauf en $p = 0$. On a donc :

$$E[v(n) u(n-p)] = \begin{cases} \sigma_v^2 & p = 0 \\ 0 & p > 0 \end{cases} \quad (2.14)$$

En écrivant l'équation pour $p = 1, \dots, M$, on obtient le système de M équations :

$$\sum_{k=1}^M a_k E[u(n-k) u(n-p)] = 0 \quad p = 1, 2, \dots, M \quad (2.15)$$

En posant $w_k = -a_k$, on peut mettre cette équation sous la forme :

$$\sum_{k=1}^M w_k E[u(n-k) u(n-p)] = E[u(n) u(n-p)] \quad p = 1, 2, \dots, M. \quad (2.16)$$

En posant maintenant :

$$E[u(n-k) u(n-p)] = R_{uu}(p-k) = R(p-k) \quad (2.17)$$

$$E[u(n) u(n-p)] = R_{uu}(p) = R(p) \quad (2.18)$$

le système d'équations peut s'écrire :

$$\begin{pmatrix} R(0) & R(1) & \dots & R(M-1) \\ R(1) & R(0) & \dots & R(M-2) \\ \vdots & \dots & \dots & \vdots \\ R(M-1) & R(M-2) & \dots & R(0) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ \vdots \\ w_M \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R(1) \\ R(2) \\ \vdots \\ R(M) \end{pmatrix} \quad (2.19)$$

que l'on peut mettre sous la forme matricielle :

$$R w = r, \quad (2.20)$$

en posant $w = (w_1, \dots, w_M)^T$ et $r = (R(1), \dots, R(M))^T$. Cette équation porte le nom d'équation de Yule-Walker.

2.3.2.2 Résolution des équations de Yule-Walker (YW)

✓ Calcul des coefficients w_k

Si la matrice R est régulière, on calcule simplement :

$$w = R^{-1} r \quad (2.21)$$

On remarque que l'équation de YW requiert la connaissance de $R(0), \dots, R(M)$, c'est-à-dire de $M + 1$ termes d'autocorrélation. L'équation (2.20) permet de calculer les M coefficients w_1, w_2, \dots, w_M . Il reste à calculer la variance σ_v^2 .

✓ Calcul de la variance σ_v^2

Pour $p = 0$, en tenant compte de l'équation du modèle AR (2.12), l'équation (2.13) devient :

$$E[\sum_{k=0}^M a_k u(n-k) u(n)] = E[v(n) u(n)] = \sigma_v^2 \quad (2.22)$$

En utilisant la propriété de linéarité de l'espérance, on arrive à :

$$\sum_{k=0}^M a_k E[u(n-k) u(n)] = \sigma_v^2 \quad (2.23)$$

soit, avec les notations $R(k) = E[u(n-k)u(n)]$ [2]

$$\sum_{k=0}^M a_k R(k) = \sigma_v^2 \quad (2.24)$$

Cette $(M + 1)$ -ème équation permet donc de calculer la variance, à partir de $R(0), \dots, R(M)$ et des coefficients a_1, \dots, a_M . Le filtre AR est complètement spécifié.

2.3.3 Erreur de prédiction

On note l'erreur de prédiction à un pas :

$$e(n) = u(n) - \hat{u}(n) \quad (2.25)$$

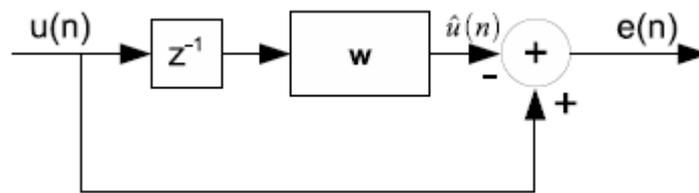


Figure 2.3 : Représentation du calcul de l'erreur $e(n)$ [16].

où $\hat{u}(n)$ est la prédiction obtenue en tenant de tout le passé.

L'erreur quadratique moyenne, mesurant les performances du prédicteur, est donc :

$$EQM = E[e_M^2(n)] \quad (2.26)$$

Dans le cas des signaux complexes, on aurait $EQM = E[|e_M(n)|^2]$.

2.4 Modèle général et problème de prédiction

Dans ce chapitre, on va étudier la prédiction d'un canal de propagation de type Rayleigh à spectre de Jakes. Supposons dans un premier temps que le canal est mono-trajet ($L = 1$) à retard τ_l nul, caractérisé par le gain de variance normalisé $\sigma_\alpha^2 = 1$, et qui varie d'un symbole à un autre, mais fixe pendant une durée symbole T . Ce canal est à variations lentes à l'échelle

□

du temps symbole avec une fréquence Doppler maximale f_d , et donc, pour cette hypothèse soit valide, il faut que $f_d T$ soit inférieure que 10^{-2} , mais notre étude pourra considérer des valeurs de $f_d T$ supérieures, comprises entre 10^{-4} et 10^{-1} .

$$h(t, \tau) = \sum_{l=1}^L \alpha_l(t) \cdot \delta(\tau - \tau_l)$$

Pour simplifier les notations, nous supprimons l'indice du trajet sur le gain complexe :

$$h(t, \tau) = \alpha(t) \cdot \delta(\tau - \tau_0) \quad (2.27)$$

Les gains d'un tel canal continu et stationnaire au sens large sont corrélé temporellement d'après la fonction d'autocorrélation continue donnée par [17] [18] :

$$R_{cont_\alpha} \stackrel{\text{def}}{=} E(\alpha(t)\alpha^*(t-\tau)) = \sigma_\alpha^2 J_0(2\pi f_d \tau) \quad (2.28)$$

La figure (Fig2.4) montre cette fonction d'autocorrélation. Dans cette figure, on a normalisé f_d et τ par rapport à T . On remarque bien que quand f_d augmente, la valeur de $J_0(2\pi f_d \tau)$ est plus proche de 1.

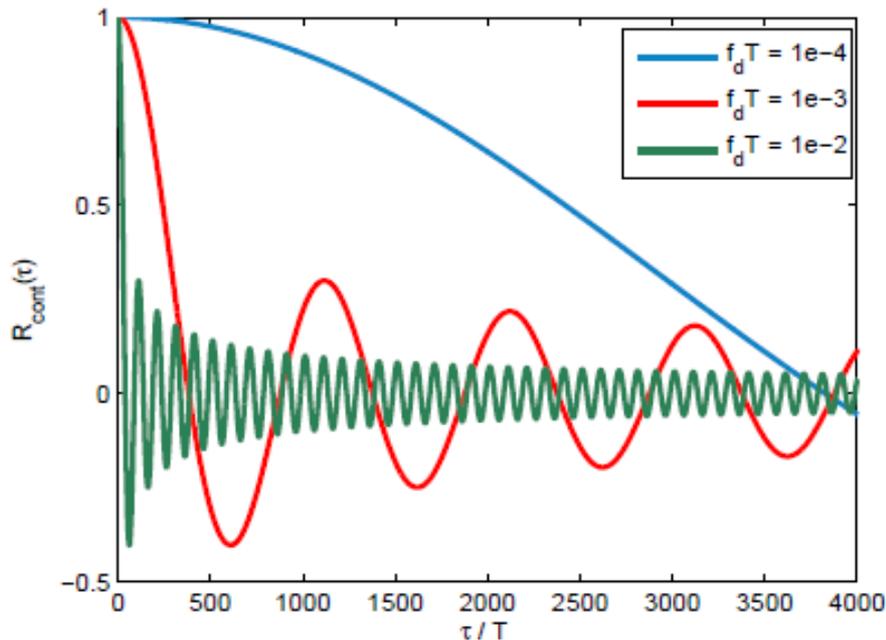


Figure 2.4 : Fonction d'autocorrélation continue d'un canal de Jakes pour différentes valeurs de f_d [17].

□

Le spectre Doppler de ce canal, ou autrement dit la densité spectral de puissance (DSP) du processus stationnaire α , est défini comme la TF de la fonction d'autocorrélation R_{cont_α} . C'est un spectre de Jakes, il est donné par l'équation (1.24) (Fig1.5(a)) du chapitre précédent.

Physiquement, un tel spectre peut résulter d'une superposition de très nombreux trajets de retards quasiment identiques mais d'angles d'arrivée φ_l différents uniformément répartis, dont pour chacun on a $f_d^l = f_d \cos(\varphi_l)$ avec f_d la fréquence Doppler définie par :

$$f_d = \frac{v_m}{c} f_0.$$

D'après le modèle considéré, pour un indice temporel donné k (symbole numéro k), α_k est une variable aléatoire complexe gaussienne et circulaire, qu'on note $\alpha_k \sim CN(0, \sigma_\alpha^2)$.

La fonction d'autocorrélation du processus discret α_k est définie par [18] :

$$R_{disc_\alpha}(l) \stackrel{\text{def}}{=} E(\alpha_n \alpha_{n-l}^*) \quad (2.29)$$

Elle peut être déduite à partir de la fonction d'autocorrélation du processus continu $R_{cont_\alpha}(\tau)$ échantillonnée pour $\tau = lT$

$$R_{disc_\alpha}(l) = R_{cont_\alpha}(\tau) |_{\tau = lT} \quad (2.30)$$

Soit $\alpha = [\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k]$ un bloc de k échantillons de gains qu'on cherche à prédire. k représente la taille de la fenêtre d'observation exprimée en nombre de symboles. La fonction d'autocorrélation entre les gains α_i et α_j est donnée par :

$$R_{disc_\alpha}[i - j] = \sigma_\alpha^2 J_0(2\pi f_d T \cdot (i - j)) \quad (2.31)$$

La matrice d'autocorrélation de ce vecteur sera donc donnée par :

$$R_\alpha = \begin{bmatrix} J_0(2\pi f_d T \cdot (0)) & J_0(2\pi f_d T \cdot (-1)) & \cdots & \cdots & J_0(2\pi f_d T \cdot (-(k-1))) \\ J_0(2\pi f_d T \cdot (1)) & J_0(2\pi f_d T \cdot (0)) & \cdots & \cdots & J_0(2\pi f_d T \cdot (-(k-2))) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ J_0(2\pi f_d T \cdot (k-1)) & J_0(2\pi f_d T \cdot (k-2)) & \cdots & \cdots & J_0(2\pi f_d T \cdot (0)) \end{bmatrix} \quad (2.32)$$



Et ce après avoir fait des normalisations :

$$(\sigma_\alpha^2 = 1 \text{ et } [R_\alpha]_{i,j} = R_\alpha[i-j] = [R_\alpha]_{j,i}) \quad (2.33)$$

Ce canal est à un bruit blanc complexe additif gaussien b_k , centré et de variance σ_b^2 . Les b_k sont tous dé-corrélés entre eux. On note $b_k \sim CN(0, \sigma_b^2)$.

Soit $b = [b_1, b_2, \dots, b_k]$ un bloc des k échantillons de bruits ajoutés. La matrice d'autocorrélation de ce vecteur sera donc donnée par:

$$R_b = \begin{bmatrix} \sigma_b^2 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & \sigma_b^2 & \dots & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & \dots & \sigma_b^2 \end{bmatrix} = \sigma_b^2 I_k \quad (2.34)$$

En communication numérique, le signal observé est généralement de la forme :

$$r_k = s_k \alpha_k + b_k \quad (2.35)$$

où s_k sera le signal utile qui dépend des données transmises et du type de modulation.

On a besoin de prédire α_k .

Une solution optimale serait au sens de l'EQM à ce problème de prédiction, dans le cas où le canal serait exactement un processus AR au lieu du processus de Jakes. Mais rappelons que dans notre cas le vrai canal n'est pas exactement un processus AR.

2.4.1 Prédicteur autorégressif :

Dans cette partie, on approche le canal de Jakes avec un modèle autorégressif d'ordre p aussi appelé "Gauss-Markov Model". Et donc on suppose que $\alpha_k \approx \alpha_k^{ARp}$ avec :

$$\alpha_k^{ARp} = \sum_{m=1}^p a_m \cdot \alpha_{k-m}^{ARp} + e_k \quad (2.36)$$

Pour simplifier l'écriture, on notera x_k au lieu de α_k^{ARp} .

Où e_k et le bruit du modèle, supposé Gaussien complexe et centré, de variance σ_p^2 .

Le choix des coefficients a_m est soumis aux deux conditions suivantes:

□

- ✓ Les coefficients a_m pour $m = 1, 2, \dots, p$ sont calculés traditionnellement d'après les équations de Yule-Walker, afin de minimiser la variance de l'erreur du modèle σ_p^2 (Voir annexe A) :

$$R_{xx}[k] = \begin{cases} \sum_{m=1}^p a_m R_{xx}[k-m] & k \geq 1 \\ \sum_{m=1}^p a_m R_{xx}[-m] + \sigma_p^2 & k = 0 \end{cases} \quad (2.37)$$

- ✓ Le choix standard de la littérature ([1], [18], [19]) est d'imposer aussi que la fonction d'autocorrélation du processus AR soit :

$$R_{xx}[k] = J_0(2\pi f_d T |k|) \text{ pour } k \in \{-p, \dots, 0, 1, \dots, p\} \quad (2.38)$$

Ce choix impose donc que la fonction d'autocorrélation discrète R_{disc} du processus AR coïncide avec la fonction d'autocorrélation du vrai processus $R_{cont}(kT)$ pour les $(2p + 1)$ échantillons d'indice $k \in \{-p, \dots, 0, 1, \dots, p\}$.

Et donc on aura d'après la première condition (équations de Yule-Walker (2.37)): $R_{xx}a = v$.

D'où la solution:

$$a = R_{xx}^{-1}v \quad (2.39)$$

Où :

$$R_{xx} = \begin{bmatrix} R_{xx}[0] & R_{xx}[-1] & \dots & \dots & R_{xx}[-(P-1)] \\ R_{xx}[1] & R_{xx}[0] & \dots & \dots & R_{xx}[-(p-2)] \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ R_{xx}[P-1] & R_{xx}[P-2] & \dots & \dots & R_{xx}[0] \end{bmatrix} \quad (2.40)$$

$$a = [a_1 \ a_2 \ \dots \ \dots \ a_p]^T \quad (2.41)$$

$$v = [R_{xx}[1] \ R_{xx}[2] \ \dots \ \dots \ R_{xx}[P]]^T \quad (2.42)$$

Et par suite

□

$$\sigma_p^2 = R_{xx}[0] - \sum_k^p a_k R_{xx}[k] \quad (2.43)$$

En ce sens, prédire linéairement un signal est équivalent à le modéliser en considérant qu'il est la sortie d'un filtre générateur de type AR.

2.4.1.1 Prédiction basée sur un modèle AR1

Dans cette partie, on approche le canal de Jakes avec un modèle autorégressif d'ordre 1. Et donc on suppose que $\alpha_k \approx \alpha_k^{AR_1}$ avec :

$$\alpha_k^{AR_1} = a_1 \cdot \alpha_{k-1}^{AR_1} + e_k \quad (2.44)$$

Pour simplifier l'écriture, on notera x_k au lieu de $\alpha_k^{AR_1}$.

e_k est le bruit du modèle de variance σ_e^2 et le coefficient a_1 est noté a dans la suite.

La solution de l'équation (2.39) est:

$$a = \frac{R_{xx}[1]}{R_{xx}[0]} \quad (2.45)$$

Et la solution de l'équation (2.43) est:

$$\sigma_e^2 = 1 - a^2 \quad (2.46)$$

Et en imposant de plus le choix standard (2.38) de la littérature, les équations amenant (2.45) et (2.46) deviennent respectivement pour un AR1 :

$$a = J_0(2\pi f_d T) \quad (2.47)$$

et :

$$\sigma_e^2 = 1 - (J_0(2\pi f_d T))^2 \quad (2.48)$$

$$\sigma_e^2 = 1 - \left[1 - (\pi f_d T)^2 + \frac{(\pi f_d T)^4}{2} - \dots \right]^2 \approx 2(\pi f_d T)^2 \quad (2.49)$$

Notons que pour les valeurs de $f_d T$ considérées, a est proche de 1 d'après le choix (2.47), et

σ_e^2 proche de 0.

On obtient donc une modélisation du problème avec une équation d'état et une équation d'observation suivantes :

$$\begin{cases} x_k = ax_{k-1} + e_k \\ r_k = s_k x_k + b_k \end{cases} \quad (2.50)$$

Le paramètre à prédire est x_k .

