

**MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR ET DE LA
RECHERCHE SCIENTIFIQUE**

UNIVERSITE DE BLIDA 1

**Faculté des sciences
Département de Mathématiques**



Mémoire de projet de fin d'étude

En vue de l'obtention du diplôme de Master

En : Mathématiques

Option : Recherche Opérationnelle

Thème

**ETUDE THÉORIQUE ET ALGORITHMIQUE
SUR LA RECHERCHE DE NOYAUX DANS
LES GRAPHS ORIENTÉS**

Présenté par :

- KORCHI Fatma
- SAKHRI Sarah

Devant le jury composé de :

| | | |
|---------------------------------|------------------------------------|--------------|
| - M ^{me} ADLI Feriel | Maitre assistante A, U. BLIDA1 | Présidente |
| - M ^{me} MEDDAH Nacéra | Maitre de conférences A, U. BLIDA1 | Examinatrice |
| - M ^{me} RAMOUL Amina | Maitre de conférences B, U. BLIDA1 | Promotrice |

Année universitaire 2021/2022

REMERCIEMENTS

Nous tenons, en premier lieu, à exprimer notre profonde gratitude et nos vifs remerciements à notre promotrice madame RAMOUL Amina, maître de conférences classe B à l'université Saad Dahleb de Blida1, qui nous a accueillies, accompagnées et aidées à mener tout au long de ce parcours. Son aide et sa confiance nous ont grandement aidées à mener à bien notre travail.

Nous tenons également à remercier madame ADLI Feriel, maître assistante classe A à l'université Saad Dahleb de Blida1, pour l'honneur qu'elle nous a fait en acceptant de présider le jury et examiner ce travail.

Nous adressons nos sincères et vifs remerciements à madame MEDDAH Nacéra, maître de conférences classe A à l'université Saad Dahleb de Blida1, qui a bien voulu examiner ce mémoire et accepter d'être membre de jury.

Un grand merci à tous nos enseignants du département de mathématiques.

Nos remerciements les plus chaleureux vont vers toutes nos familles, vers nos parents en particulier, qui nous supportent et soutiennent depuis toujours. Et bien sûr nos proches amis, qui nous ont soutenues et encouragées tout au long de la réalisation de ce mémoire.

ملخص

ينصب إهتمامنا في هذه المذكرة أساسا على دراسة مفهوم النواة في الرسوم البيانية الموجهة.

يعرف هذا المفهوم أربع تعميمات: النواة في الرسم البياني الموجه، النواة عن طريق المسارات أحادية اللون في الرسم البياني الموجه m -ملون، (k,l) -نواة و (k,l) -زائد-نواة في الرسم البياني الموجه.

نبدأ بدراسة نظرية حول النواة وتعميماته في الرسوم البيانية الموجهة حيث نقدم تعريفات و خصائص معينة لكل مفهوم للنواة وأيضا بعض النتائج المعروفة حول هذه المفاهيم الأربعة.

ثم نقترح خوارزميات بحث متعددة الحدود لإيجاد k -زائد- نواة في الرسوم البيانية الموجهة بدون دوائر وكذلك الرسوم البيانية الموجهة ثنائية الأجزاء.

-زائد- نواة في الرسوم k في الأخير سنقوم بتطوير برنامج يلخص عملنا على البحث عن البيانية الموجهة بدون دوائر وكذلك الرسوم البيانية الموجهة ثنائية الأجزاء.

ABSTRACT

In this memoir, we are mainly interested in the study of the concept of kernel in directed graphs.

This concept has known four main generalizations: Kernel in directed graph, kernel by monochromatic paths in m -colored directed graph, (k,l) -kernel and (k,l) -out-kernel in directed graph.

We start with the theoretical study on kernel in directed graph: We give definitions and some properties of each kernel concept and also known results on these four concepts.

Then, we will establish polynomial algorithms for finding (k,l) - out kernel in directed graphs without circuits and bipartite directed graphs.

Finally, we develop a software that summarizes our work on the search for (k,l) -out kernel in directed graphs without circuits and bipartite directed graphs.

RESUME

Dans ce mémoire, nous nous sommes intéressées principalement à l'étude du noyau dans les graphes orientés.

Ce concept a connu quatre généralisations: Noyau dans un graphe orienté, noyau par des chemins monochromatiques dans un graphe orienté m -coloré, (k,l) -noyau et (k,l) -plus noyau dans un graphe orienté.

Nous commençons par une étude théorique sur le noyau et ses généralisations dans les graphes orientés ; Nous donnons des définitions et certaines propriétés de chaque concept de noyau et également quelques résultats connus sur ces quatre concepts.

Ensuite, nous proposons deux algorithmes polynomiaux de recherche de (k,l) -plus- noyaux dans les graphes orientés sans circuits et les graphes orientés bipartis.

Enfin, nous élaborons un logiciel qui récapitule nos travaux sur la recherche de (k,l) -plus- noyaux dans les graphes orientés sans circuits et les graphes orientés bipartis.

TABLE DES MATIÈRES

REMERCIEMENTS

RÉSUMÉS

TABLE DES MATIÈRES

LISTE DES ILLUSTRATIONS GRAPHIQUES

INTRODUCTION

8

1 NOTIONS FONDAMENTALES

11

1.1. Définitions et notations de la théorie des graphes

11

1.1.1. Graphe et graphe orienté

11

1.1.2. Sous-digraphe

12

1.1.3. Chemins, circuits

13

1.1.4. Distance, excentricité

14

1.1.5. Connexité

14

1.1.6. Quelques classes de digraphes

14

1.1.7. Représentations non graphiques d'un graphe

15

1.2. Complexité des algorithmes

16

2 ETAT DE L'ART SUR LES NOYAUX DANS LES GRAPHES ORIENTÉS

19

2.1. Noyaux dans les graphes orientés

19

2.1.1. Définition

19

2.1.2. Quelques sous-classes des digraphes noyau-parfaits

22

2.1.3. Etude algorithmique de la recherche d'un noyau dans certaines
classes de digraphes noyau-parfaits

24

2.2. Noyaux par chemins monochromatiques dans un digraphe m-coloré

25

2.2.1. Définition

25

2.2.2. Quelques résultats

27

2.3. (k,l)-Noyau dans un digraphe

32

2.3.1. Quelques résultats

33

| | |
|---|----|
| 2.4. (k,l)-plus-noyau dans les digraphes | 36 |
| 2.4.1. Définitions | 36 |
| 2.4.2. Digraphes symétriques et digraphes transitifs | 38 |
| 2.4.3. Digraphes sans circuits et digraphes sans circuits impairs | 40 |
| 2.4.4. La fonction k-Grundy et la fonction caractéristique | 43 |
| 3 ETUDE ALGORITHMIQUE SUR LA RECHERCHE DE K-PLUS-NOYAU DANS LES DIGRAPHERS | 47 |
| 3.1. Algorithme polynomial de recherche d'un k-plus-noyau dans les digraphes sans circuits | 47 |
| 3.1.1. Algorithme | 47 |
| 3.1.2. Organigramme | 48 |
| 3.1.3. Justification et complexité | 49 |
| 3.2. Algorithme polynomial de recherche d'un k-plus-noyau dans les digraphes bipartis | 51 |
| 3.2.1. Algorithme | 51 |
| 3.2.2. Organigramme | 53 |
| 3.2.3. Justification et complexité | 54 |
| 3.3. Langage de programmation utilisé | 57 |
| 3.3.1. Description de langage MATLAB | 57 |
| 3.4. Interface graphique | 57 |
| 3.4.1. Description du logiciel interface sans circuit | 57 |
| 3.4.2. Description du logiciel interface biparti | 60 |
| CONCLUSION ET PERSPECCTIVES | 63 |
| REFERENCES | 64 |

LISTE DES ILLUSTRATIONS GRAPHIQUES

| | | |
|--------|---|----|
| FIGURE | 1.1. Un digraphe D d'ordre 6 et de taille 6 | 12 |
| FIGURE | 1.2. Un sous-digraphe induit D' d'un digraphe D | 13 |
| FIGURE | 2.1. Les digraphe C_5 et C_6 | 20 |
| FIGURE | 2.2. Un digraphe avec un unique noyau $\{x_2, x_3\}$ | 20 |
| FIGURE | 2.3. Un digraphe avec une fonction de Grundy | 21 |
| FIGURE | 2.4. Un digraphe qui admet un noyau mais qui n'a pas une fonction de Grundy | 22 |
| FIGURE | 2.5. Un digraphe 3-coloré avec un noyau $\{x_1, x_3\}$ | 26 |
| FIGURE | 2.6. La fermeture par chemins monochromatiques pour le digraphe de la Figure 2.5 | 27 |
| FIGURE | 2.7. Le tournoi G_6 | 28 |
| FIGURE | 2.8. Le digraphe G_5 | 29 |
| FIGURE | 2.9. Digraphe 3-coloré d'ordre 6 | 31 |
| FIGURE | 2.10. Digraphe symétrique 3-coloré | 31 |
| FIGURE | 2.11. Un digraphe qui admet deux (k, l) -noyaux | 33 |
| FIGURE | 2.12. Un digraphe sans circuits impairs | 35 |
| FIGURE | 2.13. Un digraphe qui admet une fonction $(3, 2)$ -Grundy | 36 |
| FIGURE | 2.14. Un digraphe qui admet un $(2, 3)$ -plus-noyau | 37 |
| FIGURE | 2.15. Un digraphe symétrique D tel que $UG(D) = P_6$ | 38 |
| FIGURE | 2.16. Un digraphe tel que chaque circuit a un arc symétrique | 41 |
| FIGURE | 3.1. Un digraphe sans circuit qui admet un k -plus-noyau | 50 |
| FIGURE | 3.2. Un digraphe biparti DB qui admet un k -plus-noyau | 55 |
| FIGURE | 3.3. Un digraphe biparti DB | 56 |
| FIGURE | 3.4. Le digraphe C_4 | 56 |
| FIGURE | 3.5. Présentation de l'interface_sansc | 58 |
| FIGURE | 3.6. Présentation de bouton introduire le vecteur des prédécesseurs | 58 |
| FIGURE | 3.7. Présentation de bouton introduire le vecteur des successeurs | 59 |
| FIGURE | 3.8. Présentation de bouton introduire la valeur de k | 59 |
| FIGURE | 3.9. Présentation de digraphe de la Figure 3.1 avec son k -plus-noyau dans la zone de dessin | 60 |
| FIGURE | 3.10. Présentation de l'interface_biparti | 61 |
| FIGURE | 3.11. Présentation de digraphe de la Figure 3.2 avec son k -plus-noyau dans la zone de dessin | 62 |

INTRODUCTION

La Recherche Opérationnelle (*RO*) est une branche des mathématiques, appelée aussi, optimisation sous contraintes. Celle-ci a été développée dans les années quarante pour optimiser les problèmes complexes de gestion logistique. Il s'agit d'un ensemble de méthodes d'analyse scientifique (mathématique et informatique) des phénomènes d'organisation qui traitent de la maximisation d'un profit, d'une performance, d'un rendement ou bien de la minimisation d'un coût, d'une dépense. La *RO* est avant tout un outil d'aide à la décision.

La théorie des graphes est une branche des mathématiques discrètes, consistant à l'étude des objets nommés graphes, elle permet de modéliser et résoudre des problèmes d'une manière simple.

Le mot graphe a été introduit par le mathématicien anglais James Joseph Sylvester (1814-1897) en 1878. Un graphe est un ensemble de points appelés sommets éventuellement reliés par des lignes ou des flèches appelés arêtes ou arcs respectivement.

La théorie des graphes est apparue d'abord comme une curiosité mathématique avec le problème des ponts de Königsberg, quand Euler (en 1736) démontra qu'il était impossible de traverser chacun des sept ponts de la ville russe de Königsberg (aujourd'hui Kaliningrad) qui est arrosée par la rivière de Pregel, une fois exactement et de revenir au point de départ. Elle est devenue une branche mathématique au début du XXe siècle, grâce aux travaux de König, de Kuratowski, de Cayley et plus récemment, de Berge, d'Erdős et de Harary.

La théorie des graphes constitue aujourd'hui un corpus de connaissance très important, elle trouve ses applications dans d'autres domaines de mathématiques et en informatique, et elle s'est développée dans diverses disciplines telles que la chimie (modélisation des structures), la biologie (génomique), les sciences sociales (modélisation des relations entre les populations) et les applications industrielles (problème du voyageur de commerce).

Parmi les problèmes importants et très étudiés en théorie des graphes citons les prob-

lèmes de domination, les problèmes de coloration et les problèmes de noyaux dans les graphes.

Nous nous sommes intéressées dans ce mémoire à l'étude du concept de *noyaux* dans les graphes orientés.

Le concept de noyaux a été introduit par Von Neumann et Morgenstern, comme une généralisation de leur concept de solutions pour les jeux coopératif. Ils ont aussi prouvé que tout graphe orienté sans circuits a un noyau unique.

Un noyau est un sous-ensemble de sommets indépendant (ses sommets sont non adjacents deux à deux) et absorbant (tout sommet hors de cet ensemble est l'origine d'au moins un arc ayant son extrémité terminale dans ce dernier).

Le problème principal sur les noyaux est: quelles propriétés structurelles d'un graphe orienté impliquent l'existence d'un noyau? Ce concept a trouvé des applications par exemples dans des jeux coopératifs à n personnes, dans des jeux de type Nim [1], dans la logique [2], ...etc

L'existence d'un noyau est un problème difficile: En effet Chvatal [3] a montré que décider si un graphe orienté possède un noyau est un problème *NP-complet*.

Dans la littérature nous connaissons trois principales généralisations du concept du noyau dans les graphes orientés.

Le premier concerne *le noyau par chemins monochromatiques*, dans un graphe orienté dont les arcs sont colorés avec m couleurs ($m \geq 1$). Ce concept a été étudié par plusieurs auteurs Sands, Sauer et Woodrow [16], Shen Minggang [17] et Galeana-Sanchez [19].

Le second est celui de (k, l) -noyau ($k \geq 2$, $l \geq 1$) dans un graphe orienté, introduit par M.Kwásnik [20]. On utilise dans ce concept la notion de la distance.

Le troisième est celui de (k, l) -plus-noyau dans un graphe orienté a été introduit par A.Ramoul et M.Blidia [27], où ils ont utilisé dans leur définition le degré extérieur d'un sommet.

Ce mémoire comporte trois chapitres développés comme suit:

Nous introduisons dans le premier chapitre les définitions de base ainsi que les notions usuelles dans le domaine de la théorie des graphes utilisées dans ce manuscrit. A la fin du chapitre, nous parlons de la complexité algorithmique et nous laissons les notions

caractéristiques de chaque chapitre à définir dans le chapitre lui-même.

dans le deuxième chapitre nous présentons un état de l'art sur le noyau dans les graphes orientés, et ses généralisations.

Le troisième chapitre sera consacré à notre contribution, où nous allons donner deux algorithmes polynômiaux de la recherche d'un k - *plus* - *noyau* dans deux classes des graphes orientés: graphes orientés sans circuits et graphes orientés bipartis. A la fin du chapitre nous élaborons un logiciel qui détermine le k -plus-noyau dans les graphes orientés sans circuits et graphes orientés bipartis.

Enfin, nous terminons par une conclusion situant d'une part notre contribution et d'autre part les différents axes de recherches futures dans le domaine des noyaux dans les graphes orientés.

CHAPITRE 1

NOTIONS FONDAMENTALES

Nous introduisons dans ce chapitre les notions usuelles dans le domaine de la théorie des graphes, ainsi que les définitions de base utilisées tout au long de ce mémoire. Pour plus de détails sur la terminologie utilisée dans ce mémoire, on reporte le lecteur au livre de C.Berge [4].

1.1 Définitions et notations de la théorie des graphes

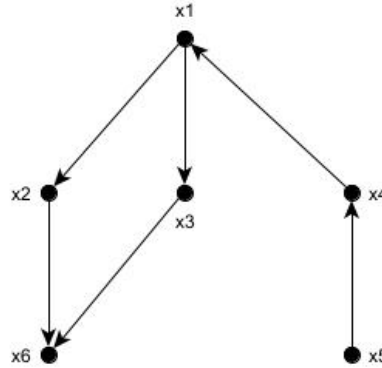
1.1.1 Graphe et graphe orienté

Un graphe non orienté G est défini par un couple $(V(G), E(G))$ où $V(G)$ est un ensemble fini de sommets et $E(G)$ est un ensemble des paires de sommets (u, v) avec $u, v \in V(G)$ appelés arêtes. Le cardinal de V est appelé l'ordre de G , noté par n et le cardinal de E est appelé la taille de G , noté par m .

