

REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE

MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR
ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

UNIVERSITE DE BLIDA
INSTITUT D'AERONAUTIQUE

MEMOIRE DE FIN D'ETUDES
PRESENTE EN VUE DE L'OBTENTION DU DIPLOME
D'INGENIEUR D'ETAT EN AERONAUTIQUE

OPTION : PROPULSION, STRUCTURE.

THEME

SIMULATION NUMERIQUE ET MODELISATION DE
L'EQUATION DE TRANSPORT EN REGIME TRANSITOIRE.

Présenté par :

DJEDDI LAMINE
BENSALEM BELDJILALI

Proposé par :

Mr. AHMED CHEGRANI



Année universitaire 2003 / 2004

DEDICACE

Je dédie ce modeste travail à :

Mon très cher père pour son aide tout au long de ma vie.

Ma très chère mère maman que j'aime beaucoup.

Mes deux sœurs : Samah et Jihen .

Mes frères raouf et Adnan.

Djeida .

Mon binôme Djilali.

Mes amis de classe.

Souad, Maha, Dalal, Ikram.

Djaafar, Mehdi, Younes et Ahmed.



Djeddi Lamine

DEDICACE

Je dédic ce présent mémoire a ma très chère mère

Qui est toujours présente a mes cotés et dans les moments défficiles

A mon père si généreux en vers moi

A mes sœurs :kheira. Fatima. rabiâa

A mes frères :slimane. Madani. Noureddine. Ali

A mes amis :Hadj .Mehdi. Mjaafar. Moukhtar.bellehrache .Madani

Beldjilali bensalem



REMERCIEMENT

Tout d'abord on tient à remercier dieu le tout puissant **-dieu merci-**

Nos remerciements s'adressent en particulier à tout les gents qui nous ont aider de prés ou de loin, on commence par monsieur le promoteur : Mr. CHEGRANI qu'on remercie beaucoup pour ces précieuses orientations.

Les membres de jury pour avoir corriger ce modeste travail.

Un remerciement particulier s'adresse à monsieur : BOUFENNARA NOUREDDINE
qui

nous a beaucoup aider

TABLE DES MATIERES

INTRODUCTION.	2
CHAPITRE I : SIMULATION NUMERIQUE.	3
CHAPITRE II : PHENOMENES DE TRANSPORT.	5
TRANSPORT DIFFUSIF.	5
TRANSPORT CONVECTIF.	6
TRANSPORT CONVECTO-DIFFUSIF.	8
CHAPITRE III : CONDITIONS AUX LIMITES.	13
CHAPITRE IV : CONCEPT DE DISCRETISATION.	17
METHODE DES VOLUMES FINIS.	18
METHODE DES DIFFERENCES FINIES.	25
METHODE DES ELEMENTS FINIS.	37
CHAPITRE V : RESOLUTION DE L'EQUATION MATRICIELLE.	43
CHAPITRE VI : RESULTATS ET COMMENTAIRES.	68
CONCLUSION.	122

résumé

Le but essentiel de ce travail consiste à faire une étude analytique et numérique de l'équation de transport en régime transitoire.

Le problème de transport que ce soit par diffusion, convection ou par convection-diffusion à été approché par trois méthodes numériques :

-Méthode des différences finies : elle consiste à rechercher la solution non pas en tout point de l'espace mais en des points discrets définis par les intersections de deux ensembles de lignes formant la grille de calcul.

La procédure de résolution numérique se déroule en deux étapes :

- 1- la substitution de l'opérateur différentiel par l'opérateur aux différences.
- 2- La résolution d'un système d'équations discrètes.

- Méthode des éléments finis : l'originalité de cette méthode réside dans le fait qu'elle est basée sur une formulation intégrale du phénomène analysé plutôt que sur la forme différentielle que représentent l'équation aux dérivées partielles et les conditions aux limites.

La formulation utilisée est celle de Galerkin est aussi appelée la méthode des Résidu pondérés. Elle consiste à rechercher des fonctions qui satisfont les conditions aux limites et ayant des conditions de dérivabilité déterminées.

-Méthode des volumes finis : Elle consiste à intégrer des équations sur un ensemble de volume élémentaire, l'équation discrétisée obtenue par cette méthode correspond à l'expression de la loi de conservation sous sa forme intégrale. Par la suite, l'évolution de chacune des intégrales à l'aide des fonctions exprimées aux points de discrétisation.

La comparaison des résultats numériques (différences finies, éléments finis et volumes finis) et ceux obtenus par la solution analytique sont satisfaisants et encourageants.

INTRODUCTION :

Le présent travail consiste à l'étude de la validité de l'application de certaines méthodes numériques telles que la méthode des différences finies, méthode des éléments finis et la méthode des volumes finis appliquées aux phénomènes de transport.

Dans le domaine de l'industrie, les cas rencontrés sont d'une complexité accrue ; notamment dans celui de l'industrie aéronautique.

La plupart des cas à envisager sont des phénomènes bien difficiles à étudier, notamment lors de l'interaction de deux phénomènes couplés comme par exemple celui de transfert thermique et diffusion de masse.

Nous nous limiterons pour notre part à l'étude du problème du transport diffusif en régime transitoire dans une géométrie rectangulaire par la méthode des différences finies, la méthode des éléments finis et la méthode des volumes finis et comparer les résultats avec la solution exacte ou analytique tout en comparant les résultats des trois méthodes entre elles.

La modélisation et la discrétisation des équations gérant le phénomène du transport convecto-diffusif seront fondées sur l'utilisation des différences finies bidimensionnel et les éléments finis bidimensionnel.

La modélisation et la discrétisation des équations gérant le phénomène du transport diffusif seront fondées sur l'utilisation des différences finies unidimensionnel et les volumes finis unidimensionnel.

Enfin dans le dernier chapitre, on présente les différents résultats numériques calculés pour les différentes méthodes précédemment citées.

Enfin une conclusion générale clôturera notre travail.

Chapitre I :

simulation numérique

I.1. LA SIMULATION COMME METHODOLOGIE DE RECHERCHE ET DEVELOPPEMENT :

La recherche scientifique, qui s'organise traditionnellement selon une dialectique théorie et expérience, s'est progressivement structurée selon un triptyque associant théorie et modélisation, simulation numérique et vérification expérimentale. Cette méthodologie de la simulation, à différents niveaux de maturité selon les secteurs, s'impose aujourd'hui partout (référence [10]).

La simulation numérique consiste à reproduire par le calcul le fonctionnement d'un système, préalablement décrit par un ensemble de modèles. Elle s'appuie sur des méthodes mathématiques et informatiques spécifiques. Les principales étapes de la réalisation d'une étude par simulation numérique sont communes à de nombreux secteurs de la recherche et de l'industrie.

En chaque point de l'objet considéré, plusieurs grandeurs physiques (vitesse, température...) décrivent l'état et l'évolution du système étudié. Celles-ci ne sont pas indépendantes, mais reliées régies par des équations, généralement aux dérivées partielles. Ces équations constituent la traduction mathématique des lois de la physique qui modélisent le comportement de l'objet. Simuler l'état de ce dernier, c'est déterminer idéalement en tout points les valeurs numériques de ces paramètres. Comme il y a un nombre infini de points, donc, une infinité de valeurs à calculer, cet objectif est inaccessible (sauf dans des cas bien particuliers où l'on peut résoudre les équations de départ à l'aide de formules analytiques). Une approximation naturelle consiste donc à ne considérer qu'un nombre fini de points. Les valeurs des paramètres à calculer sont ainsi en nombre fini et les opérations nécessaires deviennent abordables grâce à l'ordinateur. Le nombre effectif de points traités dépendra bien sûr de la puissance de celui-ci :

Plus il sera élevé meilleur sera finalement la description de l'objet.

A la base du calcul des paramètres comme à la base de la simulation numérique, il y a donc la réduction de l'infini au fini, la discrétisation.

Pour opérer précisément à partir des équations mathématiques du modèle, deux méthodes sont très souvent utilisées, respectivement représentatives des méthodes de calcul déterministe, qui résolvent les équations régissant les phénomènes étudiés après avoir discrétiser les variables et des méthodes de calcul statiques ou probabiliste.

Le principe de la première, connue sous le nom de méthode des volumes finis, est antérieur à l'usage des ordinateurs. Chacun des points de l'objet est assimilé simplement à un petit volume élémentaire (un cube par exemple), d'où le nom de volume fini. Les paramètres de l'état de l'objet sont maintenant définis dans chaque maille du maillage. Pour chacune d'elles, on reformulant les équations mathématiques du modèle par des moyens volumiques, il sera alors possible de construire des relations algébriques entre les paramètres de la maille et ceux de ses voisins. Au total, il y aura autant de relations que de paramètres inconnus et il faudra pour cela recourir aux techniques de l'analyse numérique et programmer des algorithmes scientifiques.

L'accroissement de la puissance des ordinateurs a permis d'augmenter la finesse de discrétisation, permettant de passer de quelques dizaines de mailles dans les années soixante à plusieurs dizaines de milliers dans les années quatre-vingt, à des millions dans les années quatre-vingt-dix et jusqu'à la dizaine de milliards de mailles aujourd'hui.

La méthode des volumes finis s'applique dans des contextes physiques et mathématiques très variés. Elle autorise toute forme de maille (cube, hexaèdre, tétraèdre...) et le maillage peut être modifié durant le calcul, en fonction de critères géométriques ou physiques. Enfin, elle est aisée à mettre en œuvre dans le contexte des ordinateurs parallèles.

Appartiennent à la même famille la méthode des différences finies, cas particuliers de la méthode des volumes finis, et la méthode des éléments finis.

I.2. DEROULEMENT DE LA SIMULATION NUMERIQUE :

Il est souvent question d'expérience numérique pour souligner l'analogie entre la pratique d'une simulation numérique et la conduite d'une expérience de physique.

Cette dernière utilise un dispositif expérimental, configuré selon des conditions initiales (de température, de pression...) et des paramètres de contrôle (durée de l'expérience...). Durant l'expérience, le dispositif produit des points de mesures enregistrés. Ces enregistrements sont ensuite analysés et interprétés.

Dans une simulation numérique, le dispositif expérimental consiste en un ensemble de programmes informatiques exécutés sur des ordinateurs.

Les codes ou logiciels de calcul sont la traduction, à travers des algorithmes numériques, des formulations mathématiques des modèles physiques étudiés.

Chapitre II :

phénomènes de transport

II. PHENOMENE DE TRANSPORT :

II.1. LE TRANSPORT DIFFUSIF – LOIS PHENOMENOLOGIQUES DE LA DIFFUSION :

Les trois lois phénoménologiques de la diffusion (loi de Fick pour la diffusion chimique, loi de Fourier pour la diffusion thermique, loi de Newton pour le frottement visqueux), auxquelles on peut ajouter la loi d'Ohm pour le courant électrique et la loi de Darcy pour l'écoulement dans un milieu poreux, peuvent se mettre sous la forme : (Référence [3])

$$\vec{\varphi} = -\lambda \vec{\nabla} V \quad (\text{II.1})$$

Où : $\vec{\varphi}$: est la densité de flux diffusif de l'extensité ,
 V : le potentiel dont le gradient provoque la diffusion de l'extensité,
 λ : la conductivité de ce transport.

Plus la conductivité est grande (c'est-à-dire son inverse, la résistivité, est faible) moins le milieu oppose de résistance au transport.

L'équation (II.1) est déjà un cas particulier (référence [4]). Tout d'abord, elle ne tient aucun compte du transport diffusif d'une extensité (par exemple, la matière) sous l'action de gradients de potentiels divers (par exemple, la température : effet Soret). Une écriture générale nécessiterait l'emploi de l'ensemble des coefficients phénoménologiques d'Onsager. Ensuite, le transport diffusif de quantité de mouvement ne peut s'exprimer, sous une forme aussi simple que (II.1), que dans le cas d'un écoulement unidimensionnel ou de celui d'un fluide newtonien, incompressible, et à viscosité constante. Enfin, la conductivité est, sous sa forme générale, un tenseur à neuf composantes. Seul le cas de matériaux isotropes est traité ici. Lorsqu'on a affaire à des matériaux orthotropes fibreux comme le bois ou le graphite, par exemple, les transports dans différents directions ont des conductivités très différentes.

L'extensité spécifique (ici, par unité de masse), notée par la suite Φ , et le potentiel V , peuvent le plus souvent être reliés par une relation de type :

$$d\Phi = C dV \quad (\text{II.2})$$

Qui définit : $C = d\Phi / dV$, la capacité de l'extensité. On fait généralement apparaître le coefficient $\Gamma = \lambda / C$; la densité de flux diffusif devient alors [3] :

$$\vec{\varphi} = -\Gamma \vec{\nabla} \Phi \quad (\text{II.3})$$

Le tableau (II.1) présente l'analogie entre les trois lois phénoménologiques de la diffusion pour les transports de chaleur, de matière et de quantité de mouvement

(ainsi que pour le transport d'électricité). Comme on l'a déjà précisé, les lois utilisées sont des lois simplifiées, qui supposent entre autres que le milieu est incompressible. C'est l'analyse physique du problème à traiter qui permet de remplacer éventuellement ces lois par les lois de même type, qui peuvent être alors un peu plus complexes.

II-2. LE TRANSPORT CONVECTIF :

Lorsqu'en un point du système que l'on étudie, la vitesse barycentrique est différente de zéro, il existe un mouvement d'ensemble du milieu qui transporte la matière et les extensités associées, chaleur et quantité de mouvement. Ce mode de transport, appelé transport par convection est caractérisé par une densité de flux :

(référence [6])

$$\vec{\varphi} = \rho \phi \vec{v} \quad (1.4)$$

Où ρ est la masse volumique du système.

ϕ l'extensité spécifique (par unité de masse).

\vec{v} le vecteur vitesse instantanée.

La densité de flux massique convectif d'un constituant (i) dans un mélange est égale à $\rho \vec{v} \omega_i$ où ω_i est le titre massique de ce constituant, la densité de flux thermique convectif $\rho \vec{v} h$ où h est l'enthalpie massique et la densité de flux convectif de quantité de mouvement selon x , à $\rho \vec{v} v_x$

On voit que la densité de flux convectif du vecteur quantité de mouvement est un tenseur, comme l'est d'ailleurs la densité de flux diffusif (tenseur des contraintes).

	Extensité Φ	Densité de flux ϕ	Potentiel V	Conductivité λ	Capacité C
Transport de matière (constituant i)	m_i masse de i (kg)	ϕ_i densité de flux Massique ($\text{kg m}^{-2} \text{s}^{-1}$)	ρ_i concentration massique (kg m^{-3})	D_i coefficient de diffusion ($\text{m}^2 \text{s}^{-1}$)	$1/\rho$ inverse de la masse volumique totale ($\text{m}^3 \text{kg}^{-1}$)
Transport de chaleur	H enthalpie (J)	ϕ densité de flux de chaleur (W m^{-2})	T température absolue (K)	λ conductivité thermique ($\text{W m}^{-1} \text{K}^{-1}$)	C_p chaleur spécifique massique ($\text{J kg}^{-1} \text{K}^{-1}$)
Transport d'électricité	Q quantité d'électricité (cb)	j densité de courant (A m^{-2})	U potentiel électrique (V)	σ conductivité électrique ($\Omega^{-1} \text{m}^{-1}$)	C capacité électrique (F)
Transport de quantité de mouvement (pour un fluide newtonien)	$P_x = m v_x$ quantité de mouvement dans la direction x (kg m s^{-1})	τ contrainte de frottement (N m^{-2})	V_x vitesse dans la direction x (m s^{-1})	μ viscosité dynamique ($\text{kg m}^{-1} \text{s}^{-1}$)	1

Tableau II.1 : lois de la diffusion. Analogie entre les transports

II.3. L'EQUATION DE TRANSPORT CONVECTO-DIFFUSIF :

II.3.1. L'EQUATION GENERALE :

L'écriture d'un bilan différentiel d'une extensité quelconque conduit au résultat suivant :

Accumulation = - (sortie - entrée) + création

$$\frac{\partial (\rho \phi)}{\partial t} = - \operatorname{div} \vec{\varphi} + S \quad (\text{II.5})$$

Où $(\rho \phi)$ est l'extensité volumique et S la vitesse de création de l'extensité par unité de volume (quantité de l'extensité créée par unité de volume et de temps). Ce terme de création, qui est évidemment négatif lorsqu'il y a consommation de l'extensité, peut correspondre :

- pour le transport de matière, à la production (ou la disparition) de l'espèce i par réaction,
- pour le transport de quantité de mouvement, à une force de pression,
- pour le transport de chaleur, à un dégagement de chaleur par effet joule ou par frottement visqueux, ou du fait du travail des forces de pression ou encore à cause de l'exo- ou endo-thermicité des réactions chimiques

Dans l'équation (II.5), la densité de flux correspond à la somme des transports convectif et diffusif, soit, en remplaçant par leurs expressions (II.3) et (II.4) :

$$\frac{\partial}{\partial t} (\rho \phi) = - \operatorname{div} \left(\rho \phi \vec{v} - \Gamma \vec{\nabla} \phi \right) + S \quad (\text{II.6})$$

Après une légère modification, l'équation générale de transport prend sa forme définitive :

$$\frac{\partial}{\partial t} (\rho \phi) + \operatorname{div} \left(\rho \phi \vec{v} \right) = \operatorname{div} \left(\Gamma \vec{\nabla} \phi \right) + S \quad (\text{II.7})$$

L'universalité de l'équation générale de transport convecto-diffusif (II.7) a pour conséquence directe que la même méthode numérique peut être utilisée pour traiter l'ensemble des phénomènes de transport. En fait, toute l'équation aux dérivées partielles qui peut se mettre formellement sous la forme de l'équation (II.7), il suffira d'établir une correspondance terme à terme pour définir une 'extensité', une conductivité....

L'équation (II.7) est composée de quatre termes qui correspondent aux phénomènes physiques bien connus : accumulation convection ; diffusion et création. Selon le problème considéré, chacun de ces termes peut disparaître de l'équation. Par exemple, en régime permanent, le terme $\partial(\rho\phi)/\partial t$ est nul. pour un fluide idéal (viscosité nulle), ou un constituant ne diffusant pratiquement pas, le terme :

$div \left(\Gamma \vec{\nabla} \phi \right)$ disparaît..... Tout combinaison de ces phénomènes est bien sur possible. En cas de doute, on pourra toujours refaire la démarche complète en remplaçant les équation générales (II.1) à (II.4) par les équations correspondant au phénomène étudié.

Après un bref examen, il apparaît clairement que les dérivées du second ordre (de type $(\partial^2 \phi / \partial X^2)$) seront toujours dues à la présence des termes diffusifs. A l'inverse, les termes convectifs sont à l'origine des dérivées du premier ordre (type $\partial \phi / \partial x$) par rapport aux variables d'espace. Si, pour une variable d'espace donnée, le terme diffusif peut être négligé (ce qui signifie en pratique que le transport convectif dans la direction de cette variable est très important), l'équation sera dite parabolique par rapport à cette variable. Dans le cas contraire, ou la dérivée de second ordre est présente, l'équation sera elliptique par rapport à la variable d'espace. Un cas typique se rencontre lorsqu'on veut traiter un problème d'écoulement monodirectionnel avec transport de chaleur, comme le représente la figure (II-2)

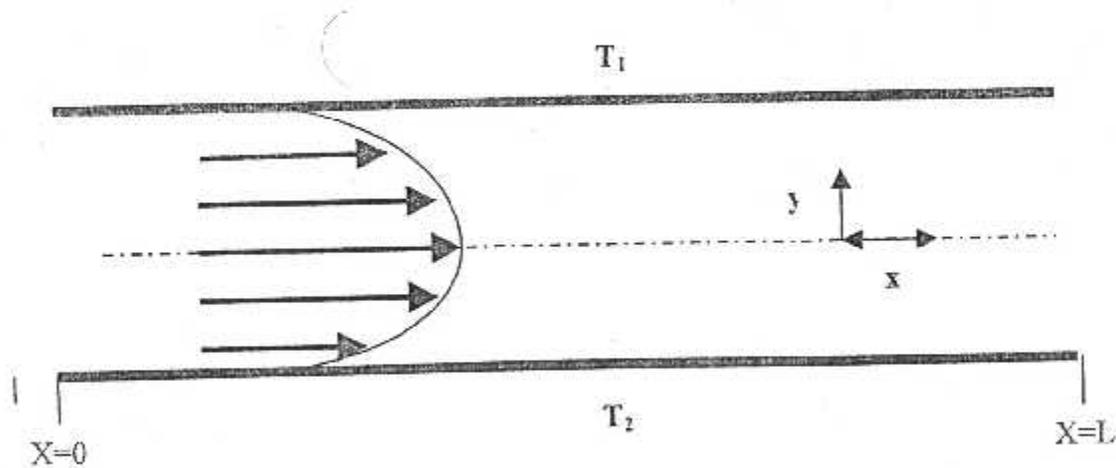


Figure II-2 : équation elliptique et parabolique

Entre deux plaques planes portés à des températures différentes, un fluide s'écoule parallèlement aux plaques. En régime permanent et sans terme de création, l'équation de transport de chaleur au sein de ce fluide sera, si les propriétés physiques (ρ, C_p, λ) sont indépendantes de la température (voir plus loin de la discussion de l'équation (II.22) :

$$\rho C_p v_x \frac{\partial T}{\partial X} = \lambda \left(\frac{\partial^2 T}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \right) \quad (II.8)$$

Si la vitesse v_x est suffisamment importante, ce qui peut être caractérisé par la valeur du nombre adimensionnel de Péclet $\rho C_p v_x L/y$, le terme diffusif (dérivée du second ordre) dans la direction x , $\lambda \partial^2 T / \partial X^2$, est négligeable par rapport au terme convectif (dérivée du premier ordre), $\rho C_p v_x \partial T / \partial x$. L'équation de transport de chaleur devient alors :

$$\rho C_p v_x \frac{\partial T}{\partial X} = \lambda \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \quad (II.9)$$

Selon nos définitions, il s'agit bien d'une équation parabolique suivant x et elliptique suivant y .

L'intérêt d'une telle distinction sera particulièrement mis en évidence quand nous en viendrons à l'étude des conditions aux limites. on peut immédiatement remarquer que l'équation de transport (II.7), en régime instationnaire, est toujours parabolique par rapport au temps.

II.2.2 CAS PARTICULIERS DE L'EQUATION GENERALE :

Nous allons à présent étudier quelques cas particuliers de l'équation générale. Correspondant au transport de matière, de quantité de mouvement, de chaleur ou d'autres extensités.

II.2.2-1 TRANSPORT DE MATIERE :

Lorsque l'extensité considérée est la masse d'un constituant i , l'équation générale de transport devient, en remplaçant terme à terme :

$$\frac{\partial}{\partial t} (\rho \omega_i) + \text{div} \left(\rho \omega_i \vec{V} \right) = \text{div} \left(D \rho \vec{\nabla} \omega_i \right) + S_i \quad (II.10)$$

Où ω_i est le titre massique en constituant i et S_i le taux volumique de production de i par réaction chimique.

Si l'extensité considérée Φ est la masse totale, l'extensité spécifique ϕ est alors égale à l'unité, et le flux de diffusion est nul. Par ailleurs, si l'on exclut le cas de réaction nucléaire, le terme de réaction est également nul. L'équation générale de transport (II.7) se réduit alors tout simplement à l'équation de continuité :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div} \left(\rho \vec{v} \right) = 0 \quad (II.11)$$

Il est très courant d'utiliser à la place de l'équation générale (II.7) une équation obtenue en retranchant de (II.7) le produit de l'équation de continuité par la variable d'extensité spécifique :

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + \rho \vec{v} \cdot \nabla \phi = \text{div} \left(\Gamma \nabla \phi \right) + S \quad (\text{II.12})$$

Alors que l'équation (II.7) provient directement d'un bilan différentiel et exprime la conservation de l'extensité Φ , l'équation (II.12) est le résultat d'une manipulation mathématique et n'a pas de signification physique absolue.

II.2.2.2. TRANSPORT DE QUANTITE DE MOUVEMENT :

Le transport de quantité de mouvement selon une direction x s'écrit, à partir de l'équation générale :

$$\frac{\partial}{\partial t} (\rho v_x) + \text{div} \left(\rho \vec{v} v_x \right) = \text{div} \left(\mu \nabla v_x \right) + S \quad (\text{II.13})$$

Dans le terme S interviennent alors principalement les forces volumiques (et en particulier la pesanteur ρg_x) et les forces de pression $-\partial p / \partial X$. Pour un fluide non newtonien en particulier, des termes de frottement visqueux supplémentaires peuvent apparaître, que nous négligerons dans la suite de cette étude. L'équation (II.13) devient alors la 'célèbre' équation de Navier-Stokes :

$$\frac{\partial}{\partial t} (\rho v_x) + \text{div} (\rho \vec{v} v_x) = -\frac{\partial p}{\partial x} + \text{div} \left(\mu \nabla v_x \right) + \rho g_x \quad (\text{1.14})$$

Des équations similaires régissent évidemment le transport des autres composantes de la quantité de mouvement.

II.2.2.4. TRANSPORT DE CHALEUR :

L'extensité transférée est ici l'enthalpie, ou quantité de chaleur (si on néglige le travail des forces de pression). Si h est l'enthalpie massique, on écrit directement l'équation de transport :

$$\frac{\partial}{\partial t} (\rho h) + \text{div} \left(\rho h \vec{v} \right) = \text{div} \left(\frac{\lambda}{C_p} \nabla h \right) + q \quad (\text{II.15})$$

Si, dans le domaine de température considéré, on peut supposer que la chaleur spécifique est constante, on peut alors poser :

$$h = C_p T + h_0 \quad (\text{II.16})$$

L'équation (II.16) devient alors :

$$C_p \frac{\partial}{\partial t} (\rho T) + C_p \operatorname{div} \left(\rho T \vec{v} \right) = \operatorname{div} \left(\lambda \vec{\nabla} T \right) + q \quad (\text{II.17})$$

Où, sous la forme non conservative (c'est-à-dire en retranchant le produit de température par l'équation de continuité (II.11)) :

$$\rho C_p \frac{\partial T}{\partial t} + \rho C_p \vec{v} \cdot \vec{\nabla} T = \operatorname{div} \left(\lambda \vec{\nabla} T \right) + q \quad (\text{II.18})$$

Cette équation reste correcte même si la chaleur spécifique varie avec la température. La démonstration devient simplement beaucoup plus fastidieuse. Par contre, elle n'est valable que s'il existe clairement une chaleur spécifique, c'est-à-dire en particulier que le système ne subit aucun changement de phase.

Si la conductivité thermique est également constante, l'équation (II.18) prend une forme condensée :

$$\frac{\partial T}{\partial t} + \vec{v} \cdot \vec{\nabla} T = \frac{\lambda}{\rho C_p} \nabla^2 T + \frac{q}{\rho C_p} \quad (\text{II.19})$$

qui est peut-être la plus connue de 'l'équation de la chaleur'.

II.2.2.5 TURBULENCE :

A ce stade, notons simplement que la résolution numérique des problèmes de transport dans un fluide en écoulement turbulent impose le plus souvent la résolution d'équations convecto-diffusives supplémentaires, telles que celle qui exprime le transport de l'énergie cinétique turbulence par unité de masse. Cette équation s'écrit :

$$\frac{\partial}{\partial t} (\rho k) + \operatorname{div} \left(\rho \vec{v} k \right) = \operatorname{div} \left(\Gamma_k \vec{\nabla} k \right) + S_k \quad (\text{1.22})$$

Les termes Γ_k et S_k ne seront pas explicités pour l'instant. Il nous suffit de savoir que sur le plan numérique, la nature laminaire ou turbulence de l'écoulement ne change rien à la méthode fondamentale de résolution.

Chapitre III :

conditions aux limites

III. CONDITIONS AUX LIMITES :

La résolution, par une méthode analytique ou numérique, de l'équation de transport convecto-diffusif nécessite la connaissance des conditions initiales et aux limites. Il existe fondamentalement trois types de conditions aux limites, qui portent sur la détermination de la densité de flux d'extensité à la frontière du système étudié (référence [3], [2]). Par ailleurs, la nature de l'équation, elliptique ou parabolique, par rapport aux différentes variables d'espace et de temps, impose le nombre (et en partie le type) de conditions aux limites nécessaires.

Nous allons tout d'abord passer en revue, les différentes catégories de conditions aux limites, puis nous examinerons les exigences mathématiques de l'équation aux dérivés partielles en ce qui concerne ces conditions aux limites.

III.1 LES TROIS SORTES DE CONDITIOONS AUX LIMITES :

A la frontière du système étudié, la densité du flux d'extensité normale $\vec{\phi} \cdot \vec{n}$, que nous noterons, est donnée par l'une des trois conditions aux limites suivantes.

III.1.1 CONDITION DE DIRICHLET :

La condition aux limites du type Dirichlet peut être considérée comme une forme asymptotique de la condition aux limites de Fourier linéarisée, avec une valeur infinie de coefficients de transport. Elle exprime en fait la connaissance de la valeur de l'extensité en un point de la frontière :

$$\phi = cte \quad (III.1)$$

Cette condition aux limites se rencontre classiquement :

- En transport de matière, pour exprimer l'équilibre thermodynamique avec une phase de composition connue.
- En transport de chaleur, lorsque des mesures de température sont disponibles, ou pour exprimer un contact parfait avec un milieu dont la température est connue (référence [4]).
- En mécanique des fluides, pour simuler une vitesse imposée, ou une vitesse nulle en un point au contact d'une paroi solide immobile.

La condition de Neumann exprime la connaissance de la valeur de φ en un point de la frontière, et s'écrit par conséquent en ce point :

$$\varphi = cte \quad (III.2)$$

La condition de Neumann est fréquemment utilisée :

- Lorsque des mesures expérimentales de flux ont été réalisées.
- Sous la forme $\varphi = 0$, pour représenter les conditions de symétrie.
- Egalement sous la forme $\varphi = 0$, pour simuler :
 - L'adiabatisme (transport de chaleur).
 - L'imperméabilité (transport de matière).
 - Le frottement nul (ou glissement parfait) à la surface libre d'un écoulement (transport de quantité de mouvement).

III.1.3 CONDITION DE FOURIER :

La condition de Fourier exprime l'existence d'une relation entre densité de flux normal et extensité spécifique en un point de la surface, et s'écrit de la manière générale :

$$\varphi = f(\phi) \quad (III.3)$$

Dans la majorité des cas, cette relation est linéaire. Un exemple typique est le transfert de chaleur à la surface d'un solide par convection de l'atmosphère ambiante. La densité de flux de chaleur sortant du solide peut s'exprimer sous la forme :

$$\varphi = h(T - T_{ext}) \quad (III.4)$$

Où T_{ext} est la température de l'air ambiant et h un coefficient de transfert, ou conductance, qui exprime la résistance thermique correspondant à l'établissement d'une couche limite d'air au voisinage de la surface. Ce coefficient de transfert thermique ne doit pas être confondu avec l'enthalpie massique, également notée h . l'expression de l'équation (III.4) à l'aide de la température plutôt que de l'enthalpie spécifique est très courante .

Une autre condition aux limites classique, pour le transport de chaleur, et le rayonnement d'une surface :

$$\varphi = \sigma \varepsilon (T^4 - T_{ext}^4) \quad (III.5)$$

Où σ est la constante de Stefan – Boltzmann et ε l'émissivité de la surface

Plus courantes que les conditions de Neumann, les conditions aux limites de Fourier sont faciles à prendre en compte d'un point de numérique. On essaiera systématiquement de se mettre sous la forme d'une loi telle que (III.4), le coefficient h étant alors, bien entendu, susceptible de dépendre de la valeur de ϑ .

III.2 QUELQUES CONSIDERATIONS MATHÉMATIQUES SUR LES CONDITIONS AUX LIMITES :

De manière générale, notons tout d'abord que l'écriture de conditions aux limites est nécessaire sur l'ensemble de la frontière du système étudié. Par contre, à l'intérieur même du système, la continuité de la densité de flux de transport à l'interface entre deux matériaux est une évidence physique, qui ne nécessite pas l'écriture de conditions aux limites particulières. Seule une éventuelle résistance de contact sera modélisée par le biais de l'existence entre les deux matériaux d'une densité de flux de la forme :

$$\varphi = h(\phi_1 - \phi_2) \quad (III.6)$$

Où ϕ_1 et ϕ_2 sont les valeurs de l'extensité spécifique massique ϕ en deux points infiniment voisins, mais appartenant à des milieux différents, et h un coefficient de transfert qui traduit la résistance interfaciale (on parle alors de transferts conjugués).

Une exception importante à la règle précédente (nécessité de condition aux limites sur l'ensemble des frontières) concerne les équations paraboliques par rapport à une variable d'espace x . Si l'on se réfère à la figure (II.1), par exemple, il est évident qu'aucune condition aux limites n'est nécessaire en $X = L$, la densité de flux et la température en ce point étant déterminées par l'état du système en amont, ceci est à rapprocher du fait que mathématiquement, l'équation parabolique correspond à une dérivée première (une seule condition aux limites) alors que l'équation elliptique correspond à une dérivée seconde (deux conditions aux limites).

Dans le cas de la figure (II.1), la seule condition aux limites selon la direction x nécessaire pour résoudre l'équation de transport de chaleur concerne la frontière $X = 0$. On parle en ce cas, et pour des raisons évidentes, de condition initiale. De la même manière, lorsque la variable considérée est le temps, seule une condition initiale est nécessaire.

Une cause courante de difficultés lors de la résolution numérique est ainsi la sur spécification de conditions aux limites pour les équations paraboliques par rapport à une variable d'espace. Ceci est souvent dû au fait que le caractère parabolique (dominé par le transport convectif) du problème traité a échappé alors de la modélisation mathématique.

Dans l'équation aux dérivées partielles, seules les dérivées de la variable ϑ apparaissent,

Afin de calculer, analytiquement ou numériquement, le champ d'extensité autrement qu' « à une constante près », une condition initiale, si elle existe, doit toujours être une condition de Dirichlet. S'il n'y a pas de condition initiale (problème totalement elliptique), il est nécessaire de faire apparaître de manière explicite la variable φ en au moins un point. Ainsi, une condition aux limites de type Dirichlet est requise au moins en un point de la frontière.

Chapitre IV :

concept de discrétisation

IV.1. DISCRETISATION PAR LA METHODE DES VOLUMES FINIS :

Le résultat obtenu à partir de la discrétisation d'une équation aux dérivées partielles est un ensemble fini de valeurs qui permet de reconstruire la forme de la solution. Dans ce sens, des instruments de mesure ont été implantés. Ces derniers doivent permettre de remonter à la grandeur que l'on veut étudier dans le domaine considéré. Ainsi le numéricien, tout comme l'expérimentateur, ne peuvent travailler qu'avec un nombre discret de valeurs, cet ensemble de valeurs devant être correctement choisi pour décrire fidèlement le comportement du domaine continu. On doit donc garder à l'esprit qu'il n'est pas seulement important d'obtenir une solution numérique, mais qu'il faut également s'assurer de la qualité de la discrétisation.

La méthode des volumes finis, que nous utilisons, permet d'obtenir un système d'équations algébriques, ou système discrétisé, dont les inconnues sont les valeurs de la grandeur recherchée en un nombre fini de points du domaine d'étude. Cet ensemble de points constitue le maillage du domaine.

Il s'agira ensuite de savoir résoudre ce système des équations algébriques.

De nombreux problèmes se situent déjà dans la classe des phénomènes de transports par diffusion, nous citerons : les écoulements potentiels, le transport de chaleur par conduction, le transport de masse par diffusion, les écoulements à travers un milieu poreux, les phénomènes diffusifs en électromagnétisme

IV.2. LE CONCEPT DE DISCRETISATION :

Le système d'équations algébriques est obtenu à partir de l'équation aux dérivées partielles de départ, dont nous appellerons ϕ l'inconnue. Pour se faire, il est nécessaire de faire des hypothèses sur la façon dont ϕ varie entre deux points du système discret, c'est-à-dire de choisir une loi de variation locale.

Nous sommes donc amené, pour obtenir un système discrétisé, à subdiviser le domaine d'étude. C'est cette discrétisation de l'espace et de temps, associé à la façon de prendre en compte les variations de ϕ entre deux points de maillage, qui permet de passer d'une équation aux dérivées partielles à un système d'équations algébriques.

Une équation discrétisée est une équation algébrique reliant les valeurs de ϕ en différents points du maillage. Une telle équation est obtenue à partir de l'équation aux dérivées partielles de départ et contient donc la même information physique. Le nombre de points pris en compte dans l'équation discrétisée dépend de la loi de variation locale choisie pour ϕ . L'équation discrétisée met en relation des points voisins dans le maillage ; de ce fait, la valeur de ϕ en un point influence essentiellement celles de ses voisins immédiats.