2.4.1.2 Prédiction basée sur un modèle AR2

Dans cette partie, on approche le canal de Jakes avec un modèle autorégressif d'ordre 2. Et donc on suppose que $\alpha_k \approx \alpha_k^{AR_2}$ avec :

$$\alpha_k^{AR_2} = a_1 \alpha_{k-1}^{AR_1} + a_2 \alpha_{k-2}^{AR_2} + e_k \quad (2.51)$$

Pour simplifier l'écriture, on notera x_k au lieu de $\alpha_k^{AR_2}$.

Et donc le système d'équations de Yule-Walker pour un système autorégressif d'ordre 2 devient (voir l'équation (2.39)) :

où e_k est le bruit du modèle supposé gaussien et a_1 , a_2 sont calculés à partir du système de Yule-Walker. Pour simplifier l'écriture, on notera x_k au lieu de $\alpha_k^{AR_2}$.

$$\begin{bmatrix} R_{xx}[0] & R_{xx}[-1] \\ R_{xx}[1] & R_{xx}[0] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_{xx}[1] \\ R_{xx}[2] \end{bmatrix} \quad (2.52)$$

La solution de ce système est alors :

$$\begin{cases} a_1 = \frac{R_{xx}[1].R_{xx}[0] - R_{xx}[2]}{R_{xx}^2[0] - R_{xx}^2[1]} \\ a_2 = \frac{R_{xx}[2].R_{xx}[0] - R_{xx}^2[1]}{R_{xx}^2[0] - R_{xx}^2[1]} \end{cases} \quad (2.53)$$

On a dans ce cas la variance de l'erreur du modèle σ_e^2 donnée par (voir l'équation (2.39)) :

$$\sigma_e^2 = R_{xx}[0] - a_1 R_{xx}[1] - a_2 R_{xx}[2] \quad (2.54)$$



Et en imposant de plus le choix standard (2.38) de la littérature, les équations (2.53) et (2.54) deviennent respectivement pour un AR2 :

$$\begin{cases} a_1 = \frac{J_0(2\pi f_d T) \cdot [1 - J_0(4\pi f_d T)]}{1 - (J_0(2\pi f_d T))^2} \\ a_2 = \frac{J_0(4\pi f_d T) - (J_0(2\pi f_d T))^2}{1 - (J_0(2\pi f_d T))^2} \end{cases} \quad (2.55)$$

Et :

$$\sigma_e^2 = 1 - a_1 J_0(2\pi f_d T) - a_2 J_0(4\pi f_d T) \quad (2.56)$$

2.4.2 L'erreur quadratique moyenne EQM

L'erreur quadratique moyenne peut être calculée à la l'aide de ces deux fonctions de transfère :

$$EQM = \frac{1}{k} \sum_{n=1}^k |\hat{\alpha}_n - \alpha_n|^2 = \sigma_e^2 \quad (2.57)$$

$$= \int_{-\frac{1}{2}T}^{\frac{1}{2}T} |L(e^{j2\pi f T})|^2 \cdot \Gamma_\alpha(f) df + \sigma_b^2 \int_{-\frac{1}{2}T}^{\frac{1}{2}T} |T(e^{j2\pi f T})|^2 df \quad (2.58)$$

$$= \sigma_{mod}^2 + \sigma_{bruit}^2 \quad (2.59)$$

$$= EQM1 + EQM2 \quad (2.60)$$

$$\text{avec : } |L(e^{-j2\pi f T})|^2 \approx \frac{\sigma_b^2}{\sigma_e^2} \cdot (4\pi^2 T^2) \cdot f^2 \quad (2.61)$$

$$|L(e^{j2\pi f T})|^2 = |1 - T(e^{j2\pi f T})|^2 \quad (2.62)$$

Où $L(\cdot)$ représente une fonction de transfère d'erreur.

$T(\cdot)$ représente une fonction de transfère entre le vrai paramètre bruité et le paramètre prédit.

$$\Gamma_\alpha(f) = \frac{\sigma_\alpha^2}{\pi f_d \sqrt{1 - (\frac{f}{f_d})^2}} \quad \text{sur }] - f_d; f_d[\quad (2.63)$$

- ✓ EQM1 représente la variance d'erreur dynamique (due à la variation de α).
- ✓ EQM2 représente la variance d'erreur statistique (due au bruit additif).

□

On peut approximer les deux valeurs de EQM1 et EQM2. Pour cela on aura recours aux valeurs de $|L(e^{j2\pi fT})|^2$ et $|T(e^{j2\pi fT})|^2$. On approche donc les valeurs de l'EQM1 et EQM2 :

- ✓ Pour EQM1, d'après l'équation (2.61), on aura la formule de l'EQM1 en fonction du paramètre a du modèle AR1 (2.44) (voir annexe B):

$$EQM1 \approx (4\pi^2 T^2) \frac{\sigma_b^2}{\sigma_e^2} \left[\frac{\sigma_a^2}{\pi f_d} \int_{-f_d}^{f_d} \frac{f^2}{\sqrt{1-(\frac{f}{f_d})^2}} df \right] \approx \frac{2(\pi f_d T)^2 \sigma_b^2}{1-a^2} \quad (2.64)$$

Et on posant le choix standard de a de l'équation (2.47), d'après (2.49), on aura :

$$EQM1 \approx \sigma_b^2. \quad (2.65)$$

- ✓ Pour EQM2 :

$$\int_{-\frac{1}{2T}}^{\frac{1}{2T}} |T(e^{j2\pi fT})|^2 df = \frac{1}{2T} \sqrt{\frac{\sigma_e^2}{\sigma_b^2}} \quad (2.66)$$

Et on a :

$$EQM2 = \sigma_b^2 \cdot T \cdot \frac{1}{2T} \sqrt{\frac{\sigma_e^2}{\sigma_b^2}} \quad (2.67)$$

On aura donc, en fonction de a □

$$EQM2 \approx \frac{\sqrt{(1-a^2)\sigma_b^2}}{2} \quad (2.68)$$

De même, en supposant prendre le choix standard de a donné par l'équation (2.47), d'après (2.49), on aura :

$$EQM2 \approx \frac{\sqrt{\sigma_e^2 \sigma_b^2}}{2} \approx \frac{\pi f_d T \sigma_b}{\sqrt{2}} \quad (2.69)$$

2.4.2.1 Proposition d'optimisation

Cette partie présente une proposition de choix pour le paramètre du modèle autorégressif du premier ordre. D'après les équations (2.64) et (2.68), on a:

□

□

$$EQM(a) = \frac{A}{1-a^2} + B \cdot \sqrt{1-a^2} \quad (2.70)$$

avec : $A = 2(\pi f_d T)^2 \sigma_b^2 \quad (2.71)$

et $B = \frac{\sqrt{\sigma_b^2}}{2} \quad (2.72)$

Essayons de voir pour quelle valeur de a , EQM est minimisée. Pour cela, on a recours à la dérivée par rapport à a :

$$\frac{\partial EQM}{\partial a} = \frac{2Aa}{(1-a^2)^2} - \frac{aB}{\sqrt{1-a^2}} \quad (2.73)$$

avec les conditions suivantes :

- ✓ $0 < a < 1$.
- ✓ a proche de 1.

$$\frac{\partial EQM}{\partial a} = 0 \Rightarrow \frac{2Aa}{(1-a^2)^2} = \frac{aB}{\sqrt{1-a^2}} \Rightarrow (1-a^2)^{\frac{3}{2}} = \frac{2A}{B} \quad (2.74)$$

alors :

$$a^* = \sqrt{1 - \left(\frac{2A}{B}\right)^{\frac{2}{3}}} \quad (2.75)$$

En remplaçant A et B par leurs valeurs données dans (2.71) et (2.72), on aura :

$$a^* = \sqrt{1 - \sqrt[3]{(2\pi f_d T)^4 \sigma_b^2}} \quad (2.76)$$

Dans ce cas, l'erreur EQM optimale, théoriquement calculées est obtenue en remplaçant a par a^* dans l'équation (2.70) :

$$EQM_{opt} = EQM(a^*) = \frac{A}{1-(a^*)^2} + B \sqrt{1-(a^*)^2} = A \left[\frac{2A}{B}\right]^{-\frac{3}{2}} + B \left[\frac{2A}{B}\right]^{\frac{1}{3}} \quad (2.77)$$

Ou encore, en remplaçant A et B par leurs valeurs données dans les équations (2.31) et (2.32), on trouve la valeur optimale de EQM en fonction des différents paramètres (σ_b^2 et $f_d T$), valable pour $f_d T \ll 1$ □

□

$$EQM_{opt} = \frac{3}{2} (\pi f_d T \sigma_b^2)^{\frac{2}{3}} \quad (2.78)$$

2.5 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons en premier lieu présenté le modèle autorégressif d'ordre p (AR- p) avec ses caractéristiques, puis le modèle de canal de propagation le plus utilisé pour modéliser la transmission radio-mobile (modèle de Rayleigh à spectre Doppler de Jakes), et notre étude s'est restreinte au cas d'un seul trajet de propagation (flat fading). Pour ce qui est du problème de prédiction de ce type de canal en présence d'un bruit blanc additif Gaussien, nous avons calculé les coefficients du modèle proposé AR1 (a) puis AR2 (a_1, a_2) ainsi que la variance d'erreur minimale pour chaque ordre, mais nous supposons que l'amélioration peut être meilleure en optimisant directement EQM.

□

Chapitre 3
Prédiction d'un Canal
Multi-trajet dans les
systèmes OFDM

3.1 Introduction

Dans ce chapitre, nous nous intéressons à la prédiction dans le cas d'un canal multi-trajet. Nous allons donc étudier au processus AR- p combiné à une transmission basée sur l'OFDM qui est une technique pour lutter contre les effets des évanouissements (fading), conséquences directe des multi-trajets. Nous commencerons par rappeler le principe de l'OFDM ensuite donnerons le modèle du processus AR- p appliqué à la transmission OFDM. Nous limiterons notre modélisation à $p = 1$, car comme nous allons le voir dans les simulations (chapitre 4), AR-1 présente les meilleures performances du point de vue SER.

3.2 Rappels sur l'OFDM

Les techniques qu'on appelle multi-porteuses consistent à transmettre des données numériques simultanément en les modulant sur un grand nombre de porteuses [14]. Ce sont des techniques de multiplexage en fréquence qui existent depuis longtemps. Le regain d'intérêt actuel réside dans l'amélioration apporté pour augmenter l'efficacité spectrale en « orthogonalisant » les porteuses, ce qui permet d'obtenir un meilleur recouvrement spectral. L'implémentation de la modulation et de la démodulation s'effectue à l'aide de circuits performants basée sur la transformée de Fourier rapide (FFT).

En résumé, l'idée principale de l'OFDM consiste à diviser la bande spectrale disponible en sous-canaux (sous-porteuse). Cette subdivision spectrale conduit à des sous canaux dont la bande de fréquence reste très faible par rapport à la bande cohérence du canal. Ceci garantit la propriété de non sélectivité en fréquence de canal. Pour obtenir une efficacité spectrale élevée, les réponses fréquentielles des sous-canaux sont en partie non disjointes mais orthogonales, d'où l'appellation OFDM.

La modulation multi-porteuse a été introduite à la fin des années 50, sa première utilisation était dans des systèmes de communications hautes fréquences militaires. Quelques années plus tard elle a été améliorée avec l'apparition du concept des signaux orthogonaux à bande limitée, concept que l'on appellera par la suite "Orthogonal Frequency Division Multiplexing"

(OFDM) ou multiplexe à division de fréquences orthogonales [4] [6]. La mise en œuvre de l'OFDM à l'époque consistait à utiliser des filtres de Nyquist.

Du fait de la complexité à générer des bancs de filtre de sinusoides, l'OFDM n'a pas tout de suite intéressé les industriels civils. Vingt (20) ans plus tard le schéma de modulation-démodulation a été simplifié avec l'utilisation de la transformée de Fourier discrète inverse (IDFT) à l'émission et de la (DFT) au niveau du récepteur, ce qui rend facile son implémentation numérique. Dans le milieu des années 1980, la technique OFDM a été développée dans les domaines industriels civils tels que le projet de radiodiffusion numérique DAB (Digital Audio Broadcasting).

3.3 Notion du préfixe cyclique

Les perturbations du canal de propagation induisent, entre autre, la perte d'orthogonalité entre les sous-porteuses et l'apparition d'interférences entre symboles IES (ISI : Inter Symbol Interférence, en anglais), dues aux trajets multiples. Afin d'éliminer ces interférences, une solution simple consiste à accroître le nombre N de sous-porteuses pour augmenter la durée symbole T_s . Cependant cette technique se heurte à différentes contraintes qui limitent l'emploi de cette technique et qui sont :

- ✓ le temps de cohérence du canal.
- ✓ l'effet Doppler.
- ✓ les contraintes technologiques, tel que le bruit de phase des oscillateurs.

Une autre technique permet d'annuler ces IES. En effet, l'ajout d'un préfixe cyclique d'une durée T_g , supérieure ou égale à l'étalement τ_{max} de la réponse impulsionnelle du canal, précédant le symbole OFDM à émettre permet de supprimer ces interférences. Dès lors la partie utile T_s de chaque symbole OFDM ne sera plus affectée par les IES. La durée totale T du symbole OFDM se voit donc augmentée et devient égal à $T_s + T_g$.

La mise en œuvre de cette technique conduit donc à une perte en efficacité spectrale et en puissance. Ces pertes peuvent s'exprimer comme suit [20] :

$$n_g = \frac{T_g}{T_g + T_s} \quad (3.1)$$

$$p_g = 10 \log_{10} \left(\frac{T_g}{T_g + T_s} \right) \quad (3.2)$$

En supposant que T_g est égale à 25% de T_s , la perte en efficacité spectrale est de 20%.

L'insertion d'un préfixe cyclique, se fait au début du symbole OFDM et est une copie de la fin de ce même symbole. Cette solution permet de s'affranchir des termes d'interférences entre porteuses IEP (ICI : Inter Carrier Interférence, en anglais). En effet, le choix d'un préfixe cyclique nul annulerait l'IES. Néanmoins, en présence de trajets multiples, le nombre de périodes des répliques retardées de chacune des sous-porteuses contenues dans la partie utile T_s de chaque symbole OFDM n'est plus entier.

Par conséquent, ce phénomène provoque un élargissement du spectre des sous-porteuses correspondantes et l'apparition d'IEP, induites par la perte d'orthogonalité entre ces sous-porteuses. En réception, la suppression de préfixe cyclique permet de restituer l'orthogonalité entre les sous-porteuses. De plus, comme le préfixe cyclique est la recopie des échantillons de fin de symbole OFDM, cet intervalle peut également être exploité en réception pour la synchronisation temporelle du signal OFDM.

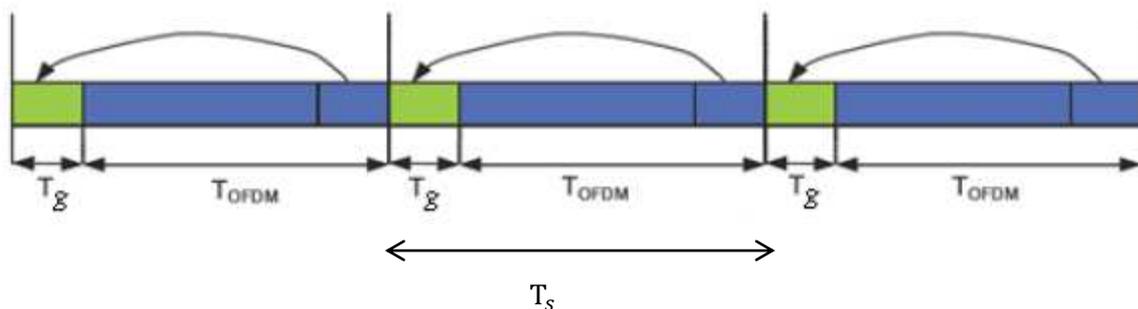


Figure 3.1 : Insertion du préfixe cyclique [4].

La figure 3.2 montre que l'espace entre chaque sous-porteuse $\frac{1}{T_s}$ lorsque le spectre d'une sous-porteuse est maximal, d'annuler le spectre de toutes les autres : c'est la condition

d'orthogonalité (Orthogonal OFDM). Cette condition d'orthogonalité permet d'avoir un recouvrement entre les spectres des différentes sous-porteuses, et malgré ceci d'éviter les interférences entre sous-porteuses si l'échantillonnage est fait précisément à la fréquence d'une sous-porteuse [21].

