

UNIVERSITE DE SAAD DAHLEB BLIDA

DEPARTEMENT D'AERONAUTIQUE

MEMOIRE DE FIN D'ETUDES

Présenté  
au département d'Aéronautique



Par  
CHOUITER MOHAMED

Pour l'obtention du diplôme d'ingénieur d'état en Aéronautique

Option : Structure

THEME:

**SIMULATION NUMERIQUE DU PROBLEME  
DE STEPHAN DIPHASIQUE PAR  
LA TECHNIQUE DES VOLUMES FINIS IMPLICITE**

Présentée publiquement le : 01 Décembre 2004 devant le jury

M <sup>r</sup> : Saïd Bergeul	Président
M <sup>r</sup> : Benaïssa	Examineur
M <sup>r</sup> : Driouèche	Examineur
M <sup>r</sup> : M. BOUNEDER	Promoteur

Promotion 2004



## REMERCIEMENTS

*J'adresse mes remerciements à mon promoteur Mr. M. BOUNEDER pour m'avoir fournie une aide précieuse tant par l'intérêt qu'il a apporté à mon travail que pour sa grande disponibilité durant la période de mon projet. Pour ses nombreux conseils utiles au bon déroulement de mon travail.*

*Je remercie tout particulièrement Mr. Mustapha Temmar et Mr. Saïd Bergheul .*

*Je tiens à témoigner ma gratitude aux collègues qui ont contribué de près ou de loin à se travail et pour leurs soutiens.*

*Comme, j'exprime ma grande sympathie pour tous mes professeurs pendant mon parcours d'études.*

*En fin, je remercie Messieurs les membres de jury qui mon fait l'honneur de siéger, espérant qu'ils trouvent l'expression de mon profond respect.*

## DEDICACES

Je dédie ce modeste travail

A la mémoire du Chahid Mohamed Chouiter tombé au champ d'honneur,  
que dieu l'accueille dans son vaste paradis.

A la mémoire des Grands parents SidAhmed et Nani, que Dieu les  
accueillent dans son vaste paradis.

A mes très chères parents qui m'ont toujours aidés et veillés sur moi  
durant toute ma vie.

A mes sœurs et leurs maris ,  
Ma très chère et adorable Rima, et Amine.  
A Khalou, et sa petite famille,  
A tous les membres de ma famille ,

Je tiens à remercier la famille Chérifi , Fatiha et mouna, Karim et Biba,  
Pour leurs soutien et leur aide.

A Djallel, Samiha et Issam, Mourad.

Tous les amis et les personnes de l'Institut d'aéronautique à la promotion  
2003-2004.

MOHAMED.

---

## SOMMAIRE

### Introduction Générale

### Chapitre I - La conduction thermique

I.1 Conduction thermique sans changement de phase .....	1
I.1.1 Introduction.....	1
I.1.2 Equation générale de la conduction de chaleur .....	1
I.1.3 Nombres adimensionnels Biot et Fouriers .....	4
I.1.3.1 Nombre de Biot .....	4
I.1.3.2 Nombre de Fourier .....	5
I.1.4 Les systèmes thermiquement minces .....	5
I.1.5 Cas d'une plaque plane .....	6
I.1.6 Cas d'un cylindre infini .....	11
I.1.7 Cas d'une sphère .....	12
I.2 Transfert thermique avec changement de phase .....	14
I.2.1 Thermodynamique du changement de phase .....	14
I.2.2 Cinétique du changement de phase .....	14
I.2.3 Changement d'état avec transfert purement conductif .....	15
I.2.3.1 Mise en équations .....	15
I.2.3.2 Le nombre de Stefan .....	15
I.2.4. Méthodes analytiques .....	16

I.2.4.1	Solution exacte .....	16
I.2.4.2	Solutions approchées .....	17
I.2.5	Méthodes numériques.....	18
I.2.5.1	Méthodes à suivi de l'interface.....	18
I.2.5.2	Méthodes enthalpiques .....	19

## **Chapitre II - Modèle Physique**

II.1	Introduction.....	20
II.2	La méthode enthalpique .....	20
II.3	Relation enthalpie – température.....	21
II.4	Formulation pour les systèmes minces .....	23
II.5	Formulation pour les matériaux homogènes .....	24
II.6	Formulation pour les matériaux hétérogènes .....	26
II.7	Variables adimensionnelles .....	29
II.7.1	Systèmes minces .....	29
II.7.2	Matériaux homogènes .....	32
II.7.3	Matériaux hétérogènes .....	35
II.8	Généralisation ( matériaux homogènes ).....	38

## **Chapitre III - Méthode des volumes finis**

III.1	Présentation .....	39
III.2	Développements en série de Taylor .....	40

---

III.3	Techniques de maillage .....	43
III.3.1	Maillage de type A .....	43
III.3.2	Maillage de type B .....	45
III.3.3	Discussion .....	46
III.3.4	Maillage non uniforme.....	47
III.3.5	Maillage uniforme et variable par zone .....	49
III.4	Equation de la conduction 1D en régime stationnaire .....	55
III.4.1	Discrétisation de l'équation de la conduction .....	55
III.4.2	Calcul de la conductivité aux interfaces .....	58
III.4.3	Linéarisation .....	60
III.4.3.1	Traitement du Terme source .....	60
III.4.3.2	Traitement des Conditions limites dans la pratique A .....	62
III.4.3.3	Traitement des conditions limites dans la pratique B .....	65
III.5	Les méthodes sousrelaxation et surrelaxation .....	68
III.6	L'algorithme TDMA .....	69
III.7	Régime instationnaire .....	72
III.7.1	Cas unidimensionnel .....	73
III.7.2	Cas bidimensionnel .....	73
III.7.3	Cas bidimensionnel en géométrie polaire ( $r\theta$ ) .....	77
III.8	Méthodes de résolutions itératives .....	78
III.9	Applications .....	84

---

## **Chapitre IV - Modèle Numérique**

IV.1 Systèmes minces .....	88
IV.1.1 Méthode Explicite .....	89
IV.1.2 Méthode Implicite.....	90
IV.2 Matériaux Homogènes.....	91
IV.2.1 Méthode explicite.....	95
IV.2.2 Méthode Implicite.....	96
IV.3 Matériaux Hétérogènes.....	99
IV.3.1 Méthode Explicite pour les particules .....	105
IV.3.2 Méthode Implicite pour les particules .....	106

## **Chapitre V - Résultats et discussion**

V.1 Matériaux homogènes .....	108
V.1.1 Effets du nombre de Stefan .....	108
V.1.2 comparaison entre la géométrie cylindrique et sphérique.....	110
V.1.3 comparaison entre la géométrie cartésienne et sphérique .....	111
V.1.4 Comparaison entre les géométrie 2d xy et 1D .....	114
V.1.5 changement de phase dans un rectangle .....	115
V.2 Matériaux hétérogènes .....	116

## **Conclusion**

## **Bibliographie**

---

## LISTE DES FIGURES

Fig. I.1 Bilan d'énergie.....	2
Fig. I.2 Plaque infinie.....	7
Fig. II.1.a Relation Enthalpie – Température (matériau pur).....	21
Fig. II.1.b Relation Enthalpie – Température (matériau non pur).....	22
Fig. II.2 Système mince.....	23
Fig. II.3 Matériau homogène 1D.....	24
Fig. II.4 Volume de contrôle pour un matériau homogène.....	24
Fig. II.5 Matériau hétérogène.....	26
Fig. II.6 Volume de contrôle pour un matériau hétérogène.....	26
Fig. III.1 Approximation du 1 <sup>er</sup> ordre.....	40
Fig. III.2 Approximation du 2 <sup>ème</sup> ordre.....	41
Fig. III.3 Pratique TYPE A (1 D) .....	44
Fig. III.4 Pratique TYPE B (1 D) .....	45
Fig. III.5 Maillage non uniforme.....	47
Fig. III.6 Exemple de maillage non uniforme.....	48
Fig. III.7 Maillage uniforme par zone (1D) .....	50
Fig. III.8.a Maillage uniforme.....	50
Fig. III.8.b Maillage uniforme par zone.....	51



---

<b>Fig. III.8.c Maillage variable par zone.....</b>	<b>51</b>
<b>Fig. III.9 Maillage variable par zone cas monodimensionel sphérique.....</b>	<b>52</b>
<b>Fig. III.10 Maillage uniforme par zone (2D) .....</b>	<b>52</b>
<b>Fig. III.11 Maillage multizone cas 2 D cartesien.....</b>	<b>53</b>
<b>Fig. III.12 Maillage multizone géométrie xy et r<math>\theta</math> .....</b>	<b>54</b>
<b>Fig. III.13 Frontières du volume de contrôle.....</b>	<b>55</b>
<b>Fig. III.14 Profil linéaire de température.....</b>	<b>56</b>
<b>Fig. III.15 Interface e entre P et E.....</b>	<b>58</b>
<b>Fig. III.16 Condition limite Type A.....</b>	<b>62</b>
<b>Fig. III.17 Condition limite température imposée.....</b>	<b>63</b>
<b>Fig. III.18 Condition limite convection .....</b>	<b>63</b>
<b>Fig. III.19 Condition limite convection et rayonnement.....</b>	<b>64</b>
<b>Fig. III.20 Flux du second ordre pour la pratique B.....</b>	<b>65</b>
<b>Fig. III.21.a Volume de contrôle.....</b>	<b>73</b>
<b>Fig. III.21. b Le domaine (xy) .....</b>	<b>73</b>
<b>Fig. III.22. Domaine r<math>\theta</math>.....</b>	<b>77</b>
<b>Fig. IV.1 Volume de Contrôle d'un Matériaux Homogènes.....</b>	<b>91</b>
<b>Fig.V.1 Evolutions de laTemperature (bicouche) dans le temps.....</b>	<b>108</b>

---

---

<b>Fig.V.2 Front de fusion et températures surface centre (bicouche) .....</b>	<b>109</b>
<b>Fig. V.3 Comparaison des géométries cylindrique et sphérique .....</b>	<b>110</b>
<b>Fig. V.4 Front de fusion et température centre et surface.....</b>	<b>111</b>
<b>Fig. V.5 Comparaison entre les géométrie 2d xy et 1D.....</b>	<b>112</b>
<b>FigV.6. Changement de phase dans un rectangle.....</b>	<b>113</b>
<b>Fig. V.7 Front de fusion dans le temps.....</b>	<b>114</b>
<b>Fig. V.8 distribution des températures <math>T_m</math> et <math>T_p</math> temporelle.....</b>	<b>115</b>
<b>Fig. V.9 Evolution des températures matrice particule ( <math>x = 0</math> , <math>x = 1</math> ).....</b>	<b>116</b>
<b>Fig. V.10 Evolution de la fraction liquide-solide particule ( <math>x = 0</math> , <math>x = 1</math> ) .....</b>	<b>116</b>
<b>Fig. V.11 Evolution de la températures de matrice et particule en ( <math>x = 0</math> , <math>x = 1</math> ) ...</b>	<b>116</b>

### LISTE DES TABLEAUX

<b>Tab.II.1 Variables Adimensionnelles Système mince.....</b>	<b>29</b>
<b>Tab.II.2 Variables Adimensionnelles matériaux homogènes.....</b>	<b>32</b>
<b>Tab.II.3 Variables Adimensionnelles matériaux hétérogènes.....</b>	<b>35</b>

---

## LISTE DES ALGORITHMES

Alg.III.1 maillage type A .....	44
Alg.III.2 maillage type B.....	46
Alg.III.3 Maillage non uniforme .....	48
Alg.III.4 Maillage uniforme et variable par zone .....	49
Alg.III.5 TDMA ( THOMAS ).....	71
Alg.III.6 Coefficients de diffusions .....	75
Alg.III.7 Traitement des conditions limites en géométrie xy .....	76
Alg.III.8 Méthode SOR .....	79
Alg.III.9 Méthode Ligne par Ligne TDMA Avec SOR.....	80
Alg.III.10 ADI (Alternating direction implicit) avec SOR .....	82
Alg.IV.1 Cas homogène .....	98
Alg.IV.2 Cas hétérogène.....	107

---

## NOMENCLATURE

<b>A</b>	<b>surface</b>	$[m^2]$
<b>Cm</b>	<b>chaleur spécifique matrice</b>	$[\frac{J}{m^3K}]$
<b>Cp</b>	<b>chaleur spécifique</b>	$[\frac{J}{Kg \cdot ^\circ K}]$
<b>Cps</b>	<b>chaleur spécifique</b>	$[\frac{J}{Kg \cdot ^\circ K}]$
<b>Cpl</b>	<b>chaleur spécifique</b>	$[\frac{J}{Kg \cdot ^\circ K}]$
<b>Cr</b>	<b>chaleur spécifique réduite</b>	$[\frac{Cp}{Cpref}]$
<b>H</b>	<b>enthalpie</b>	$[\frac{kJ}{kg}]$
<b>H0</b>	<b>enthalpie de début de changement de phase</b>	$[\frac{kJ}{kg}]$
<b>Hc ,hc</b>	<b>Conductance de contact</b>	$[\frac{W}{m^3K}]$
<b>H</b>	<b>Coefficient de convection</b>	$[\frac{W}{m^2K}]$
<b>Km</b>	<b>Conductivité de la matrice</b>	$[\frac{W}{mK}]$
<b>kr</b>	<b>conductivité réduite</b>	

---

<b>k</b>	<b>conductivité thermique</b>	$\left[ \frac{W}{mK} \right]$
<b>l</b>	<b>la longuer du domaine</b>	$[m]$
<b>N</b>	<b>nombre des volumes de contrôles total</b>	
<b>q</b>	<b>Source volumique</b>	$\left[ \frac{W}{m^2} \right]$
<b>Sc</b>	<b>partie constante de la linéarisation du terme source</b>	
<b>Sp</b>	<b>Coefficient de Tp dans l'expression du terme source</b>	$\left[ \frac{W}{m^3K} \right]$
<b>Ste</b>	<b>Nombre de Stefan</b>	
<b>T</b>	<b>Température</b>	$[K]$
<b>Tm</b>	<b>Température de changement de phase</b>	$[K]$
<b>Tm1</b>	<b>Température de début de changement de phase</b>	$[K]$
<b>Tm2</b>	<b>Température de fin de changement de phase</b>	$[K]$
<b>T0</b>	<b>Température à la surface</b>	$[K]$
<b>T<sub>∞</sub></b>	<b>Température ambiante</b>	$[K]$
<b>t</b>	<b>le temps</b>	$[s]$
<b>V</b>	<b>le volume</b>	$[m^3]$
<b>x , y , z</b>	<b>coordonnées spaciales</b>	

---

---

### Symboles Grec

$\alpha$	la diffusivité thermique	$\left[ \frac{\text{m}^2}{\text{s}} \right]$
$\alpha_s$	la diffusivité thermique solide	$\left[ \frac{\text{m}^2}{\text{s}} \right]$
$\alpha_l$	la diffusivité thermique liquide	$\left[ \frac{\text{m}^2}{\text{s}} \right]$
$\beta$	indicateur schéma implicite ou explicite	
$\varepsilon$	emissivité	
$\Delta h$	la variation d'enthalpie	
$\Delta T$	la variation de température	
$\Delta t$	le pas de temps	
$\Delta x$	longuer d'un volume de contrôle suivant x	
$\Delta y$	largeur d'un volume de contrôle suivant y	
$\delta x$	distance entre deux nœuds voisins dans la direction x	
$\delta y$	distance entre deux nœuds voisins dans la direction y	
$\mu$	type de géométrie ( $\mu = 0$ cartésien, $\mu = 1$ cylindrique, $\mu = 2$ sphérique )	
$\rho$	la densité	$\left[ \frac{\text{kg}}{\text{m}^3} \right]$
$\sigma$	Constante de Stephan - Boltzman	
$\theta, \eta$	Coefficient qui rentre dans la solution exacte	
$\psi$	terme de couplage matrice particule	
1D	monodimensionnelle	
2D	bidimensionnelle	

---

**r $\theta$**  géométrie polaire  
**xy** géométrie cartésienne

### Indices inférieurs

**l** liquide  
**m** changement de phase  
**N** nœud nord  
**n** interface du volume de contrôle entre P et N  
**P** nœud courant  
**E** nœud est  
**e** interface du volume de contrôle entre P et E  
**S** nœud sud  
**s** interface du volume de contrôle entre P et S  
**s** solide  
**W** nœud ouest  
**w** interface du volume de contrôle entre P et S  
**•** itération précédente  
**k** temps actuel  
**0** temps précédent  
**+** adimensionnel

### Fonction

**u** fonction échelon unité

# Introduction



## Introduction Générale

Les problèmes thermique avec changement de phase ou problèmes de **STEFAN**, ont une importance considérable dans l'industrie, comme celle de l'aéronautique : procédés et techniques de sécurité, régulation et contrôle thermiques des turboréacteurs, traitement de surface et revêtement des matériaux aéronautiques, matériaux d'interfaces utilisés en électronique pour réduire la résistance thermique de contact aux interfaces puces diffuseur, dans le dépôt métallique, le refroidissement et la solidification de particules liquides après impact sur une paroi se retrouvent dans des domaines aussi variés que le givrage, la projection des peintures, les imprimantes à jet d'encre, dans le procédé d'élaboration de revêtement poreux par projection de plasma, plus récemment, en métallurgie pour l'élaboration de petits objets de grandes précisions à partir d'une pulvérisation, dans la fusion du cœur d'un réacteur où le scénario catastrophe de la fusion du cœur d'un réacteur nucléaire, donne un mélange en fusion appelé corium.

**L' Objectif de cet étude**, est de tenté de faire le point sur les problèmes posés par l'étude des transferts thermiques par conduction dans les processus impliquant le changement d'état solide-liquide, dans les matériaux thermiquement minces, homogènes et hétérogènes. Comme la formulation mathématique du problème posé comporte des équations différentielles partielles complexes, la modélisation numérique s'impose. Nous avons choisi la méthode des volumes finis implicite pour notre modèle.

**la thèse est Organisée** de la façon suivante, les chapitres I et III sont des généralités sur le transfert thermique par conduction une présentation de la méthode des volumes finis. Le chapitre II donne le modèle physique des trois types de matériaux étudiés, à savoir les systèmes thermiquement mince, matériaux homogène et hétérogène. Le modèle numérique pour chaque cas est établi dans le chapitre IV. La discussion des résultats est donnée dans le chapitre V. Nous terminons cette étude par une conclusion générale.

# Chapitre I

# Chapitre I

## La conduction thermique

### I.1 Conduction thermique sans changement de phase

#### I.1.1 Introduction

La thermique est la branche de la physique qui traite des échanges de chaleur (accompagnés ou non d'échange de matière ou de changement de phase). Les échanges thermiques peuvent être désirés comme c'est le cas pour le chauffage, dans les fours de l'industrie métallurgique et dans les échangeurs où on veut réchauffer un fluide froid ou refroidir un fluide chaud (centrale nucléaire).

Les échanges thermiques peuvent ne pas être désirés comme dans le cas des chocs thermiques...

La thermique s'intéresse à la description et à la compréhension des flux de chaleur et des cartes de température dans un système. Ce système peut être très petit quand on s'intéresse à la solidification d'une goutte de métal liquide soit très grand quand on cherche à modéliser le fonctionnement d'un four, quand on fait le bilan d'énergie d'une usine ou quand on s'intéresse à l'isolation thermique particulière...

Les transferts thermiques (ou échanges de chaleur) sont dus à des différences de température entre deux corps ou deux parties d'un même corps. Il y a toujours tendance à l'égalisation des températures.

#### I.1.2 Equation générale de la conduction de chaleur

Dans sa forme monodimensionnelle [ 1 ], l'équation générale de la conduction décrit le transfert de chaleur unidirectionnel au travers d'un mur plan :

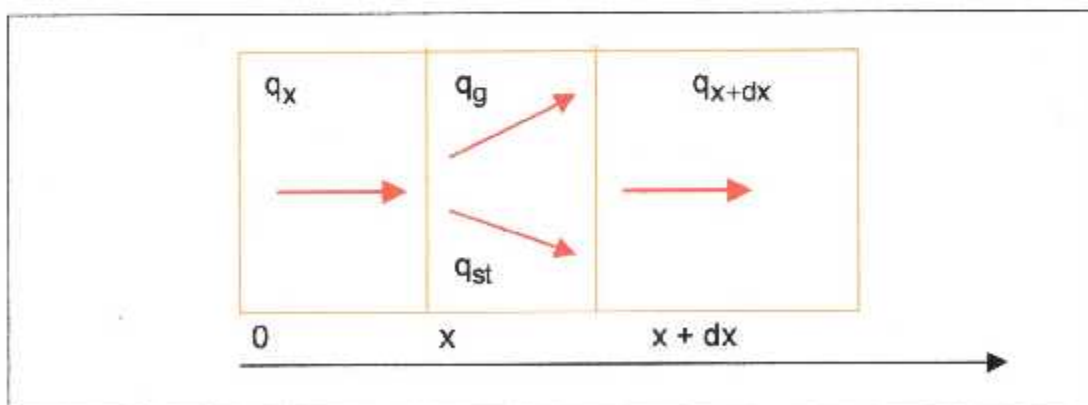


Fig. I.1 bilan d'énergie

Considérons un système d'épaisseur  $dx$  dans la direction  $x$  et de section  $A$  normale à la direction  $Ox$ . Le bilan d'énergie sur ce système s'écrit :

$$q_x + q_g = q_{x+dx} + q_{st} \quad (1.1)$$

Avec :

$$\left\{ \begin{array}{l} q_x = -\left(kA \frac{\partial T}{\partial x}\right)_x \\ q_g = SA dx \\ q_{x+dx} = -\left(kA \frac{\partial T}{\partial x}\right)_{x+dx} \\ q_{st} = \rho C_p A dx \frac{\partial T}{\partial t} \end{array} \right.$$

En reportant dans le bilan d'énergie et en divisant par  $dx$  nous obtenons :

$$\frac{\left(kA \frac{\partial T}{\partial x}\right)_{x+dx} - \left(kA \frac{\partial T}{\partial x}\right)_x}{dx} + SA = \rho C_p A \frac{\partial T}{\partial t} \quad (1.2)$$

Soit :

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(k_x A \frac{\partial T}{\partial x}\right) + SA = \rho C_p A \frac{\partial T}{\partial t} \quad (1.3)$$

Et dans le cas tridimensionnel, nous obtenons :

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(k_x \frac{\partial T}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(k_y \frac{\partial T}{\partial y}\right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(k_z \frac{\partial T}{\partial z}\right) + S = \rho C_p \frac{\partial T}{\partial t} \quad (1.4)$$

Cette équation peut se simplifier dans un certain nombre de cas :

- Si le milieu est isotrope :  $k_x = k_y = k_z$ .
- S'il n'y a pas de génération d'énergie à l'intérieur du système :  $S = 0$ .
- Si le milieu est homogène,  $k$  n'est pas fonction de  $T$ .

Avec les hypothèses a), b) et c), on peut écrire :

$$k \left( \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \right) + \frac{dk}{dT} \left( \left( \frac{\partial T}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial T}{\partial y} \right)^2 + \left( \frac{\partial T}{\partial z} \right)^2 \right) = \rho C_p \frac{\partial T}{\partial t} \quad (1.5)$$

d) Si de plus  $k$  est constant, nous obtenons l'équation de Poisson :

$$\alpha \nabla^2 T = \frac{\partial T}{\partial t} \quad (1.6)$$

Le rapport  $\alpha = \frac{k}{\rho C_p}$  est appelé la **diffusivité thermique**.

e) En régime permanent, nous obtenons l'équation de Laplace :

$$\nabla^2 T = 0 \quad (1.7)$$

Avec les hypothèses a), b) et c), on peut écrire :

- L'équation de la conduction en coordonnées cylindriques :

$$\frac{1}{r} \frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial T}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 T}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} + \frac{S}{k} = \frac{1}{\alpha} \frac{\partial T}{\partial t} \quad (1.8)$$

- L'équation de la conduction en coordonnées sphériques :

$$\frac{1}{r} \frac{\partial^2 (rT)}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \sin \theta \frac{\partial T}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 T}{\partial \varphi^2} + \frac{S}{k} = \frac{1}{\alpha} \frac{\partial T}{\partial t} \quad (1.9)$$

### I.1.3 Nombres adimensionnels Biot et Fourier

Il est important en thermique de présenter les résultats sous forme adimensionnelle, nous allons définir deux nombres adimensionnels qui sont importants en transitoire.

#### I.1.3.1 Nombre de Biot

On peut toujours définir une longueur  $l$  caractéristique d'un système. Pour un mur, par exemple, cette longueur dépend de l'épaisseur. Pour un système à une dimension, à l'interface située en  $x_0$ , entre une paroi et un fluide, il faut écrire la continuité du flux de chaleur. Pour une unité de surface, on a :

$$-k \frac{\partial T}{\partial x} = H^*(T - T_\infty) \quad (I.10)$$

Si on effectue le changement de variable  $x = \frac{x}{l}$ , cette relation devient :

$$-\frac{\partial T}{\partial x} = \frac{H^*l}{k} (T - T_\infty) \quad (I.11)$$

On montre ainsi que le rapport  $\frac{H^*l}{k}$  est un nombre sans dimension : c'est le nombre de Biot noté Bi :

$$Bi = \frac{H^*l}{k} \quad (I.12)$$

### I.1.3.2 Nombre de Fourier

D'autre part, l'équation de la chaleur s'écrit, dans le cas d'un système à une dimension :

$$\alpha \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = \frac{\partial T}{\partial t} \quad (I.13)$$

Avec le même changement de variable que précédemment, on peut écrire :

$$\frac{\partial T^2}{\partial x^2} = \frac{l^2}{\alpha} \frac{\partial T}{\partial t} \quad (I.14)$$

Ceci montre que le rapport  $\frac{\Delta t}{l}$  est sans dimension. On définit ainsi le nombre de Fourier :

$$Fo = \frac{\alpha t}{l^2} \quad (I.15)$$

Celui-ci est proportionnel au temps.

### I.1.4 Les systèmes thermiquement minces

Par définition, un milieu thermiquement mince est tel que  $Bi < 0,1$ , cela signifie que  $H$  est très inférieur à  $k$  ou que la résistance thermique de conduction est très inférieure à la résistance de la couche limite. Par conséquent la température du système peut être considérée comme uniforme. C'est le cas lors de la trempe d'un système de petites dimensions et de grande conductivité thermique, par exemple une petite bille métallique.

Le système à une température uniforme  $T_0$  est immergé à l'instant initial ( $t=0$ ) dans un fluide de température constante  $T_\infty$ . Quand on écrit le bilan d'énergie à un instant  $t$  pour un tel système dont la surface d'échange est  $S$ , on obtient :

$$-\rho CV \frac{\partial T}{\partial t} = H^* A (T - T_\infty) \quad (I.16)$$

Ce bilan traduit le fait que l'échange de chaleur avec le fluide à travers la surface  $A$  provoque une diminution homogène de la température du système dans tout son volume  $V$ . L'intégration d'une telle équation différentielle conduit à une loi de décroissance exponentielle de la température avec le temps. En effet :

$$\ln \frac{T - T_\infty}{T_0 - T_\infty} = \frac{H^* A}{\rho C_p V} t \quad (I.17)$$

ou :

$$\frac{T - T_\infty}{T_0 - T_\infty} = e^{-\frac{H^* A}{\rho C_p V} t} \quad (I.18)$$

Si on définit la longueur caractéristique  $l$  par  $\frac{V}{A}$ , on peut écrire :

$$\frac{H^* A}{\rho C_p V} t = \frac{H^* l}{k} \frac{k}{\rho C_p l^2} t = \frac{H^* l \Delta t}{k l^2} \text{Bi}^* \text{Fo} \quad (I.19)$$

on a donc :

$$\ln \frac{T - T_\infty}{T_0 - T_\infty} = -\text{Bi}^* \text{Fo}$$

C'est à dire :

$$\frac{T - T_\infty}{T_0 - T_\infty} = \exp(-\text{Bi}^* \text{Fo}) \quad (I.20)$$

### I.1.5 Cas d'une plaque plane

Envisager la trempe d'une plaque dont les longueur et largeur sont très supérieures à son épaisseur  $2l$ . La plaque est initialement à la température  $T_0$  et elle est plongée dans un fluide dont la température est  $T_\infty$ . L'axe ( $x'x$ ) est perpendiculaire à la plaque. L'origine est choisie sur le plan de symétrie de la plaque. La conductivité thermique, la diffusivité de la plaque sont notées respectivement  $k$  et  $d$ . Le coefficient de convection avec le fluide extérieur est  $H$ .

On repère la température  $T$  de la plaque par rapport à la température du milieu extérieur. On définit donc la différence de température  $\theta$  par :

$$\theta = T - T_{\infty} \quad (1.21)$$

qui ne dépend que de  $x$  et du temps  $t$ .

L'équation de la chaleur s'écrit donc :

$$\alpha \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} = \frac{\partial \theta}{\partial t} \quad (1.22)$$

Si on fait le changement de variable  $x^+ = \frac{x}{l}$ , la demi-épaisseur de la plaque étant choisie comme sa longueur caractéristique, cette équation (1.22) devient :

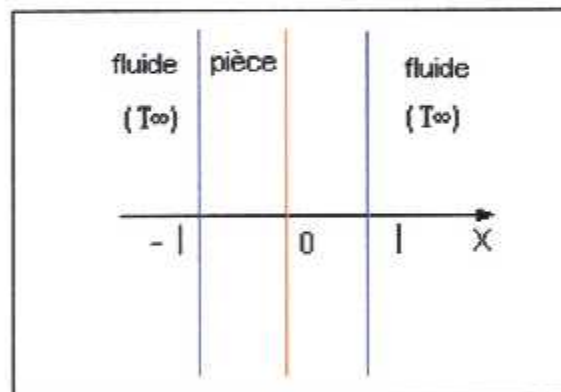


Fig. 1.2 Plaque infinie

$$\alpha \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} = \frac{\partial \theta}{\partial F_0} \quad (1.23)$$

Le nombre de Fourier est proportionnel au temps. On utilise la méthode de séparation des variables pour rechercher la solution de cette équation :

$$\theta(x^+, F_0) = X(x^+) * F(F_0) \quad (1.24)$$



En reportant cette expression dans l'équation différentielle et après division par  $\theta$ , on obtient :

$$\frac{1}{X} \frac{\partial^2 X}{\partial x^2} = \frac{1}{F} \frac{dF}{dFo} \quad (1.25)$$

Le premier membre ne dépend que de  $x$ , le second ne dépend que de  $Fo$ . Chacun de ces deux membres doit être égal à la même constante. On obtient ainsi deux équations différentielles. Au cours du temps, la température de la plaque doit tendre vers la température du fluide extérieur. La fonction  $\theta$  doit donc tendre vers zéro quand le temps augmente. Pour cela, il faut que la constante soit réelle et négative. En effet dans ce cas, les deux équations différentielles sont :

$$\begin{cases} \frac{dF}{dFo} = -\beta^2 F \\ \frac{\partial^2 X}{\partial x^2} = -\beta^2 X \end{cases}$$

Les solutions de ces équations sont donc :

$$\begin{cases} F(Fo) = \exp(-\beta^2 Fo) \\ X(x^+) = C \cos(\beta x^+ + \delta) \end{cases}$$

La solution mathématique élémentaire de l'équation de la chaleur (1.24) est :

$$\theta(x^+, Fo) = C \cos(\beta x^+ + \delta) \exp(-\beta^2 Fo) \quad (1.26)$$

Elle tend effectivement vers zéro quand le temps augmente, ce qui justifie le choix d'une constante négative. Il faut déterminer les constantes  $C$ ,  $\beta$  et  $\delta$ .

- Tout d'abord, compte-tenu du choix de l'origine de l'axe  $x'$ , la température doit être décrite par une fonction paire de  $x$ . Cela impose que l'angle  $\delta$  soit nul.
- Ensuite, il faut écrire la continuité du flux thermique sur les surfaces de la plaque. Par unité de surface, on a, à chaque instant :

$$-k \left( \frac{\partial \theta}{\partial x} \right)_{x=l} = H^* \theta(l, t) \quad (1.27)$$

Soit, après simplification par la fonction exponentielle :

$$\left( \frac{dX}{dx^+} \right)_{x^+=1} = Bi * X(1)$$

On obtient alors une équation implicite pour  $\beta$  :

$$\beta \sin \beta = Bi \cos \beta \quad (1.28)$$

que l'on peut écrire sous la forme :

$$\cos \beta = \frac{\beta}{Bi} \quad (1.29)$$

On peut obtenir les valeurs de  $\beta$  numériquement avec des itérations successives. Il est évident que les valeurs de  $\beta$  dépendent du nombre de Biot.

L'équation de la chaleur étant une équation linéaire, sa solution est une superposition des solutions élémentaires que l'on vient de déterminer, chacune étant indicée par  $j$ .

On peut donc écrire:

$$\theta(x^+, F_0) = \sum_{j=1}^{\infty} C_j \cos \beta_j * x^+ \exp - \beta_j^2 F_0 \quad (1.30)$$

On détermine les coefficients  $C_j$  en utilisant la condition initiale. A l'instant initial, quelle que soit la valeur de  $x$ , la température de la plaque est  $T_0$ . On a donc :

$$\theta(x, 0) = T_0 - T_{\infty} = \theta_0$$

Par conséquent on doit écrire:

$$\theta_0 = \sum_{j=1}^{\infty} C_j \cos \beta_j x^+ \quad \text{avec} \quad -1 < x^+ < +1$$

Les coefficients  $C_j$  sont déterminés en écrivant:

$$\int_{-1}^{+1} \theta_0 \cos \beta_m x^+ dx = \sum_{j=1}^{\infty} C_j \int_{-1}^{+1} \cos \beta_m x^+ \cos \beta_j x^+ dx \quad (1.30.a)$$

On considère l'intégrale :

$$I_{j,m} = \int_{-1}^{+1} \cos \beta_m x^+ \cos \beta_j x^+ dx \quad (1.30.b)$$

On doit envisager deux cas :

- celui où  $j \neq m$ . En utilisant les relations trigonométriques et la relation (1.30.b), on peut vérifier que  $I_{jm} = 0$ .
- celui où  $j = m$ . On obtient sans difficulté l'expression de  $I_{mm}$  :

$$I_{m,m} = \frac{\beta_m + \cos \beta_m \sin \beta_m}{\beta_m} \quad (1.30.c)$$

D'autre part, on démontre également que :

$$\int_{-1}^{+1} \theta_0 \cos \beta_m x^+ dx^+ = 2 * \beta_0 \frac{\sin \beta_m}{\beta_m} \quad (1.30.d)$$

Quand on utilise l'ensemble de ces résultats, on obtient la valeur du coefficient  $C_m$  :

$$C_m = 2\theta_0 \frac{\sin \beta_m}{\beta_m + \cos \beta_m \sin \beta_m} = c_m \theta_0 \quad (1.30.e)$$

En définitive, on peut écrire :

$$\frac{\theta(\bar{x}, F_0)}{\theta_0} = \frac{T(\bar{x}, F_0) - T_\infty}{T_0 - T_\infty} = \sum_{j=1}^{\infty} 2 \frac{\sin \beta_j}{\beta_j + \cos \beta_j \sin \beta_j} \cos \beta_j \bar{x} \exp - \beta_j^2 F_0 \quad (1.31)$$

Où les  $\beta_j$  sont solutions de l'équation (1.29).

L'évolution de la température dans la plaque ne dépend que des nombres de Biot et de Fourier.

### I.1.6 Cas d'un cylindre infini

Soit l'équation de la conduction en transitoire pour un cylindre infini, avec les conditions initiale et limites suivantes :

$$\left\{ \begin{array}{ll} \frac{\partial T}{\partial t} = \alpha \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial T}{\partial r} \right) & t \geq 0, \quad 0 \leq r \leq R \\ T = T_0 & t = 0, \quad 0 \leq r \leq R \\ \frac{\partial T}{\partial r} = 0 & t > 0, \quad r = 0 \\ -k \frac{\partial T}{\partial r} = h(T - T_\infty) & t > 0, \quad r = R \end{array} \right. \quad (I.31.a)$$

On utilise le nombre adimensionnel :

$$\theta = \frac{T - T_\infty}{T_0 - T_\infty}$$

les conditions initiale et limites sont :

$$\left\{ \begin{array}{ll} \frac{\partial \theta}{\partial \tau} = \frac{1}{\eta} \frac{\partial}{\partial \eta} \left( \eta \frac{\partial \theta}{\partial \eta} \right) & \\ \theta = 1 & r = 0 \\ \frac{\partial \theta}{\partial \eta} = 0 & \eta = 0 \\ \frac{\partial \theta}{\partial r} = \text{Bi} \theta & \eta = 1 \end{array} \right. \quad (I.31.b)$$

La solution est donnée :

$$\theta = f(\tau, \eta, \text{Bi}) = 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\text{Bi} \exp(-\beta_n^2 \tau) J_0(\beta_n \eta)}{(\beta_n^2 + \text{Bi}^2) J_0(\beta_n)} \quad (I.32)$$

Avec :

$$\beta_{J_0}(\beta) = \frac{hR}{k} J_0(\beta) \quad (I.33)$$

La fonction Bessel  $J_n$  est donnée par :

$$J_n = x^n \sum \frac{(-1)^m x^{2m}}{2^{2m+n} m!(n+m)!} \quad (I.34)$$

**I.1.7 Cas d'une sphère**

Soit la conduction de chaleur dans la sphère, défini par :

$$\left\{ \begin{array}{ll} \frac{\partial T}{\partial t} = \alpha \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial T}{\partial r} \right) & t \geq 0, \quad 0 \leq r \leq R \\ T = T_0 & t = 0, \quad 0 \leq r \leq R \\ \frac{\partial T}{\partial r} = 0 & t > 0, \quad r = 0 \\ -k \frac{\partial T}{\partial r} = h(T - T_\infty) & t > 0, \quad r = R \end{array} \right. \quad (I.35.a)$$

On utilise le nombre adimensionnel :

$$\theta = \frac{T - T_\infty}{T_0 - T_\infty}, \quad \tau = \frac{\alpha t}{R^2}, \quad \eta = \frac{r}{R} \quad \text{et} \quad Bi = \frac{hR}{k}$$

On aura :

$$\left\{ \begin{array}{ll} \frac{\partial \theta}{\partial \tau} = \frac{1}{\eta^2} \frac{\partial}{\partial \eta} \left( \eta^2 \frac{\partial \theta}{\partial \eta} \right) & \\ \theta = 1 & \tau = 0, \quad \forall \eta \\ \frac{\partial \theta}{\partial \eta} = 0 & \eta = 0, \quad \forall \tau \\ -\frac{\partial \theta}{\partial \eta} = Bi\theta & \eta = 1, \quad \forall \tau \end{array} \right. \quad (I.35.b)$$

Faisant la substitution  $v = \eta\theta$ , de sorte que :

$$\begin{aligned} \theta &= \frac{v}{\eta}, & \frac{\partial \theta}{\partial \tau} &= \frac{1}{\eta} \frac{\partial v}{\partial \tau}, & \frac{\partial \theta}{\partial \eta} &= \frac{1}{\eta} \frac{\partial v}{\partial \eta} - \frac{v}{\eta^2}, \\ \eta^2 \frac{\partial \theta}{\partial \eta} &= \eta \frac{\partial v}{\partial \eta} - v, & \frac{\partial}{\partial \eta} \left( \eta^2 \frac{\partial \theta}{\partial \eta} \right) &= \eta \frac{\partial^2 v}{\partial \eta^2}, \text{ et } \frac{1}{\eta^2} \frac{\partial}{\partial \eta} \left( \eta^2 \frac{\partial \theta}{\partial \eta} \right) &= \frac{1}{\eta} \frac{\partial^2 v}{\partial \eta^2} \end{aligned}$$

la transformation des conditions initiale et limites donne :

$$\left\{ \begin{array}{ll} \frac{\partial v}{\partial \tau} = \frac{\partial^2 v}{\partial \eta^2} & \text{en } \tau \text{ pour tout } \eta \\ v = \eta & \text{pour tout } \tau \\ \lim_{\eta \rightarrow 0} \left( \frac{1}{\eta} \frac{\partial v}{\partial \eta} - \frac{v}{\eta^2} \right) = 0 & \text{pour tout } \tau \\ -\frac{\partial v}{\partial \eta} = (Bi - 1)v & \text{en } \eta = 1 \text{ pour tout } \tau. \end{array} \right. \quad (I.35.c)$$

Une solution générale est donnée :

$$v = \sum_{n=1}^{\infty} Z_n(\eta) \exp(-\beta_n^2 \tau) \int \eta' Z_n(\eta') d\eta' \quad (I.36)$$

où

$$Z_n(\eta) = \sqrt{\frac{2(\beta_n^2 + (Bi-1)^2)}{(\beta_n^2 + (Bi-1)^2) + (Bi-1)}} \sin(\beta_n \eta) \quad (I.37)$$

et les  $\beta_n$  sont les racines de :

$$Bi-1 = -\beta_n (\cot(\beta_n)) \quad (I.38)$$

de là, on aura :

$$Z_n(\eta) = \sqrt{\frac{2\beta_n}{\beta_n + \cos(\beta_n) \sin(\beta_n)}} \sin(\beta_n \eta) \quad (I.39)$$

et

$$v = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2\beta_n \sin(\beta_n \eta)}{\beta_n + \cos(\beta_n) \sin(\beta_n)} \exp(-\beta_n^2 \tau) \int \eta' \sin(\eta') d\eta' \quad (I.40)$$

L'évaluation de l'intégrale de l'équation (I.40) donne :

$$v = 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\sin(\beta_n) - \beta_n \cos(\beta_n)) \sin(\beta_n \eta)}{\beta_n^2 - \beta_n \cos(\beta_n) \sin(\beta_n)} \exp(-\beta_n^2 \tau) \quad (I.41)$$

Le changement de température est alors  $\theta = \frac{v}{\eta}$ .