Pour une équation aux dérivées partielles donnée, l'équation discrétisée va dépendre du maillage et de la loi de variation locale. Toute bonne méthode de discrétisation doit être consistante, c'est-à-dire qu'elle doit conduire à la solution exacte de l'équation aux dérivées partielles quand on augmente indéfiniment le nombre de points du maillage. En effet, une augmentation du nombre de points entraîne une

diminution de la distance entre deux points voisins, ce qui réduit l'influence de la loi de variation locale. Il en découle que s'il n'est pas toujours possible de mailler finement tout un domaine, il faut s'attacher à mailler le plus finement possible les zones soumises à de fortes variations de ϕ .

IV.2. LA METHODE DES VOLUMES FINIS :

Le domaine d'étude est subdivisé en volumes de contrôle, ou cellules, qui ne se recouvrent pas et tel que chaque cellule englobe un point et un seul du maillage. L'équation aux dérivées partielles est intégrée sur chaque volume de contrôle, les lois de variations locale de ϕ étant utilisées pour estimer les termes de l'équation :

(référence [3])

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho\phi) + \text{div}(\rho\phi \vec{v}) = \text{div}(\Gamma \nabla \phi) + S \quad (\text{IV.1})$$

Pour chaque cellule, une équation discrétisée, reliant les valeurs de ϕ pour un ensemble de points du maillage, est ainsi obtenue.

L'équation discrétisée déterminée par cette méthode correspond à l'expression de la loi de conservation de l'extensité Φ sous sa forme intégrale (bilan global), comme l'équation aux dérivées partielles pour un élément de volume infinitésimal (bilan différentiel). La méthode des volumes finis permet donc d'assurer que la solution obtenue vérifie le principe de conservation sur chaque volume de contrôle et, de ce fait, sur le domaine complet. Ceci est indépendant du nombre de points du maillage.

IV.2. GEOMETRIE CARTESIENNE 1-D REGIME TRANSITOIRE :

IV.2.1. PRINCIPE D'UNE DISCRETISATION EN ESPACE ET EN TEMPS :

Pour un phénomène purement diffusif, monodirectionnel, la forme générale de l'équation de conservation s'écrit :

$$\frac{\partial(\rho\phi)}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\Gamma \frac{\partial \phi}{\partial x} \right) + S \quad (\text{IV.2})$$

Nous supposant que le terme source (S) est nul.

L'équation discrétisée est obtenue par intégration en espace, sur le volume de contrôle de la figure (IV.1) et en temps, entre deux instants t et $t + \Delta t$ il vient :

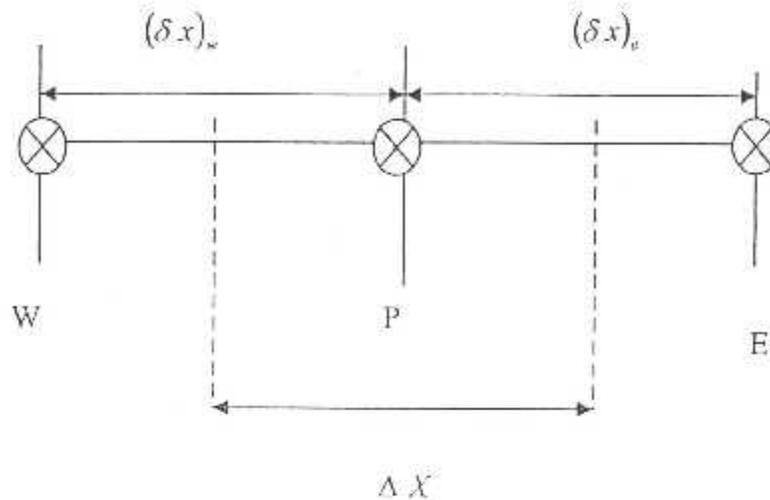


figure IV.1 : maillage monodirectionnel notation adoptées pour les voisins d'un point P et les dimensions caractéristiques

$$\int_w^{e} \int_i^{i+\Delta t} \frac{\partial(\rho\phi)}{\partial t} dt dx = \int_i^{i+\Delta t} \int_w^e \frac{\partial}{\partial x} \left(\Gamma \frac{\partial \phi}{\partial x} \right) dx dt \quad (\text{IV.3})$$

Soit encore :

$$\int_w^e [(\rho\phi)_{i+\Delta t} - (\rho\phi)_i] dx = \int_i^{i+\Delta t} \left[\left(\Gamma \frac{\partial \phi}{\partial x} \right)_e - \left(\Gamma \frac{\partial \phi}{\partial x} \right)_w \right] dt \quad (\text{IV.4})$$

On remarquera que la relation (IV.4) est la forme intégrale de l'équation aux dérivées partielles (IV.2). Il s'agit maintenant de choisir des lois de variation locale en temps et en espace, pour obtenir l'équation discrétisée.

La partie gauche de la relation (IV.4) est discrétisée en choisissant une loi de variation locale de type $\rho\phi$ constant dans une cellule. Donc l'équation (IV.4) s'écrit avec cette loi :

$$[(\rho\phi)^i - (\rho\phi)^0] \Delta x = \int_i^{i+\Delta t} \left[\left(\Gamma \frac{\partial \phi}{\partial x} \right)_e - \left(\Gamma \frac{\partial \phi}{\partial x} \right)_w \right] dt \quad (\text{IV.5})$$

L'exposant (0) désignera les valeurs prises à l'instant t et l'exposant (1) celle prise à l'instant $t + \Delta t$.

Pour discrétiser la partie droite de l'équation (IV.5), il faut tout d'abord choisir une loi de variation locale de $(\Gamma \frac{\partial \phi}{\partial x})$ en fonction du temps.

Il existe deux types de lois :

- Une loi de variation locale du type constante
- Une loi de type linéaire

Ces deux lois peuvent être envisagées :

- avec une loi de variation locale de type constante nous obtenons :

$$\int_t^{t+\Delta t} \left(\Gamma \frac{\partial \phi}{\partial x} \right) dt = \Delta t \left(\Gamma \frac{\partial \phi}{\partial x} \right)^0 \quad (\text{IV.6})$$

Ou

$$\int_t^{t+\Delta t} \left(\Gamma \frac{\partial \phi}{\partial x} \right) dt = \Delta t \left(\Gamma \frac{\partial \phi}{\partial x} \right)^1 \quad (\text{IV.7})$$

- Avec une loi du type linéaire il vient :

$$\int_t^{t+\Delta t} \left(\Gamma \frac{\partial \phi}{\partial x} \right) dt = \frac{\Delta t}{2} \left[\left(\Gamma \frac{\partial \phi}{\partial x} \right)^1 + \left(\Gamma \frac{\partial \phi}{\partial x} \right)^0 \right] \quad (\text{IV.8})$$

Ces trois possibilités peuvent s'écrire sous une forme générale :

$$\int_t^{t+\Delta t} \left(\Gamma \frac{\partial \phi}{\partial x} \right) dt = \left[f \left(\Gamma \frac{\partial \phi}{\partial x} \right)^1 + (1-f) \left(\Gamma \frac{\partial \phi}{\partial x} \right)^0 \right] \Delta t \quad (\text{IV.9})$$

Où f est un coefficient de pondération qui varie entre 0 et 1. Les trois lois données ci-dessus correspondent respectivement à $f = 0$, $f = 1$ et $f = 0,5$. Ces trois valeurs

aboutissent à des schémas classiques appelés respectivement schéma explicite ($f=0$), schéma de Crank-Nicolson ($f=0,5$), schéma implicite ($f=1$).

Les trois lois de variation locale correspondant à des trois schémas sont représentées sur la figure (IV.2).

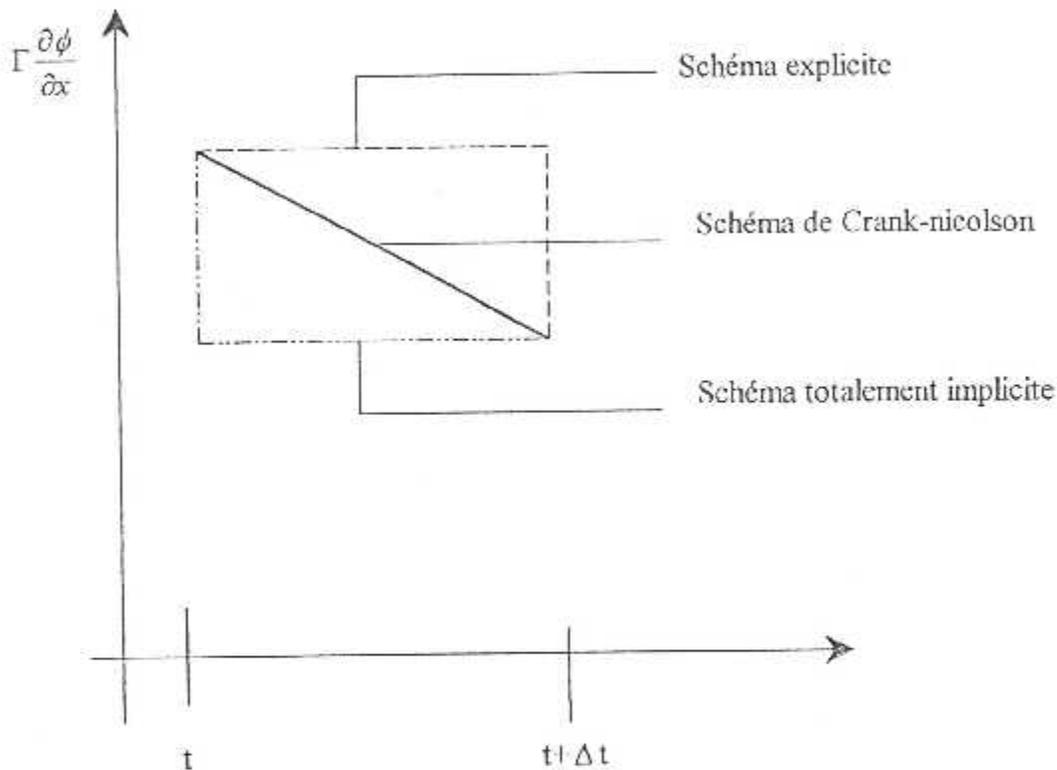


figure (IV.2) : lois de variation locale pour la discrétisation en temps

L'équation (IV.5) est maintenant discrétisée sous la forme :

$$\left[(\rho\phi)^1 - (\rho\phi)^0 \right] \frac{\Delta x}{\Delta t} = f \left[\left(\Gamma \frac{\partial\phi}{\partial x} \right)_e^1 - \left(\Gamma \frac{\partial\phi}{\partial x} \right)_w^1 \right] + (1-f) \left[\left(\Gamma \frac{\partial\phi}{\partial x} \right)_e^0 - \left(\Gamma \frac{\partial\phi}{\partial x} \right)_w^0 \right] \quad (\text{IV.10})$$

Les différentes valeurs de $(\Gamma \partial\phi/\partial x)$ sont déterminées à partir d'une loi de variation locale linéaire ; il vient :

$$a_P^1 \phi_P^1 = f a_E^1 \phi_E^1 + b \quad (\text{IV.11})$$

Avec :

$$a_E^1 = \frac{\Gamma_e^1}{(\delta x)_e} \quad a_W^1 = \frac{\Gamma_w^1}{(\delta x)_w} \quad a_E^0 = \frac{\Gamma_e^0}{(\delta x)_e} \quad a_W^0 = \frac{\Gamma_w^0}{(\delta x)_w}$$

$$a_p^0 = \rho^0 \frac{\Delta x}{\Delta t} \quad b = a_p^0 \phi_p^0 + (1-f) [a_E^0 (\phi_E^0 - \phi_p^0) - a_W^0 (\phi_p^0 - \phi_W^0)]$$

$$a_p^1 = \rho^1 \frac{\Delta x}{\Delta t} + f a_E^1 + f a_W^1$$

IV.2.2. STABILITE DES SCHEMAS DE DISCRETISATION TEMPORELLE :

Examinons plus en détail les trois principaux schémas : explicite, Crank-Nicolson et implicites. Dans toute la discussion qui suit, nous considérerons que Γ et ρ sont constants, et ne distinguerons donc plus a_E^0 et a_E^1, \dots

Le schémas explicite est obtenu en posant $f = 0$ dans l'équation (4.12) soit :

$$a_p \phi_p^1 = a_E \phi_E^0 + a_W \phi_W^0 + (a_p - a_E - a_W) \phi_p^0 \quad (\text{IV.13})$$

La valeur de ϕ_p à l'instant $t + \Delta t$ ne dépend pour ce schéma que des valeurs de ϕ à l'instant précédent. Ainsi, le calcul de ϕ à chaque pas de temps ne nécessite pas la résolution d'un système linéaire. Cependant le schéma explicite souffre d'une sérieuse limitation. En effet, si l'on perturbe ϕ_p^0 et ϕ_p^1 doit suivre la perturbation dans le même sens, pour ce faire, il faut que :

$$a_p - a_E - a_W > 0$$

Ce qui signifie, en considérant un maillage régulier, que le pas de temps ne doit pas dépasser a valeur limite :

$$\Delta t < \rho \frac{\Delta X^2}{2\Gamma} \quad (\text{IV.14})$$

Si cette condition n'est pas remplie, des solutions sans aucun sens physique peuvent être obtenues.

La condition (IV.14) est un critère classique de stabilité du schéma explicite :

Elle a pu être retrouvée ici uniquement à partir de considérations physiques.

Ce critère peut conduire à des temps de calcul longs car plus on veut raffiner le maillage, plus il faut réduire le pas de temps.

Nous allons illustrer la différence entre les trois schémas à partir d'un problème simple. Nous considérons dans l'équation discrétisée (IV.12) que ϕ_E et ϕ_W sont nuls. Dans ce cas, pour maillage régulier, nous déduisons de (IV.12) la relation :

$$\frac{\phi_p^1}{\phi_p^0} = \frac{1 - \lambda(1-f)}{1 + \lambda f}$$

avec : $\lambda = \frac{2 \Gamma \Delta t}{\rho \Delta x^2}$

Le fait que ϕ_E et ϕ_W soient toujours nuls nécessite que ϕ_p tend vers zéro lorsque t tend vers l'infini. La raison de la suite géométrique $(\phi_p)^t$ doit donc être en valeur absolue inférieure à 1, Les variations de ϕ^1_p / ϕ^0_p sont fonction de λ .

Pour les trois schémas, seul le schéma implicite conduit à des valeurs positives quelle que soit la valeur de λ . Pour des grandes valeur de λ , le schéma de Crank-Nicolson donne pour ϕ^1_p / ϕ^0_p une valeur comprise entre -1 et 0, ce qui signifie que les valeurs de ϕ vont osciller entre des valeurs positives et négatives en tendant vers zéro.

Le rapport ϕ^1_p / ϕ^0_p devient inférieur à -1 avec le schémas explicite si $\lambda > 2$; les oscillations de ϕ ne sont alors plus amorties et la solution diverge.

Ainsi, le schéma implicite répondant aux critères de simplicité et de réalité physique de la solution, nous l'utiliserons de préférence. Il est cependant reconnu que le schéma de Crank-Nicolson est plus précis que le schéma implicite pour des petits pas de temps. Ce résultat était prévisible car pour de petits pas de temps les variations de ϕ en fonction du temps sont presque linéaires, tandis que le schéma implicite décrit des variations exponentielles.

Remarquons enfin que la stabilité 'inconditionnelle' du schéma implicite n'est assurée en toute rigueur que pour un système linéaire.

VI.2.3.FORME DE L EQUATION DISCRETISEE AVEC LE SCHEMA IMPLICITE :

Si nous réintégrons le terme source que nous avons supposé nul pour la présentation du schéma dans l'équation (IV.11), en supposant toujours ρ et Γ constants, nous obtenons la forme générale de l'équation discrétisée avec le schéma totalement implicite :

$$a_E \phi_P = a_E \phi_E + a_W \phi_W + b \tag{4.15}$$

$$a_E = \frac{\Gamma_e}{(\delta x)_e}$$

$$a_w = \frac{\Gamma_w}{(\delta x)_w}$$

$$a_p^0 = a_E + a_w + a_p^0 - S_p \Delta x$$

$$b = S_C \Delta x + a_p^0 \phi_p^0$$

Dans l'équation (IV.15), on remarquera que si le pas du temps tend vers l'infini, on retrouve la forme générale de l'équation discrétisée obtenue dans le cas du régime permanent.

IV.3. DISCRETISATION PAR LA METHODE DES DIFFERENCES FINIES :IV.3.1. EQUATION DE LA DIFFUSION (INSTATIONNAIRE) :IV.3.1.1. POSITION DU PROBLEME :

– Soit une colonne de section uniforme dont la **température n** varie avec la hauteur. Il y aura toujours un échange de chaleur entre les zones de température différente : il s'agit de la diffusion.

Soit D est le coefficient de diffusion
(référence [7], [9])

En A on peut écrire :

$$\delta N_x = -D \left(\frac{\partial n}{\partial x} \right)_{\delta x} \delta t \quad \text{Loi de Fourier} \quad (\text{IV.16})$$

– De même, en B :

$$\delta N_{x+\delta x} = -D \left(\frac{\partial n}{\partial x} \right)_{x+\delta x} \delta t \quad (\text{IV.17})$$

– Nous pouvons de plus écrire le Développement Limité :

$$\left(\frac{\partial n}{\partial x} \right)_{x+\delta x} = \left(\frac{\partial n}{\partial x} \right)_x + \left(\frac{\partial^2 n}{\partial x^2} \right)_x \delta x \quad (\text{IV.18})$$

– Dans le volume délimité par A et B, le changement net de la chaleur est égal à (ce qui rentre – ce qui sort) donc la variation de température dans ce volume δx sera :

$$\lim_{\delta x \rightarrow 0} (\delta n) = \lim_{\delta x \rightarrow 0} \left(\frac{\delta N_x - \delta N_{x+\delta x}}{\delta x} \right) = D \frac{\partial^2 n}{\partial x^2} \delta t \quad (\text{IV.19})$$

– Et finalement :

$$\lim_{\delta t \rightarrow 0} \left(\frac{\delta n}{\delta t} \right) = \frac{\partial n}{\partial t} = D \frac{\partial^2 n}{\partial x^2} \quad (\text{IV.20})$$

– L'équation aux dérivées partielles est l'équation de diffusion. Elle apparaît très fréquemment dans la description de la propagation de très nombreux phénomènes physiques.

$$\frac{\partial n}{\partial t} = D \frac{\partial^2 n}{\partial x^2} \quad (\text{IV.21})$$

– Ce sont des problèmes « à valeurs initiales » qui se développent en temps. On ne peut les inverser en temps sous peine de provoquer un comportement chaotique.

IV.3.2. EQUATION DE DIFFUSION SCHEMA EXPLICITE :

IV.3.2.1. OBJECTIF:

Déterminer l'évolution temporelle de la température dans l'ensemble de notre domaine.

– La quantité n dépend de deux variables : $n(x,t)$ une discrétisation des dimensions temporelles et spatiales en un maillage régulier va nous donner :

$$n(i, j) = n(x = i * \Delta x, t = j * \Delta t) \quad (\text{IV.22})$$

– Si la solution est connue à un instant donné, il est possible de déterminer toute l'évolution ultérieure du champ en utilisant une méthode décentrée en avant pour la dérivée temporelle. Une méthode de type « différences centrées » peut être utilisée pour la diffusion.

$$\left(\frac{\partial n}{\partial t} \right)_{i,j} = \frac{n(i, j+1) - n(i, j)}{\Delta t} \quad \left(\frac{\partial^2 n}{\partial x^2} \right)_{i,j} = \frac{n(i+1, j) - 2n(i, j) + n(i-1, j)}{\Delta x^2}$$

$$\boxed{\frac{n(i, j+1) - n(i, j)}{\Delta t} = D \frac{n(i+1, j) - 2n(i, j) + n(i-1, j)}{(\Delta x)^2}} \quad (\text{IV.23})$$

Posons :

$$r = \frac{D \Delta t}{(\Delta x)^2} \quad (\text{IV.24})$$

La résolution du système s'écrit alors:

$$\boxed{n(i, j+1) = r [n(i+1, j) + n(i-1, j)] + (1-2r)n(i, j)} \quad (\text{IV.25})$$

Si les conditions initiales et limites sont connues, alors les concentrations en tout points et à tout instants peuvent être déterminées.

IV.3.3. EQUATION DE LA DIFFUSION SCHEMA IMPLICITE :

IV.3.3.1.METHODE IMPLICITE DE CRANK-NICOLSON :

– Nous avons écrit pour la méthode explicite l'expression décentrée de la dérivée temporelle. Cependant, cette même expression peut être considérée comme la dérivée centrée au point $(i, j+1/2)$.

$$\left(\frac{\partial n}{\partial t}\right)_{i,j+1/2} = \frac{n(i, j+1) - n(i, j)}{\Delta t} \quad (\text{IV.27})$$

– Nous avons de plus les expressions suivantes :

$$\left(\frac{\partial^2 n}{\partial x^2}\right)_{i,j} = \frac{n(i+1, j) - 2n(i, j) + n(i-1, j)}{(\Delta x)^2} \quad (\text{IV.28})$$

$$\left(\frac{\partial^2 n}{\partial x^2}\right)_{i,j+1} = \frac{n(i+1, j+1) - 2n(i, j+1) + n(i-1, j+1)}{(\Delta x)^2} \quad (\text{IV.29})$$

– Méthode de Crank-Nicolson :

$$\left(\frac{\partial n}{\partial t}\right)_{i,j+1/2} = D \left(\frac{\partial^2 n}{\partial x^2}\right)_{i,j+1/2} \quad (\text{IV.30})$$

– Avec

$$\left(\frac{\partial^2 n}{\partial x^2}\right)_{i,j+1/2} = \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial^2 n}{\partial x^2}\right)_{i,j+1} + \left(\frac{\partial^2 n}{\partial x^2}\right)_{i,j} \right] \quad (\text{IV.31})$$

– Soit, en rassemblant tous les éléments :

$$\boxed{\frac{n(i, j+1) - n(i, j)}{\Delta t} = \frac{D}{2} \left[\frac{n(i+1, j+1) - 2n(i, j+1) + n(i-1, j+1)}{(\Delta x)^2} + \frac{n(i+1, j) - 2n(i, j) + n(i-1, j)}{(\Delta x)^2} \right]}$$

- EQUATION RESOUDRE :

$$\begin{aligned} & -rn(i-1, j+1) + 2(1+r)n(i, j+1) - rn(i+1, j+1) \\ & = rn(i-1, j) + 2(1-r)n(i, j) + rn(i+1, j) \end{aligned} \quad (IV.32)$$

Schéma implicite : la solution a l'instant t (ou j) donne une relation linéaire entre les valeurs en différents points a l'instant t+dt (ou j+1) et ne donne pas chaque valeur t+dt de manière explicite.

Un système tridiagonal devra donc être résolu.

IV.3.3.2. SHEMA DE LEAPFROGOU SAUT DE GRENOUILLE :

Retour aux méthodes explicites : pourquoi ne pas utiliser une dérivée centrée pour la variation temporelle :

$$\frac{n(i, j+1) - n(i, j-1)}{2\Delta t} = D \frac{n(i+1, j) - 2n(i, j) + n(i-1, j)}{(\Delta x)^2}$$

Soit :

$$n(i, j+1) = n(i, j-1) + 2r [n(i+1, j) + n(i-1, j) - 2n(i, j)] \quad (IV.33)$$

- Pour calculer $n(i, j+1)$, il nous faut $n(i, j-1)$ et $n(i, j)$. Il faut donc un starter.

- Méthode assez instable (oscillations)

IV.4. CONSISTANCE ET CONVERGENCE :

- Une méthode est convergente si, lorsque les pas de temps et d'espace tendent vers 0, la solution approchée tend vers la solution exacte.

$$(\Delta x \rightarrow 0, \Delta t \rightarrow 0) \Rightarrow f_t = f(x_t)$$

- Une condition nécessaire à la convergence est la consistance des équations. En effet, lorsque les pas de temps et d'espace tendent vers 0, les équations approchées doivent tendre vers l'équation analytique.

IV.4.1. CONSISTANCE METHODE EXPLICITE :

- Pour illustrer la consistance, deux outils mathématiques sont nécessaires.

- Développement limité de Taylor.

$$f(X+h) = f(X) + hf'(X) + \frac{h^2}{2}f''(X) + \dots + \frac{h^n}{n!}f^{(n)}(X) + R_{n+1} \quad (IV.34)$$

$$R_{n+1} = \frac{h^{n+1}}{(n+1)!}f^{(n+1)}(\xi), \xi \in]X, X+h[$$

IV.4.1.1. Théorème :

Si une fonction $f(x)$ est continue sur l'intervalle entre x_1 et x_2 alors il est possible d'écrire $f(x_1) + f(x_2) = 2f(x_3)$ où x_3 appartient à l'intervalle x_1, x_2 .

- Reprenons la relation obtenue pour la méthode explicite :

$$n(i, j+1) = r[n(i+1, j) + n(i-1, j)] + (1-2r)n(i, j)$$

- Les valeurs n sont les valeurs approchées de la solution exacte N . Il est possible d'écrire :

$$n(i, j) = N(i, j) - \varepsilon(i, j)$$

- ε est l'erreur sur la valeur n .

$$\boxed{\begin{aligned} \varepsilon(i, j+1) &= r[\varepsilon(i+1, j) + \varepsilon(i-1, j)] + (1-2r)\varepsilon(i, j) \\ &+ r[N(i+1, j) + N(i-1, j)] + (1-2r)N(i, j) - N(i, j+1) \end{aligned}} \quad (IV.35)$$

- Développement limité :

$$N(i+1, j) = N(i, j) + \frac{\partial N(i, j)}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial^2 N(\eta_1, t_j)}{\partial x^2} \frac{(\Delta x)^2}{2}, \eta_1 \in]x_i, x_{i+1}[$$

$$N(i-1, j) = N(i, j) - \frac{\partial N(i, j)}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial^2 N(\eta_2, t_j)}{\partial x^2} \frac{(\Delta x)^2}{2}, \eta_2 \in]x_{i-1}, x_i[$$

$$N(i, j+1) = N(i, j) + \frac{\partial N(x_i, \xi)}{\partial t} \Delta t, \xi \in]t_j, t_{j+1}[$$

- En incluant ces expressions et celle pour r dans l'équation 1:

$$\begin{aligned} \varepsilon(i, j+1) &= r[\varepsilon(i+1, j) + \varepsilon(i-1, j)] + (1-2r)\varepsilon(i, j) \\ &- \Delta t \left[\frac{\partial N(x_i, \xi)}{\partial t} - \frac{D}{2} \left[\frac{\partial^2 N(\eta_1, t_j)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 N(\eta_2, t_j)}{\partial x^2} \right] \right] \quad (2) \end{aligned}$$

$\varepsilon(i, j)$ prend des valeurs différentes (>0 ou <0) en fonction de i . Définissons $E(j)$ comme la plus grande magnitude de ces valeurs. Considérons que dans le cas où le calcul est avancé à t_{j+1} , alors :

$$Q = \text{Max} \left[\left[\frac{\partial N(x_i, \xi)}{\partial t} - \frac{D}{2} \left\{ \frac{\partial^2 N(\eta_1, t_j)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 N(\eta_2, t_j)}{\partial x^2} \right\} \right] \right]$$

Tant que $1-2r \geq 0$ et en imposant la valeur maximale pour chaque terme de l'équation 2, alors :

$$\begin{aligned} |\varepsilon(i, j+1)| &\leq r \{E(j) + E(j)\} + (1-2r)E(j) + Q \Delta t \\ |\varepsilon(i, j+1)| &\leq E(j) + Q \Delta t \end{aligned}$$

- La relation précédente est vraie quel que soit i , y compris celui qui donne la magnitude maximale de $\varepsilon(i, j+1)$

$$E(j+1) \leq E(j) + Q \Delta t \quad (\text{IV.36})$$

- Par extension, nous trouvons :

$$E(j+1) \leq E(j) + Q \Delta t \leq E(j-1) + 2Q \Delta t \leq \dots \leq E(0) + nQ \Delta t$$

- En supposant que le calcul démarre d'une valeur correcte

$$E(0) = 0$$

- De plus :

$$(\Delta t \rightarrow 0, \Delta x \rightarrow 0) \Rightarrow$$

$$\left[\frac{\partial N(x_i, \xi)}{\partial t} - \frac{D}{2} \left\{ \frac{\partial^2 N(\eta_1, t_j)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 N(\eta_2, t_j)}{\partial x^2} \right\} \right] \rightarrow \left[\frac{\partial N}{\partial t} - D \frac{\partial^2 N}{\partial x^2} \right]$$

- Et par définition du problème

$$\left[\frac{\partial N}{\partial t} - D \frac{\partial^2 N}{\partial x^2} \right] = 0 \quad (\text{IV.37})$$

Nous avons donc montré que si $(\Delta t \rightarrow 0, \Delta x \rightarrow 0)$ et $r \leq 1/2$, la solution numérique tend vers la solution analytique.

La méthode est donc consistante.

IV.4.2. CONSISTANCE – CRANK-NICOLSON :**IV.4.2.1 RAPPEL DE LA METHODE :**

$$\begin{aligned} & -rn(i-1, j+1) + 2(1+r)n(i, j+1) - rn(i+1, j+1) \\ & = rn(i-1, j) + 2(1-r)n(i, j) + rn(i+1, j) \end{aligned} \quad (1)$$

- Introduisons :

$$n(i, j) = N(i, j) + \varepsilon(i, j)$$

$$\begin{aligned} & r\varepsilon(i-1, j+1) - 2(1+r)\varepsilon(i, j+1) + r\varepsilon(i+1, j+1) \\ & = -r\varepsilon(i-1, j) - 2(1-r)\varepsilon(i, j) - r\varepsilon(i+1, j) \\ & -rN(i-1, j+1) + 2(1+r)N(i, j+1) - rN(i+1, j+1) \\ & -rN(i-1, j) - 2(1-r)N(i, j) - rN(i+1, j) \end{aligned} \quad (IV.38)$$

- Développement en séries de Taylor :

$$\begin{aligned} rN(i-1, j+1) &= rN(i, j+1) - r \frac{\partial N(x_i, t_{j+1})}{\partial x} \Delta x + r \frac{\partial^2 N(\eta_1, t_{j+1}) (\Delta x)^2}{\partial x^2 \cdot 2} \\ rN(i+1, j+1) &= rN(i, j+1) + r \frac{\partial N(x_i, t_{j+1})}{\partial x} \Delta x + r \frac{\partial^2 N(\eta_2, t_{j+1}) (\Delta x)^2}{\partial x^2 \cdot 2} \end{aligned} \quad (IV.39)$$

- Avec :

$$\eta_1 \in]x_{i-1}, x_i[\text{ et } \eta_2 \in]x_i, x_{i+1}[$$

- En additionnant les 3 termes en t_{j+1} et ceux en t_j :

$$\begin{aligned} S_{j+1} &= 2N(i, j+1) - r \frac{(\Delta x)^2}{2} \left\{ \frac{\partial^2 N(\eta_1, t_{j+1})}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 N(\eta_2, t_{j+1})}{\partial x^2} \right\} \\ S_j &= 2N(i, j) - r \frac{(\Delta x)^2}{2} \left\{ \frac{\partial^2 N(\eta_3, t_j)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 N(\eta_4, t_j)}{\partial x^2} \right\} \end{aligned} \quad (IV.40)$$

$$\text{Avec } \eta_3 \in]x_{i-1}, x_i[\text{ et } \eta_4 \in]x_i, x_{i+1}[$$

- La somme de tous les termes impliquant N s'écrit :

$$S = S_j + S_{j+1} = 2N(i, j+1) - 2N(i, j) - r \frac{(\Delta x)^2}{2} \left\{ \frac{\partial^2 N(\eta_1, t_{j+1})}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 N(\eta_2, t_{j+1})}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 N(\eta_3, t_j)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 N(\eta_4, t_j)}{\partial x^2} \right\} \quad (\text{IV.41})$$

– Le terme A se compose de 4 termes dépendants de deux variables : l'une spatiale et l'autre temporelle. En appliquant une version bidimensionnelle du théorème précédemment écrit, nous avons :

$$A = 4 \frac{\partial^2 N(\eta', \xi')}{\partial x^2}, \eta' \in [x_{i-1}, x_{i+1}] \text{ et } \xi' \in [t_j, t_{j+1}]$$

$$\text{Et donc } S = S_j + S_{j+1} = 2N(i, j+1) - 2N(i, j) - 2r (\Delta x)^2 \frac{\partial^2 N(\eta', \xi')}{\partial x^2}$$

– Un développement limité donne :

$$2N(i, j+1) = 2N(i, j) + 2 \frac{\partial N(x_i, \xi)}{\partial t} \Delta t$$

– En combinant les deux dernières équation et en donnant à r sa valeur,

$$S = 2 \frac{\partial N(x_i, \xi)}{\partial t} \Delta t - 2 \frac{D \Delta t}{(\Delta x)^2} (\Delta x)^2 \frac{\partial^2 N(\eta', \xi')}{\partial x^2} = 2 \Delta t \left\{ \frac{\partial N(x_i, \xi)}{\partial t} - D \frac{\partial^2 N(\eta', \xi')}{\partial x^2} \right\}$$

- Et finalement, nous obtenons,

$$\boxed{\begin{aligned} r\varepsilon(i-1, j+1) - 2(1+r)\varepsilon(i, j+1) + r\varepsilon(i+1, j+1) \\ = -r\varepsilon(i-1, j) - 2(1-r)\varepsilon(i, j) - r\varepsilon(i+1, j) + 2Q\Delta t \end{aligned}} \quad (\text{IV.42})$$

Lorsque $(\Delta t \rightarrow 0, \Delta x \rightarrow 0)$ alors $Q \rightarrow \left| \frac{\partial N}{\partial t} - D \frac{\partial^2 N}{\partial x^2} \right| = 0$

– Et finalement, nous obtenons,

$$\begin{aligned} & r\varepsilon(i-1, j+1) - 2(1+r)\varepsilon(i, j+1) + r\varepsilon(i+1, j+1) \\ & = -r\varepsilon(i-1, j) - 2(1-r)\varepsilon(i, j) - r\varepsilon(i+1, j) + 2Q\Delta t \end{aligned}$$

Lorsque $(\Delta t \rightarrow 0, \Delta x \rightarrow 0)$ alors $Q \rightarrow \left| \frac{\partial N}{\partial t} - D \frac{\partial^2 N}{\partial x^2} \right| = 0$

- La méthode implicite de Crank-Nicolson est donc consistante.
- En effet, résoudre l'équation précédente avec $Q=0$ et une condition initiale exacte (ce qui signifie $\varepsilon(i,0)=0$) alors nous avons la solution $\varepsilon(i,0)=0$ qui est donc, par récursivité valable pour tout temps.

IV.5. STABILITE :

- Un système est convergent si il est à la fois consistant et stable.
- La stabilité nous indique si l'erreur augmente ou non au cours du calcul. Si, au départ modeste, l'erreur augmente fortement et dépasse des limites raisonnables, le système est instable.
- Au contraire, si l'erreur est contenue dans un domaine suffisamment petit, le système est stable.

IV.5.1- STABILITE – METHODE EXPLICITE :

- L'équation de base de la méthode explicite :

$$n(i, j+1) = r[n(i+1, j) + n(i-1, j)] + (1-2r)n(i, j) \quad (\text{IV.43})$$

- Peut s'écrire sous une forme matricielle :

$$n_{j+1} = A n_j + b_j \quad (1)$$

- Le vecteur :

$$n_j = \{n(1, j), n(2, j), \dots, n(M-1, j)\}$$

Contient les valeurs centrales du problème et :

$$b_j = \{rn(0, j), 0, \dots, rn(M, j)\}$$

Les conditions aux limites. Le problème 1D a été divisé en M segments (et donc M+1 points).

La matrice carrée A est tridiagonale, et vaut, pour M=7:

$$\begin{bmatrix} 1-2r & r & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ r & 1-2r & r & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & r & 1-2r & r & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & r & 1-2r & r & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & r & 1-2r & r & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & r & 1-2r & r \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & r & 1-2r \end{bmatrix} \quad (\text{IV.44})$$

IV.5.2. CALCUL DE L'ERREUR :

Supposons que l'équation (1) est exacte mais ajoutons l'erreur via un vecteur spécifique.

$$(n_{j+1} + \varepsilon_{j+1}) = A (n_j + \varepsilon_j) + b_j$$

- Ce qui nous donne, en soustrayant cette équation avec l'éq. 1: $\varepsilon_{j+1} = A \varepsilon_j$
- Ceci montre que la propagation de l'erreur est entièrement contrôlée par les propriétés de la matrice A.

- Or l'application répétée d'une matrice à un vecteur arbitraire non nul donne la relation

$$Ax = \lambda x$$

- Où λ est la principale valeur propre (c'est-à-dire celle qui a la plus grande magnitude) et est le vecteur propre correspondant.

- La matrice A est successivement multipliée par le vecteur erreur ε . Qui peut être considéré comme le vecteur arbitraire nécessaire au calcul de la valeur propre. Au bout d'un certain temps, chaque vecteur erreur est égal au vecteur précédent, la valeur propre principale λ . Donc si $|\lambda| > 1$ l'erreur ne fera que s'accroître et le système sera instable. Par contre si $|\lambda| \leq 1$ l'erreur sera stable (si =1) ou diminuera et le système convergera.