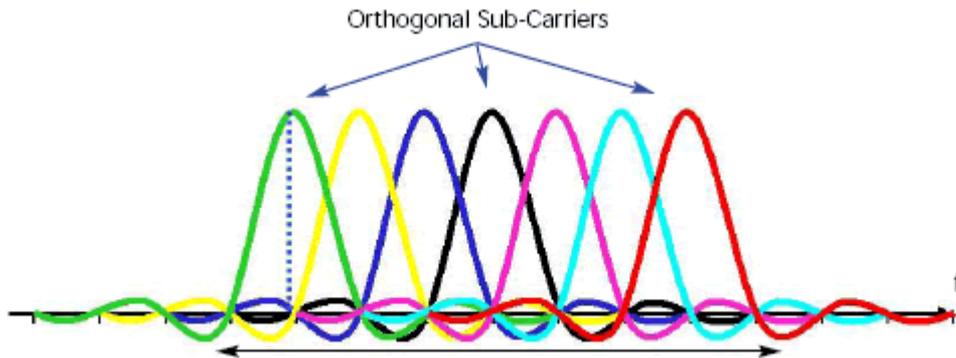


Figure 3.2 : Spectre des différentes porteuses [20].

La figure 3.3 montre qu'alors, la bande en fréquence est occupée de façon optimum, puisque le spectre est presque plat dans cette bande. La bande occupée est à peu près $W = \frac{N}{T_s}$ (en excluant les lobes secondaires de part et d'autre de la bande), chaque sous-porteuse occupant à peu près $\frac{1}{T_s}$.

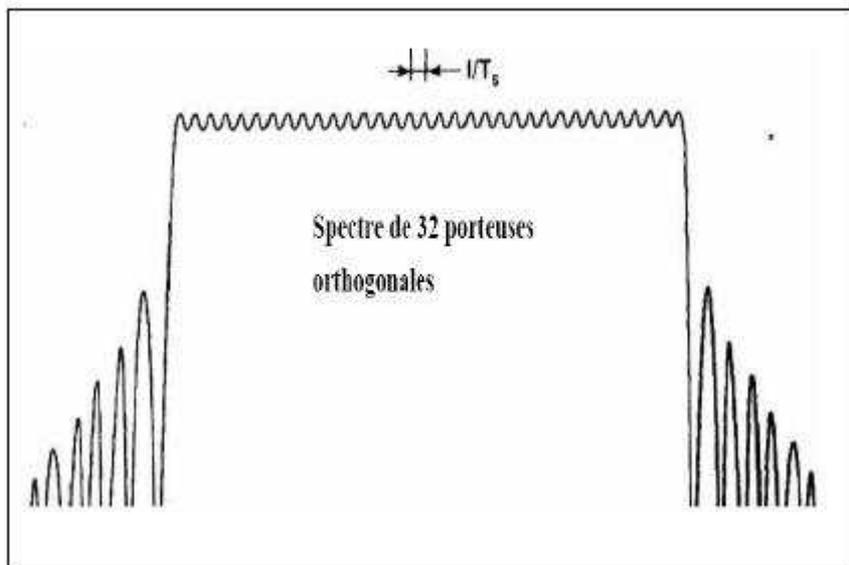


Figure 3.3 : Spectre en sortie du modulateur OFDM (32 porteuses) [4].

3.4 Notion d'orthogonalité

La différence fondamentale entre les techniques classiques de modulation multi-porteuses et l'OFDM réside dans le fait que cette dernière autorise un fort recouvrement spectral entre les sous-porteuses, ce qui permet d'augmenter sensiblement leur nombre ou d'amoinrir l'encombrement spectral. Cependant, pour que ce recouvrement n'ait pas d'effet néfaste, les sous-porteuses doivent respecter une contrainte d'orthogonalité, à la fois les domaines temporel et fréquentiel.

L'utilisation d'un très grand nombre de sous-porteuse et une alternative contraignante car nécessitant beaucoup de modulateur, de démodulateur et de filtres. Il faut aussi davantage de largeur de bande. Il est heureusement simple de résoudre ces deux problèmes en spécifiant un espacement rigoureusement régulier de $f_u = \frac{1}{T_u}$ entre les sous-porteuses [4], où T_u est la période (utile ou active) du symbole pendant laquelle le récepteur intègre le signal démodulé. Les sous-poreuses forment alors un ensemble orthogonal (Fig3.2).

En considérant d'abord le signal OFDM comme un simple multiplexage en fréquence, la $k^{\text{ème}}$ sous-porteuses (en bande de base) peut s'écrire sous la forme :

$$\Psi_k(t) = e^{jk\omega_u t} \quad (3.3)$$

avec : $\omega_u = \frac{2\pi}{T_u}$.

Les porteuses doivent satisfaire la condition d'orthogonalité, en l'occurrence :

$$\int_T^{t+T} \Psi_k(t) \Psi_m^*(t) dt = \begin{cases} 0 & k \neq m \\ T_u & k = m \end{cases} \quad (3.4)$$

Les fonctions $\Psi_k(t)$ forment une base orthogonale de l'espace temps-fréquence, ce qui permet de récupérer facilement les symboles.

3.5 Avantages et inconvénients de l'OFDM

Contrairement aux transmissions mono-porteuses, un des grands avantages de la modulation OFDM consiste en la simplicité de l'égalisation des distorsions. Ceci permet d'avoir des récepteurs simples et peu coûteux.

Les principaux avantages et inconvénients de la modulation OFDM sont nombreux, on peut en citer [4] [26] :

- ✓ Une utilisation efficace des ressources fréquentielles en comparaison avec les solutions classiques de multiplexage fréquentiel. Ceci est principalement dû au fait que dans l'OFDM, les canaux se chevauchent tout en gardant une orthogonalité parfaite.
- ✓ Les techniques multi-porteuses sont robustes au bruit impulsif puisque chaque sous porteuse est affectée d'un bruit indépendant des autres porteuses. Contrairement aux modulations mono-porteuses, où le bruit peut affecter un certain nombre de symboles transmis, la perte d'un symbole dû à un bruit important n'affecte pas les autres symboles.
- ✓ Les techniques OFDM ont une très grande flexibilité dans l'allocation du débit dans un contexte multi-utilisateurs. En effet, en fonction de la valeur du gain instantané du canal, chaque sous-porteuse peut être codée indépendamment des autres porteuses.
- ✓ Plus les perturbations s'amplifient, plus la technologie perd de son intérêt car il faut alors mettre en place des méthodes de filtrages ou de codages qui réduisent grandement les débits.
- ✓ L'OFDM est également très vulnérable aux problèmes de décalage en fréquence (Frequency offset) et de synchronisation. En effet, la fréquence offset engendre des interférences IEP qui peuvent détruire l'orthogonalité entre sous-porteuses.

3.6 Modèles mathématiques de l'OFDM

L'OFDM peut être modélisée de plusieurs manières. Au cours de sa longue histoire, sa représentation a évolué avec les innovations technologiques. Nous présenterons en premier

lieu la représentation continue du système OFDM, à partir de laquelle nous établirons ensuite la modélisation discrète en bande de base [4] [6].

3.6.1 Modèle analogique

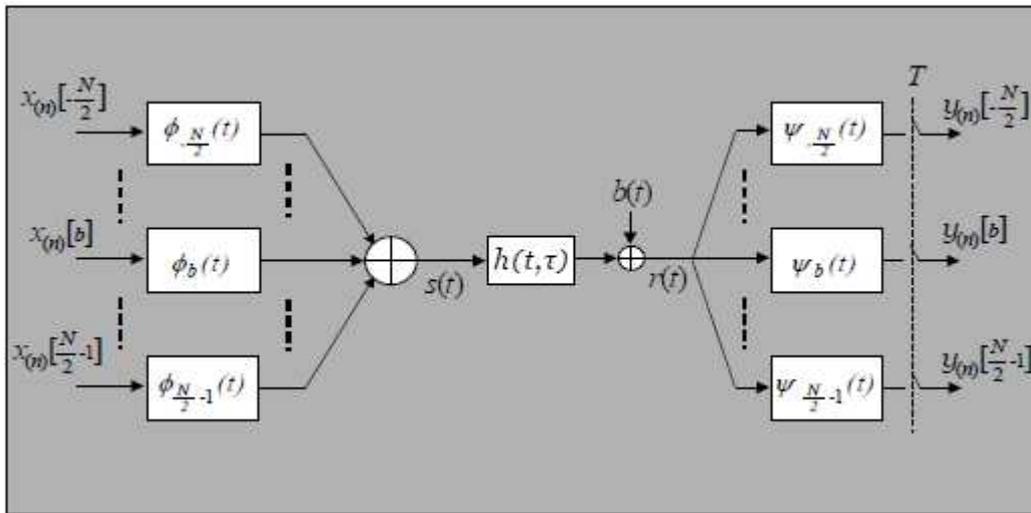


Figure 3.4 : Système OFDM en bande de base à temps continu [6].

L'émetteur

Considérons un système OFDM comportant N sous-porteuses complexes orthogonales réparties dans une bande de largeur $W = \frac{1}{T_s}$ et transmettant des symboles de durée T secondes, comprenant un préfixe cyclique de durée T_g . Cet émetteur utilise les formes d'ondes suivantes :

$$\phi_b(t) = \begin{cases} e^{j2\pi\frac{b}{T_u}t} & t \in [-T_g, T_u] \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases} \quad (3.5)$$

avec : $b \in [-\frac{N}{2}, \frac{N}{2} - 1]$,

$$T_u = NT_s, \quad (3.6)$$

$$T_g = N_g T_s \quad (3.7)$$

et
$$T = T_u + T_g. \quad (3.8)$$

Notons que :

$$\phi_b(t) = \phi_b(t + T_u) \quad (3.9)$$

lorsque t décrit le préfixe cyclique $[-T_g, 0]$. Ces formes d'ondes vérifient la relation d'orthogonalité suivante :

$$\frac{1}{T_u} \int_0^{T_u} \phi_b(t) \phi_{b'}^*(t) dt = \delta_{b,b'} \quad (3.10)$$

où $\delta_{b,b'}$ représente le symbole de Kronecker. L'équivalent en bande de base (sur la bande fréquentielle $[-\frac{W}{2}, \frac{W}{2}]$) du signal transmis pour le n -ème symbole OFDM est :

$$s_{(n)}(t) = \sum_{b=-\frac{N}{2}}^{\frac{N}{2}-1} x_{(n)}[b] \phi_b(t - nT) \quad (3.11)$$

Où

$$\{x_{(n)}[-\frac{N}{2}], x_{(n)}[-\frac{N}{2} + 1], \dots, x_{(n)}[\frac{N}{2} - 1]\} \quad (3.12)$$

sont les symboles d'information émis tous les T_s , provenant d'une constellation choisie. Ces symboles sont centrés, indépendants et normalisés ($E[x_{(n)}[b]x_{(n)}^*[b]] = 1$).

Lorsqu'une séquence infinie de symboles OFDM est transmise, le signal en sortie de l'émetteur est une juxtaposition de symboles OFDM :

$$s(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} s_{(n)}(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \sum_{b=-\frac{N}{2}}^{\frac{N}{2}-1} x_{(n)}[b] \phi_b(t - nT) \quad (3.13)$$

Le canal physique

On suppose que le support de la réponse impulsionnelle du canal physique $h(t, \tau)$ (variable en temps et en fréquence) est restreint à l'intervalle $\tau \in [0, T_g]$ ($\tau_{max} \leq T_g$). Le signal reçu devient :

$$r(t) = (h * s)(t) + b(t) = \int_0^{T_g} h(t, \tau) s(t - \tau) d\tau + b(t) \quad (3.14)$$

où $b(t)$ est un Bruit Blanc Additif Gaussien (AWGN) complexe centré circulaire de Densité Spectrale de Puissance (DSP) bilatérale N_0 par dimension (pour la partie réelle et la partie imaginaire).

Le récepteur

Le récepteur consiste à un banc de filtre, adapté à la dernière partie $[0, T_u]$ des formes d'ondes de l'émetteur, c'est-à-dire :

$$\psi_b(t) = \begin{cases} \frac{1}{T_u} \phi_b^*(-t) & t \in [-T_u, 0] \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases} \quad (3.15)$$

Où (*) représente l'opérateur conjugué complexe.

Ceci signifie en clair que le préfixe cyclique est retiré à la réception. Puisque le préfixe cyclique contient, par définition, toute l'interférence entre symboles OFDM provenant du symbole précédent, le signal échantillonné en sortie du banc de filtres du récepteur ne contient pas d'IES. En utilisant les équations (3.13), (3.14) et (3.15), on obtient la k -ème sous-porteuse reçu durant le n -ème symbole OFDM :

$$y_{(n)}[b] = y_b(t)|_{t=nT} \quad (3.16)$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} r(t) \psi_b(nT - t) dt \quad (3.17)$$

$$= \sum_{n'=-\infty}^{+\infty} \sum_{b'=-\frac{N}{2}}^{\frac{N}{2}-1} x_{(n')} [b'] \int_{nT}^{nT+T_u} \left(\int_0^{T_g} h(t, \tau) \phi_{b'}(t - nT' - \tau) d\tau \right) \psi_b(nT - t) dt + \int_{nT}^{nT+T_u} b(t) \psi_b(nT - t) dt \quad (3.18)$$

avec

$$y_b(t) = (r * \psi_b)(t). \quad (3.19)$$

Notons que

$$\phi_{b'}(t - n'T - \tau) \neq 0 \quad \text{pour} \quad t \in [n'T + \tau - T_g, n'T + T_u + \tau]. \quad (3.20)$$

Puisque $\tau \leq T_g$, alors les deux intervalles, $[n'T + \tau - T_g, n'T + T_u + \tau]$ et $[nT, nT + T_u]$, ne se chevauchent que pour $n' = n$. Ceci vérifie que l'insertion d'un préfixe cyclique $T_g \geq \tau_{max}$ supprime l'IES. L'équation (3.18) devient donc :

$$y_{(n)}[b] = \sum_{b'=-\frac{N}{2}}^{\frac{N}{2}-1} x_{(n)}[b'] \int_{nT}^{nT+T_u} \left(\int_0^{T_g} h(t, \tau) \phi_{b'}(t - nT - \tau) d\tau \right) \psi_b(nT - t) dt + w_{(n)}[b] \quad (3.21)$$

où

$$w_{(n)}[b] = \int_{nT}^{nT+T_u} b(t) \psi_b(nT - t) dt \quad (3.22)$$

est un bruit blanc complexe Gaussien centré.