Nous sommes intéressés par la température au centre de la sphère,  $\eta = 0$ . Ainsi, nous prenons la limite appropriée de l'expression ci-dessus pendant que  $\eta$  va à zéro on a :

$$\theta(\eta = 0, \tau) = 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\sin(\beta_n) - \beta_n \cos(\beta_n)) \exp(-\beta_n^2 \tau)}{\beta_n - \cos(\beta_n) \sin(\beta_n)} \quad (I.42)$$

## **I.2 Transfert thermique avec changement de phase**

### **I.2.1 Thermodynamique du changement de phase**

Un transfert d'énergie a lieu chaque fois qu'un gradient de température existe à l'intérieur d'un système. Dans le cas du changement d'état solide-liquide d'un matériau pur ou d'un eutectique, changement qui s'effectue à une température constante  $T_m$ , il y a production ou consommation d'énergie dans la zone de changement d'état, ce qui entraîne la discontinuité des gradients thermiques qui s'établissent dans chaque phase de part et d'autre de l'interface, même si la conductivité du solide est égale à celle du liquide. Suivant le sens du changement d'état (fusion ou solidification), l'énergie provient d'une source externe à la température  $T_1 > T_m$ , (qui peut être un fluide caloporteur, une source électrique ou rayonnante) ou, inversement, la chaleur est extraite à une température  $T_0 < T_m$ . Comme le transfert de chaleur résulte d'un déséquilibre thermique, son étude quantitative ne peut être fondée sur la seule thermodynamique. Les températures et les quantités d'énergie fournies ou extraites dépendent des modes de transmission de la chaleur dans le milieu : conduction, convection, ou même rayonnement.

### **I.2.2 Cinétique du changement de phase**

Lorsqu'un matériau subit une transformation solide-liquide, l'énergie est transformée sous forme d'enthalpie massique de fusion à la surface séparant les deux phases, qui constitue l'interface dont on cherche en général à connaître la position en fonction du temps. Bien que le cycle fusion-solidification apparaisse comme réversible, il en va tout autrement du point de vue de la cinétique, à cause, par exemple, du rôle de la convection naturelle dans la phase liquide qui n'est pas le même dans les deux processus. Dans le cas de la fusion, une gaine fondue se forme entre la surface active et le matériau encore solide ; les transferts s'y produisent par conduction, puis dans de nombreux cas par convection naturelle et, éventuellement, par rayonnement entre la surface et le front solide. La convection naturelle augmente le transfert de chaleur, mais la formulation mathématique en est complexe, car elle nécessite le traitement du couplage entre les équations de Navier-Stokes dans le liquide et de Fourier dans le solide. Dans le cas de la solidification, l'énergie est extraite à travers une croûte solide qui s'épaissit progressivement à partir de la surface d'échange et dont la résistance thermique varie en  $x/l$ . Le liquide se refroidit progressivement jusqu'à la température de solidification. Ces problèmes sont généralement traités en conduction pure, car le rôle de la convection naturelle y est en général peu important.

Cette présentation permet de comprendre que ce problème de transferts couplés est fortement non linéaire. De ce fait, les solutions analytiques sont rares et, bien qu'elles permettent de fournir certains ordres de grandeur, souvent peu utilisables dans les configurations réelles. En particulier, l'analyse des cas multidimensionnels, où les conditions limites sont celles rencontrées dans les applications pratiques, n'a été possible que par le développement des méthodes numériques.

### I.2.3 Changement d'état avec transfert purement conductif

#### I.2.3.1 Mise en équations

La mise en équations du problème de transfert par conduction en présence d'un front de fusion ou de solidification s'appuie, dans le cas d'un corps pur :

- d'une part, sur l'équation de la chaleur dans les phases solide et liquide avec  $v = l, s$  :

$$\rho C p_v(T) \frac{\partial T}{\partial t} = \frac{1}{x^\mu} \frac{\partial}{\partial x} (k_v x^\mu) \frac{\partial T}{\partial x} \quad (I.43)$$

Nous donnons l'équation dans le cas monodimensionnel, avec  $\mu = 0, 1$  ou  $2$  suivant la géométrie, plane, cylindrique ou sphérique :

- d'autre part, sur la continuité des flux à l'interface solide-liquide, en posant que la différence entre les flux de part et d'autre de l'interface est égale à la quantité de chaleur instantanée libérée ou absorbée sous forme d'enthalpie de changement d'état par la progression du front :

$$\left( k_s \frac{\partial T_s}{\partial x} - k_l \frac{\partial T_l}{\partial x} \right) \cdot x = x_F(t) \quad (I.44)$$

avec  $x_F$  abscisse du front de fusion.

#### I.2.3.2 Le nombre de Stefan

Considérons en effet le cas de la fusion en géométrie plane par exemple, où on impose une température de paroi  $T_p$ , la phase initiale étant solide à la température de fusion  $T_m$ . Si le transitoire thermique est négligeable à l'échelle du temps caractéristique du processus de fusion, l'équation (I.44) devient :

$$k_l = \frac{T_p - T_F}{x_F} \approx \rho l \frac{dx_F}{dt} \quad (I.45)$$

Comme la diffusivité  $\alpha_l$  du liquide :

$$\alpha_l = \frac{k_l}{\rho_l C p_l}$$



donne la loi d'évolution de la position de l'interface :

$$X_F(t) \approx \sqrt{2Ste} \cdot \sqrt{\alpha \cdot t}$$

qui met en évidence la variation de  $X_F(t)$  en fonction de la racine carrée du temps, et la pertinence du paramètre :

$$Ste = \frac{C_p \cdot \Delta T}{L} \quad (1.46)$$

**Ste** : appelé **nombre de Stefan**

$\Delta T$  : différence de température de référence associée au terme moteur du changement d'état et  $C_p$  la capacité thermique massique du liquide.

#### 1.2.4. Méthodes analytiques

##### 1.2.4.1 Solution exacte

Le cas d'une température de paroi constante inférieure à la température de fusion :

$$\left\{ \begin{array}{ll} T_l(x,0) = T_\infty > T_m & t = 0, \quad x > 0 \\ T_s(0,t) = T_p & t > 0, \quad x = 0 \end{array} \right. \quad (1.47)$$

La position de l'interface est alors donnée par l'expression :

$$X_F(t) = C \cdot (\alpha_s \cdot t)^{\frac{1}{2}} \quad (1.48)$$

Avec :

- $\alpha_s$  la diffusivité thermique du solide.
- C un facteur de proportionnalité fonction du nombre de Stefan.

L'intérêt majeur de cette relation est de fournir une solution de référence pour la validation de solutions approchées ou numériques, mais des méthodes approchées peuvent être parfois utiles pour évaluer les tendances des solutions 1D dans des cas plus complexes

### 1.2.4.2 Solutions approchées

Dans le cas de la paroi à température imposée, la progression du front de fusion s'exprime par :

$$X_F(t) = \sqrt{\frac{4 Ste}{Ste + 2}} \sqrt{t} \quad (\text{Karman et Polhausen}) [2]$$

$$X_F(t) = \sqrt{2(\sqrt{1 + 2 Ste} - 1) \alpha t} \quad (\text{Goodman}) [2]$$

La comparaison des solutions obtenues par ces deux méthodes avec la solution exacte de Neumann montre que l'approximation par un profil de température polynomial est d'autant plus justifiée que le nombre de Stefan est faible .

**Le temps réduit  $\tau$**  : nécessaire pour parvenir à une position donnée du front. Par exemple, dans le cas d'un échange convectif sur la paroi avec un fluide caloporteur, à la température  $T_\infty$  et de coefficient d'échange  $H$ , on obtient :

- dans le cas plan :

$$\tau = \left[ \frac{x^+}{2Bi} \left( 1 + Bi * x^+ \right) \right]_0^{x^+} \quad (1.49)$$

- dans le cas cylindrique :

$$\tau = \frac{x^{+2}}{2Bi} \left[ 1 + \varepsilon Bi \left( \ln(x^+) - \frac{1}{2} \right) \right]_1^{x^+} \quad (1.50)$$

Avec  $x^+ = \frac{x}{l}$  la longueur réduite,  $\varepsilon$  symbole de Kronecker ( $\varepsilon = -1$  si extraction externe,  $+1$  si extraction interne),  $l$  la longueur de référence (l'épaisseur de la plaque dans le cas plan et le rayon de la paroi d'extraction dans le cas cylindrique ou sphérique),  $Bi$  le nombre de Biot.

Après intégration entre  $x^+ = 1$  et  $x^+ = 0$ , on obtient pour les trois géométries (plane, cylindrique et sphérique) :

$$\tau = \frac{1}{2(\mu + 1)} \left( 1 + \frac{2}{\text{Bi}} \right) \quad (\text{I.51})$$

L'erreur commise sur  $\tau$  est négligeable si  $\text{Bi} < 0,1$  ou pour  $\text{Ste} < 2/3$ . En dehors de ce domaine, la vitesse de solidification estimée par l'étude simplifiée est trop importante.

### **I.2.5 Méthodes numériques**

On peut distinguer deux grandes classes de méthodes de résolution, selon que l'on privilégie la connaissance de la position de l'interface ou celle du champ de température.

#### **I.2.5.1 Méthodes à suivi de l'interface**

Dans cette catégorie, nous regroupons les méthodes qui traitent le problème à deux phases : les équations de transfert sont résolues séparément dans le liquide et dans le solide et la position de l'interface est obtenue par la résolution de l'équation de bilan à l'interface. Cette approche est adaptée en particulier aux cas où l'on considère la fusion ou la solidification d'un matériau pur, pour lequel le changement d'état se produit à une température bien déterminée  $T_m$ . Le problème central est alors le calcul de la position de l'interface, qui donne lieu à deux approches différentes suivant les auteurs. Les méthodes les plus anciennes considèrent un maillage fixe sur l'ensemble du domaine liquide-solide. L'interface ne passe a priori, par aucun nœud du maillage, et il est alors nécessaire d'interpoler les champs de température aux nœuds encadrant le maillage par différentes approximations. L'extension au cas multidimensionnel est peu aisée et pose le problème du calcul des gradients normalement à l'interface. La difficulté subsiste pour les méthodes où l'on adapte la valeur du pas de temps, de façon à ce que l'interface se situe toujours sur un nœud du maillage. Une méthode plus élaborée consiste à garder un nombre fixe de nœuds au cours du processus, l'interface se situant toujours sur un nœud, il faut alors calculer le pas d'espace à chaque pas de temps.

Une méthode très fréquemment rencontrée et qui peut trouver un champ d'application important dans le cas de configurations plus complexes, consiste à immobiliser l'interface par une transformation de coordonnées. Cette transformation, permet de faire correspondre un domaine de calcul fixe à chacune des deux phases. L'extension aux problèmes à plusieurs dimensions ne pose pas de difficulté tant qu'une seule surface est irrégulière. Le gain, en temps de calcul et en précision, autorisé par l'utilisation d'un maillage adapté au domaine de calcul est limité par la complexité des équations : la transformation introduit en effet un terme lié au déplacement des mailles qui alourdit la procédure de résolution.

### I.2.5.2 Méthodes enthalpiques

On exprime l'enthalpie du matériau à changement de phase entre une température de référence et la température du point considéré par [ 3 ] :

$$h = (f * C_{pl} + (1+f) * C_{ps}) * T + (C_{ps} - C_{pl}) * T_m + f * L \quad (I.52)$$

Où  $f$  est la fraction volumique de liquide.

L'équation de conservation s'écrit alors sous la forme :

$$\rho \frac{\partial T_v}{\partial t} = \frac{1}{x^\mu} \frac{\partial}{\partial x} \left( k(T) x^\mu \frac{\partial T_v}{\partial x} \right) \quad (I.53)$$

Pour résoudre l'équation, on peut distinguer trois approches principales :

- **Définition d'un terme source :**

$$\rho * C_p \frac{\partial T}{\partial t} = \text{terme de diffusion} - \rho * L \frac{df}{dt} \quad (I.53.a)$$

le terme source intervenant dans les volumes de contrôle où se produit le changement de phase.

- **Définition d'un intervalle de température**  $2\delta T$  arbitrairement petit sur lequel se produit le changement d'état et linéarisation de la fonction enthalpie sur cet intervalle :

$$\rho C_p \frac{\partial T}{\partial t} = \frac{1}{x^\mu} \frac{\partial}{\partial x} \left( k(T) x^\mu \frac{\partial T}{\partial x} \right) \quad (I.53.b)$$

Avec :

$$\left\{ \begin{array}{l} C_p = C_{ps} \\ C_p = C_{pl} \\ C_p = \frac{L}{2\delta T} + \frac{C_{ps}(T_m) + C_{pl}(T_m)}{2} \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} T < T_m - \delta T \\ T > T_m + \delta T \\ T_m - \delta T \leq T \leq T_m + \delta T \end{array}$$

- **Définition d'une capacité thermique massique apparente :** on représente la variation de l'enthalpie avec la température comme une variation finie de la capacité thermique massique :

$$\frac{dh}{dt} = C_{app} \frac{dT}{dt} \quad (I.53.c)$$

# Chapitre II

## Chapitre II

### Modèle Physique.

#### II.1 Introduction

Ce chapitre a pour objet l'étude du modèle physique pour chaque un des systèmes suivants : les systèmes thermiquement minces, les matériaux homogènes et hétérogènes. Il est évident a priori que les interactions d'un flux d'énergie vont dépendre de l'état du matériau. La méthode utilisée pour décrire le mécanisme de changement de phase est la méthode enthalpique.

#### II.2 La méthode enthalpique

La méthode **enthalpique** est largement utilisée, elle consiste à considérer le domaine d'étude comme une seule phase dont les propriétés thermophysiques dépendent fortement de la température. On se ramène à la résolution d'une seule équation de la chaleur, nonlinéaire, dont le traitement peut être abordé par la technique des volumes finis.

Cette méthode, qui revient le plus souvent à exprimer l'équation de la conservation de l'énergie sous forme enthalpique est particulièrement bien adaptée aux problèmes qui concernent l'emploi de matériaux à changement de phase non purs pour lesquels le changement d'état se produit sur une plage de températures variables.

On exprime l' **enthalpie du matériau à changement de phase** entre une température de référence et la température du point considéré par :

$$\rho \frac{\partial h}{\partial t} = \nabla \cdot (k \nabla T) + S(x, y, z, t, T)$$

Avec :

- $h$  : l'enthalpie ;
- $k$  : la conductivité du matériau ;
- $S$  : source volumique ;
- $T$  : la température
- $\rho$  : la densité du matériau.

Cette méthode est performante et sa mise en œuvre numérique se distingue par le traitement plus ou moins implicite de la nonlinéarité. Le principal avantage réside évidemment dans le fait que la position de l'interface n'est pas une inconnue du système d'équations, mais s'obtient par la recherche de l'isotherme correspondant à la température de fusion ou par celle d'une fraction liquide donnée.

### II.3 Relation enthalpie – température

Suivant la nature du matériau à étudier pendant le changement de phase, la relation enthalpie – température sera définie :

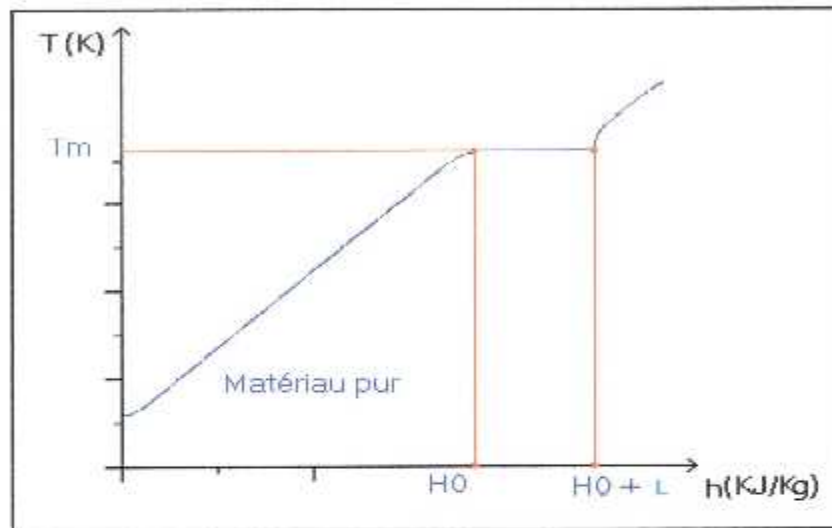


Fig. II.1. a Relation Enthalpie – Température (matériau pur)

Pour un matériau pur , d'après la fig. II.1.a , on a :

$$T(h) = \begin{cases} T_m + \frac{1}{C_{pl}}(h - H_0 - L) & h > H_0 + L \\ T_m & H_0 \leq h \leq H_0 + L \\ T_m + \frac{1}{C_{ps}}(h - H_0) & h < H_0 \end{cases} \quad (II.1)$$

Avec :

- $H_0$  : l'enthalpie de début de fusion .
- $L$  : la chaleur latente de fusion .
- $C_{ps}$  : chaleur spécifique solidus.
- $C_{pl}$  : chaleur spécifique liquidus .
- $T_m$  : la température de fusion du matériau.

La relation (II.1) peut être reformulée en utilisant la fonction step  $u$  définie par :

$$u(x) = \begin{cases} 0. & \text{si } x \leq 0 \\ 1. & \text{sinon} \end{cases}$$

On aura :

$$T(h) = T_m + \frac{1}{C_{ps}} u(h - H_0) * u(h - H_0) + \frac{1}{C_{pl}} u(h - H_0 - L) \quad (II.2)$$

Pour un matériau non pur ou hypothétique, d'après la fig. II.1.b , La relation enthalpie – température devient :

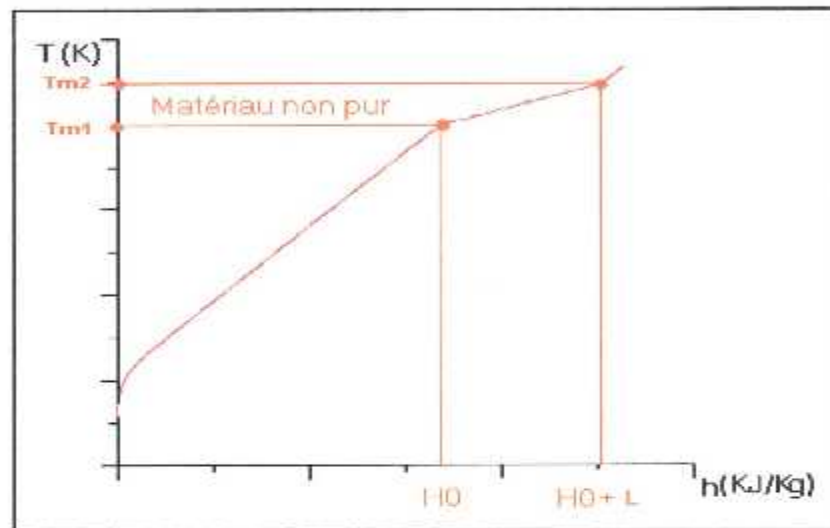


Fig. II.1.b Relation Enthalpie – Température (matériau non pur)

$$T(h) = \begin{cases} T_{m2} + \frac{1}{C_{pl}}(h - H_0 - L) & h > H_0 + L \\ T_{m1} + \frac{T_{m2} - T_{m1}}{L}(h - H_0) & H_0 \leq h \leq H_0 + L \\ T_{m1} + \frac{1}{C_{ps}}(h - H_0) & h < H_0 \end{cases} \quad (II.3)$$

De même, la relation (II.3) peut être reformulée en utilisant la fonction step  $u$ , par :

$$T(h) = \left\{ T_{m1} + (h - H_0) \frac{T_{m2} - T_{m1}}{L} \right\} u(h - H_0) u\delta(H_0 + L - h) + \left\{ T_{m1} + \frac{1}{C_{ps}}(h - H_0) \right\} u(h - H_0) + \left\{ T_{m2} + \frac{1}{C_{pl}}(h - H_0 - L) \right\} u(h - H_0 - L) \quad (II.4)$$

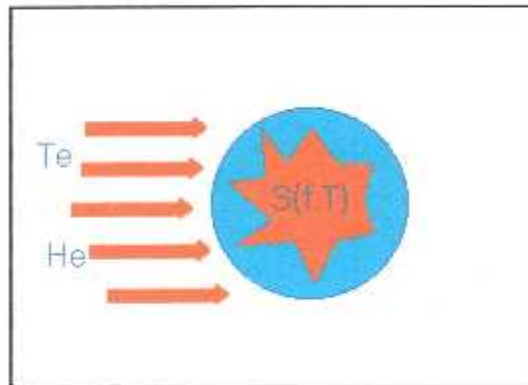
Où  $T_{m2}$  et  $T_{m1}$  sont les températures de début et fin de changement de phase. Si l'enthalpie est non linéaire, la relation enthalpie-température sera définie par une fonction non linéaire, ou bien déterminée par des tables expérimentales.



#### II.4 Formulation pour les systèmes minces

Pour un système thermiquement mince, la température est presque la même dans le domaine spatial, la température devient seulement une fonction temporelle. L'analyse du système mince est valide seulement pour des nombres de Biot inférieurs à 0.1, où le nombre de Biot est le rapport des résistances thermiques internes sur les résistances thermiques externes.

Le système mince est représenté par la figure (fig.II.2) :



**Fig.II.2 Système mince**

Pour un système mince, l'équation enthalpique s'écrit sous la forme suivante :

$$\rho V \frac{\partial h}{\partial t} = H^* A^* (T_{\infty} - T) + V^* S(t, T) \quad (II.5)$$

Dans cette équation le terme source volumique peut être décomposé en deux termes, l'un indépendant de la température  $S_c$  et l'autre dépendant de la température  $S_p$ , c'est à dire :

$$S(t, T) = S_c(t) + S_p(t) T \quad (II.6)$$

L'équation (II.5) sera alors reformulée par :

$$\rho V \frac{\partial h}{\partial t} = H^* A^* (T_{\infty} - T) + V^* (S_c(t) + S_p(t) T) \quad (II.7)$$

Cette équation (II.7) doit être résolue simultanément avec la relation enthalpie-températures (II.2) ou (II.4) pour le calcul des enthalpies et températures.

Si la condition initiale est spécifiée, la mise en équation sera complète.

$$T(0) = T_i \quad t = 0 \quad (II.8)$$

### II.5 Formulation pour les matériaux homogènes

Considérons la fusion ou la solidification pour un matériau homogène dans le cas monodimensionnel (1D), représenté dans la figure (II.3) avec les sources volumiques et les conditions initiales et aux limites de la conduction.

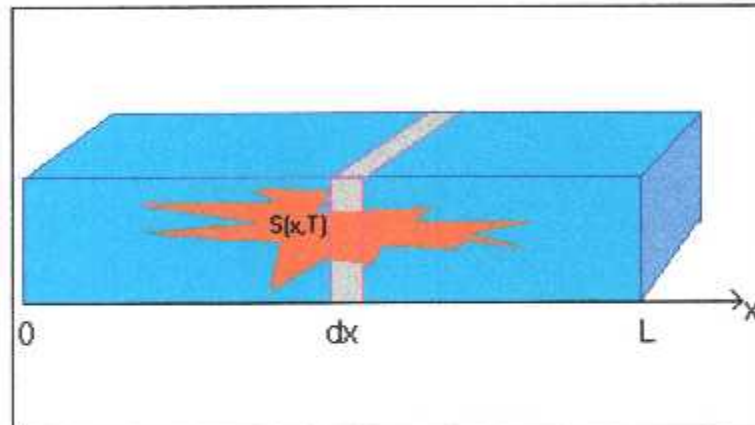


fig. II.3 matériau homogène 1D

Pour le volume de contrôle décrit dans la figure (fig. II.4), l'équation de la conservation de l'énergie s'écrit sous la forme suivante :

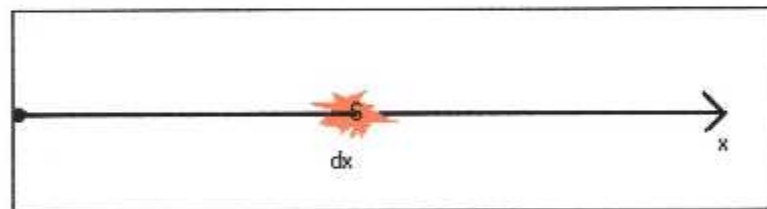


Fig. II.4 Volume de contrôle pour un matériau homogène

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( k \frac{\partial T}{\partial x} \right) + S(x, t, T) = \rho \frac{\partial h}{\partial t} \quad (\text{II.9})$$

Le terme source  $S(x, t, T)$  peut être décomposée en deux termes, l'un indépendant de la température  $S_c$  et l'autre dépendant de la température  $S_p$ , c'est à dire :

$$S(t, x, T) = S_c(t, x) + S_p(t, x) T \quad (\text{II.10})$$

La conductivité  $k$  du matériau peut varier suivant l'espace  $x$ , elle peut aussi dépendre de la température  $T$  en une position donnée .

L'équation précédente (II.9) devient alors :

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( k \frac{\partial T}{\partial x} \right) + Sc(x, t, T) + Sp(x, t, T) = \rho \frac{\partial h}{\partial t} \quad (\text{II.11})$$

Comme l'équation (II.11) est nonlinéaire, alors (II.11) et (II.2) doivent être résolues simultanément par une méthode itérative.

Avec la condition initiale et les conditions aux limites suivantes la formulation est complète.

La condition initiale est définie par :

$$T(x,0) = T_i \quad t = 0 \quad (\text{II.12})$$

La condition limite en  $x = 0$ , est la suivante :

- **Température imposée ( type Dirichlet ) :**

$$T(0,t) = T_0 \quad (\text{II.13})$$

- **Flux imposé  $q$  avec convection  $H$  et  $T_\infty$ , ( condition mixte ) :**

$$-k \frac{\partial T}{\partial x} = q + H^*(T_\infty - T(0,t)) \quad (\text{II.14})$$

De la même manière qu'en  $x = 0$ , la condition limite en  $x = l$  sera :

- **Température imposée ( type Dirichlet ) :**

$$T(l,t) = T_l \quad (\text{II.15})$$

- **Flux imposé  $q$  avec convection  $H$  et  $T_\infty$ , (condition mixte) :**

$$-k \frac{\partial T}{\partial x} = q + H^*(T_\infty - T(l,t)) \quad (\text{II.16})$$

## II.6 Formulation pour les matériaux hétérogènes

Considérons les matériaux hétérogènes, composés par la matrice contenant une **distribution uniforme** de particules (fig.II.5) avec possibilité de fusion ou de solidification des particules .

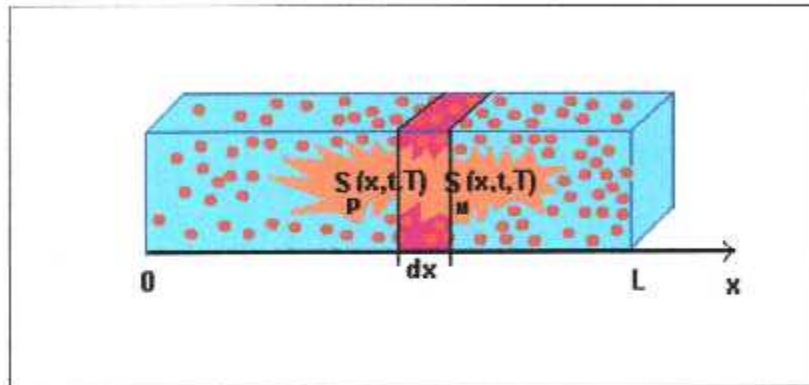


Figure II.5 Matériau hétérogène

Ces particules séparées peuvent être considérées comme systèmes thermiquement minces pour chacune d'elle. L'échange de chaleur se fait aux bords limites, comme il peut être générer aussi bien dans les particules que dans la matrice. L'échange de chaleur matrice particules est caractérisé par une résistance de contact  $h_c$  .

Pour un volume de contrôle CV donné (fig.II.6) , les caractéristiques de la micro-structure sont :

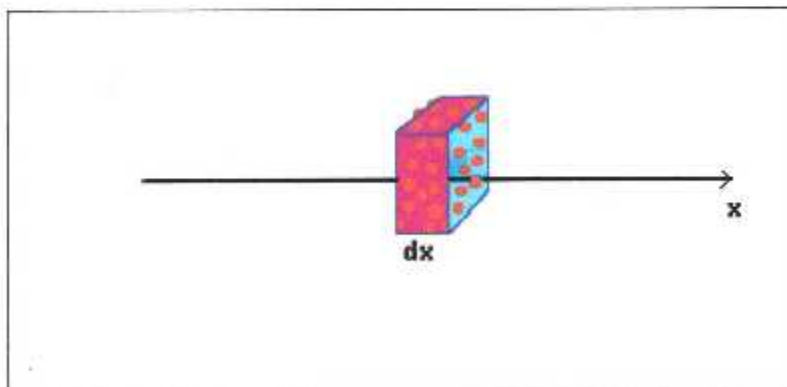


Figure II.6 Volume de contrôle pour un matériau hétérogène

- 1) La densité des particules  $\rho_p$  : c'est le nombre de particules par le volume total.
- 2) Le nombre de particules  $N$ .
- 3) Le diamètre  $d$  de la particule, considérée comme une sphère.
- 4) La résistance de contact  $h_c$ , caractérisant le contact entre les particules et la matrice.
- 5) Les sources volumiques de la matrice  $S_m$  et des particules  $S_p$ .
- 6) Les fractions volumiques des particules  $NV_p$  et de la matrice  $(1 - NV_p)$ .
- 7) La surface particulaire est :  $A_p = \pi d^2$ .
- 8) Le volume de la particule est :  $V_p = \pi \frac{d^3}{6}$ .

Avec ce modèle physique choisi, les équations enthalpiques dans la matrice et les particules sont :

- **Matrice :**

$$(1 - NV_p)(\rho C_p)_m \frac{\partial T_m}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left( (1 - NV_p) k_m \frac{\partial T_m}{\partial x} \right) - h_c (NA_p) (T_m - T_p) (1 - NV_p) S_m(x, t, T) \quad (II.17)$$

- **Particules :**

$$(NV_p) \rho_p \frac{\partial h}{\partial t} = h_c (NA_p) (T_m - T_p) + (NA_p) S_p(x, t, T) \quad (II.18)$$

Les équations (II.17) et (II.18) peuvent être reformulées par :

- **Matrice :**

$$C_m \frac{\partial T_m}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left( k_m \frac{\partial T_m}{\partial x} \right) - H_c (T_m - T_p) + S_{cm}(x, t) + S_{pm}(x, t) T_m \quad (II.19)$$

- **Particules :**

$$(NV_p) \rho_p \frac{\partial h}{\partial t} = H_c (T_m - T_p) + S_{cp}(x, t) + S_{pp}(x, t) T_p \quad (II.20)$$

Où :

- La chaleur spécifique de la matrice pour le volume total est :

$$C_m = (1 - NV_p)(\rho C_p)_m$$

- La conductance dans la matrice est :

$$K_m = (1 - NV_p) k_m$$

- Le coefficient de couplage températures entre la matrice et les particules :

$$H_c = h_c (N A_p)$$

- Les sources de chaleurs matrice et particules sont :

$$(1 - N V_p) S_m(x,t,T) = S_{cm}(x,t) + S_{p_m}(x,t) T_m \quad (II.21)$$

$$(N V_p) S_p(x,t,T) = S_{cp}(x,t) + S_{p_p}(x,t) T_p \quad (II.22)$$

L'équation enthalpique des particules (II.20) doit être simultanément résolue avec la relation enthalpie-température (II.2) et (II.4) pour l'évaluation des enthalpies et températures particulières.

Les conditions initiales sont :

$$T_m(x,t) = T_i(x) \quad t = 0 \quad (II.23)$$

$$T_p(x,t) = T_i(x) \quad t = 0 \quad (II.24)$$

Les conditions limites pour la matrice sont :

- En  $x = 0$ , la condition limite peut être :

### 1. Température imposée $T_0$ : (Type Dirichlet)

$$T_m(0,t) = T_0 \quad (II.25)$$

### 2. Flux de chaleurs $q$ avec convection $H$ et $T_\infty$ :

$$-k_m \frac{\partial T_m}{\partial x} = q + H^* [(T_\infty - T_m(0,t))] \quad (II.26)$$

- En  $x = l$  :

### 1. Température imposée $T_l$ :

$$T_m(l,t) = T_l \quad (II.27)$$

### 2. Flux de chaleurs $q$ avec convection $H$ et $T_\infty$ :

$$-k_m \frac{\partial T_m}{\partial x} = q + H^* [(T_\infty - T_m(l,t))] \quad (II.28)$$

Avec les conditions limites et initiale ainsi données, la formulation du problème matériaux hétérogènes est complète .

## II.7 Variables adimensionnelles

L'analyse adimensionnelle permet de réduire le nombre de variables dans le problème. Nous allons faire cette analyse pour les trois types de matériaux utilisés. Cette analyse fait apparaître de nouveaux nombres, à savoir le nombre de Stefan  $Ste$ , la capacité spécifique réduite  $Cr$  et la conductivité thermique réduite  $Kr$ .