Un graphe orienté D est défini par un couple $(V(D), A(D))$, (où simplement (V, A)) où $V(D)$ est un ensemble fini de sommets et $A(D)$ un ensemble des paires ordonnées (x, y) avec $x, y \in V(D)$ appelés arcs. Le cardinal de V noté n est appelé l'ordre de D et le cardinal de A noté m est appelé la taille de D .

Une boucle est un arc reliant un sommet avec lui-même. Un ensemble d'arcs joignant deux sommets x et y dans le même sens est appelé arc multiple.

Dans ce qui suit nous considérons les graphes orientés sans boucles et sans arcs multiples. On appellera un digraphe un graphe orienté, emprunté au mot anglais *directed graph*.

FIGURE 1.1. Un digraphe D d'ordre 6 et de taille 6

Si (x, y) est un arc d'un digraphe D , alors on dit que y absorbe x est que x domine y , et y est un successeur de x et x est un prédécesseur de y .

L'ensemble des successeurs d'un sommet x est noté par $N_D^+(x)$

$$N_D^+(x) = \{y \in V \mid xy \in A\} \text{ et } N_D^+[x] = N_D^+(x) \cup \{x\}.$$

L'ensemble des prédécesseurs d'un sommet x est noté par $N_D^-(x)$

$$N_D^-(x) = \{y \in V \mid yx \in A\} \text{ et } N_D^-[x] = N_D^-(x) \cup \{x\}.$$

Le degré extérieur d'un sommet x est $d_D^+(x) = |N_D^+(x)|$ et le degré intérieur d'un sommet x est $d_D^-(x) = |N_D^-(x)|$.

On note par $\Delta^+(D)$ et $\Delta^-(D)$ le degré extérieur maximum et le degré intérieur maximum dans D respectivement, et $\delta^+(D)$ et $\delta^-(D)$ le degré extérieur minimum et le degré intérieur minimum dans D respectivement.

1.1.2 Sous-digraphe

Soient $D = (V, A)$ et $D' = (V', A')$ deux digraphes.

On dit que D' est un sous-digraphe de D si $V' \subseteq V$ et $A' \subseteq A$.

Si de plus $A' = \{xy \in A \mid x, y \in V'\}$ alors D' est dit sous-digraphe induit de D .

Le digraphe D de la Figure 1.2 a pour ensemble des sommets $V = \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5\}$ et le digraphe D' est un sous-digraphe de D induit par $S = \{x_1, x_2, x_3, x_4\}$.

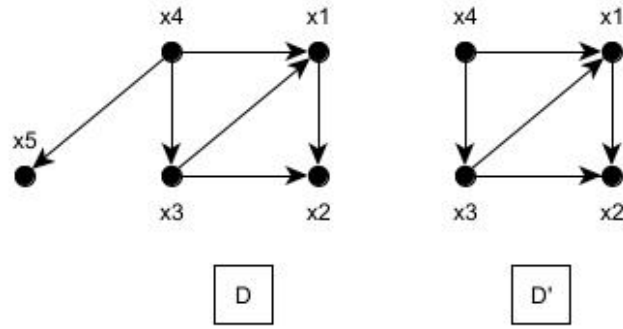


FIGURE 1.2. Un sous-digraphe induit D' d'un digraphe D

Il est à noter que pour tout $S \subseteq V$, le sous-digraphe de D induit par S , noté par $D[S]$ est l'unique sous-digraphe induit de D avec l'ensemble des sommets est S .

$$N_D^+(S) = \bigcup_{u \in S} N_D^+(u) \text{ et } N_D^+[S] = N_D^+(S) \cup S$$

$$N_D^-(S) = \bigcup_{u \in S} N_D^-(u) \text{ et } N_D^-[S] = N_D^-(S) \cup S$$

On note $\Delta^+(D[S])$, $\Delta^-(D[S])$, $\delta^+(D[S])$ et $\delta^-(D[S])$ par $\Delta^+(S)$, $\Delta^-(S)$, $\delta^+(S)$ et $\delta^-(S)$ respectivement. Le degré maximum ($\Delta^+(S) + \Delta^-(S)$) (resp le degré minimum ($\delta^+(S) + \delta^-(S)$)) de $D[S]$ est noté par $\Delta(S)$ (resp $\delta(S)$). Le nombre des sommets dans $N_S^+(x) = N_D^+(x) \cap S$, noté par $d_S^+(x) = |N_S^+(x)|$ est le degré extérieur de x dans S , et le nombre des sommets dans $N_S^-(x) = N_D^-(x) \cap S$, noté par $d_S^-(x) = |N_S^-(x)|$, est le degré intérieur de x dans S .

1.1.3 Chemins, circuits

Un chemin P de longueur k est un digraphe dont l'ensemble des sommets est $\{x_0, x_1, \dots, x_k\}$ et l'ensemble des arcs est $\{x_0x_1, x_1x_2, \dots, x_{k-1}x_k\}$, tel que tous les sommets et les arcs indiqués sont distincts.

Nous appellerons un tel chemin un x_0x_k - *chemin*, noté par $x_0x_1\dots x_{k-1}x_k$.

Un circuit C de longueur k est un digraphe dont l'ensemble des sommets est $\{x_1, \dots, x_k\}$ et l'ensemble des arcs est $\{x_1x_2, x_2x_3, \dots, x_{k-1}x_k, x_kx_1\}$, tel que tous les sommets et les arcs indiqués sont distincts. On notera un tel circuit par $x_1, \dots, x_{k-1}x_kx_1$. Un circuit est dit impair (respectivement pair) si k est impair (respectivement pair).

1.1.4 Distance, excentricité:

On appelle distance entre x et y , notée par $d_D(x, y)$ la longueur du plus court chemin reliant ces deux sommets. S'il n'existe pas un chemin de x à y dans D on prendra $d_D(x, y) = +\infty$.

L'excentricité d'un sommet est sa distance maximale à tous les autres sommets.

1.1.5 Connexité :

Un graphe G est dit connexe, si et seulement si pour toute paire de sommets u, v de graphe, il existe une chaîne les reliant.

Un digraphe D est fortement connexe, si et seulement si pour toute paire sommets x, y de digraphe, il existe un xy -chemin et un yx -chemin. Une composante fortement connexe d'un digraphe D est un sous-digraphe fortement connexe.

La condensation $SC(D)$ d'un digraphe D est obtenue en contractant chaque composante fortement connexe C en un seul sommet $v(C)$, et il existe un arc d'un sommet $v(C)$ à un sommet $v(C')$ dans $SC(D)$ s'il existe un arc d'un sommet de C à un sommet de C' . Il est clair que $SC(D)$ est un digraphe acyclique (un digraphe sans circuits). Une composante fortement connexe terminale d'un digraphe D est une composante fortement connexe C_T de D telle que $d_{SC(D)}^+(v(C_T)) = 0$, Une composante fortement connexe initiale d'un digraphe D est une composante fortement connexe C_I de D telle que $d_{SC(D)}^-(v(C_I)) = 0$.

1.1.6 Quelques classes de digraphes:

Soit $D = (V, A)$ un digraphe, un arc $xy \in A$ est dit symétrique (resp.asymétrique) si $yx \in A$ (resp $yx \notin A$). La partie asymétrique de D , $Asym(D)$ est un sous-digraphe de D tel que $V(Asym(D)) = V(D)$ et $A(Asym(D)) = \{xy \in A \mid xy \text{ est asymétrique}\}$.

Un digraphe $D = (V, A)$ est dit symétrique si $A(Asym(D)) = \phi$.

Un digraphe $D = (V, A)$ est dit transitif si $\forall x, y, z \in V, xy \in A, yz \in A$ alors $xz \in A$.

Un digraphe $D = (V, A)$ est dit complet si $\forall x, y \in V, xy \notin A$ alors $yx \in A$.

Une clique est un digraphe symétrique complet.

Un tournoi est un digraphe asymétrique complet.

Un digraphe biparti est un digraphe dont les sommets peuvent être partitionnés en deux classes X et Y telles que les sommets dans la même classe ne sont pas adjacents.

Nous désignons le digraphe biparti par $DB = (X, Y, A)$.

1.1.7 Représentations non graphiques d'un graphe

Compte tenu de l'essor des graphes orientés en informatique, il est naturel de s'intéresser aux différentes manières de les représenter. Différents modes de représentation peuvent être envisagés suivant la nature des traitements que l'on souhaite appliquer aux graphes orientés considérés.

Matrice d'adjacence : Soit $D = (V, A)$ un digraphe dont les sommets sont numérotés de 1 à n . La matrice d'adjacence de D est la matrice carrée $(a_{i,j})_{(i,j) \in [1,n]^2}$ définie par :

$$a_{i,j} = \begin{cases} k & \text{s'il y a } k \text{ arcs allant de } i \text{ à } j \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Si le graphe n'est pas orienté, la matrice est symétrique.

Matrice d'incidence : La matrice d'incidence d'un digraphe $D = (V, A)$ est une matrice à coefficients dans $\{-1, 0, 1\}$ indexée par l'ensemble $V \times A$ tel que pour $(i, j) \in V \times A$ on a :

$$b_{i,j} = \begin{cases} 1 & \text{si } I(a_j) = v_i \\ -1 & \text{si } T(a_j) = v_i \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

la définition de la matrice d'incidence peut être modifiée pour les graphes comme suit :

- Si G est un graphe non orienté alors $b_i = 1$ si v_i est incident à a_j et 0 sinon.

Liste des successeurs : Soit le digraphe $D = (V, A)$ d'ordre n dont les sommets sont numérotés de 1 à n , la représentation par liste de successeurs de D consiste en un tableau de n listes, une pour chaque sommet de V . Pour chaque sommet $v_i \in V$, la liste des successeurs est une liste de tous les sommets v_j tel qu'il existe un arc $(v_i, v_j) \in A$. Les sommets de chaque liste des successeurs sont généralement listés selon un ordre arbitraire.

1.2 Complexité des algorithmes:

Dans cette section, nous donnerons un aperçu sur la complexité algorithmique en introduisant quelques éléments de base.

Les problèmes concernant les graphes se rattachent à la grande classe des problèmes d'optimisation combinatoire.

Un problème d'optimisation combinatoire consiste à trouver à l'aide d'un algorithme efficace (ce concept est formalisé ci-dessous) une meilleure solution parmi un ensemble fini (de cardinalité très grande) de solutions admissibles.

Un algorithme est une suite finie d'opérations élémentaires permettant de résoudre un problème donné. L'exécution des instructions de l'algorithme transforme les données initiales (entrées) en résultats (sorties). le mot "algorithme" vient du nom du mathématicien perse Al-khawarizmi(783-850). Il était un membre d'une académie des sciences à Bagdad, c'est lui qui a écrit le premier traité algorithmique pour résoudre les équations linéaires et quadratiques.

On appelle algorithme déterministe un algorithme dont les résultats qui produisent peuvent être déduits des spécifications de l'algorithme lui-même. Deux exécutions d'un algorithme déterministe sur des entrées identiques donneront les mêmes sorties.

Un algorithme non déterministe est un algorithme composé des instructions de choix, si le bon choix est effectué, le temps de calcul est polynômial, par contre si on énumère tous les choix possibles, l'algorithme non déterministe se transforme en un algorithme déterministe nécessitant un temps de calcul exponentiel.

Pour évaluer et classer les divers algorithmes disponibles pour un problème de graphe, il faut une sorte de mesure de performance, appelée complexité d'un algorithme.

La théorie de la complexité vise à fournir un cadre formel pour un certain nombre de domaine de recherche, et en particulier pour l'optimisation combinatoire.

La complexité d'un algorithme fait correspondre pour une taille donnée le nombre d'instructions maximum qui lui est nécessaire pour résoudre une instance quelconque dans cette taille.

Un algorithme est dite efficace ou polynômial si le nombre d'instructions élémentaires

$T(n)$, nécessaires pour résoudre un problème de taille n , est borné par un polynôme en n , c'est-à-dire, si $T(n) \leq c.n^k$ (c et k étant des constantes), on dit que $T(n)$ est $O(n^k)$, ou encore un tel algorithme a une complexité de $O(n^k)$ (O est la notation de Landau).

Un problème de décision est un problème posé sous forme d'une question, dont la réponse est soit "oui", soit "non". Par exemple, "Etant donné un graphe G , existe-il un cycle hamiltonien (un cycle qui passe par tous les sommets de G une seule fois)? "

Un des objectifs de la complexité algorithmique est de classer chaque problème de décision suivant son degré de difficulté de résolution, c'est-à-dire selon la complexité du meilleur algorithme permettant de résoudre ce problème.

La *classe P* : est la classe des problèmes de décision (dits faciles) pouvant être résolus en un temps polynômial. Plusieurs problèmes de graphes appartiennent à P , tels: la connexité, le couplage parfait, le plus court chemin, le flot maximum, l'arbre de poids minimum...etc

La *classe NP* (problème non déterministes polynômiaux) regroupe tous les problèmes de décision que l'on peut résoudre à l'aide d'un algorithme non déterministe de complexité polynômiale. Cette classe contient les problèmes classiques de la théorie des graphes par exemple: l'indépendance, la coloration, la domination ... etc

La *classe NP* contient l'ensemble des problèmes où, étant donnée une instance de ce problème, il est possible de déterminer en temps polynômial si celle-ci est une solution pour le problème, il est alors évident que $P \subseteq NP$ car un algorithme polynômial est également un certificat. Une des grandes questions ouvertes à ce jour est : est ce que $P = NP$? En d'autres termes, s'il est toujours facile de vérifier une solution, est-il aussi facile de trouver une solution? Pour la plupart des problèmes de la classe NP , on ne sait pas dire s'ils peuvent ou ne peuvent pas être résolus par un algorithme polynômial.

Plusieurs classes de complexité sont définies à l'aide de réductions, la plus utilisée est la réduction polynômiale.

On dit que P_1 se réduit en temps polynômial à P_2 s'il existe un algorithme pour P_1 qui fait appel comme un sous programme, à un algorithme de résolution de P_2 et si cet algorithme de résolution de P_1 est polynômial lorsque la résolution de P_2 est comptabilisée comme une opération élémentaire.

Un problème de la *classe NP* est dit *NP – complet*, si tout problème dans *NP* peut lui être réduit en temps polynômial. En d’autres termes, s’il existait un algorithme polynômial permettant de résoudre un problème *NP – complet*, alors il existerait un algorithme polynômial pour tous les problèmes de la classe *NP*, et on aurait l’égalité $P = NP$.

Un problème d’optimisation est dit *NP – difficile* (*NP – dur*) si le problème de décision associé est *NP – complet*. Les problèmes *NP – difficiles* sont au moins aussi difficiles que les problèmes *NP – complets*

CHAPITRE 2

ETAT DE L'ART SUR LES NOYAUX DANS LES GRAPHES ORIENTÉS

Le concept du noyau dans les digraphes a connu trois principales généralisations: noyau par des chemins monochromatique dans les digraphes m -coloré, (k, l) -noyau et (k, l) -plus-noyau dans les digraphes.

Ce chapitre est consacré à l'étude théorique sur le noyau dans les digraphes, nous donnerons des définitions et certaines propriétés de chaque concept de noyau et également quelques résultats connus sur ces quatre concepts.

2.1 Noyaux dans les graphes orientés

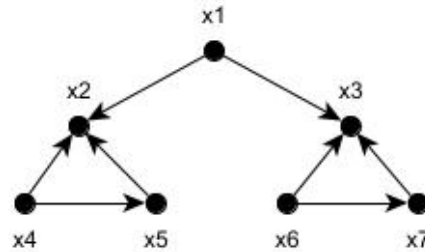
Le concept de noyaux a été introduit pour la première fois par Von Neumann et Morgenstern [5], comme une généralisation du concept de solution pour les jeux coopératifs.