Grâce à la forme exponentielle complexe de $\phi_{b'}(t)$, l'intégrale intérieure peut être écrite comme :

$$\int_0^{T_g} h(t, \tau) \phi_{b'}(t - nT - \tau) d\tau = \phi_{b'}(t - nT) \int_0^{T_g} h(t, \tau) e^{-j2\pi \frac{b'}{T_u} \tau} d\tau \quad (3.23)$$

$$= \phi_{b'}(t - nT) H(t, b' \frac{W}{N}) \quad (3.24)$$

où $H(t, b' \frac{W}{N})$ est l'échantillon prélevé à la fréquence $f = b' \frac{W}{N}$ (la b' -ème fréquence sous-porteuse) de la transformée de Fourier de $h(t, \tau)$: ($H(t, f) = TF_t[h(t, \tau)]$). En utilisant cette notation, on peut simplifier (3.21) :

$$y_{(n)}[b] = \sum_{b'=-\frac{N}{2}}^{\frac{N}{2}-1} x_{(n)}[b'] \frac{1}{T_u} \int_0^{T_u} H(t + nT, b' \frac{W}{N}) \phi_{b'}(t) \phi_b^*(t) dt + w_{(n)}[b] \quad (3.25)$$

$$= \sum_{b'=-\frac{N}{2}}^{\frac{N}{2}-1} H_{(n)}[b, b'] x_n[b'] + w_{(n)}[b] \quad (3.26)$$

avec

$$H_{(n)}[b, b'] = \frac{1}{T_u} \int_0^{T_u} H(t + nT, b' \frac{W}{N}) e^{j2\pi \frac{b'-b}{T_u} t} dt \quad (3.27)$$

Pour approcher la valeur de l'intégrale ci-dessus, on utilise la méthode du rectangle avec un pas de subdivision T_s . On obtient donc :

$$H_{(n)}[b, b'] \approx \frac{1}{N} \sum_{q=0}^{N-1} H(qT_s + nT, b' \frac{W}{N}) e^{j2\pi \frac{b'-b}{N} q} \quad (3.28)$$

La k -ème sous-porteuse reçue $y_{(n)}[b]$ peut être représentée comme une somme de trois termes :

$$y_{(n)}[b] = H_{(n)}[b, b]x_{(n)}[b] + IEP_{(n)}[b] + w_{(n)}[b] \quad (3.29)$$

où $IEP_{(n)}[b]$ est l'interférence entre sous-porteuses sur la b -ème sous-porteuse durant le n -ème symbole OFDM, définie par :

$$IEP_{(n)}[b] = \sum_{\substack{b'=-\frac{N}{2} \\ b' \neq b}}^{\frac{N}{2}-1} H_{(n)}[b, b']x_{(n)}[b'] \quad (3.30)$$

En utilisant les notations matricielles, on décrit l'équation globale du système OFDM par :

$$Y_{(n)} = H_{(n)}X_{(n)} + w_{(n)} \quad (3.31)$$

où $x_{(n)}$ est le n -ème symbole OFDM transmis, $Y_{(n)}$ est le n -ème symbole OFDM reçu, $w_{(n)}$ est le bruit complexe durant le n -ème symbole OFDM et $H_{(n)}$ est la matrice du canal durant le n -ème symbole OFDM. $x_{(n)}$, $Y_{(n)}$ et $w_{(n)}$ sont des vecteurs de tailles $N \times 1$ et $H_{(n)}$ est une matrice de $N \times N$, définis par :

$$x_{(n)} = [x_{(n)}[-\frac{N}{2}], x_{(n)}[-\frac{N}{2} + 1], \dots, x_{(n)}[\frac{N}{2} - 1]]^T \quad (3.32)$$

$$Y_{(n)} = [y_{(n)}[-\frac{N}{2}], y_{(n)}[-\frac{N}{2} + 1], \dots, y_{(n)}[\frac{N}{2} - 1]]^T \quad (3.33)$$

$$w_{(n)} = [w_{(n)}[-\frac{N}{2}], w_{(n)}[-\frac{N}{2} + 1], \dots, w_{(n)}[\frac{N}{2} - 1]]^T \quad (3.34)$$

$$H_{(n)} = \begin{bmatrix} H_{(n)}[-\frac{N}{2}, -\frac{N}{2}] & \cdots & H_{(n)}[-\frac{N}{2}, \frac{N}{2} - 1] \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ H_{(n)}[\frac{N}{2} - 1, -\frac{N}{2}] & \cdots & H_{(n)}[\frac{N}{2} - 1, \frac{N}{2} - 1] \end{bmatrix} \quad (3.35)$$

La matrice du canal $H_{(n)}$ contient la moyenne temporelle sur la durée effective d'un symbole OFDM de la réponse fréquentielle du canal $H_{(n)}[b, b]$ sur sa diagonale, et les coefficients de l'IEP $H_{(n)}[b, b']$, $b \neq b'$, ailleurs.

Considérons maintenant le canal radio-mobile à trajets multiples donné par :

$$h(t, \tau) = \sum_{l=1}^L \alpha_l(t) \delta(\tau - \tau_l T_s) \quad (3.36)$$

où $\{\tau_l\}$ sont les retards normalisés par T_s (τ_l n'est pas forcément un entier). Nous obtenons donc d'après (3.27) et (3.28) :

$$H_{(n)}[b, b'] = \frac{1}{T_u} \sum_{l=1}^L [e^{-j2\pi b' \frac{W}{N} \tau_l T_s} \int_0^{T_u} \alpha_l(t + nT) e^{j2\pi \frac{b'-b}{T_u} t} dt] \quad (3.37)$$

$$\approx \frac{1}{N} \sum_{l=1}^L [e^{-2\pi \frac{b'}{N} \tau_l} \sum_{q=0}^{N-1} \alpha_l^{(n)}(qT_s) e^{j2\pi \frac{b'-b}{N} q}] \quad (3.38)$$

avec

$$\alpha_l^{(n)}(qT_s) = \alpha_l(qT_s + nT). \quad (3.39)$$

Notons que si le canal ne varie pas sur la durée d'un symbole OFDM, on aura d'après (3.27) :

$$H_{(n)}[b, b'] = H\left(nT, b' \frac{W}{N}\right) \frac{1}{T_u} \int_0^{T_u} \phi_{b'}(t) \phi_b^*(t) dt = H\left(nT, b' \frac{W}{N}\right) \delta_{b, b'} \quad (3.40)$$

Car les filtres d'émission $\phi_{b'}(t)$ sont orthogonaux, et par conséquent $IEP_{(n)}[b] = 0$ et la matrice du canal $H_{(n)}$ est une matrice diagonale. On peut alors représenter le système OFDM comme un ensemble de N canaux Gaussiens en parallèle. Dans le cas d'un canal radio-mobile à trajets multiples où les gains complexe sont invariants dans un symbole OFDM, on obtient d'après (3.37) :

$$H_{(n)}[b, b] = \sum_{l=1}^L \alpha_l^{(n)} e^{-j2\pi \frac{b}{N} \tau_l} \quad (3.41)$$

et par suite la matrice diagonale du canal peut être représentée comme une transformation de Fourier (calibrée selon les retards des trajets) des différents gains complexe :

$$H_{(n)} = \text{diag} \{F\alpha_{(n)}\} \quad (3.42)$$

où F et $\alpha_{(n)}$ sont respectivement la matrice de transformation de Fourier $N \times L$ et le vecteur $L \times 1$ donnés par :

$$F = \begin{bmatrix} e^{-j2\pi \frac{N}{2} \tau_1} & \dots & e^{-j2\pi \frac{N}{2} \tau_L} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ e^{-j2\pi \frac{(N-1)}{2} \tau_1} & \dots & e^{-j2\pi \frac{(N-1)}{2} \tau_L} \end{bmatrix} \quad (3.43)$$

$$\alpha_{(n)} = [\alpha_1^{(n)}, \dots, \alpha_L^{(n)}]^T \quad (3.44)$$

3.6.2 Modèle discret

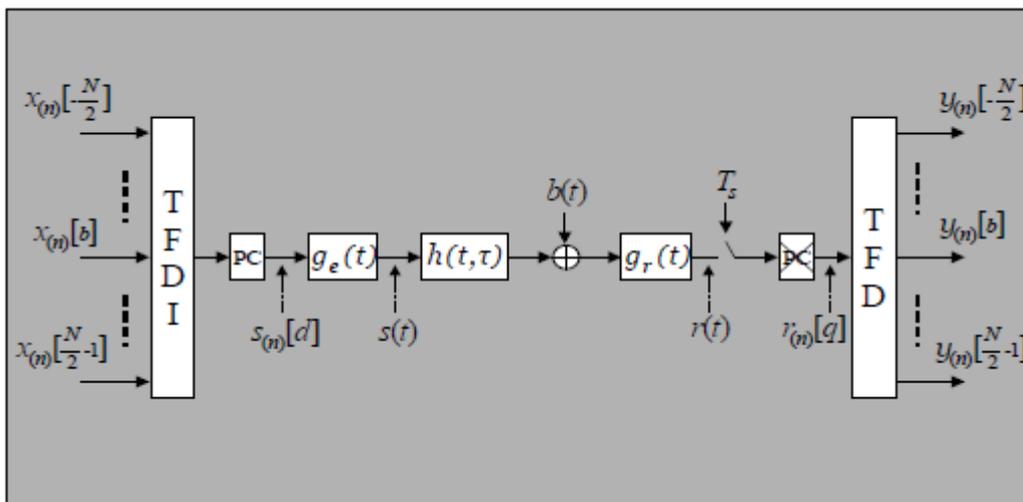


Figure 3.5 : Système OFDM en bande de base à temps discret [6].

Mettre en œuvre un système OFDM continu tel que nous l'avons décrit précédemment nécessite l'utilisation de N filtres analogiques en parallèle parfaitement orthogonaux. De tels filtres sont pratiquement délicats à réaliser et leur implantation est très coûteuse. C'est pourquoi cette opération est aujourd'hui réalisée numériquement. Le modèle du système OFDM à temps discret est illustré dans la figure 3.5. Dans ce modèle, les bancs de filtres de l'émetteur et du récepteur sont remplacés par une transformée de Fourier discrète inverse (IDFT) et une transformée de Fourier discrète (DFT), respectivement. Le signal numérique ainsi créé subit une conversion numérique-analogique et une mise en forme par le filtre d'émission $g_e(t)$ avant d'être transmis dans le canal $h(t, \tau)$. Il est représenté par :

$$s(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \sum_{d=-N_g}^{N-1} s_{(n)}[d] g_e(t - dT_s - nT) \quad (3.45)$$

Où $s_{(n)}[d]$ sont les $v = N + N_g$ échantillons du n -ème symbole OFDM générés par le modulateur TFDI et complétés par un préfixe cyclique, définis par :

$$s_{(n)}[d] = \sum_{b=-\frac{N}{2}}^{\frac{N}{2}-1} x_{(n)}[b] e^{j2\pi \frac{bd}{N}} \quad (3.46)$$

avec $d \in [-N_g, N - 1]$. Le signal reçu du n -ème symbole OFDM à la sortie du filtre passe-bas de réception $g_r(t)$ est donné par :

$$r(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \sum_{d=-N_g}^{N-1} s_{(n)}[d] g(t, t - dT_s - nT) + b(t) \quad (3.47)$$

où $g(t, \tau)$ est le canal analogique équivalent en bande de base (incluant filtre d'émission et filtre de réception) défini par :

$$g(t, \tau) = (g_e * h * g_r)(\tau) \quad (3.48)$$

Après échantillonnage au pas T_s et suppression du préfixe cyclique, les N échantillons reçus sont donnés par :

$$r_{(n)}[q] = r(t)|_{t=qT_s+nT} \quad (3.49)$$

$$= \sum_{n'=-\infty}^{+\infty} \sum_{d=-N_g}^{N-1} s_{n'}[d] g(qT_s + n'T, (q - d)T_s + (n - n')T) + b_n(qT_s) \quad (3.50)$$

où $q \in [0, N - 1]$,

$$b_n[q] = b_n(qT_s) = b(qT_s + nT) \quad (3.51)$$

et

$$g_n[q, u] = g(qT_s + nT, uT_s) \quad (3.52)$$

est le canal discret équivalent. Dans un système de communication réaliste, la plupart de la puissance du canal est concentrée dans un intervalle limité. En outre, en prenant en compte la causalité de la transmission, on peut encore simplifier le canal discret équivalent à un filtre RIF défini par :

$$g_n[q, u] = 0 \quad \text{si} \quad u < 0 \quad \text{ou} \quad u > L_t \quad (3.53)$$

avec

$$L_t \geq \left\lceil \frac{\tau_{max}}{T_s} \right\rceil + 1 \quad (3.54)$$

(égalité possible si délais multiple de T_s) le nombre de coefficients pour le canal discret équivalent, où $\lceil \cdot \rceil$ est la partie entière d'un nombre réel. Notons que si les filtres d'émission et de réception sont des sinus cardinaux alors les coefficients $g_n[q, d]$ sont généralement corrélés, à moins que les retards $\{\tau_l\}$ soient des multiples de T_s .

En plus, puisque $q \in [0, N - 1]$, $d \in [-N_g, N - 1]$ et $N_g \geq L_t$

alors

$$g(qT_s + n'T, (q - d)T_s + (n - n')T) = 0 \quad \text{si} \quad n' \neq n. \quad (3.55)$$

Ceci vérifie qu'un préfixe cyclique $N_g T_s \geq L_t T_s$ supprime l'IES. On peut donc écrire (3.50) comme :

$$r_n[q] = \sum_{d=-N_g}^{N-1} s_n[d] g_n[q, q - d] + b_n[q] \quad (3.56)$$

$$= \sum_{d=0}^{L_t} g_n[q, d] s_n[q - d] + b_n[q] = (s_n * g_n)[q] + b_n[q] \quad (3.57)$$

En utilisant (3.57), les N échantillons du n -ème symbole OFDM générés par le démodulateur DFT sont donnés par :

$$y_n[b] = \frac{1}{N} \sum_{q=0}^{N-1} r_n[q] e^{-j2\pi \frac{bq}{N}} \quad (3.58)$$

$$= \frac{1}{N} \sum_{b'=-\frac{N}{2}}^{\frac{N}{2}-1} x_n[b'] \left(\sum_{q=0}^{N-1} e^{j2\pi \frac{(b'-b)q}{N}} \sum_{d=0}^L g_n[q, d] e^{-j2\pi \frac{b'd}{N}} \right) + w_n[b] \quad (3.59)$$

avec

$$w_n[b] = \frac{1}{N} \sum_{q=0}^{N-1} b_n(qT_s) e^{-j2\pi \frac{bq}{N}} \quad (3.60)$$

et $b \in [-\frac{N}{2}, \frac{N}{2} - 1]$. On a pour $\tau \in [0, N_g T_s]$:

$$\sum_{d=0}^L g(t, dT_s) e^{-j2\pi \frac{bd}{N}} \approx \sum_{d=-\infty}^{+\infty} g(t, dT_s) e^{-j2\pi \frac{bd}{N}} = G_e \left(b \frac{W}{N} \right) G_r \left(b \frac{W}{N} \right) H \left(t, b \frac{W}{N} \right) \quad (3.61)$$

où

$$G_e[b] = G_e \left(b \frac{W}{N} \right) \quad (3.62)$$

et

$$G_r[b] = G_r \left(b \frac{W}{N} \right) \quad (3.63)$$

sont respectivement les réponses fréquentielles des filtres $g_e(t)$ et $g_r(t)$ échantillonnées à la fréquence $f = b \frac{W}{N}$, l'équation (3.59) devient ainsi :

$$y_n[b] = \sum_{b'=-\frac{N}{2}}^{\frac{N}{2}-1} G_e[b'] G_r[b'] H_n[b, b'] x_n[b'] + w_n[b] \quad (3.64)$$

avec

$$H_n[b, b'] = \frac{1}{N} \sum_{q=0}^{N-1} H(qT_s + nT, b \frac{W}{N}) e^{j2\pi \frac{(b'-b)q}{N}} \quad (3.65)$$

3.7 Prédiction d'un canal à trajets multiples

Le canal de propagation vu par le récepteur peut non seulement varier de manière significative d'un symbole OFDM à l'autre, mais également à l'intérieur d'un même symbole OFDM. Cette variation est principalement due aux changements des conditions de propagation entre l'émetteur et le récepteur. D'un point de vue physique, le caractère variable du canal peut être caractérisé, comme nous l'avons déjà vu, par le produit $f_d T$ appelé étalement Doppler. Plus ce produit est grand, plus le canal varie rapidement dans le domaine temporel. Alors, une prédiction dynamique de canal est nécessaire pour mener à bien la démodulation complète des signaux OFDM puisque le canal radio est sélectif en fréquence et variant avec le temps pour les systèmes de communication large bande.

La prédiction de canal peut être exécutée à l'aide de l'insertion de symboles pilotes sur toutes les sous-porteuses d'un symbole OFDM avec une période spécifique, connue sous le nom de « prédiction du canal par pilotes de type bloc ». Elle peut aussi être réalisée en insérant des symboles pilotes dans chaque symbole OFDM, connue sous le nom « prédiction du canal par pilotes de type peigne ». La prédiction du canal par pilotes de type bloc a été développée sous l'hypothèse d'un canal à évanouissement lent (invariant sur plusieurs symboles OFDM). Par contre, la prédiction du canal par pilotes de type peigne a été présentée pour satisfaire le besoin de l'égalisation quand le canal change d'un symbole OFDM à un autre ou dans un même symbole OFDM. De plus, d'un symbole à l'autre le canal est corrélé. Bien que d'utilisation largement répandue par sa simplicité, le critère des moindres carrés (LS : "Least Square") ne permet pas de profiter de la corrélation du canal entre deux symboles adjacents. En effet, sa mise en œuvre dans un tel problème reviendrait à réaliser une prédiction du canal symbole par symbole. En revanche, le critère du minimum de variance de l'erreur d'estimation ou de l'erreur quadratique moyenne (MMSE : Minimum Mean Square Error) permet de prendre en compte cette corrélation, et de l'information a priori sur le canal.

Dans la suite, nous avons utilisée d'autre modèle noté AR pour modéliser et prédire les variations temporelles du canal.

3.7.1 Modélisation de la variation temporelle des gains complexes

Dans le cas des systèmes de communication radio-mobile large bande à modulation OFDM, une prédiction dynamique du canal est une fonction fondamentale, puisque le canal radio est sélectif en fréquence et variant avec le temps. La prédiction du canal peut se résumer à prédire certains paramètres physiques de propagation, tel que les gains complexes des

trajets. En exploitant la nature du canal et en supposant les retards connus à la réception, on cherche à prédire les variations temporelles des gains complexes dans les systèmes OFDM.

Avant de présenter ces calculs, nous allons préalablement décrire une approximation pour modéliser les variations temporelles des gains complexe d'un symbole OFDM à un autre.