### II.7.1 Systèmes minces

Soit le tableau des variables adimensionnelles suivantes :

**Tableau 1 Variables adimensionnelles systèmes minces**

Variables physiques	Unités	Référence	Adimensionnelle
Température $T - T_{\infty}$	[°K]	$\Delta T_{ref} = T - T_{\infty}$	$T^+ = \frac{T - T_{\infty}}{\Delta T_{ref}}$
Enthalpie $h - H_0$	$\left[ \frac{KJ}{Kg} \right]$	$\Delta h_{ref} = C_{p_{ref}} \Delta T_{ref}$	$h^+ = \frac{h - H_0}{\Delta h_{ref}}$ $h^+ = \frac{h - H_0}{C_{p_s} \Delta T_{ref}}$
Temps $T$	[s]	$t_{ref} = \frac{\rho_s C_{p_s} L}{H}$	$t^+ = \frac{t}{t_{ref}}$
Longueur $l = \frac{V}{A}$	[m]	$l_{ref} = l = \frac{V}{A}$	$l^+ = \frac{l}{l_{ref}} = 1$
Masse volumique $\rho$	$\left[ \frac{Kg}{m^3} \right]$	$\rho_{ref} = \rho$	$\rho^+ = \frac{\rho_s}{\rho_{ref}} = 1$
Chaleur spécifique $C_p$	$\left[ \frac{kJ}{kg \cdot ^\circ K} \right]$	$C_{p_{ref}} = C_{p_s}$	$C_{p_s}^+ = \frac{C_{p_s}}{C_{p_{ref}}} = 1$ $C_{p_l}^+ = \frac{C_{p_s}}{C_{p_l}} = Cr$

Variables physiques	Unités	Référence	adimensionnelle
<b>Température de changement de phase :</b>  $T_m$	[°K]	$\Delta T_{ref}$	$T_m^+ = \frac{T_m - T_\infty}{\Delta T_{ref}}$
<b>Chaleur latente :</b>  $L$	$\left[ \frac{\text{kJ}}{\text{kg}} \right]$	$L_{ref} = C_{p_s} \Delta T_{ref}$	$L^+ = \frac{L}{L_{ref}}$ $L^+ = \frac{L}{C_{p_{ref}} \Delta T_{ref}}$ $L^+ = \frac{L}{Ste}$
<b>Convection</b>  $H$  $T_\infty$	$\left[ \frac{\text{W}}{\text{m}^2 \cdot \text{°K}} \right]$  [°K]	$h_{ref} = H$  $\Delta T_{ref}$	$H_\infty^+ = \frac{H_\infty}{H_{ref}} = Bi$ $T_\infty^+ = \frac{T_\infty - T_\infty}{\Delta T_{ref}} = 0$
<b>Source de chaleur</b>  $Sc$  $Sp$	$\left[ \frac{\text{W}}{\text{m}^3} \right]$  $\left[ \frac{\text{W}}{\text{m}^3 \cdot \text{°K}} \right]$	$Sc_{ref} = \frac{H \Delta T_{ref}}{l}$  $Sp_{ref} = \frac{H}{l}$	$Sc^+ = \frac{Sc - Sp T_\infty}{Sc_{ref}}$  $Sp^+ = \frac{Sp}{Sp_{ref}}$
<b>Température initiale</b>  $T_i$	[°K]	$\Delta T_{ref}$	$T_i^+ = \frac{T_i - T_\infty}{\Delta T_{ref}} = 1$ $T_i^+ = 1, T \text{ Cst}$ $T_i^+ = 0, \text{Flux Cst}$



En introduisant ses variables adimensionnelles dans les équations (II.4) et (II.7),  
L'équation enthalpique de conduction pour les systèmes minces devient :

$$\frac{dH^+}{dt^+} = -T^+ + Sc^+(t^+) + Sp^+(t^+)T^+ \quad (II.29)$$

$$\begin{aligned} T^+(h^+) = & \left\{ T_{m1}^+ + h^+ (T_{m2}^+ - T_{m1}^+) Ste \right\} * u(h^+) * u\left(\frac{1}{Ste} - h^+\right) + \left\{ T_{m1}^+ + h^+ \right\} * u(-h^+) \\ & + \left\{ T_{m2}^+ + \frac{1}{Cr} \left( h^+ - \frac{1}{Ste} \right) \right\} * u\left( h^+ - \frac{1}{Ste} \right) \end{aligned} \quad (II.30)$$

$$T^+(t^+) = T_i^+ \quad t^+ = 0 \quad (II.31)$$

Le nombre de Stefan **Ste** est défini par :

$$Ste = \frac{Cp_{ref} \Delta T_{ref}}{L}$$

La chaleur spécifique réduite **Cr** est définie par :

$$Cr = \frac{Cp_s}{Cpl}$$

### II.7.2 Matériaux homogènes

Soit le tableau des variables adimensionnelles suivant pour les matériaux homogènes, défini par :

**Tableau 2 Variables adimensionnelles homogènes**

Variables physiques	Unités	Référence	adimensionnelle
<b>Température</b>  $T - T_g$	[°K]	<ul style="list-style-type: none"> <li>• <b>Température imposée :</b> <math>\Delta T_{ref} = T_i - T_0</math></li> <li>• <b>Flux de chaleur imposé :</b> <math>\Delta T_{ref} = \frac{q_{Bl}}{k_s}</math></li> <li>• <b>Convection :</b> <math>\Delta T_{ref} = T_i - T_\infty</math></li> <li>• <b>Source spécifiée :</b> <math>\Delta T_{ref} = \frac{Sc l^2}{k_s}</math></li> </ul>	$T^+ = \frac{T - T_g}{\Delta T_{ref}}$ <ul style="list-style-type: none"> <li>• <b>Température imposée :</b> <math>T_g = T_0</math></li> <li>• <b>Flux de chaleur imposé :</b> <math>T_g = T_i</math></li> <li>• <b>Convection :</b> <math>T_g = T_\infty</math></li> <li>• <b>Source spécifiée :</b> <math>T_g = T_i</math></li> </ul>
<b>Enthalpie</b>  $h - H_0$	$\left[ \frac{KJ}{Kg} \right]$	$\Delta h_{ref} = Cp_{ref} \Delta T_{ref}$	$h^+ = \frac{h - H_0}{\Delta h_{ref}}$ $h^+ = \frac{h - H_0}{Cp_s \Delta T_{ref}}$
<b>Temps</b> $T$	[s]	$t_{ref} = \frac{\rho_s Cp_s L}{H}$	$t^+ = \frac{t}{t_{ref}}$
<b>Longueur</b> $x$	[m]	$x_{ref} = l$	$x^+ = \frac{x}{x_{ref}} = \frac{x}{l}$
<b>Masse volumique</b>  $\rho$	$\left[ \frac{Kg}{m^3} \right]$	$\rho_{ref} = \rho_s$	$\rho^+ = \frac{\rho_s}{\rho_{ref}} = 1$

Variables physiques	Unités	Référence	Adimensionnelle
<b>Chaleur spécifique</b> $C_p$	$\left[ \frac{\text{kJ}}{\text{kg} \cdot \text{K}} \right]$	$C_{p\text{ref}} = C_{p_s}$	$C_{p_s}^+ = \frac{C_{p_s}}{C_{p\text{ref}}} = 1$ $C_{p_l}^+ = \frac{C_{p_l}}{C_{p\text{ref}}} = Cr$
<b>Conductivité</b> $k$	$\left[ \frac{\text{W}}{\text{m} \cdot \text{K}} \right]$	$k_{\text{ref}} = k_s$	$k_s^+ = \frac{k_s}{k_{\text{ref}}} = 1$ $k_l^+ = \frac{k_l}{k_{\text{ref}}} = Kr$
<b>Température de changement de phase</b> $T_m$	$[^\circ\text{K}]$	$\Delta T_{\text{ref}}$	$T_m^+ = \frac{T_m - T_g}{\Delta T_{\text{ref}}}$
<b>Chaleur latente</b> $L$	$\left[ \frac{\text{kJ}}{\text{kg}} \right]$	$L_{\text{ref}} = C_{p_s} \Delta T_{\text{ref}}$	$L^+ = \frac{L}{L_{\text{ref}}}$ $L^+ = \frac{L}{C_{p_s} \Delta T_{\text{ref}}}$ $L^+ = \frac{L}{Ste}$
<b>Convection</b> $H$  $T_\infty$	$\left[ \frac{\text{W}}{\text{m}^2 \cdot \text{K}} \right]$  $[^\circ\text{K}]$	$h_{\text{ref}} = H$  $\Delta T_{\text{ref}}$	$H = \frac{H_\infty}{H_{\text{ref}}} = 1$ $T_\infty^+ = \frac{T_\infty - T_\infty}{\Delta T_{\text{ref}}} = 0$
<b>Source de chaleur</b>  $Sc$  $Sp$	$\left[ \frac{\text{W}}{\text{m}^3} \right]$  $\left[ \frac{\text{W}}{\text{m}^3 \cdot \text{K}} \right]$	$Sc_{\text{ref}} = \frac{k_s \Delta T_{\text{ref}}}{\rho^2}$  $Sp_{\text{ref}} = \frac{k_s}{\rho^2}$	$Sc^+ = \frac{Sc - Sp T_g}{Sc_{\text{ref}}}$ $Sp^+ = \frac{Sp}{Sp_{\text{ref}}}$
<b>Température initiale</b> $T_i$	$[^\circ\text{K}]$	$\Delta T_{\text{ref}}$	$T_i^+ = \frac{T_i - T_g}{\Delta T_{\text{ref}}} = 1$ $T_i^+ = 1, T \text{ Cst}$

En introduisant ses variables adimensionnelles dans les équations (II.11) et (II.4),  
L'équation enthalpique de conduction pour les matériaux hétérogènes devient :

$$\frac{dh^+}{dt^+} = \frac{\partial}{\partial x^+} \left( k^+ \frac{\partial T^+}{\partial x^+} \right) + Sc^+(x^+, t^+) + Sp^+(x^+, t^+) T^+ \quad (II.32)$$

$$\begin{aligned} T^+(h^+) = & \left\{ T_{m1}^+ + h^+ (T_{m2}^+ - T_{m1}^+) Ste \right\} * u(h^+) * u\left(\frac{1}{Ste} - h^+\right) + \left\{ T_{m1}^+ + h^+ \right\} * u(-h^+) \\ & + \left\{ T_{m2}^+ + \frac{1}{Cr} * \left( h^+ - \frac{1}{Ste} \right) \right\} * u\left( h^+ - \frac{1}{Ste} \right) \end{aligned} \quad (II.33)$$

**Ste** est le nombre de Stefan, **Cr** la chaleur spécifique réduite .

La condition initiale sera :

$$T^+(t^+) = T_i^+ \quad t^+ = 0 \quad (II.34)$$

**Condition limite à l'est ( $x^+ = 0$ ) :**

- **Température imposée  $T_0^+$  ( type Dirichlet ) :**

$$T^+(0, t^+) = T_0^+ \quad (II.35)$$

- **Flux imposée et convection ( 3ieme type ) :**

$$-\frac{\partial T^+}{\partial x^+} = q + H^+ \left[ T_\infty^+ - T^+(0, t^+) \right] \quad (II.36)$$

**Condition limite à l'ouest ( $x^+ = 1$ ) :**

- **Température imposée  $T_1^+$  ( type Dirichlet ) :**

$$T^+(1, t^+) = T_1^+ \quad (II.37)$$

- **Flux imposée et convection ( III ieme type ) :**

$$-\frac{\partial T^+}{\partial x^+} = q + H^+ \left[ T_\infty^+ - T^+(1, t^+) \right] \quad (II.38)$$

### II.7.3 Matériaux hétérogènes :

On termine ce paragraphe par l'analyse adimensionnelle pour les matériaux hétérogènes.

Soit le tableau des variables adimensionnelles suivant, où sont choisis comme valeurs de références pour la matrice, la densité  $\rho_{m,s}$ , la chaleur spécifique  $Cp_{m,s}$ , la conductivité thermique,  $k_{m,s}$ , de la matrice solidus, la longueur du domaine désignée par  $l$  et enfin la température de référence  $\Delta T_{ref}$ . Il va apparaître le nombre de Stefan **Ste**, la chaleur spécifique réduite **Cr** et deux nouveaux nombres qui sont : la masse réduite et le coefficient de couplage  $\Psi$  entre la matrice - particules.

**Tableau 3 Variables adimensionnelles hétérogènes**

Variables physiques	Unités	Référence	Adimensionnelle
<p><b>Température</b></p> <p><math>T - T_g</math></p>	[°K]	<ul style="list-style-type: none"> <li>• <b>Température imposée :</b> <math>\Delta T_{ref} = T_i - T_0</math></li> <li>• <b>Flux de chaleur imposé :</b> <math>\Delta T_{ref} = \frac{q_{Bl}}{k_{m,s}}</math></li> <li>• <b>Convection :</b> <math>\Delta T_{ref} = T_i - T_\infty</math></li> <li>• <b>Source spécifiée :</b> <math>\Delta T_{ref} = \frac{Sc l^2}{k_{m,s}}</math></li> </ul>	<p><math>T^+ = \frac{T - T_g}{\Delta T_{ref}}</math></p> <ul style="list-style-type: none"> <li>• <b>Température imposée :</b> <math>T_g = T_0</math></li> <li>• <b>Flux de chaleur imposé :</b> <math>T_g = T_i</math></li> <li>• <b>Convection :</b> <math>T_g = T_\infty</math></li> <li>• <b>Source spécifiée :</b> <math>T_g = T_i</math></li> </ul>
<p><b>Enthalpie</b></p> <p><math>h - H_0</math></p>	$\left[ \frac{KJ}{Kg} \right]$	$\Delta h_{ref} = Cp_{m,s} \Delta T_{ref}$	<p><math>h^+ = \frac{h - H_0}{\Delta h_{ref}}</math></p> <p><math>h^+ = \frac{h - H_0}{Cp_{m,s} \Delta T_{ref}}</math></p>
<p><b>Masse volumique</b></p> <p><math>\rho</math></p>	$\left[ \frac{Kg}{m^3} \right]$	$\rho_{ref} = \rho_{m,s}$	$\rho^+ = \frac{\rho_{m,s}}{\rho_{ref}} = 1$

Variables physiques	Unités	Référence	Adimensionnelle
Chaleur spécifique $C_p$	$\left[ \frac{\text{kJ}}{\text{kg} \cdot ^\circ\text{K}} \right]$	$C_{p\text{ref}} = C_{p\text{m,s}}$	$C_{p_s}^+ = \frac{C_{p_s}}{C_{p\text{ref}}} = 1$ $C_{p_l}^+ = \frac{C_{p_l}}{C_{p\text{ref}}} = Cr$
Conductivité $k$	$\left[ \frac{\text{W}}{\text{m} \cdot ^\circ\text{K}} \right]$	$k_{\text{ref}} = k_{\text{m,s}}$	$k_s^+ = \frac{k_s}{k_{\text{ref}}} = 1$ $k_l^+ = \frac{k_l}{k_{\text{ref}}} = Kr$
Température de changement de phase $T_m$	$[^\circ\text{K}]$	$\Delta T_{\text{ref}}$	$T_m^+ = \frac{T_m - T_g}{\Delta T_{\text{ref}}}$
Chaleur latente $L$	$\left[ \frac{\text{kJ}}{\text{kg}} \right]$	$L_{\text{ref}} = C_{p\text{m,s}} \Delta T_{\text{ref}}$	$L^+ = \frac{L}{L_{\text{ref}}}$ $L^+ = \frac{L}{C_{p\text{m,s}} \Delta T_{\text{ref}}}$ $L^+ = \frac{L}{\text{Ste}}$
Convection $H_\infty$  $T_\infty$	$\left[ \frac{\text{W}}{\text{m}^2 \cdot ^\circ\text{K}} \right]$  $[^\circ\text{K}]$	$h_{\text{ref}} = \frac{k_{\text{m,s}}}{l}$  $\Delta T_{\text{ref}} = T_i - T_\infty$	$H = \frac{H_\infty}{H_{\text{ref}}} = 1$  $T_\infty^+ = \frac{T_\infty - T_\infty}{\Delta T_{\text{ref}}} = 0$
Source de chaleur  $Sc$  $Sp$	$\left[ \frac{\text{W}}{\text{m}^3} \right]$  $\left[ \frac{\text{W}}{\text{m}^3 \cdot ^\circ\text{K}} \right]$	$Sc_{\text{ref}} = \frac{(1 - NV_p) * k_{\text{m,s}} \Delta T_{\text{ref}}}{l^2}$  $Sp_{\text{ref}} = \frac{(1 - NV_p) * k_{\text{m,s}}}{l^2}$	$Sc^+ = \frac{Sc - Sp T_g}{Sc_{\text{ref}}}$  $Sp^+ = \frac{Sp}{Sp_{\text{ref}}}$
Température initiale $T_i$	$[^\circ\text{K}]$	$\Delta T_{\text{ref}}$	$T_i^+ = \frac{T_i - T_g}{\Delta T_{\text{ref}}} = 1$

Les équations (II.19), (II.20) et (II.4) reformulés en adimensionnelles sont :

- **Matrice :**

$$\frac{\partial T_m^+}{\partial t^+} = \frac{\partial}{\partial x^+} \left( k_m^+ \frac{\partial T_m^+}{\partial x^+} \right) - \Psi(T_m^+ - T_p^+) + Sc_m^+(x^+, t^+) + Sc_p^+(x^+, t^+) T_m^+ \quad (\text{II.39})$$

- **Particules :**

$$Mr \frac{\partial h^+}{\partial t^+} = \Psi(T_m^+ - T_p^+) + Sc_p^+(x^+, t^+) + Sp_p^+(x^+, t^+) T_p^+ \quad (\text{II.40})$$

Et :

$$\begin{aligned} T_p^+(h^+) = & \left\{ T_{m_1}^+ + h^+ (T_{m_2}^+ - T_{m_1}^+) Ste \right\}^* u(h^+) + u \left( \frac{1}{Ste} - h^+ \right) \\ & + \left\{ T_{m_1}^+ + \frac{1}{Cr_s} h^+ \right\}^* u(-h^+) + \left\{ T_{m_2}^+ + \frac{1}{Cr_l} \left( h^+ - \frac{1}{Ste} \right) \right\} u \left( h^+ - \frac{1}{Ste} \right) \end{aligned} \quad (\text{II.41})$$

La résolution des équation (II.40) et (II.41) se fera par une méthode itérative car ces équations sont non linéaires.

- **Condition Initiale :**

$$T_m^+(x^+, t^+) = T_p^+(x^+, t^+) = \begin{cases} 1 \text{ type Dirichlet ou convection} \\ 0 \text{ Source et flux de chaleur} \end{cases}, t^+ = 0 \quad (\text{II.42})$$

- **Condition limite Est (en  $x^+ = 0$ ) :**

**Température imposé ( type Dirichlet ) :**

$$T_m^+(x^+, t^+) = T_0^+ \quad (\text{II.43})$$

**Flux de chaleur imposé :**

$$-\frac{\partial T_m^+}{\partial x^+} = q^+ + H_0^+ (T_{0\infty}^+ - T_m^+(0, t^+)) \quad (\text{II.44})$$

- **Condition limite Ouest ( $x^+ = 1$ ) :**

**Température imposé ( type Dirichlet ) :**

$$T_m^+(x^+, t^+) = T_1^+ \quad (\text{II.45})$$

**Flux de chaleur imposé**

$$-\frac{\partial T_m^+}{\partial x^+} = q^+ + H_1^+ (T_{1\infty}^+ - T_m^+(0, t^+)) \quad (\text{II.46})$$

### II.8 Généralisation ( matériaux homogènes ):

Dans le cas générale monodimensionnel , l'équation enthalpique s'écrit :

$$\rho \frac{\partial h}{\partial t} = \frac{1}{r^\mu} \frac{\partial}{\partial r} \left( kr^\mu \frac{\partial T}{\partial r} \right) + Sc + SpT \quad (II.47)$$

le paramètre  $j$  définit le type de géométrie,  $\mu = 0$  c'est le cas cartésien,  $\mu = 1$  c'est la géométrie cylindrique et  $\mu = 2$  c'est la géométrie sphérique.

Dans le cas bidimensionnel , l'équation enthalpique s'écrit :

- Géométrie xy :

$$\rho \frac{\partial h}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left( k \frac{\partial T}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( k \frac{\partial T}{\partial y} \right) + Sc + SpT \quad (II.48)$$

- Géométrie r $\theta$  :

$$\rho \frac{\partial h}{\partial t} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( rk \frac{\partial T}{\partial r} \right) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( k \frac{\partial T}{\partial \theta} \right) + Sc + SpT \quad (II.49)$$

- Géométrie rz :

$$\rho \frac{\partial h}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial r} \left( k \frac{\partial T}{\partial z} \right) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( kr \frac{\partial T}{\partial r} \right) + Sc + SpT \quad (II.50)$$

et la relation enthalpie - température (II.4) :

$$\begin{aligned} T(h) = & \left\{ T_{m1} + (h - H_0) \frac{T_{m2} - T_{m1}}{L} \right\} * u(h - H_0) * u(H_0 + L - h) + \\ & \left\{ T_{m1} + \frac{1}{C_{ps}} (h - H_0) \right\} * u(h - H_0) + \\ & \left\{ T_{m2} + \frac{1}{C_{pl}} (h - H_0 - L) \right\} * u(h - H_0 - L) \end{aligned} \quad (II.4)$$

Avec la condition initiale et les conditions aux limites choisies, la mise en équation sera complète.



# Chapitre III

## Chapitre III

### Méthode des volumes finis

#### III.1 Présentation

Ce chapitre est une introduction à la méthode des volumes finis, utilisée le plus couramment dans la pratique pour trouver des solutions approchées d'EDP. Il est important de savoir que les méthodes numériques ne nous permettent pas d'obtenir une solution exacte, ni une solution partout dans le domaine considéré, mais plutôt une **approximation de la solution** en des points discrets du domaine.

La méthode des volumes finis a été développée par Spalding et Patankar [3], [4]. Sa grande simplicité de mise en oeuvre a fait qu'elle a connu un essor fulgurant depuis les années 1970-1980. Elle est à l'origine de la majorité des codes de calculs en géométrie cartésienne (Fluent, Phoenics...). C'est un cas particulier de la méthode des éléments finis. En effet, dans la méthode des éléments finis, le résidu est multiplié par une fonction phi qui, lorsque égale à la constante 1 donne la méthode des volumes finis.

La méthode des volumes finis est basée sur la définition d'un volume de contrôle entourant le noeud où s'effectue le bilan total des interactions. Le noeud est entouré d'un volume de contrôle dont les extrémités sont à mi chemin entre le noeud ou nous devons trouver la solution les noeuds voisins. Les contribution de chacun des noeuds de part et d'autres du noeud considéré sont additionnées pour fournir un bilan total énergétique.

Nous considérons l'équation de la conduction chaleur en régime stationnaire et instationnaire, dans des matériaux de géométrie planes ou de révolution. Nous allons considérer les conditions limites suivantes :

- Les températures imposées.
- Les sources de chaleurs.
- Les flux de chaleurs par convection ou rayonnement en milieu infini.

En adoptant les hypothese suivantes :

- Les caractéristiques du materiau (conductivité, chaleur spécifique, densité...) dépendent de la température.
- Le coefficient de convection, l'émissivité... dépendent aussi bien de la température, que de l'espace.
- Les conditions aux limites dépendent du temps.

Avant de commencer l'étude, il serait intéressant de faire des rappels sur la différentiation numérique .

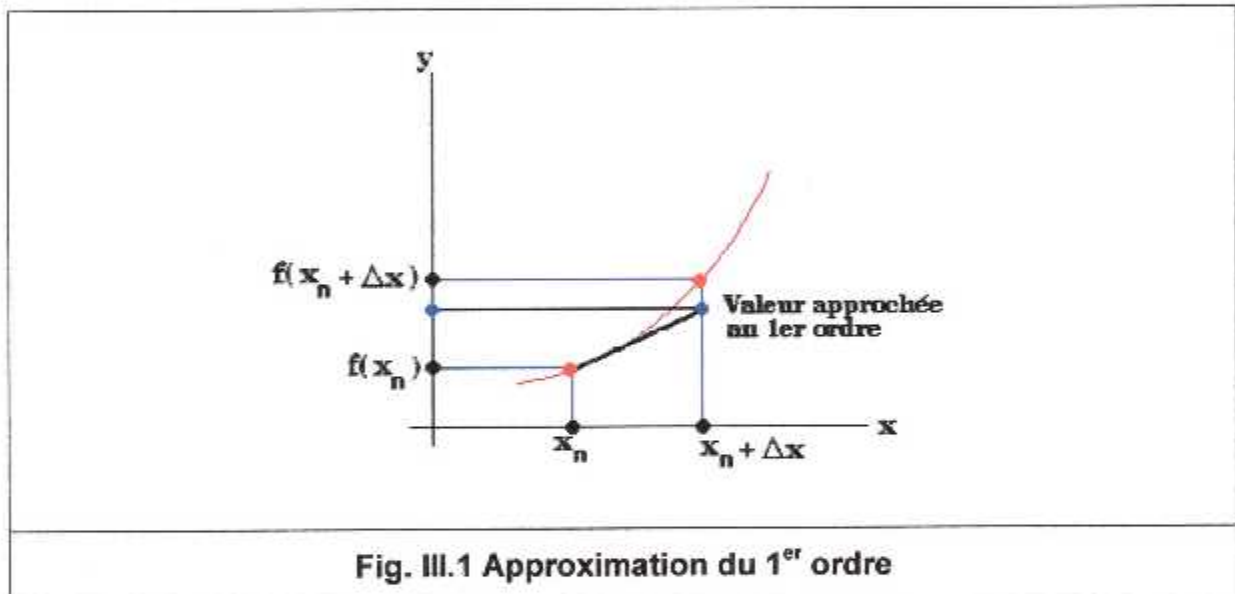
### III.2 Développements en série de Taylor

Soit une fonction  $f(x)$  dont on veut calculer la dérivée première  $\frac{df}{dx}$  à  $x = x_n$ .

Développements en série de Taylor centrés à  $x = x_n$  :

$$f_{n+1} = f(x + \Delta x) = f_n + \Delta x \left( \frac{df}{dx} \right)_n + \frac{\Delta x^2}{2} \left( \frac{d^2 f}{dx^2} \right)_n + \frac{\Delta x^3}{3!} \left( \frac{d^3 f}{dx^3} \right)_n + O(\Delta x^4) \quad (\text{III.2.1})$$

$$f_{n-1} = f(x - \Delta x) = f_n - \Delta x \left( \frac{df}{dx} \right)_n + \frac{\Delta x^2}{2} \left( \frac{d^2 f}{dx^2} \right)_n - \frac{\Delta x^3}{3!} \left( \frac{d^3 f}{dx^3} \right)_n + O(\Delta x^4) \quad (\text{III.2.2})$$



**Différence centrée :**  $\left( \frac{df}{dx} \right)_n \approx \frac{1}{2 \Delta x} (f_{n+1} - f_{n-1})$  ordre  $\Delta x^2$  (III.2.3)

**Différence arrière :**  $\left( \frac{df}{dx} \right)_n \approx \frac{1}{\Delta x} (f_n - f_{n-1})$  ordre  $\Delta x$  (III.2.4)

**Différence avant :**  $\left( \frac{df}{dx} \right)_n \approx \frac{1}{\Delta x} (f_{n+1} - f_n)$  ordre  $\Delta x$  (III.2.5)

Ces trois formulations correspondent à une approximation de la fonction en deux points par une droite. On peut aussi trouver d'autres formulations pour la dérivée première en combinant plusieurs développements en série.

$$\text{Différence arrière d'ordre 2 :} \quad \left(\frac{df}{dx}\right)_n \approx \frac{1}{2\Delta x}(3f_n - 4f_{n-1} + f_{n-2}) \quad (\text{III.2.6})$$

$$\text{Différence avant d'ordre 2 :} \quad \left(\frac{df}{dx}\right)_n \approx \frac{1}{2\Delta x}(-f_{n+2} + 4f_{n+1} - 3f_n) \quad (\text{III.2.7})$$

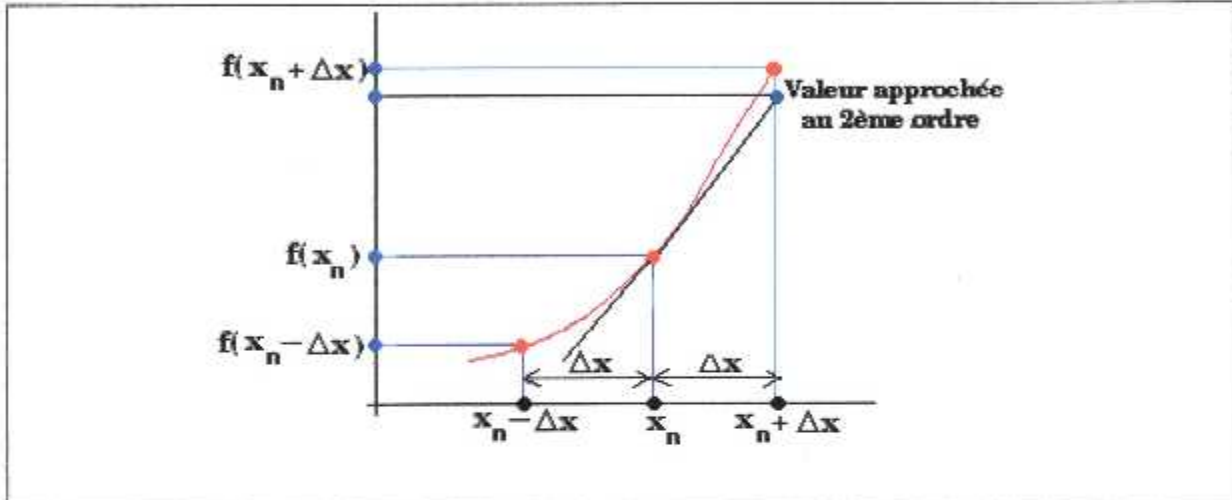


Fig.III.2 Approximation du 2ème ordre

Ces deux formulations correspondent à une approximation en 3 points avec un polynôme d'ordre 2.

#### Dérivée seconde :

En procédant de la même façon, on peut obtenir des formules aux différences finies pour la dérivée seconde d'une fonction.

$$\text{Différence arrière d'ordre 1 :} \quad \left(\frac{d^2f}{dx^2}\right)_n \approx \frac{1}{(\Delta x)^2}(f_n - 2f_{n-1} + f_{n-2}) \quad (\text{III.2.8})$$

$$\text{Différence avant d'ordre 1 :} \quad \left(\frac{d^2f}{dx^2}\right)_n \approx \frac{1}{(\Delta x)^2}(f_n - 2f_{n+1} + f_{n+2}) \quad (\text{III.2.9})$$

$$\text{Différence centrée d'ordre 2 :} \quad \left(\frac{d^2f}{dx^2}\right)_n \approx \frac{1}{(\Delta x)^2}(f_{n-1} - 2f_n + f_{n+1}) \quad (\text{III.2.10})$$

$$\text{Différence centrée d'ordre 4 :} \quad \left(\frac{d^2f}{dx^2}\right)_n \approx \frac{(-f_{n-2} + 16f_{n-1} - 30f_n + 16f_{n+1} - f_{n+2})}{12(\Delta x)^2} \quad (\text{III.2.11})$$

Il faut être prudent dans le choix de l'intervalle  $\Delta x$  car la différentiation est une opération **numériquement instable**. La précision augmente à mesure que diminue  $\Delta x$  mais seulement jusqu'à une certaine limite. Pour des  $\Delta x$  plus petits, la précision se

dégrade car la différentiation implique la soustraction de deux termes très proches l'un de l'autre.

### Exemple 1:

Calcul de la dérivée première de  $f(x) = e^x$  en  $x = 0$  avec la différence centrée d'ordre 2 et un pas  $\Delta x = 1E-09$  :

	$f(x + \Delta x)$	$f(x - \Delta x)$	$f'(x) \equiv \frac{f(x + \Delta x) - f(x - \Delta x)}{2\Delta x}$
Calcul double précision:	1.00000000100000E+00	9.99999999000000E-01	1.00000002722922E+00
Calcul simple précision:	1.0000000E+00	1.0000000E+00	0.0000000E+00

### Exemple 2:

Calcul de la dérivée première de  $f(x) = e^x$  dans l'intervalle  $[0,1]$ , correspondent à une approximation en 5 points avec un polynôme d'ordre 2 :

➤ pas  $\Delta x = 1.D-01$

x	f'	f'(xi)	Erreur
0.00000D+00	1.00000D+00	9.99978D-01	2.36649D-05
1.00000D-01	1.10517D+00	1.10518D+00	5.44156D-06
2.00000D-01	1.22140D+00	1.22140D+00	3.33730D-06
3.00000D-01	1.34986D+00	1.34985D+00	3.33730D-06
4.00000D-01	1.49182D+00	1.49182D+00	3.33730D-06
5.00000D-01	1.64872D+00	1.64872D+00	3.33730D-06
6.00000D-01	1.82212D+00	1.82211D+00	3.33730D-06
7.00000D-01	2.01375D+00	2.01375D+00	3.33730D-06
8.00000D-01	2.22554D+00	2.22553D+00	3.33730D-06
9.00000D-01	2.45960D+00	2.45961D+00	4.60614D-06
1.00000D+00	2.71828D+00	2.71824D+00	1.69564D-05

➤ pas  $\Delta x = 1.D-03$

x	f'	f'(xi)	Erreur
0.00000D+00	1.00000D+00	1.00000D+00	1.47216D-13
1.00000D-01	1.10517D+00	1.10517D+00	2.26295D-14
2.00000D-01	1.22140D+00	1.22140D+00	4.16369D-14
3.00000D-01	1.34986D+00	1.34986D+00	8.00389D-14
4.00000D-01	1.49182D+00	1.49182D+00	6.13248D-14
5.00000D-01	1.64872D+00	1.64872D+00	6.62323D-14
6.00000D-01	1.82212D+00	1.82212D+00	7.77737D-14
7.00000D-01	2.01375D+00	2.01375D+00	5.88924D-14
8.00000D-01	2.22554D+00	2.22554D+00	9.63024D-14
9.00000D-01	2.45960D+00	2.45960D+00	7.71001D-15
1.00000D+00	2.71828D+00	2.71828D+00	6.65464D-13

Pour cet exemple, on constate que la précision augmente à mesure que diminue  $\Delta x$ , elle passe de 1.d-6 pour un pas  $\Delta x = 1.D-1$  à 1.D-14 pour un pas  $\Delta x = 1.D-3$ .

### III.3 Techniques de maillage

Comme l'équation de la conduction de chaleur est approchée numériquement, il faut dans une première étape, réaliser le maillage du domaine de définition du problème afin de construire un recouvrement de ce domaine et de définir ses nœuds. Cette phase est très importante, car le maillage d'un domaine complexe, n'est pas facile et demande beaucoup de temps, pour arriver au résultat adapté au problème posé. Cette opération influe directement sur la qualité de la solution obtenue. Dans la méthode des volumes finis, il faut discrétiser le domaine, c'est à dire mettre en place un réseau de points et leurs volumes de contrôles associés, pour cela il existe deux pratiques de maillages qui sont :

- Le Maillage de type A.
- Le Maillage de type B.

#### III.3.1 Maillage de type A

La technique de type A consiste à définir d'abord la grille de points et de placer les faces des volumes de contrôles à mi-distance de deux nœuds consécutifs, ceci donne des volumes de contrôles réguliers autour des points internes du maillage et des demi volumes près des frontières.

Pour un maillage non uniforme, tandis que chaque face d'un volume de contrôle est placé au milieu de deux points du maillage, chaque point du maillage n'est pas forcément au centre du volume de contrôle qui l'entoure.

Nous allons donner l'algorithme qui calcule la position des nœuds et les faces des volumes de contrôles associés .

Soit les paramètres suivants :

- NCVX : le nombre de volumes de contrôles (CV)
- L1 : le nombre des nœuds P du domaine :  $L1 = NCVX + 2$ .
- XCV : la distance entre les volumes de contrôles.
- XU(I) : la position de la face Ouest du volume de contrôle  $(CV)_I, I = 1, NCVX$ .
- X(I) : la position du nœud P du volume de contrôle  $(CV)_I, I = 1, NCVX$ .
- XL : la longueur du domaine.

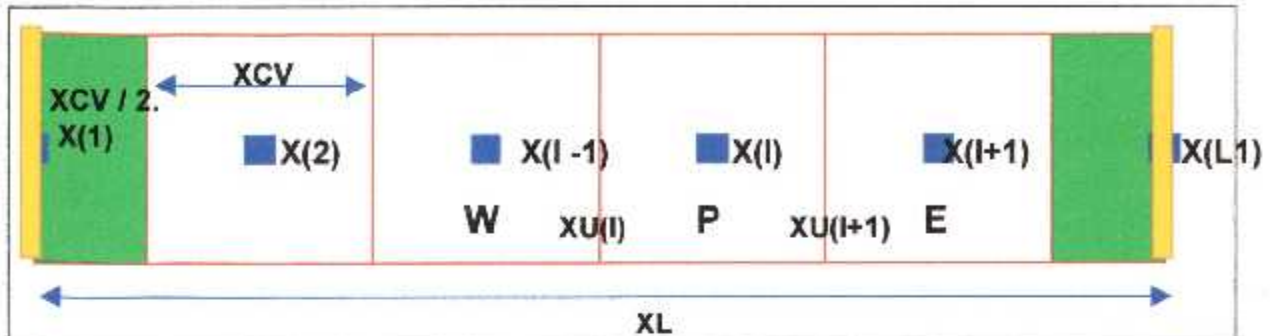


Fig.III.3 Pratique TYPE A (1 D)

L'algorithme qui calcule la position des nœuds et les faces des volumes de contrôles associées dans la pratique A est :

#### Algorithme du maillage type A

##### POSITIONS DES NŒUDS LIMITES :

$$\begin{aligned} X(2) &= 0 \\ X(L1) &= XL \end{aligned}$$

##### POSITIONS DES NŒUDS INTERNES :

```
L2 = L1 - 1
FCVLX = REAL( NCVLX )
POUR I = 3 , L2 FAIRE :
  D = REAL( I - 2 ) / FCVLX
  X( I ) = XL * D
FAIT
```

##### POSITION DE LA FACE LIMITE A L'EST :

$$XU(1) = X(2)$$

##### POSITIONS DES FACES INTERNES :

```
POUR I = 2 , L2 FAIRE :
  XU( I ) = 0.5 * ( X( I + 1 ) + X( I ) )
FAIT
```

##### POSITION DE LA FACE LIMITE A L'OUEST :

$$XU(L1) = X(L1)$$

### III.3.2 Maillage de type B

Cette technique tient compte des discontinuités pouvant toucher différents paramètres, telle que la conductivité thermique  $k$ , la densité du matériaux  $\rho$ , dans une ou plusieurs zones du domaine.

Comme nous considérons que ces quantités restent uniformes à travers le volume de contrôle et peuvent avoir des discontinuités aux frontières de celui ci, il est important que l'emplacement des faces des volumes de contrôles coïncident avec les discontinuités ; c'est pour cela que dans cette pratique, on commence d'abord par définir les volumes de contrôles de façon adéquate et placer ensuite les nœuds associés au centre des volumes de contrôles, dans ce cas, on aura aux frontières des demi-volumes avec  $XCV$  nul.

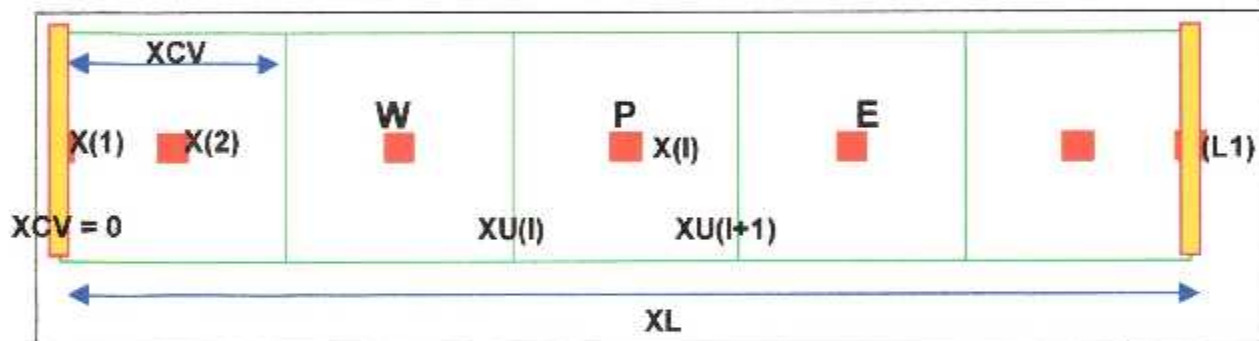


Fig. III.4 Pratique type B (1 D)

Pour les mêmes paramètres que la pratique A :

- $NCVX$  : le nombre de volumes de contrôles (CV)
- $L1$  : le nombre des nœuds P du domaine :  $L1 = NCVX + 2$ .
- $XCV$  : la distance entre les volumes de contrôles.
- $XU(I)$  : la position de la face Ouest du volume de contrôle  $(CV)_i, i = 1, NCVX$ .
- $X(I)$  : la position du nœud P du volume de contrôle  $(CV)_i, i = 1, NCVX$ .
- $XL$  : la longueur du domaine.

L'algorithme qui calcule la position des faces des volumes de contrôles et les nœuds associés dans la pratique B est :



### Algorithme du maillage type B

#### POSITIONS DES FACES LIMITES :

$$\begin{aligned} XU(2) &= 0 \\ XU(L1) &= XL \end{aligned}$$

#### POSITIONS DES FACES INTERNES :

```

L2 = L1 - 1
FCVLX = REAL( NCVLX )
POUR I = 3, L2 FAIRE :
    D = REAL( I - 2 ) / FCVLX
    XU( I ) = XL * D
FAIT

```

#### POSITION LIMITE EST :

$$X(1) = XU(2)$$

#### POSITIONS DES NŒUDS INTERNES :

```

POUR I = 2, L2 FAIRE :
    X( I ) = 0.5 * ( XU( I + 1 ) + XU( I ) )
FAIT

```

#### POSITION LIMITE A L'OUEST :

$$X(L1) = XU(L1)$$

### III.3.3 Discussion

- 1) La technique A permet un calcul plus exacte du flux à travers la surface .
- 2) Par contre le point P n'est pas au centre du volume de contrôle et donc la température  $T_p$  est prise pour tout le volume.
- 3) Le choix B ne présente pas les désavantage 2) mais ne bénéficie pas de l'avantage 1).
- 4) Dans la technique B les volumes de contrôles remplissent tout l'espace , puis sont placés les points du maillage. Au bords, sont rajoutés les points limites , en considèrent les volumes de contrôles de dimension nulles.

### III.3.4 Maillage non uniforme

Soit dans le cas (1D),  $l$  la longueur du domaine à discrétiser et  $NCVX$  le nombre des volumes de contrôles de pas variable  $XCV(i)$ ,  $i = 1, 2, \dots, NCVX$ .