- La matrice A va avoir M-1 valeurs propres.
- Il est possible de montrer qu'elles sont de la forme :

$$\lambda_m = 1 - 4r \sin^2 \left(\frac{m\pi}{2M} \right), \quad m = 1, \dots, M-1$$

- La donnée r étant positive, il est évident que les valeurs propres ne peuvent être supérieure à 1. Cependant, elles ne doivent pas être inférieure à -1. Nous avons donc la conditions suivantes à vérifier $1 - 4r \geq -1$: ce qui nous impose le fait : $r \leq 0.5$

- Donc si $r \leq 0.5$ alors le système est inconditionnellement stable.

IV.5.3. STABILITE – CRANK-NICOLSON :

L'équation matricielle de la méthode de Crank-Nicolson donne :

$$A n_{j+1} + b_{j+1} = B n_j + h_j$$

$$A = \begin{bmatrix} 2(1+r) & -r & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -r & 2(1+r) & -r & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -r & 2(1+r) & -r & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -r & 2(1+r) & -r & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -r & 2(1+r) & -r & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -r & 2(1+r) & -r \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -r & 2(1+r) \end{bmatrix}$$

(IV.45)

$$B = \begin{bmatrix} 2(1-r) & r & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ r & 2(1-r) & r & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & r & 2(1-r) & r & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & r & 2(1-r) & r & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & r & 2(1-r) & r & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & r & 2(1-r) & r \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & r & 2(1-r) \end{bmatrix}$$

- Avec :

$$n_{j+1} = \{n(1, j+1), n(2, j+1), n(3, j+1), n(4, j+1), n(5, j+1), n(6, j+1)\}$$

$$n_j = \{n(1, j), n(2, j), n(3, j), n(4, j), n(5, j), n(6, j)\}$$

$$b_{j+1} = \{n(0, j+1), 0, 0, 0, 0, n(7, j+1)\}$$

$$h_j = \{n(0, j), 0, 0, 0, 0, n(7, j)\}$$

- Avec un raisonnement similaire au cas précédent, on obtient :

$$A \varepsilon_{j+1} = B \varepsilon_j \Rightarrow \varepsilon_{j+1} = A^{-1} B \varepsilon_j$$

- Et, par analyse de la matrice

$$A^{-1}B$$

$$\lambda_m = \frac{2 - 4r \sin^2(m \pi / 2M)}{2 + 4r \sin^2(m \pi / 2M)}$$

- La méthode est inconditionnellement stable car :

$$\left. \begin{array}{l} r = 0 \Rightarrow \lambda = 1 \\ r = \infty \Rightarrow \lambda = -1 \end{array} \right\} \Rightarrow |\lambda| < 1 \quad (\text{IV.46})$$

IV.6. METHODE DES ELEMENTS FINIS :**IV.6.1. GEOMETRIE RECTANGULAIRE :**

La méthode des éléments finis est utilisée pour les schémas suivants :

- schéma explicite
- schéma implicite
- schéma de Crank-Nicolson

La formulation de éléments finis choisie est celle de Galerkin. La fonction test $\Psi(x)$ choisi dans notre cas est du type linéaire et vérifie bien les conditions aux limites.

Prenons l'exemple du problème suivant (transport diffusif) que l'on traitera avec le schéma explicite : (référence [5], [8])

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial T}{\partial t} = \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \right) \end{array} \right. \quad \text{(IV.47)}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial T}{\partial x} = 0 \end{array} \right. \quad x = 0 \quad \text{(IV.48)}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} T = 0 \end{array} \right. \quad x = 1 - vt \quad \text{(IV.49)}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} T = 1 \end{array} \right. \quad t = 0 \quad \text{(IV.50)}$$

Tout d'abord les deux membre de l'équation (IV.47) sont multipliés par $\Psi(x)$, puis nous intégrés selon le domaine $[0, 1 - vt]$.

IV.6.2. SCHEMA EXPLICITE :

L'équation (IV.1) est discrétisée comme suit :

$$\frac{\partial T}{\partial t} \Big|_k = \frac{T^{k+1} - T^k}{\Delta x}; \quad \text{(IV.51)}$$

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \right)^2 \quad \text{(IV.52)}$$

L'intégration sur le domaine $[0, 1 - \nu t]$ de l'équation (IV.47) donne la forme suivante :

$$\frac{1}{\Delta t} \int_0^{1-\nu t} T^{k+1} \Psi_i dx = \Psi_i(1-\nu t) \dot{T}^k(1-\nu t) - \Psi_i(0) \dot{T}^k(0) + \frac{1}{\Delta t} \int_0^{1-\nu t} T^k \Psi_i dx - \int_0^{1-\nu t} T^k \dot{\Psi}_i dx \quad (\text{IV.53})$$

Avec : $\frac{\partial T}{\partial x} = \dot{T}$

Pour les nœuds intérieurs : $2 \leq i \leq N-1$

D'après les conditions initiales, les fonctions tests sont telles que :

L'on a : $\begin{cases} \Psi_i(0) = 0 \\ \Psi_i(1 - \nu t) = 0 \end{cases}$

Ainsi l'équation (IV.53) s'écrira :

$$\frac{1}{\Delta t} \int_0^{1-\nu t} T^{k+1} \Psi_i dx = \frac{1}{\Delta t} \int_0^{1-\nu t} T^k \Psi_i dx - \int_0^{1-\nu t} T^k \dot{\Psi}_i dx \quad (\text{IV.54})$$

Les solutions $T(x)$ sont approximés par :

$$\left\{ \begin{array}{l} T^k = \sum_{j=1}^N T_j^k \Psi_j \end{array} \right. \quad (\text{IV.55})$$

$$\left\{ \begin{array}{l} T^{k+1} = \sum_{j=1}^N T_j^{k+1} \Psi_j \end{array} \right. \quad (\text{IV.56})$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{T}^k = \sum_{j=1}^N T_j^k \dot{\Psi}_j \end{array} \right. \quad (\text{IV.57})$$

L'équation (IV.54) devient donc :

$$\frac{1}{\Delta t} \int_0^{1-\nu t} \left(\sum_{j=1}^N (T_j^{k+1} \Psi_j) \right) \Psi_i dx = \frac{1}{\Delta t} \int_0^{1-\nu t} \left(\sum_{j=1}^N (T_j^k \Psi_j) \right) \Psi_i dx - \int_0^{1-\nu t} \left(\sum_{j=1}^N (T_j^k \dot{\Psi}_j) \right) \dot{\Psi}_i dx \quad (\text{IV.58})$$

Le membre de gauche de (IV.58) est évalué comme suit

$$\int_0^{1-\eta} \left(\sum_{j=1}^N (T_j^{K+1} \Psi_j) \right) \Psi_i dx = \int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} \left(\sum_{j=1}^N (T_j^{K+1} \Psi_j) \right) \Psi_i dx$$

$$= \int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} T_{i-1}^{K+1} \Psi_{i-1} \Psi_i dx + \int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} T_i^{K+1} \Psi_i \Psi_i dx + \int_{x_i}^{x_{i+1}} T_{i+1}^{K+1} \Psi_{i+1} \Psi_i dx \quad \text{(IV.59.a)}$$

$$= \left(\frac{\Delta x}{6} \right) T_{i-1}^{K+1} + \left(\frac{2\Delta x}{3} \right) T_i^{K+1} + \left(\frac{\Delta x}{6} \right) T_{i+1}^{K+1} \quad \text{(IV.59.b)}$$

Ensuite, le premier terme du membre de droite de (IV.58) est évalué comme suit :

$$\int_0^{1-\eta} \left(\sum_{j=1}^N (T_j^K \Psi_j) \right) \Psi_i dx = \int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} \left(\sum_{j=1}^N (T_j^K \Psi_j) \right) \Psi_i dx$$

$$= \int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} T_{i-1}^K \Psi_{i-1} \Psi_i dx + \int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} T_i^K \Psi_i \Psi_i dx + \int_{x_i}^{x_{i+1}} T_{i+1}^K \Psi_{i+1} \Psi_i dx \quad \text{(IV.60.a)}$$

$$= \left(\frac{\Delta x}{6} \right) T_{i-1}^K + \left(\frac{2\Delta x}{3} \right) T_i^K + \left(\frac{\Delta x}{6} \right) T_{i+1}^K \quad \text{(IV.60.b)}$$

Le second terme du membre de droite de (IV.58) est évalué :

$$\int_0^{1-\eta} \left(\sum_{j=1}^N (T_j^K \dot{\Psi}_j) \right) \dot{\Psi}_i dx = \int_{x_{i-1}}^{x_i} \left(\sum_{j=1}^N (T_j^K \dot{\Psi}_j) \right) \dot{\Psi}_i dx + \int_{x_i}^{x_{i+1}} \left(\sum_{j=1}^N (T_j^K \dot{\Psi}_j) \right) \dot{\Psi}_i dx$$

$$= \int_{x_{i-1}}^{x_i} T_{i-1}^K \dot{\Psi}_{i-1} \dot{\Psi}_i dx + \int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} T_i^K \dot{\Psi}_i \dot{\Psi}_i dx + \int_{x_i}^{x_{i+1}} T_{i+1}^K \dot{\Psi}_{i+1} \dot{\Psi}_i dx \quad \text{(IV.61.a)}$$

$$= \left(-\frac{1}{\Delta x} \right) T_{i-1}^K + \left(\frac{2}{\Delta x} \right) T_i^K + \left(-\frac{1}{\Delta x} \right) T_{i+1}^K \quad \text{(IV.61.b)}$$

Finalement pour les nœuds intérieurs on obtient la formulation suivante :

$$\begin{aligned} \left(\frac{\Delta x}{6\Delta t}\right)T_{i-1}^{k+1} + \left(\frac{2\Delta x}{3\Delta t}\right)T_i^{k+1} + \left(\frac{\Delta x}{6\Delta t}\right)T_{i+1}^{k+1} = \\ \left(\frac{\Delta x}{6\Delta t} + \frac{1}{\Delta x}\right)T_{i-1}^k + \left(\frac{2\Delta x}{3\Delta t} - \frac{2}{\Delta x}\right)T_i^k + \left(\frac{\Delta x}{6\Delta t} + \frac{1}{\Delta x}\right)T_{i+1}^k \end{aligned} \quad (\text{IV.62})$$

POUR LES NŒUDS EXTERIEURS :

Utilisons la condition à la frontière fixe $x = 0$:

$$1) \quad x=0 : \left.\frac{\partial T}{\partial x}\right|_x=0 = 0 \quad \text{donc} : \dot{T}^k(0)=0$$

L'équation générée pour le nœud $i = 1$ ($x = 0$) sera donnée par :

$$\frac{1}{\Delta t} \int_0^{1-w} T^{k+1} \Psi_1 dx = \Psi_1(1-w) \dot{T}^k(1-w) - \Psi_1(0) \dot{T}^k(0) + \frac{1}{\Delta t} \int_0^{1-w} T^k \Psi_1 dx - \int_0^{1-w} T^k \dot{\Psi}_1 dx \quad (\text{IV.63})$$

Et puisque :

$$\Psi_1(0) = 0$$

$$\Psi_1(1-w) = 0$$

Donc l'équation (IV.63) devient :

$$\frac{1}{\Delta t} \int_0^{1-w} \left(\sum_{j=1}^N (T_j^{k+1} \Psi_j) \right) \Psi_1 dx = \frac{1}{\Delta t} \int_0^{1-w} \left(\sum_{j=1}^N (T_j^k \Psi_j) \right) \Psi_1 dx - \int_0^{1-w} \left(\sum_{j=1}^N (T_j^k \dot{\Psi}_j) \right) \dot{\Psi}_1 dx \quad (\text{IV.64})$$

Le membre de gauche de (IV.64) est évalué comme suit :

$$\int_0^{1-w} \left(\sum_{j=1}^N (T_j^{k+1} \Psi_j) \right) \Psi_1 dx = \int_{x=0}^{x_1} \left(\sum_{j=1}^N (T_j^{k+1} \Psi_j) \right) \Psi_1 dx$$

$$= \int_{x_0}^{x_2} T_1^{k+1} \Psi_1 \Psi_1 dx + \int_{x_0}^{x_2} T_2^{k+1} \Psi_2 \Psi_1 dx \quad (\text{IV.65.a})$$

$$= \frac{\Delta x}{3} T_1^{k+1} + \frac{\Delta x}{6} T_2^{k+1} \quad (\text{IV.65.b})$$

Ensuite, le premier terme du membre de droite l'équation (IV.64) est évalué :

$$\int_0^{1-w} \left(\sum_{j=1}^N (T_j^k \Psi_j) \right) \Psi_1 dx = \int_{x=0}^{x_2} \left(\sum_{j=1}^N (T_j^k \Psi_j) \right) \Psi_1 dx$$

$$= \int_{x_0}^{x_2} T_1^k \Psi_1 \Psi_1 dx + \int_{x_0}^{x_2} T_2^k \Psi_2 \Psi_1 dx \quad (\text{IV.66.a})$$

$$= \frac{\Delta x}{3} T_1^k + \frac{\Delta x}{6} T_2^k \quad (\text{IV.67.b})$$

Le second terme du membre de droite de (IV.64) est évalué :

$$\int_0^{1-w} \left(\sum_{j=1}^N (T_j^k \dot{\Psi}_j) \right) \dot{\Psi}_1 dx = \int_{x_1=0}^{x_2} \left(\sum_{j=1}^N (T_j^k \dot{\Psi}_j) \right) \dot{\Psi}_1 dx$$

$$= \int_{x_0}^{x_2} T_1^k \dot{\Psi}_1 \dot{\Psi}_1 dx + \int_{x=0}^{x_2} T_2^k \dot{\Psi}_2 \dot{\Psi}_1 dx \quad (\text{IV.68.a})$$

$$= \frac{1}{\Delta x} T_1^k - \frac{1}{\Delta x} T_2^k \quad (\text{IV.68.b})$$

Donc finalement en $i = 1$ ($x = 0$) le schéma explicite sera donné par :

$$\left(\frac{\Delta x}{3\Delta t} \right) T_1^{k+1} + \left(\frac{\Delta x}{6\Delta t} \right) T_2^k = \left(\frac{\Delta x}{3\Delta t} - \frac{1}{\Delta x} \right) T_1^k + \left(\frac{\Delta x}{6\Delta t} + \frac{1}{\Delta x} \right) T_2^k \quad (\text{IV.69})$$

2) En $x=1-wt : T^{k+1} = 0$

Donc finalement le schéma explicite pour les éléments finis est donné par la forme algébrique suivante :

$$i=1 : \left(\frac{\Delta x}{3\Delta t}\right)T_1^{k+1} + \left(\frac{\Delta x}{6\Delta t}\right)T_2^k = \left(\frac{\Delta x}{3\Delta t} - \frac{1}{\Delta x}\right)T_1^k + \left(\frac{\Delta x}{6\Delta t} + \frac{1}{\Delta x}\right)T_2^k \quad (\text{IV.70.a})$$

$$i = 2, N-1 : \left(\frac{\Delta x}{6\Delta t}\right)T_{i-1}^{k+1} + \left(\frac{2\Delta x}{3\Delta t}\right)T_i^{k+1} + \left(\frac{\Delta x}{6\Delta t}\right)T_{i+1}^{k+1} =$$

$$\left(\frac{\Delta x}{6\Delta t} + \frac{1}{\Delta x}\right)T_{i-1}^k + \left(\frac{2\Delta x}{3\Delta t} - \frac{2}{\Delta x}\right)T_i^k + \left(\frac{\Delta x}{6\Delta t} + \frac{1}{\Delta x}\right)T_{i+1}^k \quad (\text{IV.70.b})$$

$$i = N : T_N^{k+1} = 0 \quad (\text{IV.70.c})$$

Chapitre V :

résolution de l'équation matricielle

V. RESOLUTION DES SYSTEMES D'EQUATIONS LINEAIRES-METHODES DIRECTES :

V.1. INTRODUCTION :

Dans la pratique scientifique, l'ingénieur se trouve souvent confronté à des problèmes dont la résolution passe par celle d'un système d'équations qui modélisent les divers éléments considérés. Ainsi, la détermination de :

- contraintes et déplacement dans les structures mécaniques chargées.
- débits de chaleur dans des réseaux de chauffage.
- la solution numérique d'équations différentielles partielles (méthode des différences finies ou élément finis).

Où le nombre d'équations peut-être de plusieurs milliers.

On se rend facilement compte que la résolution d'un système linéaire est aisée relativement a celle d'un système non linéaire

• LE PROBLEME DE CRAMER :

Dans cette partie, nous nous intéressons à la résolution simultanée de n équations à n inconnus (référence [2])

$$\left\{ \begin{array}{l} a_{11}X_1 + a_{12}X_2 + \dots + a_{1n}X_n = b_1 \\ a_{21}X_1 + a_{22}X_2 + \dots + a_{2n}X_n = b_2 \\ \dots\dots\dots \\ a_{n1}X_1 + a_{n2}X_2 + \dots + a_{nn}X_n = b_n \end{array} \right. \quad (\text{V.1})$$

Que l'on notera aussi :

$$\sum_{j=1}^n a_{ij}X_j = b_i \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (\text{V.2})$$

Où encore:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ \cdot \\ X_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \cdot \\ b_n \end{bmatrix} \quad (\text{V.3})$$

Où:

$$Ax = b \quad (V.4)$$

Nous cherchons à résoudre le problème de Cramer où la condition :

$r(A) = r(A, b) = n$ est vérifiée

$r(A)$ note le rangé de A définie dans l'équation (V.4)

V.2. METHODES DIRECTES ET METHODES ITERATIVES :

On sépare généralement les problèmes en deux classes suivant les caractéristiques de la matrice A :

1. la matrice A est de taille réduite et est pleine. Par taille réduite, on comprend les matrices d'ordre inférieur à 100, par matrice pleine, on signifie que A comporte peu d'éléments nuls ;

2. la matrice A est creuse et de grande taille. De grande taille on nomme les matrices d'ordres égaux à plusieurs centaines ou plusieurs milliers.

La matrice creuse possède peu d'éléments non nuls. Un réarrangement approprié permet souvent de positionner les éléments non nuls près de la diagonale principale. On rencontre ces matrices lors de la résolution numérique des équations différentielles partielles.

Suivant la catégorie, on emploie souvent une approche différente. On doit remarquer que la taille des matrices de la deuxième catégorie pose des problèmes de tailles mémoire, même sur les plus gros ordinateurs.

Il est à remarquer qu'il n'existe pas de règle définitive pour le choix entre les méthodes directes et les méthodes itératives sont rarement utilisées pour la résolution des systèmes à matrices pleines et de faibles dimensions et les méthodes itératives sont généralement préférées pour résoudre les systèmes de grande taille, en grande partie car la matrice n'étant pas transformée au cours des calculs, le problème de l'accumulation de erreurs devient moins crucial.

Il y a, cependant, une certaine polémique à ce sujet.

Une méthode directe conduit à une solution en un nombre fini d'étapes, et sans les erreurs d'arrondis cette solution serait celle du système.

Une méthode itérative fait passer d'un estimé $x^{(k)}$ de la solution à un autre estimé $x^{(k+1)}$ de cette solution.

S'il y a convergence, la solution ne pourrait donc être atteinte qu'après un nombre infini d'itérations.

• METHODES SANS PIVOTATION :

V.3. SYSTEME LINEAIRE A MATRICE A PARTICULIERE :

V.3.1. SYSTEME LINEAIRE A MATRICE A TRIANGULAIRE INFERIEUR :

Soit le système cramerien d'ordre n : $Ax = b$

Où A est une matrice triangulaire inférieure. Développons ce système :

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} X_j = b_i \quad i = 1, 2, \dots, n$$

Où $a_{ij} = 0$ quand $j > i$, il équivaut donc à :

$$b_i = \sum_{j=1}^i a_{ij} X_j = \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} X_j + a_{ii} X_i \quad i = 1, n$$

Si on connaît les $(i-1)$ premiers éléments de x , le $i^{\text{ème}}$ s'écrit :

$$\boxed{X_i = \frac{1}{a_{ii}} \left[b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} X_j \right]} \quad i = 1, n \quad (\text{V.5})$$

V.3.2-SYSTEME A MATRICE A TRIANGULAIRE SUPERIEUR :

Si dans le système cramerien :

$$AX = b$$

A est matrice triangulaire supérieure on a :

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} X_j = b_i \quad i = 1, n$$

Où $a_{ij} = 0$ si $j < i$ Il équivaut donc à :

$$b_i = \sum_{j=i}^n a_{ij} X_j = \sum_{j=i+1}^n a_{ij} X_j + a_{ii} X_i \quad i = 1, n$$

X_i s'obtient donc aisément par le calcul à rebours suivant :

$$X_i = \frac{1}{a_{ii}} \left[b_i - \sum_{j=i+1}^n a_{ij} X_j \right] \quad i = n, n-1, \dots, 1 \quad (\text{V.6})$$

V.3.3. SYSTEME A MATRICE DIAGONALE :

Soit le système :

$$Ax = b$$

Où A une matrice diagonale .la solution x s'obtient immédiatement par :

$$X_i = \frac{b_i}{a_{ii}} \quad i = 1, n \quad (V.7)$$

V.4. SYSTEME A MATRICE A QUELCONQUE, METHODE DE CRAMER :

C'est certainement la méthode la plus connue de résolution des systèmes linéaires. Toutefois, nous allons voir que on l'écrit :

$$X = A^{-1} b \quad (V.8)$$

Elle consiste à calculer A^{-1} et à lui post-multiplier le vecteur b .

• NOMBRE D'OPERATIONS :

On calcul successivement :

- le déterminant de A avec $(e.n)!$ additions et multiplications
- les n^2 termes de A^{-1} avec $e.(n-1)!$ Additions et multiplications chacun.
- Le produit de $A^{-1}b$ avec n^2 multiplications

Soit environs : $e.n! + n^2.e(n-1)! + n^2$ opérations.

Pour un petit système (exemple : $n=10$), le nombre d'opérations $\approx 3.10^9$

Pour un système moyen (exemple : $n=50$), le nombre d'opérations $\approx 7.10^{67}$.

Or, certaines méthodes de résolutions comme celles des éléments finis peuvent générer des systèmes où n est très grand, par exemple $n=10^4$ équations

La méthode de cramer est donc impraticable au sens du temps de calcul. De plus, l'erreur cumulée d'arrondie croissant avec le nombre d'opérations, la précision des résultats resterait extrêmement douteuse pour les systèmes moyens et grands .

Nous allons voir des méthodes demandant moins d'opérations.

V.5. SYSTEMES A MATRICE A QUELCONQUE, METHODE DE GAUSS :

-THEOREME DE GAUSS

Etant donnée une matrice carrée A quelconque, il existe des matrices inversibles S tel que :

$SA=A'$ ou, A' est une matrice triangulaire supérieur.

V.5.1 PRINCIPE :

La méthode de GAUSS consiste à transformer les systèmes $Ax = b$ à matrice quelconque en un système équivalent $A'x=b'$ ou A' est une matrice triangulaire supérieure, la résolution de ce dernier système étant immédiate avec l'algorithme du système à matrice triangulaire supérieure qu'on a précédemment vu la

triangularisation est effectuée par le jeu des transformations élémentaires introduites par prémultiplication de (A, b) par des matrices de PERLIS.

V.5.2. DESCRIPTION DE LA METHODE :

Soit le système suivant :

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix} \quad (\text{V.9})$$

Sachant que les mêmes transformations seront opérées sur A et sur b afin de ne pas modifier le système, on simplifie l'algorithme en formant la matrice augmentée [A,b] ou le vecteur b devient la (n+1)^{ème} colonne de la matrice A.

Le système s'écrit donc :

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{1,n+1} \\ a_{2,n+1} \\ \vdots \\ a_{n,n+1} \end{bmatrix} \quad (\text{V.10})$$

La méthode comporte (n-1) étapes.

- PREMIERE ETAPE :

On transforme (A,b) en une matrice dont les termes sont diagonaux de la première colonne sont nulles : $a_{21}^{(1)} = a_{31}^{(1)} = \dots = a_{n1}^{(1)} = 0$ (l'indice (1) au dessus des a notant l'étape1).

Prémultiplions [A,b] par $E_{21}(-a_{21}/a_{11})$. Seule la seconde ligne est modifiée et ces termes deviennent :

$$\begin{bmatrix} a_{21}^{(1)} & = & a_{21} & - (a_{21}/a_{11}) & a_{11} & = & 0 \\ a_{22}^{(1)} & = & a_{22} & - (a_{21}/a_{11}) & a_{12} & & \\ \dots & & \dots & \dots & \dots & & \\ a_{2,n+1}^{(1)} & = & a_{2,n+1} & - (a_{21}/a_{11}) & a_{1,n+1} & & \end{bmatrix}$$

Ou sous forme générale :

$$a_{2j}^{(1)} = a_{2j} - \left(\frac{a_{21}}{a_{11}} \right) a_{1j} \quad j=2, \dots, n+1 \quad (\text{V.11})$$

Prémultipliant $[A, b]$ par $E_{31}(-a_{31}/a_{11})$ nous modifions la troisième ligne ou les nouveaux termes sont :

$$\begin{cases} a_{32}^{(1)} = a_{32} - \left(\frac{a_{31}}{a_{11}} \right) a_{12} \\ a_{33}^{(1)} = a_{33} - \left(\frac{a_{31}}{a_{11}} \right) a_{13} \\ \dots \\ a_{1,n+1}^{(1)} = a_{1,n+1} - \left(\frac{a_{31}}{a_{11}} \right) a_{1,n+1} \end{cases}$$

Soit sous forme condensée :

$$a_{3j}^{(1)} = a_{3j} - \left(\frac{a_{31}}{a_{11}} \right) a_{1j} \quad j=2, n+1 \quad (\text{V.12})$$

D'une manière générale pour annuler le terme a_{i1} on utilise la transformation

$$E_{i1}(-a_{i1}/a_{11})$$

Ce qui donne les nouveaux termes de la $i^{\text{ème}}$ ligne :

$$\begin{cases} a_{i2}^{(1)} = a_{i2} - \left(\frac{a_{i1}}{a_{11}} \right) a_{12} \\ a_{i3}^{(1)} = a_{i3} - \left(\frac{a_{i1}}{a_{11}} \right) a_{13} \\ \dots \\ a_{i,n+1}^{(1)} = a_{i,n+1} - \left(\frac{a_{i1}}{a_{11}} \right) a_{1,n+1} \end{cases}$$

Donc la première étape s'écrit sous forme générale :

$$a_{ij}^{(k)} = a_{ij} - \left(\frac{a_{i1}}{a_{11}} \right) a_{1j} \quad \begin{cases} i=2, 3, \dots, n \\ j=2, 3, \dots, n+1 \end{cases} \quad (\text{V.13})$$

Après la première étape, le système $[A, b]^{(1)}$ s'écrit :

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22}^{(1)} & a_{23}^{(1)} & \dots & a_{2n}^{(1)} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & a_{n2}^{(1)} & a_{n3}^{(1)} & \dots & a_{nn}^{(1)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ \dots \\ X_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{1,n+1} \\ a_{2,n+1}^{(1)} \\ \dots \\ a_{n,n+1}^{(1)} \end{bmatrix}$$

- DEUXIEME ETAPE :

Au cours de cette phase, nous devons annulé les termes sous diagonaux de la seconde colonne : $a_{32}^{(2)} = a_{42}^{(2)} = \dots = a_{n2}^{(2)} = 0$

Pré multiplions $[A, b]^{(1)}$ par $E_{32}(-a_{32}^{(1)}/a_{22}^{(1)})$ la troisième ligne devient alors :

$$\begin{bmatrix} a_{32}^{(2)} & = a_{32}^{(1)} & - \left(a_{32}^{(1)}/a_{22}^{(1)} \right) & .a_{22}^{(1)} & = 0 \\ a_{33}^{(2)} & = a_{33}^{(1)} & - \left(a_{32}^{(1)}/a_{22}^{(1)} \right) & .a_{23}^{(1)} & \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \\ a_{3,n+1}^{(2)} & = a_{3,n+1}^{(1)} & - \left(a_{32}^{(1)}/a_{22}^{(1)} \right) & .a_{2,n+1}^{(1)} & \end{bmatrix}$$

Soit :

$$a_{3j}^{(2)} = a_{3j}^{(1)} - \left(a_{32}^{(1)}/a_{22}^{(1)} \right) a_{2j}^{(1)} \quad j = 3, \dots, n+1 \quad (V.14)$$

De même, prémultiplications $[A, b]^{(1)}$ par $E_{i2}(-a_{i2}^{(1)}/a_{22}^{(1)})$ pour Modifier la i-ème ligne comme suit :

$$\begin{bmatrix} a_{i2}^{(2)} & = a_{i2}^{(1)} & - \left(a_{i2}^{(1)}/a_{22}^{(1)} \right) & .a_{22}^{(1)} & = 0 \\ a_{i3}^{(2)} & = a_{i3}^{(1)} & - \left(a_{i2}^{(1)}/a_{22}^{(1)} \right) & .a_{23}^{(1)} & \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \\ a_{i,n+1}^{(2)} & = a_{i,n+1}^{(1)} & - \left(a_{i2}^{(1)}/a_{22}^{(1)} \right) & .a_{2,n+1}^{(1)} & \end{bmatrix}$$

La deuxième étape s'écrit :

$$a_{ij}^{(2)} = a_{ij}^{(1)} - \left(a_{i2}^{(1)}/a_{22}^{(1)} \right) a_{2j}^{(1)} \quad \left\{ \begin{array}{l} i=3, \dots, n \\ j=3, \dots, n+1 \end{array} \right. \quad (5.15)$$

A la fin de cette deuxième étape, le système $[A, b]^{(2)}$ devient :

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22}^{(1)} & a_{23}^{(1)} & \dots & a_{2n}^{(1)} \\ 0 & 0 & a_{33}^{(2)} & \dots & a_{3n}^{(2)} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & a_{n3}^{(2)} & \dots & a_{nn}^{(2)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \chi_1 \\ \chi_2 \\ \chi_3 \\ \vdots \\ \chi_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{1,n+1} \\ a_{2,n+1}^{(1)} \\ a_{3,n+1}^{(2)} \\ \vdots \\ a_{n,n+1}^{(2)} \end{bmatrix}$$

-K-ième ETAPE:

Au cours de cette étape, on veut annuler les termes sous diagonaux de la K-ième colonne

$$a_{k+1,k}^{(k)} = a_{k+2,k}^{(k)} = \dots = a_{n,k}^{(k)} = 0$$

Prémultiplions $[A, b]^{(k-1)}$ par la matrice de transformation:

$$E_{k+1,k} \left(-a_{k+1,k}^{(k-1)} / a_{kk}^{(k-1)} \right)$$

La (k+1) i-ème ligne de $[A, b]^{(k-1)}$ devient :

$$\begin{bmatrix} a_{k+1,k}^{(k)} = a_{k+1,k}^{(k-1)} - \left(a_{k+1,k}^{(k-1)} / a_{kk}^{(k-1)} \right) a_{kk}^{(k-1)} = 0 \\ a_{k+1,k+1}^{(k)} = a_{k+1,k+1}^{(k-1)} - \left(a_{k+1,k}^{(k-1)} / a_{kk}^{(k-1)} \right) a_{k,k+1}^{(k-1)} \\ \dots \\ a_{k+1,n}^{(k)} = a_{k+1,n}^{(k-1)} - \left(a_{k+1,k}^{(k-1)} / a_{kk}^{(k-1)} \right) a_{k,n}^{(k-1)} \end{bmatrix}$$

Soit:

$$a_{k+1,j}^{(k)} = a_{k+1,j}^{(k-1)} - \left(a_{k+1,k}^{(k-1)} / a_{kk}^{(k-1)} \right) a_{k,j}^{(k-1)} \quad (\text{V.16})$$

Pour : $j = k+1, \dots, n+1$

Puis nous prémultiplions $[A, b]^{(k-1)}$ par :

$$E_{k+2,k} \left(-a_{k+2,k}^{(k-1)} / a_{kk}^{(k-1)} \right), \quad E_{k+3,k} \left(-a_{k+3,k}^{(k-1)} / a_{kk}^{(k-1)} \right) \quad \text{ect.....}$$

Nous pouvons donc condenser ces transformations à la k-ième étape par :

$$a_{ij}^{(k)} = a_{ij}^{(k-1)} - \left(a_{ik}^{(k-1)} / a_{kk}^{(k-1)} \right) a_{kj}^{(k-1)} \quad \text{pour : } \begin{cases} i=k+1, \dots, n \\ j=k+1, \dots, n+1 \end{cases} \quad (\text{V.17})$$

D'où l'algorithme de GAUSS :

V.5.3. ALGORITHME DE GAUSS :

On doit remarquer que toutes ces transformations supposent que les termes a_{kk} appelés 'pivots' sont non nuls. Il faudra donc ajouter une phase de vérification de la non nullité du pivot a_{kk} et l'algorithme général devient :

- PREMIER PHASE :

Si $a_{kk}^{(k-1)} = 0$ et $a_{ik}^{(k-1)} \neq 0$ avec $1 > k$ (éléments de la k-ième colonne), on permute les lignes 1 et k de la matrice $[A, b]^{(k-1)}$

L'élément se trouvant alors en position de pivot, c'est-à-dire à l'intersection de la i-ème ligne et de la k-ième colonne est différent de zéro et la deuxième phase est exécutable

S'il n'existe aucun élément non nul, alors A est singulière.

Dans la pratique, afin de minimiser l'erreur d'arrondi, on évite le plus possible la division par de petits pivots, car des divisions par des nombres petits entraînent des erreurs de calcul importantes

- DEUXIEME PHASE :

La matrice $[A, b]^{(k-1)}$ étant éventuellement modifiée par la première phase, on opère les calculs des éléments non nuls de $[A, b]^{(k-1)}$ qui correspondent à :

$$a_{ij}^{(k)} = a_{ij}^{(k-1)} - \left(a_{ik}^{(k-1)} / a_{kk}^{(k-1)} \right) a_{kj}^{(k-1)} \quad \begin{cases} k=1, n-1 \\ i=k+1, n \\ j=k+1, n+1 \end{cases} \quad (\text{V.18})$$

V.6. RESOLUTION D'UN SYSTEME À MATRICE TRIDIAGONALE METHODE DE THOMAS :

Quand un système linéaire :

$$AX = Y \quad (V.20)$$

Est à matrice tridiagonale, alors l'algorithme de Gauss peut être simplifié, en tenant compte de la structure particulière de A.

Ce cas particulier est important car on obtient très souvent un tel système lors de la résolution numérique de certaines équations différentielles partielles.

Adoptons pour les éléments non nuls de A, la notation suivante :

$$A = \begin{bmatrix} b_1 & c_1 & & & \\ a_2 & b_2 & c_2 & & 0 \\ & a_3 & b_3 & c_3 & \\ & \dots & \dots & \dots & \dots \\ & & a_i & b_i & c_i \\ & 0 & \dots & \dots & c_{n-1} \\ & & & a_n & b_n \end{bmatrix} \quad (V.21)$$

Ce qui signifie que l'on peut ne mémoriser que les $(3n-2)$ termes non nuls de A dans trois vecteurs a, b, c ayant respectivement $(n-1)$, (n) et $(n-1)$ éléments, plutôt que de mémoriser (et traiter) tous les termes de A dont (n^2-3n+2) sont nuls.

L'algorithme de Thomas est le suivant :

Normalisons la première ligne du système :

$$\begin{bmatrix} 1 & c_1/b_1 & & & \\ a_2 & b_2 & c_2 & & \\ & a_3 & b_3 & c_3 & 0 \\ & \dots & \dots & \dots & \dots \\ & & a_i & b_i & c_i \\ 0 & & \dots & \dots & c_{n-1} \\ & & & a_n & b_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \\ \vdots \\ X_i \\ \dots \\ X_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_1/b_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ \dots \\ y_i \\ \dots \\ y_n \end{bmatrix}$$

Où les a_i , b_i et c_i sont des matrices (m,m) ; on dit que le système est à matrice tridiagonale par bloc

L'algorithme de thomas reste valable si l'on généralise les calculs scalaires aux calculs matriciels

On généralise ainsi la solution :

Algorithme de Thomas :
Système linéaire à matrice tridiagonale par blocs.

$$\begin{aligned}
 \delta_i &= [b_i]^{-1} \cdot c_i \\
 \delta_i &= [b_i - a_i \delta_{i+1}]^{-1} c_i & i=1, n-1 \\
 \beta_i &= [b_i]^{-1} y_i \\
 \beta_i &= [b_i - a_i \delta_{i-1}]^{-1} \cdot [y_i - a_i \beta_{i-1}] & i=2, n-1 \\
 \chi_n &= \beta_n \\
 \chi_i &= \beta_i - \delta_i \chi_{i+1}
 \end{aligned} \tag{V.24}$$

Où les δ_i sont des matrices (m,m) , les β_i des vecteurs à m composantes et $[b_i]^{-1}$ note l'inverse de la matrice b_i .