Dans cette partie du mémoire, nous abordons la prédiction d'un canal multi-trajet avec modulation OFDM dans le contexte de variation lente à modérée ($f_d T < 10^{-1}$). Nous considérons le canal à L trajets.

Les équations d'observation, pour un système OFDM comprenant N sous-porteuses et un préfixe cyclique de longueur N_g , sont données par :

$$Y_{(n)} = H_{(n)} X_{(n)} + w_{(n)} \quad (3.66)$$

Cette équation est obtenue d'après l'équation (3.37) après effectué un changement d'indices

$$b = k - 1 - \frac{N}{2} \quad (3.67)$$

et

$$b' = m - 1 - \frac{N}{2} \quad (3.68)$$

afin d'avoir des indices matriciels $k, m \in [1, N]$,

$$[H_{(n)}]_{k,m} = \frac{1}{N} \sum_{l=1}^L [e^{-j2\pi(\frac{m-1}{N} - \frac{1}{2})\tau_l} \sum_{q=0}^{N-1} \alpha_l^{(n)}(qT_s) e^{j2\pi\frac{m-k}{N}q}] \quad (3.69)$$

avec $x_{(n)}$ est le n -ème symbole OFDM transmis, $y_{(n)}$ est le n -ème symbole OFDM reçu, $w_{(n)}$ est le bruit blanc complexe Gaussien centré de matrice de covariance $\sigma^2 I_N$ et $H_{(n)}$ est la matrice du canal durant le n -ème symbole OFDM.

Étant donné que le nombre d'échantillons des gains complexes du canal de Rayleigh à prédire d'un symbole OFDM à un autre L_v ($v = N + N_g$) est supérieur au nombre d'équations d'observation N , il n'est pas efficace d'essayer de prédire tous ces échantillons à

partir du modèle d'observation. Nous avons plutôt intérêt à représenter les variations temporelles des gains complexes d'un symbole OFDM à un autre par un modèle plus compact. Plusieurs modèles ont été utilisés pour représenter les variations du canal en fonction de temps afin de trouver une modélisation simple. La figure 1.8 (chapitre 1) illustre une réalisation de la partie réelle du gain complexe sur 6 symboles OFDM pour deux récepteurs, à vitesse faible $f_d T = 0.001$ et à vitesse élevée $f_d T = 0.3$. Nous observons que, pour des faibles vitesses, le canal est quasi-invariant dans un symbole OFDM. En revanche, pour des vitesses élevées, le canal varie à l'intérieur d'un symbole OFDM et par exemple $f_d T = 0.3$ peuvent être modélisées par des variations polynomiales du second degré afin de suivre la pente et la courbure.

Dans cette section, nous allons montrer que, quel que soit l'étalement Doppler $f_d T < 10^{-1}$, la variation temporelle d'un symbole OFDM à un autre de chaque gain complexe de type Rayleigh :

$$\alpha_l^{(n)} = [\alpha_l^{(n)}(-N_g T_s), \dots, \alpha_l^{(n)}((N-1)T_s)]^T$$

peut-être modélisée par un polynôme.

On veut faire passer le plus près possible des v points donnés de $\alpha_l^{(n)}$. Ainsi, pour $q \in [-N_g, N-1]$, $\alpha_l^{(n)}(qT_s)$ peut-être exprimé sous la forme :

$$\alpha_l^{(n)}(qT_s) = c_{1,l}^{(n)} q + \xi_l^{(n)}[q] \quad (3.70)$$

où $c_l^{(n)} = [c_{1,l}^{(n)}, \dots, c_{L,l}^{(n)}]$ sont les coefficients et $\xi_l^{(n)}[q]$ est l'erreur du modèle.

$$R_{\alpha_l}^{(p)} = E[\alpha_l^{(n)} \alpha_l^{(n-p)H}] \quad (3.71)$$

$R_{\alpha_l}^{(p)}$ est la matrice de corrélation de $\alpha_l^{(n)}$ de taille $v \times v$. Comme $\alpha_l(t)$ est un processus complexe Gaussien à bande étroite, stationnaire au sens large (WSS), avec un spectre de Jakes, les éléments de la matrice $R_{\alpha_l}^{(p)}$ sont donnés par :

$$[R_{\alpha_l}^{(p)}]_{k,m} = \sigma_{\alpha_l}^2 J_0(2\pi f_d T_s (k - m) p v) \quad (3.72)$$

Dans le cadre de cette régression, le modèle d'observation (3.36) pour le n -ème symbole OFDM peut être réécrit comme :

$$y(n) = \kappa(n)c(n) + \epsilon(n) + w(n) \quad (3.73)$$

avec $c(n) = [c_1^{(n)T}, \dots, c_L^{(n)T}]^T$ est un vecteur de taille $L \times 1$ et $\kappa(n)$ est une matrice de taille $N \times L$, qui dépend des retards des trajets et de données contenu dans le symbole OFDM courant. Elle est définie par :

$$\kappa(n) = \text{diag}\{x(n)\} F \quad (3.74)$$

La deuxième composante dans l'équation (3.39), $\epsilon(n)$, représente l'erreur due à l'approximation dans le modèle d'observation. Elle est donnée par :

$$\epsilon(n) = H_{\xi(n)} x(n) \quad (3.75)$$

où $H_{\xi(n)}$ est une matrice de taille $N \times N$ dont les éléments sont définis par :

$$[H_{\xi(n)}]_{k,m} = \frac{1}{N} \sum_{l=1}^L [e^{-j2\pi(\frac{m-1}{N} - \frac{1}{2})\tau_l} \sum_{q=0}^{N-1} \xi_l^{(n)}(qT_s) e^{j2\pi\frac{m-k}{N}q}] \quad (3.76)$$

Puisque le canal varie d'un symbole à un autre, la matrice devient :

$$H_{\xi(n)} = 0_N \quad (3.77)$$

Notons que dans notre cas les gains complexes sont invariants à l'intérieur d'un symbole OFDM :

$$\alpha_l^{(n)}(-N_g T_s) = \dots = \alpha_l^{(n)}((N-1)T_s) = c_{1,l}^{(n)} \quad (3.78)$$

Les coefficients $c_l^{(n)}$ sont des variables complexes Gaussiennes centrés et corrélés de matrice de corrélation définie par :

$$R_{c_l}^{(p)} = E \left[c_l^{(n)} c_l^{(n-p)H} \right] = \sigma_{\alpha_l}^2 J_0(2\pi f_d p). \quad (3.79)$$

alors la matrice de canal $H_{(n)}$ est diagonale.

3.7.3 Prédicteur Autorégressif (AR)

D'après l'étude faite dans [6], pour un étalement Doppler $f_d T < 10^{-1}$, la variation temporelle d'un symbole OFDM à un autre de chaque gain complexe de type Rayleigh $\alpha_l^{(n)} = [\alpha_l^{(n)}(-N_g T_s), \dots, \alpha_l^{(n)}((N-1)T_s)]^T$ est extrêmement bien modélisée par une polynôme de coefficients $c_l^{(n)} = [c_{1,l}^{(n)}, \dots, c_{L,l}^{(n)}]^T$. D'où, on négligeant l'erreur due à l'approximation $\xi_{(n)}$, le modèle d'observation (pour le n -ème symbole OFDM) donné par :

$$Y_{(n)} = \kappa_{(n)} c_{(n)} + w_{(n)} \quad (3.80)$$

Où

$$c_{(n)} = [c_1^{(n)T}, \dots, c_L^{(n)T}]^T \quad (3.81)$$

contient les coefficients des différents trajets pour le symbole OFDM courant, et $w_{(n)}$ est le vecteur de bruit additif Gaussien, et $\kappa_{(n)}$ est une matrice de taille $N \times L$ construite à partir des symboles de données et des retards des trajets.

Cette modélisation est plus adéquate (sur symboles OFDM) pour de fortes variations du canal. La matrice de canal (voir équation (3.79)) pour le n -ème symbole OFDM peut être construite simplement à partir des coefficients comme suit :

$$H_{(n)} = \frac{1}{N} \text{diag}\{F \chi^{(n)}\} \quad (3.82)$$

Où

$$\chi^{(n)} = [c_1^{(n)}, \dots, c_L^{(n)}]^T, \quad (3.83)$$

F est la matrice de TF de taille $N \times L$ donnée par (3.43). Cette construction de la matrice du canal sera utilisée dans le processus.

Nous avons besoin maintenant un modèle d'évolution dynamique des coefficients $c^{(n)}$, afin de pouvoir les prédire par le processus AR.

3.7.3.1 Modèle AR des coefficients $c^{(n)}$

D'après la section 3.7.1, les coefficients $c_l^{(n)}$ sont des variables complexes stationnaires Gaussiennes centrés et corrélés de matrice de corrélation $R_{c_l}^{(s)}$ donnée par l'équation (3.79). Par conséquent, l'évolution dynamique de $c_l^{(n)}$ peut-être modélisée par un processus autorégressif (AR). Un processus d'ordre p peut-être généré comme suit :

$$c_l^{(n)} = -\sum_{i=1}^p A_l^i c_l^{(n-i)} + u_l^{(n)} \quad (3.84)$$

où $A_l^{(1)}, \dots, A_l^{(p)}$ sont des vecteurs et $u_l^{(n)}$ est un vecteur complexe Gaussien de variance U_l . Les vecteurs suivantes $A_l^{(1)}, \dots, A_l^{(p)}$ et U_l sont les paramètres du modèle AR, obtenus par la résolution des équations de Yule-Walker qui sont définies par :

$$T_l A_l = -V_l \quad (3.85)$$

$$U_l = R_{c_l}^{(0)} + \sum_{i=1}^p A_l^{(i)} R_{c_l}^{(-i)} \quad (3.86)$$

où $A_l = [A_l^{(1)T}, \dots, A_l^{(p)T}]^T$ et $V_l = [R_{c_l}^{(1)T}, \dots, R_{c_l}^{(p)T}]^T$ sont des vecteurs longueurs p et T_l est une matrice de corrélation définie par :

$$T_l = \begin{bmatrix} R_{c_l}^{(0)} & \dots & R_{c_l}^{(-p+1)} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ R_{c_l}^{(p-1)} & \dots & R_{c_l}^{(0)} \end{bmatrix} \quad (3.87)$$

En utilisant l'équation (3.84), on obtient le modèle AR d'ordre p de $c_{(n)} = [c_1^{(n)T}, \dots, c_L^{(n)T}]^T$ comme suit :

$$c_{(n)} = -\sum_{i=1}^p A_{(i)} c_{(n-i)} + u_{(n)} \quad (3.88)$$

où

$$A_{(i)} = \{A_1^{(i)}, \dots, A_L^{(i)}\} \quad (3.89)$$

est un vecteur de taille L et $u_{(n)} = [u_1^{(n)T}, \dots, u_L^{(n)T}]^T$ est un vecteur complexe Gaussien de taille $L \times 1$ et de matrice de variance U_l .

Prédiction basée sur un modèle AR1 :

Notons que, pour un modèle AR d'ordre $p = 1$, l'évolution dynamique de $c_l^{(n)}$ devient comme suit :

$$c_l^{(n)} = -A_l^{(1)} c_l^{(n-1)} + u_l^{(n)} \quad (3.90)$$

où les paramètres du modèle AR, $A_l^{(1)}$ et U_l , sont obtenus à partir des équations de Yule-Walker comme suit :

$$A_l^{(1)} = -(R_{c_l}^{(0)})^{-1} R_{c_l}^{(1)} \quad (3.91)$$

$$A_l^{(1)} = J_0(2\pi f_d T) \quad (3.92)$$

et

$$U_l = R_{c_l}^{(0)} + A_l^{(1)} R_{c_l}^{(-1)} \quad (3.93)$$

$$U_l = 1 - (A_l^{(1)})^2 \quad (3.94)$$

De plus, les équations d'état et d'observation, deviennent comme suit :

$$c_{(n)} = -A_{(1)} c_{(n-1)} + u_{(n)} \quad (3.95)$$

$$y_{(n)} = \kappa_{(n)} c_{(n)} + w_{(n)} \quad (3.96)$$

3.7.4 L'erreur quadratique moyenne EQM

L'erreur entre le l -ème vecteur de gain complexe exacte et le l -ème vecteur prédit $\hat{\alpha}_l^{(n)}$ est donnée par :

$$e_l^{(n)} = \alpha_l^{(n)} - \hat{\alpha}_l^{(n)} = \xi_l^{(n)} + e_{c_l}^{(n)} \quad (3.97)$$

où

$$e_{c_l}^{(n)} = c_l^{(n)} - \hat{c}_l^{(n)}, \quad (3.98)$$

$\xi_l^{(n)}$ est l'erreur de la modélisation définie dans la section 3.7.1. En négligeant les termes croisés entre $\xi_l^{(n)}$ et $e_{c_l}^{(n)}$, l'erreur quadratique moyenne (EQM) entre $\alpha_l^{(n)}$ et $\hat{\alpha}_l^{(n)}$ est donnée par :

$$EQM_l = \frac{1}{v} E[e_l^{(n)H} e_l^{(n)}] \quad (3.99)$$

3.8 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons d'abord présenté les modèles classiques du système OFDM. Cette dernière présente plusieurs avantages, cependant, nous avons mis en évidence la présence d'un inconvénient important et qui est la sensibilité à l'effet Doppler. En effet, dans le cas d'un récepteur mobile, l'orthogonalité entre les formes d'ondes est détruite, ce qui cause de l'interférence entre les sous-porteuses (IEP). Dans ce cas précis, nous sommes intéressés à la prédiction du canal à trajets multiples plus précisément à la prédiction des gains complexes avec le modèle proposé AR1.



Chapitre 4
Simulation

4.1 Introduction

Dans tout système de communication, nous cherchons à transmettre l'information provenant d'une source vers un récepteur et ce à travers un canal de transmission. Les perturbations intervenant sur ce dernier induisent des erreurs de transmission que la technique de prédiction de canal essaiera de corriger. En implémentant un processus autorégressif (AR-p) au niveau du récepteur d'une chaîne de transmission mono-porteuse (SC) et multi-porteuse (OFDM), un SER relativement minimal devrait être obtenu par rapport aux cas de transmissions sans prédiction. C'est le but de cette partie de notre travail où des simulations grâce à matlab seront détaillées.

4.2 Canal mono-porteuse

Dans cette section, nous avons vérifié la théorie par la simulation et nous avons testé les performances de notre processus. Nous avons étudié un canal normalisé de type Rayleigh mono trajet et nous l'avons modélisé avec un processus AR-p avec $p = 1, 2$. Les performances seront évaluées du point de vue SER en fonction SNR avec un étalement Doppler normalisé ($f_d T$). Dans un premier cas, nous avons considéré un système de transmission mono-porteuse avec une modulation 4-QAM, où le canal de transmission est du type Rayleigh-Jakes en présence d'un bruit gaussien en réception.

Pour ce qui de la chaîne SC utilisée dans notre travail, elle se présente comme suit :

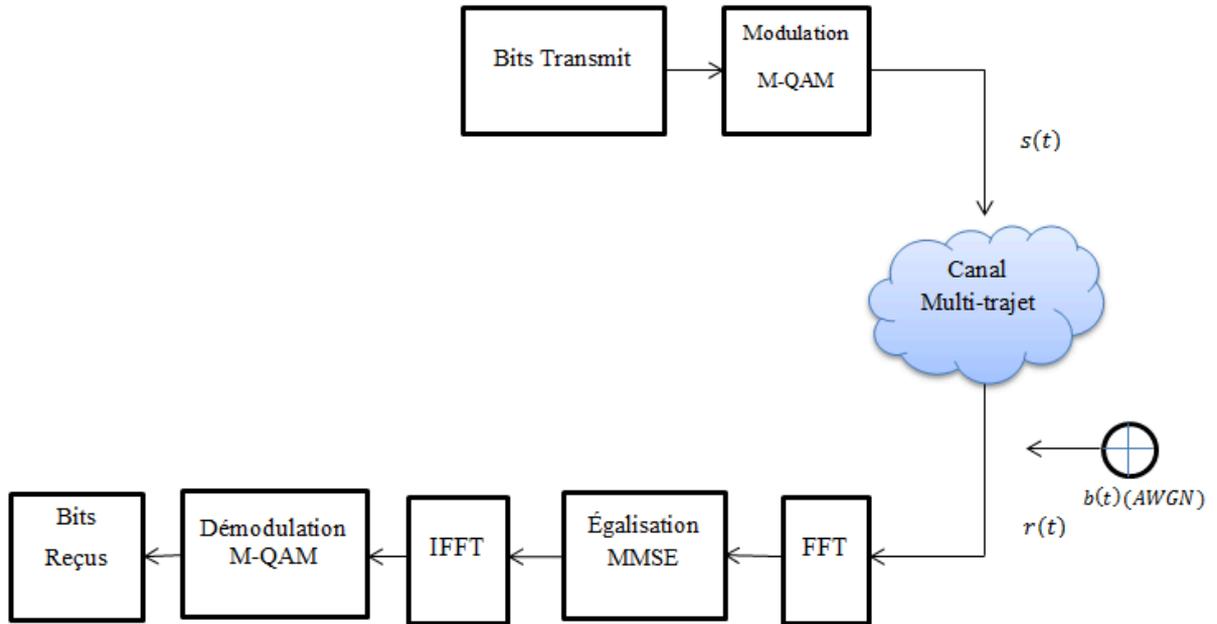


Figure 4.1 : Chaîne de transmission Mono-Porteuse (SC).

