

République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'enseignement supérieur et de la recherche scientifique
Université Saad DAHLAB-BLIDA 1



Faculté des sciences

Département de Physique

Laboratoire de Physique théorique et Interaction Rayonnement-Matière (LPTHIRM)

MÉMOIRE DE FIN D'ÉTUDE

Pour l'obtention du diplôme de Master en physique

Option : Physique Théorique

Physique des particules à extra dimensions

Présenté par :

ZOULIKHA FOUZIA

Soutenu le 19 décembre 2022 devant le jury composé de :

Mlle. Saidani Samira	M.C.B	U.S.D.-Blida 1	Présidente
Mr. Hadj Moussa	M.C.A	U.S.D.-Blida 1	Examineur
Mr. Bradji Okba	M.A.A	U.S.D.-Blida 1	Superviseur

Blida, 2021-2022

Résumé:

Dans ce mémoire de master, nous considérons le problème des théories au-delà du modèle standard (SM) de la physique des particules. Nous passons en revue le SM avec quelques modèles alternatifs, en particulier les extensions extra-dimensionnelles. Nous concentrons notre étude sur les extensions minimales du SM dans lesquelles les bosons de jauge et de Higgs peuvent se propager dans une dimension supplémentaire signalée et compacte tandis que les champs de fermions sont confinés à un sous-espace à 4 dimensions. Après avoir discuté de la formulation de différents champs quantiques dans un espace à 5 dimensions, nous étudions quelques applications phénoménologiques du modèle.

Abstract:

In this master thesis, we consider the problem of theories beyond the standard model (SM) of particle physics. We review the SM with few alternative models, especially the extra dimensional extensions. We focus our study on minimal extensions of the SM in which gauge and Higgs bosons may propagate in a single, compact extra dimension while the fermions fields are confined to a 4-dimensional subspace. After discussing the formulation of different quantum field in 5-dimensional space we investigate some phenomenological application of the model.

Remerciements:

Je voudrais tout d'abord remercier Dieu Tout-Puissant qui m'a donné la force, la santé et la patience pour accomplir cet humble travail.

Je tiens à exprimer ma gratitude à mes chers parents qui ont fait de grands efforts pour voir ma réussite dans les études.

Enfin, Je tiens à remercier M. Bradji Okba pour ses encadrements, ses conseils et la disponibilité qu'il m'a montrée pour me permettre de mener à bien ce travail.

Je tiens également à remercier Mme Saidani Samira, qui a accepté de présider le comité d'arbitrage pour soutenir mon mémoire de maîtrise, et à M. Hadj Moussa pour l'honneur d'avoir accepté d'étudier ce travail pour moi.

J'adresse également mes remerciements à tous mes professeurs durant toutes mes années d'études.

Enfin, je tiens à remercier tous ceux qui, de près ou de loin, ont contribué à la réalisation de ce travail.

Contents

1	Introduction:	3
2	Chapitre I: Le Modèle Standard	4
2.1	Introduction	4
2.2	Les particules élémentaires	4
2.2.1	Les fermions	4
2.2.2	Les Leptons:	4
2.2.3	Les quarks:	5
2.3	Les interaction fondamentales	5
2.3.1	Les bosons:	5
2.3.2	Le boson de Higgs	6
2.4	Formulation mathématique et théorie de jauge:	6
2.4.1	Symétrie de Jauge Local U(1)	6
2.4.2	Théorie de jauge non abélienne:	8
2.5	Les Lois de Feynman:	14
2.6	Problèmes avec le modèle standard:	15
3	Chapitre II: L'électrodynamique quantique à 4-dimensions	17
3.1	L'équation de Klein-Gordon:	17
3.1.1	Solution libre de l'équation de Klein-Gordon:	17
3.2	L'équation de Dirac:	18
3.2.1	Solution libre de l'équation de Dirac:	19
3.2.2	Solution libre d'énergie négative:	22
3.2.3	Résumé:	23
3.2.4	Hélicité :	24
3.2.5	Construction d'états propres d'hélicité:	25
3.3	Applications phénoménologiques:	30
3.3.1	Élément de matrice pour $e^+e^- \rightarrow \mu^+\mu^-$	30
4	Chapitre III: Théorie quantique des champs à extra-dimensions	38
4.1	Introduction:	38
4.2	Décomposition de Kaluza-Klein:	38
4.2.1	Compactification:	38
4.2.2	Tour Kaluza-Klein:	38
4.2.3	Non-renormalisabilité:	41
4.2.4	Finitions ultraviolettes:	41
4.2.5	Modèles de plus grande dimension à l'échelle du TeV:	42
4.2.6	Caractéristiques générales des théories KK:	42
4.3	Dimensions supplémentaires universelles:	43
4.3.1	Fermions et orbifolding:	43
4.3.2	Bosons de jauge:	46
4.3.3	Termes localisés aux frontières et parité Kaluza-Klein:	48
4.3.4	Stabilité de la particule Kaluza-Klein la plus légère:	49
4.3.5	Corrections de masse:	49
4.4	Dimensions supplémentaires universelles minimales:	50
4.4.1	Cinq dimensions:	50
4.4.2	Six dimensions:	51
4.4.3	Phénoménologie du collisionneur:	53