V.8. RESOLUTION DES SYSTEMES D'EQUATION LINEAIRES : METHODE ITERATIVES :

V.8.1.INTRODUCTION

On se pose le problème de la résolution du système linéaire de cramer :

$$AX = b \quad \text{ou} \quad X \in R^n \text{ ou } C^n \quad (\text{V.25})$$

Où A est une matrice (n x n) de rang n.

Les méthodes que nous présentons ci – dessous sont la généralisation au cas n-dimensionnel des méthodes de résolution de $f(x) = 0$ étudiées dans le cas monodimensionnel.

Ces méthodes consistent à utiliser un vecteur estimé initial :

$$X^{(0)} = (X_1^{(0)}, X_2^{(0)}, \dots, X_n^{(0)})^T \text{ de la solution exacte:}$$

$X^* = (X_1^*, X_2^*, \dots, X_n^*)$) Du système (V.25) et de générer une séquence de vecteurs :

$$X^{(k+1)} = F^{(k)}(X^{(k)}, \dots, X^{(k)}) \quad (\text{V.26})$$

- Si la fonction d'itération $F^{(k)}$ est indépendante de l'itération k, on dit que l'on a une itération stationnaire dans le cas contraire, elle est dite non-stationnaire.

- Si le calcul du vecteur $X^{(k+1)}$ demande la connaissance des i vecteurs estimés qui le précèdent, on a une formule itérative multipas ou à i est le pas (en d'autres termes, on a une récurrence d'ordre i).

- Dans cette partie, on présentera quelques méthodes itératives stationnaires à un pas dans les quelles on génère une suite vectorielle :

$$(X^{(0)}, X^{(1)}, \dots, X^n)$$

Qui est convergente et le plus rapidement possible, vers le vecteur solution X^* .

(Dans ce cas, on dira que la méthode converge).

V.8.2. PRINCIPE DES ITERATIONS SUCCESSIVES :

On veut résoudre le système linéaire :

$$A X = b \quad (V.27)$$

Où A est une matrice carrée d'ordre n.

Ecrivons A sous la forme $A = M - N$ (M doit être régulière) alors le système (V.27) peut s'écrire :

$$(M - N)X = b$$

Ou encore :

$$MX = NX + b \quad (V.28)$$

- La méthode itérative associée à l'égalité précédente consiste, à partir d'un vecteur initial $X^{(0)}$ à générer la suite :

$X^{(1)}, X^{(2)}, \dots, X^{(k+1)}$ de la manière suivante :

$$X^{(1)} = M^{-1}NX^{(0)} + M^{-1}b$$

$$X^{(2)} = M^{-1}NX^{(1)} + M^{-1}b$$

$$\dots$$

$$X^{(k+1)} = M^{-1}NX^{(k)} + M^{-1}b$$

Cette suite d'égalités peut être représentée par la relation itérative suivante :

$$X^{(k+1)} = TX^{(k)} + V \quad k=0,1,2 \dots \quad (V.29)$$

Où :

$$T = M^{-1}N$$

$$V = M^{-1}b$$

La matrice d'itération T et le vecteur V sont indépendants de k.

La question que l'on se pose à propos de la méthode itérative de résolution de l'équation (V.27) par :

$$X^{(k+1)} = TX^{(k)} + V$$

Est celle de la convergence. En d'autres termes $x^{(k+1)}$ converge-t-il vers le vecteur solution de $Ax=b$?

Pour répondre à cette question, *définissons* le vecteur d'erreur :

$$e^{(k)} = X^{(k)} - X^*$$

Associe à la k-ième itération,

Comme X^* vérifie :

$$X^* = TX^* + V$$

Et $X^{(k)} = TX^{(k-1)} + V$

En soustrayant les deux équations précédentes on obtient :

$$e^{(k)} = Te^{(k-1)}$$

Soit pour $k=0,1,2,\dots$:

$$e^{(1)} = Te^{(0)}; e^{(2)} = Te^{(1)} = T^2e^{(0)}; e^{(3)} = Te^{(2)} \quad \text{etc...}$$

et :

$$e^{(k)} = Te^{(k-1)} = T^k e^{(0)}$$

La convergence de ce processus est assurée si, quelque soit $e^{(0)}$ (donc quelque soit $x^{(0)}$), on a :

$$\lim_{k \rightarrow \infty} e^{(k)} = 0 \quad \text{ou} \quad \lim_{k \rightarrow \infty} T^k e^{(0)} = 0 \quad \text{quelque soit } e^{(0)}.$$

Ce qui revient à dire que :

$$\lim_{k \rightarrow \infty} T^k = 0 \quad \text{ou } 0 \text{ note ici la matrice nulle.}$$

On tire le théorème suivant sur la convergence du processus

Théorème :

La suite définie par $x^{(0)} \in C^n$ et $x^{(k+1)} = T X^{(k)} + V$ converge vers $X^* = (I-T)^{-1}V$ quelque soit $x^{(0)}$ si et seulement si :

$$\rho(T) < 1.$$

Comme on a, d'une manière générale : $\rho(A) \leq \|A\|$

Une condition suffisante de convergence de l'équation (V.29) est telle que : $\|T\| < 1$ puisque alors obligatoirement $\rho(T) < 1$.

Cette condition sur une norme de T nous fournit donc une condition de Convergence du processus itératif (V.29).

V.8.3. DECOMPOSITIONS DE LA MATRICE A :

Il est évident que nous devons choisir une matrice T qui assure la convergence et telle que TX + V ne soit pas chère à calculer. Nous allons donc chercher des décompositions de la forme M - N de la matrice A de telle façon que M soit facilement inversible et vérifie :

$$\rho(M^{-1}N) < 1 \quad (\text{Ou ce qui est suffisant : } \|M^{-1}N\| < 1).$$

Définissons les matrices D, L, U telles que :

$$D_{ii} = a_{ii} \quad \forall i \quad \text{D matrice diagonale.}$$

$$L_{ij} = -a_{ij} \quad \text{pour } i > j$$

L matrice inférieure,

$$L_{ij} = 0 \quad \text{pour } i \leq j$$

$$U_{ij} = -a_{ij} \quad \text{pour } j > i$$

U matrice supérieure

$$U_{ij} = 0 \quad \text{pour } j \leq i$$

A partir de cela on a la relation :

$$A = D - L - U$$

Qui correspond aux trois types de décompositions suivantes:

1. METHODE DE JACOBI.

$$A = M - N \quad \text{Ou } M = D \quad \text{et } N = L + U$$

2 .METHODE DE GAUSS SEIDEL.

$$A = M - N \quad \text{Ou } M = D - L \quad \text{et } N = U$$

La matrice T sera pour chacune des deux méthodes précédentes:

V.8.4.2. TESTS D'ARRÊT DES ITERATIONS :

Si l'on note r le vecteur résidu :

$$r^{(k)} = b - AX^{(k)}$$

Ou encore :

$$r_i^{(k)} = \left(b_i - \sum_{j=1}^n a_{ij} X_j^{(k)} \right)$$

Un critère courant est d'arrêter les itérations quand :

$$\frac{\|r^{(k)}\|}{\|b\|} < \xi \quad (\text{ou } \xi \text{ est une précision choisie petite}).$$

Un autre test couramment utilisé concerne l'amélioration relative sur X .
On arrête d'itérer quand :

$$\frac{\|X^{(k)} - X^{(k-1)}\|}{\|X^{(k)}\|} < \xi \tag{V.32}$$

Au cas où on est sûr des conditions de convergence de la méthode ce test est Pratiquement équivalent au test précédent.

On arrête aussi parfois quand :

$$\|X^{(k)} - X^{(k-1)}\| < \xi \tag{V.33}$$

Dans le cas où l'on connaît l'ordre de grandeur de la solution et que les conditions de convergence sont réunies.

Mais le test précédent n'implique pas :

$$\|X^{(k+1)} - X^*\| < \xi \tag{V.34}$$

Dans le cas contraire il faudrait mieux retenir pour n'importe quel p donné et quelque soit k :

$$\| X^{(k+p)} - X^{(p)} \| < \xi, \text{ mais ce critère est délicat à programmer.}$$

En résumé, l'algorithme de Jacobi peut donc être représenté de la manière suivante en se donnant comme valeurs initiales les composantes du vecteur $X^{(0)}$

V.8.4.3. ALGORITHME DE JACOBI.

Algorithme de Jacobi pour la résolution de $Ax=b$	
0) étant donnés $b, A, x^{(0)}, k_{\max}, \xi$	
$r_i^{(k)} = b - \sum_{j=1}^n a_{ij} X_j^{(k)}$	} $k=1, \dots, K_{\max}$ (V.35)
$X_i^{(k+1)} = X_i^{(k)} - r_i^{(k)} / a_{ii}$	
1) arrêter si : $\ r \ / \ b \ < \xi$	

V.8.4.4. CONDITIONS DE CONVERGENCE DE JACOBI :

.L'itération de Jacobi, s'écrit :

$$X^{(k+1)} = D^{-1}(L+U)X^{(k)} + D^{-1}b \quad (\text{V.36})$$

Soit:

$$X^{(k+1)} = T_j X^{(k)} + V \quad (\text{V.37})$$

Pour assurer la convergence, on doit avoir $\rho(T_j) < 1$, comme le calcul de $\rho(T_j)$ est très souvent compliqué, on se contente de la condition suffisante à savoir $\| T_j \| < 1$.

Ceci se traduit par :

$$\sum_{j=1}^n |t_{ij}| < 1 \quad \forall i$$

Ou encore parce que

$$T_j = D^{-1} (L + U)$$

$$\sum_{j=1}^n |L_{ij} + U_{ij}| < |d_{ii}| \quad \forall i$$

Soit, en revenant au système original (V.25) la condition suffisante s'écrit :

$$\boxed{\sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n |a_{ij}| < |a_{ii}| \quad \forall i=1, n} \quad (V.38)$$

Ce qui s'énonce par le théorème suivant :

Théorème :

Une condition suffisante pour que T_j converge est que A du système $A x = b$ soit à diagonale fortement dominante.

V.8.5. METHODE DE GAUSS-SEIDEL :

V.8.5.1 PRINCIPE :

La matrice A étant décomposée en :

$$A = M - N = (D - L) - U$$

Dans la méthode itérative de Gauss-Seidel, on ré-écrit (V.29) de la manière suivante :

$$X^{(k+1)} = (D - L)^{-1} U X^{(k)} + (D - L)^{-1} b \quad (V.39)$$

Comme l'inverse de $(D - L)$ peut être compliquée calculer, on préfère écrire le système comme

$$(D - L) X^{(k+1)} = U X^{(k)} + b$$

Soit encore :

$$D X^{(k+1)} = L X^{(k+1)} + U X^{(k)} + b$$

V.8.3. CONDITIONS POUR LA CONVERGENCE DE GAUSS-SEIDAL :

La formule itérative (V.39) permet de définir la matrice d'itération de Gauss-Seidel par :

$$T_{GS} = (D - L)^{-1}U$$

Et le vecteur V par :

$$V_{GS} = (D - L)^{-1}b$$

La méthode de Gauss-Seidel convergera si $\|T_{GS}\| < 1$, ce qui se traduit par :

$$\sum_{j=1}^n |a_{ij}| < a_{ii} \quad \text{pour } i = 1, n$$

Il s'ensuit que la méthode de Gauss-Seidel est aussi convergente quand A est à diagonal fortement dominante.

Remarque :

. Une simple permutation de ligne peut transformer une convergence en divergence ou inversement.

. La méthode de Gauss-Seidel est plus rapide en convergence que la méthode de Jacobi.

En effet, dans une même itération, on utilise pour calculer une nouvelle composante, celle qu'on vient de calculer. Donc intuitivement le $(K+1)$ -ième itéré est plus proche (en un certain sens) de la limite, pour la méthode de Gauss-Seidel que pour la méthode de Jacobi.

. il faut remarquer que dans Gauss-Seidel il n'est plus nécessaire d'avoir en mémoire deux vecteurs pour les itérés successifs, puisque une fois le calcul de $X_i^{(k+1)}$ effectué, il peut remplacer $X_i^{(k)}$ dans le vecteur des itérés car $X_i^{(k)}$ n'est plus utilisé par la suite.

L'économie de mémoire est d'autant plus importante qu'il est souvent inutile de mémoriser explicitement la matrice A .

Dans ce cas Jacobi requiert $3n$ places en mémoire et Gauss-Seidel $2n$ seulement.

Chapitre VI :

résultats et commentaires

VI.1. RESULTATS DE LA METHODE DES DIFFERENCES FINIES CAS UNIDIMENSIONNEL :

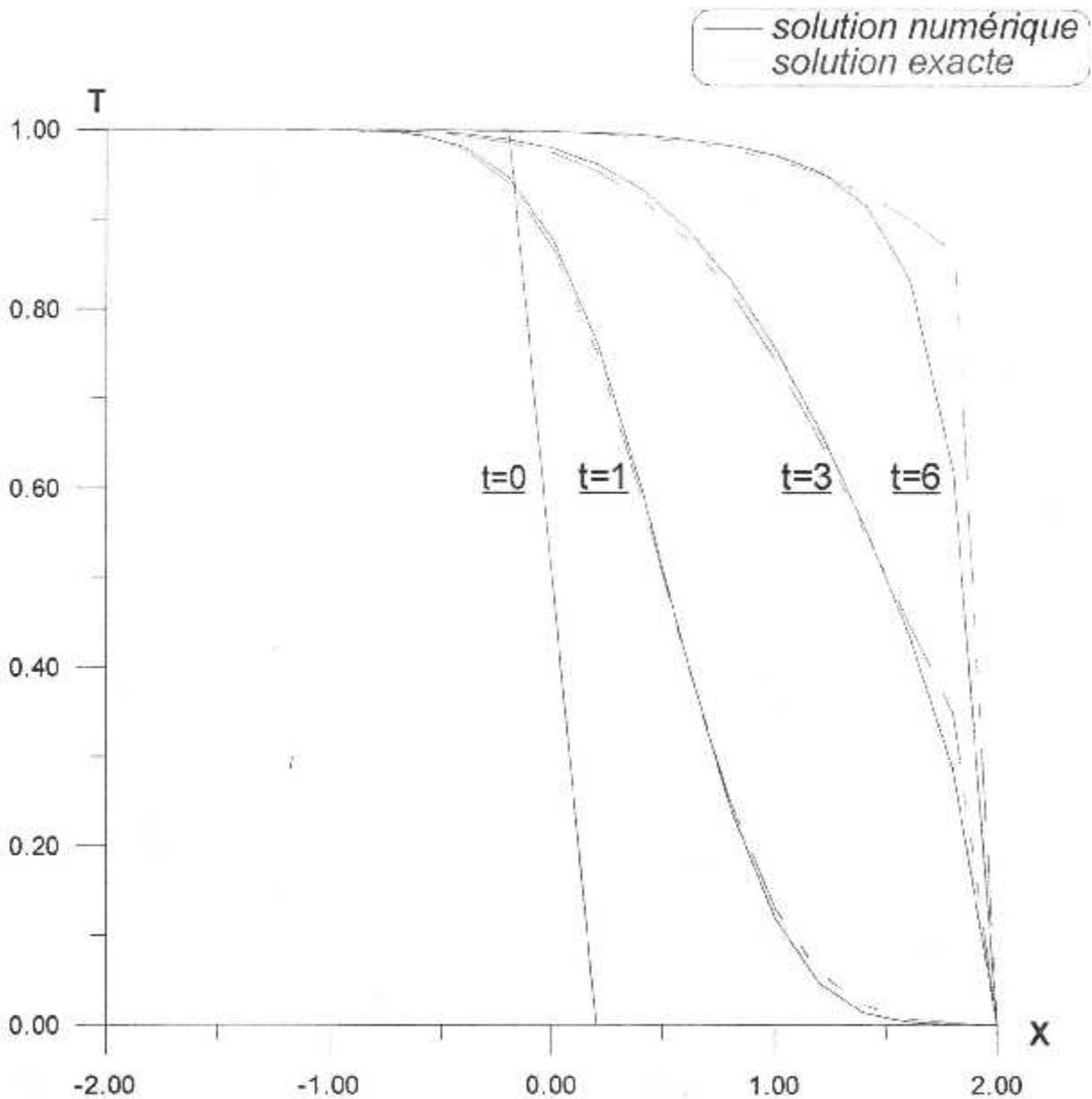
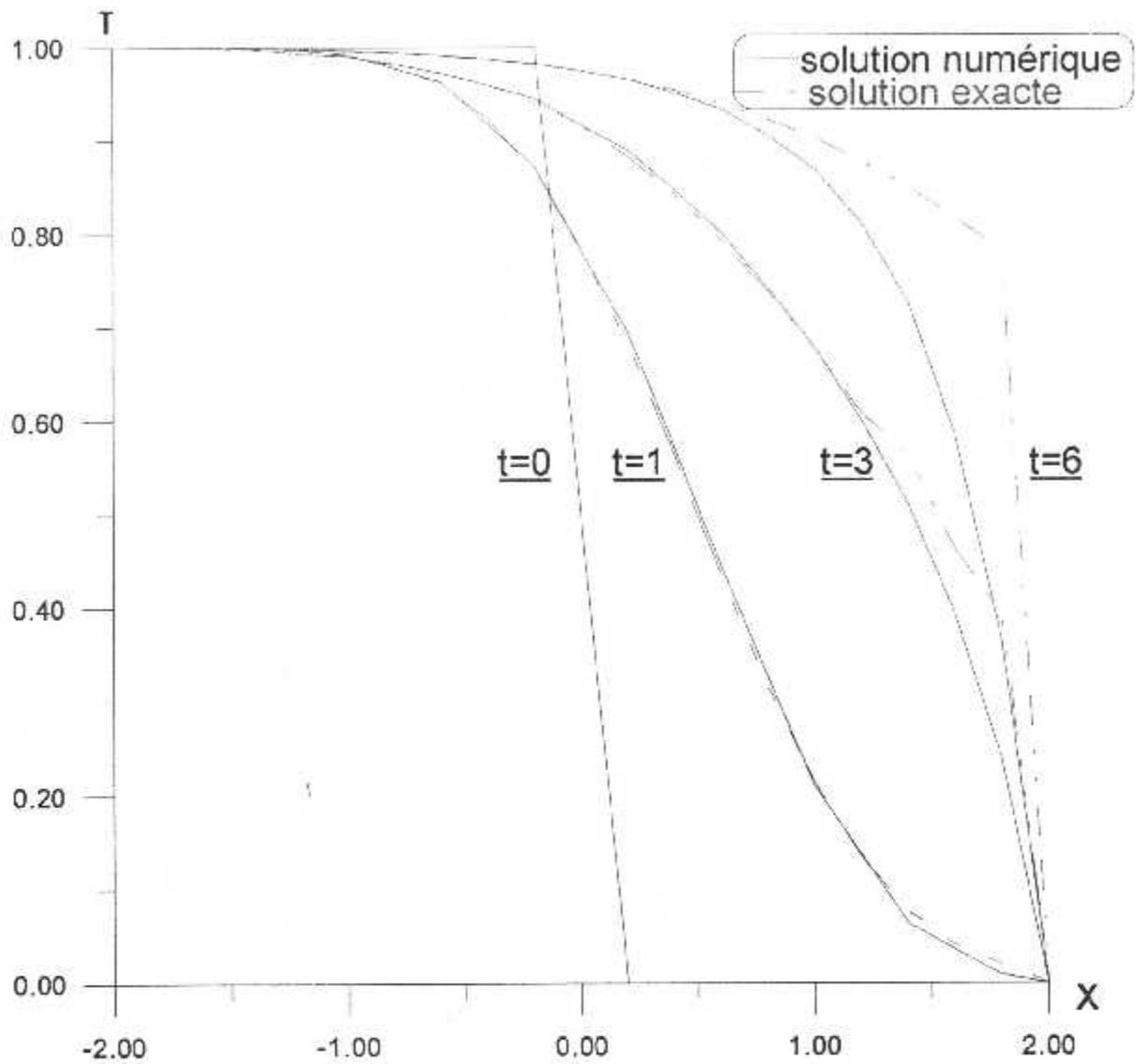


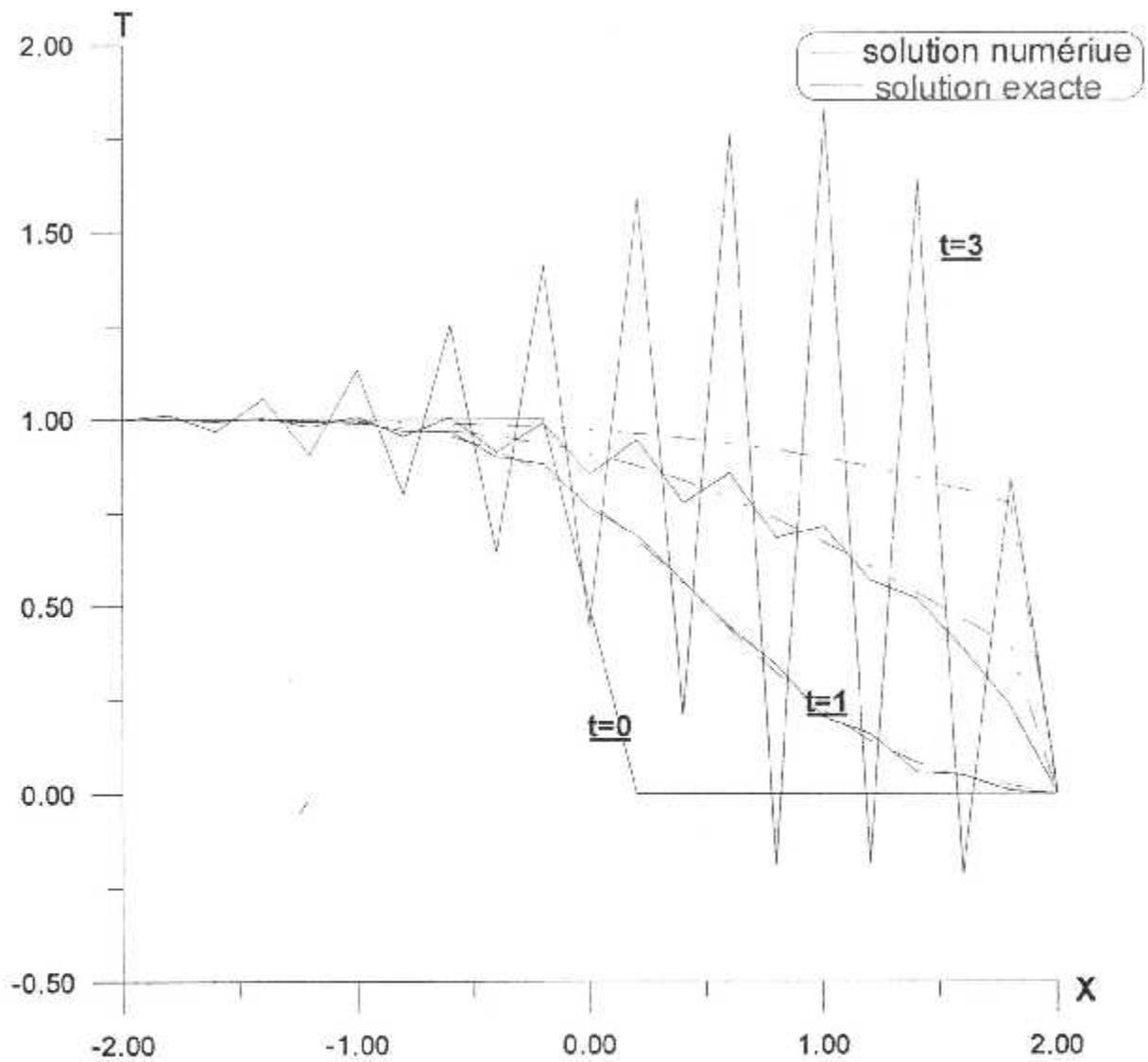
Fig.(VI.1.1) :Variation de la température en fonction du temps et d'abscisse pour le schéma de FTCS avec $s = 0.25$

Remarque :

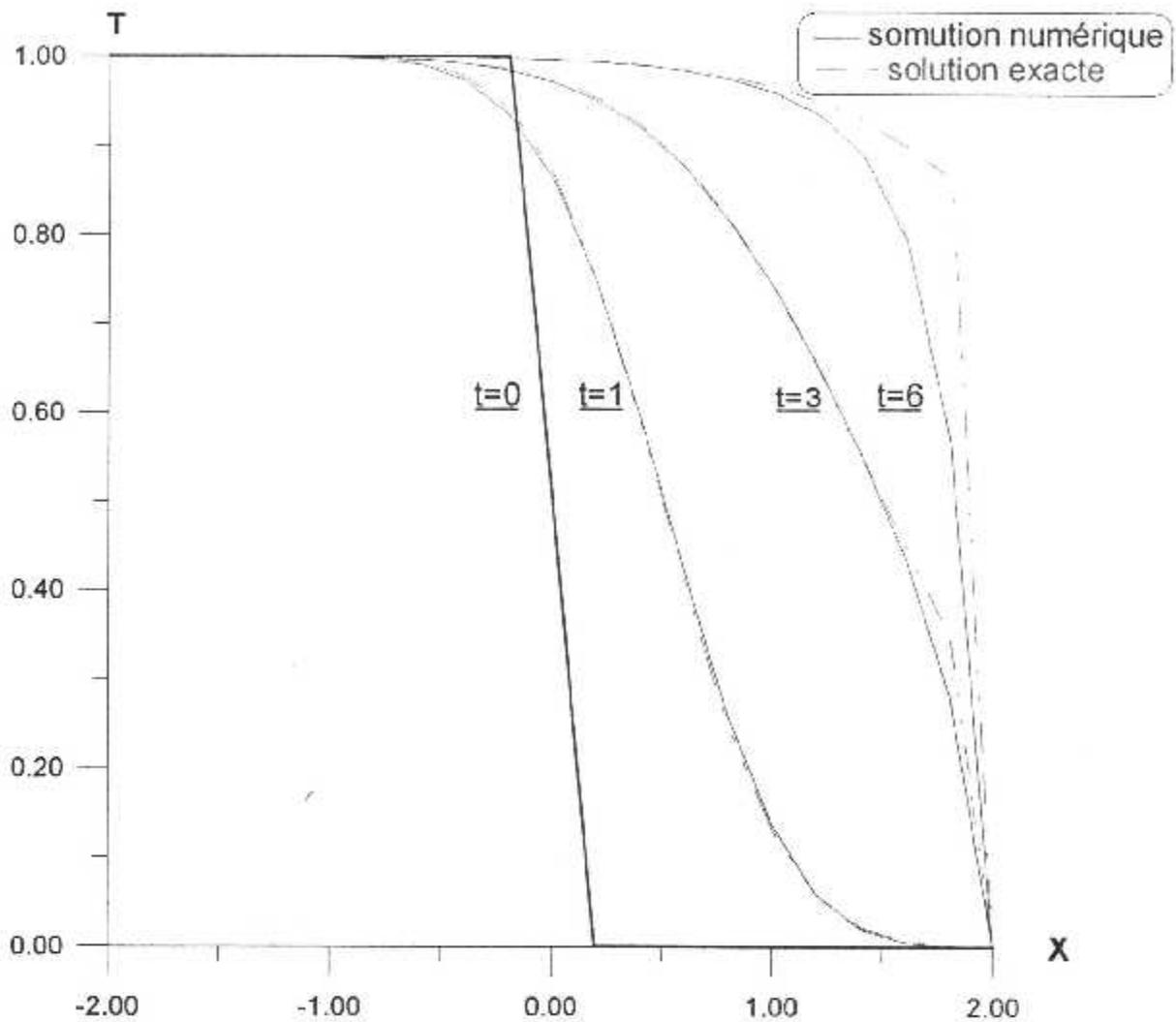
FTCS : forward time, centred space



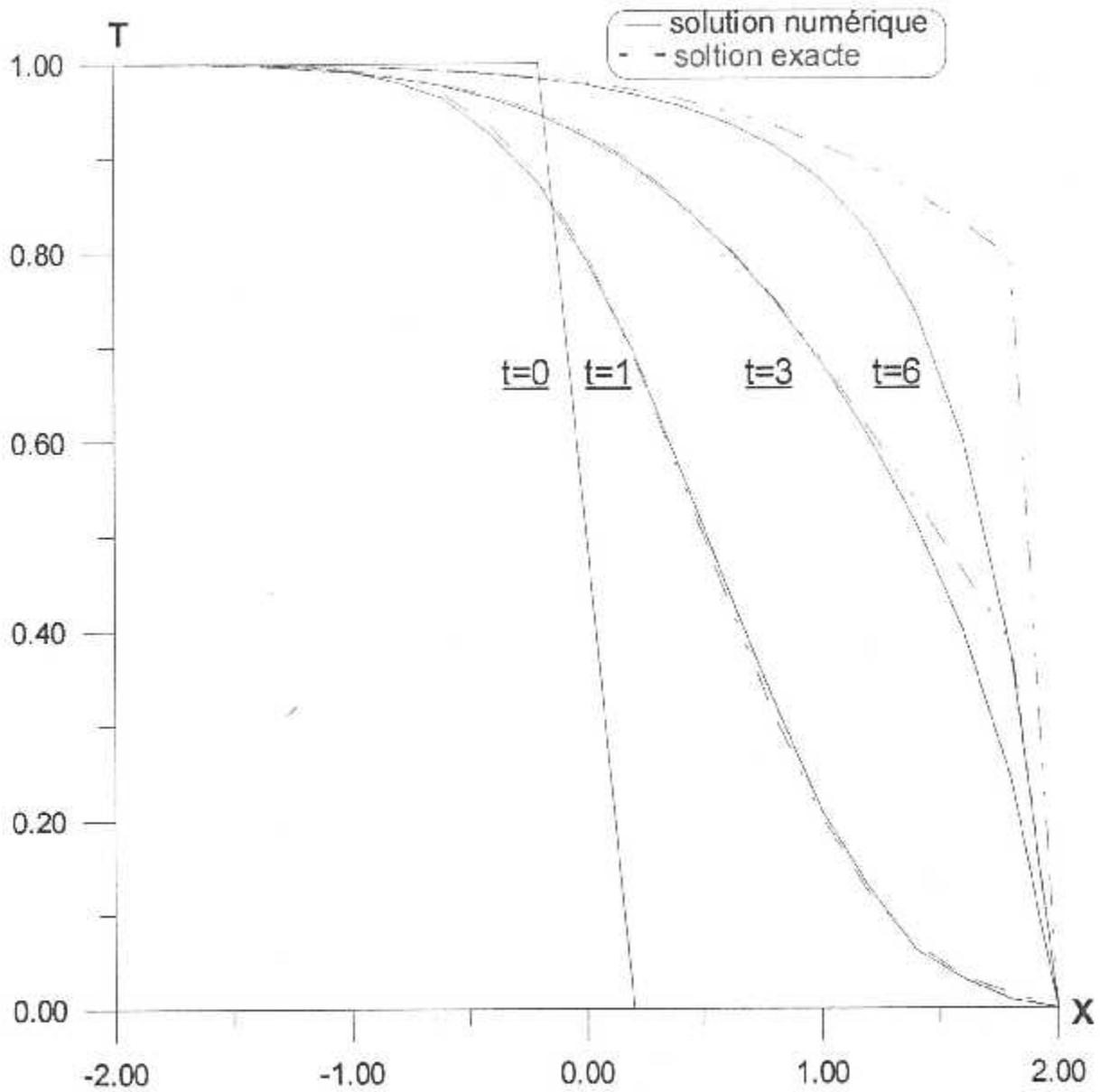
FigVI.1.2 : Variation de la température en fonction du temps et d'abscisse pour le schéma de FTCS avec $s = 0.5$



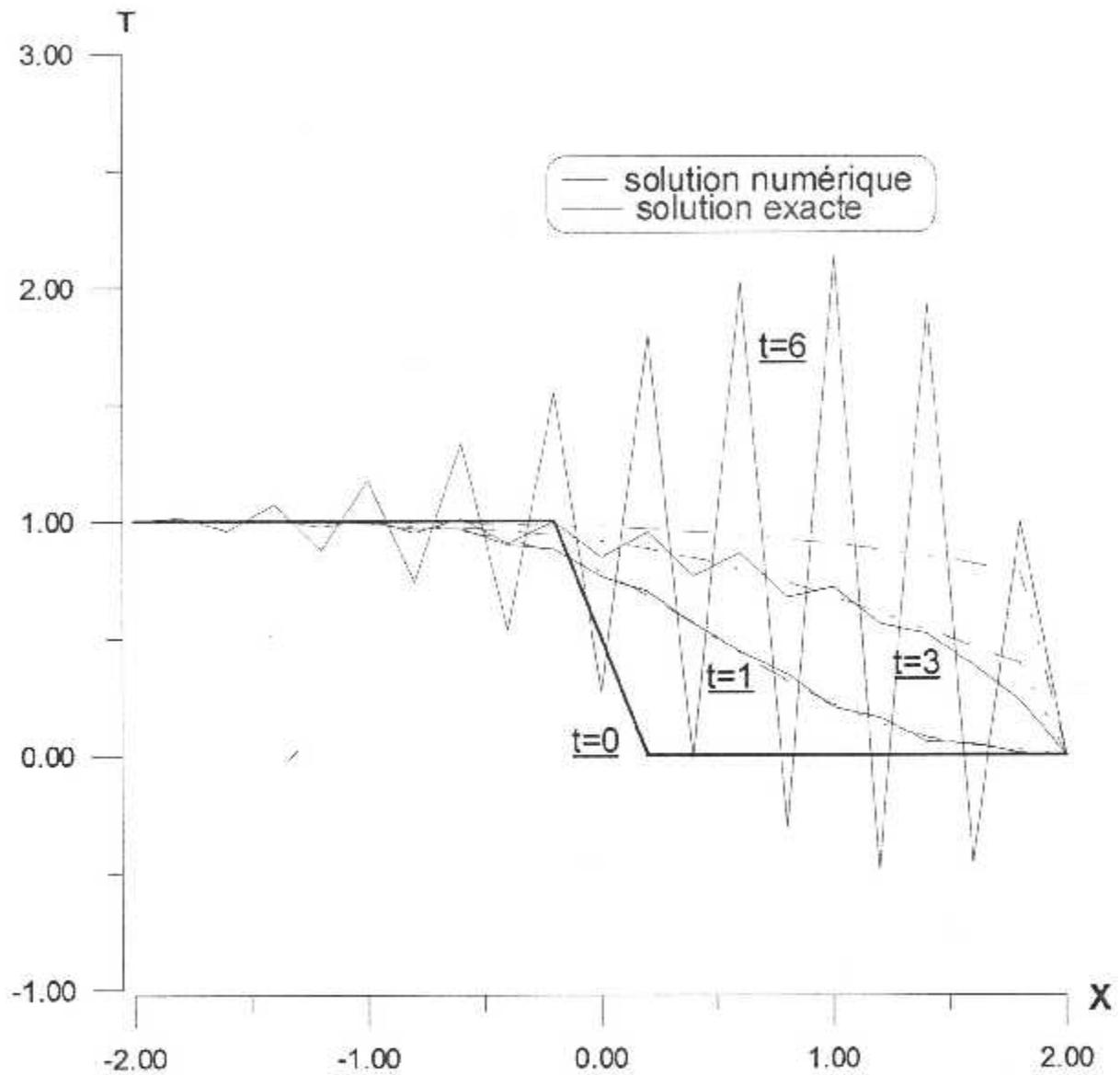
FigVI.1.3 : Variation de la température en fonction du temps et d'abscisse pour le schéma de FTCS avec $s = 0.53$ (instabilité)