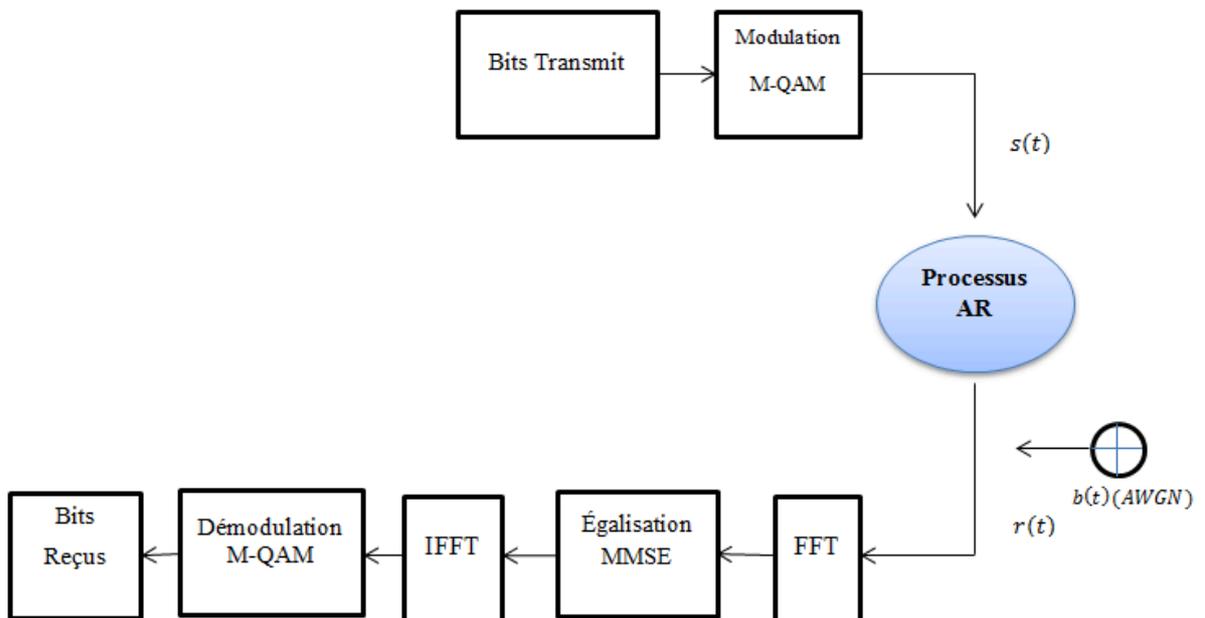


Figure 4.2 : Chaîne de transmission Mono-Porteuse (SC) avec AR.

Avec :

- ✓ $M = 4$ (4-QAM).
- ✓ Taille de la FFT et IFFT = 512.
- ✓ Des trames de 512 bits transmis ont été répétées 10^5 fois pour espérer approcher une situation réelle.

Le SER est évalué pour un canal à variations temporelles lentes telle que $f_d T = 10^{-4}$ et $f_d T = 10^{-3}$ dans un premier temps puis pour un canal à variations temporelles rapides où est $f_d T = 0.09$ par exemple.

Les figures (Fig4.2), (Fig4.3) et (Fig4.4) illustrent l'évolution du SER en fonction du SNR dans les cas sans prédiction, avec prédiction AR-1 et AR-2 et ce pour différentes valeurs de $f_d T$.

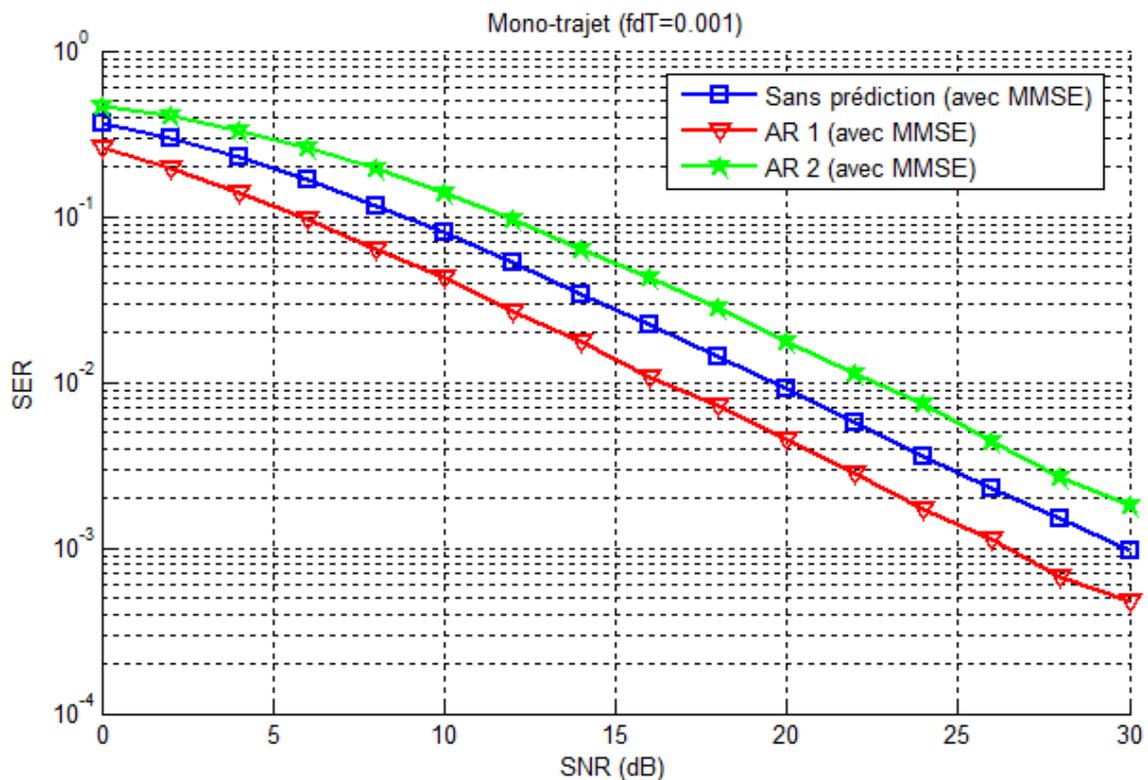


Figure 4.3 : SER en fonction du SNR pour $f_d T = 10^{-3}$.

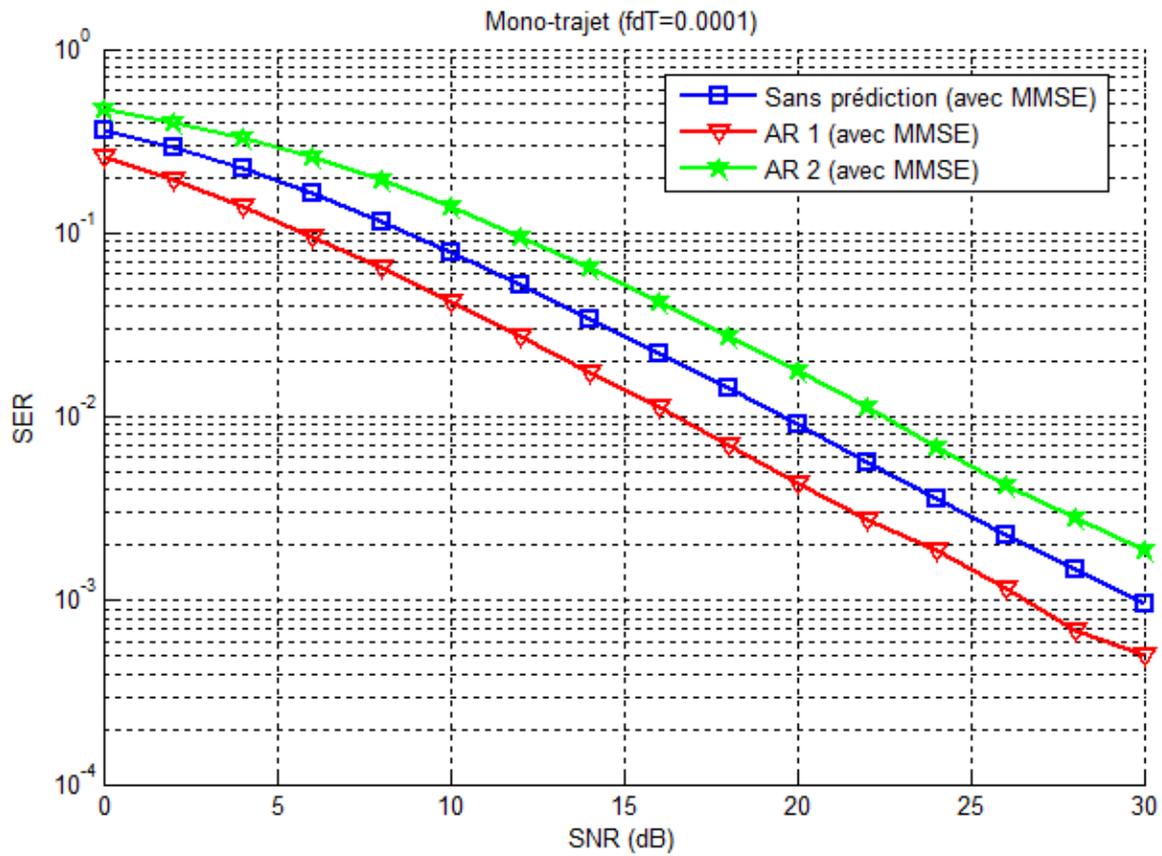


Figure 4.4 : SER en fonction de SNR pour $f_d T = 10^{-4}$.

Nous remarquons que lorsque $f_d T$ diminue (Fig4.3) et (Fig4.4), la prédiction s'améliore en terme d'erreur de prédiction.

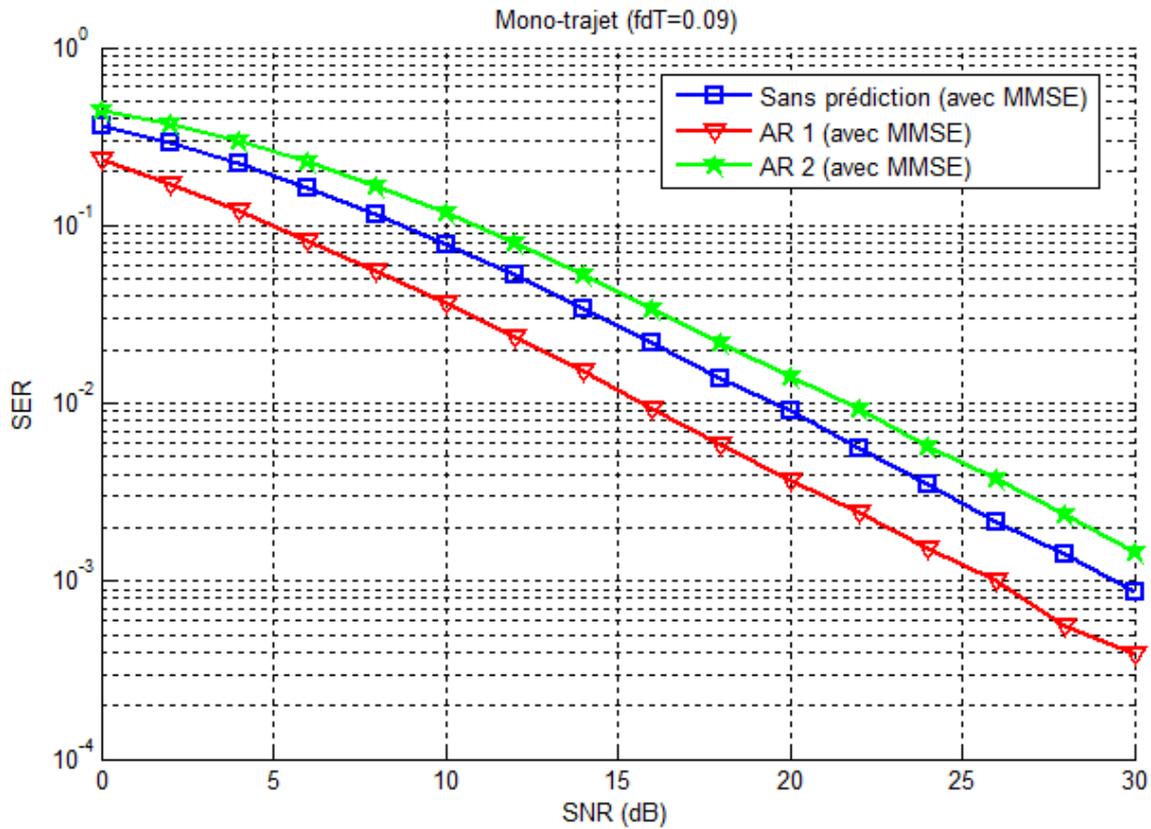


Figure 4.5 : SER en fonction du SNR pour $f_d T = 0.09$.

D'autre part, en augmentant $f_d T$ (Fig4.5) la prédiction s'améliore logiquement mais nous sommes loin de minimiser l'erreur de prédiction.

Nous avons remarqué que pour ces trois dernières courbes, le processus AR1 est le meilleur par rapport à ce celui du AR2 et par rapport au cas sans prédiction (estimation MMSE uniquement). Les bonnes performances du prédicteur AR1 sont citées dans [6] [17] [27].

Notons que pour les valeurs de $f_d T$ considérées, a est proche de 1 d'après le choix (voir équation 2.38), et σ_e^2 proche de 0. Le tableau suivant obtenu après simulations (pour AR1) illustre ces valeurs.

$f_d T$	10^{-4}	10^{-3}	10^{-2}	0.09
a	0.9997	0.9993	0.9991	0.9074
σ_e^2	0.24202096 e-6	0.07641065 e-4	0.01477072 e-2	0.17662524

Tableau 4.1 : Valeurs de a et σ_e^2 pour les $f_d T$ concernées.

L'analyse peut être divisée en deux parties:

1. A faibles fréquences Doppler ($f_d T \leq 10^{-2}$): la modélisation avec le modèle AR1 est meilleure que celle du modèle AR2 qui a pu diminuer la variance de l'erreur de prédiction.
2. A fortes fréquences Doppler ($f_d T > 10^{-2}$): Le modèle AR2 ne convient pas plus que le modèle AR1 qui reste meilleur. Mais en fait, nous sommes loin de minimiser l'erreur.

Les chaînes de transmission des figures 4.3, 4.4 et 4.5 sont utilisées pour ces cas de simulations, où le nombre de trajets égale à un (01). Dans le cas d'un canal à quatre (04) trajets, nous avons obtenu les courbes suivantes.