2.1.1 Définitions

Définition 2.1. *Un noyau N d'un digraphe $D = (V, A)$ est un sous-ensemble de sommets indépendant ($A(D[N]) = \emptyset$) tel que tout sommet $z \in V(D) \setminus N$ est absorbé par au moins un sommet de N .*

FIGURE 2.1. Les digraphes C_5 et C_6

La figure 2.1 montre qu'il existe des digraphes sans noyaux, ainsi que des digraphes à plusieurs noyaux par exemple C_5 est sans noyau et C_6 possède deux noyaux $\{x_1, x_3, x_5\}$ et $\{x_2, x_4, x_6\}$.

FIGURE 2.2. Un digraphe avec un unique noyau $\{x_2, x_3\}$

Définition 2.2. *Un digraphe $D = (V, A)$ est dit noyau-parfait si tout sous-digraphe induit de D a un noyau.*

Proposition 2.3. [4] *Si N est un noyau d'un digraphe D , alors N est un indépendant maximal et un absorbant minimal.*

Considérons N un noyau du digraphe D et $a \notin N$ alors $\{a\} \cup N$ ne peut pas être un ensemble indépendant car a est absorbé par N , donc N est un indépendant maximal.

Si $b \in N$, alors $N \setminus \{b\}$ ne peut pas être un ensemble absorbant car il n'absorbe pas b , donc N est absorbant minimal.

Le théorème suivant qui est dû à *Berge* donne une condition nécessaire et suffisante pour qu'un sous ensemble de sommets dans un digraphe soit un noyau.

Théorème 2.4. [4] Une condition nécessaire et suffisante pour qu'un ensemble $N \subset V(D)$

soit un noyau d'un digraphe $D = (V, A)$ est que sa fonction caractéristique φ_N vérifie

$$\forall x \in V, \varphi_N(x) = 1 - \max_{y \in N^+(x)} \varphi_N(y) \text{ avec } \varphi_N(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in N \\ 0 & \text{si } x \notin N \end{cases}$$

si $N^+(x) = \phi$, on posera par convention $\max_{y \in N^+(x)} \varphi_N(y) = 0$

Définition 2.5. Soit un digraphe $D = (V, A)$. Une fonction $g : V \rightarrow \mathbb{N}$ est dite une fonction de Grundy si elle vérifie les deux propriétés suivantes:

1. $g(x) = k > 0$, entraîne que, pour tout $j < k$ il existe un $y \in N^+(x)$ avec $g(y) = j$.
2. $g(x) = k$, entraîne que tout $y \in N^+(x)$ vérifie $g(y) \neq k$.

Ce concept a été introduit pour la première fois par Grundy en 1939 pour les digraphes acycliques (les digraphes sans circuits) comme suit

$$\forall x \in V, g(x) = \min(\mathbb{N} \setminus \{g(y) : y \in N^+(x)\})$$

En outre, Grundy a prouvé que chaque digraphe acyclique a une fonction de Grundy unique. Cependant, il existe des digraphes sans fonction de Grundy, par exemple les circuits impairs.

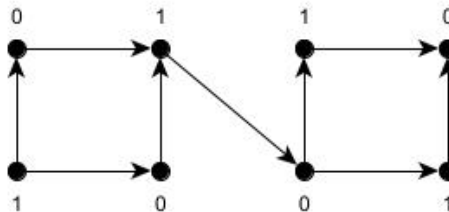


FIGURE 2.3. Un digraphe avec une fonction de Grundy

Proposition 2.6. [4] Si un digraphe D admet une fonction de Grundy g , alors D admet un noyau.

En effet l'ensemble $S = \{x \in V / g(x) = 0\}$ est un noyau de D .

Soit $x \in V$

$$1. x \in S \Rightarrow g(x) = 0 \Rightarrow \min_{y \in N^+(x)} g(y) > 0 \Rightarrow N^+(x) \cap S = \phi.$$

$$2. x \notin S \Rightarrow g(x) > 0 \Rightarrow \min_{y \in N^+(x)} g(y) = 0 \Rightarrow N^+(x) \cap S \neq \phi.$$

Mais la réciproque est fausse, on peut vérifier que le digraphe de la figure 2.4 admet $\{x_1\}$ comme *noyau*, mais il n'admet pas de fonction de Grundy.

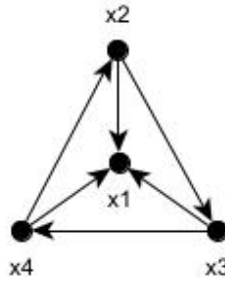


FIGURE 2.4. Un digraphe qui admet un noyau mais qui n'a pas une fonction de Grundy

Théorème 2.7. [4] Si D est un digraphe noyau-parfait alors D admet une fonction de Grundy.

Définition 2.8. Un quasi-noyau S de D est un ensemble de sommets indépendant tel que pour tout $y \in V(D) \setminus S$, il existe un $x \in S$, la distance entre y et x dans D est soit un soit deux.

Théorème 2.9. [13] Chaque graphe orienté a un quasi-noyau.

2.1.2 Quelques sous-classes des digraphes noyau-parfaits

Nous commençons par donner quelques résultats classiques sur l'existence de noyaux dans les digraphes.

Théorème 2.10. [4] *Si D est un digraphe symétrique alors D a un noyau.*

En effet , $N \subseteq V$ est un noyau si et seulement si N est un ensemble indépendant maximal.

Si N est un indépendant maximal il est aussi absorbant car tout arc est symétrique et donc N est noyau. Inversement, si N est un noyau, il est indépendant maximal sinon N ne serait pas absorbant.

Théorème 2.11. [4] *Si D est un digraphe transitif, alors D a un noyau.*

Théorème 2.12. [5] *Un digraphe sans circuits admet un noyau unique.*

Preuve. Tout digraphe sans circuits admet un puits (un puits est un sommet qui est successeur de tous ses voisins), et tout puits doit appartenir au noyau. La démonstration se fait par induction sur la nombre n de sommets. si $n = 1$ l'unique sommet est un puits et donc le seul élément du noyau. Supposons que l'hypothèse de récurrence est vraie pour $n' < n$. Soit s un puits de digraphe D sans circuit et $P(s)$ l'ensemble des prédecesseurs de s . Par hypothèse de récurrence, le digraphe D privé du sommet s et de ceux de $P(s)$ a un noyau unique N . On en déduit que $N \cup \{s\}$ est l'unique noyau de D . \square

Théorème 2.13. [6] *Un digraphe sans circuits impairs est noyau-parfait.*

Preuve. Soit $D = (V, A)$ un digraphe sans circuit, comme la propriété sans circuit impair est héréditaire donc il suffit de montre que D admet un noyau, la preuve se fait par induction sur le nombre des sommets. On considère le digraphe condensé du digraphe D sans circuit impairs. Toute composante fortement connexe admet un noyau. On considère toutes les composantes fortement connexes terminales C_i et leurs noyaux S_i , $i = 1, \dots, k$. Le sous-digraphe engendré par $V \setminus \left\{ \bigcup_{i=1}^k (C_i \cup N^-(S_i)) \right\}$ admet un noyau par hypothèse d'induction qu'on notera S . Le sous-ensemble $S \cup \left(\bigcup_{i=1}^k S_i \right)$ est un noyau du digraphe D . \square

Corollaire 2.14. *Un digraphe symétrique admet une fonction de Grundy.*

Un digraphe transitif admet une fonction de Grundy.

Un digraphe sans circuits admet une fonction de Grundy.

Un digraphe sans circuit impairs admet une fonction de Grundy.

Théorème 2.15. [12] *Tout digraphe biparti admet un noyau.*

Théorème 2.16. [7] *Un digraphe tel que tout circuit a au moins un arc symétrique est un digraphe noyau-parfait.*

Théorème 2.17. [7] *Un digraphe tel que tout circuit impair possède deux arcs symétriques est noyau-parfait.*

Définition 2.18. *Une corde d'un circuit est un arc de digraphe mais non du circuit et dont les extrémités sont des sommets du circuit.*

Une corde (x_i, x_j) d'un circuit $x_0x_1\dots x_{k-1}x_kx_0$ est dite courte si $j = i + 2$ ou $i = k$ et $j = 1$.

Théorème 2.19. [11] *Un digraphe tel que tout circuit impair a deux cordes courtes croisées (c'est à dire de la forme (v_i, v_{i+2}) et (v_{i+1}, v_{i+3})) est noyau-parfait.*

Définition 2.20. *Un pôle est l'extrémité terminale d'une corde.*

Théorème 2.21. [10] *Un digraphe tel que tout circuit impair possède deux pôles consécutifs est noyau-parfait.*

Définition 2.22. *Un digraphe est de parité si et seulement si pour tout couple de sommets distincts, les chemins reliant ce couple de sommets ont la même parité.*

Théorème 2.23. [9] *Un digraphe de parité est noyau-parfait.*

2.1.3 Etude algorithmique de la recherche d'un noyau dans certaines classes de digraphes noyau-parfaits

Le problème de recherche d'un noyau dans un digraphe est en général un problème *NP-complet*.

Néanmoins, des algorithmes polynomiaux ont été proposés pour ce problème dans certaines classes de digraphes noyau-parfaits.

Z.Zemir [14] a fourni un algorithme polynomial pour la recherche d'un noyau dans un digraphe $D = (V, A)$ sans circuits, de complexité $O(|V|^2)$ et un autre dans un digraphe

$D = (V, A)$ sans circuits impairs de complexité $O(|A| \cdot |V|^2)$. Dans le même manuscrit, un algorithme en au plus $(|V|^4 + |V|)$ opérations a été donné pour la recherche d'un noyau dans un graphe triangulé (tout cycle de longueur > 3 admet une corde) muni d'une orientation normale (toute clique possède un puit).

M. Abbas, Y. Saula [15] ont élaboré trois algorithmes polynomiaux pour la recherche d'un noyau dans un graphe $G = (V, E)$ muni d'une orientation: le premier est de complexité $O(|E| \cdot |V|^2)$ si G est un graphe de comparabilité (ses arêtes peuvent être orientés transitivement et sans circuits) relativement à M-orientation (tout circuit de longueur trois possède deux arcs symétriques), le deuxième est aussi de complexité $O(|E| \cdot |V|^2)$ pour un graphe de permutation (si $V = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ il existe une permutation P des entiers $1, 2, \dots, n$ telle que v_i est adjacent à v_j dans G si et seulement si $\frac{p(i)-p(j)}{i-j} < 0$) muni d'une orientation normale et le troisième dont la complexité $O(|E| \cdot |V|)$ lorsque G est un graphe sans P_4 (G ne possède pas un sous-graphe avec 4 sommets a, b, c, d et les arêtes ab, bc, cd) muni d'une orientation normale.

D. Zerrouki, I. Hadj sadok [28] ont donné deux algorithmes polynomiaux pour la recherche d'un noyau dans un digraphe tel que tout circuit possède un arc symétrique, de complexité $O(n^2)$, le deuxième dans un digraphe tel que tout circuit impair possède deux arcs symétriques, de complexité $O(m + n)$.

2.2 Noyaux par chemins monochromatiques dans un digraphe m-coloré

Le concept de noyau par chemins monochromatiques est une généralisation du concept de noyau introduit la première fois par Sands, Sauer et Woordow [16].

2.2.1 Définitions

Un digraphe $D = (V, A)$ est dit m -coloré si ses arcs sont colorés avec m couleurs.

Un chemin dans un digraphe m -coloré est dit *monochromatique* si ses arcs ont la même couleur.

Un circuit dans un digraphe m -coloré est dit *quasi-monochromatique* si tous ses arcs sont colorés avec la même couleur sauf peut être au plus un.

On note par C_3 le circuit de longueur trois, dont les arcs sont colorés avec trois couleurs distinctes, aussi on note par T_3 le tournoi transitif dont les arcs sont colorés différemment.

Un noyau par chemins monochromatiques dans un digraphe m -coloré $D = (V, A)$ est un sous-ensemble $N \subseteq V$ qui satisfait aux conditions suivantes :

1. $\forall x, y \in N$, il n'existe pas dans D un chemin monochromatique reliant x et y .
2. $\forall x \in V \setminus N$, il existe dans D un chemin monochromatique de x vers un sommet de N .

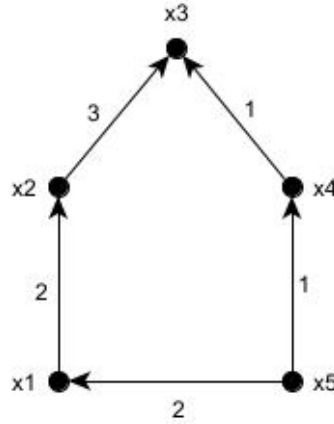


FIGURE 2.5. Un digraphe 3-coloré avec un noyau $\{x_1, x_3\}$

On appelle fermeture par chemins monochromatiques d'un digraphe m -coloré $D = (V, A)$, le digraphe m -coloré noté $C(D)$ où l'ensemble des sommets $V(C(D)) = V$ et l'ensemble des arcs

$$A(C(D)) = A \bigcup_{i=1}^m \left\{ \begin{array}{l} uv \text{ coloré avec la couleur } i / \text{ il existe dans } D, \text{ un chemin} \\ \text{monochromatique de couleur } i \text{ reliant les sommets } u \text{ et } v \end{array} \right\}$$

Notons que pour tout digraphe D :

1. $C(C(D))$ et $C(D)$ sont isomorphes.
2. N est un noyau par chemins monochromatique de D si et seulement si N est un noyau de $C(D)$.

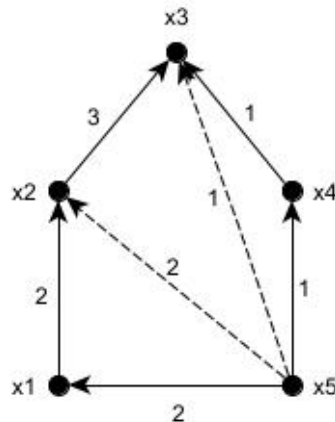


FIGURE 2.6. La fermeture par chemins monochromatiques pour le digraphe de la Figure 2.5

2.2.2 Quelques résultats

L'existence d'un noyau par chemins monochromatique dans un digraphe m -coloré a été étudiée par plusieurs auteurs suivant les valeurs de m .

Pour $m = 1$ c'est à dire si un digraphe D dont les arcs sont colorés avec la même couleur alors la fermeture par chemins monochromatiques $C(D)$ est un digraphe transitif qui admet un noyau donc D a un noyau par chemins monochromatiques.

Pour $m = 2$ Sands, Sauer et Wooldrow ont prouvé dans [16] le théorème suivant:

Théorème 2.24. [16] *Tout digraphe 2-coloré a un noyau par chemins monochromatiques.*

Corollaire 2.25. [16] *Si T est un tournoi dont les arcs sont colorés avec 2 couleurs alors il existe un sommet v de T tel que pour tout sommet x autre que v de T , il existe un chemin monochromatique de x vers v .*

Preuve. On montre que la fermeture par chemins monochromatiques $C(T)$ est tel que "tout circuit possède un arc symétrique". Soit un circuit C de $C(T)$ de longueur la plus petite, il est clair que tous ses arcs sont dans T (sinon on aura des arcs symétriques dans C), donc au fait un circuit de T , soient x, y et z trois sommets successifs de C avec (x, y) coloré par 1 et (y, z) coloré par 2 sans perte de généralité, comme T est un tournoi les sommets x et z sont forcement reliés. Si l'arc (z, x) est un arc de T alors soit il est coloré par 1 ou bien par 2, dans les deux cas on aura ou bien (x, y) ou (y, z) est un arc symétrique de $C(T)$, sinon on aura une contradiction avec le fait qu'on a pris un circuit de longueur la plus petite. \square

Dans le même article, Sands, Sauer et Woodrow ont posé le problème suivant:

Soit T un tournoi m -coloré tel que tout circuit de longueur 3 est quasi-monochromatique (T ne contient pas C_3), est-il vrai que T contient un sommet v tel que pour tout sommet x de T autre que v , il existe un chemin monochromatique de x à v ?

Ce problème reste ouvert pour $m = 3$.