4.5	Règles de Feynman pour mUED:	54
4.6	Electron-positron annihilation to KK gravitons:	55
5	Conclusion:	56

1 Introduction:

La physique des particules décrit les constituants fondamentaux de la matière, ainsi que leurs interactions, au sein d'une théorie quantique des champs, le Modèle Standard (SM) de la physique des particules est une théorie de jauge fondée sur les invariances de jauges locales du groupe de symétrie $SU(3)_C \oplus SU(2)_L \otimes U(1)_Y$. C'est dans ce cadre théorique que sont décrites les particules élémentaires et trois des quatre interactions fondamentales auxquelles elles sont assujetties. Les nombreux succès du modèle depuis son élaboration dans les années 60 en font une description rigoureuse de la Nature, capable d'expliquer toutes les observations faites auprès des accélérateurs de particules. Le succès le plus récent est la découverte du boson de Higgs, particule prédite depuis 1964 et observée pour la première fois en 2012.

Bien que jamais mis en défaut, le Modèle Standard ne parvient pas à expliquer tous les comportements de la Nature. De nombreux arguments laissent penser que ce modèle n'est qu'une théorie effective d'un modèle plus fondamental se manifestant à plus haute énergie. Tout d'abord, la gravitation n'est pas incluse dans la description des interactions fondamentales. La découverte dans les années 2000 de l'oscillation des neutrinos impose qu'ils soient massifs. Même si le Modèle Standard peut s'en accommoder, ces masses ne sont pas prédites dans la version simple du modèle. D'autre part, l'origine de la matière noire et l'énergie noire, composant près de 95 % de la densité d'énergie de l'univers, un autre problème, connu sous le nom de problème de hiérarchie, est que la masse du boson de Higgs apparaît anormalement petite par rapport à une échelle de haute énergie lorsque la gravité devient forte. Restent totalement inexplicables. Face à ces lacunes, de nombreuses théories ont été développées pour étendre le Modèle Standard et proposer une explication théorique à ces phénomènes.

Afin de résoudre les problèmes posés par le Modèle standard, un certain nombre d'extensions du Modèle ont été proposées. Une façon d'étendre le Modèle standard consiste à utiliser des dimensions spatiales supplémentaires. Tel que nous percevons le monde, il est composé de trois dimensions spatiales et d'une dimension temporelle, et aucune déviation de cette notion n'a été observée expérimentalement. Cependant, en principe, il pourrait y avoir plus de trois dimensions spatiales, à condition que, par un mécanisme quelconque, les dimensions supplémentaires soient cachées jusqu'aux échelles énergétiques qui ont été explorées expérimentalement. Un tel mécanisme a été proposé par Oskar Klein en 1926 [1]. Il a souligné que si les dimensions supplémentaires sont finies et de petite taille, de grandes énergies seraient nécessaires pour les résoudre. Klein, avec Theodor Kaluza [2], a été le pionnier du sujet des dimensions supplémentaires dans les années 1920, et le sujet porte généralement le nom de théorie Kaluza–Klein.

Le mémoire est organisé comme suit: Le premier chapitre est consacré aux indications théoriques. Après avoir introduit les formulations théoriques de quelques éléments et interactions fondamentales concernant les particules élémentaires, un bref rappel des différentes règles de Feynman, dans le deuxième chapitre nous discutons la formalisme mathématique de théorie des champs à 4 dimension, dans le troisième chapitre, nous discutons des caractéristiques générales des théories quantiques des champs de dimension supérieure. Et nous introduisons le modèle universel de dimensions supplémentaires, y compris la construction d'un modèle réaliste et ses conséquences phénoménologiques.