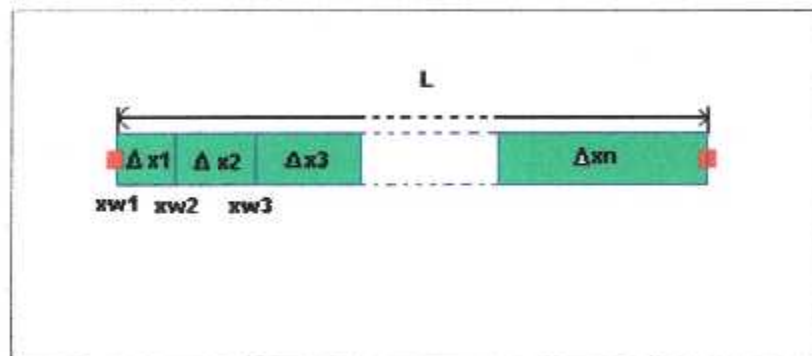


Fig. III.5 Maillage non uniforme

On définit :

$$RX = \frac{XCV_{i+1}}{XCV_i} \quad i = 1, 2, \dots, NCVX - 1 \quad (\text{III.3.1})$$

Ecrivons  $XL$  comme une progression géométrique de  $XCV(1)$  de raison  $RX$ ,

Alors :

$$XL = \sum_{i=1}^{NCVX} XCV_i = XCV_1 + XCV_2 + XCV_3 + \dots + XCV_{NCVX} \quad (\text{III.3.2})$$

C'est à dire :

$$XL = NCVX_1 + RX * NCVX_1 + RX^2 * NCVX_1 + RX^3 * NCVX_1 + \dots + RX^{NCVX-1} NCVX_1$$

$$\text{Oubien :} \quad (\text{III.3.3})$$

$$XL = XCV_1 (1 + RX + RX^2 + RX^3 + \dots + RX^{NCVX-1}) \quad (\text{III.3.4})$$

On définit :

$$S = RX + RX^2 + RX^3 + \dots + RX^{n-1} = \frac{1 - RX^{NCVX}}{1 - RX} \quad (\text{III.3.5})$$

Alors :

$$XL = XCV_1 * S \quad (\text{III.3.6})$$

Oubien :

$$S = \frac{l}{XCV_1} \quad (\text{III.3.7})$$

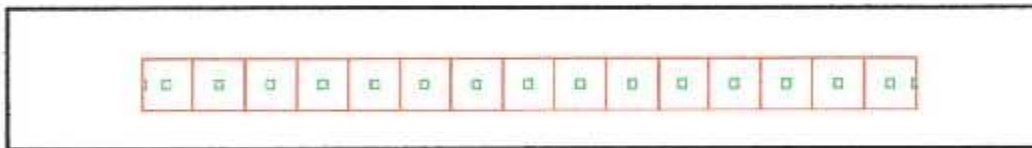
L'algorithme de cette technique est donnée ci dessous :

**Algorithme de calcul ( TYPE B )**

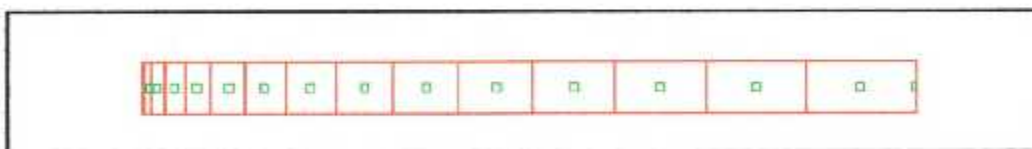
- Donner  $XL$ ,  $RX$ ,  $eps$ ,  $XU(1) = XU(2) = 0$  :  
 SI  $ABS(RX - 1) < 10 * eps$  Alors :  
 $SX = NCVX$   
 SINON  
 $SX = (1 - RX^{NCVX}) / (1 - RX)$   
 FINSI
- Calcul des volumes de contrôles :  
 $XCV(1) = 0$ .  
 $XCV(2) = XL / SX$
- Calcul des positions des faces Ouest de volumes de contrôles :  
 POUR  $I = 3$ ,  $NCVX+1$  FAIRE :  
 $XU(I) = XU(I-1) + XCV(I-1)$ ;  
 $XCV(I) = XCV(I-1) * RX$   
 FAIT  
 $XU(NCVX+2) = XL$

**Application s**

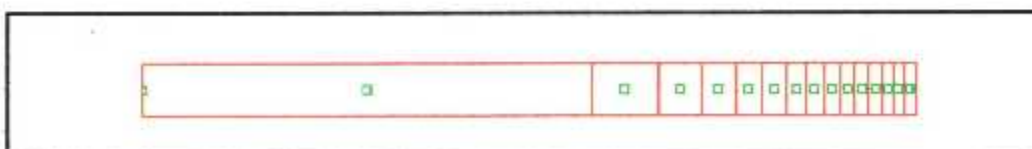
$NCVX = 15$  ;  $RX = 1$ .



$NCVX = 15$  ;  $RX = 0.2$



$NCVX = 15$  ;  $RX = 2.2$



**Fig. III.6 exemples de maillages non uniformes**

### III.3.5 Maillage uniforme et variable par zone

Si le domaine physique est constitué de matériaux différents, avec des propriétés thermodynamiques différentes, nous devons alors délimiter chaque matériau par une zone bien définie. Nous allons donner un algorithme qui permet de construire un maillage uniforme ou variable par zone, en utilisant la pratique de type B.

Soit un domaine physique unidimensionnel, constitué de NZX zones et pour chaque zone NZ, on définit un nombre de volumes de contrôles NCVX(NZ), la longueur de chaque zone NZ par XZONE(NZ) et un coefficient RX(NZ) qui permet de prévoir un maillage à pas variable par zone :

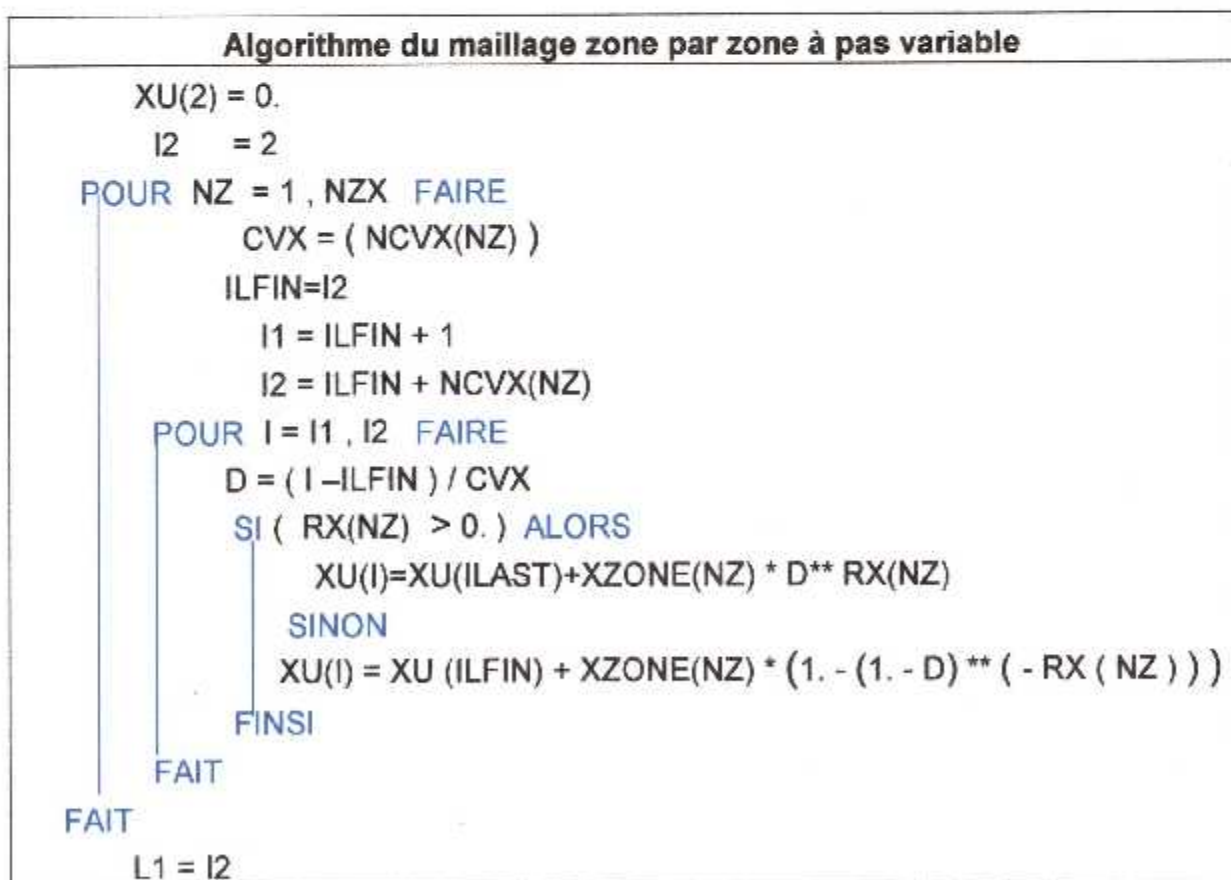
- Le nombre total des volumes de contrôles est :

$$L1 = \sum_{NZ=1}^{NZX} NCVX(NZ) + 2$$

- Les abscisses des volumes de contrôles (CV),  $I = 1, \dots, L1$  du maillage sont :

$$XU(I), I = 1, \dots, L1$$

L'algorithme de calcul est :



Maintenant, connaissant les  $XU(I)$ ,  $I = 1, \dots, L1$  des volumes de contrôles  $(CV)_I$ , il nous reste qu'à trouver les abscisses  $X(I)$ ,  $I = 1, \dots, L1$  des points  $P$  du maillage, ainsi que les distances  $XCV(I)$ ,  $I = 1, \dots, L1$  des  $(CV)_I$  en utilisant la relation suivante :

```

L2 = L1 - 1
L3 = L2 - 1
X(1) = XU(2)
POUR I = 2, L2 FAIRE
  X(I) = 0.5 * (XU(I+1) + XU(I))
  XCV(I) = XU(I+1) - XU(I)
FAIT
X(L1) = XU(L1)

```

- **Exemple : cas monodimensionnel**

Soit un domaine physique unidimensionnel, constitué de trois matériaux successives . Pour chaque zone, on définit sa longueur par  $XL(i)$  et le nombre de volumes de contrôles voulu par  $NCVX(i)$ , pour  $i = 1, 2, 3$  comme indiqué ci dessous :

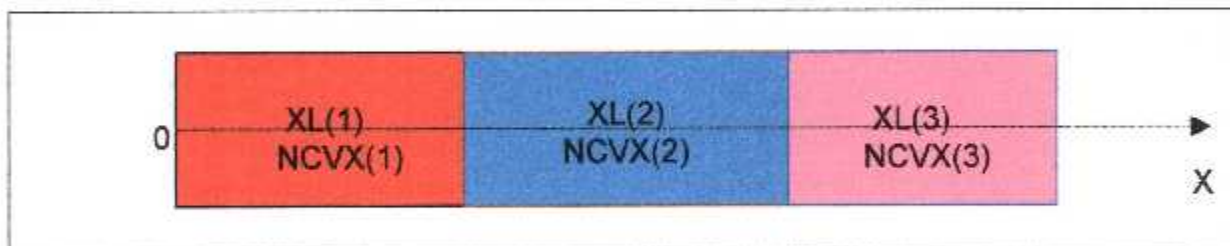


Fig III.7 Maillage uniforme par zone (1D)

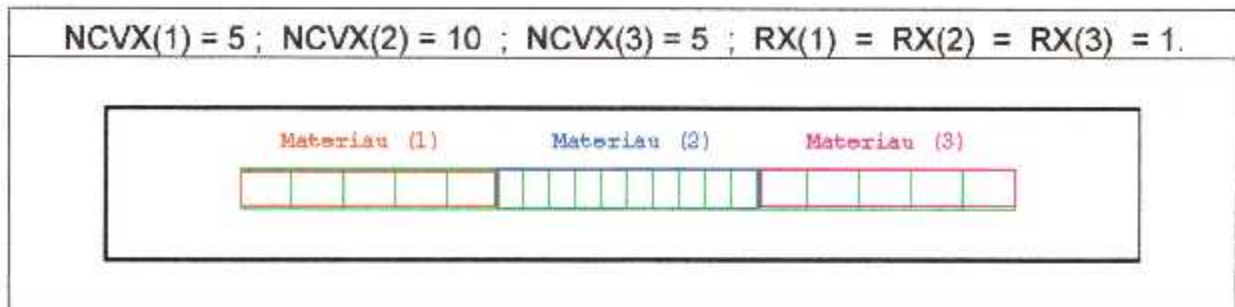
- Cas d'un maillage uniforme :

$NCVX(1) = 5$  ;  $NCVX(2) = 5$  ;  $NCVX(3) = 5$  ;  $RX(1) = RX(2) = RX(3) = 1$ .



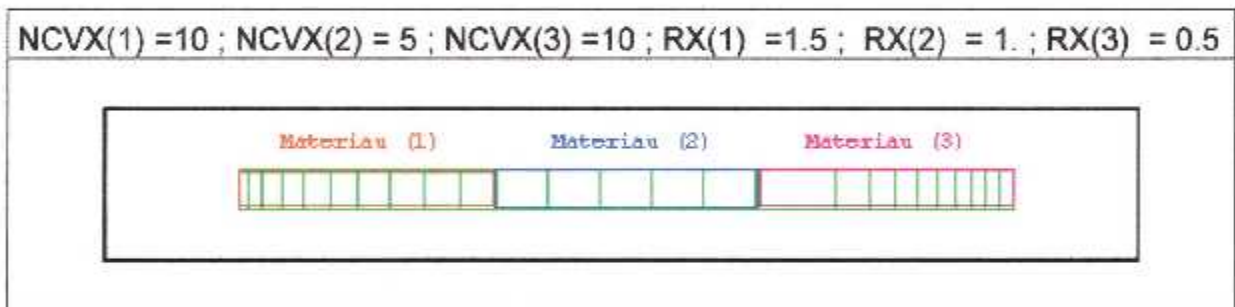
Fig III.8.a maillage uniforme

- Cas d'un maillage uniforme par zone :



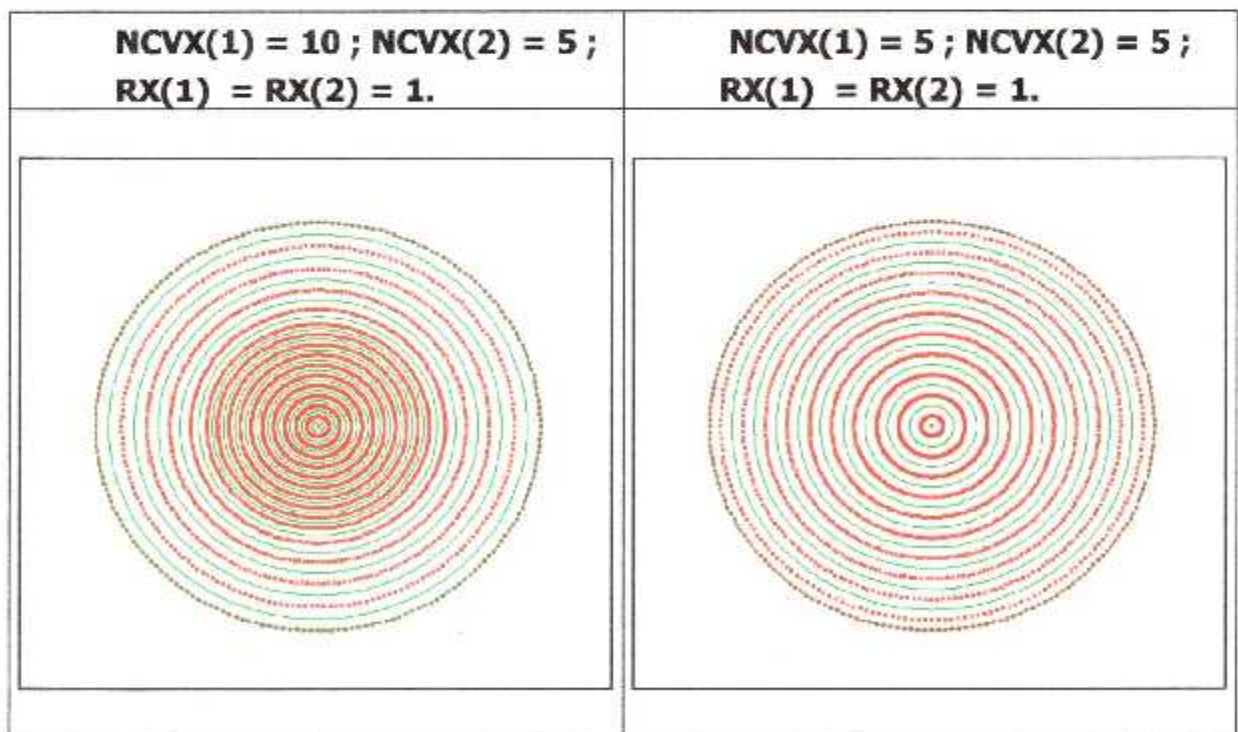
**Fig.III.8.b maillage uniforme par zone**

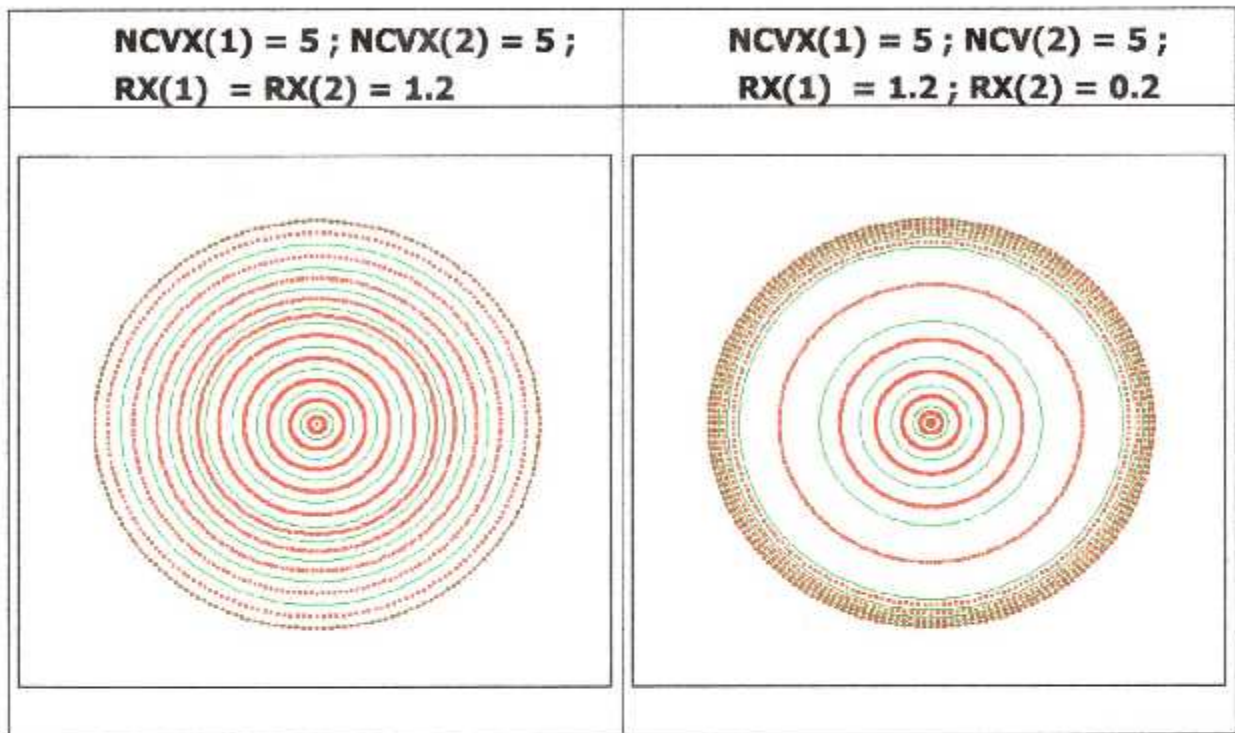
- Cas d'un maillage non uniforme :



**Fig.III.8.c maillage variable par zone**

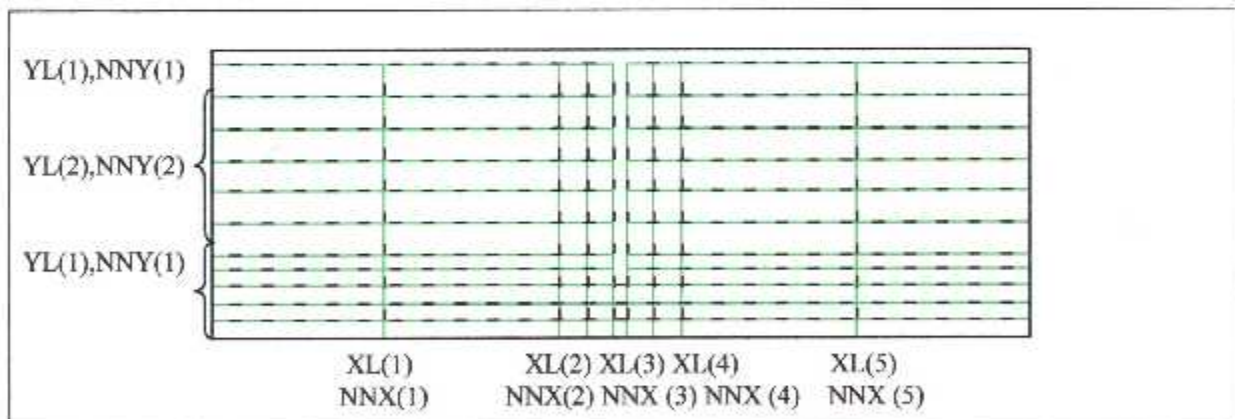
- Exemple : cas monodimensionnel sphérique :





**Fig.III.9 maillage variable par zone cas monodimensionnel sphérique**

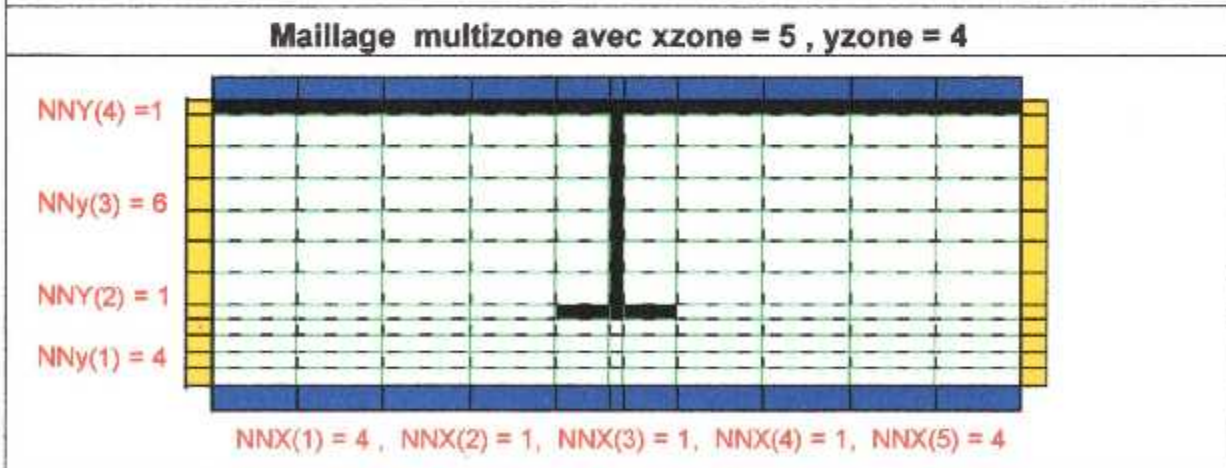
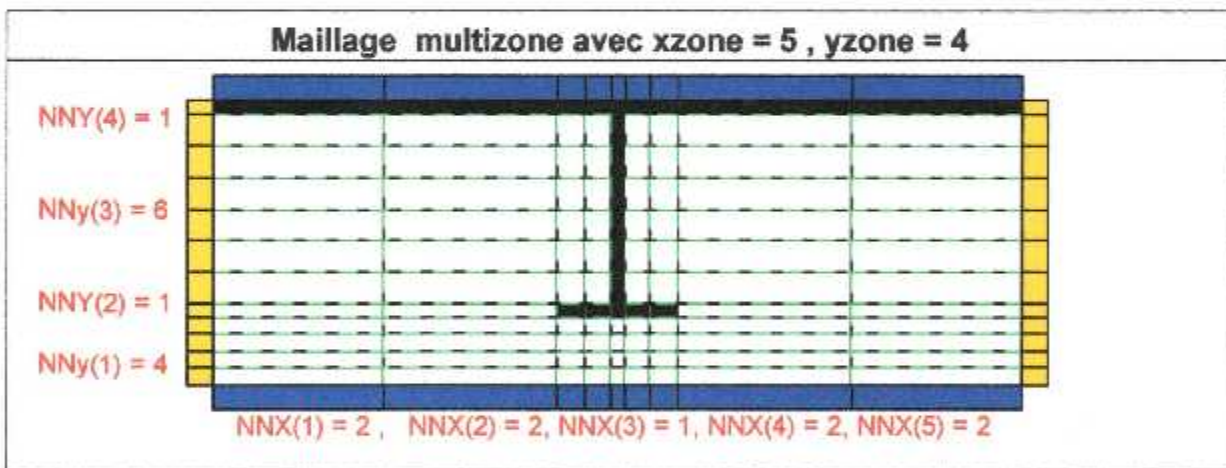
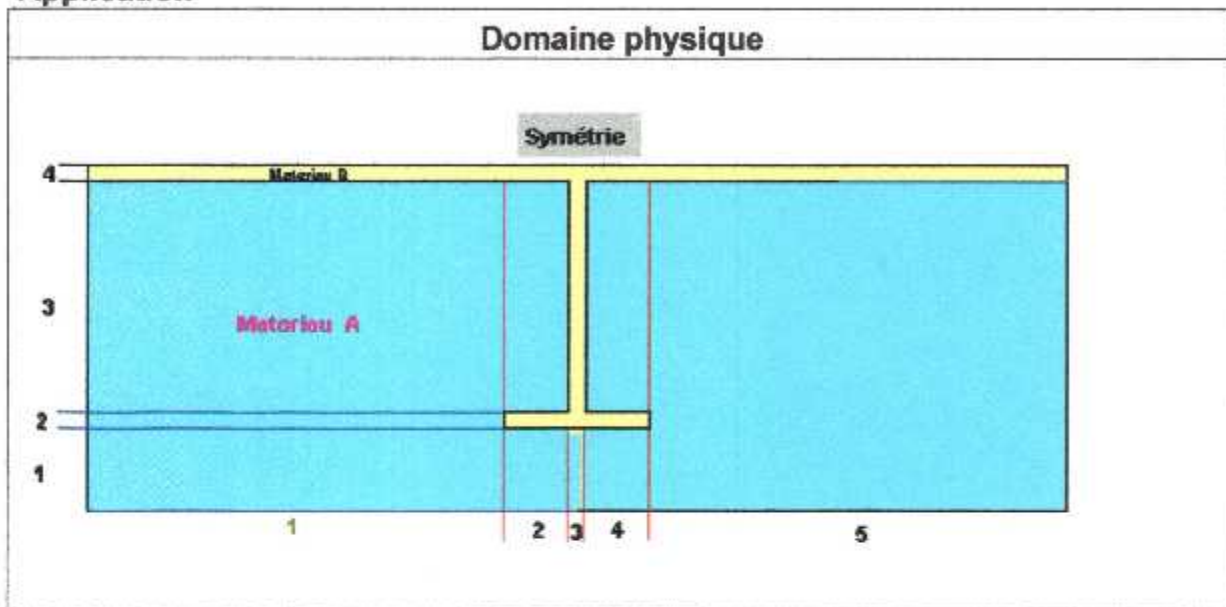
De la même manière qu'en monodimensionnel, le maillage zone par zone dans le cas bidimensionnel, sera défini par  $XL(I), NNX(I), I = 1, \dots, NI$  pour la direction (X'X) et par  $YL(J), NNY(J), J = 1, 2, \dots, NJ$  pour la direction Y'Y).



**Fig.III.10 Maillage uniforme par zone (2D)**

Dans la figure Fig. III.3.7 nous avons défini un domaine physique multi zone, nous allons définir pour chaque zone les paramètres  $XL(I), NNX(I), I = 1, \dots, NI$ , et  $YL(J), NNY(J), J = 1, \dots, NJ$

**Application**



**Fig. III.11 Maillage multizone cas 2 D cartésien**



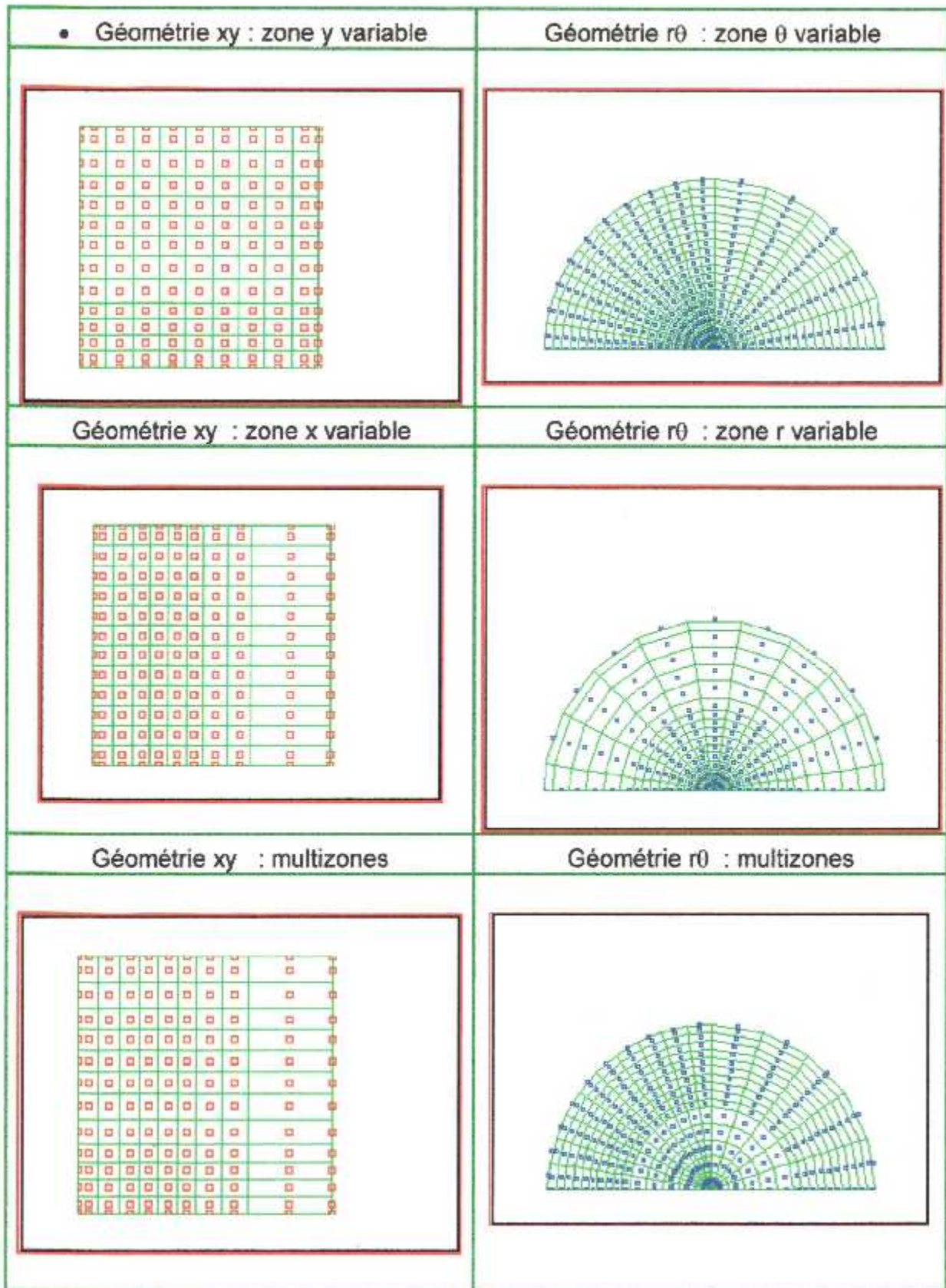


Fig. III.12 Maillage multizone géométrie xy et rθ

### III.4 Equation de la conduction 1D en régime stationnaire

#### III.4.1 Discrétisation de l'équation de la conduction

En régime permanent (1D), l'équation de la conduction s'écrit :

$$-\frac{\partial q}{\partial x} + S = 0 \quad (\text{III.4.1})$$

où le flux de chaleur  $q$  est donné par :

$$q = -k \frac{\partial T}{\partial x} \quad (\text{III.4.2})$$

avec :

- $k$  : la conductivité thermique.
- $T$  : la température
- $S$  : le terme source de chaleur volumique.

La méthode des volumes finis permet de remplacer cette équation différentielle par un système d'équations algébriques relativement simples à résoudre. Il faut intégrer cette équation à travers le volume de contrôle délimité par les interfaces Est 'e' et Ouest 'w'.

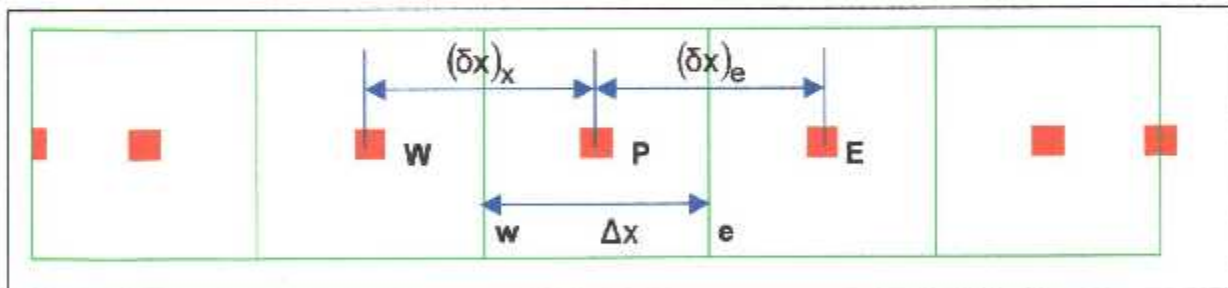


Fig. III.13 frontières du volume de contrôle

Nous avons pour un point P, en intégrant entre w et e :

$$\int_w^e \left( -\frac{\partial q}{\partial x} \right) dx + \int_w^e S dx = 0 \quad (\text{III.4.3})$$

on obtient :

$$(q_e) - (q_w) + \int_w^e S dx = 0 \quad (\text{III.4.4})$$

ou encore :

$$\left(k \frac{dT}{dx}\right)_e - \left(k \frac{dT}{dx}\right)_w + \int_w^e S dx = 0 \quad (\text{III.4.5})$$

Puisque  $\left(\frac{dT}{dx}\right)$  est le flux de chaleur local, l'équation (III.4.5) montre l'équilibre entre

le flux entrant par l'interface EST 'e' et sortant par l'interface OUEST 'w'.

Le gradient thermique aux interfaces w et e est calculé, en supposant que la température T varie linéairement entre W, P, E (fig. III.14).

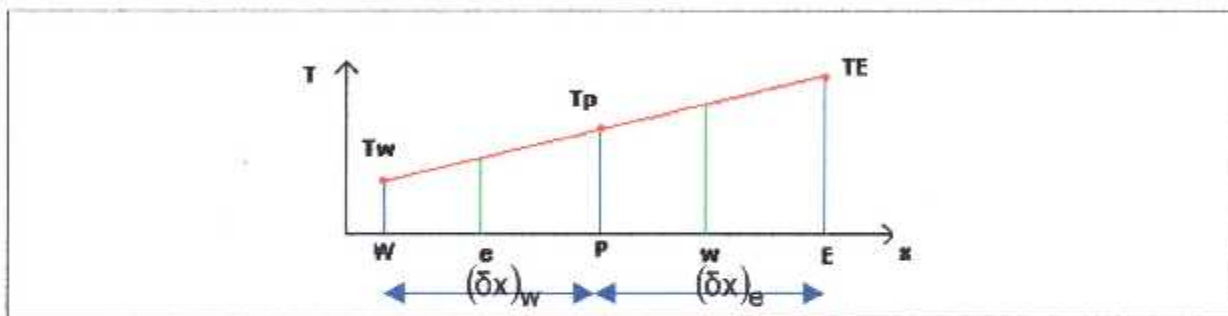


Fig. III.14 Profil linéaire de température

En utilisant ce profil, on obtient :

$$\left(\frac{dT}{dx}\right)_w = \frac{T_P - T_W}{(\delta x)_w} \quad (\text{III.4.6})$$

$$\left(\frac{dT}{dx}\right)_e = \frac{T_E - T_P}{(\delta x)_e} \quad (\text{III.4.7})$$

Les flux de chaleurs aux interfaces  $q_e$  et  $q_w$  s'écrivent :

$$q_w = \frac{k_w}{(\delta x)_w} (T_W - T_P) \quad (\text{III.4.8})$$

$$q_e = \frac{k_e}{(\delta x)_e} (T_P - T_E) \quad (\text{III.4.9})$$

Où  $k_w$  et  $k_e$  sont les conductivités aux niveaux des interfaces w et e.

Pour intégrer le terme source, on définit la valeur moyenne de  $S$  par  $\bar{S}$  :

Nous avons :

$$\int_w^e S dx = \bar{S} \Delta x \quad (\text{III.4.10})$$

on peut écrire  $\bar{S}$  par :

$$\bar{S} = S_C + S_P T \quad (\text{III.4.11})$$

Avec :

$S_C$  : partie constante de la linéarisation du terme source.

$S_P$  : coefficient de  $T_P$ , dans l'expression linéarisée du terme source.

Si nous remplaçons les équations (III.4.8), (III.4.9), (III.4.10) et (III.4.11) dans l'équation (III.4.4), on aura :

$$a_P = a_E + a_W + b \quad (\text{III.4.12})$$

Avec :

$$a_E = \frac{k_e}{(\delta x)_e} ; \quad a_W = \frac{k_e}{(\delta x)_e} ; \quad a_P = a_E + a_W - S_P \Delta x \quad ; \quad b = S_C \Delta x$$

Et d'une manière générale, l'équation discrétisée a la forme suivante :

$$a_P T_P = \sum a_{nb} T_{nb} + b \quad (\text{III.4.13})$$

Avec :

$T_P$  : représente la température du point considéré.

$T_{nb}$  : sont les températures des points avoisinants.

### Remarque

Dans le cas unidimensionnel, le nœud  $P$  est entouré par deux points voisins  $E$  à l'est,  $W$  à l'ouest, alors que dans le cas bidimensionnel, le point  $P$  est entouré par 4 points voisins :  $E$  à l'est,  $W$  à l'ouest,  $S$  au sud et  $N$  au nord.

### III.4.2 Calcul de la conductivité aux interfaces

La méthode des volumes finis repose sur le calcul des flux aux interfaces. On a donc besoin (quand le domaine est hétérogène) de déduire les conductivités aux points  $e$  et  $w$  à partir des conductivités aux noeuds  $E$ ,  $P$  et  $W$ .

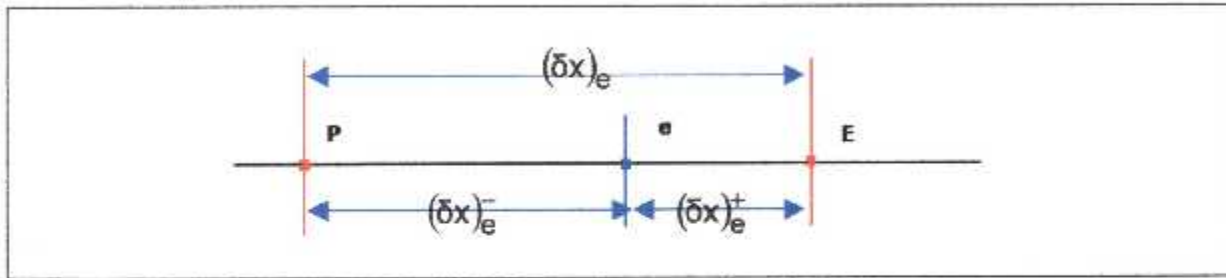


Fig.III.15 Interface  $e$  entre  $P$  et  $E$

Considérons l'interface  $e$ , les distances la séparant des points  $P$  et  $E$  sont respectivement  $(\delta x)_e^-$  et  $(\delta x)_e^+$  (fig.III.15).

Les distances  $(\delta x)_e^-$  et  $(\delta x)_e^+$  ne sont pas forcément égales, comme dans le cas du maillage non uniforme, la conductivité peut être calculée en supposant un comportement linéaire :

Avec :

$$K_e = f_e k_P + (1 - f_e) k_E$$

$$f_e = \frac{(\delta x)_e^-}{(\delta x)_e^+}$$

Pour un maillage régulier on retrouve la moyenne arithmétique:

$$k_e = \frac{k_P + k_E}{2}$$

On montre que ce choix n'est pas bon, on lui préfère la moyenne géométrique :

$$K_e = (\delta x)_e \frac{1}{\frac{(\delta x)_e^+}{k_E} + \frac{(\delta x)_e^-}{k_P}}$$

Oubien :

$$\frac{K_e}{(\delta x)_e} = \frac{1}{\frac{(\delta x)_e^+}{k_E} + \frac{(\delta x)_e^-}{k_P}} \quad (\text{III.4.14})$$

La relation (III.4.14) implique que pour chaque volume de contrôle, nous avons un profil de température linéaire avec des pentes différentes.