Pour $m = 4$ (Si T est un tournoi 4-coloré tel que tout circuit de longueur 3 est quasi-monochromatique alors T a un noyau par chemins monochromatiques) ce problème a été résolu par H. Galeana-Sánchez et R. Rojas-Monroy [19] en fournissant le contre exemple suivant:

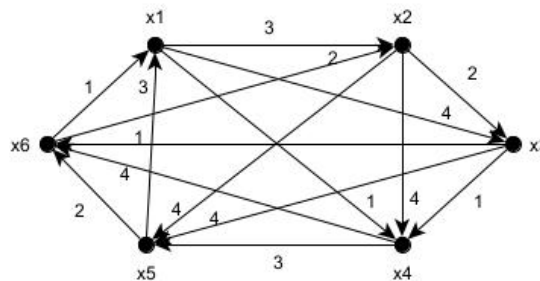


FIGURE 2.7. Le tournoi G_6

Le tournoi G_6 de la figure 2.7 est un tournoi 4-coloré d'ordre 6 tel que tout 3-circuit est quasi-monochromatique, mais il n'admet pas un noyau par chemins monochromatiques.

Shen Minggan a montré aussi dans [17] , que le digraphe G_5 de la figure suivante est un tournoi 5-coloré tel que tout circuit de longueur 3 est quasi-monochromatique , mais il n'a pas de noyau par chemins monochromatiques.

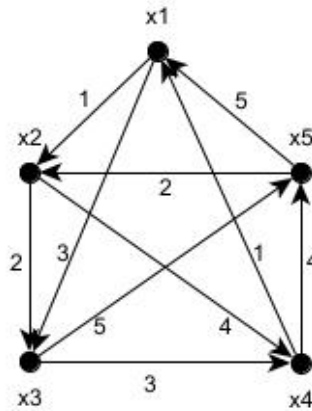


FIGURE 2.8. Le digraphe G_5

Théorème 2.26. [17] *Si T est un tournoi m -coloré tel que tout circuit de longueur 3 est quasi-monochromatique et tout tournoi transitif d'ordre 3 est quasi-monochromatique, alors T a un noyau par chemins monochromatiques.*

Dans ce qu'il suit, on va présenter quelques conditions suffisantes données par H. Galeana-Sánchez pour qu'un tournoi m -coloré admette un noyau par chemins monochromatiques.

Théorème 2.27. [18] *Si T est un tournoi m -coloré tel que tout circuit de longueur au plus 4 est quasi-monochromatique, alors $C(T)$ est noyau-parfait et donc T admet un noyau par chemins monochromatiques.*

Théorème 2.28. [18] *Si T est un tournoi m -coloré tel que tout circuit de longueur 3 est monochromatique, alors T admet un noyau par chemins monochromatiques .*

Preuve. On utilise le théorème précédent de H. Galeana-Sánchez << Si T est un tournoi m -coloré tel que tout circuit de longueur au plus 4 est quasi-monochromatique alors T

admet un noyau par chemins monochromatiques \gg . En effet il siffit de montrer que les circuits de longueur 4 sont quasi-monochromatiques, car les circuits de longueur 3 sont monochromatiques donc quasi-monochromatiques.

Soit $C = (x_1, x_2, x_3, x_4, x_1)$ un circuit de longueur 4 de T , si tous les arcs de C sont colorés avec la même couleur alors c'est fini (monochromatique donc quasi-monochromatique) donc forcément ils existent deux arcs consécutifs (x_1, x_2) et (x_2, x_3) colorés avec deux couleurs distinctes sans perte de généralité disons 1 et 2. L'arc (x_3, x_1) n'existe pas (sinon (x_1, x_2, x_3, x_1) est un circuit de longueur 3 qui n'est pas monochromatique), donc (x_1, x_3) est un arc de T . Les arcs (x_3, x_4) et (x_4, x_1) sont colorés avec la même couleur l (sinon on obtient un circuit (x_1, x_3, x_4, x_1) de longueur 3 qui n'est pas monochromatique). La couleur l est forcément 1 ou 2 (sinon on aura un circuit de longueur 3 qui est ou bien (x_2, x_3, x_4, x_2) ou bien (x_1, x_2, x_4, x_1) qui n'est pas monochromatique). Donc les arcs (x_3, x_4) et (x_4, x_1) sont colorés avec 1 ou 2 et dans les deux cas on aura un circuit de longueur 4 $(x_1, x_2, x_3, x_4, x_1)$ quasi-monochromatique donc T est tel que tout circuit de longueur au plus 4 est quasi-monochromatique et d'après le théorème précédent T admet un sommet noyau par chemins monochromatiques. \square

Zerrouki et Hadj sadok on démontré les résultats suivants:

Théorème 2.29. [28] Si D est un digraphe m -coloré sans circuit, alors sa fermeture par chemins monochromatiques est sans circuit. En outre, D admet un noyau par chemins monochromatiques unique qui est le noyau de $C(D)$.

Théorème 2.30. [28] Si D est un digraphe transitif m -coloré, alors sa fermeture par chemins monochromatiques est D , et le noyau par chemins monochromatiques est exactement le noyau de D .

Observation 2.31. [28] Si D est un digraphe m -coloré sans circuit impair, alors il n'est pas vrai que sa fermeture par chemins monochromatiques $C(D)$ est sans circuit impair.

La figure 2.9 représente le digraphe C_6 3-coloré sans circuit impair, l'arc (x_3, x_5) est un arc de $A(C(D))$, il est clair que $C(D)$ possède un circuit impair. Ce qui justifie la remarque précédente.

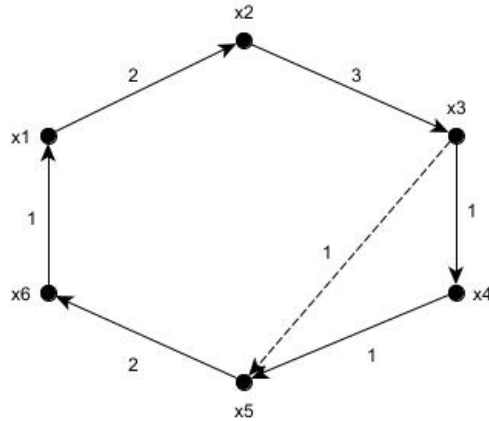


FIGURE 2.9. digraphe 3-coloré d'ordre 6

Observation 2.32. [28] *Si D est un digraphe m -coloré symétrique, alors il n'est pas en général qu'il admet un noyau par chemins monochromatiques.*

Zerrouki et Hadj sadok ont fourni l'exemple suivant qui confirme l'Observation 2.32

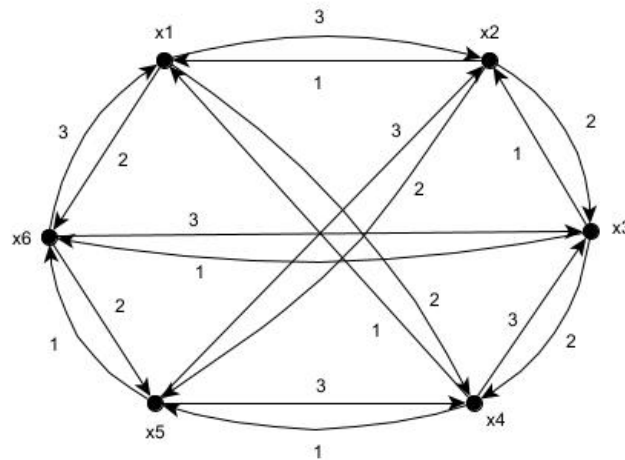


FIGURE 2.10. digraphe symétrique 3-coloré

Définition 2.33. *Un arbre est un graphe connexe et sans cycle. Un arbre orienté est un arbre où les arêtes sont munies d'une orientation avec la possibilité d'avoir des arcs symétriques.*

Théorème 2.34. [28] *Si T est un arbre orienté m -coloré (les arcs symétriques sont permis), alors T admet un noyau par chemins monochromatiques.*

Théorème 2.35. [28] *Si C est un cycle pair orienté m -coloré sans arcs symétriques, alors C admet un noyau par chemins monochromatiques.*

Ramoul.A [29] a élaboré un algorithme polynômial de la recherche d'un noyau par chemins monochromatiques dans un tournoi m – coloré de complexité $O(n^8)$ et Zerrouki.Hadj sadok [28] ont fourni un autre algorithme polynomial de complexité $O(n^8)$ qui détermine un noyau par chemins monochromatiques dans un graphe orienté m – coloré sans circuits.

2.3 (k, l) – Noyaux dans un digraphe

Un concept plus général que celui de noyau dans les digraphes est le (k, l) – noyau dans les digraphes avec $k \geq 2$ et $l \geq 1$ qui été introduit par M. Kwásnik [20].

Soit $D = (V, A)$ un digraphe. Soient k, l deux entiers naturels tels que $k \geq 2$ et $l \geq 1$. Un ensemble $N \subseteq V$ est dit un (k, l) – noyau d'un digraphe D si

1. $\forall x, x' \in N, x \neq x'$ on a $d_D(x, x') \geq k$.
2. $\forall y \in (V \setminus N), \exists x \in N$ tel que $d_D(y, x) \leq l$.

Un k – noyau est un $(k, k - 1)$ – noyau.

Pour $k = 2$ et $l = 1$, un (k, l) – noyau est un noyau au sens de Berge [4]

Pour $k = 2$ et $l = 2$, un (k, l) – noyau est un quasi-noyau.

Un digraphe tel que tout sous digraphe admet un (k, l) – noyau ($k \geq 2, l \geq 1$) est dit un (k, l) – noyau-parfait.

Le digraphe de la Figure 2.11 admet $\{x_2, x_5\}$ comme un $(3, 2)$ –noyau et $\{x_1, x_3, x_5\}$ comme un $(2, 1)$ –noyau.

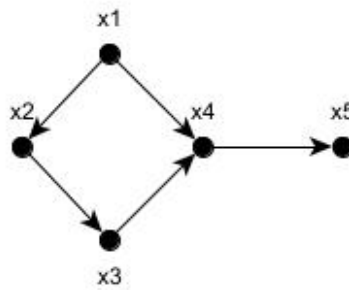


FIGURE 2.11. un digraphe qui admet deux (k, l) –noyaux

2.3.1 Quelques résultats

Quelques résultats connus sur l'existence de (k, l) –noyau dans les digraphes.

Théorème 2.36. [21] *Tout digraphe a un $(k, 2k - 2)$ –noyau. (c'est une généralisation de la notion de quasi-noyau).*

Preuve. La preuve se fait par induction sur le nombre n de sommets. Pour un digraphe D avec $n = 1$ c'est évident. Supposons que si D' est un digraphe d'ordre $n' < n$ alors D' a un $(k, 2k - 2)$ –noyau. Soit $x_0 \in V(D)$ et $D^* = D[V(D) \setminus \{x \in V(D) \mid d_D(x, x_0) \leq k - 1\}]$ ■

Il est clair que $|V(D^*)| < n$, et donc D^* a un $(k, 2k - 2)$ –noyau noté S^* . Considérons les deux possibilités suivantes :

S'il existe un chemin dans D de longueur inférieure ou égale à $k - 1$ alors S^* est un $(k, 2k - 2)$ –noyau de D .

S'il n'existe pas un chemin dans D de x_0 vers un sommet de S^* de longueur inférieure ou égale à $k - 1$ alors $S^* \cup \{x_0\}$ est un $(k, 2k - 1)$ –noyau de D . □

Corollaire 2.37. [21] *Tout digraphe a un (k, l) –noyau pour $l \geq 2k - 2$.*

Puisque un (k, l) –noyau d'un digraphe D est aussi un (k, l') –noyau pour tout $l' \geq l$.

Corollaire 2.38. [21] *Tout digraphe possède un quasi-noyau.*

La preuve est une conséquence directe du Théorème 2.36 en prenant $k = 2$.

Définition 2.39. Soit $D = (V, A)$ un digraphe. On appelle puissance p -ième de D le digraphe, noté D^p , qui a le même ensemble que D . Deux sommets x et y sont reliés par un arc (x, y) dans D^p s'il existe dans D un chemin de x à y de longueur $\leq p$.

Théorème 2.40. [22] Si N est un (k, l) -noyau d'un digraphe D , pour $k \geq 3$ et $l \leq k-1$, alors N est un $(2, 1)$ -noyau de D^{k-1} . (c'est -à-dire un noyau)

Théorème 2.41. [22] N est un $(k, k-1)$ -noyau d'un digraphe D si et seulement si N est un $(2, 2-i)$ -noyau de D^{k-1} , pour $k \geq 3$ et $i = 0, 1$.

Théorème 2.42. [23] Un digraphe sans circuits a un $(k, k-1)$ -noyau, pour $k \geq 2$.

Preuve. Pour $k = 2$, un digraphe sans circuits a un noyau (d'après Théorème 2.12) qui est un $(2, 2-1)$ -noyau. Soit $k \geq 3$ et supposons qu'un digraphe D satisfait les conditions de ce théorème. Considérons le digraphe D^{k-1} . A partir de la définition de digraphe D^{k-1} ce dernier n'a pas de circuits, en appliquant le Théorème 2.12 D^{k-1} possède un noyau. En utilisant le Théorème 2.42, on a un noyau de D^{k-1} est simultanément un $(k, k-1)$ -noyau de digraphe D . \square

Théorème 2.43. [24] Soit un digraphe D tel que $ASY(D)$ est fortement connexe. En plus, on suppose que pour tout circuit C de longueur $\neq 0 \pmod{k}$ ou bien (a) ou bien (b) est satisfait

- (a) Tout arc de C est un arc symétrique de D
- (b) C a au moins k arcs symétriques

alors le digraphe D a un $(k, k-1)$ -noyau.

Théorème 2.44. [30] Soit un digraphe D fortement connexe tel que tout circuit de D est de longueur $= 0 \pmod{k}$, $k \geq 2$ alors D a un k -noyau.

Théorème 2.45. [30] Si un digraphe D fortement connexe a au plus un circuit C de longueur $\neq 0 \pmod{k}$ de la forme $C = x_1, x_2, \dots, x_{nk+r}, x_1$, $n \geq 1$, $k \geq 2$, $0 < r < k$ ayant $r+1$ cordes de type (x_i, x_{i+r+1}) , (x_{i+1}, x_{i+r+2}) , \dots , (x_{i+r}, x_{i+2r+1}) , pour un i fixé $1 \leq i \leq nk+r$, alors le digraphe D a un $(k, k-1)$ -noyau.

Observation 2.46. *La figure 2.12 montre qu'un digraphe sans circuits peut ne pas posséder un k -noyau ($k \geq 2$). En effet le digraphe de cette figure n'admet pas un 3 - noyau.*

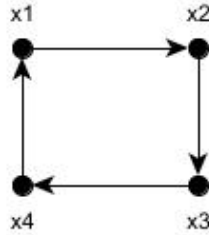


FIGURE 2.12. Un digraphe sans circuits impairs

Théorème 2.47. [24] *Soit P_m un chemin d'ordre $m = nk + r$, $n \geq 1$ et $0 \leq r < m$ est un entier. Alors P_m a un (k, l) - noyau si et seulement si $k \leq l + 1$.*

Théorème 2.48. [24] *Soit C_m un circuit avec $m = nk + r$, $n \geq 1$ et $0 \leq r < m$ est un entier. Alors C_m a un (k, l) - noyau si et seulement si $k \leq l + 1$ et $r \leq n(l - k + 1)$.*

C. Ballbuena, H. Galeana-Sánchez et Muncuy-kak Guevara ont proposé dans [25] une généralisation de la fonction de Grundy appelée fonction (k, l) - Grundy. Pour celà, ils ont introduit une notation pour les successeurs à distance r d'un sommet $x \in V$

$$N_r^+(x) = \{y \in V / 1 \leq d(x, y) \leq r\}$$

Définition 2.49. *Considérons un digraphe $D = (V, A)$ et soit $l \geq 1$ et $k \geq 2$ deux entiers.*

Une fonction $g : V \rightarrow \mathbb{N}$ est dite une fonction de (k, l) - Grundy si elle vérifie les deux propriétés suivantes :

1. $g(x) = t > 0$, entraîne que, pour tout $j < t$ il existe un $y \in N_l^+(x)$ avec $g(y) = j$.
2. $g(x) = t$, entraîne que tout $y \in N_{k-1}^+(x)$ vérifie $g(y) \neq t$.