2 Chapitre I: Le Modèle Standard

2.1 Introduction

Le modèle standard est une théorie de la physique des particules développée en 1970 pour décrire les particules qui composent la matière et leur comportement tel qu'observé dans les expériences de physique des particules depuis le début du XXe siècle. On va commencer par une description des parties qui composent le modèle standard, puis introduire les différentes interactions et formalismes du modèle Standard.

2.2 Les particules élémentaires

Une particule élémentaire ou particule fondamentale est une particule subatomique qui n'est pas composée d'autres particules. Les particules actuellement considérées comme élémentaires comprennent les fermions fondamentaux (quarks, leptons, antiquarks et antileptons), qui sont généralement des particules de matière et des antiparticules, ainsi que les bosons fondamentaux (bosons de jauge et boson de Higgs), qui sont généralement des "particules de force" qui médient les interactions entre les fermions. Une particule contenant deux ou plusieurs particules élémentaires est une particule composite.

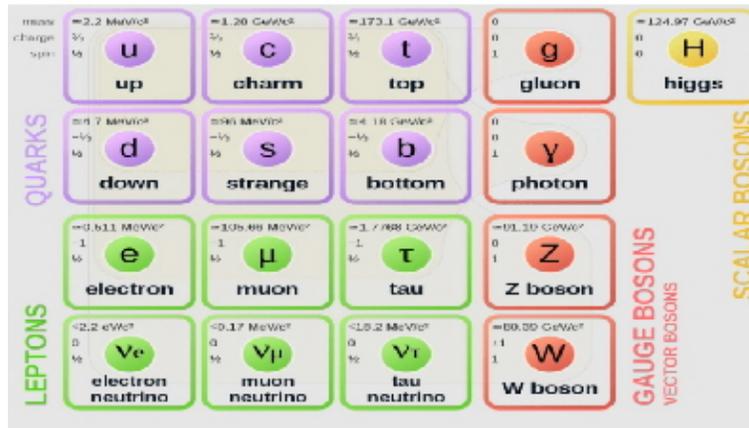


FIG.1.1: Les particules élémentaires du Modèle Standard [3].

2.2.1 Les fermions

Les fermions sont des particules élémentaires de spin demi-entier, il obeissent à la statistique de Fermi-Dirac, tel que les leptons et les quarks. Les fermions obeissent au principe d'exclusion de Pauli, et ne peuvent pas se trouver dans le même état quantique. On dénombre dans le Modèle Standard 12 fermions : 6 quarks et 6 leptons. On groupe les leptons et les quarks 2 par 2 dans trois générations :

2.2.2 Les Leptons:

$$\begin{pmatrix} e \\ \nu_e \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} \mu^- \\ \nu_\mu \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} \tau^- \\ \nu_\tau \end{pmatrix}$$

Le lepton est une particule élémentaire qui ne subit pas d'interactions fortes, et le plus célèbre des leptons connus est l'électron. Les leptons comprennent les électrons, les muons et le tau, qui ont tous une charge électrique négative. Chaque lepton est lié à une antiparticule neutre appelée neutrinos.

2.2.3 Les quarks:

$$\begin{pmatrix} u \\ d \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} c \\ s \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} t \\ b \end{pmatrix}$$

Les quarks sont des particules massives avec une charge électrique partielle, ainsi qu'une charge de couleur, et ce sont les seules particules élémentaires connues qui participent aux quatre interactions fondamentales de la physique contemporaine: l'électromagnétisme, la gravitation, les interactions forte et faible.

A chacune des 12 particules élémentaires est associée une anti-particule, c'est-à-dire une particule de même masse, mais avec des nombres quantiques et une charge opposés : on compte donc 24 constituants élémentaires de la matière.

2.3 Les interaction fondamentales

On dénombre trois interactions fondamentales, décrites et unifiées sous un même formalisme par le Modèle Standard [3].