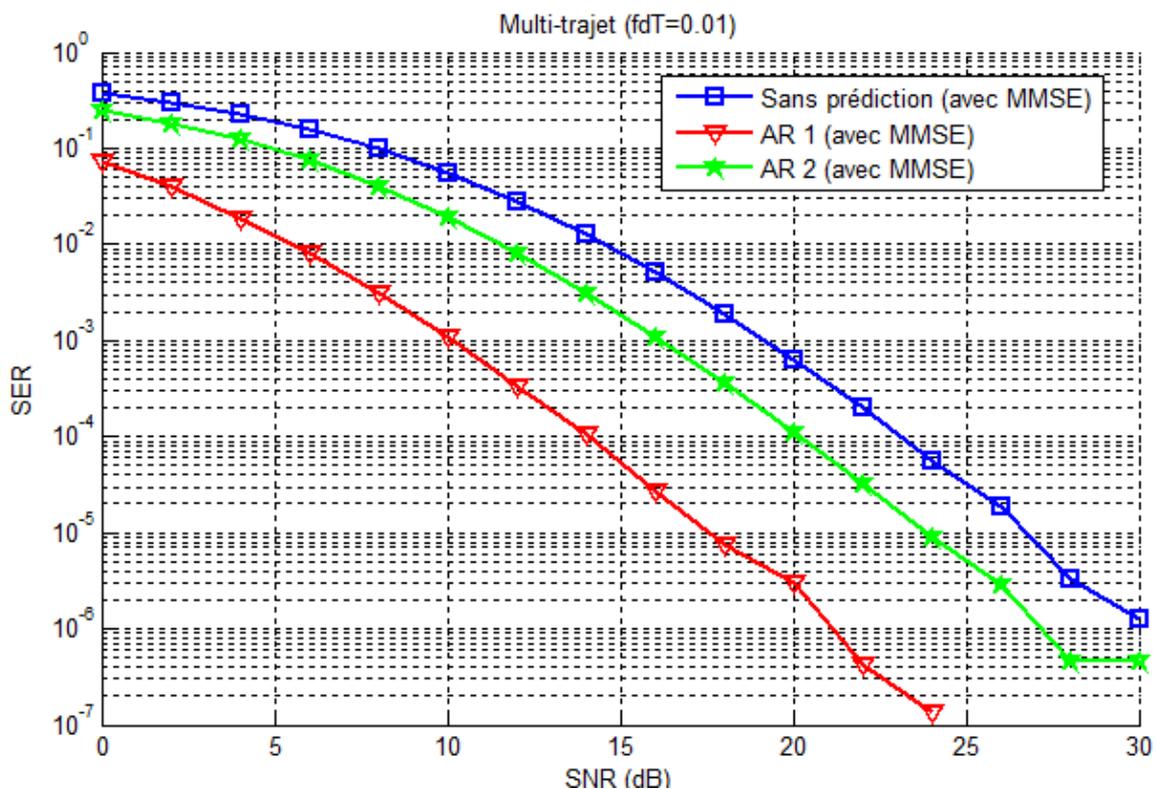


Figure 4.6 : SER en fonction du SNR pour un cas multi-trajet avec $f_d T = 10^{-2}$.

D'après la figure 4.6, Nous avons remarqué même dans le cas multi-trajet le modèle AR1 reste meilleur par rapport à AR2 et au cas où il n'y a pas aucune prédiction.

4.3 Canal multi-porteuse (multi-trajet)

Comme dans la section 4.2, nous avons vérifié notre étude par la simulation et Nous avons testé les performances de notre processus. Nous avons étudié le taux d'erreur par symbole (SER) en fonction du rapport signal au bruit (SNR) et de l'étalement Doppler normalisé ($f_d T$) pour un canal de type Rayleigh avec $L = 4$ trajets. Nous avons considéré un système OFDM avec une modulation 4-QAM et avec 512 sous-porteuses. Le SER est évalué pour un canal à variations temporelles lentes telle que $f_d = 10^{-4}$, $f_d T = 10^{-3}$ dans un premier temps puis pour un canal à variations temporelles rapides telle que $f_d T = 0.09$ et ce pour un SNR allant de 0 à 30 dB.

Pour ce qui de la chaine OFDM utilisée dans notre travail, elle se présente de la manière suivante :

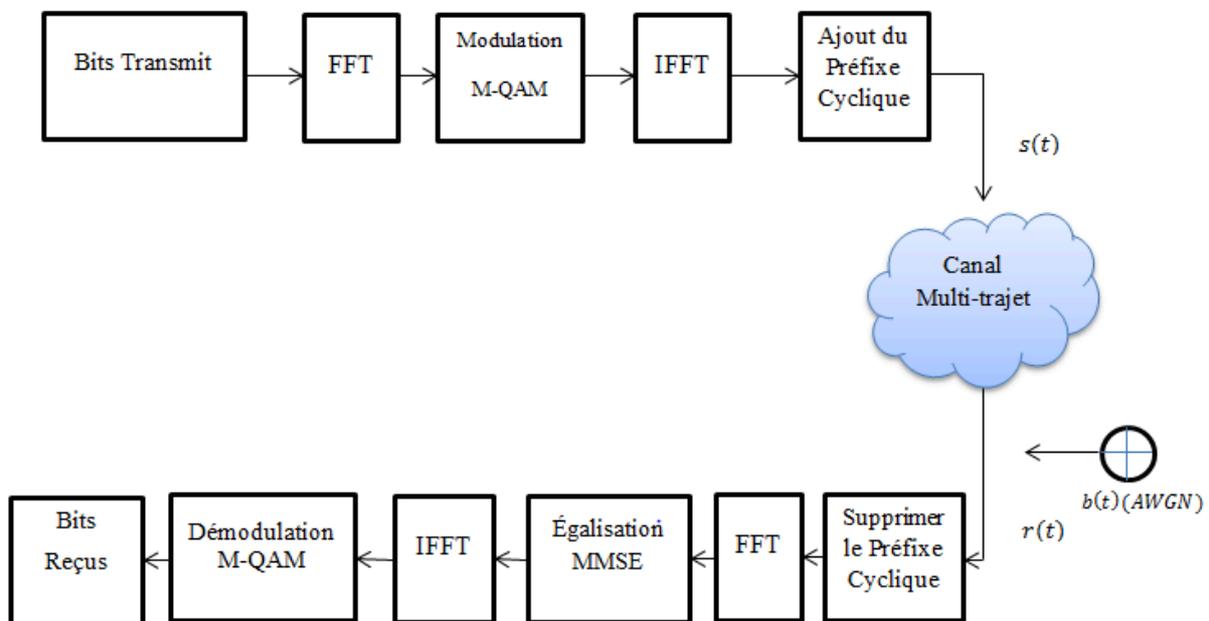


Figure 4.7 : Chaîne de transmission Multi-Porteuse (OFDM).

Avec :

- ✓ $M = 4$ (4-QAM).
- ✓ Taille de la FFT et IFFT = 512.
- ✓ Des trames de 512 bits transmis ont été répétées 10^5 fois pour espérer approcher une situation réelle.

Les figures (Fig4.8), (Fig4.9) et (Fig4.10) représentent l'évolution du SER en fonction du SNR dans les cas sans prédiction, avec prédiction AR-1 et AR-2 et ce pour différentes valeurs de $f_d T$.

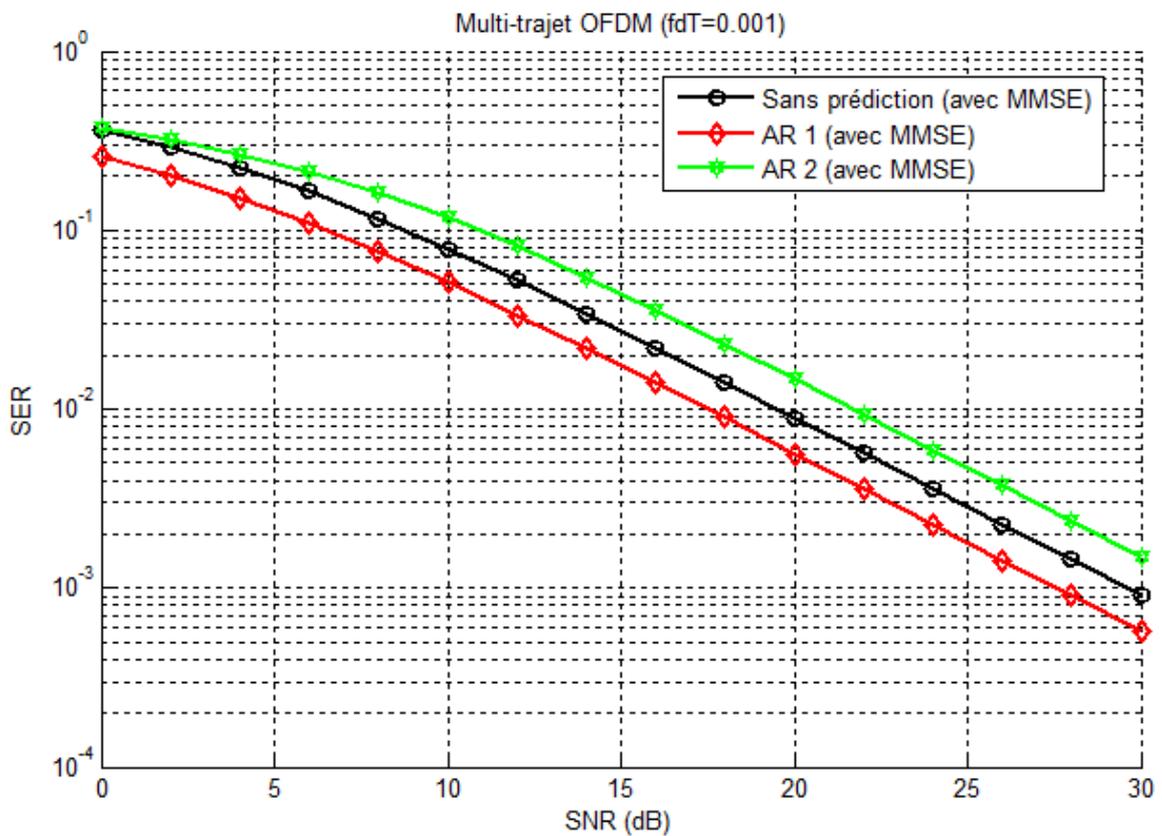


Figure 4.8 : SER en fonction du SNR pour $f_d T = 10^{-3}$.

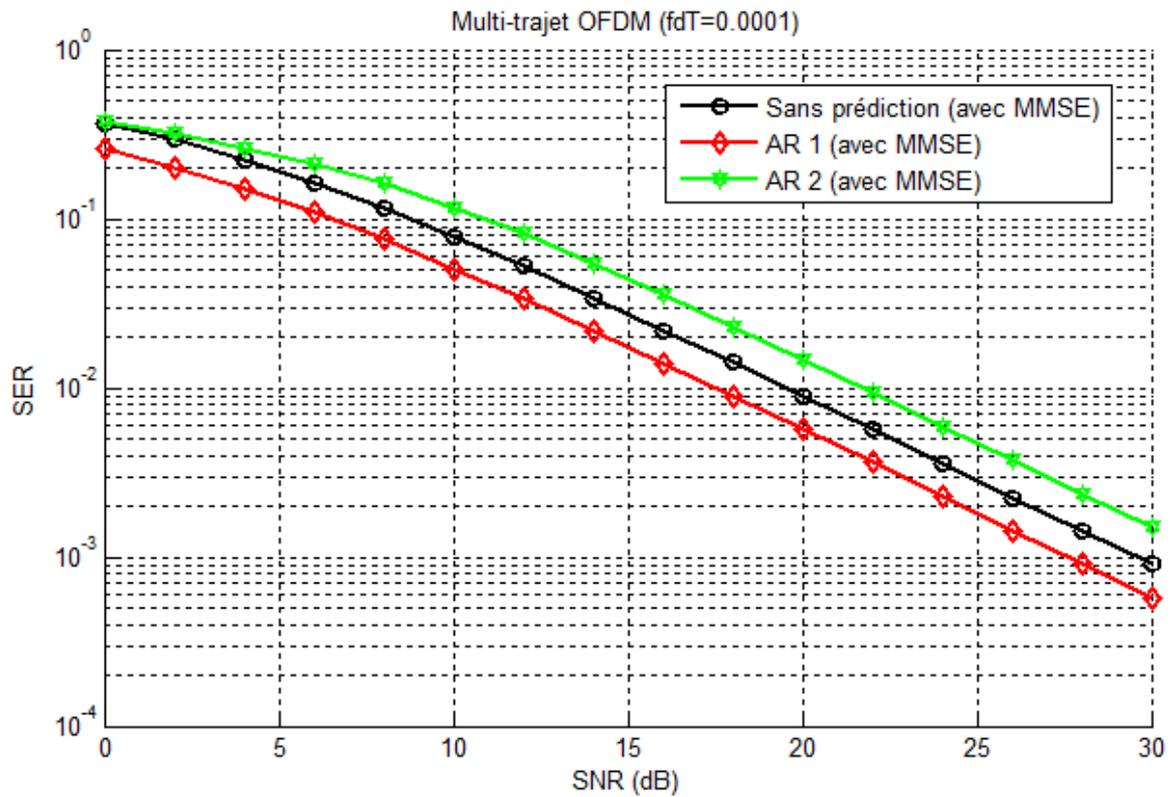


Figure 4.9 : SER en fonction du SNR pour $f_d T = 10^{-4}$.

Nous avons remarqué qu'avec l'affaiblissement de $f_d T$, (Fig4.8) et (Fig4.9), la prédiction s'améliore et ce en minimisant l'erreur de prédiction.

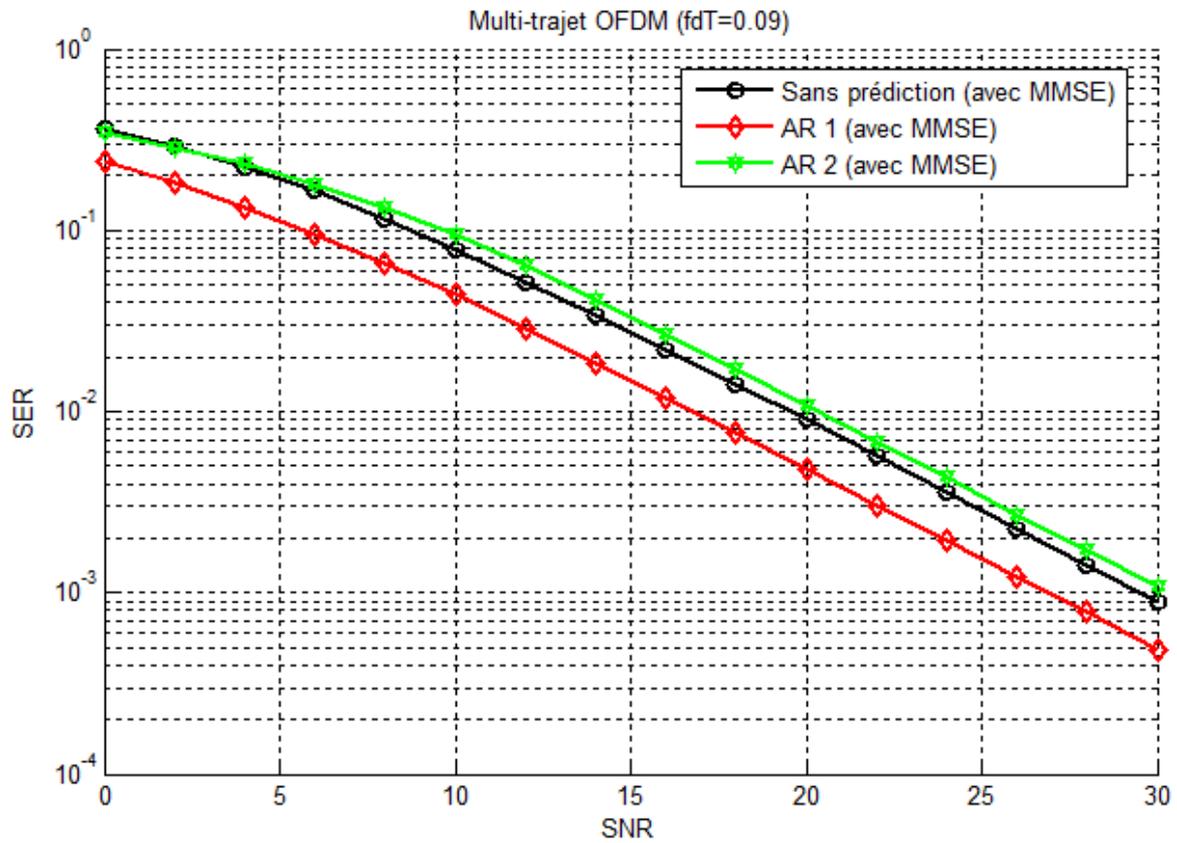


Figure 4.10 : SER en fonction du SNR pour $f_d T = 0.09$

D'autre part, lorsque $f_d T$ augmente (Fig4.10) la prédiction s'améliore logiquement mais nous sommes loin de minimiser l'erreur de prédiction.

D'après les figures illustrées dans cette section, nous avons remarqué qu'une faible variation de l'effet Doppler n'a pas beaucoup d'influence sur le taux d'erreur par symbole contrairement à leur effet sur l'erreur de prédiction qui est considérable. Nous noterons également que le processus fournit un taux d'erreur acceptable pour des valeurs élevées du $f_d T$, ce qui peut paraître comme un résultat satisfaisant. En contrepartie, les performances moyennes, en terme d'erreur de prédiction, sont compensées lorsqu'il s'agit d'effet Doppler faible.