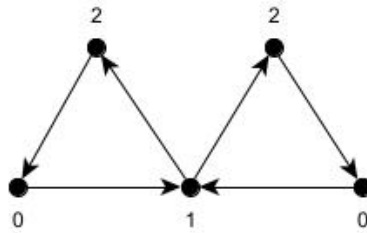


FIGURE 2.13. Un digraphe qui admet une fonction $(3, 2)$ – *Grundy*

Observation 2.50. [25] Si un digraphe D a une fonction (k, l) – *Grundy* g , alors $S = \{x \in V / g(x) = 0\}$ est un (k, l) – noyau de D .

2.4 (k, l) -plus-noyau dans les digraphes

La troisième généralisation du noyau, introduite par A.Ramoul, M.Blidia [27], est (k, l) -plus-noyau dans les digraphes.

2.4.1 Définitions

Un sous-ensemble N est un (k, l) -plus-noyau d'un digraphe $D = (V, A)$ si et seulement si N est un ensemble k -indépendant et l -plus-dominant de D (i.e $\Delta^+(N) \leq k - 1$ et $\forall u \in V \setminus N, |N_N^+(u)| \geq l$) avec k, l deux entiers $k \geq 1$ et $l \geq 1$.

Un digraphe tel que tout sous-digraphe induit a un (k, l) -plus-noyau est appelé (k, l) -plus-noyau parfait.

Un k -plus-noyau est un (k, k) -plus-noyau. Un noyau est 1-plus-noyau ou $(1, 1)$ -plus-noyau.

Il est clair que dans un digraphe D , si $k > \Delta^+(D)$ alors V est un (k, l) -plus-noyau de D . Donc, on peut supposer que $k \leq \Delta^+(D)$.

Le digraphe de la figure 2.14 admet $\{x_1, x_2, x_3\}$ comme $(2, 3)$ -plus-noyau.

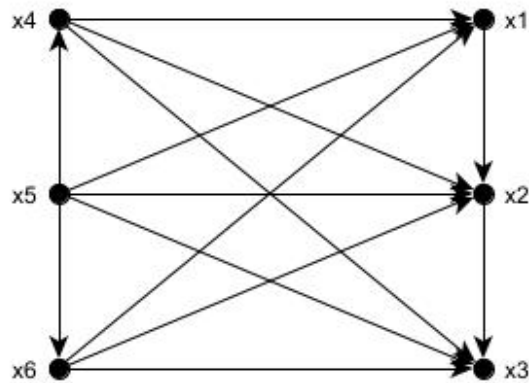


FIGURE 2.14. Un digraphe qui admet un $(2, 3)$ – plus – noyau

Observation 2.51. Soit D un digraphe et k, l deux entiers positifs tel que $l > \Delta^+(D)$. Alors D a un (k, l) -plus-noyau si et seulement si $k > \Delta^+(D)$.

Dans la suite on suppose que $l \leq \Delta^+(D)$ et $k \leq \Delta^+(D)$.

Observation 2.52. Soit D un digraphe et k, l deux entiers positifs tels que $1 \leq l \leq k \leq \Delta^+(D)$. Si D admet un (k, l) -plus-noyau, alors pour tout l' tel que $l' \leq l$ et tout k' tel que $k \leq k' \leq \Delta^+(D)$, D admet un (k', l') -plus-noyau.

Notons qu'un ensemble (k, l) -plus-noyau de D est aussi un ensemble $(\Delta^+(D), 1)$ -plus-noyau de D .

Lorsqu'une propriété P relative à l'orientation du graphe non orienté associé à D (par exemple: un digraphe avec une orientation transitive, un digraphe orienté sans circuits etc...) est aussi satisfaite partout sous-digraphe de D , on dit que la propriété est héréditaire dans D .

Observation 2.53. Soit D un digraphe avec une propriété héréditaire et k, l deux entiers positifs tels que $1 \leq l \leq k \leq \Delta^+(D)$. D est (k, l) -plus-noyau parfait si et seulement si D a un ensemble (k, l) -plus-noyau.

Puisque un digraphe $(n - 1)/2$ -régulier dont l'ordre est impair n'a pas un $(n - 1)/2$ – plus-noyau, la question qui se pose: quels sont les digraphes qui ont un (k, l) – plus-noyau?

2.4.2 Digraphes symétriques et digraphes transitifs:

Théorème 2.54. [26] *Pour tout graphe G et k un entier positif $k \leq \Delta$, tout ensemble S qui est k -indépendant tel que $\varphi_k(S) = k|S| - |E(G[S])|$ est maximum, est un ensemble k -dominant de G .*

Théorème 2.55. [27] *Si D est un digraphe symétrique et k, l deux entiers positifs tels que $1 \leq l \leq k \leq \Delta^+(D)$, alors D est (k, l) -plus-noyau parfait*

Preuve. Soit D un digraphe symétrique. Considérons $UG(D)$ le graphe non orienté associé à D . D'après le Théorème 2.54, il existe un sous-ensemble S qui est k -indépendant et k -dominant (voir Figure 2.15). Puisque tous les arcs de D sont symétriques, S est k -indépendant et k -plus-dominant dans D . Par conséquent S est un (k, k) -plus-noyau de D . D'après l'Observation 2.52, S est aussi un (k, l) -plus-noyau de D , pour $1 \leq l \leq k \leq \Delta^+(D)$. Comme la propriété de la symétrie est héréditaire pour les sous-digraphes de D , et d'après l'Observation 2.53, D est (k, l) -plus-noyau parfait. \square

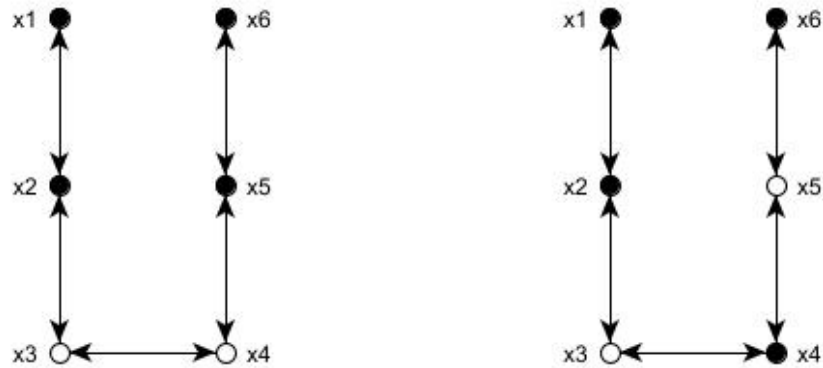


FIGURE 2.15. Un digraphe symétrique D tel que $UG(D) = P_6$

La Figure 2.15 montre un digraphe D avec deux ensembles 2-indépendants maximaux dans $UG(D) = P_6$, le premier (a) (les sommets noirs) n'est pas un 2-plus-noyau dans D et le deuxième (b) (les sommets noirs) est un 2-plus-noyau et $(2, 1)$ -plus-noyau dans D .

Corollaire 2.56. [27] *Si $D = (V, A)$ est un digraphe symétrique complet et k, l deux*

entiers positifs inférieurs ou égaux à $\Delta^+(D)$, alors D est (k, l) -plus-noyau parfait si et seulement si $l \leq k$.

Théorème 2.57. [27] Si D est un digraphe transitif et k, l deux entiers positifs tels que $1 \leq l \leq k \leq \Delta^+(D)$, alors D est (k, l) -plus-noyau parfait.

Preuve. Soit D un digraphe transitif et k, l deux entiers positifs tels que $1 \leq l \leq k \leq \Delta^+(D)$. Puisque la propriété de transitivité est héréditaire pour les sous-digraphes induits de D , d'après l'Observation 2.52 et l'observation 2.53, il suffit de prouver que D a un k -plus-noyau. La preuve se fait par induction sur le nombre de sommets. Le théorème est trivial pour les digraphes de petit ordre. Si le nombre de sommets de $D = (V, A)$ est inférieur ou égal à k , alors $\Delta^+(D) < k$, donc V est un k -plus-noyau. Ainsi, on peut supposer sans perte de généralité que $|V| = n \geq k + 1$ et pour tout sous-digraphe D' de D dont l'ordre $n' < n$, D' admet un k -plus-noyau. Considérons la condensation $SC(D)$ du digraphe D .

C'est clair que $SC(D)$ est un digraphe acyclique et chaque composante fortement connexe de D est complète et symétrique. Soit C_I la composante initiale de D (une composante fortement connexe avec $d_{SC(D)}^-(v(C_I)) = 0$). Soit D' le subdigraphe induit obtenu de D en supprimant tous les sommets de C_I . Puisque D' est un sous-digraphe transitif et contient moins de n sommets, D' possède un k -plus-noyau S' . Maintenant nous construisons le sous-ensemble k -plus-noyau de D comme suit.

S'il existe un sommets x de C_I tel que $d_{S'}^+(x) = |N_D^+(x) \cap S'| \geq k$, alors S' est un k -plus-noyau de D car tous les sommets y de C_I satisfont $d_{S'}^+(y) = d_{S'}^+(x) = |N_D^+(y) \cap S'| \geq k$, puisque D est transitif. S'il n'y a pas de sommets x tel que $d_{S'}^+(x) = |N_D^+(x) \cap S'| \geq k$, soit $S = S' \cup S''$ tel que S est un ensemble k -indépendant maximal dans D et $S'' \subseteq V(C_I)$. Il est facile de voir que S est un k -plus-noyau de D car chaque sommet de $V(C_I) \setminus S''$ a un degré d'au moins k dans S . Comme D est transitif, tous les sommets de $V(C_I) \setminus S''$ ont le même degré dans S (dans D). Donc D admet un k -plus-noyau. \square

2.4.3 Digraphes sans circuits et digraphes sans circuits impairs

Théorème 2.58. [27] *Si D un digraphe sans circuits et k, l deux entiers positifs tels que $1 \leq l \leq k \leq \Delta^+(D)$, alors D est (k, l) -plus-noyau parfait.*

Preuve. Soit D un digraphe sans circuit et k, l deux entiers positifs tels que $1 \leq l \leq k \leq \Delta^+(D)$. Puisque la propriété 'sans circuit' est héréditaire pour le sous-digraphe de D , d'après l'Observation 2.52 et l'Observation 2.53, il suffit de prouver que D a un k -plus-noyau. La preuve se fait par induction sur le nombre de sommets. Le théorème est trivial pour les digraphes de petit ordre. Si $D = (V, A)$ est d'ordre inférieur ou égal à k , alors $\Delta^+(D) < k$, donc V est un k -plus-noyau. Ainsi, on peut supposer sans perte de généralité que $|V| = n \geq k + 1$ et pour tout sous-digraphe D' de D avec l'ordre $n' < n$ D' admet un k -plus-noyau. Soit x un sommet source, c'est à dire $N_D^-(x) = \emptyset$. Comme D est sans circuits, un tel sommet existe et D n'a pas d'arc symétrique. Soit D' le sous-digraphe induit obtenu à partir de D en supprimant x . Puisque D' est sans circuits et contient moins de n sommets, D' possède un k -plus-noyau S' . On distingue deux cas:

1^{er} cas : $|N_D^+(x) \cap S'| \geq k$. Alors S' est un k -plus-noyau de D car x a au moins k successeurs dans S' .

2^{ème} cas : $|N_D^+(x) \cap S'| < k$. Comme $N_D^-(x) = \emptyset$, $S' \cup \{x\}$ est un ensemble k -indépendant et un ensemble k -plus-dominant. Donc, $S' \cup \{x\}$ est un k -plus-noyau de D .

Par conséquent, dans tous les cas D a un k -plus-noyau. □

Proposition 2.59. [27] *Si D est un digraphe complet et k, l deux entiers positifs tels que $1 \leq l \leq k \leq \Delta^+(D)$, alors D est (k, l) -plus-noyau parfait si et seulement si tout circuit dans D a un arc symétrique.*

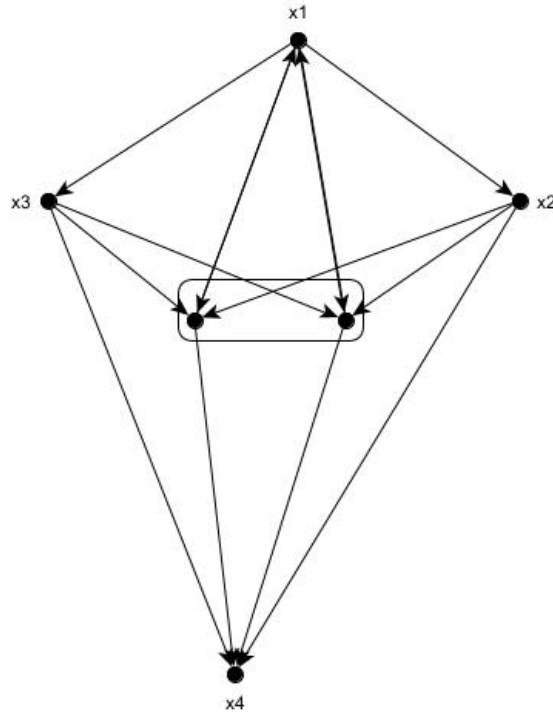


FIGURE 2.16. Un digraphe tel que chaque circuit a un arc symétrique

Proposition 2.60. [27] *Pour tout $k \geq 2$, il existe un digraphe dont chaque circuit a un arc symétrique et qui n'a pas un k -plus-noyau. (Voir figure 2.16)*

Théorème 2.61. [27] *Si $DB = (X, Y, A)$ est un digraphe biparti et k, l deux entiers positifs tel que $1 \leq l \leq k \leq \Delta^+(D)$, alors DB est (k, l) -plus-noyau parfait.*

Preuve. Puisque la propriété d'orientation bipartite est héréditaire pour les sous-digraphes induits de DB , d'après l'Observation 2.52 et l'Observation 2.53, il suffit de prouver que DB a un k -plus-noyau. Soit $DB = (X, Y, A)$ un digraphe biparti. Nous définissons les sous-ensembles

$$X_1(0), X_2(0), X_1(1), X_2(1), \dots, X_1(m), X_2(m) \text{ de } X$$

et les sous-ensembles

$$Y_1(0), Y_2(0), Y_1(1), Y_2(1), \dots, Y_1(m), Y_2(m) \text{ de } Y$$

comme suit

$$\begin{aligned}
X_1(0) &= \{x \in X \mid d_Y^+(x) < k\} \\
Y_1(0) &= \{y \in Y \mid d_X^+(y) < k\} \\
X_2(0) &= \left\{x \in X \setminus X_1(0) \mid d_{Y_1(0)}^+(x) \geq k\right\} \\
Y_2(0) &= \left\{y \in Y \setminus Y_1(0) \mid d_{X_1(0)}^+(y) \geq k\right\} \\
X_1(1) &= \left\{x \in X \setminus (X_1(0) \cup X_2(0)) \mid d_{Y \setminus Y_2(0)}^+(x) < k\right\} \\
Y_1(1) &= \left\{y \in Y \setminus (Y_1(0) \cup Y_2(0)) \mid d_{X \setminus X_2(0)}^+(y) < k\right\} \\
X_2(1) &= \left\{x \in X \setminus (X_1(0) \cup X_2(0) \cup X_1(1)) \mid d_{Y_1(0) \cup Y_1(1)}^+(x) \geq k\right\} \\
Y_2(1) &= \left\{y \in Y \setminus (Y_1(0) \cup Y_2(0) \cup Y_1(1)) \mid d_{X_1(0) \cup X_1(1)}^+(y) \geq k\right\} \\
&\cdot \\
&\cdot \\
X_1(m) &= \left\{x \in X \setminus \bigcup_{i=0}^{m-1} (X_1(i) \cup X_2(i)) \mid d_{Y \setminus \bigcup_{i=0}^{m-1} Y_2(i)}^+(x) < k\right\} \\
Y_1(m) &= \left\{y \in Y \setminus \bigcup_{i=0}^{m-1} (Y_1(i) \cup Y_2(i)) \mid d_{X \setminus \bigcup_{j=0}^{m-1} X_2(j)}^+(y) < k\right\} \\
X_2(m) &= \left\{x \in X \setminus \bigcup_{i=0}^{m-1} (X_1(i) \cup X_2(i) \cup X_1(i+1)) \mid d_{\bigcup_{i=0}^{m-1} Y_1(i)}^+(x) \geq k\right\} \\
Y_2(m) &= \left\{y \in Y \setminus \bigcup_{i=0}^{m-1} (Y_1(i) \cup Y_2(i) \cup Y_1(i+1)) \mid d_{\bigcup_{i=0}^{m-1} X_1(i)}^+(y) \geq k\right\}
\end{aligned}$$