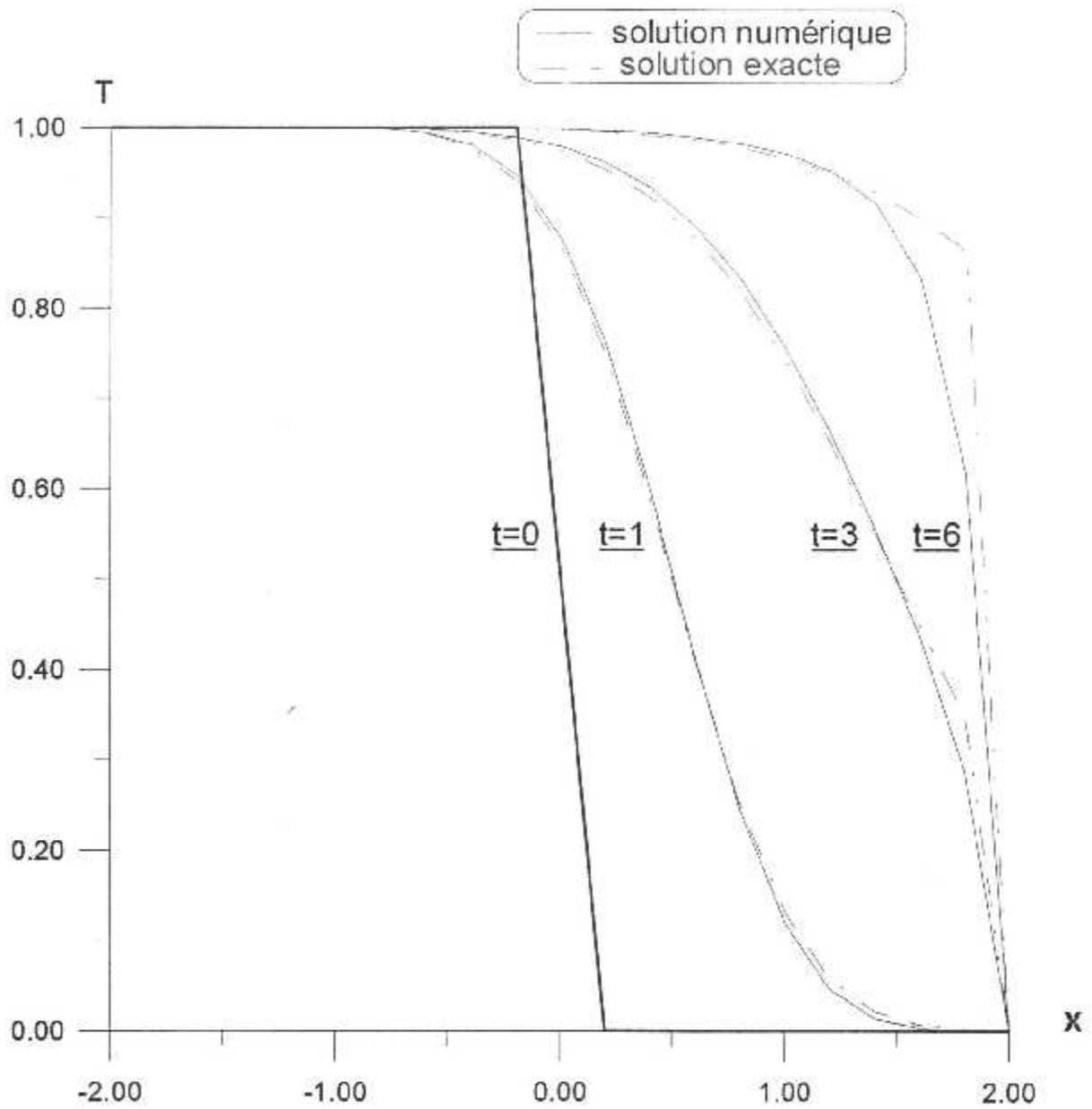
FigVI.1.4 : Variation de la température en fonction du temps et d'abscisse pour le schéma de LAX-WENDROFF avec $s = 0.25$



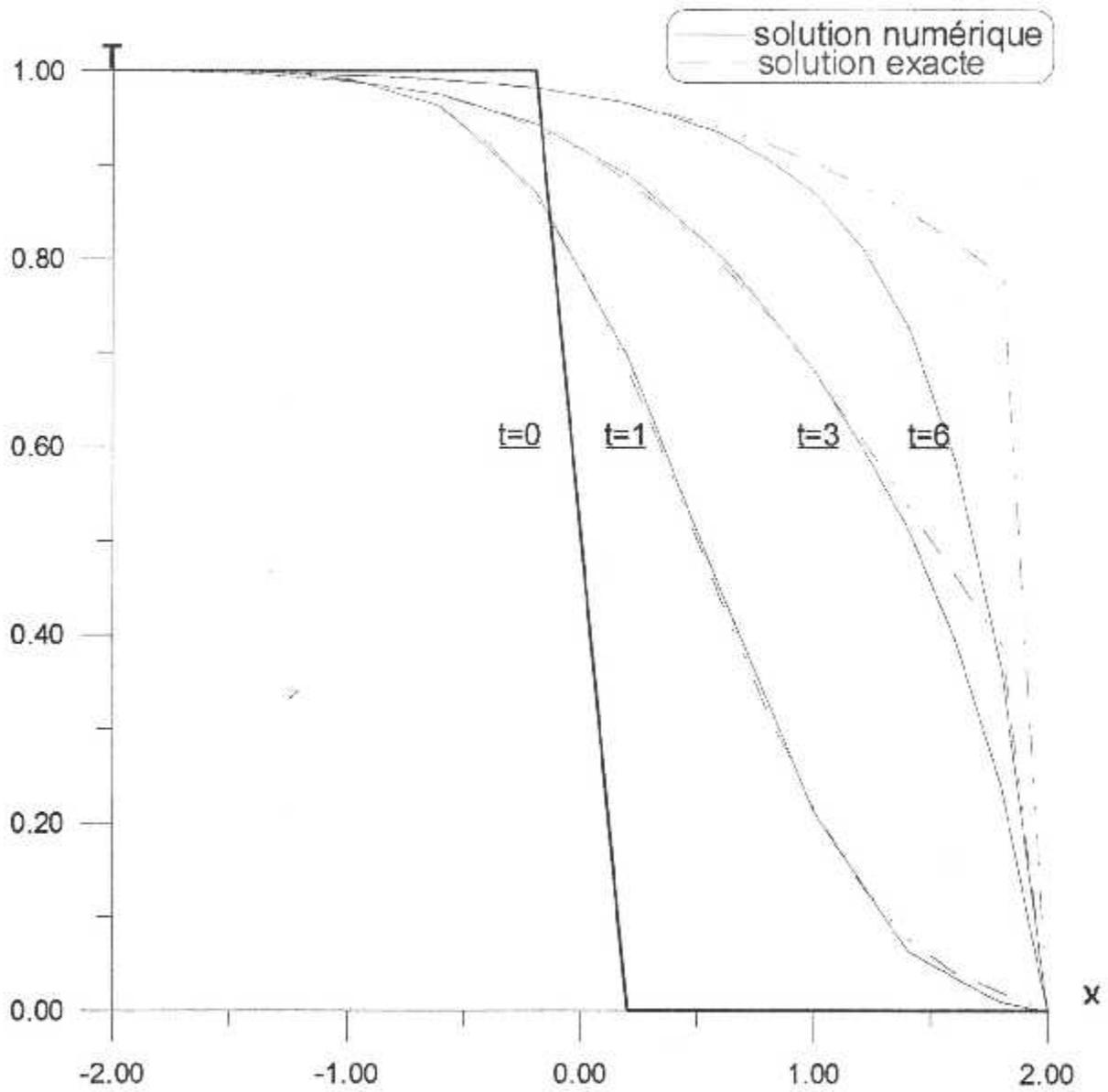
FigVI.1.5 : Variation de la température en fonction du temps et d'abscisse pour le schéma de LAX-WENDROFF avec $s = 0.45$



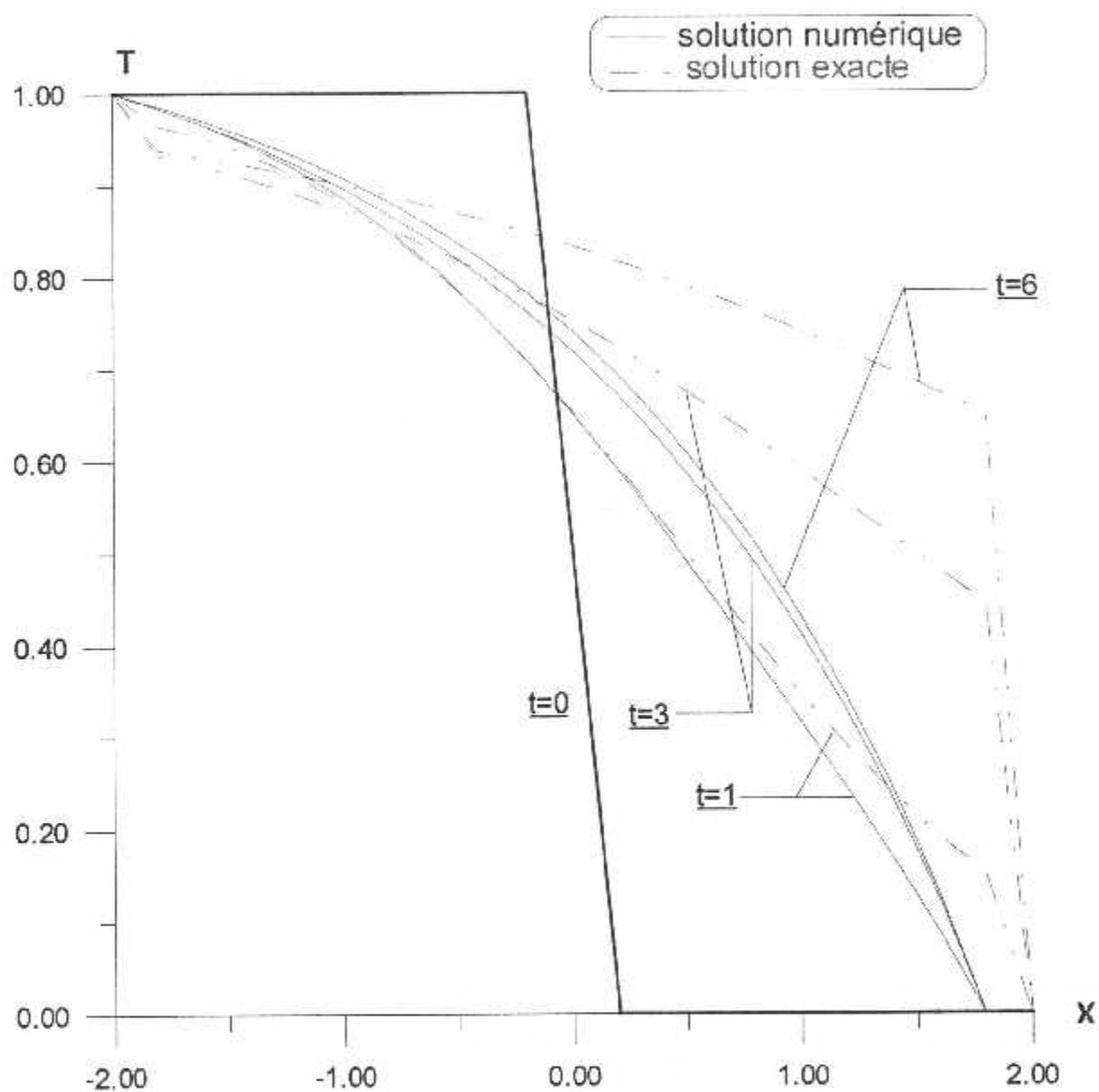
FigVI.1.6 : Variation de la température en fonction du temps et d'abscisse pour le schéma de LAX-WENDROFF avec $s = 0.505$ (instabilité)



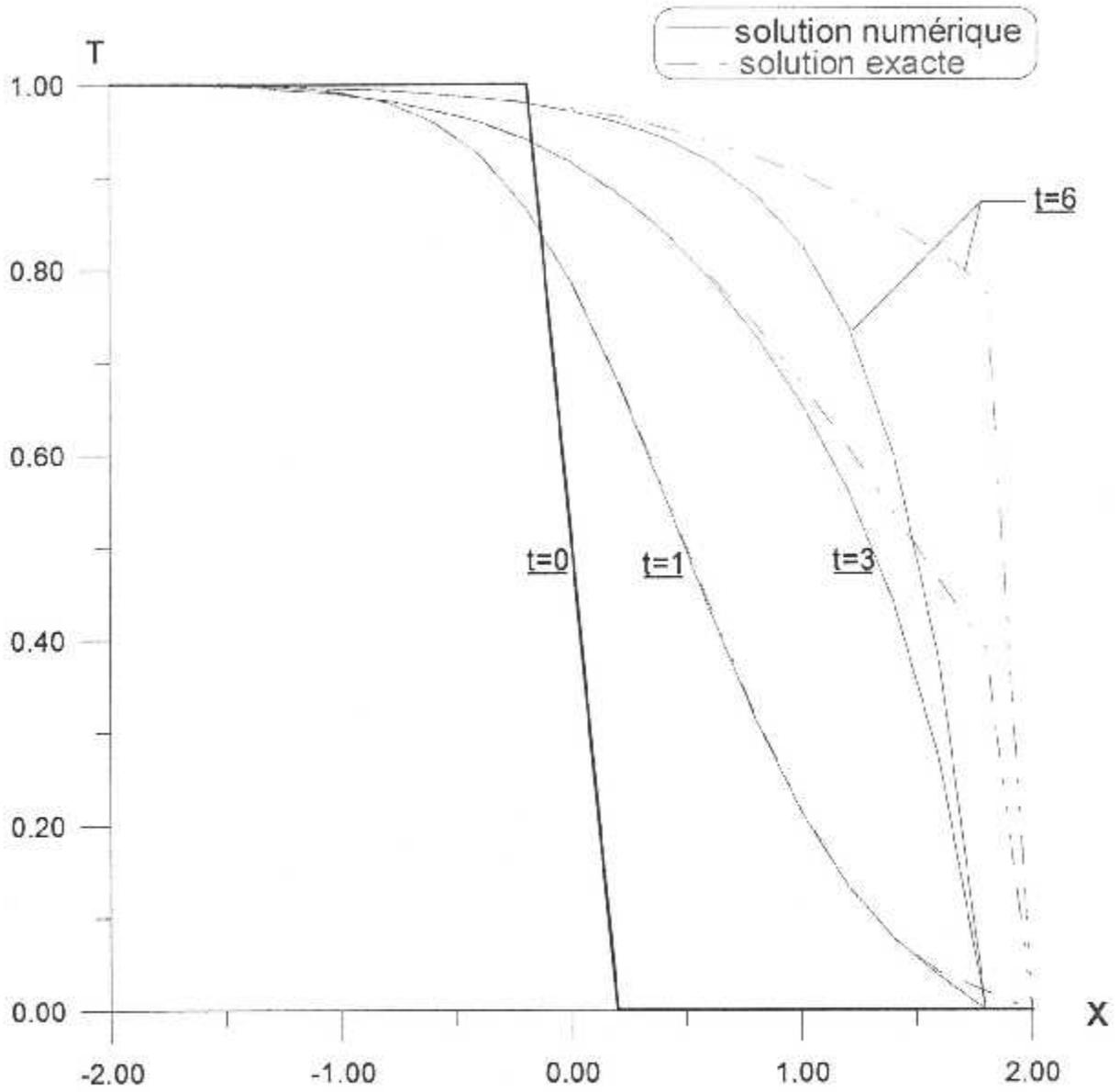
FigVI.1.7 : Variation de la température en fonction du temps et d'abscisse pour le schéma explicite avec $s = 0.25$



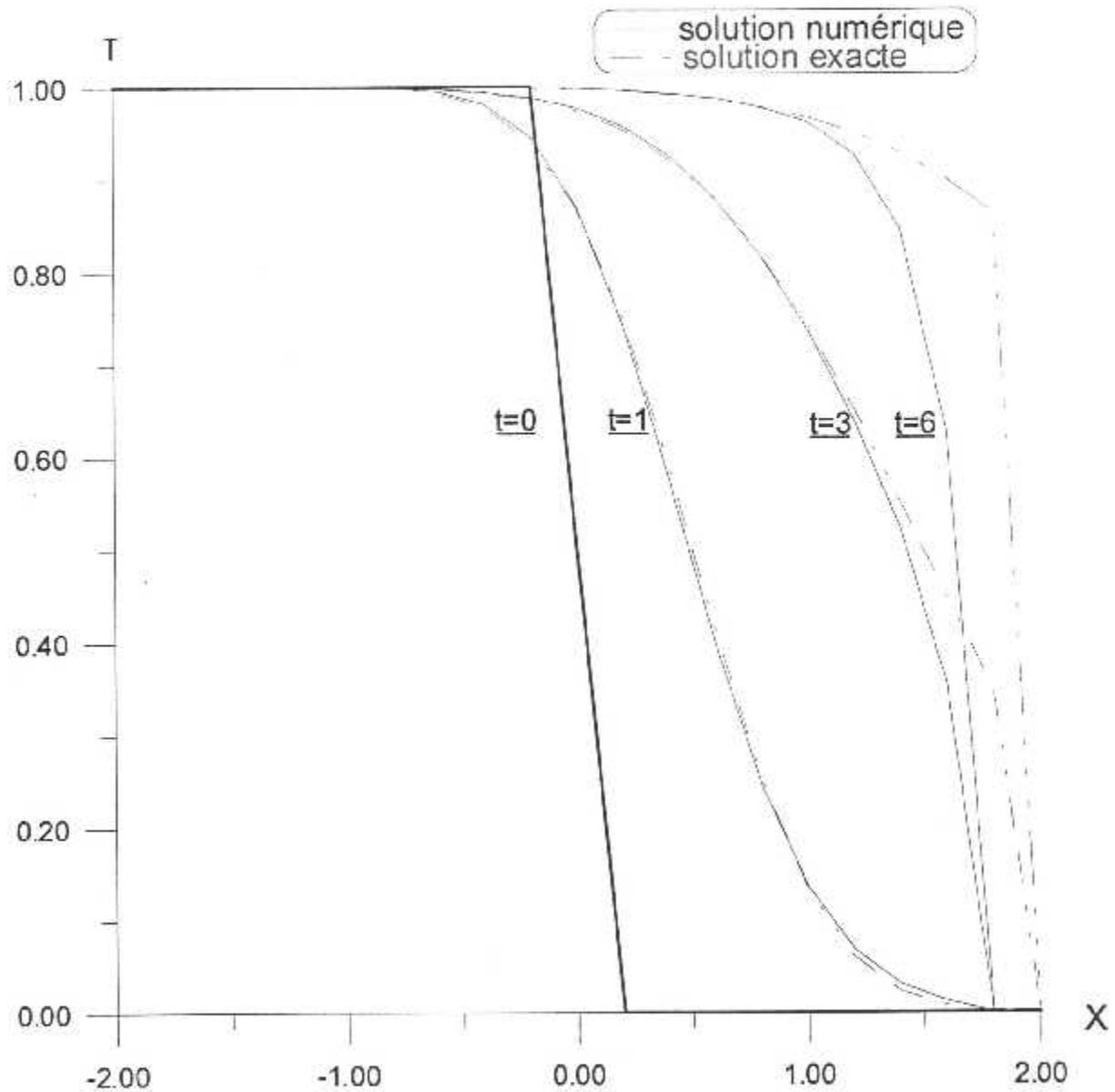
FigVI.1.8 : Variation de la température en fonction du temps et d'abscisse pour le schéma explicite avec $s = 0.5$



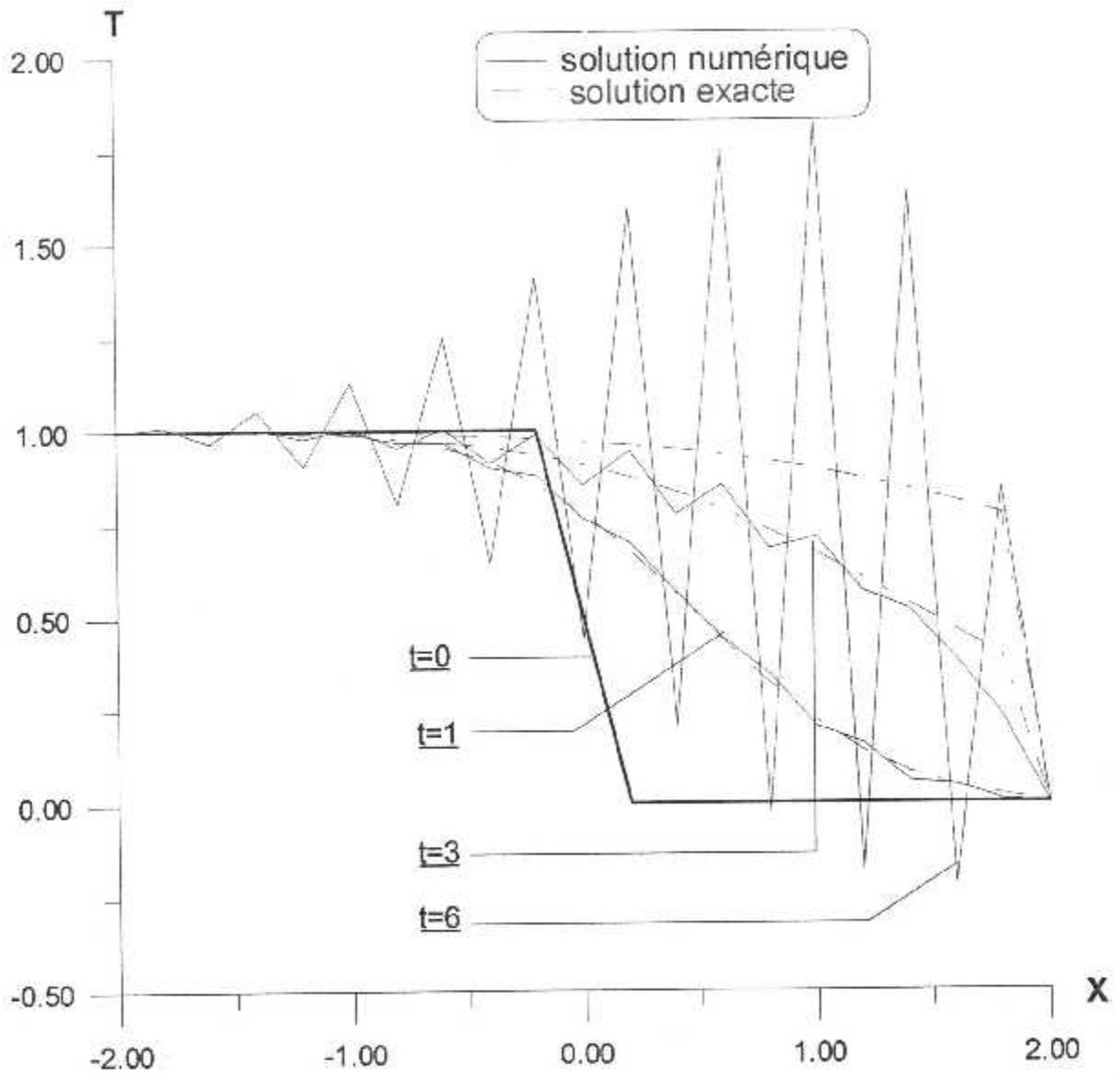
FigVI.1.12 : Variation de la température en fonction du temps et d'abscisse pour le schéma de Crank-Nicolson avec $s = 2$ (instabilité)



FigVI.1.11 : Variation de la température en fonction du temps et d'abscisse pour le schéma de Crank-Nicolson avec $s = 0.5$



FigVI.1.10 : Variation de la température en fonction du temps et d'abscisse pour le schéma de Crank-Nicolson avec $s = 0.25$



FigVI.1.9 : Variation de la température en fonction du temps et d'abscisse pour le schéma explicite avec $s = 0.53$ (instabilité)

-Tableau (VI.1.1) Méthode des différences finies cas unidimensionnelle avec :
temps=1 S=0.25

Position en x		-2	-1	0	1	2	erreur
Solution analytique		1	1	0.997	0.966	0	0.000E+00
Température et Erreur relative	Schémas FTCS	1	1.00	0.877	0.221	0	.60330E-02
		0	0	0.0010	4.08 E-03	0	
	Schémas de Lax- Wendroff	1	0.999	0.862	0.137	0	.44842E-02
		0	0	0.0010	6.21E-03	0	
	Schémas explicite	1	1.00	0.877	0.121	0	.60330E-02
		0	0	0.0010	5.17E-03	0	
	Schémas de Crank-Nicolson	1	1	0.870	0.135	0	.58684E-02
		0	0	0.0010	5.17E-03	0	

-Tableau (VI.1.2) Méthode des différences finies cas unidimensionnelle avec :
temps=1 S=0.50

Position en x		-2	-1	0	1	2	erreur
Solution analytique		1	1	0.997	0.966	0	0.000E+00
Température et Erreur relative	Schémas FTCS	1	0.992	0.783	0.211	0	.67525E-02
		0	0	0.0010	4.08 E-3	0	
	Schémas de Lax- Wendroff	1	0.994	0.763	0.203	0	.14732E-01
		0	0	0.0010	6.21E-03	0	
	Schémas explicite	1	0.992	0.783	0.211	0	.67525E-02
		0	0	0.0010	5.17E-03	0	
	Schémas de Crank- Nicolson	1	0.992	0.784	0.213	0	.50679E-02
		0	0	0.0010	5.17E-03	0	

-Tableau (VI.1.3) Méthode des différences finies cas unidimensionnelle avec :
temps=1 S=0.53

Position en x		-2	-1	0	1	2	erreur
Solution analytique		1	1	0.997	0.966	0	0.000E+00
Température et Erreur relative	Schémas FTCS	1	0.994	0.764	0.204	0	.13870E-01
		0	0	0.0010	4.08 E-03	0	
	Schémas de Lax-Wendroff	1	1.002	0.722	0.169	0	.38376E-01
		0	0	0.0010	6.21E-03	0	
	Schémas explicite	1	0.994	0.764	0.204	0	.13870E-01
		0	0	0.0010	5.17E-03	0	
	Schémas de Crank-Nicolson	1	0.990	0.778	0.219	0	.57135E-02
		0	0	0.0010	5.17E-03	0	

-Tableau (VI.1.4) Méthode des différences finies cas unidimensionnelle avec :
temps=3 S=0.25

Position en x		-2	-1	0	1	2	erreur
Solution analytique		1	1	0.997	0.966	0	0.000E+00
Température et Erreur relative	Schémas FTCS	1	1.00	0.979	0.754	0	.15974E-01
		0	0	0.0010	4.08 E-03	0	
	Schémas de Lax-Wendroff	1	0.999	0.971	0.741	0	.15568E-01
		0	0	0.0010	6.21E-03	0	
	Schémas explicite	1	1	0.979	0.754	0	.15974E-01
		0	0	0.0010	5.17E-03	0	
	Schémas de Crank-Nicolson	1	1	0.977	0.736	0	.83282E-01
		0	0	0.0010	5.17E-03	0	

-Tableau (VI.1.5) Méthode des différences finies cas unidimensionnelle avec :
 temps=3 S=0.505

Position en x		-2	-1	0	1	2	erreur
Solution analytique		1	1	0.997	0.966	0	0.000E+00
Température et Erreur relative	Schémas FTCS	1	0.990	0.916	0.679	0	.38811E-01
		0	0	0.0010	4.08 E-03	0	
	Schémas de Lax-Wendroff	1	1.009	0.843	0.718	0	.60434E-01
		0	0	0.0010	6.21E-03	0	
	Schémas explicite	1	0.990	0.916	0.679	0	.38811E-01
		0	0	0.0010	5.17E-03	0	
	Schémas de Crank-Nicolson	1	0.990	0.915	0.654	0	.10370E+00
		0	0	0.0010	5.17E-03	0	

-Tableau (VI.1.6) Méthode des différences finies cas unidimensionnelle avec :
 temps=3 S=0.53

Position en x		-2	-1	0	1	2	erreur
Solution analytique		1	1	0.997	0.966	0	0.000E+00
Température et Erreur relative	Schémas FTCS	1	1.156	0.405	0.942	0	.31414E+0 0
		0	0	0.0010	4.08 E-03	0	
	Schémas de Lax-Wendroff	1	4.910	-9.659	4.297	0	.62444E+0 1
		0	0	0.0010	6.21E-03	0	
	Schémas explicite	1	1.156	0.405	0.942	0	.31414E+0 0
		0	0	0.0010	5.17E-03	0	
	Schémas de Crank-Nicolson	1	0.986	0.904	0.640	0	.10710E+0 0
		0	0	0.0010	5.17E-03	0	

-Tableau (VI.1.7) Méthode des différences finies cas unidimensionnelle avec :
temps=6 S=0.25

Position en x		-2	-1	0	1	2	erreur
Solution analytique		1	1	0.997	0.966	0	0.000E+00
Température et Erreur relative	Schémas FTCS	1	1	0.998	0.971	0	.58692E-01
		0	0	0.0010	4.08 E-03	0	
	Schémas de Lax-Wendroff	1	1	0.998	0.960	0	.72941E-01
		0	0	0.0010	6.21E-03	0	
	Schémas explicite	1	1	0.998	0.971	0	.58692E-01
		0	0	0.0010	5.17E-03	0	
	Schémas de Crank-Nicolson	1	1	0.998	0.961		.2085E+00
		0	0	0.0010	5.17E-03	0	

-Tableau (VI.1.8) Méthode des différences finies cas unidimensionnelle avec :
temps=6 S=0.45

Position en x		-2	-1	0	1	2	erreur
Solution analytique		1	1	0.997	0.966	0	0.000E+00
Température et Erreur relative	Schémas FTCS	1	0.99 7	0.981	0.890	0	.10586E+0 0
		0	0	0.0010	4.08 E-03	0	
	Schémas de Lax- Wendroff	1	0.99 7	0.977	0.876	0	.11428E+0 0
		0	0	0.0010	6.21E-03	0	
	Schémas explicite	1	0.99 7	0.981	0.980	0	.10586E+0 0
		0	0	0.0010	5.17E-03	0	
	Schémas de Crank-Nicolson	1	0.99 7	0.978	0.852		.21501E+0 0
		0	0	0.0010	5.17E-03	0	

-Tableau (VI.1.9) Méthode des différences finies cas unidimensionnelle avec :
temps=6 S=0.505

Position en x		-2	-1	0	1	2	erreur
Solution analytique		1	1	0.997	0.966	0	0.000E+00
Température et Erreur relative	Schémas FTCS	1	0.99 6	0.972	0.869	0	.11458E+00
		0	0	0.0010	4.08 E-3	0	
	Schémas de Lax- Wendroff	1	1.54 4	-1.125	4.592	0	23139E+01
		0	0	0.0010	6.21E-03	0	
	Schémas explicite	1	0.99 6	0.972	0.869	0	.11458E+00
		0	0	0.0010	5.17E-03	0	
	Schémas de Crank-Nicolson	1	0.99 6	0.970	0.822	0	.21753E+00
		0	0	0.0010	5.17E-03	0	

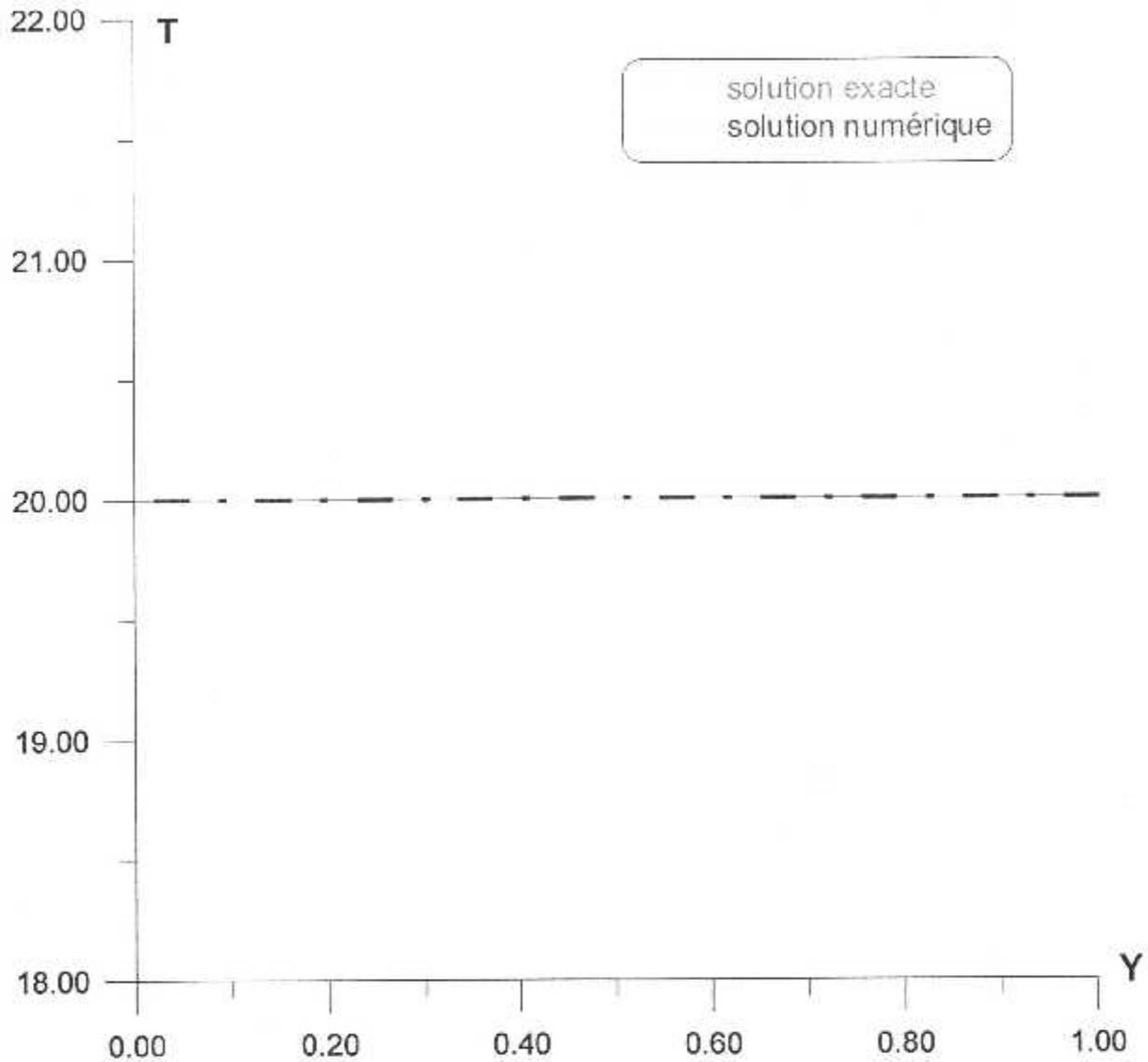
**VI.2. RESULTATS DE LA METHODE DES DIFFERENCES FINIES CAS
BIDIMENSIONNEL :**

Fig VI.2.1 : Variation de la température en fonction d'ordonnée en $x=0$ pour le schéma explicite avec $S_x = S_y = 0.01$

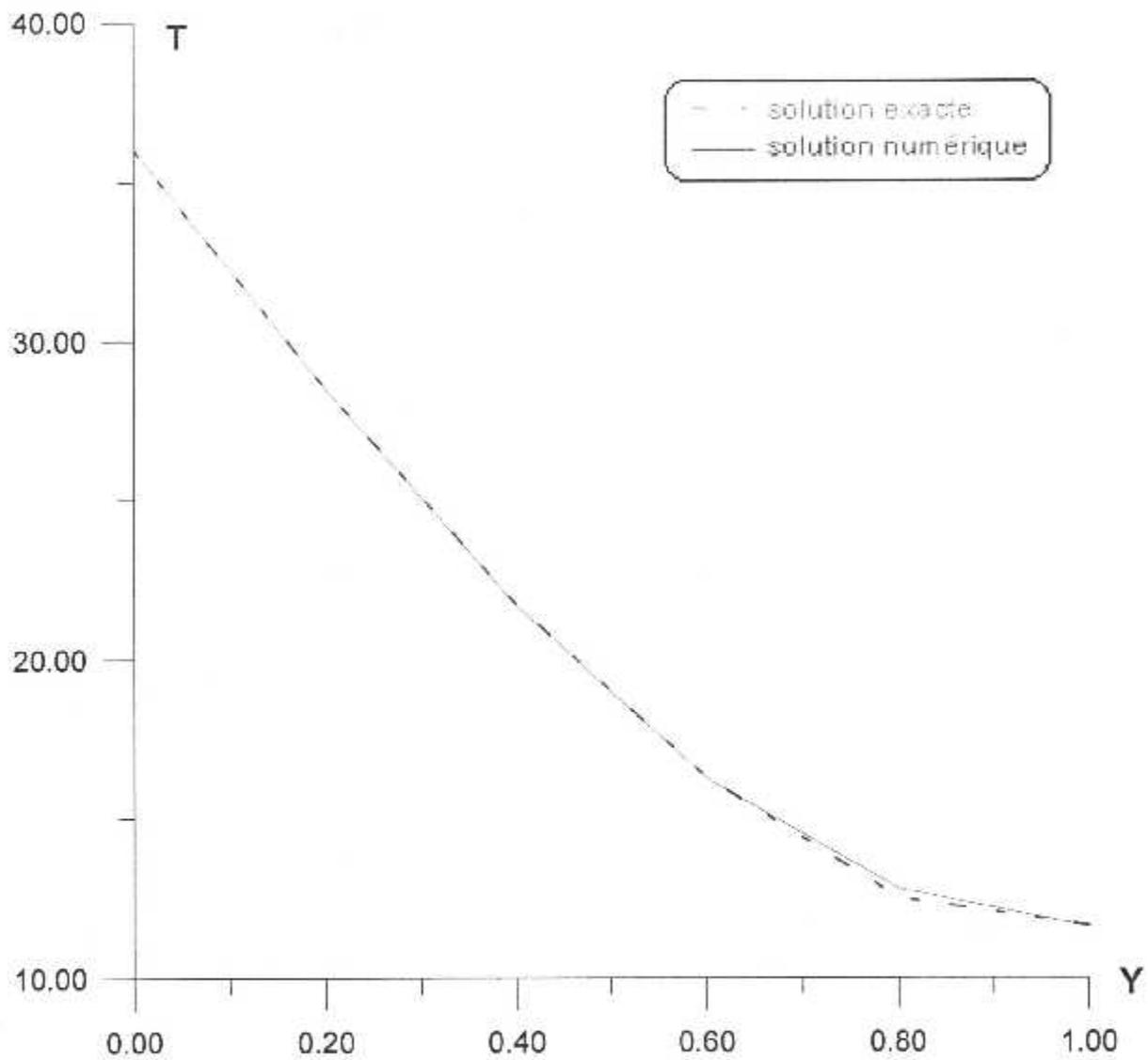


Fig VI.2.2 : Variation de la température en fonction d'ordonnée en $x=0.2$ pour le schéma explicite avec $S_x = S_y = 0.01$