Le flux de chaleur est donné par :

$$q_e = \frac{K_e}{(\delta x)_e^-} (T_P - T_e) = \frac{K_E}{(\delta x)_e^+} (T_P - T_E) \quad (\text{III.4.15})$$

En éliminant  $T_e$ , on aura :

$$q_e = \left[ \frac{K_e}{(\delta x)_e^-} + \frac{K_E}{(\delta x)_e^+} \right]^{-1} (T_P - T_E) \quad (\text{III.4.16})$$

Donc :

$$a_E = \frac{k_e}{(\delta x)_e} = \left[ \frac{(\delta x)_e^-}{K_E} + \frac{(\delta x)_e^+}{K_P} \right]^{-1} \quad (\text{III.4.17})$$

De même :

$$a_w = \frac{k_w}{(\delta x)_w} = \left[ \frac{(\delta x)_w^-}{K_W} + \frac{(\delta x)_w^+}{K_P} \right]^{-1} \quad (\text{III.4.18})$$

Si le maillage est uniforme :

$$(\delta x)_e^- = (\delta x)_e^+ = 0.5 * (\delta x)_e$$

Nous aurons :

$$k_e = \frac{2k_P k_E}{k_P + k_E} \quad (\text{III.4.19})$$

### Remarques

La valeur de  $k_e$  évaluée par la relation (III.4.19) est meilleur que la moyenne arithmétique car :

- Si  $k_E$  tends vers 0, alors  $k_e$  tends aussi vers 0, cela donne donc un flux nul, alors que la formulation arithmétique n'aurait pas donnée un flux nul.
- Si  $k_P \gg \gg k_E$ , alors  $k_e$  tend vers  $2 k_E$ , donc la conductivité à l'interface ne dépend plus de  $k_P$ .

Lorsque  $k_P$  dépend de la température  $T$ , on doit suivre les étapes suivantes :

- a) Il faut donner les valeurs  $T^*$  estimées de  $T$ , en chaque point du maillage ( choix initial).
- b) De ces valeurs, déduire les différents coefficients des équations discrétisées.
- c) Résoudre les équations discrétisées pour avoir  $T$ ,
- d) Avec ces nouvelles valeurs, aller à l'étape b) et recommencer jusqu' à atteindre la convergence.

### **III.4.3 Linéarisation**

Les problèmes de conductions thermiques sont généralement nonlinéaires, la conductivité, la densité et la chaleur spécifique peuvent dépendre du domaine espace , être aussi des fonctions nonlinéaires de la température, pour cela il faut lineariser ces paramètres en suivant les étapes suivantes :

- a) Donner des valeurs estimées de  $T^*$  en chaque du maillage.
- b) Déduire les coefficients des équations algébriques.
- c) Résoudre le système algébrique pour avoir  $T$ .
- d) Avec ces nouvelles valeurs de  $T$ , aller à l' étape b) et recommencer jusqu'à ce que  $T$  ne varient plus.

Ces 4 règles facilitent la convergence.

#### **III.4.3.1 Traitement du terme source**

Quand le terme source dépend de la température, il faut linéariser  $S$  en utilisant la méthode de la tangente.

Soit  $T_p^*$  la valeur de  $T_p$  à l'itération précédente , alors la forme linéarisée de  $S$  s'écrit :

$$\bar{S} = S^* + \left( \frac{dS}{dT} \right)^* ( T_p - T_p^* ) \quad (\text{III.4.20})$$

la linéarisation de  $S$  est défini par l'équation (III.4.11) :

$$\bar{S} = S_C + S_C T_p \quad (\text{III.4.21})$$

Avec :

$$S_P = \left( \frac{dS}{dT} \right)^* \quad (\text{III.4.21.a})$$

et :

$$S_C = S^* - \left( \frac{dS}{dT} \right)^* T_P^* \quad (\text{III.4.21.b})$$

### Exemple 1

$$S = 5 - 4T$$

On a les choix suivants :

- Solution simple :  $S_c = 5$  et  $S_p = -4$
- Seul choix si  $S$  est compliquée :  $S_c = 5 - 4T_P^*$  et  $S_p = 0$
- Choix ralentissant la convergence :  $S_c = 5 + 7T_P^*$  et  $S_p = -11$

### Exemple 2

Soit  $S = 3 + 7T$ , alors les choix possibles sont :

- $S_c = 3$  et  $S_p = 7$  Choix dangereux car  $S_p > 0$  (divergence).
- $S_c = 3 + 7T_P^*$  et  $S_p = 0$  Choix possible pour éviter d'avoir  $S_p > 0$ .
- $S_c = 3 + 9T_P^*$  et  $S_p = -2$  Choix ralentissant la convergence.

### Exemple 3

Soit  $S = 4 - 5T^3$ , alors les choix possibles sont :

- $S_c = 4 - 5T_P^{*3}$  et  $S_p = 0$  Choix simple.
- $S_c = 4$  et  $S_p = -5T_P^{*3}$  Choix possible.

Le choix recommandé est donné par l'équation (III.4.21) :

$$\bar{S} = S^* + \left( \frac{dS}{dT} \right)^* (T_P - T_P^*)$$

On a alors :

$$\bar{S} = 4 - 5T_P^{*3} - 15T_P^{*3}(T_P - T_P^*)$$



### III.4.3.2 Traitement des Conditions limites dans la pratique A

Soit B le point limite du bord OUEST du domaine dans le cas 1 D.

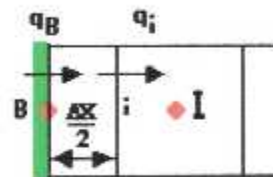


Fig.III.16 Condition limite Type A

Trois types de conditions limites peuvent se présenter :

- La température  $T_B$  est imposée au bord B .
- Le flux de chaleur  $q_B$  a une valeur constant donnée.
- Le flux de chaleur est données à travers un coefficient de transfert.

Dans les cas b) et c), il faut trouver une équation supplémentaire qui permet de trouver la température  $T_B$ .

En intégrant suivant le volume de contrôle CV adjacent au bord, on a :

$$q_B = q_i + (S_C + S_P T_B) \Delta x$$

(III.4.22)

$$q_i = k_l \frac{T_B - T_I}{(\delta x)_l}$$

(III.4.23)

Donc:

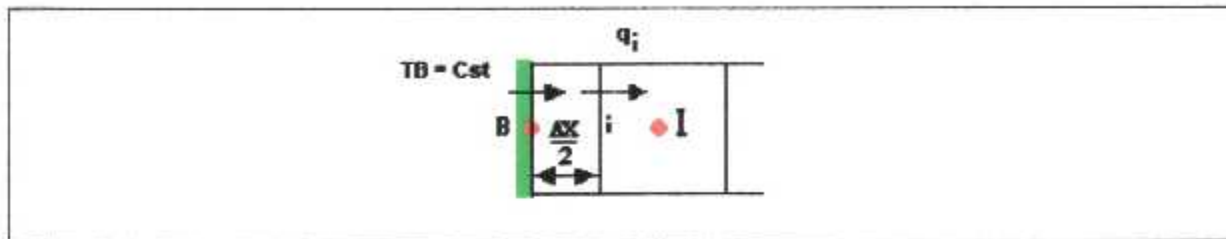
$$k_l \frac{T_B - T_I}{(\delta x)_l} + (S_C + S_P T_B) \Delta x = 0$$

(III.4.24)

Il reste à connaître comment le flux  $q_B$  est donné.

- Flux constant :**

$q_B = \text{cst}$ , l'équation qui donne  $T_B$  s'écrit :



**Fig.III.17 Condition limite avec température imposée**

$$a_B T_B = a_I T_I + b \quad (\text{III.4.25})$$

$$a_I = \frac{k_I}{(\delta x)_I} \quad (\text{III.4.26})$$

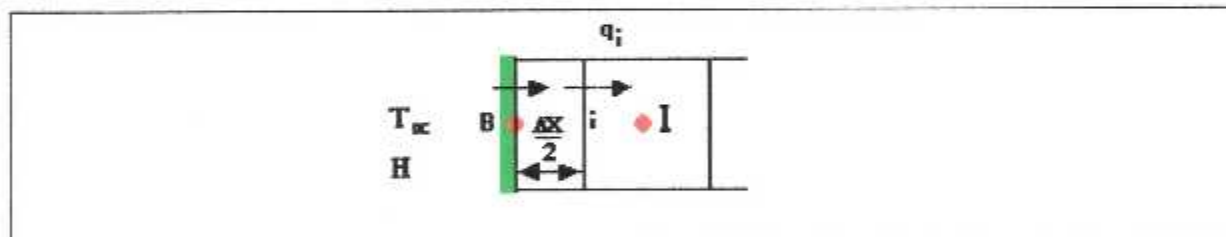
$$b = S_C \Delta x + q_B \quad (\text{III.4.27})$$

$$a_B = a_I + S_B \Delta x \quad (\text{III.4.28})$$

- Convection :

Dans le cas de la convection au bord,  $q_B$  est défini par :

$$q_B = H(T_\infty - T_B) \quad (\text{III.4.29})$$



**fig. III.18 Condition limite avec convection**

En utilisant l'équation (III.4.25) :

$$a_B T_B = a_I T_I + b$$

on trouve :

$$a_I = \frac{k_I}{(\delta x)_I} \quad (\text{III.4.30})$$

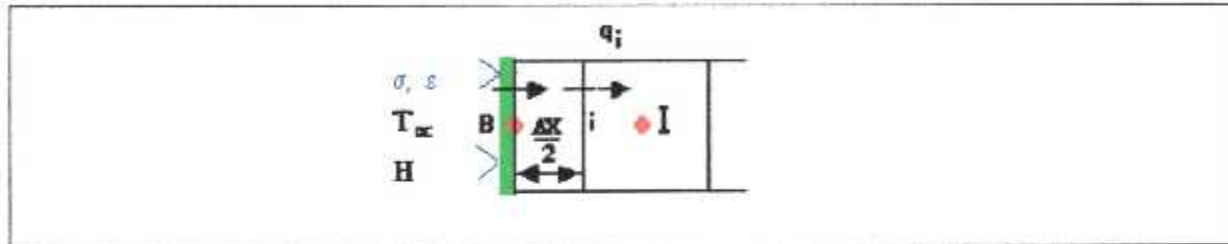
$$b = S_C \Delta x + H T_\infty \quad (\text{III.4.31})$$

$$a_B = a_I + S_B \Delta x + h_\infty \quad (\text{III.4.32})$$

• **Convection et rayonnement :**

Dans le cas de la convection et rayonnement au bord, on définit  $q_B$  par :

$$q_B = H(T_\infty - T_B) + \varepsilon\sigma(T_\infty^4 - T_B^4) \quad (\text{III.4.33})$$



**Fig. III.19 Condition limite avec convection et rayonnement**

La linéarisation de  $q_B$  donne :

$$q_B = q_B^* + \left(\frac{dq_B}{dT}\right)^* (T_\infty - T_B^*) \quad (\text{III.4.34})$$

$$q_B^* = H(T_\infty - T_B^*) + \varepsilon\sigma(T_\infty^4 - T_B^{*4}) \quad (\text{III.4.35})$$

$$\left(\frac{dq_B}{dT}\right)^* = -H + \varepsilon\sigma(-4T_B^{*3}) = -(H + 4\varepsilon\sigma T_B^{*3}) \quad (\text{III.4.36})$$

La forme linéarisée de  $q_B$  devient :

$$q_B = (H(T_\infty - T_B^*) + \varepsilon\sigma T_\infty^4 - \varepsilon\sigma T_B^{*4}) + (H + 4\varepsilon\sigma T_B^{*3})T_B \quad (\text{III.4.37})$$

Le bilan d'énergie equation (III.4.22) donne :

$$q_B - q_l T_B + q_l T_i + Sc \Delta x + Sp T_B \Delta x = 0 \quad (\text{III.4.38})$$

$$-(Sp \Delta x + H + 4\varepsilon\sigma T_B^{*3}) + q_l) T_B = q_l T_B + b \quad (\text{III.4.39})$$

Les coefficients  $a_l$ ,  $b$  et  $a_B$  de l'équation (III.4.25) deviennent :

$$a_l = \frac{k_l}{(\delta x)} \quad (\text{III.4.40})$$

$$b = S \Delta x + H(T_\infty - T_B^*) + \varepsilon\sigma T_\infty^4 - \varepsilon\sigma T_B^{*4} \quad (\text{III.4.41})$$

$$a_B = a_l - (Sp \Delta x + H + \varepsilon\sigma T_\infty^4) + b \quad (\text{III.4.42})$$

### III.4.3.3 Traitement des conditions limites dans la pratique B

Dans la pratique B, les volumes de contrôles aux limites sont nuls, il faut alors approcher le flux  $q_B$  par un développement de Taylor à l'ordre 2.

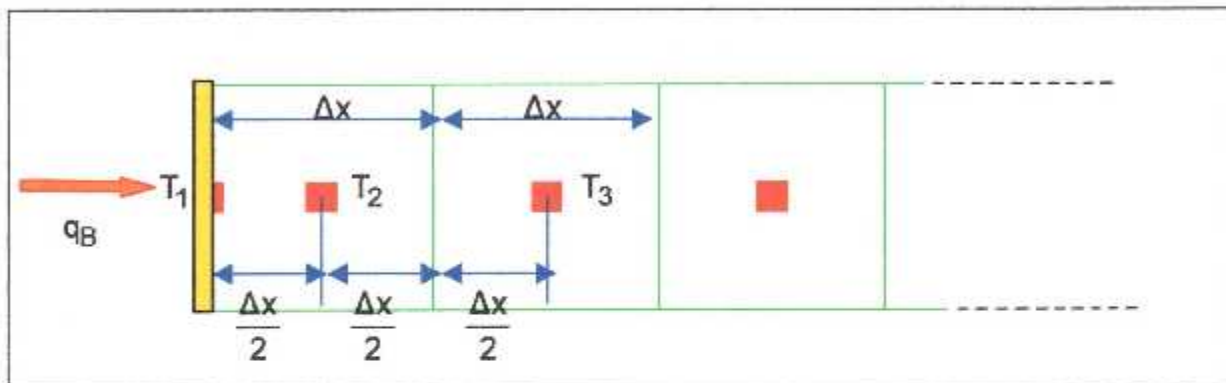


Fig. III.20 Flux du second ordre pour la pratique B

Soit  $T_1$  la température du bord à l'OUEST,  $T_2$  et  $T_3$  les températures des nœuds internes 2 et 3 respectivement,  $q_B$  le flux de chaleur appliqué au bord, les volumes de contrôles internes ont une épaisseur  $\Delta x$  uniforme.

L'approximation de  $T_2$  à l'ordre 2 donne :

$$T_2 = T_1 - \left(\frac{\partial T}{\partial x}\right)_1 \frac{\Delta x}{2} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}\right)_1 \left(\frac{\Delta x}{2}\right)^2 + \dots \quad (\text{III.4.43})$$

De même l'approximation de  $T_3$  à l'ordre 2 donne :

$$T_3 = T_1 - \left(\frac{\partial T}{\partial x}\right)_1 \frac{3\Delta x}{2} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}\right)_1 \left(\frac{3\Delta x}{2}\right)^2 + \dots \quad (\text{III.4.44})$$

Dans ce cas, l'approximation du flux  $q_B$  à l'ordre 2 est :

$$q_B = \left(-k \frac{dT}{dx}\right)_1 = k \frac{8T_1 - 9T_2 + T_3}{3\Delta x} \quad (\text{III.4.45})$$

Recherchons les valeurs de  $q_B$  et  $T_B$  dans les cas suivants :

- **Température constante au bord ( type Dirichlet ) :**

Si la température est imposée au bord, (condition limite type Dirichlet),  $T_1$  est connue, alors :

$$q_B = k \frac{8T_1 - 9T_2 + T_3}{3\Delta x} \quad (\text{III.4.46})$$

- **Condition de symétrie ou adiabatique ( type Newman ) :**

Dans le cas de la symétrie du problème ,  $q_B$  est nul , alors :

$$q_B = k \left( \frac{\partial T}{\partial x} \right)_{x=1} = 0. \quad (\text{III.4.47})$$

Alors la valeur de  $T_B$  est donnée par :

$$T_B = \frac{1}{8}(9T_2 - T_3) \quad (\text{III.4.48})$$

- **Le flux constant :**

Si le flux est constant , c'est à dire :

$$q_B = \text{Const}$$

Alors la température au bord est :

$$T_B = \frac{1}{8} \left( \frac{3(\Delta x)q_B}{k} + 9T_2 - T_3 \right) \quad (\text{III.4.49})$$

- **Le flux est une fonction non linéaire de  $T_1$  :**

Ecrivons  $q_B$  sous la forme linéaire suivante :

$$q_B = f_C + f_P T_B \quad (\text{III.4.50})$$

Où :  $f_C$  et  $f_P$  sont des constantes.

L'équation (III.4.45) devient :

$$f_C + f_P T_B = k \frac{8T_1 - 9T_2 + T_3}{3\Delta x} \quad (\text{III.4.51})$$

La valeur de  $T_B$  est alors :

$$T_B = \frac{f_C \frac{3\Delta x}{k} + 9T_2 - T_3}{8 - F_P \frac{3\Delta x}{k}} \quad (\text{III.4.52})$$

et finalement :

$$q_B = f_C + f_P T_B = f_C + f_P \left[ \frac{f_C \frac{3\Delta x}{k} + 9T_2 - T_3}{8 - F_P \frac{3\Delta x}{k}} \right] \quad (\text{III.4.53})$$

Dans le cas de la convection avec la température externe  $T_\infty$  et le coefficient de convection  $H$ , les valeurs de  $f_C$  et  $f_P$  sont :

$$q_B = H(T_\infty - T_1) \quad (\text{III.4.54})$$

En identifiant les équations (III.4.50) et (III.4.54), on trouve :

$$f_C = H * T_\infty \quad (\text{III.4.54.a})$$

Et :

$$f_P = -H \quad (\text{III.4.54.a})$$

Dans le cas du rayonnement, avec la température externe  $T_\infty$ , constante de Stephan – Boltzman  $\sigma$  et d'émissivité  $\varepsilon$ , les valeurs de  $f_C$  et  $f_P$  sont :

$$q_B = \sigma\varepsilon(T_\infty^4 - T_1^4) \quad (\text{III.4.55})$$

La forme linéarisée de  $q_B$  est :

$$q_B = \left( \sigma\varepsilon(T_\infty^4 - T_1^{*4}) + 4\sigma\varepsilon T_1^{*4} \right) + \left( -4\sigma\varepsilon T_1^{*3} \right) T_1 \quad (\text{III.4.56})$$

Avec  $T_1^*$  la valeur de  $T_1$  à l'itération précédente .

De l'équation (III.4.56), on a :

$$f_C = \sigma\varepsilon(T_\infty^4 - T_1^{*4}) + 4\sigma\varepsilon T_1^{*4} \quad (\text{III.4.56.a})$$

$$f_P = -4\sigma\varepsilon T_1^{*3} \quad (\text{III.4.56.b})$$

### III.5 Les méthodes sousrelaxation et surrelaxation

Dans les problèmes nonlinéaires, il est utile d'accélérer ou de ralentir le procédé itératif. Alors que la surrelaxation est utilisée pour accélérer la convergence dans la méthode Gauss- Seidel, la sousrelaxation évite la divergence quand les équations sont fortement nonlinéaires.

Pour la forme général :

$$a_p T_p = a_{nb} T_{nb} + b \quad (\text{III.5.1})$$

Soit :  $T_p^*$  la valeur de  $T_p$  à l'itération précédente :

$$T_p = \frac{a_{nb} T_{nb} + b}{a_p} \quad (\text{III.5.2})$$

Alors, on écrit :

$$T_p = T_p + \left( \frac{a_{nb} T_{nb} + b}{a_p} T_p \right) \quad (\text{III.5.3})$$

Soit  $\omega$  un coefficient de relaxation (  $0 < \omega < 1$  ).

Alors :

$$T_p = T_p + \omega \left( \frac{a_{nb} T_{nb} + b}{a_p} T_p \right) \quad (\text{III.5.4})$$

Ou bien :

$$\frac{a_p}{\omega} T_p = (1-\omega) \frac{a_p}{\omega} T_p + b + a_{nb} T_{nb} \quad (\text{III.5.5})$$

- Si  $0 < \omega < 1$  : c'est la sousrelaxation,  $T_p$  est plus proche de  $T_p^*$ .
- Si  $\omega > 1$  : c'est la surrelaxation.

Si la conductivité, densité et capacité sont des fonctions de la température, on peut les relaxer, c'est à dire :

$$k(T_p) = k(T_p) + (1-\omega) * k(T_p^*) \quad (\text{III.5.6})$$

$$\rho(T_p) = \rho(T_p) + (1-\omega) * \rho(T_p^*) \quad (\text{III.5.7})$$

$$C_p(T_p) = C_p(T_p) + (1-\omega) * C_p(T_p^*) \quad (\text{III.5.8})$$

#### Remarques :

- Seul l'expérience peut nous aider a choisir  $\omega$ .
- On peut changer  $\omega$  pendant les itérations.

### III.6 L'algorithme TDMA

Soit à résoudre le système tridiagonal à  $N + 1$  équations suivant:

$$a_i T_{i-1} + b_i T_i + c_i T_{i+1} = d_i \quad (\text{III.6.1})$$

Où les coefficients  $a_i, b_i, c_i, d_i$  correspondent à  $a_P, a_E, a_W, b$ , en supposant que les températures des extrémités sont connues :  $T_0 = T_A$  et  $T_{N+1} = T_B$ .

Une méthode de résolution, appelée algorithme de la matrice tridiagonale, ou algorithme TDMA, consiste à rechercher une relation de récurrence de la forme:

$$T_{i-1} = e_i T_i + f_i \quad (\text{III.6.2})$$

En reportant cette relation dans (III.6.1), il vient alors:

$$(a_i e_i + b_i) T_i + c_i T_{i+1} = d_i - a_i f_i \quad (\text{III.6.3})$$

d'où on tire:

$$T_i = \frac{-c_i T_{i+1} + d_i - a_i f_i}{a_i e_i + b_i} \quad (\text{III.6.4})$$

Mais la récurrence (III.6.2) s'écrira aux rangs  $i, i+1$ :

$$T_i = e_{i+1} T_{i+1} + f_{i+1} \quad (\text{III.6.5})$$

En identifiant les relations (III.6.5) et (III.6.4), on obtient les deux récurrences suivantes, pour les coefficients  $e$  et  $f$ :

$$\begin{aligned} e_{i+1} &= \frac{-c_i}{a_i e_i + b_i} \\ f_{i+1} &= \frac{d_i - a_i f_i}{a_i e_i + b_i} \end{aligned} \quad (\text{III.6.6})$$

Ceci signifie que si on connaît les coefficients  $e_i$  et  $f_i$  au rang  $i$ , on peut calculer ceux au rang suivant  $i+1$  à l'aide de ces 2 relations (III.6.6). Il suffit donc de connaître les valeurs initiales de  $e_i$  et  $f_i$  pour en déduire toutes les autres valeurs.



Ces valeurs initiales sont données par la première équation à résoudre ( $i = 1$ ). Cette relation s'écrit en effet :

$$a_1 T_0 + b_1 T_1 + c_1 T_2 = d_1$$

où la valeur  $T_0$  est connue et égale à  $T_A$ . On a donc :

$$T_1 = \frac{-c_1}{b_1} T_2 + \frac{d_1 - a_1 T_A}{b_1} \quad (\text{III.6.7})$$

relation qui n'est autre que (III.6.2) pour  $i = 2$  :

$$T_1 = e_2 T_2 + f_2 \quad (\text{III.6.8})$$

En rapprochant ces 2 relations, on obtient les valeurs initiales  $e_2$  et  $f_2$  de  $e_i$  et  $f_i$  permettant de calculer les valeurs de tous les autres  $e_i$  et  $f_i$  à partir de la relation (III.6.6) :

$$e_2 = \frac{-c_1}{b_1} \quad (\text{III.6.9})$$

$$f_2 = \frac{d_1 - a_1 T_A}{b_1}$$

Une fois que l'on connaît toutes les valeurs de  $e_i$  et  $f_i$ , la relation :

$$T_{i-1} = e_i T_i + f_i \quad (\text{III.6.10})$$

permet d'obtenir les solutions cherchées  $T_i$ .

Pour ce faire, on partira de la température  $T_B$  connue, qui correspond au nœud d'indice  $N+1$ . Il faudra donc calculer les valeurs des  $e_i$  et  $f_i$  jusqu'au rang  $i = N+1$ .

Mais cette dernière équation du système linéaire, correspondant à l'indice  $N$  dans la forme linéaire générale :

$$a_i T_{i-1} + b_i T_i + c_i T_{i+1} = d_i \quad (\text{III.6.11})$$

a une forme particulière :

$$a_N T_{N-1} + b_N T_N + 0 = d_N, \quad (c_N = 0) \quad (\text{III.6.12})$$

La récurrence:

$$e_{i+1} = \frac{-c_i}{a_i e_i + b_i} \quad (III.6.13)$$

$$f_{i+1} = \frac{d_i - a_i f_i}{a_i e_i + b_i}$$

impose donc:

$$e_{N+1} = 0 \quad (III.6.14)$$

$$f_{N+1} = \frac{d_N - a_N f_N}{a_N e_N + b_N}$$

ce qui signifie que la condition de température imposée à l'extrémité, détermine la température au dernier nœud interne  $i = N$ , de la manière suivante:

$$T_N = e_{N+1} T_{N+1} + f_{N+1} = 0 \cdot T_{N+1} + f_{N+1} = f_{N+1} \quad (III.6.15)$$

Quant aux températures aux autres nœuds internes, elles sont calculées successivement à partir de  $T_N$ , à l'aide de la récurrence (III.6.6) :

$$T_{i-1} = e_i T_i + f_i \quad (III.6.16)$$

### ALGORITHME TDMA ( THOMAS )

```

BET = B(1)
T(1) = D(1) / BET
FORWARD SUBSTITUTION
  POUR J = 2 , N FAIRE
    GAM(J) = C (J-1) / BET
    BET = B(J) - A(J) * GAM(J)
    T(J) = ( D(J) - A(J) * T(J-1) ) / BET
  FAIT
BACKSUBSTITUTION :
  POUR J = N - 1 , 1 , -1
    T(J) = T(J) - GAM(J+1) * T(J+1)
  FAIT

```

### III.7 Régime instationnaire

#### III.7.1 Cas unidimensionnel

Considérons à présent l'équation de conduction unidimensionnel :

$$\rho c_p \frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left( k \frac{\partial T}{\partial x} \right) + S \quad (\text{III.7.1})$$

Sur un domaine unidimensionnel discrétisé de façon cartésienne, les volumes finis de surface  $\Delta x^*1$ . Le point P a 2 voisins : E, W.

Une intégration en espace et dans le temps donne :

$$\int_{t^k}^{t^{k+1}} \int_s^n \left( \rho c_p \frac{\partial T}{\partial t} \right) dx dt = \int_{t^k}^{t^{k+1}} \int_w^e \frac{\partial}{\partial x} \left( k \frac{\partial T}{\partial x} \right) dx dt + \int_{t^k}^{t^{k+1}} \int_w^e S dx dt \quad (\text{III.7.2})$$

où S est la surface du volume de contrôle considéré.

On a donc :

$$\int_{t^k}^{t^{k+1}} \int_s^n \left( \rho c_p \frac{\partial T}{\partial t} \right) dx dt = \int_{t^k}^{t^{k+1}} \left[ \left( k_e \frac{\partial T}{\partial x} \right)_e - \left( k_w \frac{\partial T}{\partial x} \right)_w \right] dt + \int_{t^k}^{t^{k+1}} \int_w^e S dx dt \quad (\text{III.7.3})$$

On obtient finalement :

$$a_P T_P = a_E T_E + a_W T_W + b \quad (\text{III.7.4})$$

$$\left( \frac{\delta T}{\delta x} \right)_e = \frac{T_E - T_P}{(\delta x)_e} \quad (\text{III.7.5})$$

et :

$$\left( \frac{\delta T}{\delta x} \right)_w = \frac{T_P - T_W}{(\delta x)_w} \quad (\text{III.7.6})$$

Avec:

$$a_E = \frac{k_e}{(\delta x)_e} \quad ; \quad a_W = \frac{k_w}{(\delta x)_w} \quad (\text{III.7.7})$$

$$a_P = a_E + a_W + \frac{\rho \Delta x}{\Delta t} \quad (\text{III.7.8})$$

$$b = \bar{S} \Delta x \Delta y + \frac{\rho \Delta x}{\Delta t} T_P^0 \quad (\text{III.7.9})$$

**III.7.2 Cas bidimensionnel cartésien**

Considérons à présent l'équation de la conduction bidimensionnelle :

$$\rho c_p \frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left( k \frac{\partial T}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( k \frac{\partial T}{\partial y} \right) + S \tag{III.7.10}$$

Sur un domaine bidimensionnel discrétisé de façon cartésienne, les volumes finis de surface  $\Delta x \Delta y$ .

Le point P a maintenant 4 voisins : E,W,N,S.

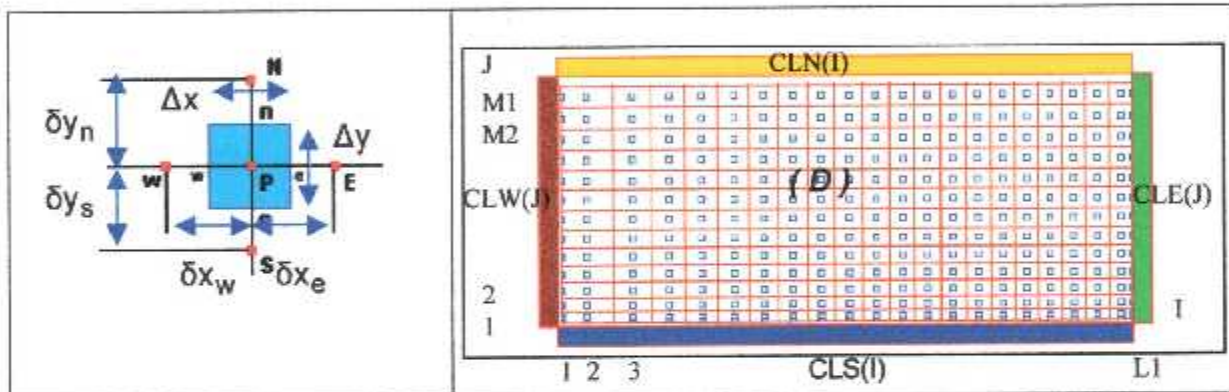


Fig. III.21.a Volume de contrôle

Fig. III.21.b Le domaine (XY)

Une intégration en espace et dans le temps donne :

$$\int_{t^k}^{t^{k+1}} \int_{ws}^{en} \left( \rho c_p \frac{\partial T}{\partial t} \right) dx dy dt = \int_{t^k}^{t^{k+1}} \int_{ws}^{en} \left( k \frac{\partial T}{\partial x} \right) dx dy dt + \int_{t^k}^{t^{k+1}} \int_{ws}^{en} \left( k \frac{\partial T}{\partial y} \right) dy dx dt + \int_{t^k}^{t^{k+1}} \int_{ws}^{en} S dx dy dt \tag{III.7.11}$$

On a donc :

$$\int_{t^k}^{t^{k+1}} \int_{ws}^{en} \left( \rho c_p \frac{\partial T}{\partial t} \right) dx dy dt = \int_{t^k}^{t^{k+1}} \left\{ \left[ \left( k_e \frac{\partial T}{\partial x} \right)_e - \left( k_w \frac{\partial T}{\partial x} \right)_w \right] \Delta y + \left[ \left( k_n \frac{\partial T}{\partial y} \right)_n - \left( k_s \frac{\partial T}{\partial y} \right)_s \right] \Delta x \right\} dt + \int_{t^k}^{t^{k+1}} \int_{ws}^{en} S dx dy dt \tag{III.7.12}$$

On obtient finalement dans le cas du schéma implicite ( $\beta = 1$ ) :

$$a_P T_P = a_E T_E + a_W T_W + a_N T_N + a_S T_S + b \tag{III.7.13}$$

$$\left(\frac{\delta T}{\delta x}\right)_e = \frac{T_E - T_P}{(\delta x)_e}; \quad \left(\frac{\delta T}{\delta x}\right)_w = \frac{T_P - T_W}{(\delta x)_w}; \quad (III.7.14)$$

et

$$\left(\frac{\delta T}{\delta y}\right)_n = \frac{T_N - T_P}{(\delta y)_n}; \quad \left(\frac{\delta T}{\delta y}\right)_p = \frac{T_P - T_S}{(\delta y)_p} \quad (III.7.15)$$

Avec

$$a_E = \frac{k_e \Delta y}{(\delta x)_e} \quad (III.7.16.a)$$

$$a_W = \frac{k_w \Delta y}{(\delta x)_w} \quad (III.7.16.b)$$

$$a_N = \frac{k_n \Delta x}{(\delta x)_n} \quad (III.7.16.c)$$

$$a_S = \frac{k_s \Delta x}{(\delta x)_s} \quad (III.7.16.d)$$

Si  $S = S_C + S_P T$ Alors  $a_P = a_E + a_W + a_N + a_S - S_P \Delta x \Delta y + \frac{\rho \Delta x \Delta y}{\Delta t} T_P^0$  (III.7.17)

$$b = S_C \Delta x \Delta y + \frac{\rho \Delta x \Delta y}{\Delta t} T_P^0 \quad (III.7.18)$$

En utilisant les équations (III.7.13) à (III.7.18), nous allons dans la suite donner deux algorithmes qui permettent de traiter le cas bidimensionnel dans le cas général, l'un étudiant les points intérieurs du domaine et l'autre traitant les conditions aux limites : à l'Ouest, à l'est, au nord et au sud.

Soit un domaine (D) (Figure.7.1. b), constitué de L2 volumes de contrôles suivant X et de M2 volumes de contrôles suivant la direction Y. Le nombre de volumes de contrôles du domaine (D) est alors égale L2 \* M2, ayant les volumes XCV(I)\*YCV(J) \* 1, avec I = 1, L2 et J = 1, M2.

Le nombre des nœuds suivant la direction est L1 = L2 + 1, de la même le nombre des nœuds dans la direction Y est M1 = M2 + 1, le nombre total du domaine est alors égale à L1 \* L2.

Nous désignons par :

- AE(L1,M1) AW(L1,M1), AN(L1,M1) AS(L1,M1), AP(L1,M1) : les vecteurs des coefficients de diffusion  $a_E, a_W, a_N, a_S, a_P$  équations (III.7.16.a) (III.7.16.b) (III.7.16.c) (III.7.16.d) (III.7.17).

- $b(L1,M1)$  : le vecteur des termes constants  $b$  (III.7.17).
- $SP(L1,M1)$ ,  $SC(L1,M1)$  : les termes sources  $S_p$  et  $S_C$  (III.7.17) et (III.7.18) .
- $K(L1,M1)$ ,  $RHOCP(L1,M1)$  : les vecteurs des conductivites et des  $\rho * Cp$  .
- $T^*(L1,M1)$ ,  $T^0(L1,M1)$  : les vecteur des températures à l'itération précédente et des températures au temps précédent .
- $\Delta t$  : le pas de temps.
- $FCS(L1)$ ,  $FCN(L1)$ ,  $FCE(M1)$ ,  $FCW(M1)$ ,  $FCS(L1)$ ,  $FCN(L1)$ ,  $FCE(M1)$ ,  $FCW(M1)$  : Les coefficients des termes du flux de chaleur imposé aux limites.
- $CLS(L1)$ ,  $CLN(L1)$ ,  $CLW(L1)$ ,  $CLE(L1)$  : le type des conditions limites, ils prennent la valeur 1 pour le type Dirichlet et 2 pour les autres types .

#### Algorithme des coefficients $a_E, a_p, a_W, a_N, a_S$ et $b$ des nœuds internes

**CALCUL DES TERMES SOURCES DANS  $a_p$  et  $b$  :** (III.7.17) , (III.7.18)

```

POUR J = 2 , M2 FAIRE
  POUR I = 2 , L2 FAIRE
    VOL = YCV(J) * XCV(I)
    APT = RHOCP(I,J) / DT
    b(I,J) = ( SC(I,J) + APT * T0(I,J) ) * VOL
    AP(I,J) = ( APT - SP(I,J) ) * VOL
  FAIT
FAIT

```

**CALCUL DES COEFFICIENTS DIRECTION X  $a_W$  et  $a_E$  :** (III.7.16.a) , (III.7.16.b)

```

POUR J = 2 , M2 FAIRE
  POUR I = 2 , L3 FAIRE
    DIFF = YCV(J) * 2. * K(I,J) * K(I+1,J) / ( XCV(I) * K(I+1,J) + XCV(I+1)*K(I,J) )
    AE(I,J) = DIFF
    AW(I+1,J) = AIP(I,J)
  FAIT
FAIT

```

**CALCUL DES COEFFICIENTS DIRECTION Y  $a_N$  et  $a_S$  :** (III.7.16.c) , (III.7.16.d)

```

POUR J = 2 , M3 FAIRE
  POUR I = 2 , L2 FAIRE
    AIRE = RV(J+1)*XCV(I)
    DIFF = AIRE * 2. * K(I,J) * K(I,J+1) / ( YCV(J) * K(I,J+1) + YCV(J+1) * K(I,J) )
    AN(I,J) = DIFF
    AS(I,J+1) = AN(I,J)
  FAIT
FAIT

```

**CALCUL DES COEFFICIENTS  $a_p$  FORME FINALE :** (III.7.17)

```

POUR J = 2 , M2 FAIRE
  POUR I = 2 , L2 FAIRE
    AP(I,J) = AP(I,J) + AE(I,J) + AW(I,J) + AS(I,J) + AN(I,J)
  FAIT
FAIT

```

• **Traitement des conditions limites en géométrie xy :**

CONDITION LIMITE OUEST ( I = 1 )	CONDITION LIMITE EST ( I = L1 )
<p>POUR J = 2 , M2 FAIRE            DIFF=K(2,J)/(0.5*XCV(2))            AW(2,J) =DIFF            AE(1,J) = AW(2,J)            AW(2,J) = AW(2,J)*YCV(J)            SI ( CLW ( J ) = 1 ) ALORS                b(2,J) = b(2,J)+AW(2,J) * T<sup>*</sup>(1,J)            SINON                AP(1,J) = AE(1,J) - FPW(J)                b(1,J) = FCW(J)                TEMP = AW(2,J) / AP(1,J)                AP(2,J) = AP(2,J) - AE(1,J)*TEMP                AE(2,J) = AE(2,J) -AW(1,J)*TEMP                b(2,J) = b(2,J) +b(1,J) *TEMP            FINSI            AP(2,J) = AP(2,J)+AW(2,J)            AW(2,J) = 0.</p> <p>FAIT</p>	<p>POUR J = 2 , M2 FAIRE            DIFF=K(L2,J)/(0.5*XCV(L2))            AE(L2,J)=DIFF            AW(L1,J)=AE(L2,J)            AE(L2,J)=AE(L2,J)*YCV(J)            AW(L2,J)=AW(L2,J)+AE(L1,J)*YCV(J)            SI ( CLE( J ) = 1 ) ALORS                b(L2,J)=b(L2,J)+AE(L2,J) * T<sup>*</sup>(L1,J)            SINON                AP(L1,J)=AW(L1,J) - FPE(J)                B(L1,J)=FCE(J)                TEMP=AE(L2,J)/AP(L1,J)                AP(L2,J)=AP(L2,J)-AW(L1,J)*TEMP                AW(L2,J)=AW(L2,J)-AE(L1,J)*TEMP                B(L2,J)=b(L2,J)+b(L1,J)*TEMP            FINSI            AP(L2,J)=AP(L2,J)+AE(L2,J)            AE(L2,J)=0.</p> <p>FAIT</p>
CONDITION LIMITE SUD ( J = 1 )	CONDITION LIMITE NORD ( J = M1 )
<p>POUR I = 2 , L2 FAIRE            AIRE = RV(2)*XCV(I)            DIFF = K(I,2)/(0.5*YCV(2))            AS(I,2) = DIFF            AN(I,1) = AJM(I,2)            AS(I,2) = AS(I,2)* AIRE            AN(I,2) = AN(I,2)+AS(I,1)* AIRE            SI ( CLS( I ) = 1 ) ALORS                b(I,2) = b(I,2) + AS(I,2) * T<sup>*</sup>(I,1)            SINON                AP(I,1) = AN( I , 1 ) - FPS( I )                B(I,1) = FCS(I)                TEMP = AS(I,2)/AP(I,1)                AP(I,2) = AP(I,2)-AN(I,1)*TEMP                AN(I,2) = AN(I,2)-AS(I,1)*TEMP                b(I,2) = b(I,2)+b(I,1)*TEMP            FINSI            AP(I,2)=AP(I,2)+AS(I,2)            AS(I,2)=0.</p> <p>FAIT</p>	<p>POUR I = 2 , L2 FAIRE            IRE = RV(M1)*XCV(I)            DIFF = K(I,M2)/(0.5*YCV(M2))            AN(I,M2) = DIFF            AS(I,M1) = AN(I,M2)            AN(I,M2) = AN(I,M2)* AIRE            AS(I,M2) =AS(I,M2)+AN(I,M1)* AIRE            SI ( CLN( I ) = 1 ) ALORS                b(I,M2) = b(I,M2)+AN(I,M2) * T<sup>*</sup>(I,M1)            SINON                AP(I,M1) = AS(I,M1) - FPN(I)                B(I,M1) = FCN(I)                TEMP = AN(I,M2) / AP(I,M1)                AP(I,M2) = AP(I,M2)-AS(I,M1)*TEMP                AS(I,M2) = AS(I,M2)-AN(I,M1)*TEMP                B(I,M2) = b(I,M2)+b(I,M1)*TEMP            FINSI            AP(I,M2) = AP(I,M2)+AN(I,M2)            AN(I,M2) = 0.</p> <p>FAIT</p>

### III.7.3 Cas bidimensionnel en géométrie polaire ( $r\theta$ )

Considérons à présent l'équation de la conduction de chaleur dans le cas  $r\theta$ :

$$\rho c_p \frac{\partial T}{\partial t} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r k \frac{\partial T}{\partial r} \right) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( k \frac{\partial T}{\partial \theta} \right) + S \quad (\text{III.7.19})$$

Sur un domaine bidimensionnel discrétisé de façon polaire, les volumes finis de volume  $r dr d\theta$ .