Nous continuons cette procédure jusqu'à ce que nous terminons tous les sommets de DB . Soit r le plus petit entier tel que $X_1(r+1) = X_2(r+1) = \phi$ et soit p le plus petit entier tel que $Y_1(p+1) = Y_2(p+1) = \phi$. par la construction ci-dessus nous pouvons voir facilement que le sous-ensemble $S = \left(\bigcup_{i=0}^r X_1(i)\right) \cup \left(\bigcup_{j=0}^p Y_1(j)\right)$ est un k -plus-noyau de DB . En effet, puisque DB est un digraphe biparti les seuls arcs sont entre $X_1(i)$ et $Y_1(j)$ où $i = 0, \dots, r$ et $j = 0, \dots, p$. Montrons que S est k -indépendant: soit $x \in S$. Si $x \in \bigcup_{i=0}^r X_1(i)$, alors il existe $l \in \{0, 1, \dots, r\}$ tel que $x \in X_1(l)$, donc $d_{Y \setminus \bigcup_{i=0}^{p-1} Y_2(j)}^+(x) < k$. Si

$x \in \bigcup_{i=0}^p Y_1(j)$, alors il existe $l' \in \{0, 1, \dots, p\}$ tel que $x \in Y_1(l')$, donc $d_{X \setminus \bigcup_{j=0}^{r-1} X_2(i)}^+(x) < k$.

par la construction ci-dessus, nous pouvons voir que $\left(\bigcup_{j=0}^p Y_1(j)\right) \subset \left(Y \setminus \bigcup_{i=0}^{p-1} Y_2(j)\right)$
 et $\left(\bigcup_{i=0}^r X_1(i)\right) \subset \left(Y \setminus \bigcup_{j=0}^{r-1} X_2(i)\right)$. par conséquent, $d_S^+(x) < k$. Montrons que S est

k -plus dominant, soit $x \in V \setminus S$. il est clair que $x \in \left[\left(\bigcup_{i=0}^r X_2(i)\right) \cup \left(\bigcup_{j=0}^p Y_2(j)\right)\right]$. Si

$x \in \bigcup_{i=0}^r X_2(i)$, alors il existe $l \in \{0, 1, \dots, r\}$ tel que $x \in X_2(l)$ et par la construction
 ci-dessus on a $d_{\bigcup_{i=0}^p Y_1(i)}^+(x) \geq k$. Si $x \in \bigcup_{j=0}^p Y_2(j)$, alors il existe $l' \in \{0, 1, \dots, p\}$ tel que

$x \in Y_2(l')$ et par la construction ci-dessus on a $d_{\bigcup_{i=0}^r X_1(i)}^+(x) \geq k$.

On suppose que $X_1(0) \neq \emptyset$ et $Y_1(0) \neq \emptyset$

si $X_1(0) = \emptyset$ (*resp.* $Y_1(0) = \emptyset$) alors $N = Y$ (*resp.* $N = X$) car les seuls arcs qui existent sont ceux entre X et Y , et si $X_1(0) = \emptyset$ (*resp.* $Y_1(0) = \emptyset$) alors $\forall x \in X : d_Y^+(x) \geq k$ ($\forall y \in Y : d_X^+(y) \geq k$). \square

Théorème 2.62. [27] *Si D est un digraphe sans circuits impairs et k, l deux entiers positifs tels que $1 \leq l \leq k \leq \Delta^+(D)$, alors D est (k, l) -plus-noyau parfait.*

2.4.4 La fonction k -Grundy et la fonction caractéristique

Dans [27] A. Ramoul et M. Blidia ont proposé une généralisation de la fonction de Grundy appelée fonction k -Grundy dans les digraphes où k est un entier positif et ils ont généralisé quelques résultats concernant la fonction Grundy et la fonction caractéristique.

Définition 2.63. *Soit $D = (V, A)$ un digraphe. Une fonction $g : V \rightarrow \mathbb{N}$ est une fonction k -Grundy si les deux conditions suivantes sont satisfaites:*

1. Si $g(x) = l > 0$, alors pour tout $j \in \mathbb{N}; 0 \leq j < l$, il existe au moins k sommets $y \in N_D^+(x)$ avec $g(y) = j$.
2. Si $g(x) = l$, alors il existe au plus $(k - 1)$ sommets $y \in N_D^+(x)$ avec $g(y) = l$.

Théorème 2.64. [27] Soit $D = (V, A)$ un digraphe. Si D admet une fonction k -Grundy, alors $S = \{x \in V \mid g(x) = 0\}$ est un k -plus-noyau.

Preuve. Soit $D = (V, A)$ un digraphe, $S = \{x \in V \mid g(x) = 0\}$ et y un sommet de D . On distingue deux cas.

1^{er} cas : $y \in S$. Alors $g(y) = 0$, d'après la condition 2 de la Définition 2.64, il existe au plus $(k - 1)$ sommets $x \in N_D^+(y)$ avec $g(x) = 0$. Par conséquent, $\Delta^+(S) < k$, Ce qui implique que S est k -indépendant.

2^{ème} cas : $y \notin S$. Dans ce cas $g(y) = l$, d'après la condition 1 de la Définition 2.64, pour tout $j \in \mathbb{N}; 0 \leq j < l$, il existe au moins k sommets $z \in N_D^+(y)$ avec $g(z) = j$. Par conséquent, pour $j = 0$, il existe au moins k sommets $z \in N_D^+(D)$ avec $g(z) = 0$, ce qui implique que $d_S^+(y) = |N_D^+(y) \cap S| \geq k$. Donc S est k -plus-dominant. \square

Théorème 2.65. [27] Si un digraphe $D = (V, A)$ est k -plus-noyau parfait, alors D admet une fonction k -Grundy.

Corollaire 2.66. [27] Soit $D = (V, A)$ un digraphe.

1. Si D est un digraphe symétrique, alors il admet une fonction k -Grundy.
2. Si D est un digraphe transitif, alors il admet une fonction k -Grundy.
3. Si D est un digraphe sans circuits, alors il admet une fonction k -Grundy.
4. Si D est un digraphe sans circuit impairs, alors il admet une fonction k -Grundy.

Une fonction caractéristique d'un sous-ensemble S dans le digraphe $D = (V, A)$ est une fonction $\varphi_S : V \longrightarrow \{0, 1\}$ définie comme suit.

$$\varphi_S(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in S \\ 0 & \text{si } x \notin S \end{cases}$$

Théorème 2.67. [27] Soit $D = (V, A)$ un digraphe et k un entier positif tel que $k \geq 2$. Un sous-ensemble S de V est k -plus-noyau si et seulement si sa fonction caractéristique

φ_S vérifie

$$\varphi_S(x) = 1 - \min \left\{ \left\lfloor \frac{\sum_{y \in N_D^+(x)} \varphi_S(y)}{k} \right\rfloor, 1 \right\}, \forall x \in V.$$

Preuve. Soit $D = (V, A)$ un digraphe et k un entier positif tel que $k \geq 2$. Soit S un k -plus-noyau de D . Si $x \in S$, alors $\varphi_S(x) = 1$. Comme S est k -indépendant, $|N_D^+(x) \cap S| < k$, il existe au plus $(k - 1)$ sommets $y \in N_D^+(x)$ tel que $y \in S$, il existe donc au plus $(k - 1)$ sommets tels que $\varphi_S(y) = 1$, ce qui implique que $\sum_{y \in N_D^+(x)} \varphi_S(y) < k$ et $\frac{\sum_{y \in N_D^+(x)} \varphi_S(y)}{k} < 1$.

$$\text{D'où } \left\lfloor \frac{\sum_{y \in N_D^+(x)} \varphi_S(y)}{k} \right\rfloor = 0 \text{ et } \min \left\{ \left\lfloor \frac{\sum_{y \in N_D^+(x)} \varphi_S(y)}{k} \right\rfloor, 1 \right\} = 0. \text{ Par conséquent, nous avons}$$

$$\varphi_S(x) = 1 - \min \left\{ \left\lfloor \frac{\sum_{y \in N_D^+(x)} \varphi_S(y)}{k} \right\rfloor, 1 \right\}.$$

Si $x \notin S$, alors $\varphi_S(x) = 0$. Puisque S est k -plus-dominant, $|N_D^+(x) \cap S| \geq k$, il existe au moins k sommets $y \in N_D^+(x)$ tel que $y \in S$, donc il existe au moins k sommets $y \in N_D^+(x) \cap S$ et ainsi $\varphi_S(y) = 1$, ce qui implique que $\sum_{y \in N_D^+(x)} \varphi_S(y) \geq k$ et $\frac{\sum_{y \in N_D^+(x)} \varphi_S(y)}{k} \geq 1$.

$$\text{D'où } \left\lfloor \frac{\sum_{y \in N_D^+(x)} \varphi_S(y)}{k} \right\rfloor \geq 1 \text{ et } \min \left\{ \left\lfloor \frac{\sum_{y \in N_D^+(x)} \varphi_S(y)}{k} \right\rfloor, 1 \right\} = 1. \text{ Par conséquent, nous avons}$$

$$\varphi_S(x) = 1 - \min \left\{ \left\lfloor \frac{\sum_{y \in N_D^+(x)} \varphi_S(y)}{k} \right\rfloor, 1 \right\}.$$

Inversement, soit φ_S la fonction caractéristique d'un ensemble $S \subseteq V$ avec $\varphi_S(x) = 1 - \min \left\{ \left\lfloor \frac{\sum_{y \in N_D^+(x)} \varphi_S(y)}{k} \right\rfloor, 1 \right\} \forall x \in V$. Si $x \in S$, alors $\varphi_S(x) = 1 = 1 - \min \left\{ \left\lfloor \frac{\sum_{y \in N_D^+(x)} \varphi_S(y)}{k} \right\rfloor, 1 \right\}$

d'où $\min \left\{ \left\lfloor \frac{\sum_{y \in N_D^+(x)} \varphi_S(y)}{k} \right\rfloor, 1 \right\} = 0$ et $\left\lfloor \frac{\sum_{y \in N_D^+(x)} \varphi_S(y)}{k} \right\rfloor = 0$. Alors, $\frac{\sum_{y \in N_D^+(x)} \varphi_S(y)}{k} < 1$, ce qui implique que $\sum_{y \in N_D^+(x)} \varphi_S(y) < k$ et $|N_D^+(x) \cap S| < k$. Alors, $d_S^+(x) < k, \forall x \in S$ c'est-à-dire $\Delta^+(S) < k$. Par conséquent S est k -indépendant. Si $x \notin S$, alors $\varphi_S(x) = 0 =$

$$1 - \min \left\{ \left\lfloor \frac{\sum_{y \in N_D^+(x)} \varphi_S(y)}{k} \right\rfloor, 1 \right\}, \text{ d'où } \min \left\{ \left\lfloor \frac{\sum_{y \in N_D^+(x)} \varphi_S(y)}{k} \right\rfloor, 1 \right\} = 1 \text{ et } \left\lfloor \frac{\sum_{y \in N_D^+(x)} \varphi_S(y)}{k} \right\rfloor \geq 1.$$

Alors, $\frac{\sum_{y \in N_D^+(x)} \varphi_S(y)}{k} \geq 1$, ce qui implique que $\sum_{y \in N_D^+(x)} \varphi_S(y) \geq k$ et $|N_D^+(x) \cap S| \geq k$.

Alors, $d_S^+(x) \geq k$, $\forall x \notin S$. Par conséquent S est k -plus-dominant. Ainsi, S est k -plus-noyau. \square

CHAPITRE 3

ETUDE ALGORITHMIQUE SUR LA RECHERCHE DE K -PLUS-NOYAU DANS LES DIGRAPHES

Nous consacrons ce chapitre à notre contribution.

Nous allons donner deux algorithmes qui déterminent un k -plus-noyau dans les digraphes sans circuits et les digraphes bipartis avec une justification et une étude de complexité. A la fin nous élaborons un logiciel qui récapitule nos travaux sur la recherche de k -plus-noyau dans les digraphes sans circuits et bipartis.

3.1 Algorithme polynomial de recherche d'un k -plus-noyau dans les digraphes sans circuits :

En utilisant l'algorithme suivant, on peut déterminer un k -plus-noyau dans un digraphe $D = (V, A)$ sans circuits.

3.1.1 Algorithme :

Données : $D = (V, A)$ digraphe sans circuit ; $|V| = n$, $|A| = m$ et k -entier positif tel que $1 \leq k \leq \Delta^+(D)$.

Résultat : N est un k -plus-noyau de D .

Début

$$N = \phi$$

Répéter

$$-\Gamma_k^+ = \{ x \in V \mid d_D^+(x) \leq k - 1 \}$$

$$-N = N \cup \Gamma_k^+$$

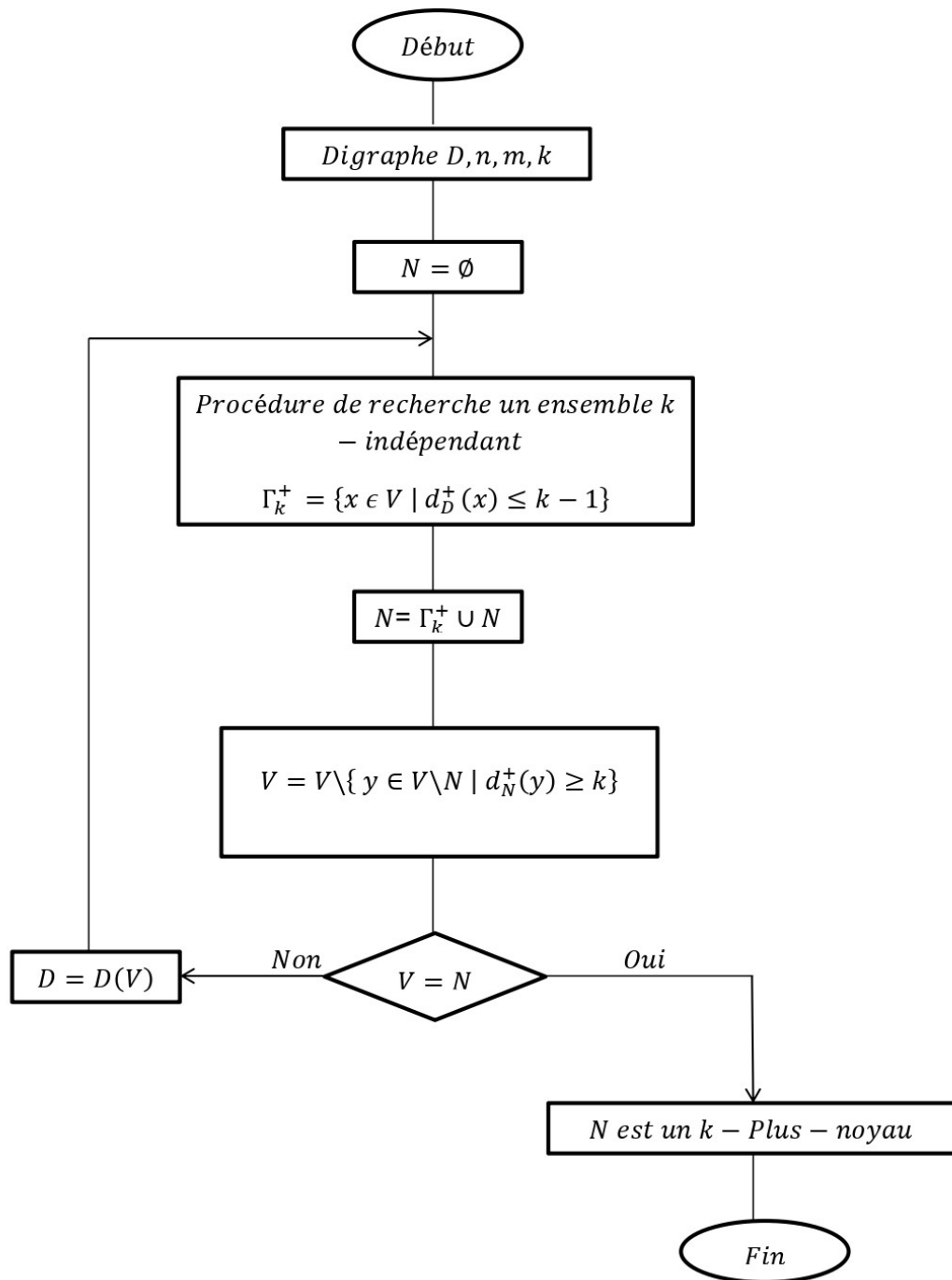
$$-V = V \setminus \{ y \in V \setminus N \mid d_N^+(y) \geq k \}$$

$$-D = D[V].$$

Jusqu'à $V = N$.