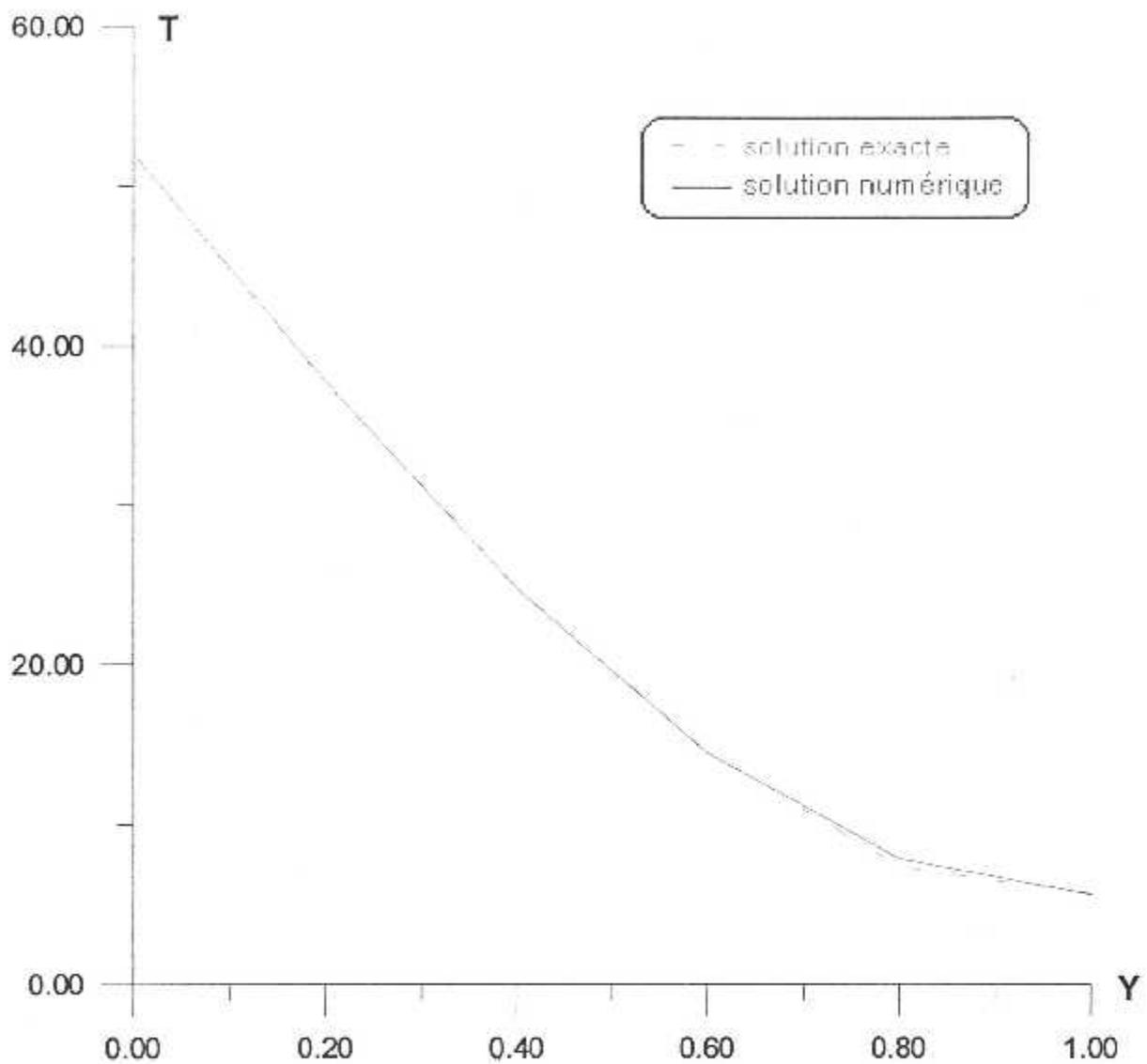


Fig. VI.2.3 : Variation de la température en fonction d'ordonnée en $x=0.4$ pour le schéma explicite avec $S_x = S_y = 0.01$

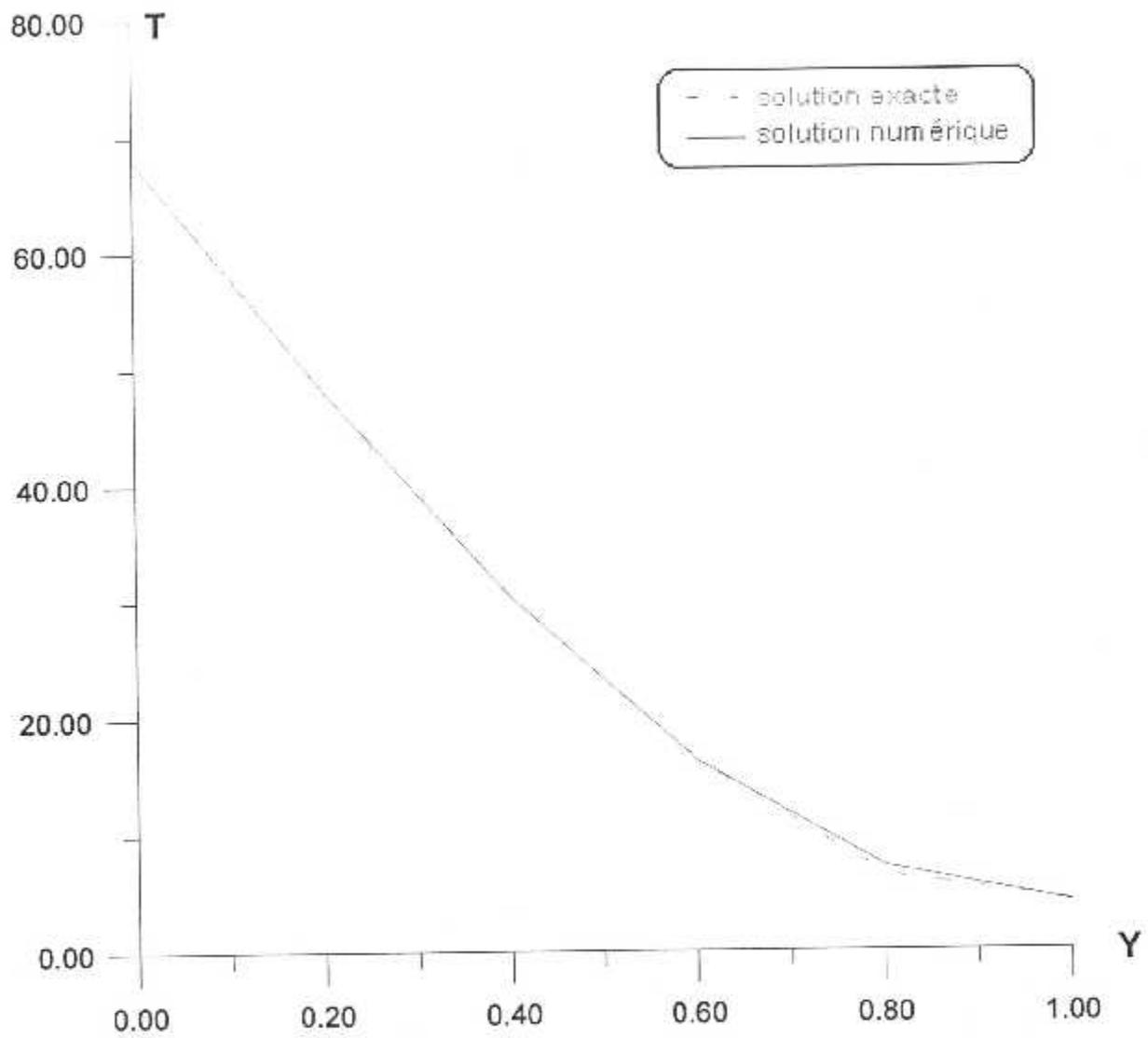


Fig VI.2.4 : Variation de la température en fonction d'ordonnée en $x=0.6$ pour le schéma explicite avec $S_x = S_y = 0.01$

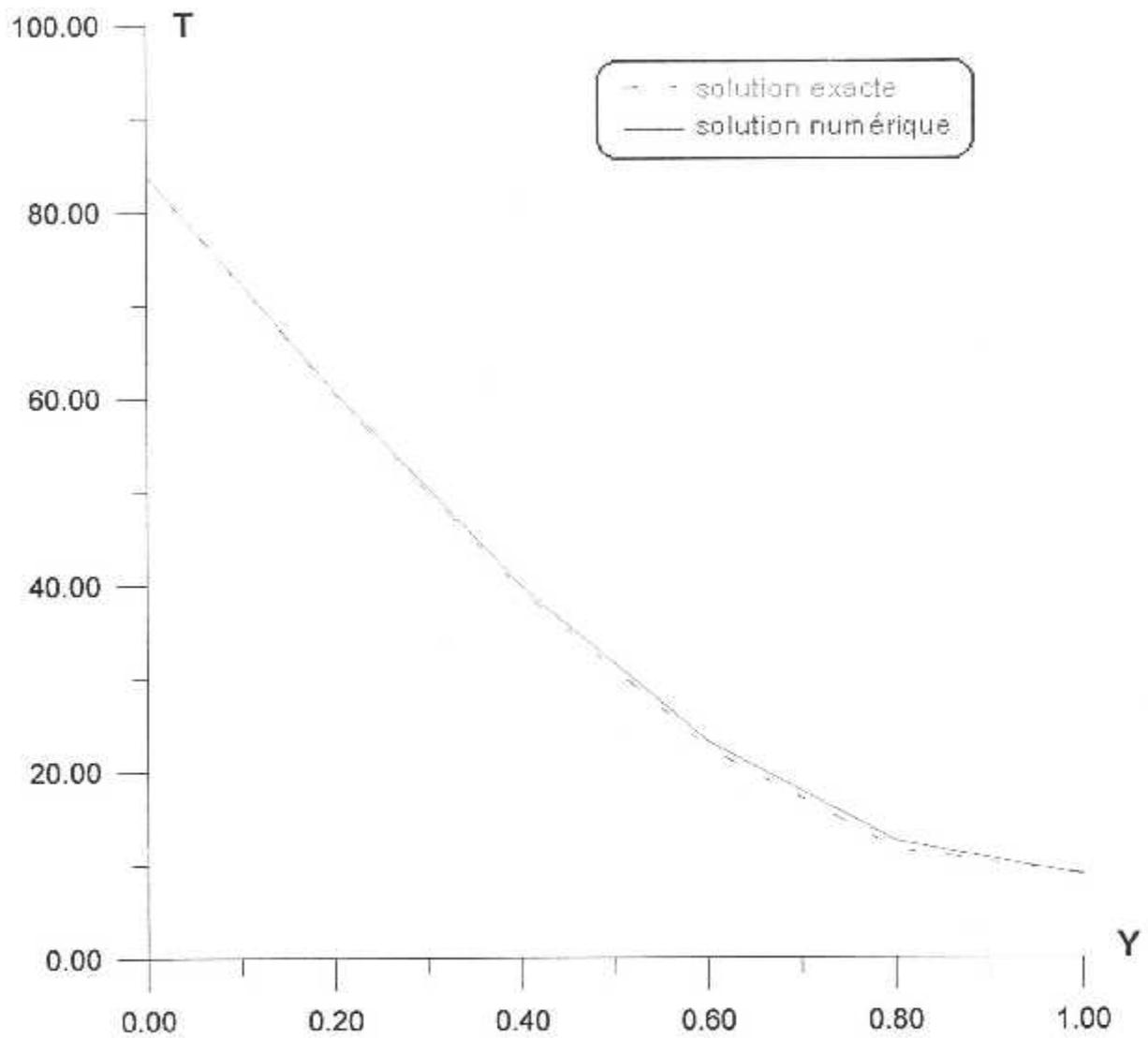


Fig VI.2.5 : Variation de la température en fonction d'ordonnée en $x=0.8$ pour le schéma explicite avec $S_x = S_y = 0.01$

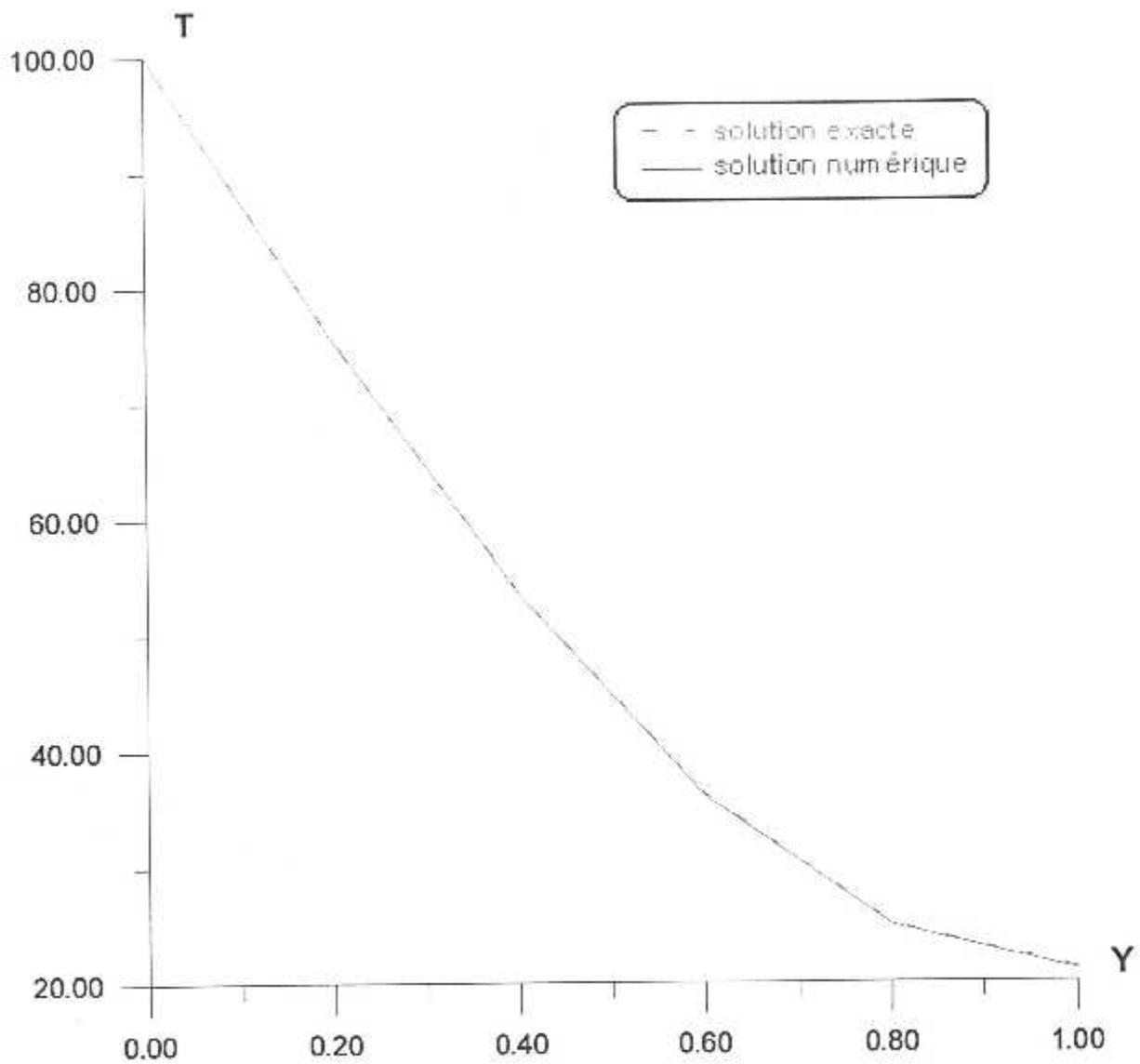


Fig VI.2.6 : Variation de la température en fonction d'ordonnée en $x=1$ pour le schéma explicite avec $S_x = S_y = 0.01$

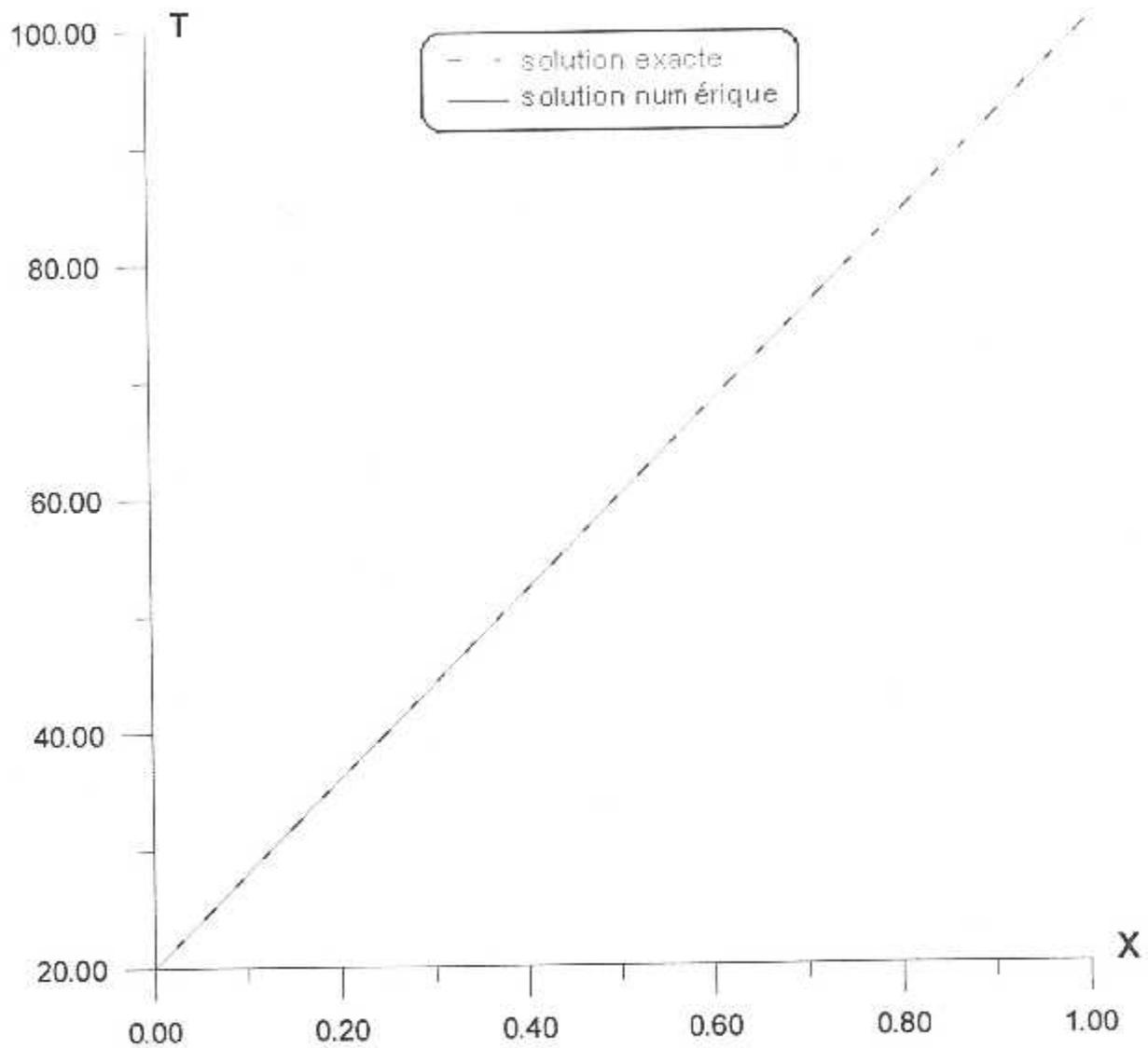


Fig VI.2.7 : Variation de la température en fonction d'abscisse en $y=0$ pour le schéma explicite avec $S_x = S_y = 0.01$

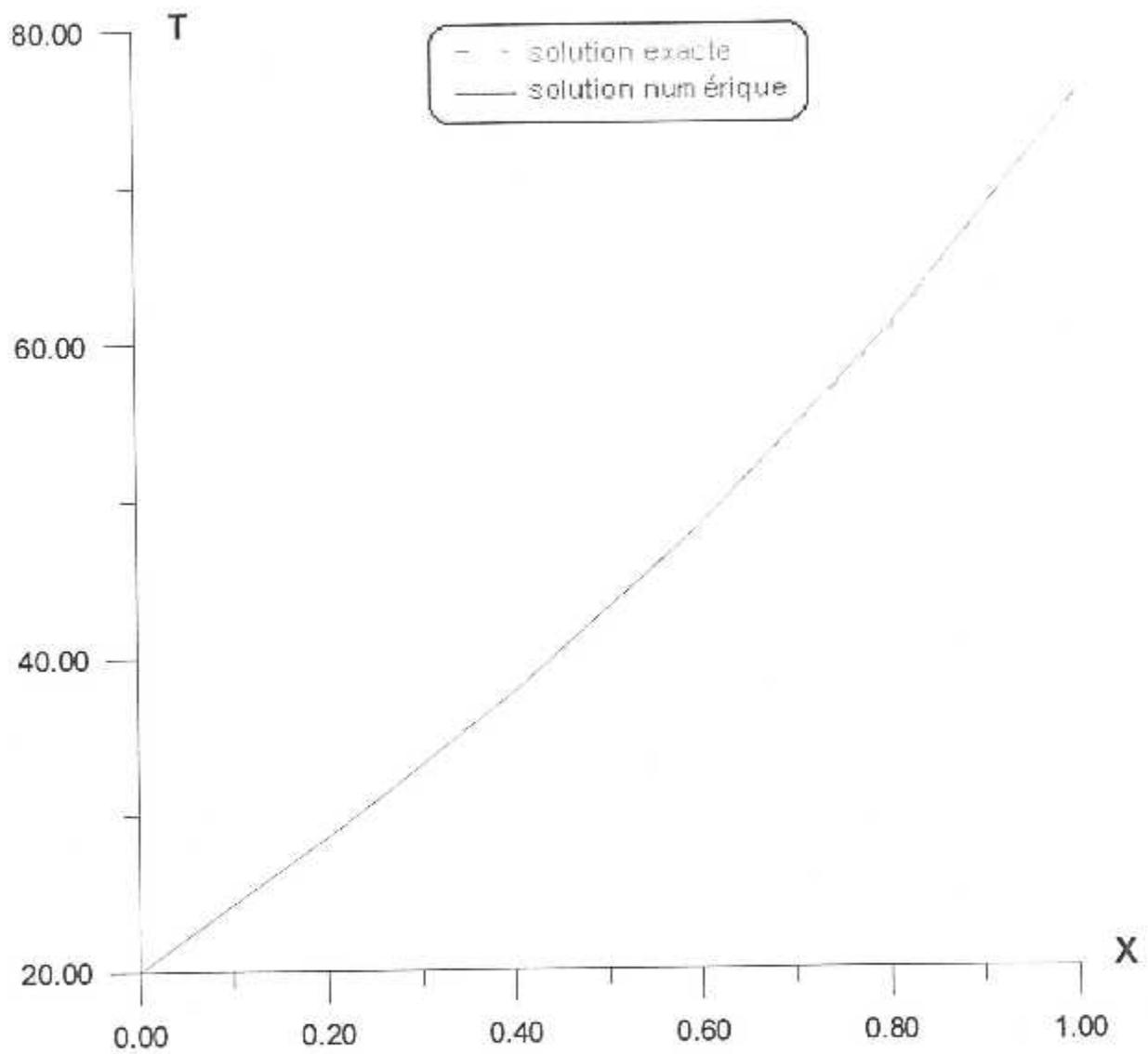


Fig VI.2.8 : Variation de la température en fonction d'abscisse en $y=0.2$ pour le schéma explicite avec $S_x = S_y = 0.01$

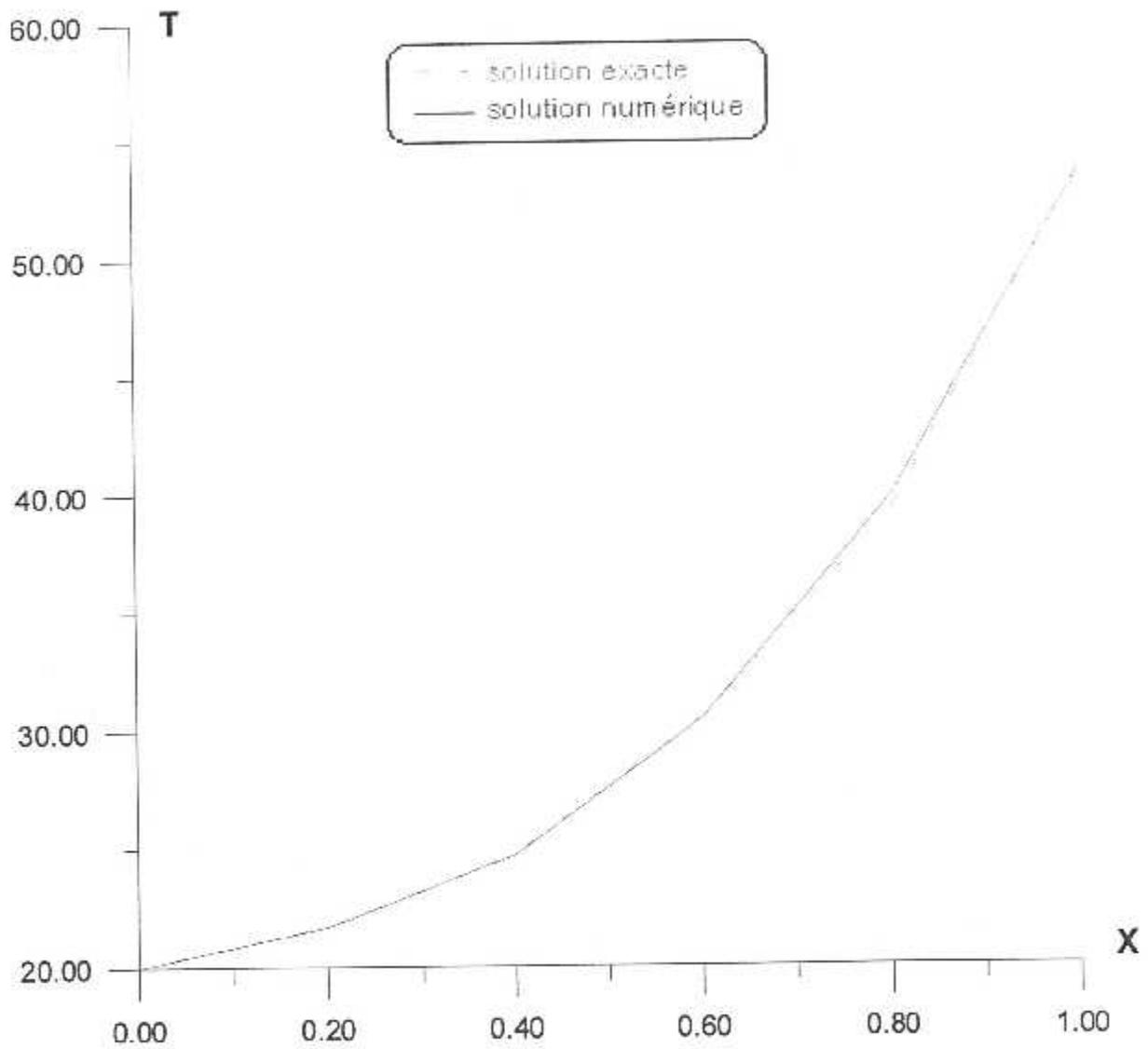


Fig VI.2.9 : Variation de la température en fonction d'abscisse en $y=0.4$ pour le schéma explicite avec $S_x = S_y = 0.01$

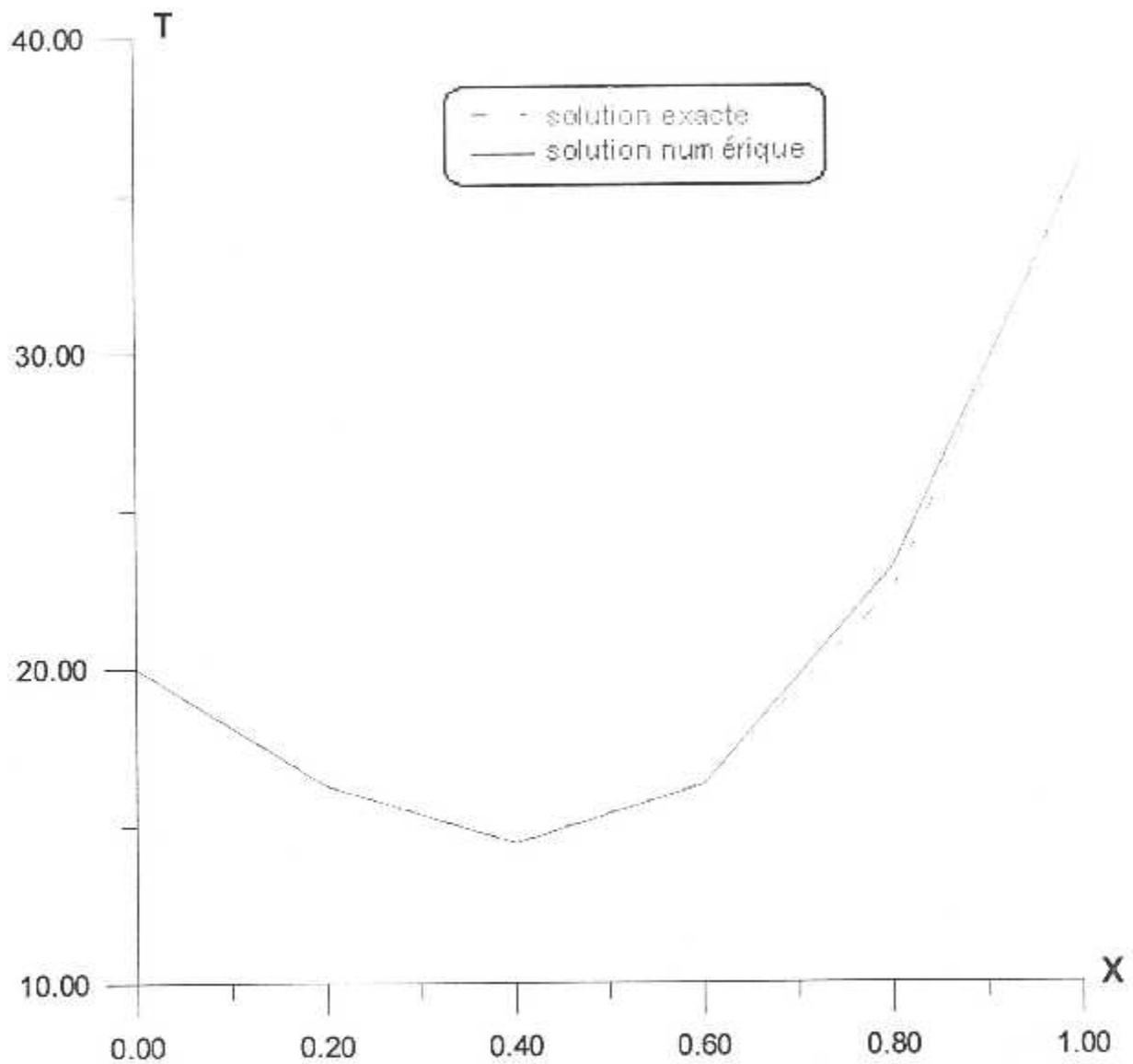


Fig VI.2.10 : Variation de la température en fonction d'abscisse en $y=0.6$ pour le schéma explicite avec $S_x = S_y = 0.01$

-Tableau (VI.2-1) Méthode des différences finies avec condition de Dirichlet cas bidimensionnel : $X=0.00$; $S_x=S_y=0.01$

Position de y	T_{EXT}	T	Erreur relative
0.0000	2.0000	2.0000	0.0000E+00
0.2000	2.0000	2.0000	0.0000E+00
0.4000	2.0000	2.0000	0.0000E+00
0.6000	2.0000	2.0000	0.0000E+00
0.8000	2.0000	2.0000	0.0000E+00
1.0000	2.0000	2.0000	0.0000E+00

-Tableau (VI.2.2) Méthode des différences finies avec condition de Dirichlet cas bidimensionnel : $X=0.20$; $S_x=S_y=0.01$

Position de y	T_{EXT}	T	Erreur relative
0.0000	36.00000	36.0000	0.0000E+00
0.2000	28.00000	28.0000	0.0000E+00
0.4000	21.66667	21.64023	0.1220E-02
0.6000	16.26151	16.23547	0.1601E-02
0.8000	12.48859	12.76540	0.2216E-01
1.0000	11.61788	11.56970	0.4147E-02

-Tableau (VI.2.3) Méthode des différences finies avec condition de Dirichlet cas bidimensionnel : $X=0.40$; $S_x=S_y=0.01$

Position de y	T_{EXT}	T	Erreur relative
0.0000	52.00000	52.0000	0.0000E+00
0.2000	37.66667	37.64023	0.6469E-03
0.4000	24.73593	24.68609	0.2014E-02
0.6000	14.45457	14.40563	0.3385E-02
0.8000	07.278636	07.80517	0.7233E-01
1.0000	05.622443	05.530806	0.1629E-01

-Tableau (VI.2.4) Méthode des différences finies avec condition de Dirichlet cas bidimensionnel : $X=0.60$; $S_x=S_y=0.01$

Position de y	T_{EXT}	T	Erreur relative
0.0000	68.00000	68.0000	0.0000E+00
0.2000	48.26151	48.235470	0.5395E-03
0.4000	30.45457	30.405630	0.1606E-02
0.6000	16.297430	16.255800	0.2554E-02
0.8000	06.446329	07.171040	0.1128E+00
1.0000	04.166775	04.040648	0.3026E-01

-Tableau (VI.2.5) Méthode des différences finies avec condition de Dirichlet cas bidimensionnel : $X=0.80$; $S_x=S_y=0.01$

Position de y	T_{EXT}	T	Erreur relative
0.0000	84.00000	84.0000	0.0000E+00
0.2000	60.48059	60.76540	0.4708E-02
0.4000	39.278640	39.805170	0.1340E-01
0.6000	22.446330	23.171040	0.3242E-01
0.8000	11.6393320	12.491270	0.7319E-01
1.0000	08.959541	08.811270	0.1654E-01

-Tableau (VI.2.6) Méthode des différences finies avec condition de Dirichlet cas bidimensionnel: $X=1.00$; $S_x=S_y=0.01$

Position de y	T_{EXT}	T	Erreur relative
0.0000	100.00000	100.0000	0.0000E+00
0.2000	75.617870	75.569700	0.6370E-03
0.4000	53.622440	53.530810	0.1708E-02
0.6000	36.166770	36.040650	0.3487E-02
0.8000	24.959540	24.811270	0.5940E-02
1.0000	21.097790	20.941890	0.7389E-02

-Tableau (VI.2.7) Méthode des différences finies avec condition de Dirichlet cas bidimensionnel : $Y=0.000$; $S_x=S_y=0.01$

Position de X	T_{EXT}	T	Erreur relative
0.0000	20.0000	20.0000	0.0000E+00
0.2000	63.0000	63.0000	0.0000E+00
0.4000	52.0000	52.0000	0.0000E+00
0.6000	68.0000	68.0000	0.0000E+00
0.8000	84.0000	84.0000	0.0000E+00
1.0000	100.000	100.000	0.0000E+00

-Tableau (VI.2.8) Méthode des différences finies avec condition de Dirichlet cas bidimensionnel : $Y=0.200$; $S_x=S_y=0.01$

Position de X	T_{EXT}	T	Erreur relative
0.0000	20.0000	20.0000	0.0000E+00
0.2000	28.464650	28.450620	0.4928E-03
0.4000	37.666670	37.640230	0.7019E-03
0.6000	48.261510	48.245470	0.3323E-03
0.8000	60.488590	60.765400	0.4576E-02
1.0000	75.617870	75.569700	0.6370E-03

-Tableau (VI.2.9) Méthode des différences finies avec condition de Dirichlet cas bidimensionnel : $Y=0.400$; $S_x=S_y=0.01$