Le point P a maintenant 4 voisins : E,W,N,S.

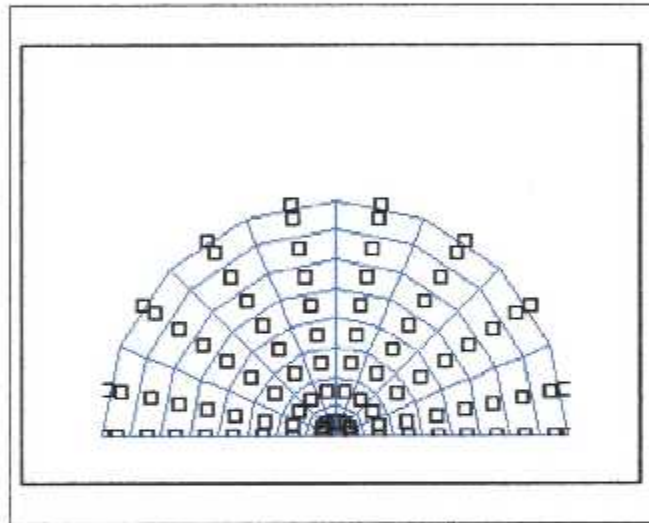


Fig. III.22. Domaine  $r\theta$

De la même manière que dans le cas cartésien, on trouve :

$$a_P T_P = a_E T_E + a_W T_W + a_N T_N + a_S T_S + b \quad (\text{III.7.20})$$

$$a_E = \frac{k_e \Delta r}{r_e (\delta\theta)_e} ; \quad a_W = \frac{k_w \Delta r}{r_w (\delta\theta)_w} ; \quad a_N = \frac{k_n r_n \Delta\theta}{(\delta r)_n} ; \quad a_S = \frac{k_s r_s \Delta\theta}{(\delta r)_s} \quad (\text{III.7.21})$$

$$a_P = a_E + a_W + a_N + a_S + \frac{\rho C_p \Delta V}{\Delta t} - S_P \Delta V \quad (\text{III.7.22})$$

$$b = S_C \Delta V + \frac{\rho C_p \Delta V}{\Delta t} T_P^0 \quad (\text{III.7.23})$$



### III.8 Méthodes de résolutions itératives

La résolution du système matriciel dans le cas bidimensionnel peut se faire par l'algorithme TDMA. On se ramène pour cela à un **système unidimensionnel** sur une **ligne** ou une **colonne** et on procède à une **résolution itérative** par balayages successifs.

Un premier balayage est effectué ligne par ligne en écrivant :

$$a_P T_P = a_E T_E + a_W T_W + B \quad (\text{III.8.1})$$

avec:

$$B = a_N T_N^* + a_S T_S^* + b \quad (\text{III.8.2})$$

où  $T_N^*$  et  $T_S^*$  sont les valeurs de  $T_N$  et  $T_S$  à l'itération précédente. Quand le balayage sur les lignes est terminé, on passe au balayage colonne par colonne. Sur chaque colonne, l'algorithme TDMA est utilisé pour résoudre le système :

$$a_P T_P = a_N a_N + a_S T_S + C \quad (\text{III.8.3})$$

avec :

$$C = a_E T_E^* + a_W T_W^* + b \quad (\text{III.8.4})$$

où  $T_E^*$  et  $T_W^*$  sont les valeurs de  $T_E$  et  $T_W$  à l'itération précédente. Ce processus itératif est répété jusqu'à convergence.

Les méthodes itératives sont recommandées dans notre étude, car les équations utilisées sont en général non linéaires, il faut donc passer par des itérations. Ces techniques présentent l'avantage d'éviter la construction de systèmes matriciels., mais peuvent diverger si on ne prend pas certaines précautions :

- Vérifier si les coefficients évoluent lentement , en linéarisant le terme source convenablement.
- Sous relaxer les autres coefficients, et mêmes les conditions limites.
- Dans la linéarisation du terme source, il se peut que le coefficient  $S_P$  devient négative, dans ce cas il faut que  $S_C$  soit négatif aussi.

Il faut savoir enfin que la convergence n'est pas toujours garantie dans les procédés itératives et que certains problèmes ne sont pas encore résolus actuellement.

Nous allons donner trois méthodes itératives les plus utilisées qui sont : SOR, Ligne par Ligne SOR et ADI SOR .

• **Méthode SOR :**

<b>Méthode SOR</b>	
<b>Donnés :</b> $\Delta t$ ; maxres ; maxit ; temps = 0 ; maxtemps ; $\omega$	
<b>1) Calcul des valeurs initiales et coefficients :</b>	
pour i = 1 , NI	
pour J = 1 , NJ	
a) Calcul des temperature Initiales : T(i,j) = Tinit; Told(i,j) = Tinit;	
b) Valeur Initiale du terme source indépendant de T : Sc(i,j) ;	
c) Valeur Initiale du terme source dépendant de T : Sp(i,j) ;	
d) Calcul des coefficients : Ae(i,j); Aw(i,j);An(i,j);As(i,j); dV = dx*dy; Ap0 ;	
e) Traitement des conditions limites	
f) Calcul des coefficients : Ap(i,j)	
Ap(i,j) = Ae(i,j) + Aw(i,j) + An(i,j) + as(i,j) - Sp(i,j)*dV + ap0;	
Fait	
Fait	
<b>Marche dans le temps</b>	
<b>Tantque ( TEMPS &lt; MAXTEMPS )</b>	
T* = T ; Somres = 1 ; K = 0 ;	
<b>Faire des Itérations jusqu'à convergence</b>	
<b>Tantque ( SOMRES &gt; MAXRES ET K &lt; MAXIT )</b>	
SOMRES = 0	
Pour i = 2 , ni-1	
Pour j = 2 , nj-1	
T(i,j) = $\omega * ( Ae(i,j) * T(i+1,j) + Aw(i,j)*T(i-1,j) + An(i,j) * T(i,j+1) + As(i,j) * T(i,j-1) + Sc(i,j)*dV + Ap0 * T(i,j)) / Ap(i,j) + (1-\omega) * T(i,j)$	
RES = ABS ( ap(i,j) * T(i,j) - ( Ae(i,j) * T(i+1,j) + Aw(i,j)*T(i-1,j) + An(i,j) * T(i,j+1) + As(i,j) * T(i,j-1) + Sc(i,j) * dV + Ap0 * T(i,j)))	
SOMRES = SOMRES + RES	
Fait;	
Fait;	
<b>Calcul du résiduel RES :</b>	
Pour i = 2 , NI - 1	
Pour j = 2 , NJ - 1	
RES = ABS(Ap(i,j) * T(i,j) - ( Ae(i,j) * T(i+1,j) + Aw(i,j) * T(i-1,j) + An(i,j) * T(i,j+1) + As(i,j) * T(i,j-1) + Sc(i,j) * dV + Ap0 * T(i,j)))	
SOMRES = SOMRES + RES	
Fait	
Fait	
SOMERR = SOMRES	
K = K + 1	
FinTantque	
TEMPS = TEMPS +dt	
FinTantque	

• **Méthode ligne par ligne TDMA Avec SOR:**

La technique ligne par ligne est proposée par PATHANKAR [3], elle comporte les étapes suivantes :

- Choisir les conditions initiales de la variable T pour tous le domaine d'étude.
- Choisir une direction du domaine et considérer l'autre direction comme constante.
- Résoudre les matrices TDMA obtenues pour chaque ligne du domaine d'étude.
- Répéter à partir de b) les mêmes opérations pour l'autre direction.
- Poser les valeurs obtenues comme choix de départ.
- Retourner à b) jusqu'à la convergence.

**Algorithme ligne par ligne SOR**

```

Données :  $\Delta t$ , TEMPSMAX, Tinit,  $\omega$ , MAXIT
Pour I = 1, NI
  Pour J = 1, NJ
    T(I,J) = Tinit; T*(I,J) = Tinit;
    SC(i,j); Sp(I,J); ae(i,j) ; aw(i,j) ; an(i,j) ; as(i,j); dV = dx*dy ; ap0 ;
    ap(i,j) = ae(i,j)+aw(i,j)+an(i,j)+as(i,j)-Sp(i,j)*dV+ap0;
  Fait
Fait
Tantque ( TEMPS < TEMPSMAX ) (Marche dans le temps :)
  T* = T ; SOMRES = 1 ; K = 0;
  Itérations jusqu'à convergence :
  Tantque (SOMRES > MAXRES ET K < MAXIT )
    Balayage dans la direction J :
    Pour I = 2 , NI - 1
      P(1) = 0
      Q(1) = T(1)
      Pour J = 2 , NJ - 1
        A = Ap(i,j) /  $\omega$  ; B = An(i,j) ; C = As(i,j);
        D = Ae(i,j) * T(I+1,j) + Aw(I,J) * T(I-1,J) + Sc(I,J) * dV + ap0 * T*(I,J)
          + ( 1 -  $\omega$  ) * A * T(I,J)
        P(J) = B / ( A - C * P(J-1) )
        Q(J) = ( C * Q(J-1) + D ) / ( A - C * P(J-1) )
      Fait
    Pour J = NJ - 1, 2, -1
      T(i,j) = P(J) * T(I,J+1) + Q(J)
    Fait
  Fait

```

### Algorithme ligne par ligne SOR (suite)

#### Balayage dans la direction I :

```

Pour J = 2, NJ-1
  P(1) = 0
  Q(1) = T(1)
  Pour I = 2, NI-1
    A = Ap(I,J) / ω ; B = A (I,J) ; C =Aw(I,J)
    D = An(I,J) * T(I,J+1) + As(I,J) * T(I,J-1) + Sc(I,J) * dV + Ap0 * T*(I,J)
      + (1 - ω) * A * T(I,J)
    P(I) = b / ( A - C * P(I-1) )
    Q(I) = (C * Q(I-1)+D)/(A - C *P(I -1))
  Fait
  Pour I = NI - 1, 2, -1
    T(I,J) = P(I) * T(I+1,J)+Q(I)
  Fait
Fait

```

#### Calcul du résiduel :

```

SOMRES = 0;
Pour I = 2, NI - 1
  Pour J = 2, NJ -1
    RES = ABS[ Ap(I,J) * T(I,J) - ( Ae(I,J) * T(I+1,J) + Aw(I,J) * T(I-1,J)+
      An(i,j) * T(i,j+1) + As(i,j) * T(i,j-1) + Sc(i,j) * dV +Ap0 * T*(i,j))]
    SOMRES = SOMRES + RES
  Fait
Fait
SOMERR = SOMRES
K = K + 1
FinTantque (Fin de la boucle des itérations)
TEMPS = TEMPS + Δt
FinTantque (Fin de la boucle dans le temps)

```

- **Méthode ADI (Alternating direction implicit) avec SOR :**

La méthode est basée sur la division du pas de temps sur 2, dans le premier demi-pas, le schéma est totalement implicite dans une direction et totalement explicite dans l'autre direction, dans le deuxième pas de temps, la direction implicite est changée, cette alternance rend le schéma ADI, donc ce schéma permet d'utiliser deux fois la TDMA par pas de temps.

### Algorithme ADI AVEC SOR

**LES DONNEES :** M, N, L, TOL, MAXIT, D, U, LL, UU

MN = M \* N

MM1 = M - 1

ITER = 0

RES = 10.0

10 SI ( ( RES > TOL ) ET ( ITER < MAXIT ) ) ALORS

K = 0

**Balayage dans la direction 1 :**

POUR J = 1, MN-MM1, M FAIRE

K = K + 1

KK = 0

POUR I = J, K \* M FAIRE

KK = KK + 1

LO(KK) =  $\omega * L(I)$

DI(KK) = D(I)

UP(KK) =  $\omega * U(I)$

CO(KK) =  $\omega * (C(I) - LL(I) * X(I-M) - UU(I) * X(I+M)) + (1 - \omega) * D(I) * X(I)$

FAIT

CALL TDMA ( M , LO , DI , UP , CO , XX )

KK = 0

POUR I = J, K \* M FAIRE

KK = KK + 1

X(I) = XX(KK)

FAIT

FAIT

### Algorithme ADI AVEC SOR ( suite )

Balayage dans la direction J :

```

POUR J = 1,M FAIRE
  KK = 0
  POUR I = J , MN-MM1+N , M FAIRE
    KK = KK + 1
    LO ( KK ) =  $\omega * LL(I)$ 
    DI ( KK ) = D(I)
    UP ( KK ) =  $\omega * UU(I)$ 
    CO ( KK ) =  $\omega * (C(I) - L(I)*X(I-1) - U(I)*X(I+1)) + (1. - \omega) * D(I) * X(I)$ 
  FAIT
  CALL TDMA (N, LO , DI , UP , CO , XX )
  KK = 0
  POUR I = J , MN - MM1+N ,M
    KK = KK + 1
    X(I) = XX( KK )
  FAIT
FAIT

```

Calcul du résiduel :

```

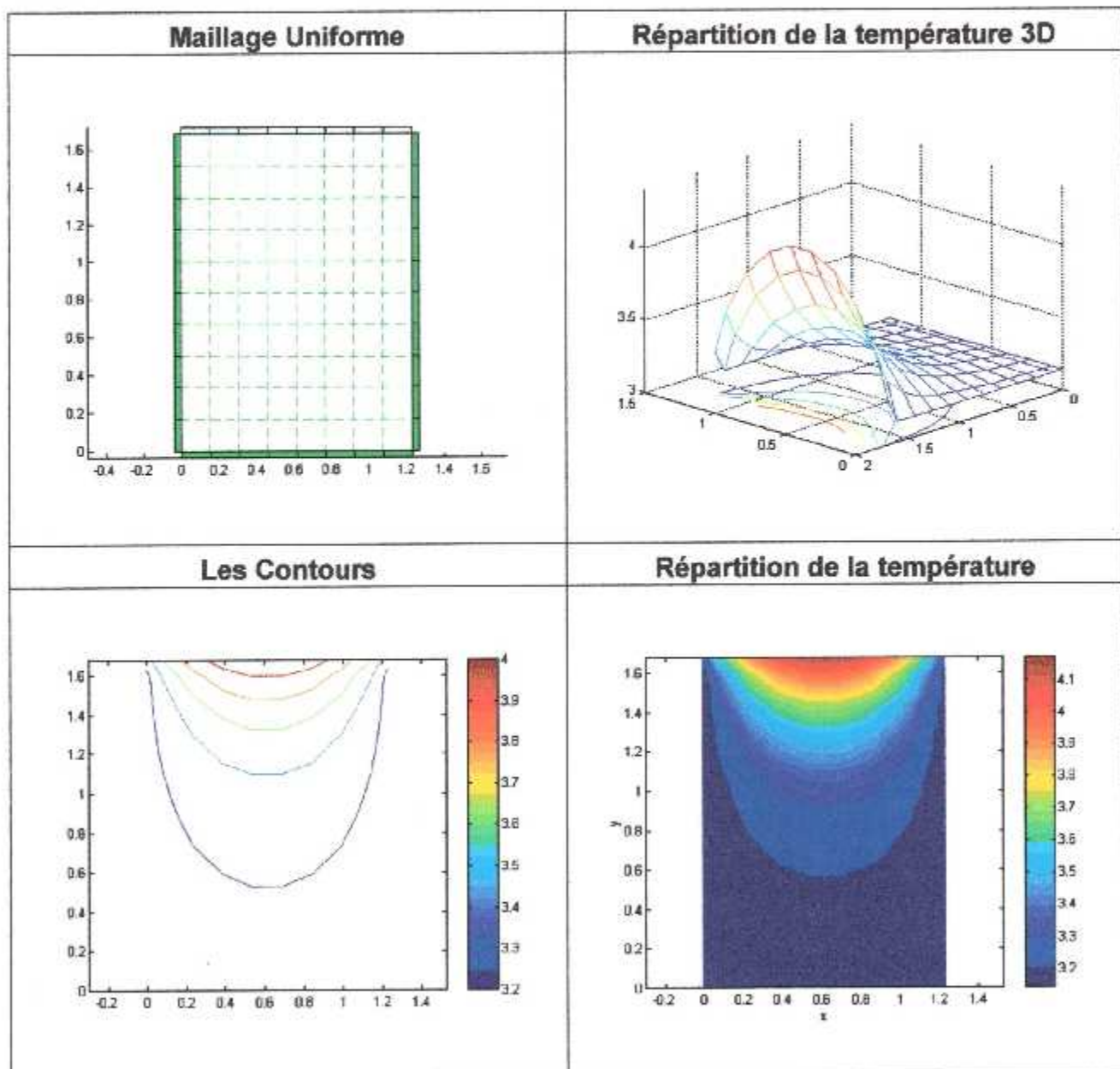
RES = 0.0
POUR I = 1 , MN FAIRE :
  TERM = C(i) - (LL(i)*X(i-m) + L(i)*X(i-1) + D(i)*X(i)
    + U(i)*X(i+1) + UU(i)*X(i+m))
  RES = RES + TERM **2
FAIT
RES = SQRT( RES ) / MN
ITER = ITER + 1
ALLER A 10
FINSI

```

### III.9 Applications :

**Exemple 1:** Conduction 2D dans un rectangle, avec flux de chaleur constant sur un côté, température constante sur les autres côtés.

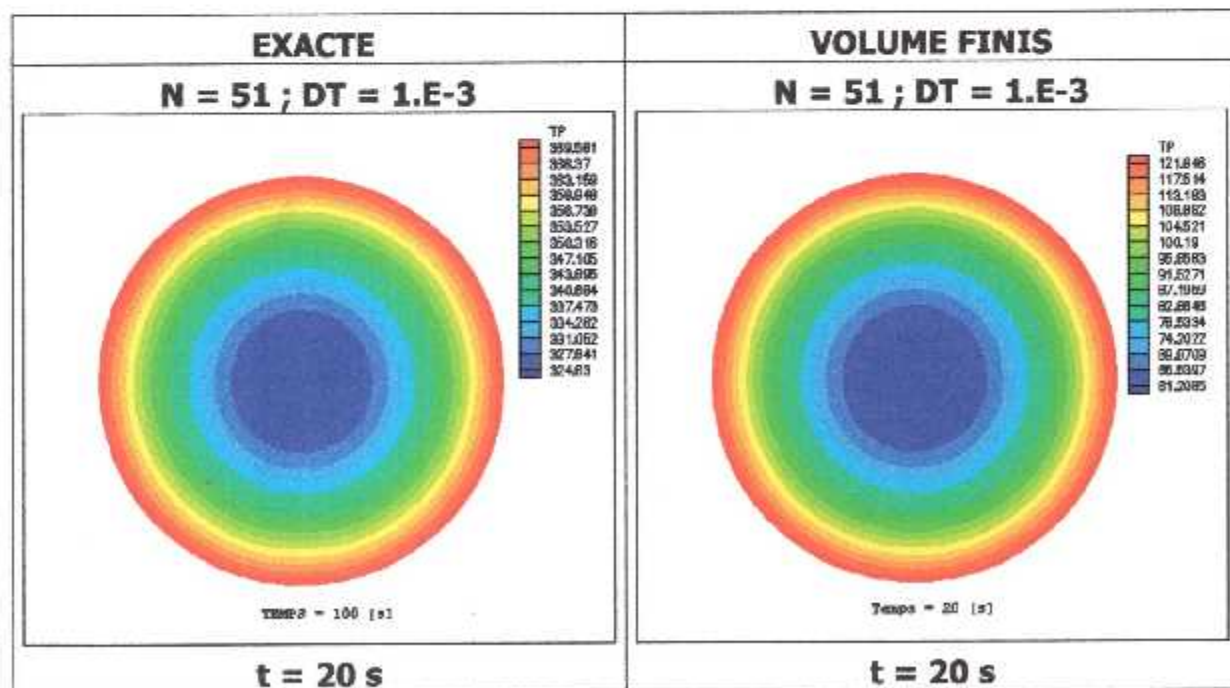
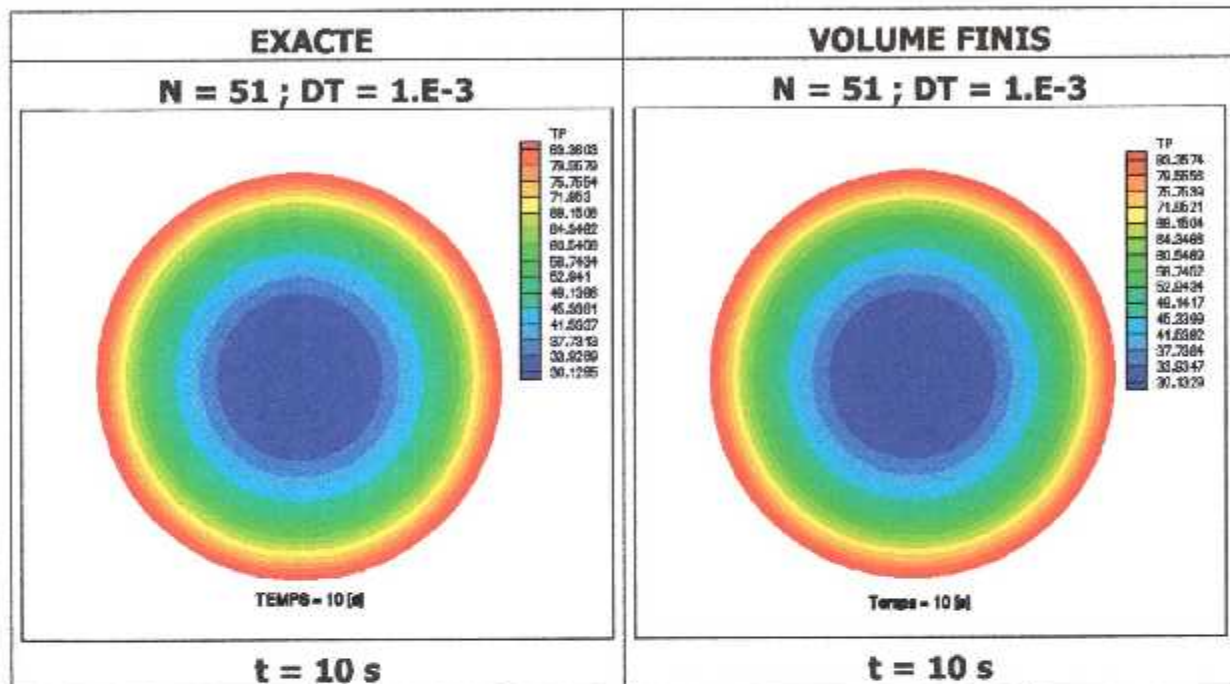
$N_x = 8$  ;  $N_y = 10$  ;  $L_x = 1.23$  ;  $L_y = 1.68$  ;



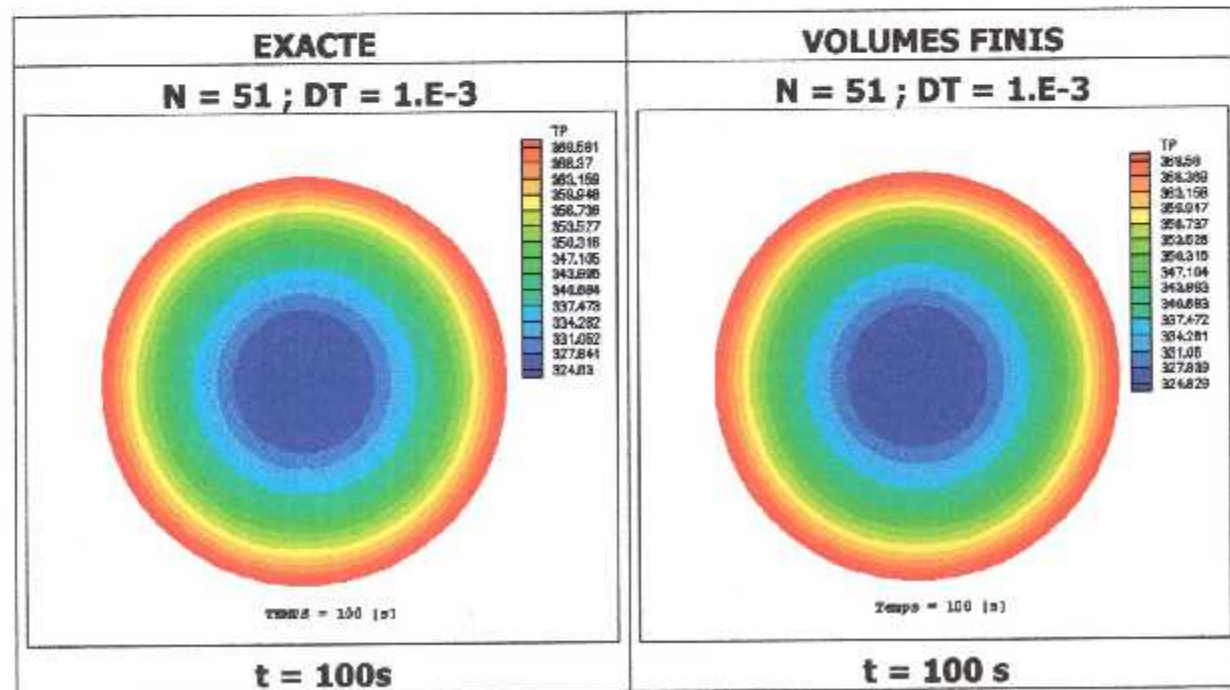
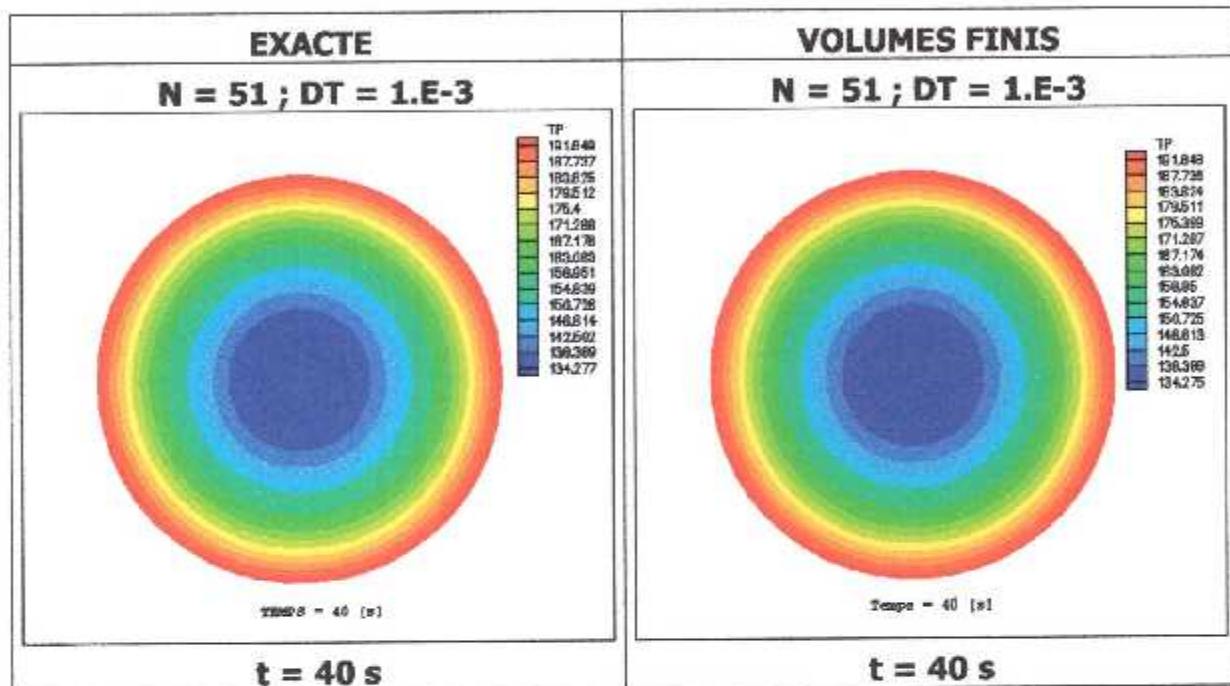
**Exemple 2 :** Conduction dans la sphère 1D avec convection .

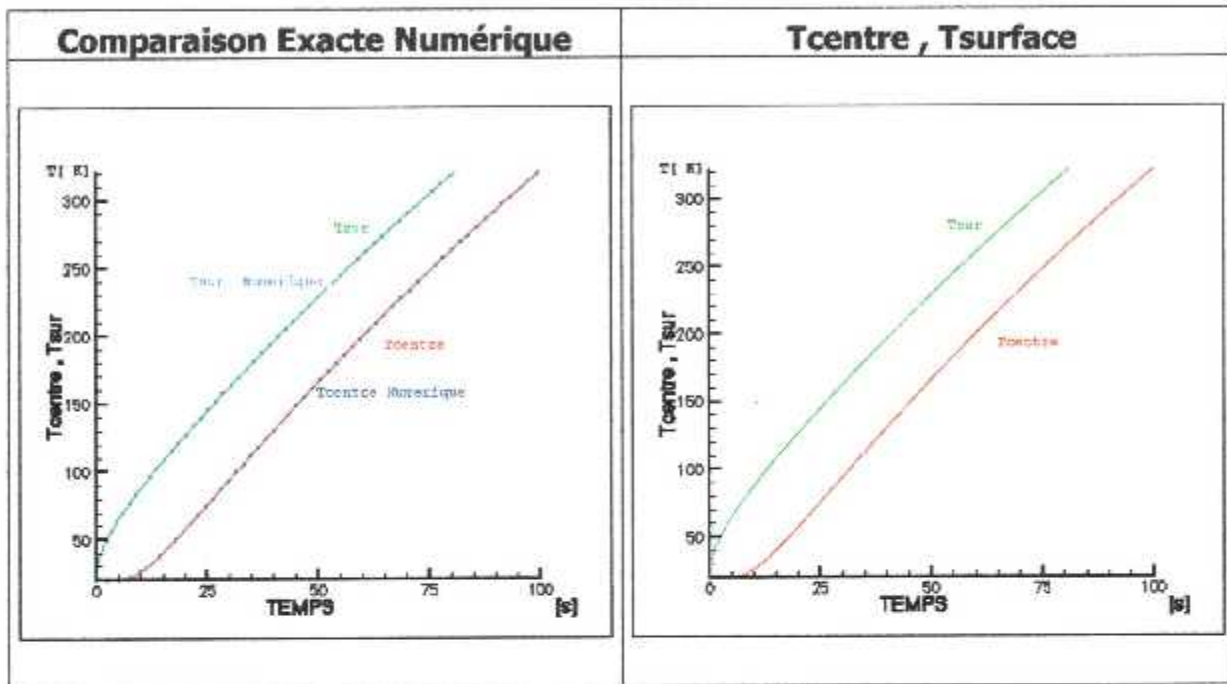
$T_i = 20.0 [ ^\circ\text{C} ]$ ;  $R = 40.E-3 [ \text{m} ]$ ;  $H = 200. [ \text{W} / \text{m}^2 . ^\circ\text{K} ]$ ;  $K = 50. [ \text{W} / \text{m} . ^\circ\text{K} ]$  ;

$C_p = 450.0 [ \text{J} / \text{Kg} . ^\circ\text{K} ]$ ;  $\rho = 7800. [ \text{Kg} / \text{m}^3 ]$









t(s)	Tcentre (°C)		Erreur	Tsurf (°C)	
10.0	26.32409	26.33121	.27048E-03	87.16268	87.15911
20.0	56.87627	56.87725	.17237E-04	126.17860	126.17690
30.0	93.65096	93.64970	.13442E-04	161.92860	161.92750
40.0	130.16490	130.16310	.13364E-04	195.96170	195.96070
50.0	165.39650	165.39470	.10794E-04	228.57170	228.57080
60.0	199.23150	199.22980	.87311E-05	259.85250	259.85170
70.0	231.69970	231.69800	.73100E-05	289.86390	289.86310
80.0	262.85230	262.85060	.62695E-05	318.65820	318.65740
90.0	292.74180	292.74020	.54209E-05	346.28500	346.28410
100.0	321.41930	321.41780	.47473E-05	372.79150	372.79070

# Chapitre IV

## Chapitre IV

### Modèle Numérique

#### IV.1 Systèmes minces

L'équation enthalpique pour un système mince et la relation enthalpie - température pour un matériau hypothétique sont donnés par les équations [5] :

$$\rho \frac{\partial h}{\partial t} = H_{\infty} A (T_{\infty} - T) + V(S_C(t) + S_P(t)) \quad (II.7)$$

$$T(h) = \left( T_{m1} + (h - H_0) \frac{T_{m2} - T_{m1}}{L} \right) * u(h - H_0) * u(H_0 + L - h) \\ + \left( T_{m1} + \frac{(h - H_0)}{C_{Ps}} \right) * u(h - H_0) \\ + \left( T_{m1} + \frac{(h - H_0 - L)}{C_{Pl}} \right) * u(h - H_0 - L) \quad (II.4)$$

En intégrant l'équation (II.7) de  $t^{k-1}$  à  $t^k$  :

$$\int_{t^{k-1}}^{t^k} \left[ \rho V \frac{dh}{dt} \right] dt = \int_{t^{k-1}}^{t^k} [H A (T_{\infty} - T) + V(S_C(t) + S_P(t)T)] dt \quad (IV.1)$$

Pour un schéma explicite ( $\beta = 0$ ) ou implicite ( $\beta = 1$ ), chaque terme de l'équation (IV.1) prend la forme suivante:

$$\int_{t^{k-1}}^{t^k} \left[ \rho V \frac{dh}{dt} \right] dt = \rho V (h^k - h^{k-1}) \\ \int_{t^{k-1}}^{t^k} [H * A (T_{\infty} - T)] dt = H * A * (1 - \beta) * (T_{\infty} - T^{k-1}) + \beta * (T_{\infty} - T^k)$$

$$\int_{t^{k-1}}^{t^k} V(Sc(t) + Sp(t)T)dt = V \left\{ (1-\beta) \left[ Sc^{k-1} + Sp^{k-1}T^{k-1} \right] + \beta \left[ Sc^k + Sp^k T^k \right] \right\} \Delta t$$

En substituant chaque terme dans l'équation (IV.1), on aura :

$$\begin{aligned} \rho V (h^k - h^{k-1}) = & (1-\beta) \left[ H^* A^* (T_\infty - T^{k-1}) + V (Sc^{k-1} + Sp^{k-1}) \right] \Delta t \\ & + \beta \left[ H^* A^* (T_\infty - T^k) + V (Sc^k + Sp^k) \right] \Delta t \end{aligned} \quad (IV.2)$$

La condition initiale est donnée par :

$$T^0 = T_{\text{initiale}} \quad (IV.3.a)$$

$$h^0 = h_{\text{initiale}} \quad (IV.3.b)$$

#### IV.1.1 Méthode Explicite

Pour le schéma explicite, l'équation (IV.2), à chaque pas de temps devient :

$$h^k = h^{k-1} + \frac{HA}{\rho V} (T_\infty - T^{k-1}) \Delta t + \frac{1}{\rho} (Sc^{k-1} + Sp^{k-1}) \Delta t \quad (IV.4)$$

En connaissant  $h^k$  et en utilisant l'équation (II.4), la température peut être obtenue à chaque pas de temps par :

$$\begin{aligned} T^k(h^k) = & \left\{ T_{m1} + (h^k + H_0) \frac{T_{m2} - T_{m1}}{L} \right\} * u(h^k - H_0) * u(H_0 + L - h^k) \\ & + \left\{ T_{m1} + \frac{1}{C_{ps}} (h^k - H_0) \right\} * u(H_0 - h^k) \\ & + \left\{ T_{m2} + \frac{1}{C_{pl}} (h^k - H_0 - L) \right\} * u(h^k - H_0 - L) \end{aligned} \quad (IV.5)$$

Le schéma explicite a des problèmes de stabilité si les pas de temps sont larges, provoquant ainsi des oscillations des solutions.

Ainsi pour garantir la stabilité,  $h^{k-1}$  doit être positif, en substituant  $T^{k-1}$  en terme de  $h^{k-1}$ , (IV.4) ou (II.3) :

$$T^{k-1}(h) = \begin{cases} T_{m2} + \frac{1}{C_{pl}}(h^{k-1} - H_0 - L) & , \quad h^{k-1} > H_0 + L \\ T_{m1} + \frac{T_{m2} - T_{m1}}{L}(h^{k-1} - H_0) & , \quad H_0 \leq h^{k-1} \leq H_0 + L \\ T_{m1} + \frac{1}{C_{ps}}(h^{k-1} - H_0) & , \quad h^{k-1} < H_0 \end{cases} \quad (IV.6)$$

La condition de stabilité est définie alors par :

$$\Delta t \leq \begin{cases} (C_{pl}) \frac{\rho^* V}{H^* A + V^* S p^{k-1}} & , \quad h^{k-1} > H_0 + L \\ \frac{L}{T_{m2} - T_{m1}} \frac{\rho^* V}{H^* A + V^* S p^{k-1}} & , \quad H_0 \leq h^{k-1} \leq H_0 + L \\ (C_{ps}) \frac{\rho^* V}{H^* A + V^* S p^{k-1}} & , \quad h^{k-1} < H_0 \end{cases} \quad (IV.7)$$

#### IV.1.2 Méthode Implicite

Le schéma implicite est défini, à chaque pas de temps par  $\beta = 1$  dans l'équation (IV.2) :

$$h^k = h^{k-1} + \frac{H^* A}{\rho^* V} (T_\infty - T^k) \Delta t + \frac{1}{\rho} (S_c^k + S_p^k T^k) \Delta t \quad (IV.8)$$

$h^k$  et  $T^k$  sont calculés simultanément dans les équation (IV.8) et (IV.5) à chaque pas de temps .

L'équation (IV.5) est nonlinéaire , la résolution de (IV.8) et (IV.5) demande donc des itérations .