Fin.

3.1.2 Organigramme :



3.1.3 Justification et complexité ::

Soit $D = (V, A)$ un digraphe sans circuits. Cet algorithme calcule l'ensemble N après avoir tester le degré extérieur de tous les sommets de V .

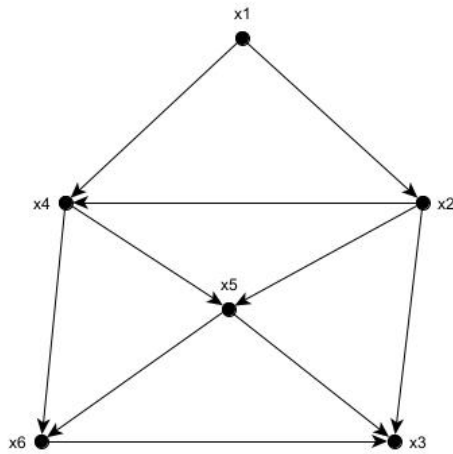
Au départ, on pose $N = \phi$; puis l'algorithme calcule l'ensemble Γ_k^+ qui contient les sommets dont le degré extérieur inférieur ou égal à $k - 1$; cet ensemble existe est non vide car le digraphes D est sans circuits (il possède un puit) et il ajoute les sommets de Γ_k^+ à l'ensemble N .

A l'étape suivante, l'algorithme écarte de l'ensemble V , les sommets qui sont de degré extérieur supérieur ou égal à k dans N .

A la fin, on obtient un ensemble N qui est constitué des sommets de degré extérieur inférieur ou égal à $k - 1$; c'est à dire N est un ensemble k -plus-indépendant et tous les sommets qui ne sont pas dans N ; sont de degré supérieur ou égale à k dans N ; c'est -à dire N est un ensemble k -plus-dominant. Donc N est un k -plus-noyau de D .

Comme le digraphe D est d'ordre fini, alors le nombre d'opérations utilisées dans cet algorithme est fini.

Cet algorithme est de complexité $O(n^2)$ car la boucle repéter est effectuée au plus n fois, et la procédure de calcul de l'ensemble des sommets de degré inférieur ou égal à $k - 1$ (Γ_k^+) nécessite au plus n opérations.

Exemple 3.1.FIGURE 3.1. Un digraphe sans circuit qui admet un k – plus – noyau

pour $k = 1$:

$$N = \phi;$$

$$\Gamma_1^+ = \{x_3\};$$

$$N = \Gamma_1^+ \cup N = \{x_3\};$$

$$V = \{x_1, x_3, x_4\};$$

$$V \neq N;$$

$$\Gamma_1^+ = \{x_3, x_4\};$$

$$N = \{x_3, x_4\};$$

$$V = \{x_3, x_4\} = N;$$

d'où N est un 1 – plus – noyau dans D .

pour $k = 2$:

$$N = \phi;$$

$$\Gamma_2^+ = \{x_3, x_6\};$$

$$N = \Gamma_2^+ \cup N = \{x_3, x_6\};$$

$$V = \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_6\};$$

$$V \neq N;$$

$$\Gamma_2^+ = \{x_3, x_4, x_6\} = N;$$

$$V = \{x_1, x_3, x_4, x_6\}$$

$$V \neq N;$$

$$\Gamma_2^+ = \{x_1, x_3, x_4, x_6\} = N;$$

$$V = N;$$

d'où N est un 2 - plus - noyau dans D .

pour $k = 3$:

$$N = \phi;$$

$$\Gamma_3^+ = \{x_1, x_3, x_4, x_5, x_6\};$$

$$N = \{x_1, x_3, x_4, x_5, x_6\};$$

$$V = N;$$

d'où N est un 3 - plus - noyau dans D .

3.2 Algorithme polynomial de recherche d'un k -plus-noyau dans les digraphes bipartis :

En utilisant l'algorithme suivant, on peut déterminer un k -plus-noyau dans un digraphe biparti $DB = (X, Y, A)$ d'ordre n avec $|X| = n_1$ et $|Y| = n_2$.

3.2.1 Algorithme:

Données : $DB = (X, Y, A)$ digraphe biparti ; $|X| = n_1$, $|Y| = n_2$ et $|A| = m$ et k -entier positif tel que $1 \leq k \leq \Delta^+(D)$.

Résultat : N est un k -plus-noyau dans DB

Début

$$N = \emptyset$$

$$X_1(0) = \{x \in X \mid d_Y^+(x) \leq k - 1\}$$

$$Y_1(0) = \{y \in Y \mid d_X^+(y) \leq k - 1\}$$

Si $(X_1(0) \neq \emptyset$ et $Y_1(0) \neq \emptyset)$

alors

$$X_2(0) = \{x \in X \setminus X_1(0) \mid d_{Y_1(0)}^+(x) \geq k\}$$

$$Y_2(0) = \left\{ y \in Y \setminus Y_1(0) \mid d_{X_1(0)}^+(y) \geq k \right\}$$

$$N = X_1(0) \cup Y_1(0)$$

t=1

Répéter

$$X_1(t) = \left\{ x \in X \mid \bigcup_{i=0}^{t-1} [X_1(i) \cup X_2(i)] \text{ tq } d_{Y \setminus \bigcup_{i=0}^{t-1} Y_2(i)}^+ (x) \leq k-1 \right\}$$

$$Y_1(t) = \left\{ y \in Y \mid \bigcup_{i=0}^{t-1} [Y_1(i) \cup Y_2(i)] \text{ tq } d_{X \setminus \bigcup_{i=0}^{t-1} X_2(i)}^+ (y) \leq k-1 \right\}$$

$$X_2(t) = \left\{ x \in X \mid \bigcup_{i=0}^{t-1} [X_1(i) \cup X_2(i) \cup X_1(i+1)] \text{ tq } d_{\bigcup_{i=0}^{t-1} Y_1(i)}^+ (x) \geq k \right\}$$

$$Y_2(t) = \left\{ y \in Y \mid \bigcup_{i=0}^{t-1} [Y_1(i) \cup Y_2(i) \cup Y_1(i+1)] \text{ tq } d_{\bigcup_{i=0}^{t-1} X_1(i)}^+ (y) \geq k \right\}$$

$$N = N \cup X_1(t) \cup Y_1(t)$$

t = t + 1

Jusqu'à $X_1(t-1) = X_2(t-1) = \phi$ et $Y_1(t-1) = Y_2(t-1) = \phi$

sinon si $(X_1(0) = \emptyset \text{ et } Y_1(0) = \emptyset)$

alors $(N = X \text{ ou } N = Y)$

sinon si $Y_1(0) \neq \emptyset$

alors $N = Y$

sinon $N = X$

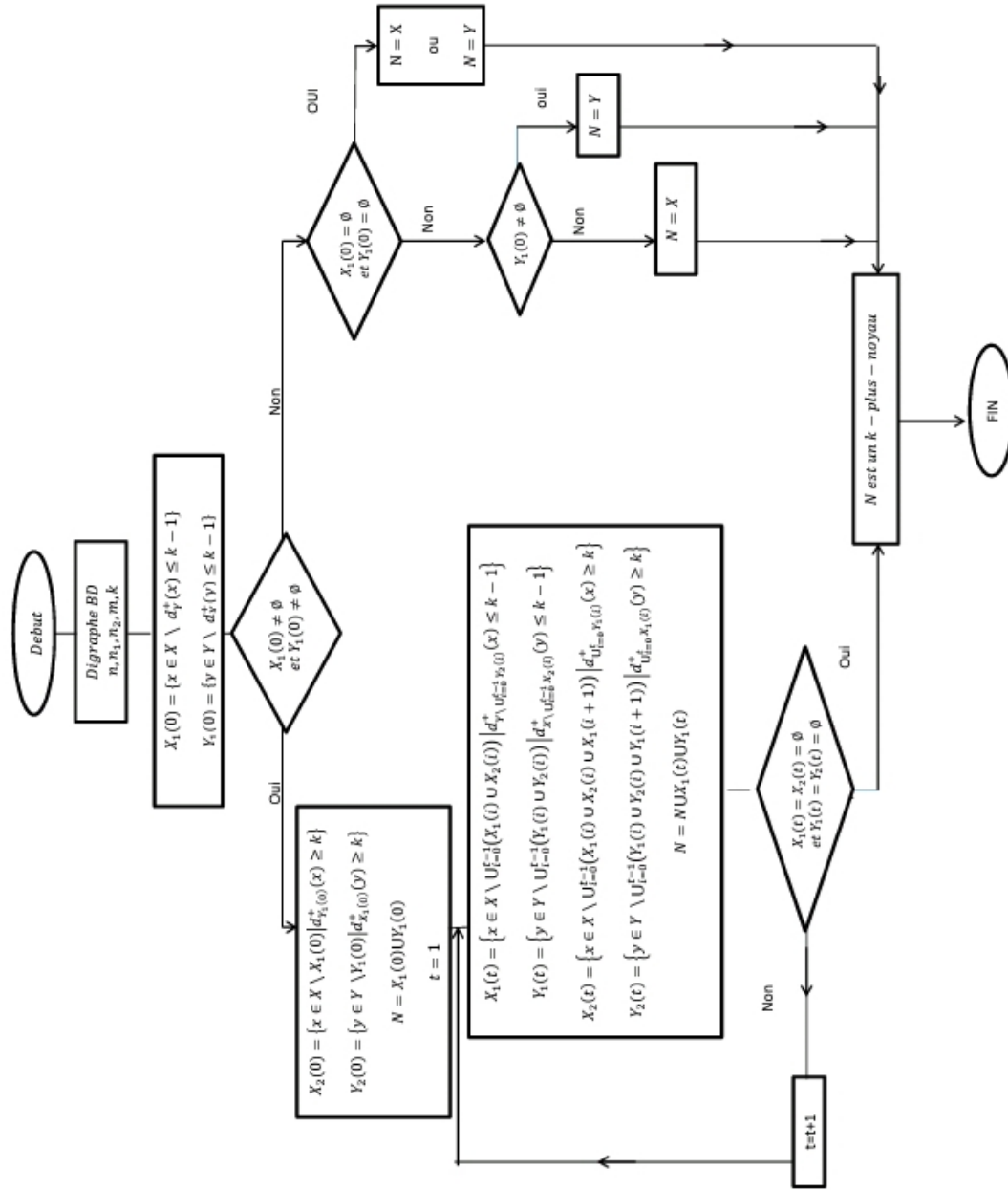
fin si;

fin si

fin si

Fin

3.2.2 Organigramme :



3.2.3 Justification et complexité :

A travers la démonstration du Théoreme 2.61 [27], une technique qui consiste à déterminer un k -plus-noyau dans un digraphe biparti $DB = (X, Y, A)$; a été décrite.

L'algorithme détermine un k -plus-noyau après avoir tester le degré de tous les sommets de X et Y .

En premier lieu, l'algorithme calcule deux ensembles $X_1(0)$ et $Y_1(0)$ à partir des sommets de X et Y respectivement, les sommets de $X_1(0)$ (*resp.* $Y_1(0)$) sont de degré inférieur ou égal à $k - 1$ dans Y (*resp.* X).

Si $X_1(0) = \emptyset$ (*resp.* $Y_1(0) = \emptyset$) alors $N = Y$ (*resp.* $N = X$) car les seuls arcs qui existent sont ceux entre X et Y , et si $X_1(0) = \emptyset$ (*resp.* $Y_1(0) = \emptyset$) alors tous les sommets de X (*resp.* Y) sont de degré supérieur ou égal à k dans Y (*resp.* X).

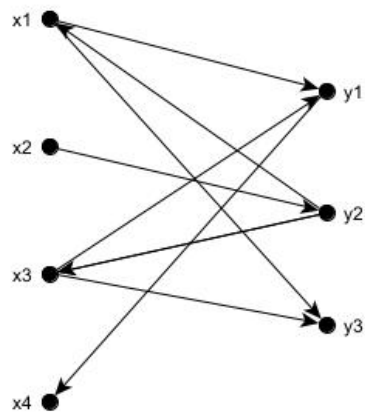
Si $X_1(0)$ et $Y_1(0)$ sont tous deux différents de l'ensemble vide; l'algorithme calcule deux ensemble $X_2(0)$ et $Y_2(0)$ qui contiennent les sommets de $(X \setminus X_1(0))$ et $(Y \setminus Y_1(0))$ respectivement, et de degré supérieur ou égal à k dans $X_1(0)$ et $Y_1(0)$ respectivement; et donc le k -plus-noyau sera $(X_1(0) \cup Y_1(0))$.

A l'étape t , l'algorithme aura calculé une suite des ensembles $X_1(t)$, $Y_1(t)$, $X_2(t)$ et $Y_2(t)$ et $N = X_1(t) \cup Y_1(t)$.

N est bien un k -plus-noyau; car par construction: un sommet de N est un sommet de $(X \setminus X_2(t))$ ou bien de $(Y \setminus Y_2(t))$ donc son degré est inférieur ou égal à $k - 1$ d'où N est k -indépendant; et N est un k -plus dominant car tout sommet de $(V \setminus N)$ est un sommet de $(X_2(t) \cup Y_2(t))$ donc son degré est supérieur ou égal à k dans $(X_1(t) \cup Y_1(t))$.

Cet algorithme détermine un k -plus-noyau dans un digraphe biparti $DB = (X, Y, A)$ d'ordre n avec $|X| = n_1$ et $|Y| = n_2$; en $O(n^2)$.

La boucle répéter est effectuée au plus n fois, et la procédure de calcul de chacun des ensembles $X_1(t)$ et $X_2(t)$ (*resp.* $Y_1(t)$ et $Y_2(t)$) nécessite au plus n_1 (*resp.* n_2) opérations.

Exemple 3.2.FIGURE 3.2. Un digraphe biparti DB qui admet un k - plus - noyau

Pour $k = 2$:

$$X_1(0) = \{x_2, x_4\};$$

$$Y_1(0) = \{y_1, y_3\};$$

$$X_2(0) = \{x_1, x_3\};$$

$$Y_2(0) = \emptyset;$$

$$N = \{x_2, x_4, y_1, y_3\};$$

$t = 1$

$$X_1(1) = \emptyset;$$

$$Y_1(1) = \{y_2\};$$

$$X_2(1) = \emptyset;$$

$$Y_2(1) = \emptyset;$$

$$N = \{x_2, x_4, y_1, y_2, y_3\};$$

$t = 2$

$$X_1(2) = \emptyset;$$

$$Y_1(2) = \emptyset;$$

$$X_2(2) = \emptyset;$$

$$Y_2(2) = \emptyset;$$

d'où N est un 2-*plus-noyau* du digraphe de la Figure 3.2.

Exemple 3.3.

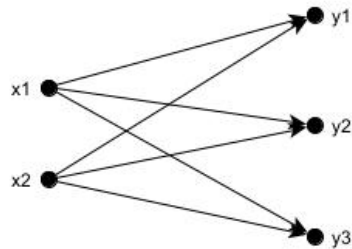


FIGURE 3.3. Un digraphe biparti DB

Pour $k = 3$;

$$X_1(0) = \emptyset;$$

$$Y_1(0) = \{y_1, y_2, y_3\};$$

$$\text{Donc } N = \{y_1, y_2, y_3\};$$

d'où N est un 3-*plus-noyau* dans le digraphe biparti de la Figure 3.3.

Exemple 3.4.

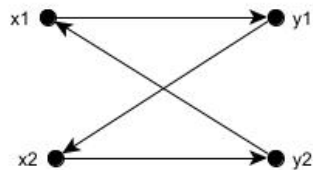


FIGURE 3.4. Le digraphe C_4

pour $k = 1$;

$$X_1(0) = \emptyset;$$

$$Y_1(0) = \emptyset;$$

$$N = \{x_1, x_2\} \text{ où } N = \{y_1, y_2\}$$

d'où N est un 1 – *plus – noyou* dans le digraphe de la Figure 3.4.