4.4 Conclusion :

Dans cette partie du travail, nous avons mesuré les performances de l'algorithme AR-p du point de vue SER en fonction du SNR et ce pour les cas de transmissions SC et OFDM pour différentes valeurs de $f_d T$. Nous avons remarqué que le processus AR1 est meilleur dans tous les cas. Ce résultat a été confirmé par des recherches antérieures [17] [27].

Conclusion générale et perspectives

Les télécommunications sans fils à très haut débit dans un contexte de forte mobilité font partie d'un domaine de recherche très actif visant à développer des solutions de connectivité sans coupure et une très bonne qualité de service (QoS) pour les utilisateurs, il convient donc de développer des solutions permettant de corriger le maximum d'aléas dû à la propagation et qui dégradent le signal reçu, on peut citer les atténuations des amplitudes des symboles, les inversions de phase des symboles ainsi que les problèmes de synchronisation entre émetteur et récepteur (cas de l'OFDM en particulier).

La prédiction du canal et la détection du signal constituent donc des étapes cruciales dans la conception d'un récepteur mobile. En général, il n'est pas possible de prendre une décision précise sur les données à la réception, sauf si une bonne prédiction du canal ou des symboles émis est disponible.

Ainsi, dans ce mémoire, nous nous sommes intéressés à la technique de prédiction autorégressif (AR-p) et à la modélisation du canal radio-mobile dans le cas où la vitesse du récepteur varie rapidement et ce pour les schémas de transmission mono porteuse (SC) et multi-porteuse (OFDM) avec un canal de propagation qui varie d'un symbole à un autre.

Les résultats obtenus par la simulation ont validé la théorie et impose que la prédiction est nécessaire en cas de mobilité pour pallier aux erreurs dues aux phénomènes de propagation.

Pour le problème de prédiction dans le cas d'un canal mono-trajet en présence d'un bruit blanc additif gaussien, nous avons étudié la variation pour différents paramètres avec le modèle autorégressif (AR) d'ordre p ($p = 1, 2$) et nous avons calculé la limite minimale de l'erreur qui peut être atteinte. Pour $p=1$, l'algorithme AR- p donne de meilleurs résultats que pour les cas où $p > 1$. Ce principe reste valable quel que soit la fréquence Doppler, en particulier dans le cas qui nous intéresse qui est celui d'une Doppler normalisée élevée ($f_d T > 10^{-2}$) mais n'est pas optimal du point de vue erreur contrairement lorsque le canal a des variations lentes ($f_d T$ faible).

Pour ce qui d'une transmission basée sur l'OFDM avec un canal multi trajet (présence d'évanouissement), les performances lorsqu'on applique un processus AR-p ($p=1$) sont meilleurs que celles où l'OFDM est seule (sans prédiction) en particulier dans le cas de récepteurs à vitesses lentes, ce qui confirme la théorie. L'inconvénient majeur reste l'erreur de prédiction en cas de variation rapide.

Nous pouvons à présent citer quelques perspectives à ce travail, comme suite directe il serait intéressant d'effectuer une mise à jour des prédictions à l'aide d'un filtre de Kalman dans le cas d'une transmission OFDM avec insertion de symboles pilotes pour affiner la prédiction du canal (transmission de type Data-Aided).

Pour des variations rapides (des vitesses très élevées du récepteur), l'étude de l'évolution des paramètres du canal à l'intérieur d'un symbole serait d'une grande utilité.

Les techniques bayésiennes pour la prédiction du canal seraient également intéressantes à mettre en œuvre ainsi la généralisation de ce travail pour les systèmes MIMO.

Enfin, ce projet nous a permis de nous initier à la recherche scientifique et ce en exploitant différentes sources d'informations tels que les thèses de master, de magistère et de doctorat, d'e-book, de liens internet, ...etc. Il nous a également permis d'améliorer nos connaissances en langage évolué et apprendre à aborder un problème scientifique sans réponse préalable. Tout cela nous a fait aimer à la recherche scientifique.

Bibliographie :

- [1] Hijazi, H. et Ros, L. (2010). « Joint data QR-detection and Kalman estimation for OFDM time-varying Rayleigh channel complex gains ». Dans : IEEE Trans. Commun, vol 58, n°1, p 1-9.
- [2] Tugnait, J. K., S. He. et Kim, H. (2010). « Doubly Selective Channel Estimation Using Exponential Basis Models and Subblock Traking ». Dans : IEEE Trans. Signal Process, vol 58, n°3, p 1275-1289.
- [3] Huaqiang, SHU. (2013). « Algorithmes de poursuite pour l'estimation de canal radio-mobile et performances asymptotiques : applications pour les systèmes OFDM ». Thèse de doctorat, Université Lille I, Lille. 151 P.
- [4] Baouni, A. « Estimation du Canal et Elimination des interférences ICI dans les Communications Mobile avec Modulation OFDM ». Thèse de Magister, Université Mentouri Constantine, Constantine. 75 P.
- [5] David.Tse, Pramod.V. (2005). « Fundamental of Wireless communication ». Tse , Viswanath. 554 p, United States of America.
- [6] Hijazi, H. (2008). « Estimation de canal radio-mobile à évolution rapide dans les systèmes à modulation OFDM ». Thèse de Doctorat, Institut Polytechnique de Grenoble, Grenoble. 150 P.
- [7] Bassel, S. (2006). « Processus stochastiques pour l'ingénieur ». Selaiman. 233 p, Romande.
- [8] Ros, L. (2004). « Egalisation et synchronisation en communications numériques ». Dans : Cours troisième année ENSERG. 35 P.
- [9] « Mobile WiMAX PHY Layer (RF) Operation and Measurement (Application note) ». Agilent Technologies. p 40.
- [10] Bello, P.A. (1963). « Characterization of randomly time variant linear channels ». Dans : IEEE Tans Commun Syst, vol 11, n°4), p 360-393.
- [11] Ros, L. (2001). « Réception multi-capteur pour un terminal radio-mobile dans un système d'accès multiple à répartition par codes. Application au mode TDD de l'UMTS ». Thèse de doctorat, Institut Polytechnique de Grenoble. 210 P.
- [12] Clarke, R.H. (1968). « A statistical theory of mobile radio reception ». Dans : Bell System Technical Journal, vol 47, p 957-1000.
- [13] Clarke, R.H et Khoo Wee Lin. (1997). « 3-D mobile radio channel statistics ». Dans : IEEE Trans Veh Technol, vol 46, n°3, p 798-799.

- [14] Ros, L. (2014). « Modélisation du canal radio-mobile ». Dans : Communication sans fil, chapitre II. P 35.
- [15] Mechoug, R. (2013). « La Prédiction des Séries Temporelles utilisant les Paradigmes de Soft Computing ». Thèse de doctorat, Université Mohamed Khider Biskra, Biskra. 136 P.
- [16] Jutten, C. (2010). « Filtrage Linéaire Optimal ». Cours de cinquième année du département 3i, Université Josef Fourier-Polytechnique Grenoble, Grenoble, p 10-14.
- [17] Ghandour, S. (2010). « Estimation de canal à évanouissements lents pour les communications radio-mobiles ». Rapport de stage (Master 2-Recherche), Institut Polytechnique de Grenoble, Grenoble. 66 P.
- [18] K. E, Baddour et N.C, Beaulieu. (2005). « Autoregressive modeling for fading channel simulation ». Dans : IEEE Trans Wireless Commun, vol 4, n°4, p 1650-1662.
- [19] H.J, Myung. (2008). « Single Carrier FDMA Wiley Series on Wireless Communications and Mobile Computing ».
- [20] Merah, H. (2012). « Conception d'un MODEM de la quatrième génération (4G) des réseaux de mobiles à base de la technologie MC-CDMA ». Thèse de Magister, Université Ferhat Abbas Setif, Setif. 147 P.
- [21] Gorce, JM. « Wireless Communication (WCO) ». Dans : Récepteur canal radio multi-chemins.
- [22] Choumane, A. (2011). « Synthèse d'un canal de propagation par système multi-antennes pour la caractérisation de terminaux mobiles à diversité ». Thèse de doctorat, Université Limoges, Limoges. 169 P.
- [23] Fang, J. « Télécommunications dans les systèmes de transport à forte mobilité : Estimation et Synchronisation de canal pour les communications MIMO – OFDM ». Thèse de doctorat, Université de Science et Technologies de Lille, Lille. 114 P.
- [24] Ros, L. (2014). « Communications multi-utilisateur (CDMA) et multi-porteuse (OFDM) ». Dans : Communication sans fil, chapitre 4.
- [25] Ros, L. (2001). « Réception multi-capteur pour un terminal radio-mobile dans un système d'accès multiple à répartition par codes (Application au mode TDD de l'UMTS) ». Thèse de doctorat, Institut national polytechnique de Grenoble, Grenoble. 210 P.
- [26] Youssef, N. (2006). « Sensibilité des systèmes OFDM-CDMA aux erreurs de synchronisation en réception radio-mobile ». Thèse de doctorat, Institut de Grenoble, Grenoble. 168 P.
- [27] Abdo, Ahmed Z. (2008). « Estimation of Autoregressive Time-Varying Fading Channels : Application to OFDM Systems ». Thèse de Master, Université Al-Quds, Palestine. 80 P.

[28] Guy, A. (2008). « Traitement du signal Opération-Algorithmes ». Cours traitement du signal, Ecole internationale des sciences du traitement de l'information, Pontoise France. 209 P.

Annexe

Annexe A : Calcul des a_p et de σ_p^2

Partant d'un modèle autorégressif d'ordre p ,

$$x_k = \sum_{m=1}^p -b_m x_{k-m} + e_k$$

On cherche à calculer les coefficients b_m tels que la variance de e_k soit minimale. On va dériver les équations de Yule-Walker correspondantes, puis on va déduire la valeur de cette erreur minimale.

$$\begin{aligned} \sigma_p^2 &= E[e_k e_k^*] = E[(\sum_{m=0}^p -b_m x_{k-m})(-b_j x_{k-j})^*] \\ &= \sum_{m=0}^p \sum_{j=0}^p b_m b_j E[x_{k-m} x_{k-j}^*] \\ &= \sum_{m=0}^p \sum_{j=0}^p b_m b_j R_{xx}[k-m, k-j] \end{aligned}$$

avec $b_0 = 1$.

Si on a un processus stationnaire au sens large, alors :

- ✓ on a $R_{xx}[k-m, k-j] = R_{xx}[(k-j) - (k-m)] = R_{xx}[m-j]$
- ✓ et $R_{xx}[j-m] = R_{xx}[m-j]$

et donc on aura :

$$\sigma_p^2 = \sum_{m=0}^p b_m^2 R_{xx}[0] + 2 \sum_{m \neq j}^p b_m b_j R_{xx}[|j-m|]$$

Minimiser la variance s'exprime donc par le système des " p " équations suivantes :

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial b_1} (\sigma_p^2) = 0 \Rightarrow 2b_1 R_{xx}[0] + 2 \sum_{m \neq 1}^p b_m R_{xx}[|1-m|] = 0 \\ \frac{\partial}{\partial b_2} (\sigma_p^2) = 0 \Rightarrow 2b_2 R_{xx}[0] + 2 \sum_{m \neq 2}^p b_m R_{xx}[|2-m|] = 0 \\ \dots \dots \dots \\ \frac{\partial}{\partial b_l} (\sigma_p^2) = 0 \Rightarrow 2b_l R_{xx}[0] + 2 \sum_{m \neq l}^p b_m R_{xx}[|l-m|] = 0 \\ \dots \dots \dots \\ \frac{\partial}{\partial b_p} (\sigma_p^2) = 0 \Rightarrow 2b_p R_{xx}[0] + 2 \sum_{m \neq p}^p b_m R_{xx}[|p-m|] = 0 \end{cases}$$

Donc : $\sum_{m=0}^p b_m R_{xx}[|l-m|] = 0, \forall 1 \leq l \leq p$, avec $b_0 = 1$.

D'où :

$$\sum_{m=1}^p -b_m R_{xx}[|l-m|] = b_0 R_{xx}[l-0] = R_{xx}[l] \quad \forall 1 \leq l \leq p$$

$$\text{Or : } x_k = \sum_{m=1}^p -b_m x_{k-m} + e_k$$

$$\text{Donc : } R_{xx}[m] = E(x_k x_{k-m}^*) = \sum_{n=1}^p -b_n E[x_{k-m} x_{k-m}^*] + E[e_k x_{k-m}]$$

Prenons $m = 0$, on aura :

$$R_{xx}[0] = \sum_{n=1}^p -b_n E[x_{k-n} x_k^*] + E[e_k x_k^*] = \sum_{n=1}^p -b_n R_{xx}[n] + \sigma_p^2$$

(On a utilisé le fait que e_k est un bruit blanc, donc non corrélé avec les échantillons e_{k-1} , e_{k-2} , ...)

$$\text{et donc } E[e_k x_k^*] = E[e_k \sum_{i=1}^p -b_i x_{k-i}^* + e_k^*] = \sum_{i=1}^p -b_i E[e_k e_{k-i}^*] + E[e_k e_k^*] = \sigma_p^2.$$

$$\text{D'où : } R_{xx}[0] = \sum_{m=1}^p -b_m R_{xx}[-m] + \sigma_p^2$$

On obtient finalement les équations de Yule-Walker :

$$\sum_{m=1}^p -b_m R_{xx}[|l-m|] = b_0 R_{xx}[l-0] = R_{xx}[l] \quad \forall 1 \leq l \leq p$$

Et on a la valeur de la variance de l'erreur :

$$\sigma_p^2 = R_{xx}[0] - \sum_{n=1}^p -b_n R_{xx}[n]$$

Dans notre étude,

$$\alpha_k^{ARp} = \sum_{m=1}^p a_m \cdot \alpha_{k-m}^{ARp} + e_k$$

Il suffit donc de remplacer les $-b_i$ par a_i et les α_k^{ARp} par x_k dans l'avant dernière équation.

On obtient donc le système d'équations (2.37).

Annexe B : Calcul de EQM1 (variance d'erreur dynamique)

Pour calculer $EQM1$, d'après l'équation (2.61), on aura :

$$EQM1 \approx (4\pi^2 T^2) \frac{\sigma_b^2}{\sigma_e^2} \left[\frac{\sigma_\alpha^2}{\pi f_d} \int_{-f_d}^{f_d} \frac{f^2}{\sqrt{1 - \left(\frac{f}{f_d}\right)^2}} df \right]$$

Or :

$$\frac{\sigma_\alpha^2}{\pi f_d} \int_{-f_d}^{f_d} \frac{f^2}{\sqrt{1 - \left(\frac{f}{f_d}\right)^2}} df = \frac{2\sigma_\alpha^2}{\pi f_d} \int_0^{f_d} \frac{f^2}{\sqrt{1 - \left(\frac{f}{f_d}\right)^2}} df$$

En effectuant un changement de variable ($\frac{f}{f_d} = \cos(x)$), on aura :

$$\begin{aligned} 2 \int_0^{f_d} \frac{f^2}{\sqrt{1 - \left(\frac{f}{f_d}\right)^2}} df &= (f_d^3) \int_0^{\frac{\pi}{2}} 2\cos^2(x) dx \\ &= (f_d^3) \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 + \cos(2x)) dx \\ &= \frac{\pi f_d^3}{2} \end{aligned}$$

Et donc :

$$\frac{\sigma_\alpha^2}{\pi f_d} \int_{-f_d}^{f_d} \frac{f^2}{\sqrt{1 - \left(\frac{f}{f_d}\right)^2}} df = \frac{\sigma_\alpha^2 f_d^2}{2}$$

Par suite :

$$\begin{aligned} EQM1 &\approx (4\pi^2 T^2) \frac{\sigma_b^2}{\sigma_e^2} \left[\frac{\sigma_\alpha^2}{\pi f_d} \int_{-f_d}^{f_d} \frac{f^2}{\sqrt{1 - \left(\frac{f}{f_d}\right)^2}} df \right] \approx \frac{(4\pi^2 T^2) \sigma_b^2}{\sigma_e^2} \left[\frac{\sigma_\alpha^2 f_d^2}{2} \right] \\ &\approx \frac{2(\pi f_d T)^2 \sigma_\alpha^2 \sigma_b^2}{\sigma_e^2} \end{aligned}$$

Et en prenant $\sigma_\alpha^2 = 1$ et le cas général $\sigma_e^2 = 1 - a^2$ (équation (2.46)), on aura :

$$EQM1 \approx \frac{2(\pi f_d T)^2 \sigma_b^2}{1 - a^2}$$