La méthode implicite est donc plus compliqué que le schéma explicite , cependant son avantage c'est qu'elle est inconditionnellement stable.

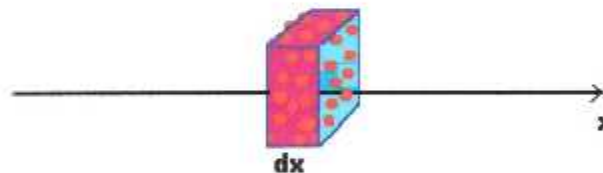
## IV.2 Matériaux Homogènes

Dans les matériaux homogènes, l'équation enthalpique de la conduction et la relation enthalpie température sont données dans les équation (II.11) et (II.4) par :

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( k \frac{\partial T}{\partial x} \right) + Sc(x, t, T) + Sp(x, t, T) = \rho \frac{\partial h}{\partial t} \quad (\text{II.11})$$

$$T(h) = \left\{ T_{m1} + (h - H_0) \frac{T_{m2} - T_{m1}}{L} \right\} u(h - H_0) + u\delta(H_0 + L - h) + \left\{ T_{m1} + \frac{1}{C_{ps}} (h - H_0) \right\} u(h - H_0) + \left\{ T_{m2} + \frac{1}{C_{pl}} (h - H_0 - L) \right\} u(h - H_0 - L) \quad (\text{II.4})$$

Le domaine physique est divisé en volumes de contrôles . Les volumes de contrôles sont spécifiés d'abord, après sont placés les points au centre de chaque de contrôle. Les points limites ( est et ouest ), sont placés aux bord des limites du domaine physique avec un volume de contrôle nul.



( fig. IV.2). Volume de Contrôle d'un Matériaux Homogènes

La figure fig. IV.2 donne une représentation d'un volume de contrôle.

En intégrant l'équations (II.11) sur le volume de contrôle, pendant l'intervalle de temps  $t^{k-1}$  jusqu'à  $t^k$ , on obtient :

$$\int_{t^{k-1}}^{t^k} \int_w^e \left\{ \frac{\partial}{\partial x} \left( k \frac{\partial T}{\partial x} \right) + Sc(x, t) + Sp(x, t)T \right\} dxdt = \int_{t^{k-1}}^{t^k} \int_w^e \rho \frac{\partial h}{\partial t} dxdt \quad (\text{IV.9})$$

Chaque terme de l'équation (IV.9) est intégré dans le temps par un schéma explicite ou implicite .

Donc :

$$\int_{t^{k-1}}^{t^k} \int_w^e \rho \frac{\partial h}{\partial t} dx dt = \int_w^e \rho (h^k - h^{k-1}) dx = \rho_P (h_P^k - h_P^{k-1}) \Delta x$$

$$\int_{t^{k-1}}^{t^k} \int_w^e \frac{\partial}{\partial x} \left( k \frac{\partial T}{\partial x} \right) dx dt = (1-\beta) * \left\{ k_e \left( \frac{T_E^{k-1} - T_P^{k-1}}{(\delta x)_e} \right) - k_w \left( \frac{T_e^{k-1} - T_w^{k-1}}{(\delta x)_w} \right) \right\} \Delta t$$

$$+ \beta * \left\{ k_e \left( \frac{T_E^k - T_P^k}{(\delta x)_e} \right) - k_w \left( \frac{T_e^k - T_w^k}{(\delta x)_w} \right) \right\} \Delta t$$

$$\int_{t^{k-1}}^{t^k} \int_w^e (S_c(x, t) + S_p(x, t)) dx dt = \left\{ (1-\beta) \left[ S_c P^{k-1} + S_p P^{k-1} * T_P^{k-1} \right] \right\} \Delta x \Delta t$$

Avec :

- $\beta = 0$  pour le schéma explicite .
- $\beta = 1$  pour le schéma implicite .

La conductivité du matériau peut varier d'un volume de contrôle CV à un autre, d'où l'existence la notion de conductivité d'interface. La conductivité à l'interface est évaluée en utilisant le concept de la résistance de contact thermique.

Le flux de chaleur de la face est e :

$$q_e = \frac{k_P}{(\delta x)_{e^-}} (T_P - T_e) = \frac{k_E}{(\delta x)_{e^+}} (T_e - T_E) \quad (IV.10)$$

et en éliminant  $T_e$ , on aura :



$$q_e = \left[ \frac{(\delta x)_{e^-}}{k_p} + \frac{(\delta x)_{e^+}}{k_E} \right]^{-1} (T_P - T_E) \quad (\text{IV.11})$$

Si le maillage est uniforme par zone :  $(\delta x)_{e^-} = (\delta x)_{e^+} = 0.5 * \Delta x_p$ , alors :

$$a_E = \frac{k_e}{\Delta x_e} = \frac{2 * k_p * k_E}{\Delta x_p k_E + \Delta x_E * k_p} \quad (\text{IV.12})$$

De la même manière :

$$a_W = \frac{k_w}{\Delta x_w} = \frac{2 * k_W * k_p}{\Delta x_w k_p + \Delta x_p * k_W} \quad (\text{IV.13})$$

En substituant ces termes dans l'équation (IV.2), on obtient :

$$\begin{aligned} \rho_p (h_p^k - h_p^{k-1}) \Delta x_p &= \beta \left\{ a_E T_E^k + a_W T_W^k - (a_E + a_W - Sp^k * \Delta x_p) + Sc^k \Delta x_p \right\} \Delta t \\ + (1 - \beta) &\left\{ a_E T_E^{k-1} + a_W T_W^{k-1} - (a_E + a_W - Sp^{k-1} * \Delta x_p) + Sc^{k-1} \Delta x_p \right\} \Delta t \end{aligned} \quad (\text{IV.14})$$

#### Les conditions aux limites :

La condition limite en  $x = 0$ , s'écrit à chaque pas de temps par :

- **Température imposée,  $T_0$  (Type Diraclet) :**

$$\begin{aligned} T(0, x) &= T_0 \\ T(0, x) &= T_0 \end{aligned} \quad (\text{IV.15})$$

- **Flux de chaleur imposé  $q_0$  avec convection  $H_{0\infty}$  et  $T_{0\infty}$  (Type Robins) :**

$$\begin{aligned} -k \frac{\partial T}{\partial x} &= q + H * (T_{\infty} - T(0, t)) \\ k_2 \frac{T_1^k - T_2^k}{0.5 * \Delta x_2} &= q + H * (T_{\infty} - T_1^k) \end{aligned}$$

D'où :

$$T_1^k = \frac{q + H \cdot T_\infty + \frac{2 \cdot k_2}{\Delta x_2} T_2^k}{H + \frac{2k_2}{\Delta x_2}} \quad (\text{IV.16})$$

La condition en  $x = l$  s'écrit à chaque pas de temps par :

- **Température imposée , TI (Type Directlet) :**

$$T(l, x) = T_I$$

$$T_{N+2}^k = T_I \quad (\text{IV.17})$$

- **Flux de chaleur imposé  $q$  avec convection  $H$  et  $T_\infty$  (Type Robins) :**

$$-k \frac{\partial T}{\partial x} = q + H \cdot (T_\infty - T(l, t))$$

$$k_{N+1} \frac{T_{N+2}^k - T_{N+1}^k}{0.5 \cdot \Delta x_{N+1}} = q + H \cdot (T_\infty - T_{N+2}^k)$$

D'où :

$$T_{N+2}^k = \frac{q + H \cdot T_\infty + \frac{2 \cdot k_{N+1}}{\Delta x_{N+1}} T_{N+1}^k}{H + \frac{2k_{N+1}}{\Delta x_{N+1}}} \quad (\text{IV.18})$$

La condition initiale , pour tout le domaine , est définie par :

$$T_p^0 = T_{\text{initiale}} \quad (\text{IV.19.a})$$

$$h_p^0 = h_{\text{initiale}} \quad (\text{IV.19.b})$$

### IV.2.1 Méthode explicite

En accordant l'équation (IV.14) pour le cas du schéma explicite avec  $\beta = 0$ , à chaque pas de temps  $h_p^k$  doit être calculer pour tous les volumes de contrôles de  $p = 2$ , jusqu' à  $p = N+1$ ,  $N$  étant le nombre de volumes de contrôles total.

$$h_p^k = h_p^{k-1} + \frac{\Delta t}{\rho_p \Delta x_p} \left\{ a_E T_E^{k-1} + a_W T_W^{k-1} - (a_E + a_W - S_p^{k-1} \Delta x_p) + S_c^{k-1} \Delta x_p \right\} \quad (IV.20)$$

Connaissant les  $h_p^k$ , et en utilisant l'équation (IV.4), les températures pour tous les volumes de contrôles, seront calculées pour chaque pas de temps par :

$$\begin{aligned} T_p^k(h_p^k) = & \left\{ T_{m1} + (h_p^k - H_0) \frac{T_{m2} - T_{m1}}{L} \right\} * u(h_p^k - H_0) * u(H_0 + L - h_p^k) \\ & + \left\{ T_{m1} + \frac{1}{C_{ps}} (h_p^k - H_0) \right\} * u(H_0 - h_p^k) \\ & + \left\{ T_{m2} + \frac{1}{C_{pl}} (h_p^k - H_0 - L) \right\} * u(h_p^k - H_0 - L) \end{aligned} \quad (IV.21)$$

Les températures aux limites seront calculées à chaque pas de temps en utilisant les équations (IV.15) et (IV.18). Comme le schéma explicite présente des problèmes de stabilités, les  $h_p^{k-1}$  de l'équation (IV.20) doivent être négative, après avoir substituer  $T_p^{k-1}$  en fonction  $h_p^{k-1}$  des équations (IV.21) ou (II.2). Pour cette raison, le pas de temps  $\Delta t$  doit rester inférieur à une valeur limite,  $\Delta t$  critique.

La condition qui satisfait la stabilité est :

$$\Delta t \leq \begin{cases} \frac{[C_{pl}] \rho_p \Delta x_p}{a_E + a_W + \Delta x_p * S_p^{k-1}} & , \quad h_p^{k-1} > H_0 + L \\ \left[ \frac{L}{T_{m2} - T_{m1}} \right] \frac{\rho_p \Delta x_p}{a_E + a_W + \Delta x_p * S_p^{k-1}} & , \quad H_0 \leq h_p^{k-1} \leq H_0 + L \\ \frac{[C_{ps}] \rho_p \Delta x_p}{a_E + a_W + \Delta x_p * S_p^{k-1}} & , \quad h_p^{k-1} < H_0 \end{cases} \quad (IV.22)$$

- Remarque

Pour un matériau pur,  $T_{m1} = T_{m2}$ , durant le changement de phase,  $\Delta t \rightarrow \infty$ , donc on n'a pas de restriction sur le choix de  $\Delta t$ .

### IV.2.2 Méthode Implicite

En accordant l'équation (IV.14) pour le cas du schéma implicite avec  $\beta = 1$ , à chaque pas de temps  $h_P^k$  doit être calculer pour tous les volumes de contrôles de  $p = 2$ , jusqu'à  $p = N+1$ ,  $N$  étant le nombre de volumes de contrôles total.

$$\frac{\rho_P \Delta x_P}{\Delta t} h_P^k = \frac{\rho_P \Delta x_P}{\Delta t} h_P^{k-1} + a_E T_E^k - (a_E + a_W - S p^k \Delta x_P) T_P^k + a_W T_W^k + S c^k \Delta x_P$$

c'est à dire :

$$\frac{\rho_P \Delta x_P}{\Delta t} h_P^k + (a_E + a_W - S p^k \Delta x_P) T_P^k = a_E T_E^k + a_W T_W^k + \left( S c^k \Delta x_P + \frac{\rho_P \Delta x_P}{\Delta t} h_P^{k-1} \right) \quad (IV.23)$$

En se basant sur l'équation (IV.21), les températures sont fonctions des enthalpies, pour tous les volumes de contrôles allant de  $p = 1$  à  $p = N + 1$ , et en utilisant les équations (IV.15) et (IV.18) pour les conditions aux limites, on retrouve  $N + 2$  équations à  $N + 2$  inconnues, qu'il faudrait résoudre dans le temps.

comme l'équation (IV.21) est non linéaire, la résolution simultanée de ces  $N + 2$  équations demande des itérations.

les  $N + 2$  équations prennent la forme suivante :

$$A_P * h_P^k = A_E * h_E^k + A_W * h_W^k + B \quad (IV.24)$$

Où les  $A_P$ ,  $A_W$ ,  $A_E$  et  $B$  sont données par :

$$A_E = a_E * \left\{ \left( \frac{T_{m2} - T_{m1}}{L} \right) * u(h_E^* - H_0) * u(L + H_0 - h_E^*) + \frac{u(H_0 - h_E^*)}{C_{ps}} + \frac{u(h_E^* - H_0 - L)}{C_{pl}} \right\} \quad (IV.24.a)$$

$$A_w = a_w * \left\{ \left( \frac{T_{m2} - T_{m1}}{L} \right) * u(h_w^* - H_0) * u(L + H_0 - h_w^*) + \frac{u(H_0 - h_w^*)}{C_{ps}} + \frac{u(h_w^* - H_0 - L)}{C_{pl}} \right\} \quad (IV.24.b)$$

$$A_P = \frac{\rho_P * \Delta x}{\Delta t} + (a_E + a_E - S_p^k * \Delta x_P) * \left\{ \left( \frac{T_{m2} - T_{m1}}{L} \right) * u(h_P^* - H_0) * u(L + H_0 - h_P^*) + \frac{u(H_0 - h_P^*)}{C_{ps}} + \frac{u(h_P^* - H_0 - L)}{C_{pl}} \right\} \quad (IV.24.c)$$

Et :

$$B = \left( \frac{\rho_P * \Delta x_P}{\Delta t} \right) * h_P^{k-1} + S_c^k * \Delta x_P + a_w * \left( u(h_w^* - H_0) * u(L + H_0 - h_w^*) * \left( -T_{m1} + \left( \frac{T_{m2} - T_{m1}}{L} \right) * H_0 \right) \right) + a_w * \left\{ \left( u(H_0 - h_w^*) * \left( -T_{m1} + \left( \frac{1}{C_{ps}} \right) * H_0 \right) \right) + \left( u(h_w^* - H_0 - L) * \left( -T_{m1} + \left( \frac{H_0 + L}{C_{pl}} \right) \right) \right) \right\} + a_E * \left( u(h_E^* - H_0) * u(L + H_0 - h_E^*) * \left( -T_{m1} + \left( \frac{T_{m2} - T_{m1}}{L} \right) * H_0 \right) \right) + a_E * \left\{ \left( u(H_0 - h_E^*) * \left( -T_{m1} + \left( \frac{1}{C_{ps}} \right) * H_0 \right) \right) + \left( u(h_E^* - H_0 - L) * \left( -T_{m1} + \left( \frac{H_0 + L}{C_{pl}} \right) \right) \right) \right\} - (a_E + a_E - S_p^k * \Delta x_P) * \left( u(h_E^* - H_0) * u(L + H_0 - h_E^*) * \left( -T_{m1} + \left( \frac{T_{m2} - T_{m1}}{L} \right) * H_0 \right) \right) - (a_E + a_E - S_p^k * \Delta x_P) * \left\{ \left( u(H_0 - h_P^*) * \left( -T_{m1} + \left( \frac{1}{C_{ps}} \right) * H_0 \right) \right) + \left( u(h_P^* - H_0 - L) * \left( -T_{m1} + \left( \frac{H_0 + L}{C_{pl}} \right) \right) \right) \right\} \quad (IV.24.d)$$

Ces équations sont assemblés dans une matrice tridiagonale, où seuls les coefficients diagonaux, sous-diagonaux et sur-diagonaux sont non nuls.

La résolution par la méthode TDMA donnent alors les  $h_P^k$  actuelles .

## ALGORITHME CAS HOMOGENE IMPLICITE

## DONNEES :

KMAX , EPS , N , MAXRES ,  $\Delta t$  et (  $\Delta x(p)$  ,  $p = 1, N + 2$ )

( $h_p^0$  ,  $T_p^0$  ,  $p=1, N+2$ ) (IV.19.a) , (IV.19.b)

## MARCHE DANS LE TEMPS :

POUR K = 1 , KMAX FAIRE

POUR p = 1, N+2 FAIRE

CALCUL DES aW(p) , aE(p) (IV.12) , (IV.13)

$$h_p^* = h_p^{k-1}$$

FINPOUR

## FAIRE DES ITERATIONS :

POUR IRES = 1 , MAXRES FAIRE

POUR p = 1 , N+2 FAIRE

CALCUL DES COEFFICIENTS : AW, AP, AE, B (IV.24)

FINPOUR

APPEL DE THOMAS : TDMA(N+2, AW, AP, AE, B, R)

POUR p = 1, N+2 FAIRE

$$h_p^k = R(p)$$

CALCUL DES TEMPERATURES :  $T_p^k$  (IV.21)

FINPOUR

## CALCUL DU RESIDUEL :

RES = 0.0

POUR p = 1 , N+2 FAIRE

$$RES1 = \text{ABS}(h_p^k - h_p^*)$$

RES = RES + RES1 \* RES1

FINPOUR

RES = SQRT(RES)/(N+2)

SI(RES < EPS) aller à 2

FINPOUR

2 AFFICHER LES RESULTATS :  $h_p^k$  ,  $T_p^k$

FINPOUR

### IV.3 Matériaux Hétérogènes

Dans les matériaux hétérogènes, les équations enthalpique de la conduction et la relation enthalpie température sont données par (II.19) , (II.20) et (II.4).

- Dans la matrice :

$$C_m \frac{\partial T_m}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left( k_m \frac{\partial T_m}{\partial x} \right) - H_c (T_m - T_p) + S_{c_m}(x, t) + S_{p_m}(x, t) T_m \quad (II.19)$$

- Dans les particules :

$$(NV_p) \rho_p \frac{\partial h_p}{\partial t} = H_c (T_\infty - T_p) + S_{c_p}(x, t) + S_{p_p}(x, t) T_p \quad (II.20)$$

Le domaine physique est discrétisé en volumes de contrôles dans les quels sont centres les nœuds du maillage, aux bords du domaine sont places les nœuds limites et les volumes de contrôles limites sont nuls.

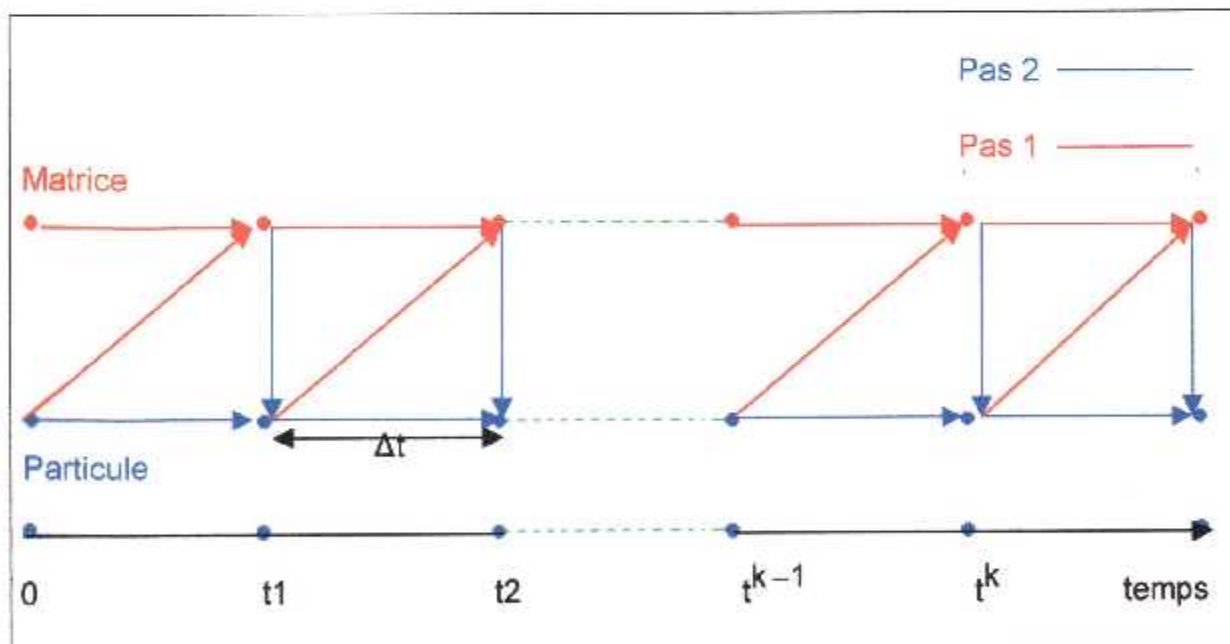


Schéma à 2 pas pour les matériaux hétérogènes

En intégrant les équations (II.19) et (II.20) sur le volume de contrôle, pendant l'intervalle de temps  $t^{k-1}$  jusqu'à  $t^k$ , on obtient :

• **Matrice :**

$$\int_{t^{k-1}}^{t^k} \int_w^e \left\{ \frac{\partial}{\partial x} \left( k_m \frac{\partial T_m}{\partial x} \right) - H_c(T_m - T_p) + S_{c_m}(x, t) - S_{p_m}(x, t) \right\} dx dt = \int_{t^{k-1}}^{t^k} \int_w^e C_m \frac{\partial T_m}{\partial t} dx dt \quad (IV.25)$$

• **Particules :**

$$\int_{t^{k-1}}^{t^k} \int_w^e \left\{ H_c(T_m - T_p) + S_{c_p}(x, t) - S_{p_p}(x, t) \right\} dx dt = \int_{t^{k-1}}^{t^k} \int_w^e (NV_p) \rho_p \frac{\partial T_m}{\partial t} dx dt \quad (IV.26)$$

Chaque terme de l'équation (IV.25) est évalué dans l'étape 1, où la température de la matrice est déterminée pendant chaque pas de temps à la fin de l'intervalle, alors que celles des particules est calculé au début de l'intervalle du domaine temporel.

On a :

$$\int_{t^{k-1}}^{t^k} \int_w^e C_m \frac{\partial T_m}{\partial t} dx dt = \int_w^e C_m (T_m^k - T_m^{k-1}) dx = C_m (T_m^k - T_m^{k-1}) \Delta x_p \quad (IV.25.a)$$

$$\int_{t^{k-1}}^{t^k} \int_w^e \frac{\partial}{\partial x} \left( k_m \frac{\partial T_m}{\partial x} \right) dx dt = \left[ k_{m,e} \left( \frac{T_{m,E}^k - T_{m,P}^k}{(\delta x)_e} \right) - k_{m,w} \left( \frac{T_{m,P}^k - T_{m,W}^k}{(\delta x)_w} \right) \right] \Delta t \quad (IV.25.b)$$

$$\int_{t^{k-1}}^{t^k} \int_w^e -H_c(T_m - T_p) dx dt = [-H_c(T_m - T_p)] \Delta x_p \Delta t \quad (IV.25.c)$$

$$\int_{t^{k-1}}^{t^k} \int_w^e \left\{ \frac{\partial}{\partial x} \left( k_m \frac{\partial T_m}{\partial x} \right) - H_c(T_m - T_p) + S_{c_m}(x, t) - S_{p_m}(x, t) \right\} dx dt = \int_{t^{k-1}}^{t^k} \int_w^e C_m \frac{\partial T_m}{\partial t} dx dt \quad (IV.25.d)$$

Chaque terme de l'équation (IV.26) est intégré dans le temps par un schéma explicite ou implicite pour les particules dans l'étape 2.



Comme les équation (IV.25) et (IV.26) ont un terme en commun ,celui-ci doit être évalué de la même façon.

L'intégration de chaque terme de l'équation (IV.26) donne :

$$\int_{t^{k-1}w}^{t^k} \int_e (NVp) \rho_p \frac{\partial h_p}{\partial t} dx dt = \int_w^e (NVp) \rho_p (h_p^{k-1}(p) - h_p^{k-1}(p)) dx$$

$$\int_{t^{k-1}w}^{t^k} \int_e (NVp) \rho_p \frac{\partial h_p}{\partial t} dx dt = (NVp)^* \rho_p (h_p^k(p) - h_p^{k-1}(p)) * \Delta x(p) \quad (IV.26.a)$$

$$\int_{t^{k-1}w}^{t^k} \int_e (Hc(T_m - T_p)) dx dt = Hc (T_m^{k-1}(p) - T_p^{k-1}(p)) \Delta x(p) * \Delta t \quad (IV.25.c)$$

$$\int_{t^{k-1}w}^{t^k} \int_e (Sc_p(x,t) + Sp_p(x,t)T_p) dx dt = (1-\beta) [Sc_p^{k-1} + Sp_p^{k-1}T_p^{k-1}(p)] * \Delta x(p) * \Delta t$$

$$+ \beta [Sc_p^k + Sp_p^k * T_p^k(p)] * \Delta x(p) * \Delta t \quad (IV.26.b)$$

Où :

- $\beta = 0$  pour le schéma explicite ;
- $\beta = 1$  pour le schéma implicite .

La conductivité à l'interface est évaluée en utilisant le concept de la résistance de contacte thermique.

$$\frac{k_{m,e}}{(\delta x)_e} = \frac{2k_m(p) * k_m(p+1)}{\Delta x(p+1) * k_m(p) + \Delta x(p) * k_m(p+1)} \quad (IV.27)$$

$$\frac{k_{m,w}}{(\delta x)_w} = \frac{2 * k_m(p) * k_m(p-1)}{\Delta x(p-1) * k_m(p) + \Delta x(p) * k_m(p-1)} \quad (IV.28)$$

En substituant les équations (IV.25.a) à (IV.25.d) dans l'équation (IV.25) et en intégrant pour tous les volumes de contrôles allant de  $p = 2$ , jusqu'à  $p = n + 1$ , pour chaque pas de temps par L'équation (IV.29) :

$$AP_m(p)T_m^k(p) = AW_m(p)T_m^k(p-1) + AE_m(p)T_m^k(p+1) + B_m(p) \quad (IV.29)$$

Avec :

$$AW_m(p) = \frac{k_{m,w}}{(\delta x)_w} \quad (\text{IV.30.a})$$

$$AE_m(p) = \frac{k_{m,e}}{(\delta x)_e} \quad (\text{IV.30.b})$$

$$AP_m(p) = C_m * \Delta x(p) + AE_m(p) * \Delta t + AW_m(p) * \Delta t + Hc * \Delta x(p) \Delta t - Sp_m^k(p) \quad (\text{IV.30.c})$$

$$Bm(p) = C_m * T_m^{k-1}(p) \Delta x(p) + Hc * T_p^{k-1}(p) \Delta x(p) \Delta t + Sc_m^k(p) \Delta x(p) \Delta t \quad (\text{IV.30.d})$$

Les équations dues aux conditions aux limites en  $x = 0$  et  $x = l$  et la condition initiale sont :

les conditions aux limites en  $x = 0$  est déterminée suivant les types Dirichlet , Neuman ou Robins .

- **Température imposée ,  $T_0$  :**

$$T_m(0, t) = T_0$$

$$T_m^k(1) = T_0 \quad (\text{IV.31})$$

$$AE_m(1) = 0$$

$$AW_m(1) = 0$$

$$AP_m(1) = 1$$

$$Bm(1) = T_0$$

- **Flux imposé  $q$  avec convection  $H$  et  $T_0$  :**

$$km \frac{\partial T_m}{\partial x} = q + H * [T_\infty - T_m(0, t)]$$

$$k_m(1) \frac{T_m^k(1) - T_m^k(2)}{0.5 * \Delta x(2)} = q + H * [T_\infty - T_m^k(1)] \quad (\text{IV.32})$$

$$AEm(1) = \frac{2k_m(2)}{\Delta x(2)}$$

$$APm(1) = \frac{2k_m(2)}{\Delta x(2)} + H$$

$$Bm(1) = q + H * T_\infty$$

La condition aux limites en  $x = l$  est définie par :

- **Température imposée en  $x = l$  :**

$$T_m(l, t) = T_l$$

$$T_m^k(N+2) = T_l \quad (\text{IV.33})$$

$$AWm(N+2) = 0$$

$$APm(N+2) = 1$$

$$Bm(N+2) = T_l$$

- **Flux imposé  $q$  avec convection  $H$  et  $T_\infty$  :**

$$k_m \frac{\partial T_m}{\partial x} = q + H * [T_\infty - T_m(l, t)]$$

$$k_m(N+1) \frac{T_m^k(N+2) - T_m^k(N+1)}{0.5 * \Delta x(N+1)} = q + H * (T_\infty - T_m^k(N+2)) \quad (\text{IV.34})$$

Donc :

$$AWm(N+2) = 2 \frac{k_m(N+1)}{\Delta x(N+1)}$$

$$AP_m(N+2) = 2 \frac{km(N+1)}{\Delta x(N+1)} + H$$

$$B_m(N+2) = q + H * T_\infty$$

La condition initiale est définie par :

$$T_m^0 = T_{initiale} \quad (IV.35)$$

$$T_p^0 = T_{initiale} \quad (IV.36)$$

En accordant l'équation (IV.30) pour les volumes de contrôles CV allant de  $p = 2$ , jusqu'à  $p = N + 1$ , et en utilisant les équations (IV.31) jusqu'à (IV.34), pour les conditions aux limites et initiales, nous obtenons  $N+2$  équations à  $N+2$  inconnues. Ces équations sont assemblées dans une matrice tridiagonale, où chaque coefficient est nul sauf, ceux de la diagonale, sur-diagonale et sous-diagonale.

Les températures  $T_m^k(p)$  sont déterminées en résolvant le système (TDMA).

En substituant les équations (IV.26.a),(IV.26.b),(IV.25.c) dans l'équation (IV.26), on obtient :

$$h_p^k(p) = h_p^{k-1}(p) + \frac{Hc * (T_m^k(p) - T_p^{k-1}(p)) * \Delta x(p) * \Delta t}{(NVp) * \rho_p(p) * \Delta x(p)} + \frac{(1-\beta) * (Sc_p^{k-1} + Sp_p^{k-1} T_p^{k-1}(p)) \Delta x(p) * \Delta t}{(NVp) * \rho_p(p) * \Delta x(p)} + \frac{\beta * (Sc_p^k + Sp_p^k T_p^k(p)) * \Delta x(p) * \Delta t}{(NVp) * \rho_p(p) * \Delta x(p)} \quad (IV.37)$$

Où :

- $\beta = 0$ , pour le schéma implicite .
- $\beta = 1$ , pour le schéma explicite .

### IV.3.1 Méthode Explicite pour les particules

En remplaçant dans l'équation (IV.37),  $\beta = 0$ , le schéma devient explicite. A chaque pas de temps, les  $h_p^k(p)$  sont calculées pour tous les volumes de contrôles allant de  $p = 2$  jusqu'à  $p = N + 1$  par l'équation (IV.38) :

$$h_p^k(p) = h_p^{k-1}(p) + \frac{Hc * (T_m^k(p) - T_p^{k-1}(p)) * \Delta x(p) * \Delta t}{(NVp) * \rho_p(p) * \Delta x(p)} + \frac{(Sc_p^{k-1} + Sp_p^{k-1} T_p^{k-1}(p)) * \Delta x(p) * \Delta t}{(NVp) * \rho_p(p) * \Delta x(p)} \quad (IV.38)$$

Connaissant les  $h_p^k(p)$  et en utilisant l'équation (II.4), les températures pour tous les volumes de contrôles allant de  $p = 2$  jusqu'à  $N+1$  seront calculées à chaque pas de temps par l'équation (IV.39) :

$$h_p^k(p) = h_p^{k-1}(p) + \frac{\Delta x(p) * \Delta t}{(NVp) * \rho_p(p) * \Delta x(p)} \left[ Hc * (T_m^k(p) - T_p^{k-1}(p)) + Sc_p^{k-1} + Sp_p^{k-1} T_p^{k-1}(p) \right] \quad (IV.39)$$

Comme le schéma explicite est instable, les coefficients  $h_p^{k-1}(p)$  dans l'équation (IV.38) doivent restées négatives après avoir substituer  $T_p^{k-1}(p)$  en terme de  $h_p^{k-1}(p)$  dans l'équation (IV.39) ou (IV.3). Par conséquent le pas de temps doit rester inférieur à une valeur dite critique.

La condition de stabilité [6] est déterminée par :

$$\Delta t \leq \begin{cases} (Cpl) \frac{\rho_p(p) * (NVp)}{Hc + Sp_p^{k-1}(p)} & , \quad h_p^{k-1}(p) > H0 + L \\ \left[ \frac{L}{Tm2 - Tm1} \right] \frac{\rho_p(p) * (NVp)}{Hc + Sp_p^{k-1}(p)} & , \quad H0 \leq h_p^{k-1}(p) \leq H0 + L \\ (Cps) \frac{\rho_p(p) * (NVp)}{Hc + Sp_p^{k-1}(p)} & , \quad h_p^{k-1}(p) < H0 \end{cases} \quad (IV.40)$$

- **Remarque**

Pour les matériaux purs, où  $Tm2 = Tm1$ , durant le changement de phase  $\Delta t < \infty$ , donc il n'y a pas de restriction de temps pendant cette phase.

### IV.3.2 Méthode Implicite pour les particules

En remplaçant dans l'équation (5.37),  $\beta = 1$ , le schéma devient implicite. A chaque pas de temps, les enthalpies  $h_p^k(p)$  sont calculées pour tous les volumes de contrôles allant de  $p = 2$  jusqu' à  $p = N + 1$  par l' équation (IV.41) :

$$h_p^k(p) = h_p^{k-1}(p) + \frac{\Delta x(p) * \Delta t}{(NVp) * \rho_p(p) * \Delta x(p)} \left[ Hc * \left( T_m^k(p) - T_p^{k-1}(p) \right) + Sc_p^k + Sp_p^k T_p^k(p) \right] \quad (IV.41)$$

Les  $h_p^k(p)$  et  $T_p^k(p)$  doivent être calculées simultanément dans l'équation (IV.41) et (IV.39) à chaque pas de temps. L' équation (IV.39) est non linéaire, donc la résolution des équations (IV.39) et (IV.41) simultanément demande des itérations.

La condition de stabilité [6] est déterminée par :

$$\Delta t \leq \begin{cases} \frac{(C_{pl}) \rho_p(p) * (NVp)}{Hc} & , \quad h_p^{k-1}(p) > H_0 + L \\ \left[ \frac{L}{T_{m2} - T_{m1}} \right] \frac{\rho_p(p) * (NVp)}{Hc} & , \quad H_0 \leq h_p^{k-1}(p) \leq H_0 + L \\ \frac{(C_{ps}) \rho_p(p) * (NVp)}{Hc} & , \quad h_p^{k-1}(p) < H_0 \end{cases} \quad (IV.42)$$

- **Remarque**

Pour les matériaux purs, où  $T_{m2} = T_{m1}$ , durant le changement de phase  $\Delta t < \infty$ , l'inégalité (IV.41) est inconditionnellement stable pendant cette phase.

**ALGORITHME CAS HETEROGENE IMPLICITE POUR LES PARTICULES**

**DONNEES**

N,Eps,MAXRES, Δt et (Δx(p) , h<sub>p</sub><sup>0</sup> , T<sub>p</sub><sup>0</sup> , p = 1 , N + 2 )

**MARCHE DANS LE TEMPS :**

**POUR** K = 1, MAXK **FAIRE**

**CALCUL** des T<sub>m</sub><sup>k</sup>(p) en fonction des h<sub>p</sub><sup>0</sup>(p) par TDMA : (IV.30)

**POUR** p = 1,N+2 **FAIRE**

$$h_p^*(p) = h_p^{k-1}(p) \quad , \quad h_p^*(p) = h_p^{k-1}(p), h_p^*(p) = h_p^{k-1}(p)$$

RES = 1.