Position de X	T_{EXT}	T	Erreur relative
0.0000	20.000000	20.0000	0.0000E+00
0.2000	21.666670	21.640230	0.1220E-02
0.4000	24.735930	24.686090	0.2014E-02
0.6000	30.454570	30.405630	0.1606E-02
0.8000	39.278640	39.805170	0.1340E-01
1.0000	53.622440	53.530810	0.1708E-02

-Tableau (VI.2.10) Méthode des différences finies avec condition de Dirichlet cas bidimensionnel: $Y=0.600; S_x=S_y=0.01$

Position de X	T_{EXT}	T	Erreur relative
0.0000	20.000000	20.0000	0.0000E+00
0.2000	16.261510	16.235470	0.1601E-02
0.4000	14.454570	14.405630	0.3385E-02
0.6000	16.297430	16.255800	0.2554E-02
0.8000	22.446330	23.171040	0.3242E-01
1.0000	36.166770	36.040650	0.3487E-02

-Tableau (VI.2.11) Méthode des différences finies avec condition de Dirichlet cas bidimensionnel : $Y=0.800; S_x=S_y=0.01$

Position de X	T_{EXT}	T	Erreur relative
0.0000	20.000000	20.0000	0.0000E+00
0.2000	12.488590	12.765400	0.2216E-01
0.4000	07.278636	07.805170	0.7233E-01
0.6000	06.446329	07.171040	0.1124E+00
0.8000	11.639320	12.491270	0.7319E-01
1.0000	24.959540	24.811270	0.5940E-02

-Tableau (VI.2.12) Méthode des différences finies avec condition de Dirichlet cas bidimensionnel : $Y=1.00; S_x=S_y=1.00$

Position de X	T_{EXT}	T	Erreur relative
0.0000	20.000000	20.0000	0.0000E+00
0.2000	11.617880	11.569700	0.4147E-02
0.4000	05.622443	05.530806	0.1629E-01
0.6000	04.166775	04.040648	0.3026E-01
0.8000	08.959541	08.811270	0.1654E-01
1.0000	21.097790	20.941890	0.73389E-02

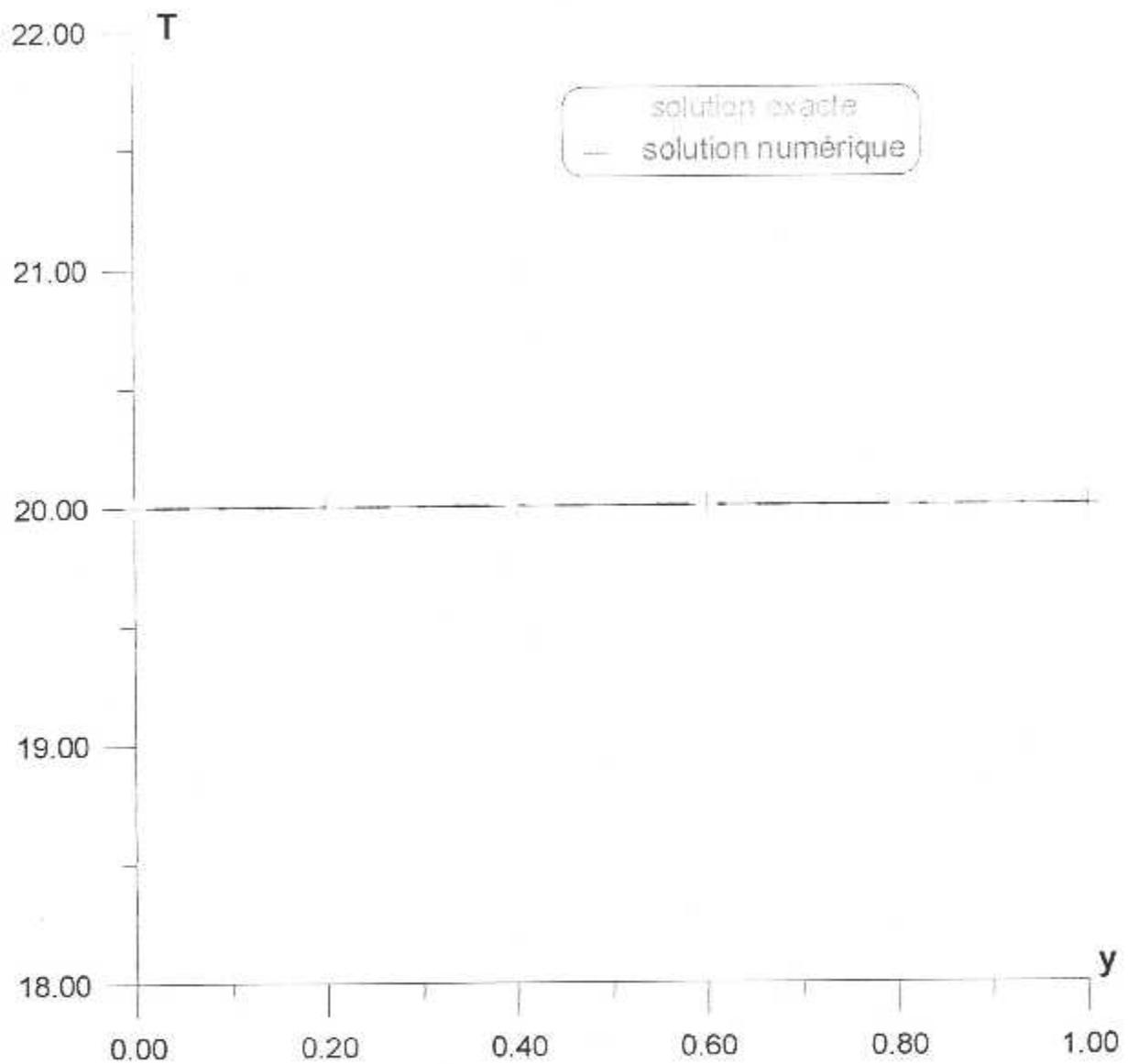
VI.4. RESULTATS DE LA METHODE DES ELEMENTS FINIS BIDIMENSIONNEL :

Fig VI.3.1 : Variation de la température en fonction d'ordonnée en $x=0$ pour le schéma explicite avec $S_x = S_y = 0.01$

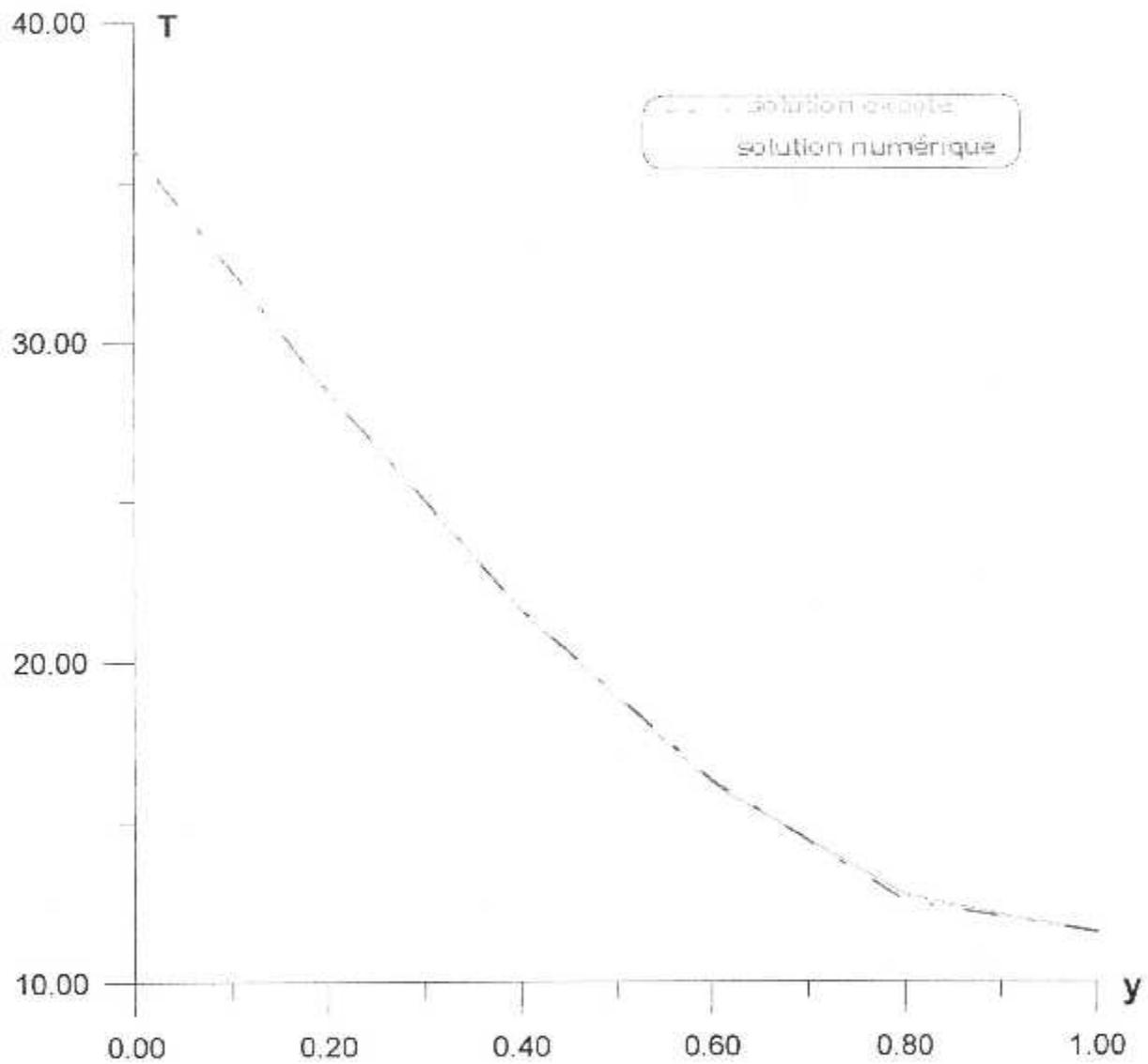


Fig VI.3.2 : Variation de la température en fonction d'ordonnée en $x=0.2$ pour le schéma explicite avec $S_x = S_y = 0.01$

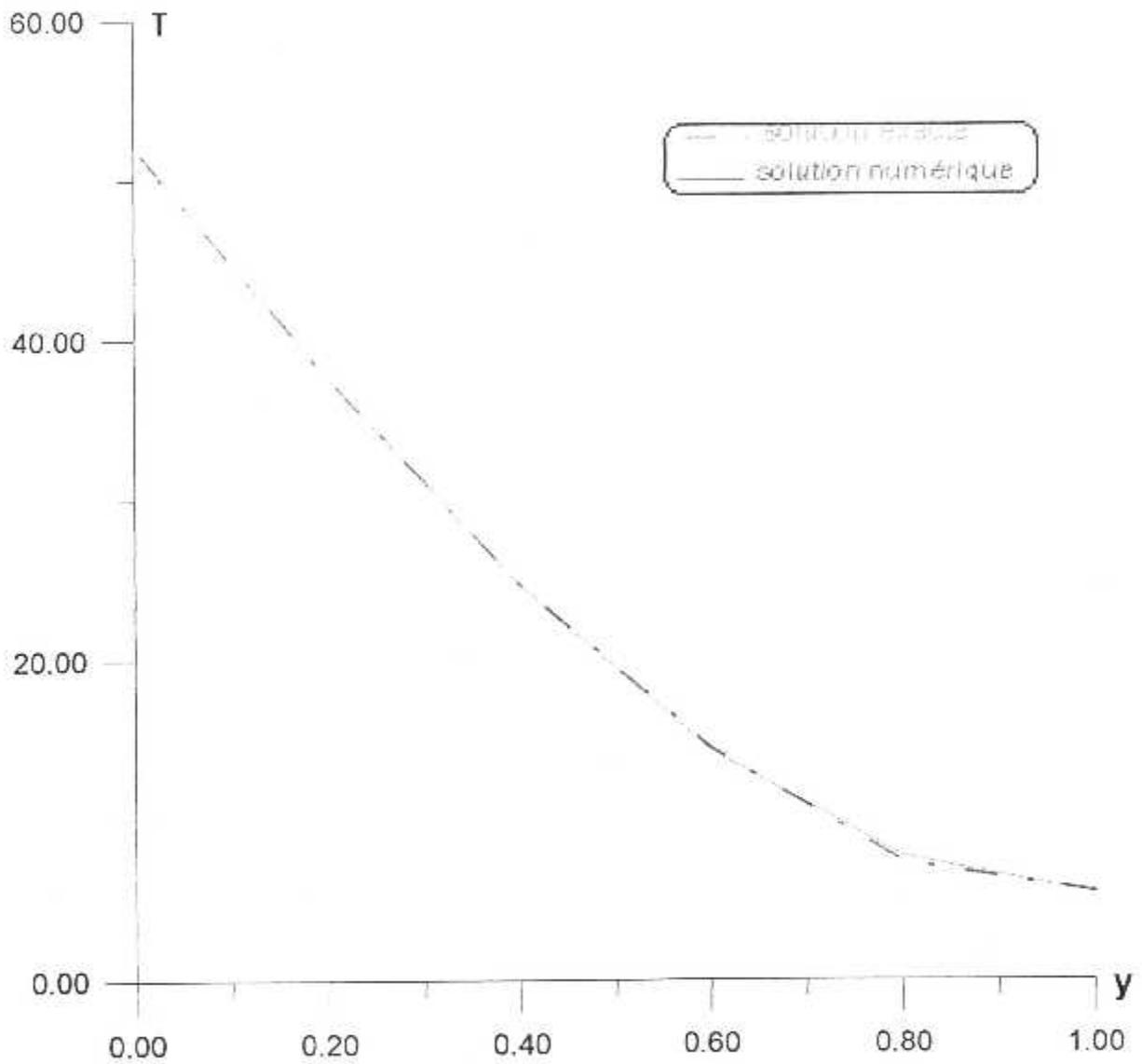


Fig VI.3.3 : Variation de la température en fonction d'ordonnée en $x=0.4$ pour le schéma explicite avec $S_x = S_y = 0.01$

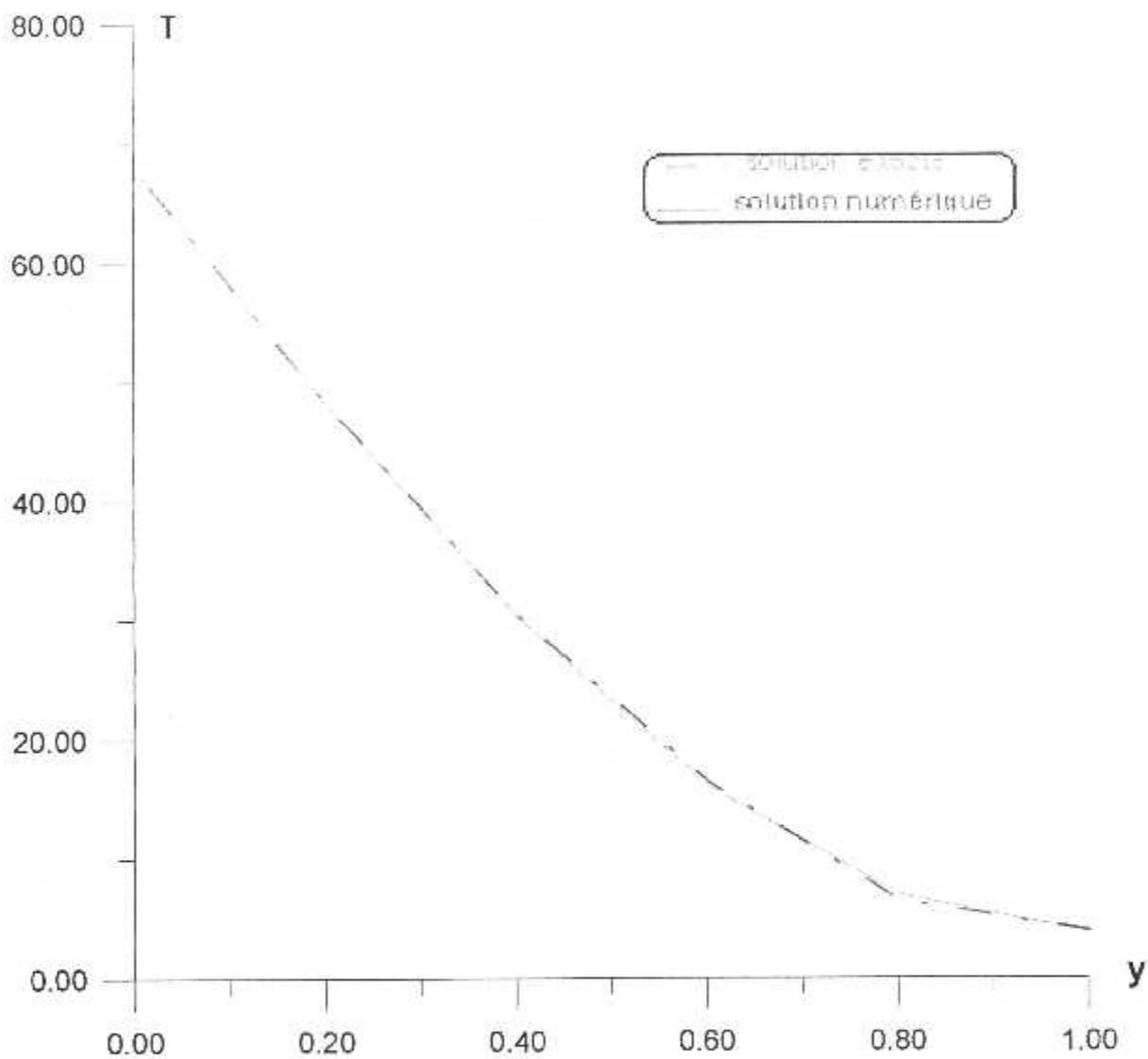


Fig VI.3.4 : Variation de la température en fonction d'ordonnée en $x=0.6$ pour le schéma explicite avec $S_x = S_y = 0.01$

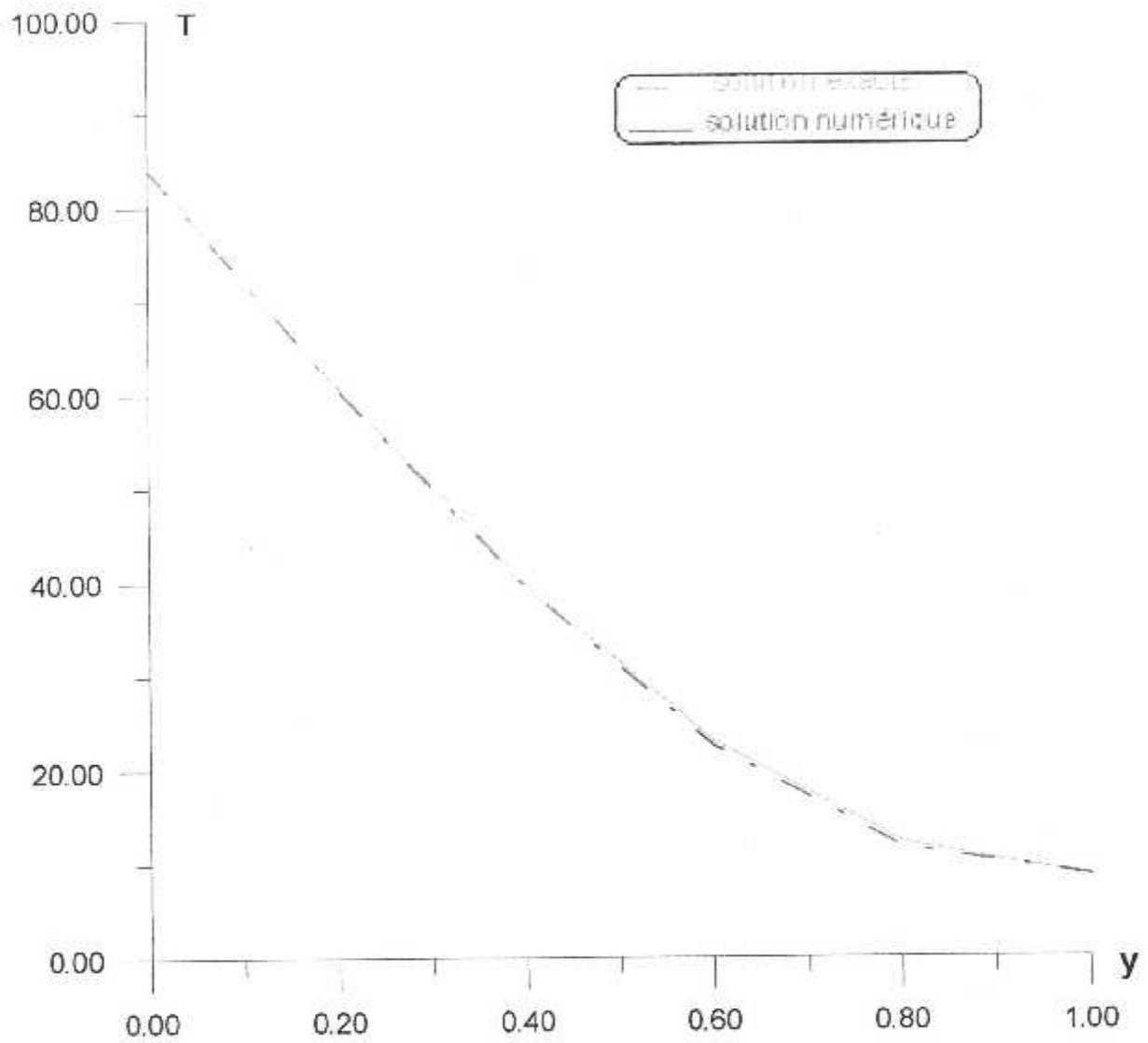


Fig VI.3.5 : Variation de la température en fonction de l'ordonnée en $x=0.8$ pour le schéma explicite avec $S_x = S_y = 0.01$

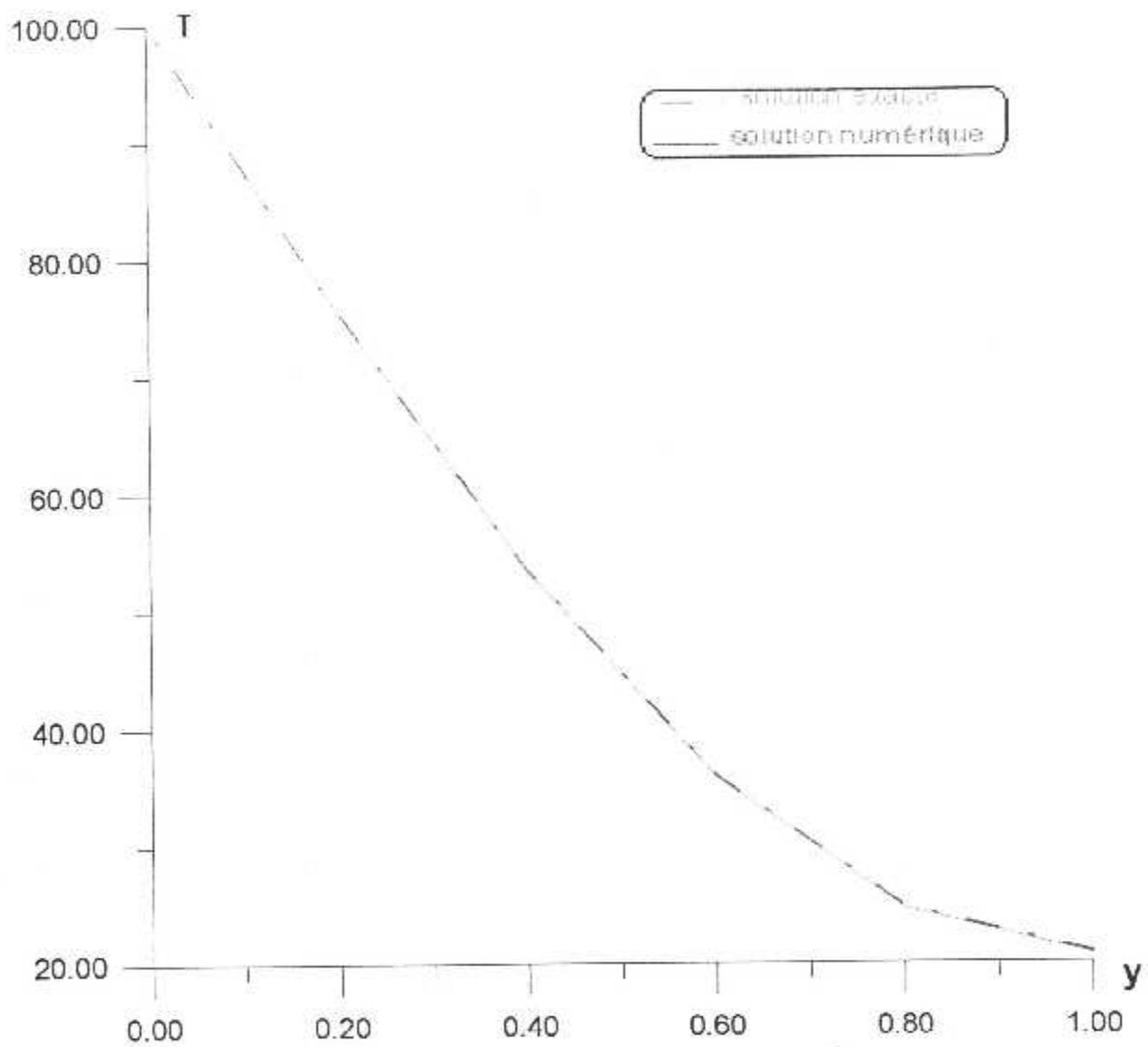


Fig.VI.3.6 : Variation de la température en fonction d'ordonnée en $x=1$ pour le schéma explicite avec $S_x = S_y = 0.01$

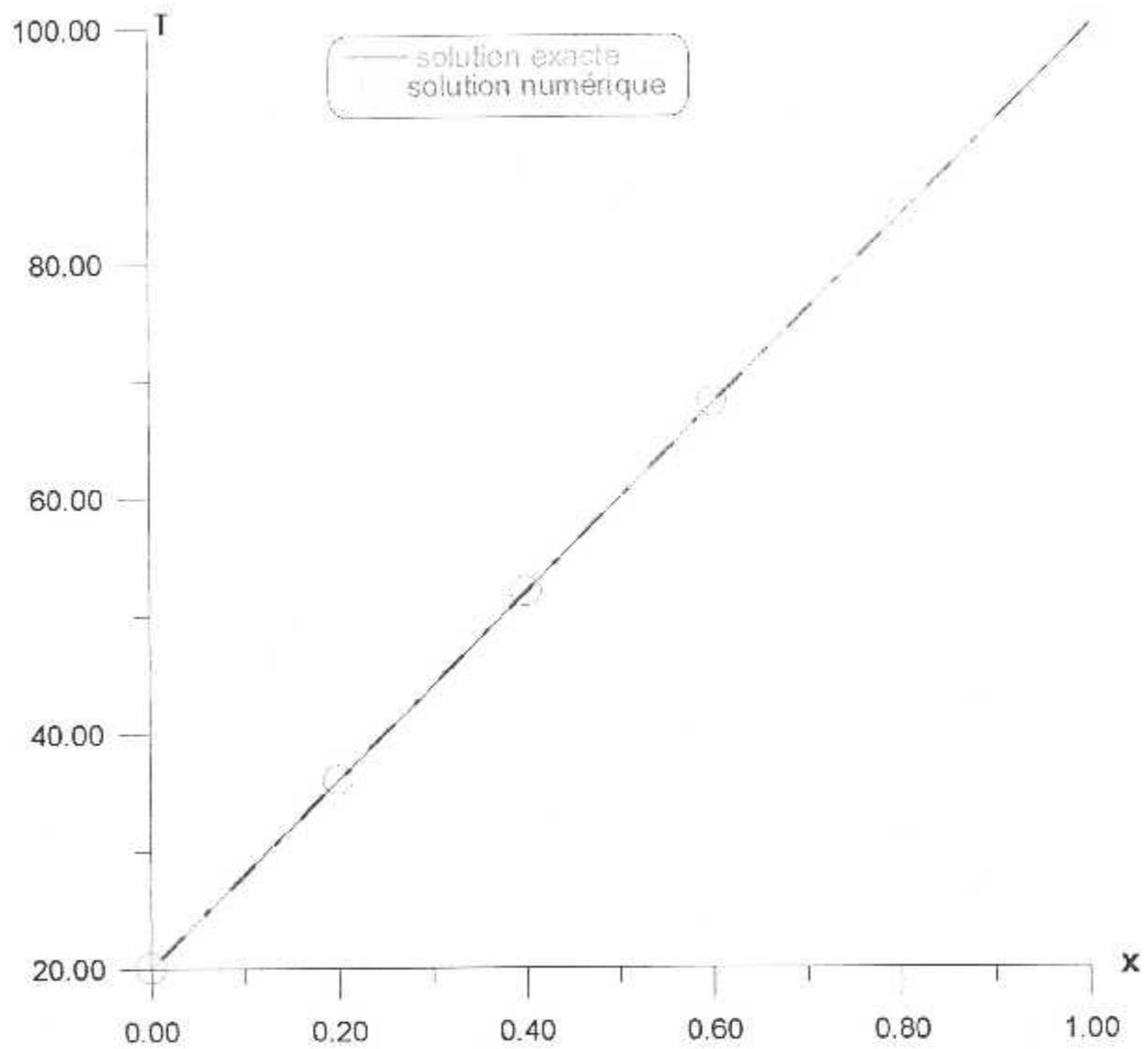


Fig.VI.3.7 : Variation de la température en fonction d'abscisse en $y=0$ pour le schéma explicite avec $S_x = S_y = 0.01$

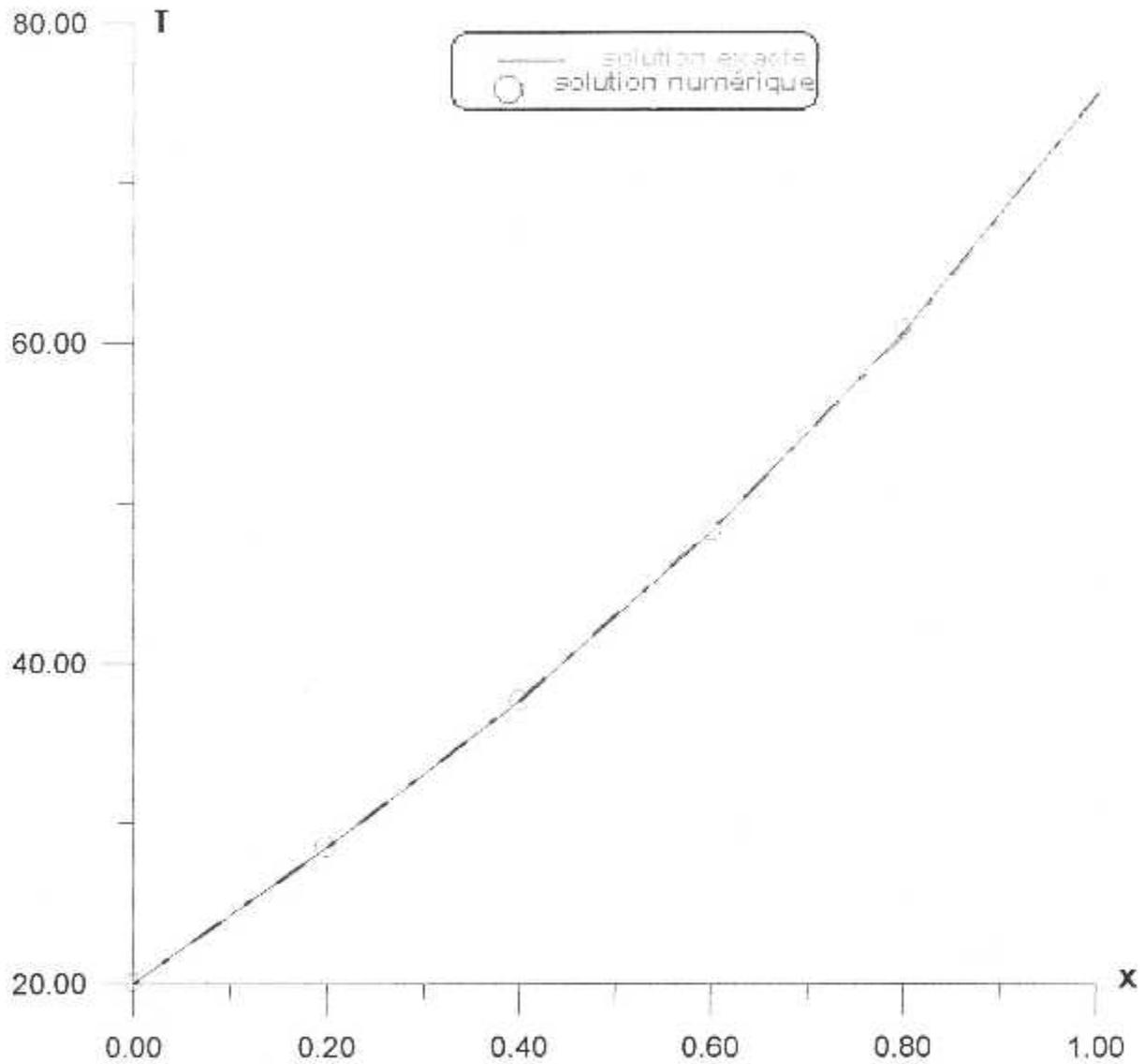


Fig.VI.3.8 : Variation de la température en fonction d'abscisse en $y = 0.2$ pour le schéma explicite avec $S_x = S_y = 0.01$

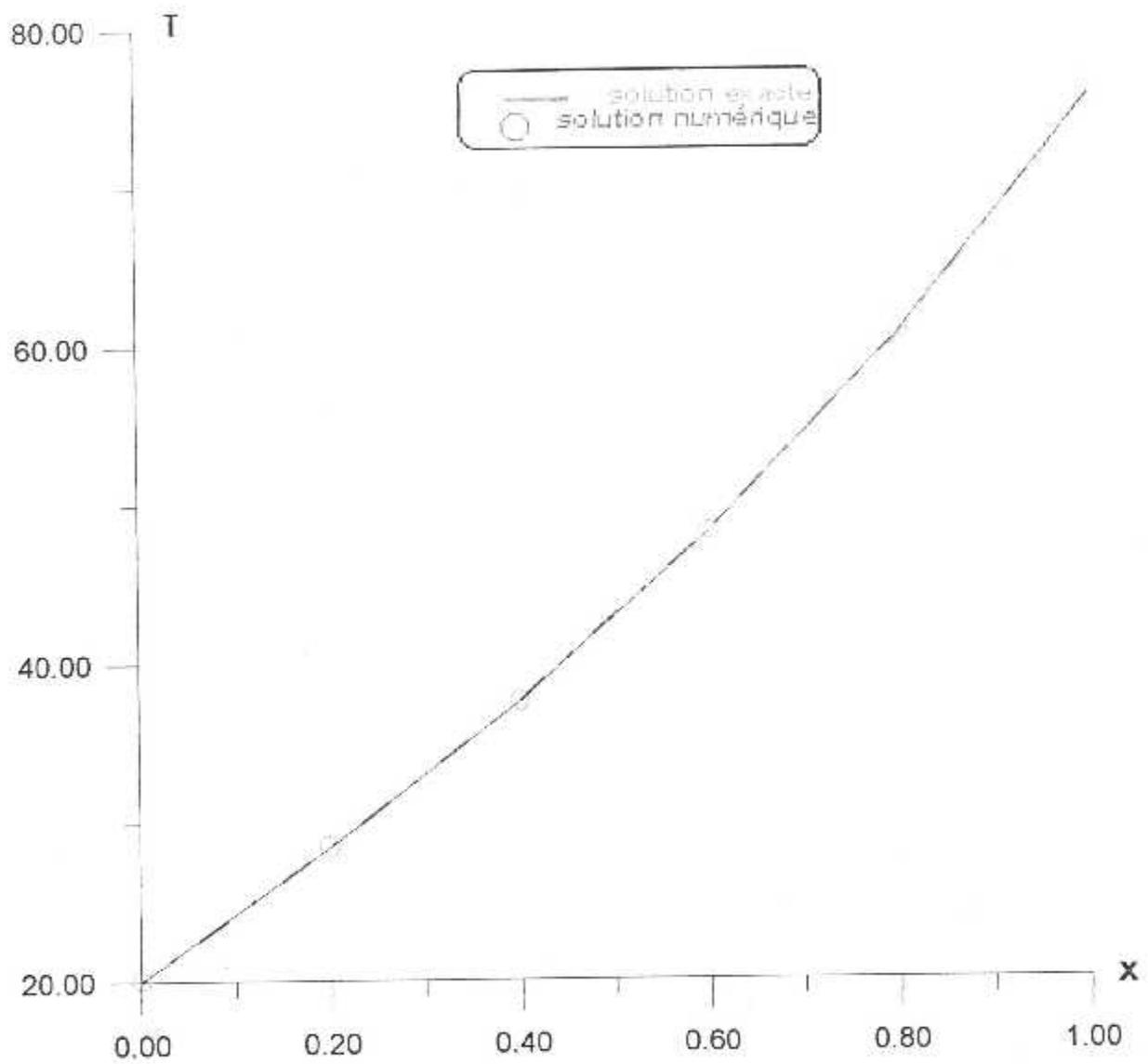


Fig.VI.3.9 : Variation de la température en fonction d'abscisse en $y=0.4$ pour le schéma explicite avec $S_x = S_y = 0.01$