3.3 langage de programmation utilisé:

Dans ce projet on a utilisé le langage de programmation MATLAB.

3.3.1 Description du langage MATLAB:

MATLAB est un environnement dédié à l'Automatique et au Traitement du Signal existant sous Windows et Unix. Il inclut un langage interprété, un éditeur de scripts, un éditeur de schémas blocs, et la possibilité de construire une interface graphique interactif simple (fenêtres, souris, zones, éditables, labels, boutons).

3.4 Interface graphique:

Matlab permet à l'utilisateur de programmer des interfaces graphiques interactives afin de présenter ses résultats.

On a construit l'interface de notre logiciel à l'aide de GUIs (Graphical User Interfaces) sous MATLAB, qui permet aux développeurs de représenter leurs programmes sous forme des applications.

3.4.1 Description du logiciel Interface_sansc

Les figures ci-dessous présentent l'interface graphique du logiciel.

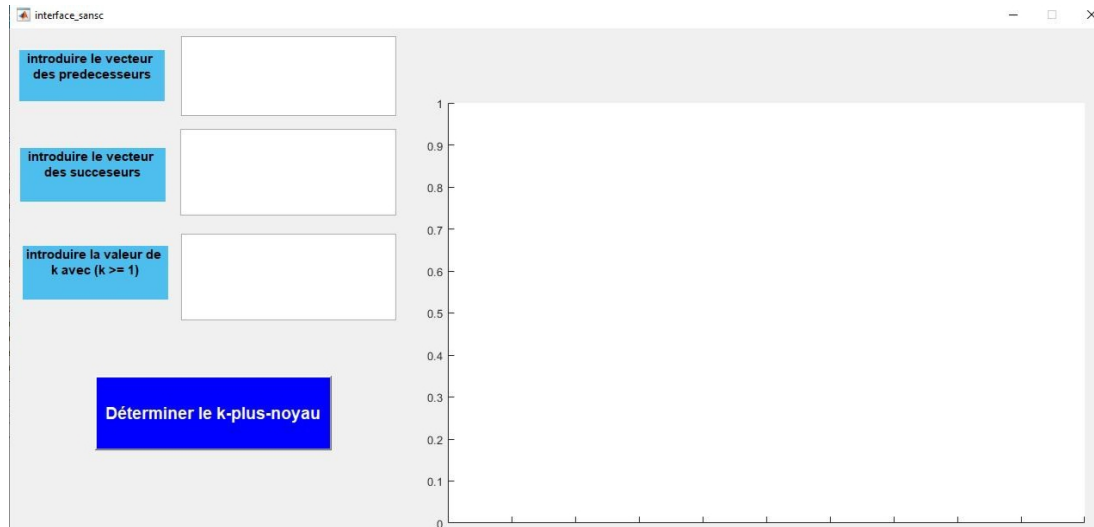


FIGURE 3.5. Présentation de l'interface_sansc

Espace de travail : contient les bouton spécifiques au traitement des fichiers entré.

1. Introduire le vecteur des prédécesseurs



FIGURE 3.6. Présentation de bouton introduire le vecteur des prédécesseurs

2. Introduire le vecteur des successeurs



FIGURE 3.7. Présentation de bouton introduire le vecteur des successeurs

3. Introduire la valeur de k



FIGURE 3.8. Présentation de bouton introduire la valeur de k

Zone de dessin : Après avoir fait entrer tous les données d'un digraphe de la Figure 3.1, on peut illustrer le digraphe avec son k -plus-noyau dans la zone de dessin par le bouton "Déterminer le k -plus-noyau" tel que les sommets en rouge sont les sommets qui appartiennent au k -plus-noyau.

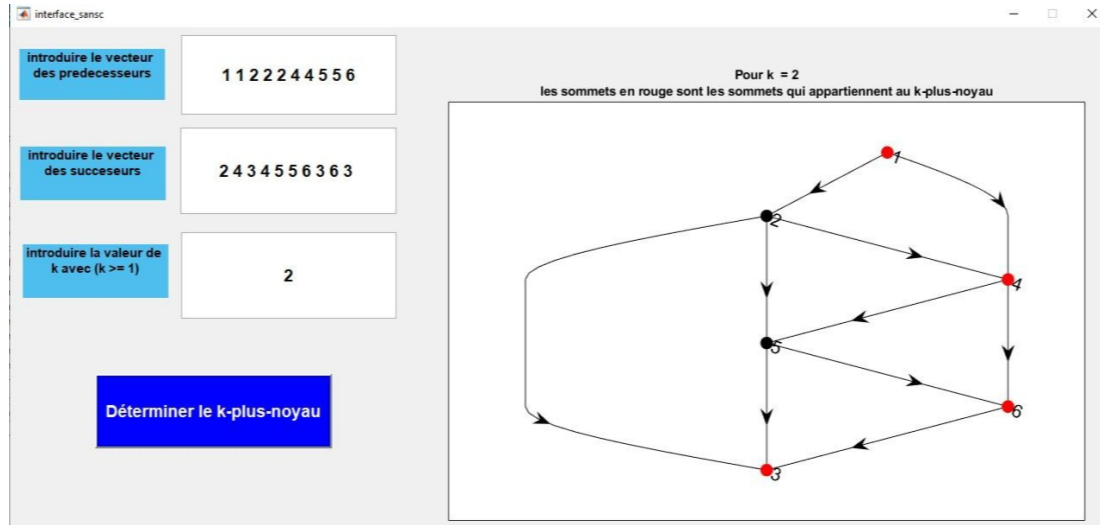


FIGURE 3.9. Présentation de digraphe de la Figure 3.1 avec son k -plus-noyau dans la zone de dessin

3.4.2 Description du logiciel Interface_biparti

Les figures ci-dessous présentent l'interface graphique du logiciel.

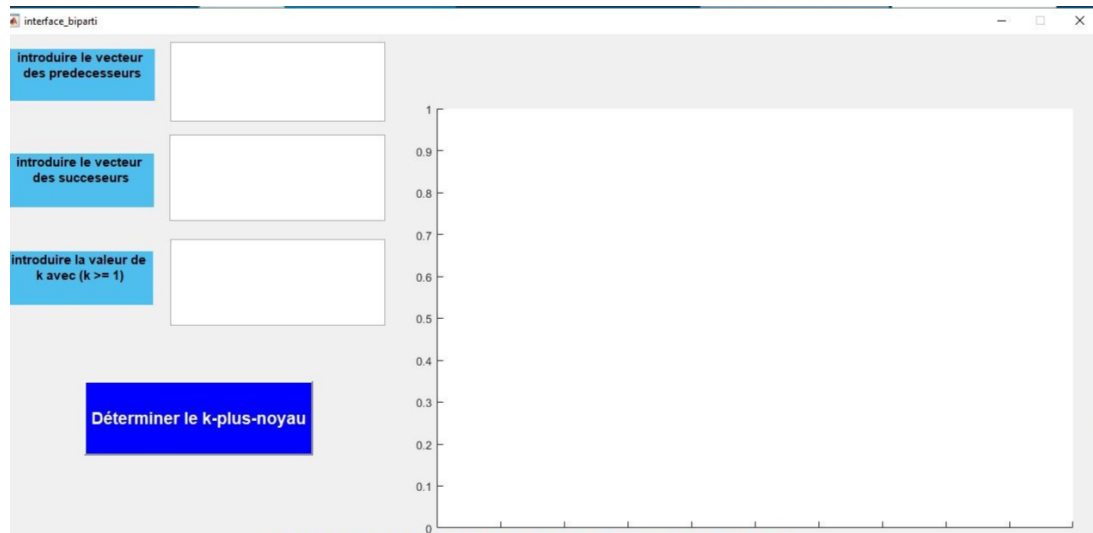


FIGURE 3.10. Présentation de l'interface_biparti

Zone de dessin : Après avoir fait entrer tous les données d'un digraphe de la Figure 3.2, on peut illustrer le digraphe avec son k -plus-noyau dans la zone de dessin par le bouton "Déterminer le k -plus-noyau" tel que les sommets en rouge sont les sommets qui appartiennent au k -plus-noyau.

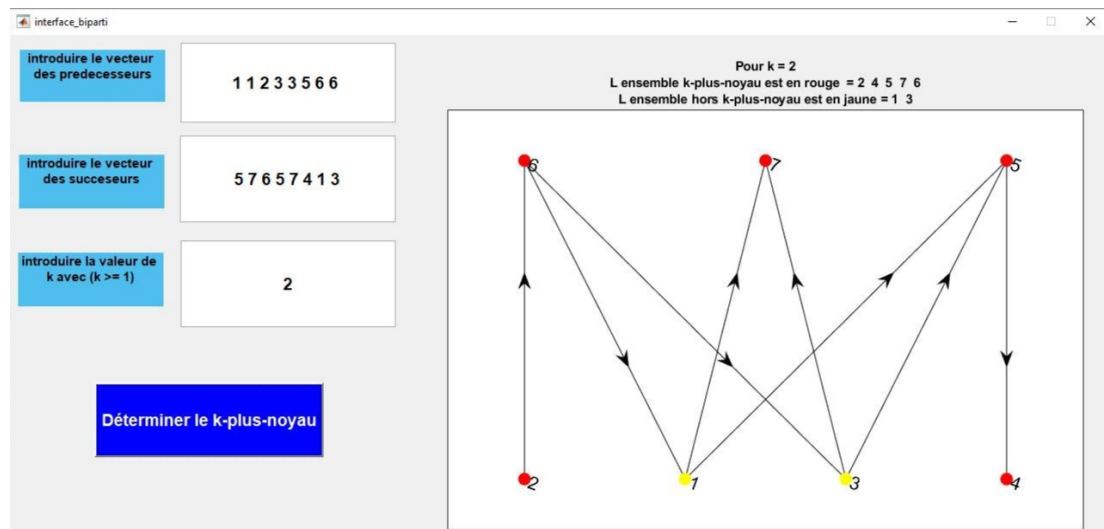


FIGURE 3.11. Présentation de digraphe de la Figure 3.2 avec son k-plus-noyau dans la zone de dessin

CONCLUSION ET PERSPECTIVES

L'objectif principal de ce travail est l'étude de concept de (k, l) -plus-noyau dans les graphes orientés, qui à été introduit par Ramoul.A et Blidia.M comme une généralisation de noyau dans les graphes orientés.

En premier lieu, nous avons fait une étude théorique sur le noyau dans les graphes orientés ainsi que ses généralisations noyau par chemins monochromatiques dans les graphes orientés m -coloré, (k, l) -noyau et (k, l) -plus-noyau dans les graphes orientés, en citant les principaux résultats concernant ces notions.

En second lieu, nous avons donné deux algorithmes polynômiaux qui déterminent le (k, l) -plus-noyau dans les graphes orientés sans circuits et les graphes orientés bipartis.

Beaucoup de problèmes restent ouverts dans ce domaine. Comme perspectives, nous proposons des axes qui peuvent faire l'objet de travaux de recherches ultérieures. A savoir

- La détermination d'autres classes de graphes orientés dans lesquelles le (k, l) -plus-noyau existe.

- L'élaboration d'algorithmes polynômiaux pour la recherche de (k, l) -plus-noyau dans d'autres graphes orientés.

RÉFÉRENCES

- [1] C. Berge, Graphs, North Holland, 1985.
- [2] C. Berge, Nouvelles extensions du noyau d'un graphe et ses applications en théorie des jeux, Publ. Econométriques, Vol. 6, 1977.
- [3] V. Chvatal, On the computational complexity of finding a kernel, Report CRM 300 Centre de Recherches Mathématiques, Université de Montréal, 1973.
- [4] C. Berge, Graphs and Hypergraphs. (North Holland, Amsterdam, 1973).
- [5] J. Von Neumann , O.Morgenstern , Theory of Games and Economic Behavior, Princeton University. Press, Princeton 1944.
- [6] M. Richardon, Solution of irreflexive relations, Ann. Math. 58, n°2, 573-580, 1953.
- [7] P. Duchet, Représentation: Noyaux en théorie des graphes et hypergraphes ,Thèse d'état , Université de Paris VI, 1979.
- [8] P. Duchet, Graphes Noyau-Parfait, Ann. Discrete Math. 9, 93-101, 1980.
- [9] M. Blidia, Contribution à l'étude des noyaux dans les graphes, Thèse de Doctorat 3^{ème} cycle, Université de Paris VI, 1984.
- [10] H. Galeana-Sánchez, V. Neumann-Laura, On kernel and semi-kernels of digraphs, Discrete Math. 48, 67-76, 1984.
- [11] P. Duchet and H. Meyniel, Une généralisation du théorème de Richardson sur l'existence de noyau dans les graphes orientés, Discrete Math. 43, 21-27, 1983.
- [12] V. Neumann-Lara, Seminúcleos de una digráfia, Anales de Instituto de Matematicas, II UNAM, 1971.

- [13] V. Chvátal et L. Lovász, Chaque graphe orienté a un semi-noyau, Séminaire Hypergraph, Notes de cours en mathématiques, Springer-Verlag, Berlin, vol. 441, p. 175, 1974.
- [14] Z. Zemir, Recherche de noyaux dans les graphes orientés et graphes munis d'une orientation, étude algorithmique, Thèse de Magister, Université de Blida, 1996.
- [15] M. Abbas, Y. Saoula, Polynomial algorithms for kernels in comparability, permutation and P_4 -free graphs, A Quarterly Journal of Operations Research, 40R 3, p.217-225, 2005.
- [16] B. Sands, N.Sauer, R.Woodrow, On monochromatic paths in edge coloured digraphs, J.Combin. Theory,Seriers. B 33,271-275, 1982.
- [17] Shen Minggang, On monochromatic paths in m-coloured tournaments, J.Combin. Theory Series. B 45, 108-111, 1988.
- [18] H. Galeana-Sánchez On monochromatic paths and monochromatic cycles in edge coloured tournaments, Discrete Math. 156, 103-112, 1996.
- [19] H. Galeana-Sánchez and R. Rojas-Monroy, A constereexample to a conjecture on edge colored tournaments, Discrete Math . 282, 275-276, 2004.
- [20] M. Kwásnik, On (k, l) -kernels on graphs and their products, Doctoral dissertation, Technical University of Wroclaw, Wroclaw, 1980.
- [21] H. Galeana-Sánchez, Xueliang Li, Semikernel and (k, l) -kernels in digraphe, Discrete Math. 11, 340-346, 1998.
- [22] M. Kwásnik, A. Wloc, Some remarks about (k, l) -kernels in directed and undirected graphs, Discrete Math. 13, 29-37, 1993.
- [23] D. Brod, A. Wloc, I. Wloc, On the existence of (k, l) -kernels in directed graphs, Journal of Mathematics and applications, 28, 7-12, 2006.

- [24] H. Galeana-Sánchez, Note on the existence of (k, l) –kernels in digraph, *Discrete Math.* 85, 99-102, 1990.
- [25] C. Ballbuena, H.Galeana-Sánchez, Mucuy-kak Guevara. About (k, l) –kernels, semikernels and Grundy functions in partial line digraphs. *Discussions Mathematicae Graph Theory* 39(4), DOI : 10, 7151 , dmgt. 2104 (2018).
- [26] O. Favaron, On a conjecture of Fink and Jacobson concerning k -domination and k -dependence. *J. Combin. Theory Series B* 39, 101-102, 1985.
- [27] A. Ramoul and M. Blidia, A new generalisation of kernels in digraphs, *Discrete Applied Mathematics*, 217, 673-684, 2017.
- [28] D.Zerrouki et I.Hadj sadok, Etude théorique et algorithmique sur la recherche de noyaux dans les digraphes et de noyaux par chemins monochromatiques dans certaines classes de digraphes (m.Colores), Mémoire, Université de Blida, 2017.
- [29] A.Ramoul, Contribution à l'étude des noyaux dans les graphes orientés, Thèse de Magistère, Université de Blida, 2008.
- [30] M. Kucharska, M. Kwasnik, On (k, l) –kernels of special superdigraphs of P_m and C_m , *Discussions Mathematicae Graph Theory*, 211, pp.95-109, 2001.