IRES = 0

**2 SI** (RES > EPS **ET** IRES < MAXRES ) **ALORS**

$$A = u(h_p^*(p) - H_0) * u(H_0 + L - h_p^*(p))$$

$$B = u(h_p^*(p) - H_0)$$

$$C = u(h_p^*(p) - H_0 - L)$$

**RESOLUTION DE (IV.39), (IV.41) PAR L'ALGORITHME DE NEWTON**

$$E = h_p^{k-1}(p) -$$

$$\frac{\Delta x(p) * \Delta t}{(NVp) * \rho_p(p) * \Delta x(p)} \left[ Hc * (T_m^k(p) - T_p^{k-1}(p)) + Sc_p^k + Sp_p^k * T \right] = 0 \quad (IV.41)$$

$$T - A * \left\{ T_{m1} + \frac{T_{m2} - T_{m1}}{L} \right\} + B * \left\{ T_{m1} + \frac{H_0 - E}{CP_{p,s}} \right\} + C * \left\{ T_{m2} + \frac{E - H_0 - L}{CP_{p,l}} \right\} = 0 \quad (IV.39)$$

$$RES = ABS(E - h_p^*(p))$$

$$h_p^*(p) = E \quad , \quad T_p^*(p) = T$$

IRES = IRES + 1

**ALLER A** 2

**FINSI**

**ACTUALISATION**

$$h_p^k(p) = E$$

$$T_p^k(p) = T$$

**FINPOUR**

**FINPOUR**

# Chapitre V



## Chapitre V

### Résultats et discussion

#### V.1 Matériaux homogènes :

##### V.1.1 Effets du nombre de Stefan : $Ste = 0.1$ ; $Cr = 1$ ; $Kr = 1$

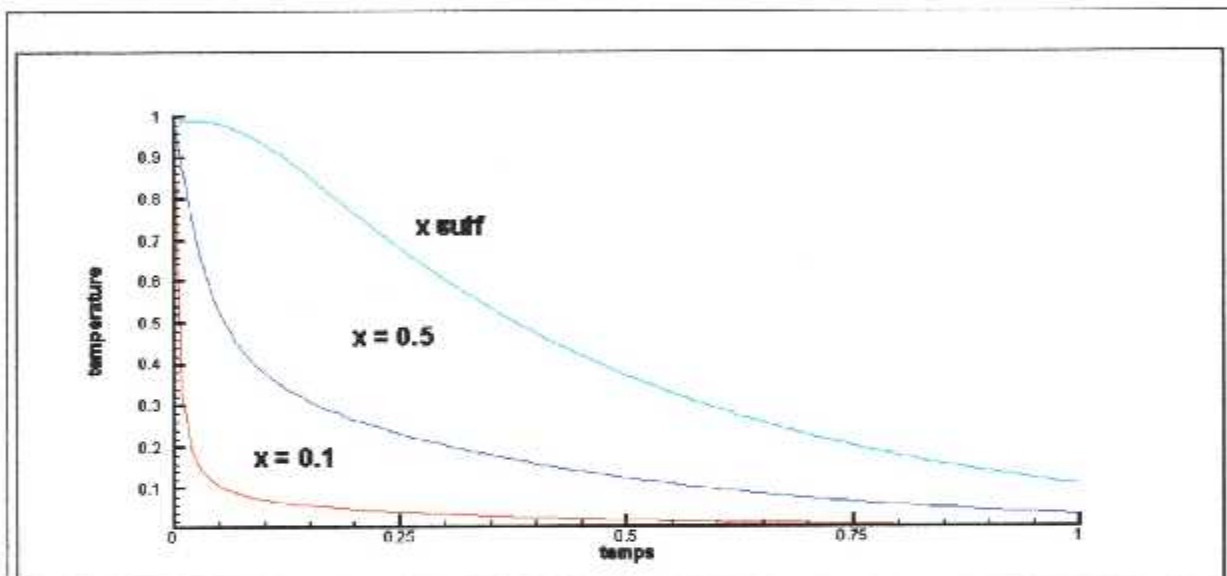


Fig.V.1 Evolutions de la Temperature (bicouche) dans le temps

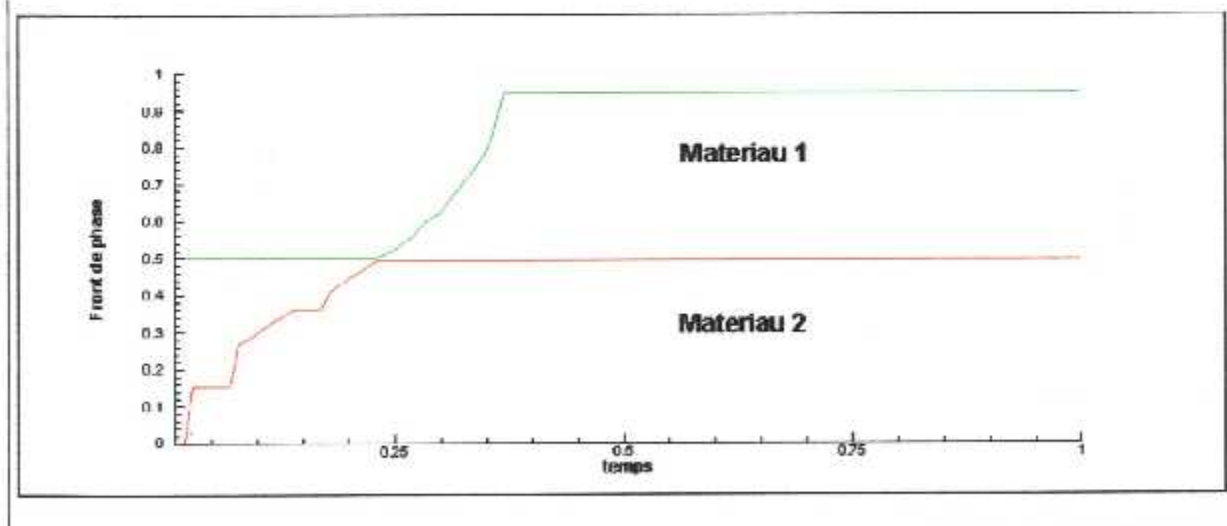


Fig.V.1 Front de fusion dans le temps (bicouche)

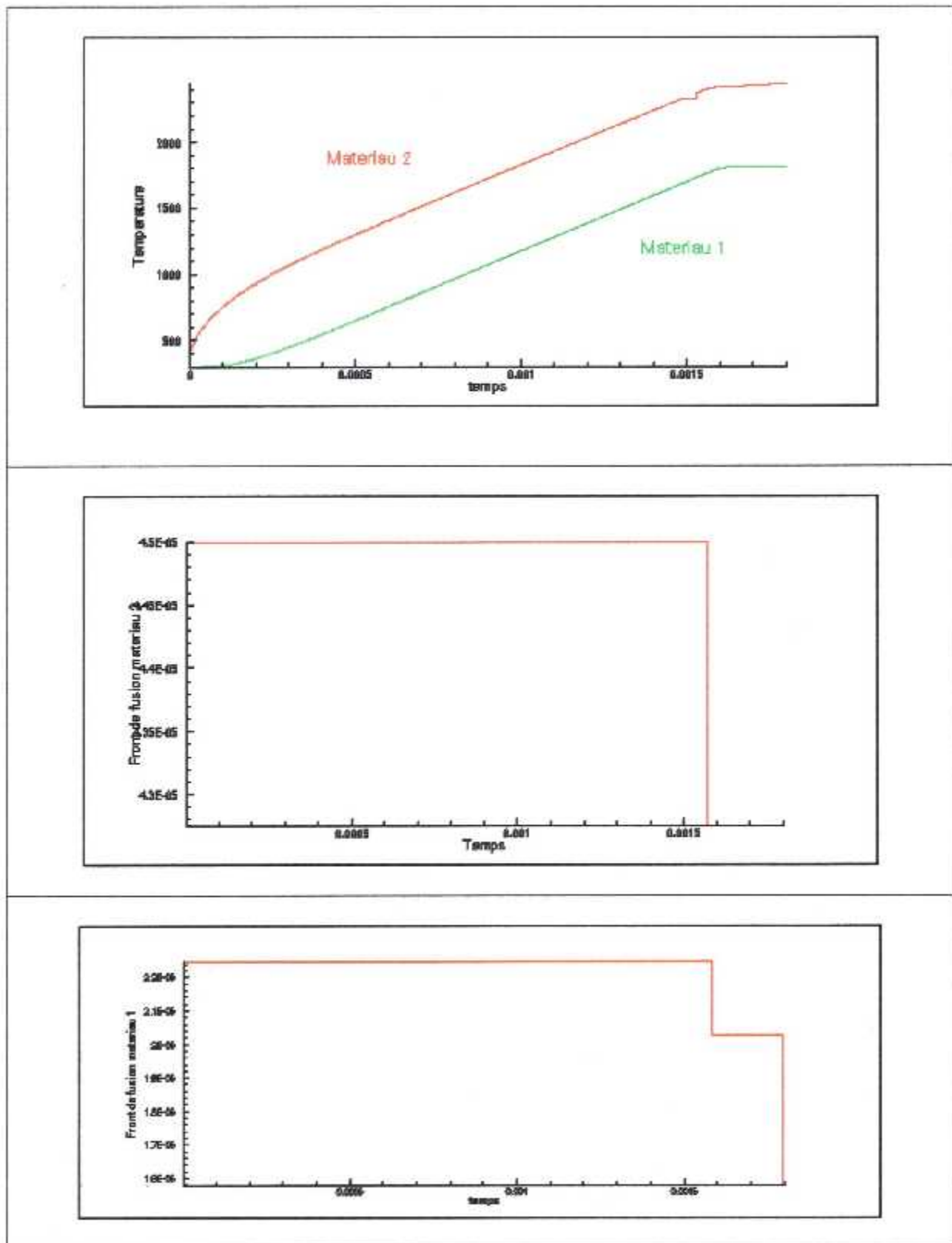


Fig.V.2 Front de fusion et températures surface centre (bicouche)

**V.1.2 Comparaison des géométries cylindrique et sphérique**

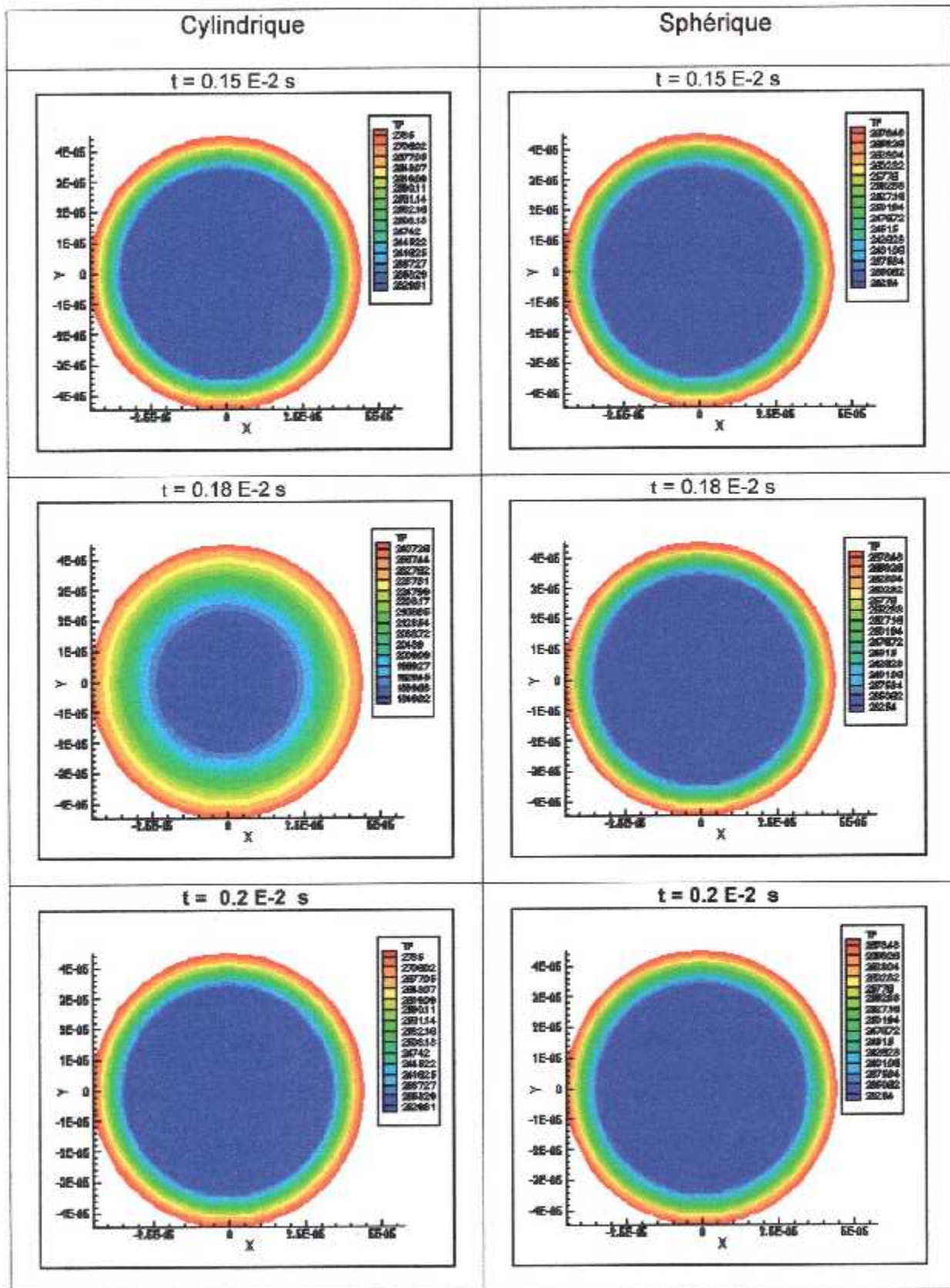


Fig.V.3 comparaison des géométries cylindriques et sphériques

**V.1.3 comparaison des géométries cartésienne et sphérique**

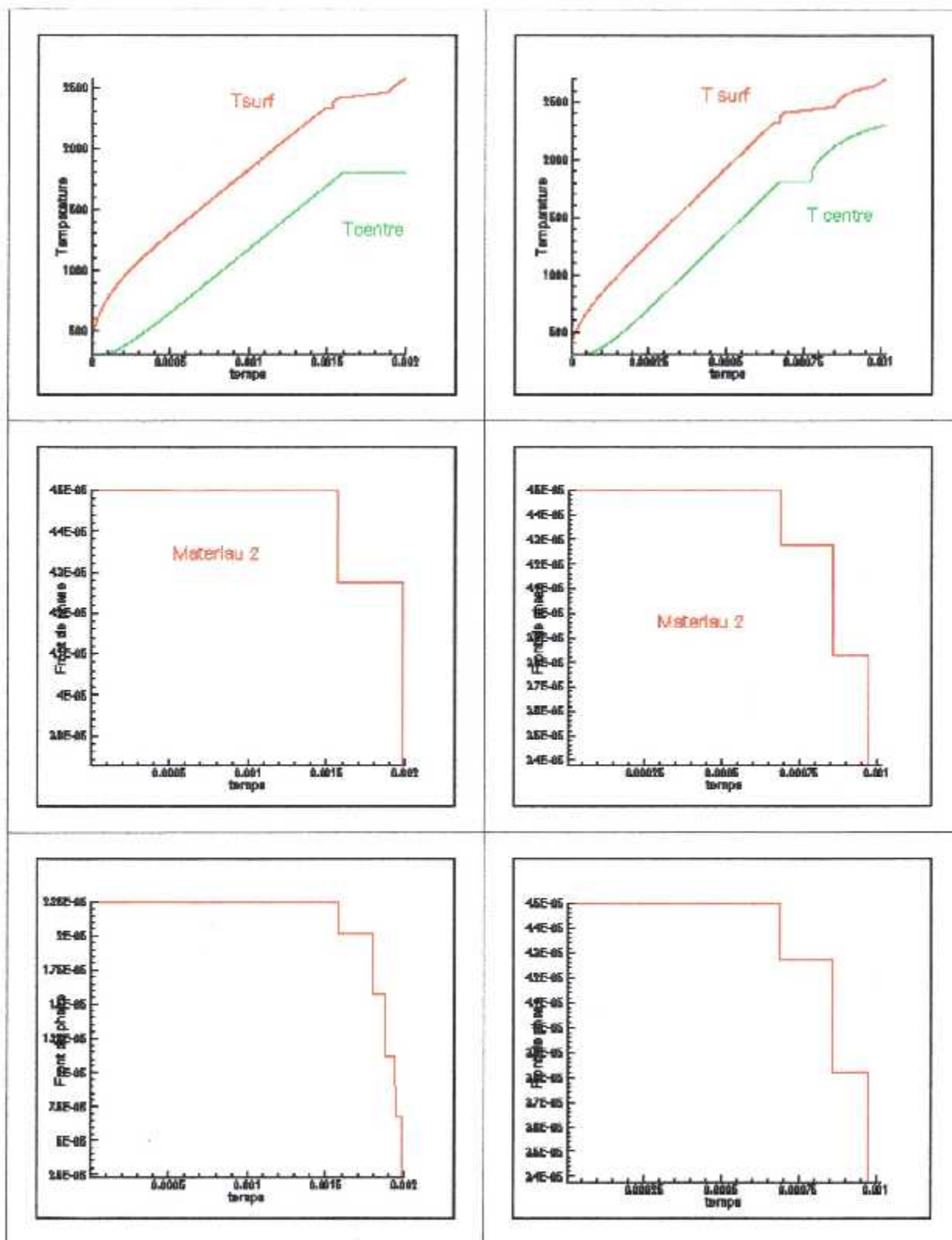
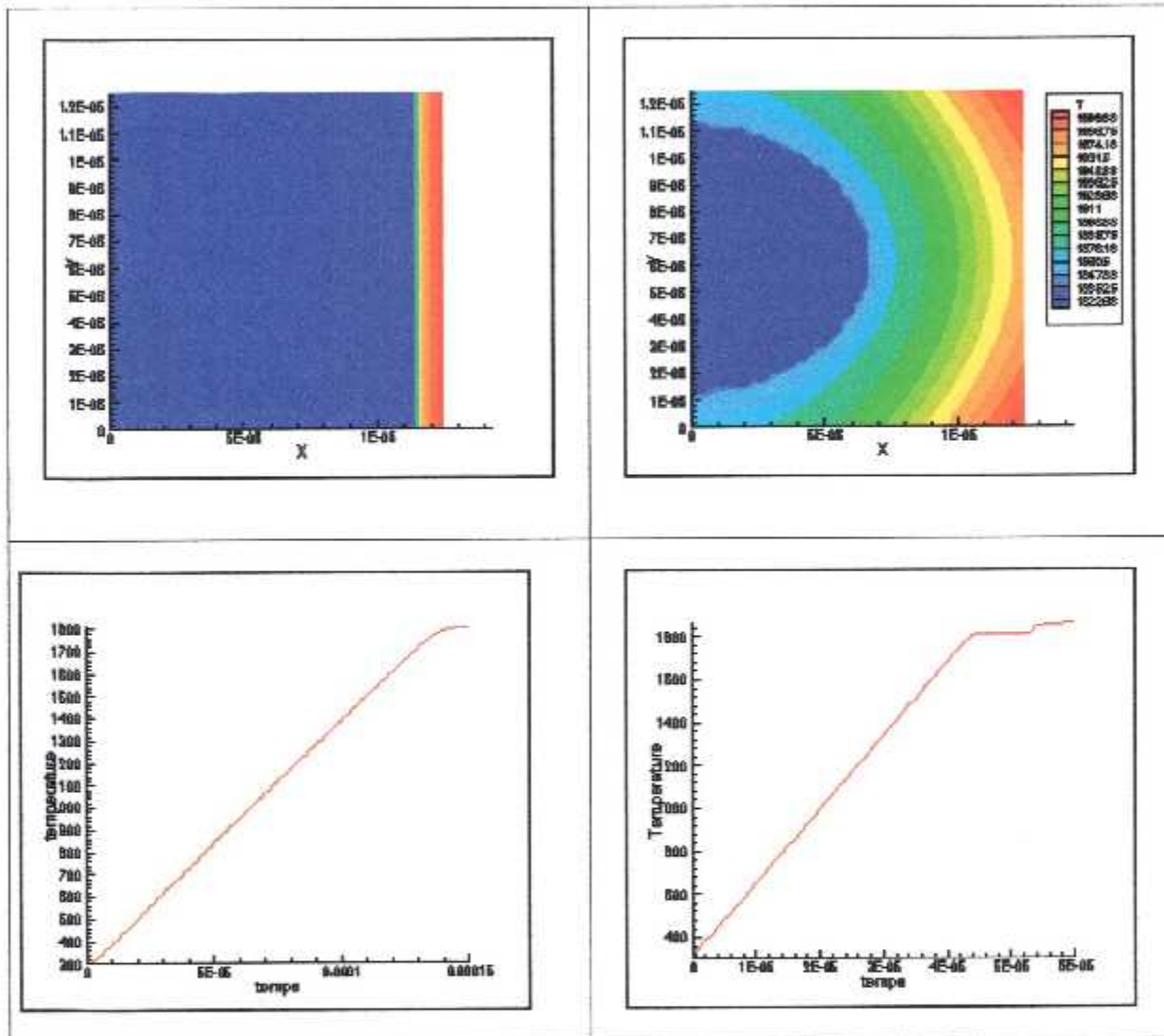


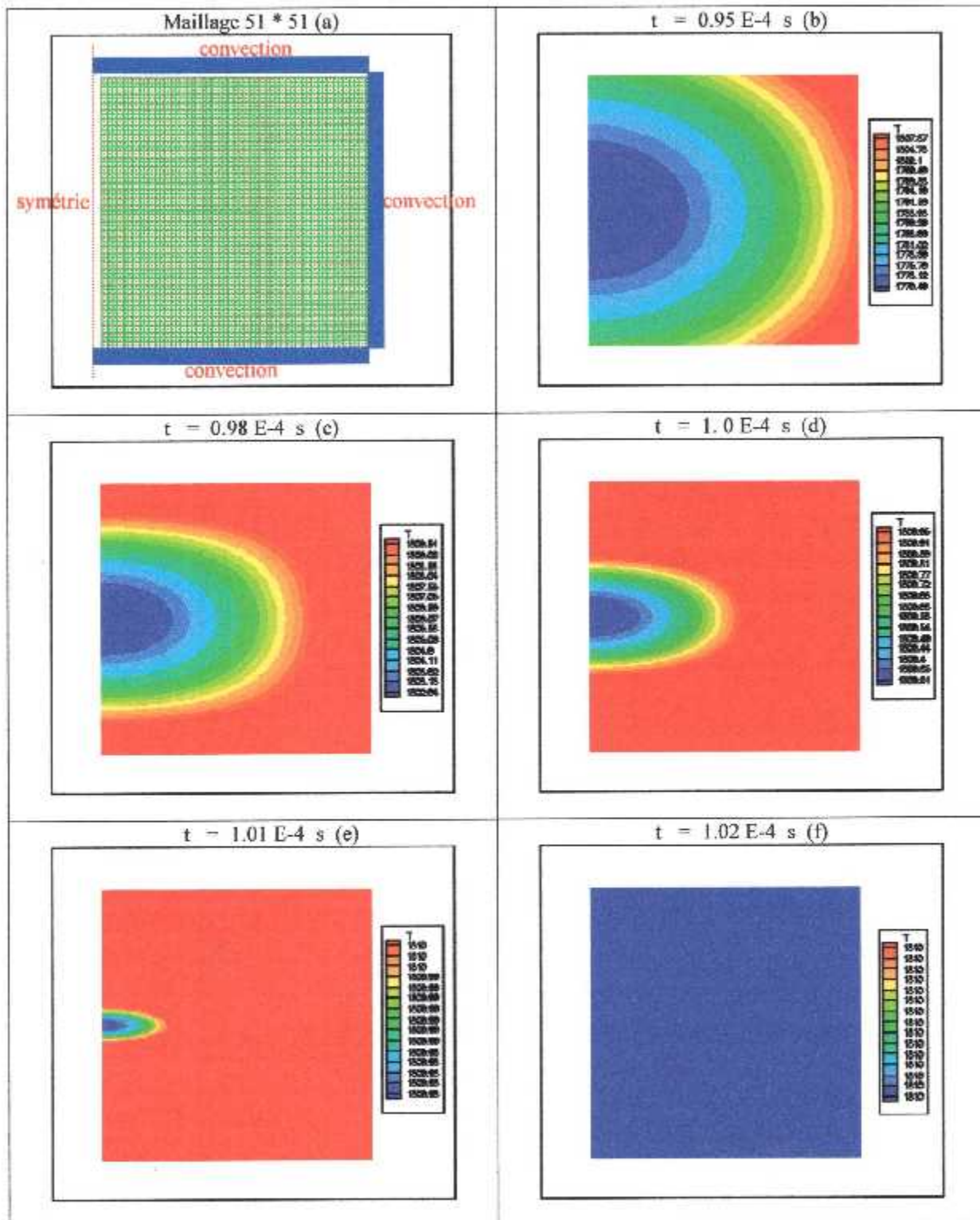
Fig.V.4 Front de fusion et température centre et surface

**V.1.4 Comparaison entre les géométrie 2d xy et 1D**



**Fig.V.5 Comparaison entre les géométrie 2D xy et 1D**

**V.1.5 changement de phase dans un rectangle**



**FigV.6. Changement de phase dans un rectangle**

**V.2 Matériaux hétérogènes**

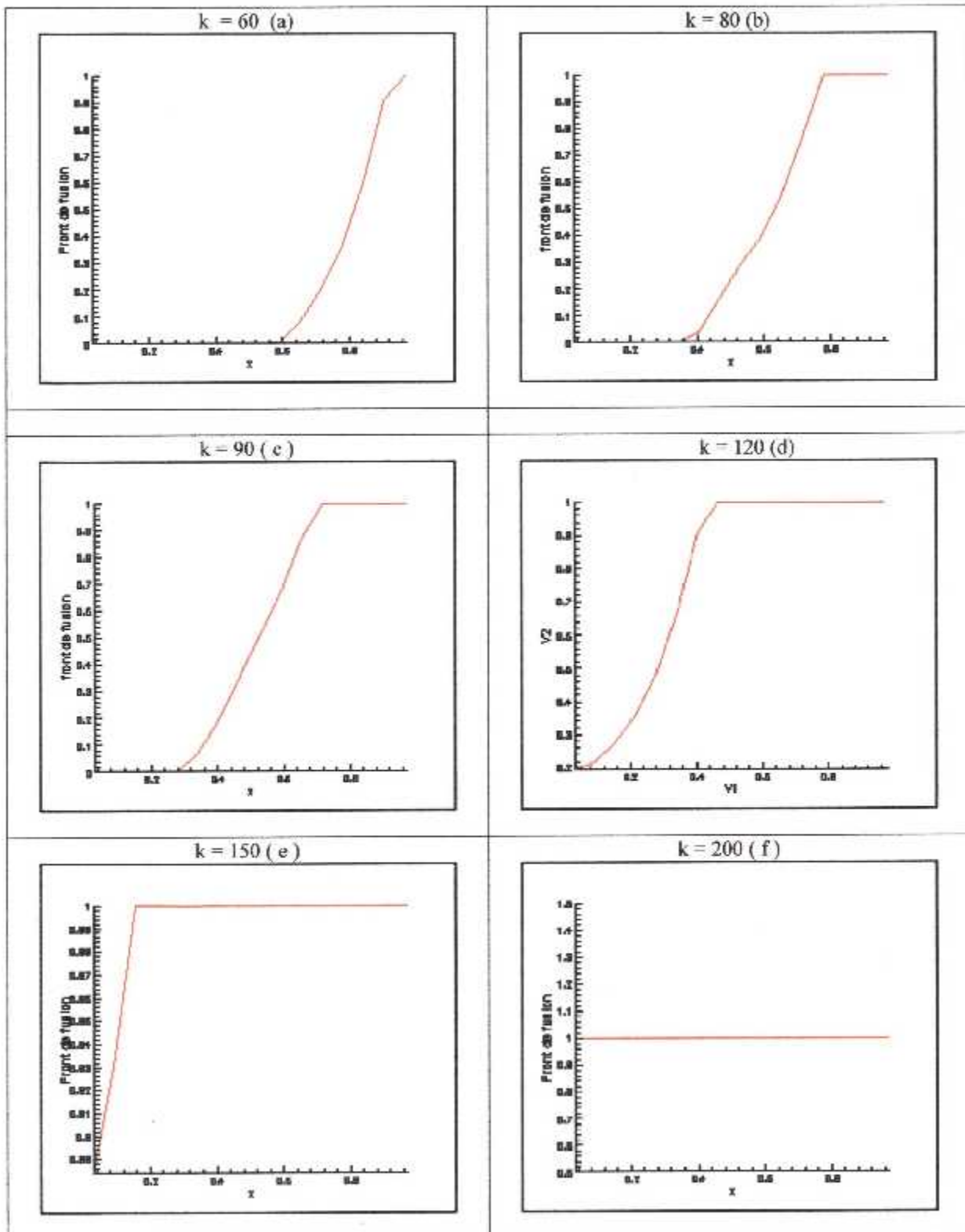


Fig. V.7 Front de phase dans le temps

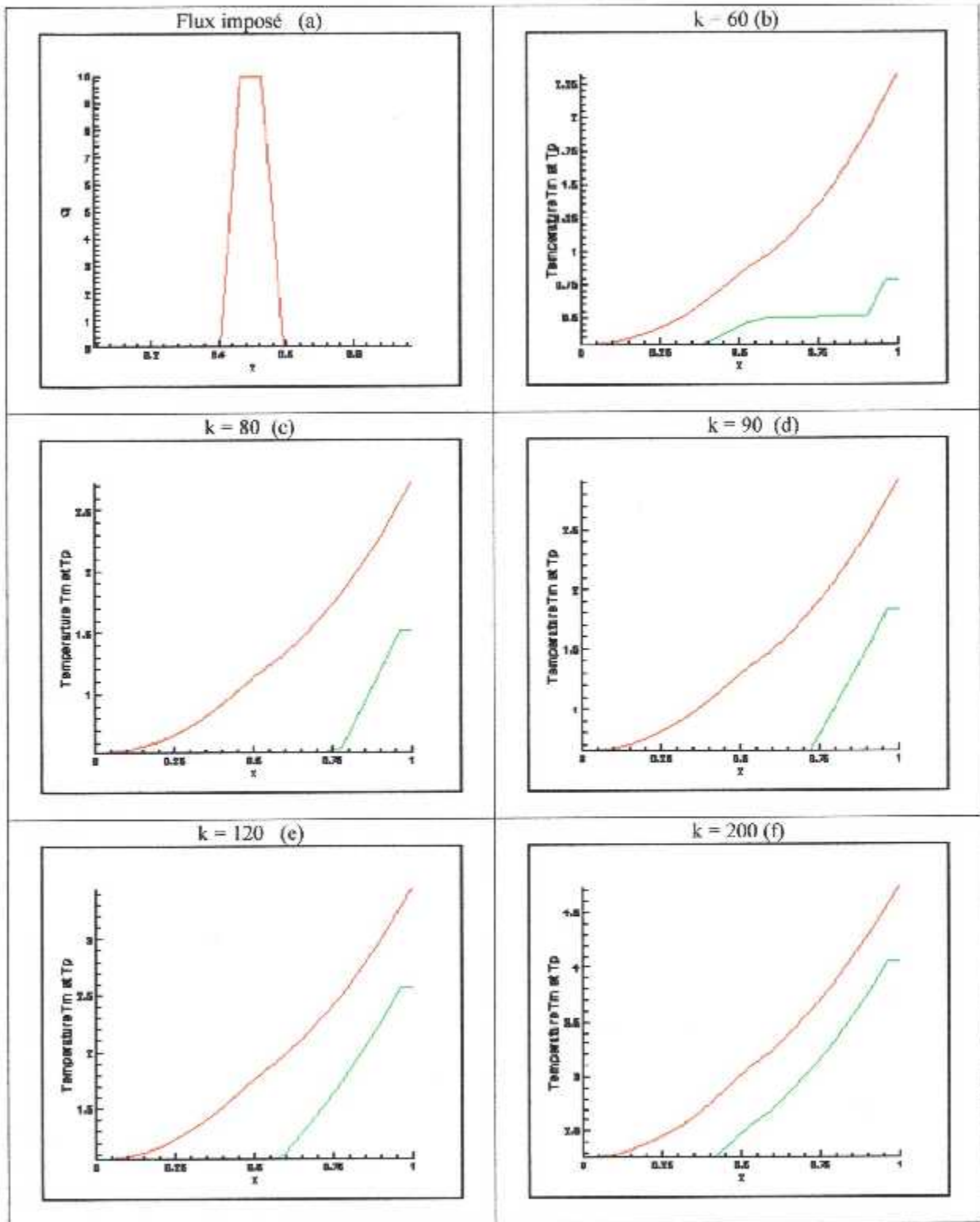


Fig. V.8 distribution des températures  $T_m$  et  $T_p$  temporelle



Cas d'un flux variable au bord limite :  $q = 20 \cdot \sin(1 + \pi \cdot t)$

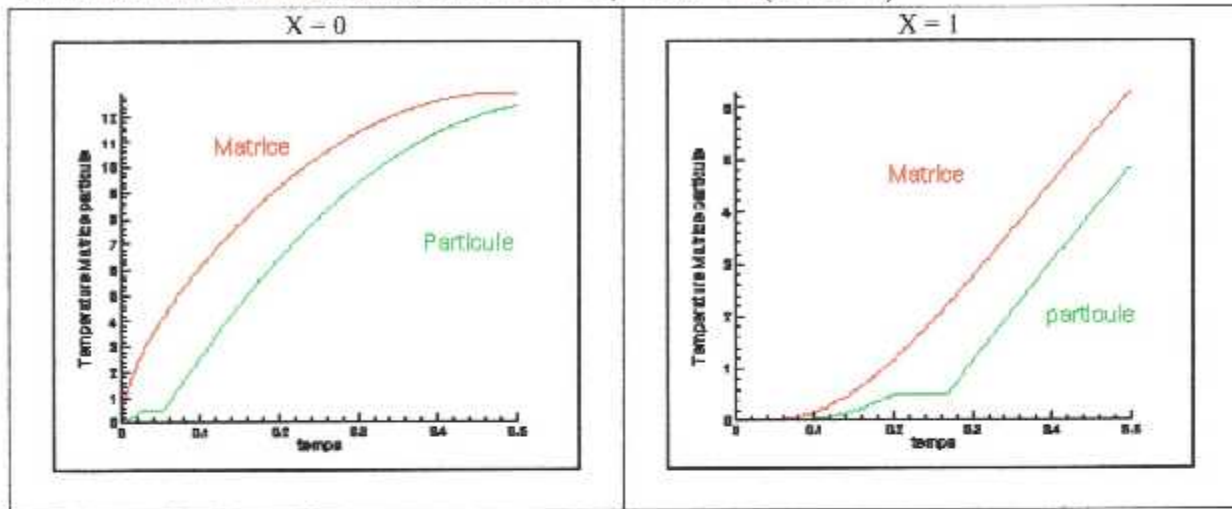


Fig. V.9 Evolution des températures matrice particule ( x = 0 , x = 1 )

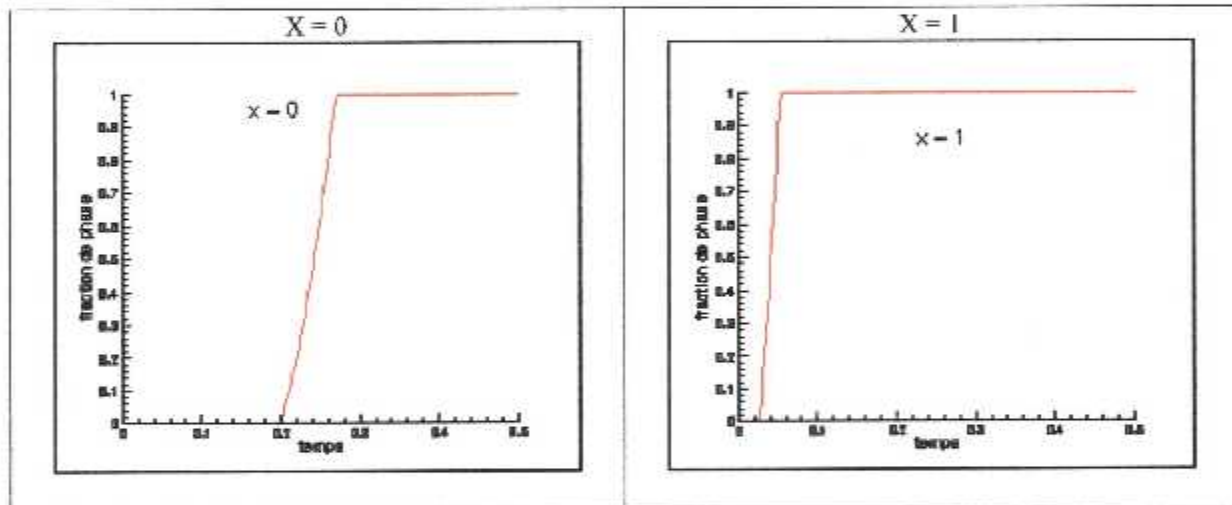


Fig. V.10 Evolution de la fraction liquide-solide particule ( x = 0 , x = 1 )

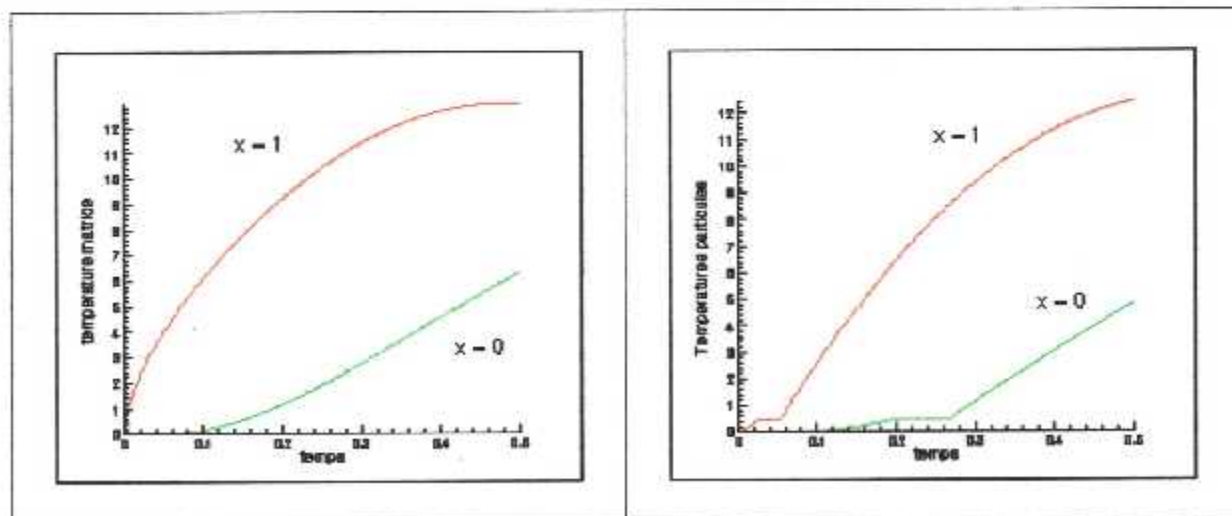


Fig. V.11 Evolution de la températures de matrice et particule en ( x = 0 , x = 1 )

Dans Fig.V.1 nous donnons l'évolution de la température dans le temps, dans le cas du bicouche.

La figure Fig.V.1 est une représentation du front de fusion dans le temps

Fig.V.2 représente les fractions de phase et les températures à la surface et au centre dans un bicouche.

Une comparaison entre comparaison des géométries cylindriques et sphériques dans la figure Fig.V.3 .

La Fig.V.4 donne le Front de fusion et température au centre et à la surface.

Comparaison entre les géométrie 2D xy et 1D est donnée dans Fig.V.5 .

La figure FigV.6. représente le changement de phase dans un rectangle.

La Fig. V.7 une représentation du front de phase dans le temps pour un matériau hétérogène, suivi de la distribution des températures  $T_m$  et  $T_p$  temporelle dans la figure Fig. V.8

Nous donnons dans le cas d'un flux variable au bord limite , Evolution de la températures de matrice et particule en ( $x=0$  ,  $x=1$  ) par la figure Fig. V.11, suivi de Evolution de la fraction liquide-solide particule ( $x=0$  ,  $x=1$  ) dans la Fig. V.10 .

Une évolution des températures matrice particule ( $x=0$  ,  $x=1$  ) est donnée dans la figure Fig. V.9.

# Conclusion

## Conclusion Générale

Cette étude nous a permis de traiter le problème de Stefan dans divers matériaux, à savoir les systèmes thermiquement minces, les matériaux homogènes monodimensionnels, enfin les matériaux hétérogènes monodimensionnels, par la technique des volumes finis implicite.

Pour les matériaux homogènes, nous avons donné la solution numérique pour les deux schémas explicite et implicite, suivi d'une généralisation dans le cas monodimensionnel pour les géométries cylindrique et sphérique, puis dans le cas 2D, en traitant le changement de phase dans un rectangle.

Pour les matériaux hétérogènes, nous avons défini la notion de conductance de contact, masse réduite, en considérant que le changement de phase des particules, il serait très intéressant d'étudier aussi le problème de Stefan dans la matrice, Il serait aussi important d'étudier le cas bidimensionnel dans ce type de matériaux.

Nous avons supposé la relation enthalpie température linéaire, il serait intéressant de traiter la non linéarité pendant le changement de phase.

On pourrait reprendre ce travail, en utilisant d'autres méthodes, en les comparant avec la méthode enthalpique .

J'espère que ce travail pourrait être corrigé et amélioré, car de nombreux aspects n'ont pas pu être abordés ici.

---

## BIBLIOGRAPHIE

- [1] **COURS DE TRANSFERT THERMIQUE 4 IEME ANNEE : M. BOUNEDER**
- [2] **GOODMAN (T.R) : Application of integral methods to transient non-linear heat transfer.**  
**Advances in Heat Mass Transfer, p.51-122 (1964)**
- [3] **PATANKAR S. V. ( 1980 ) : Numerical Heat Transfer and Fluid Flow.**  
McGraw-Hill, New York
- [4] **PATANKAR S. V. ( 1980 ) : Computation of conduction and duct Flow heat transfer.**  
Maple grove, MN : Innovative Research Inc.
- [5] **OZISIK (1994) : Ozisik, N. M., 1994, Finite Difference Methods in Heat Transfer.**  
CRC Press, Florida.
- [6] **COURS D'ANALYSE NUMERIQUE 4IEME ANNEE : M. AMTOUT**
- [7] **PHAM (1985) : Pham, Q., 1986, "A Fast Unconditionally Stable Finite Difference Scheme for Heat Conduction with Phase Change," Int. J. Heat Mass Transfer, Vol. 28, pp.2079-2084.**
- [8] **POIRIER (1988 ) : Poirier, D., 1988, "On Numerical Methods Used in Mathematical Modeling of Phase Change in Liquid Metals," J. Heat Transfer, Vol. 110, pp.562-570.**
- [9] **Crank ( 1981) : Crank, J., 1981, "How to Deal with Moving Boundaries in Thermal Problems," in Numerical Methods in Heat Transfer (R. W. Lewis and K. Morgan, Eds.), John Wiley & Sons, New York.**
- [10] **Date ( 1991) : Date, A., 1991, "A Strong Enthalpy Formulation for the Stefan Problem," Int. J. Heat Mass Transfer, Vol. 34, No. 9, pp. 2231-2235.**
- [11] **Date (1992) : Date, A., 1992, "Novel Strongly Implicit Enthalpy Formulation for Multidimensional Stefan Problem," Numerical Heat Transfer, Part B, Vol. 21, pp. 231-251.**
- [12] **Fomin and Saitoh (1999) : Fomin, S. and T. S. Saitoh, 1999, "Melting of Unfixed Material in Spherical Capsule with Non- Isothermal Wall," Int. J. Heat Mass Transfer, Vol. 42, pp. 4197-4205.**
- [13] **Ketkar (1999) : Ketkar, P. S., 1999, "Numerical Thermal Analysis," ASME, New York.**
-