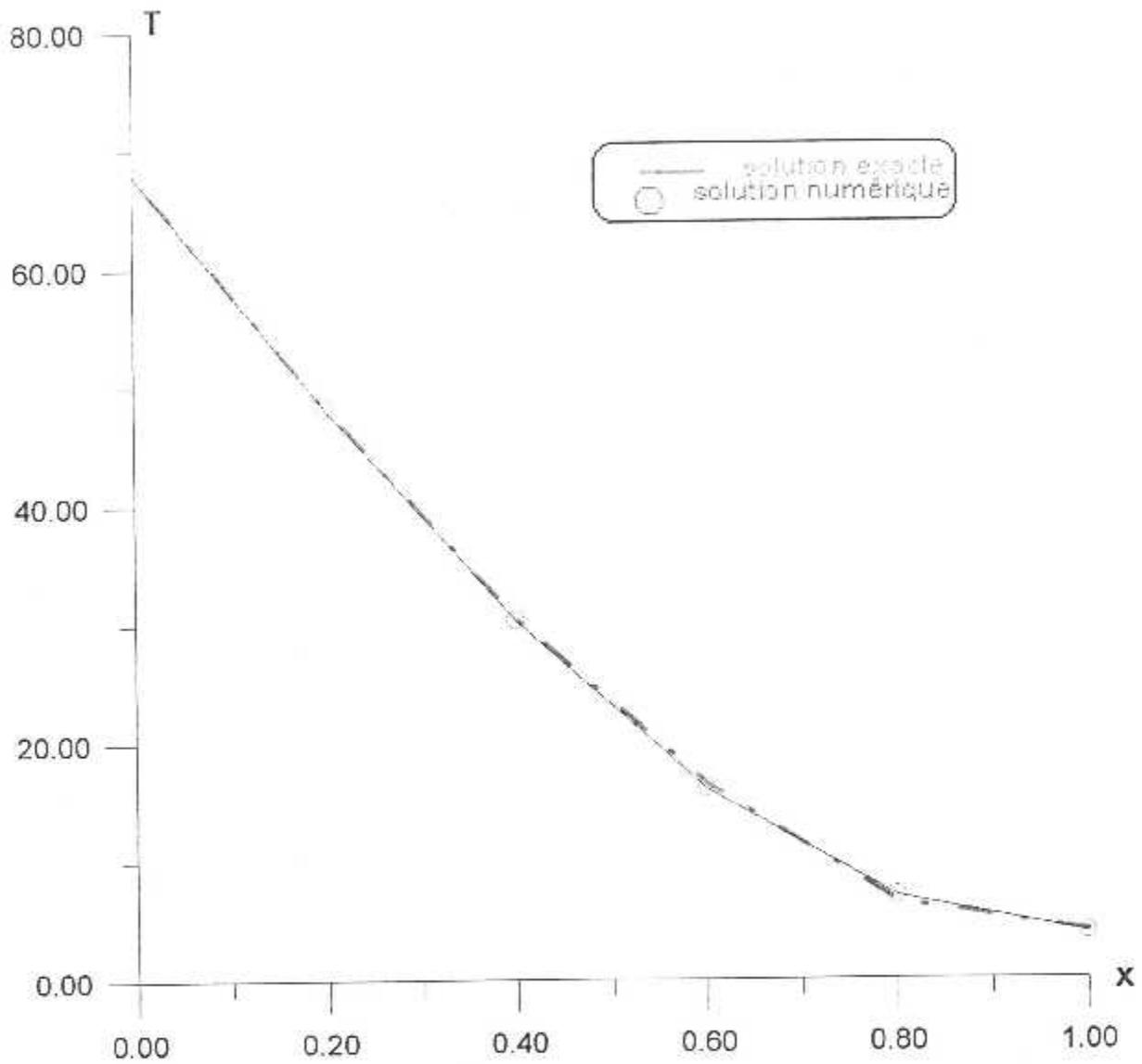


Fig.VI.3.10 : Variation de la température en fonction d'abscisse en $y = 0.6$ pour le schéma explicite avec $S_x = S_y = 0.01$

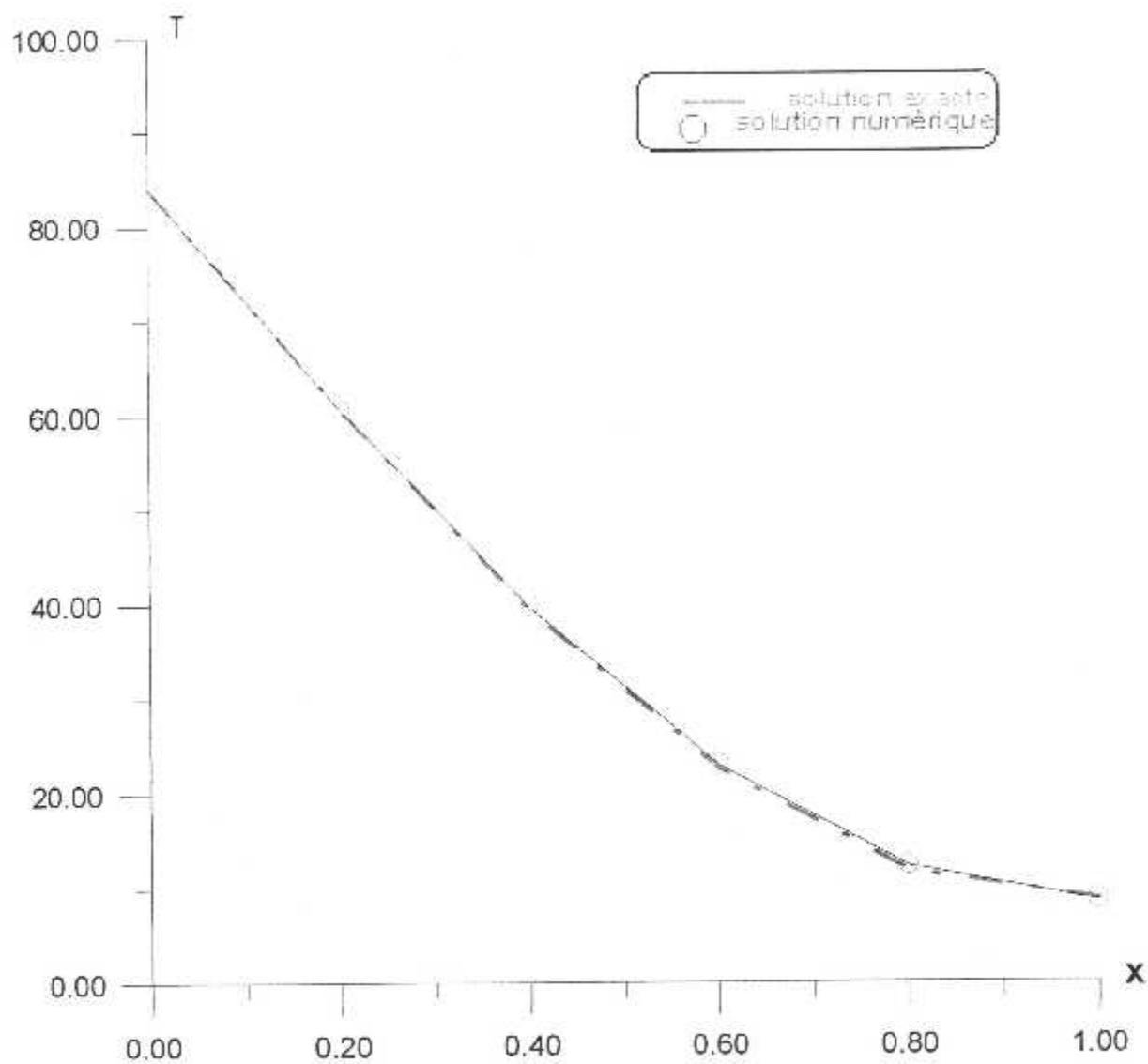


Fig.VI.3.11 : Variation de la température en fonction d'abscisse en $y = 0.8$ pour le schéma explicite avec $S_x = S_y = 0.01$

-Tableau (VI.3.1)Méthode des éléments finis avec condition de Dirichlet :
 $X=0.00$; $S_x=S_y=0.01$

Position de y	T _{EXT}	T	Erreur relative
0.0000	2.0000	2.0000	0.0000E+00
0.2000	2.0000	2.0000	0.0000E+00
0.4000	2.0000	2.0000	0.0000E+00
0.6000	2.0000	2.0000	0.0000E+00
0.8000	2.0000	2.0000	0.0000E+00
1.0000	2.0000	2.0000	0.0000E+00

-Tableau (VI.3.2)Méthode des éléments finis avec condition de Dirichlet :
 $X=0.20$; $S_x=S_y=0.01$

Position de y	T _{EXT}	T	Erreur relative
0.0000	36.0000	36.0000	0.0000E+00
0.2000	28.439876	28.420760	0.6721E-03
0.4000	21.606660	21.583430	0.1075E-02
0.6000	16.251280	16.157290	0.5783E-02
0.8000	12.488590	12.673500	0.1480E-01
1.0000	11.521430	11.473060	0.4198E-02

-Tableau (VI.3.3)Méthode des éléments finis avec condition de Dirichlet :
 $X=0.40$; $S_x=S_y=0.01$

Position de y	T _{EXT}	T	Erreur relative
0.0000	52.0000	52.0000	0.0000E+00
0.2000	37.606660	37.583430	0.6177E-03
0.4000	24.599960	24.578050	0.8906E-03
0.6000	14.393830	14.256920	0.9511E-02
0.8000	7.278636	7.630351	0.4832E-01
1.0000	5.438990	5.346992	0.1691E-01

-Tableau(VI.3.4)Méthode des éléments finis avec condition de Dirichlet :
 $X=0.60$; $S_x=S_y=0.01$

Position de y	T_{EXT}	T	Erreur relative
0.0000	68.0000	68.0000	0.0000E+00
0.2000	48.251280	48.157290	0.1947E-02
0.4000	30.393830	30.256920	0.4504E-02
0.6000	16.437080	16.051120	0.2348E-01
0.8000	6.446329	6.930424	0.1164E-01
1.0000	3.914274	3.787649	0.3234E-01

-Tableau (VI.3.5)Méthode des éléments finis avec condition de Dirichlet :
 $X=0.80$; $S_x=S_y=0.01$

Position de y	T_{EXT}	T	Erreur relative
0.0000	84.0000	84.0000	0.0000E+00
0.2000	60.488590	60.673500	0.3056E-02
0.4000	39.278640	39.630350	0.8954E-02
0.6000	22.446330	22.930420	0.2156E-01
0.8000	11.639320	12.208400	0.4889E-01
1.0000	8.662708	8.513852	0.1718E-01

-Tableau (VI.3.6)Méthode des éléments finis avec condition de Dirichlet :
 $X=1.00$; $S_x=S_y=0.01$

Position de y	T_{EXT}	T	Erreur relative
0.0000	100.0000	100.0000	0.0000E+00
0.2000	75.521430	75.473060	0.6404E-03
0.4000	53.438990	53.346990	0.1721E-02
0.6000	35.914270	35.787650	0.3525E-02
0.8000	24.662710	24.513850	0.6035E-02
1.0000	20.785680	20.629170	0.7529E-02

**-Tableau (VI.3.7) Méthode des éléments finis avec condition de Dirichlet :
 $Y=0.00 ; S_x=S_y=0.01$**

Position de X	T_{EXT}	T	Erreur relative
0.0000	20.0000	100.0000	0.0000E+00
0.2000	36.00000	36.00000	0.0000E+00
0.4000	52.00000	52.00000	0.0000E+00
0.6000	68.00000	68.00000	0.0000E+00
0.8000	84.00000	84.00000	0.0000E+00
1.0000	100.0000	100.0000	0.0000E+00

**-Tableau (VI.3.8) Méthode des éléments finis avec condition de Dirichlet :
 $Y=0.20 ; S_x=S_y=0.01$**

Position de X	T_{EXT}	T	Erreur relative
0.0000	20.0000	20.0000	0.0000E+00
0.2000	28.439850	28.420760	0.6712E-03
0.4000	37.606660	37.583430	0.6177E-03
0.6000	48.251280	48.157290	0.1947E-02
0.8000	60.488590	60.673500	0.3056E-02
1.0000	75.521430	75.473060	0.6404E-02

**-Tableau (VI.3.9) Méthode des éléments finis avec condition de Dirichlet :
 $Y=0.40 ; S_x=S_y=0.01$**

Position de X	T_{EXT}	T	Erreur relative
0.0000	20.0000	20.0000	0.0000E+00
0.2000	21.606660	21.583430	0.1075E-02
0.4000	24.599960	24.578050	0.8906E-03
0.6000	30.393830	30.256920	0.4504E-02
0.8000	39.278640	39.630350	0.8954E-02
1.0000	53.438990	53.346990	0.1721E-02

-Tableau(VI.3.10)Méthode des éléments finis avec condition de Dirichlet :
 $Y=0.60 ; S_x=S_y=0.01$

Position de X	T _{EXT}	T	Erreur relative
0.0000	68.0000	68.0000	0.0000E+00
0.2000	48.251280	48.157290	0.1947E-02
0.4000	30.393830	30.256920	0.4504E-02
0.6000	16.437080	16.051120	0.2348E-01
0.8000	6.4463290	6.9304240	0.7509E-01
1.0000	3.9142740	3.7876490	0.3234E-01

-Tableau (VI.3.11) Méthode des éléments finis avec condition de Dirichlet :
 $Y=0.80 ; S_x=S_y= 0.01$

Position de X	T _{EXT}	T	Erreur relative
0.0000	84.0000	84.0000	0.0000E+00
0.2000	60.488590	60.673500	0.3056E-02
0.4000	39.278640	39.630350	0.8954E-02
0.6000	22.446330	22.930420	0.2156E-01
0.8000	11.639320	12.208400	0.4889E-01
1.0000	08.662708	08.513852	0.1718E-01

-Tableau(VI.3.12)Méthode des éléments finis avec condition de Dirichlet :
 $Y=1.00 S_x=S_y= 0.01$

Position de X	T _{EXT}	T	Erreur relative
0.0000	20.0000	20.0000	0.0000E+00
0.2000	11.521430	11.473060	0.4198E-02
0.4000	05.438990	05.346992	0.1691E-01
0.6000	03.914274	03.787648	0.3234E-01
0.8000	08.662788	08.513852	0.1719E-01
1.0000	20.785680	20.629170	0.7529E-02

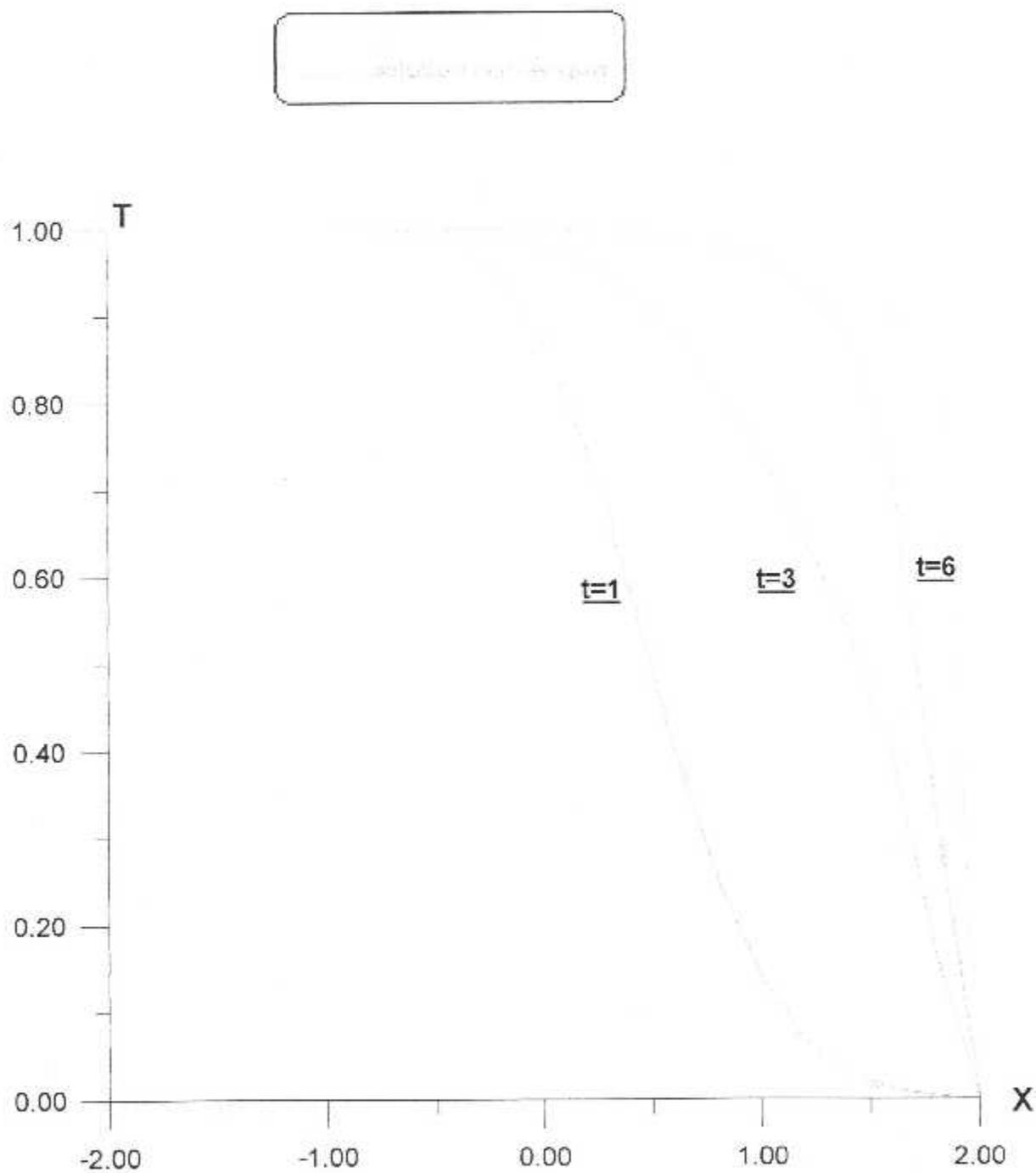
- IV.4. RESULTATS DE LA METHODE DES VOLUMES FINIS UNIDIMENSIONNEL

Fig.VI.4.1 : Variation de la température en fonction du temps et d'abscisse avec $s=0.25$

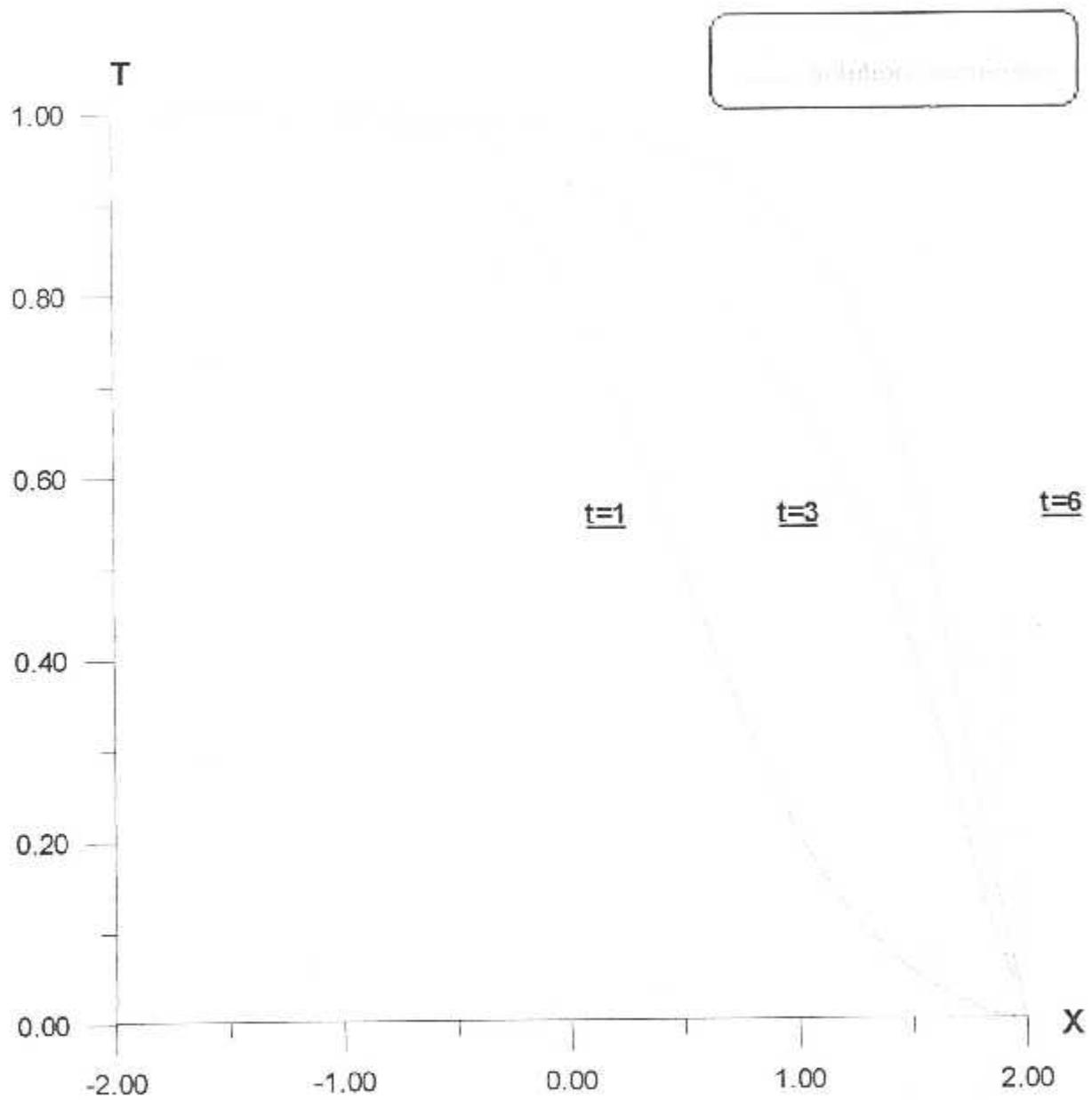


Fig.VI.4.2 : Variation de la température en fonction du temps et d'abscisse avec $s=0.45$

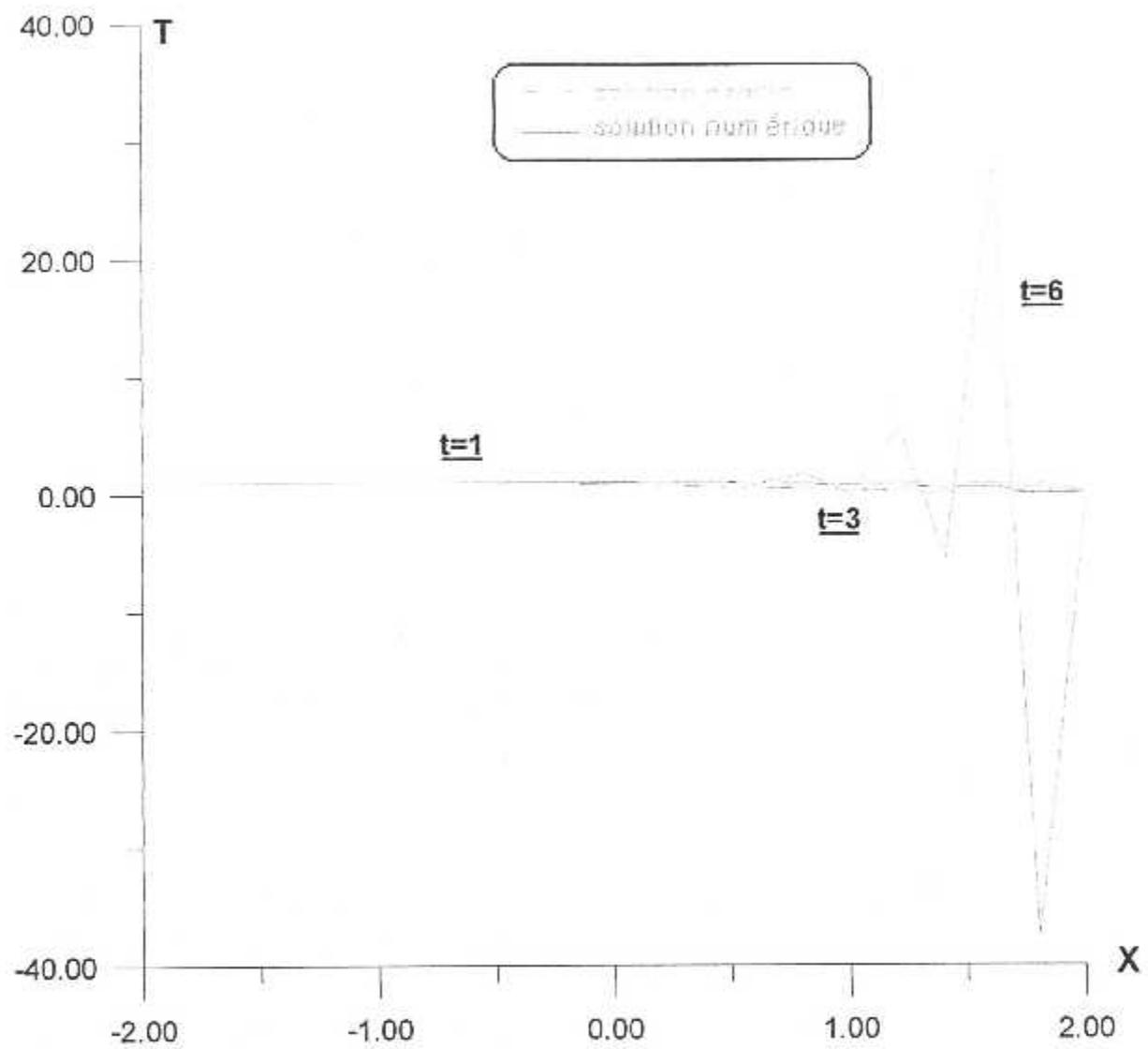


Fig.VI.4.3 : Variation de la température en fonction du temps et d'abscisse avec $s=0.53$ (instabilité)

-Tableau (VI.4.1) Méthode des volumes finis : temps =1 ; S = 0.25

Position de X	T _{EXT}	T _v	Erreur relative
-2.0000	1.000	1.000	0.0000E+00
-1.0000	1.000	1.000	0.0000E+00
0.000	0.868	0.867	0.1152E-02
1.0000	0.132	0.137	0.3787E-01
2.0000	0.00	0.000	0.0000E+00

-Tableau (VI.4.2) Méthode des volumes finis : temps =3 ; S = 0.25

Position de X	T _{EXT}	T _v	Erreur relative
-2.0000	1.000	1.000	0.0000E+00
-1.0000	0.999	1.000	0.1000E-02
0.000	0.974	0.975	0.1026E-02
1.0000	0.741	0.735	0.8097E-02
2.0000	0.00	0.000	0.0000E+00

-Tableau (VI.4.3) Méthode des volumes finis : temps =6 ; S = 0.25

Position de X	T _{EXT}	T _v	Erreur relative
-2.0000	1.000	1.000	0.0000E+00
-1.0000	1.000	1.000	0.0000E+00
0.000	0.997	0.998	0.1003E-02
1.0000	0.966	0.964	0.2070E-02
2.0000	0.00	0.000	0.0000E+00

-Tableau (VI.4.4) Méthode des volumes finis : temps =1 ; S = 0.45

Position de X	T _{EXT}	T _v	Erreur relative
-2.0000	1.000	1.000	0.0000E+00
-1.0000	0.994	0.994	0.0000E+00
0.000	0.798	0.795	0.3759E-02
1.0000	0.202	0.202	0.0000E+00
2.0000	0.000	0.000	0.0000E+00

-Tableau (VI.4.5) Méthode des volumes finis : temps =3 ; S = 0.45

Position de X	T _{EXT}	T _v	Erreur relative
-2.0000	1.000	1.000	0.0000E+00
-1.0000	0.992	0.993	0.1008E-02
0.000	0.926	0.926	0.0000E+00
1.0000	0.685	0.673	0.1751E-01
2.0000	0.000	0.000	0.0000E+00

-Tableau (VI.4.6) Méthode des volumes finis : temps=6 ; S = 0.45

Position de X	T _{EXT}	T _v	Erreur relative
-2.0000	1.000	1.000	0.0000E+00
-1.0000	0.997	0.997	0.0000E+00
0.000	0.979	0.979	0.0000E+00
1.0000	0.913	0.868	0.4928E-01
2.0000	0.000	0.000	0.0000E+00

-Tableau (VI.4.7) Méthode des volumes finis : temps =1 ; S = 0.53

Position de X	T _{EXT}	T _v	Erreur relative
-2.0000	1.000	1.000	0.0000E+00
-1.0000	0.989	0.991	0.2022E-02
0.000	0.779	0.770	0.1155E-01
1.0000	0.221	0.215	0.2714E-01
2.0000	0.000	0.000	0.0000E+00

-Tableau (VI.4.8) Méthode des volumes finis : temps =30 ; S = 0.53

Position de X	T _{EXT}	T _v	Erreur relative
-2.0000	1.000	1.000	0.0000E+00
-1.0000	0.987	0.987	0.0000E+00
0.000	0.908	0.908	0.0000E+00
1.0000	0.671	0.648	0.3427E-01
2.0000	0.000	0.000	0.0000E+00

-Tableau (VI.4.9) Méthode des volumes finis : temps =6 ; S = 0.53

Position de X	T _{EXT}	T	Erreur relative
-2.0000	1.000	1.000	0.0000E+00
-1.0000	0.994	0.994	0.0000E+00
0.000	0.970	0.993	0.2371E-01
1.0000	0.895	-0.178	0.1198E+01
2.0000	0.000	0.000	0.0000E+00

-VI.5. COMMENTAIRES :

Ce chapitre consiste à présenter les résultats obtenues par la solution analytique et les schémas numériques utilisées (différences finies, éléments finis et volumes finis)

-VI.5.1. METHODE DES DIFFERENCES FINIES CAS UNIDIMENSIONNEL :

Les résultats trouvés sont résumés à travers les graphes (fig.VI.1.1) à (fig.VI.1.12) et les tableaux (VI.1.1) à (VI.1.9) dans le cas unidimensionnel.

Trois positions du temps seulement sont représentés. Les formulations explicite, Lax-Wendroff, FTCS et Crank-Nicolson sont considérées [1].

Les résultats sont imprimés pour les transitoires $t=1$, $t=3$ et $t=6$ et ceci pour différents s , $s=0.25$, $s=0.5$, $s=0.53$.

On constate que quelque soit le schéma utilisé, les résultats sont très satisfaisants Et ceux jusqu'aux transitoires assez éloignés.

Il est à noter qu'on a représenté les résultats quand $S=0.53$, pour montrer que les résultats obtenus sont fausses, donc il faut respecter les critères de stabilité.

On constate aussi que le minimum de l'erreur relative est obtenu pour le schéma de FTCS.

Les erreurs relatives trouvées n'excèdent pas 1%.

La température est tracée en fonction de l'abscisse (voir fig.VI.1.1 à VI.1.12) pour différents schémas avec la température exacte.

La disposition de ces courbes tracées sur un même repère montre les caractéristiques de stabilité.

Il est à remarquer que l'erreur tend à augmenter sensiblement quand le temps augmente.

-VI.5.2. METHODE DES DIFFERENCES FINIES CAS BIDIMENSIONNEL :

Les résultats trouvés sont résumés à travers les graphes (fig.VI.2.1) à (fig.VI.2.10) et les tableaux (VI.2.1) à (VI.2.12) dans le cas bidimensionnel.

La formulation explicite seulement est considérée.

Les résultats sont imprimés pour le transitoire $t=1$ et ceci pour $s=0.01$.

On constate que les résultats sont très satisfaisants.

On constate que les erreurs relatives trouvées n'excèdent pas 1%.

On constate aussi que les erreurs relatives trouvées dans la direction des abscisses sont de même ordre de grandeur dans la direction des ordonnées.

-VI.5.3. METHODE DES ELEMENTS FINIS CAS BIDIMENSIONNEL :

Les résultats trouvés sont résumés à travers les graphes (fig.VI.3.1) à (fig.VI.3.11) et les tableaux (VI.3.1) à (VI.3.12) dans le cas bidimensionnel.

La formulation explicite seulement est considérée.

Les résultats sont imprimés pour le transitoire $t=1$ et ceci pour $s=0.01$.
On constate que les résultats sont très satisfaisants.

On remarque que les erreurs relatives trouvées n'excèdent pas 1%.
Et on remarque aussi que Les erreurs relatives trouvées dans la direction des abscisses sont de même ordre de grandeur dans la direction des ordonnées.
On remarque aussi que les erreurs relatives dans ce cas sont très proches de celles trouvées en différences finies cas bidimensionnel.

-VI.5.4. METHODE DES VOLUMES FINIS CAS UNIDIMENSIONNEL:

Les résultats trouvés sont résumés à travers les graphes (fig.VI.4.1) à (fig.VI.4.3) et les tableaux (VI.4.1) à (VI.4.9) dans le cas unidimensionnel.

Les résultats sont imprimés pour les transitoires $t=1$, $t=3$ et $t=6$ et ceci pour différents s , $s=0.25$, $s=0.5$, $s=0.53$.

La température est tracée en fonction de l'abscisse et comparée avec la température exacte.

La disposition de ces courbes tracées sur un même repère montre les caractéristiques de stabilité.

Il est à remarquer que l'erreur tend à augmenter sensiblement quand le temps augmente.

On remarque que les erreurs relatives trouvées n'excèdent pas 1%.

conclusion

Le problème de diffusion est décrit par une équation différentielle partielle étant très difficile à résoudre analytiquement.

Les programmes réalisés permettent de déterminer la distribution de la température selon la méthode des différences finies, éléments finis et celle des volumes finis pour le cas unidimensionnel et le cas bidimensionnel connaissant la solution exacte du cas étudié.

Pour notre étude, on a traité des cas simples correspondant aussi à des géométries très simples, on remarque une légère différence du point de vue résultats entre les trois méthodes qui s'explique par le choix du maillage temporel spatial ainsi qu'au facteur de stabilité.

-La méthode des différences finies est beaucoup plus simple à programmer selon que le schéma soit Explicite, Implicite, Crank Nicolson, FTCS et le schéma choisi permet d'imposer la condition de stabilité, mais une certaine précision est perdue qui est liée au principe de cette méthode.

-La méthode des éléments finis est compliquée à cause de la recherche de la fonction test ce qui n'est pas toujours évident dans tout les cas et son avantage réside à s'adapter à tous les types de maillage donc quelque soit la géométrie imposée du problème physique.

-La méthode des volumes finis est plus physique par rapport aux autres méthodes parce que on applique le principe de conservation donc en faisant un bilan en choisissant un volume de contrôle.

La diversité d'exemples traités dans cette étude a démontré un accord satisfaisant entre les résultats obtenus théoriquement et ceux des trois méthodes numériques du fait que l'erreur est relativement faible.

Sur le plan des perspectives, il convient de traiter d'une manière approfondie le cas bidimensionnel avec les différentes conditions aux limites et aussi de bien choisir la solution initiale.

- REFERENCES BIBLIOGRAPHIQUES :

[1] C.A.J. Flecher
Computational techniques for Fluid Dynamics (volum 1 et volume 2)

[2] M. Boumahrat et A. Gourdin
Méthodes Numériques Appliquées
Avec nombreux problèmes résolus Fortan 77

Préface de H. Veysseire : professeur d'analyse numérique à l'école Centrale des Arts et Manufactures Paris

[3] I. simulation numérique des phénomènes de transport (chapitre 1 à 5)
Ecole des mines de nancy
Par A. Jardy et H. Combeau
Année universitaire 2001/2002

[4] Schmidt Jürgen
Transmission de la Chaleur
Institut National D'enseignement Supérieur de Tiaret

[5] Y. Illoul
Mémoire de fin d'études

Techniques Numériques Appliquées aux problèmes de diffusion a frontière mobile

[6] R. Bessaih
Mémoire de fin d'études
Simulation Numérique de la convection naturelle laminaire dans une enceinte
rectangulaire

[7] I. Amtout
Cours d'analyse numérique de 4^{ème} années ingénieurs

[8] Alan J. Davies

The Finite Element Method

[9] I. Chtcheerbatski
Maître de Conférence à l'université de Sidi-Bel-Abbés
Analyse Numérique

[10] Revue scientifique : CLEFS CEA N° 47
Recherche et Simulation