- L'interaction faible: portée par les bosons W^\pm et Z^0 , elle est notamment responsable de la radioactivité β^\pm des noyaux atomiques. Ainsi, la désintégration β^- permet à un quark "d" de se transformer en un quark "u" par échange d'un boson W^\pm : un proton formé de 3 quarks « uud » devient un neutron composé de 3 quarks « udd ».
- L'interaction électromagnétique: c'est l'attraction / répulsion entre les particules chargées, et a pour médiateur le photon γ , un boson non massif. C'est l'interaction qui permet la cohésion des atomes.
- L'interaction forte: Cette interaction couple les particules colorées, c'est-à-dire les quarks. Ses médiateurs sont les 8 gluons, bosons non massifs. C'est l'interaction qui permet la cohésion du noyau atomique.

Ces trois interactions reposent sur un principe théorique important appelé invariance de jauge. On parle dans ce cas de symétries locales ou de jauge (Weyl 1929). L'intérêt des symétries de jauge est qu'à partir d'une théorie libre invariante sous transformations globales il est possible de construire une théorie invariante sous les transformations locales (transformations de jauge) en ajoutant des termes d'interaction et un ou plusieurs champs vectoriels (champs de jauge). Imposer l'invariance du lagrangien sous une transformation de jauge permet donc de générer des interactions et d'introduire des champs vectoriels qui sont les médiateurs des forces dans le langage de la théorie des champs.

2.3.1 Les bosons:

Dans la théorie quantique des champs, les interactions sont véhiculées par des bosons de jauge, aussi appelés bosons vecteurs, de spin 1. Parmi les bosons de jauge du Modèle Standard, on trouve le photon γ , vecteur de l'interaction électromagnétique, de masse nulle et non chargé électriquement. Huit gluons g , de masse nulle et colorés, sont les vecteurs de l'interaction forte. Enfin, les bosons W^+ , W^- de charge électrique non nulle et Z^0 neutre électriquement, sont les médiateurs de l'interaction faible. Contrairement aux autres bosons de jauge, ces bosons sont massifs. À la différence du Z, les bosons W ne peuvent se coupler aux particules (antiparticules) de chiralité droite (gauche) et ne se couplent qu'aux particules (antiparticules) de chiralité gauche (droite). Les différents bosons de jauge et les interactions qu'ils véhiculent sont résumés dans le tableau 1 où l'intensité relative de chacune des forces associées et leur portée sont également détaillées.

Interaction	boson(s)	masse (GeV)	intensité relative	portée (m)
faible	W^\pm	80,385(15)	1	$\sim 10^{-18}$
	Z^0	91,1876(21)		
forte	g	0	25	$\sim 10^{-15}$
électromagnétique	γ	0	0.8	∞
gravitationnelle	graviton?	?	10^{-41}	∞

Tab 1. les interaction fondamentales et leurs bosons médiateurs [3].

l'interaction gravitationnelle: le modèle standard ne tient pas compte de cette interaction, mais elle peut être ignorée compte tenu de la petite masse des particules élémentaires et de sa faiblesse par rapport aux trois autres interactions.

2.3.2 Le boson de Higgs

Le boson de Higgs est une particule élémentaire sans charge électrique et sans spin. Le boson de Higgs représente des paquets d'énergie associés aux vibrations, et est responsable de gagner la masse des particules élémentaires à travers la résistance et l'influence de ces particules par le champ appelé le champ de Higgs.

2.4 Formulation mathématique et théorie de jauge:

2.4.1 Symétrie de Jauge Local U(1)

L'électrodynamique quantique (QED) traite des interactions des électrons et des positrons avec le champs de Maxwell. Commençons par le Lagrangien de Dirac [4].

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_{Dirac} &= \bar{\psi}(x)(i\gamma^\mu\partial_\mu - m)\psi(x) \\ &= \bar{\psi}i\gamma^\mu\partial_\mu\psi - m\bar{\psi}\psi\end{aligned}\quad (1)$$

qui a une symétrie globale $U(1)$:

$$\psi \rightarrow \psi'(x) = e^{-iq\alpha}\psi(x) \quad (2)$$

Si au lieu d'une constante α , on considère $\alpha(x)$ comme dépendant de x , on aura une transformation local

$$\psi \rightarrow \psi'(x) = e^{-iq\alpha(x)}\psi(x) \quad (3)$$

Mais puisque $\partial_\mu\psi$ ne se transforme pas comme ψ ,

$$\partial_\mu\psi'(x) = e^{-iq\alpha(x)}\partial_\mu\psi(x) - iq\partial_\mu\alpha(x)e^{-iq\alpha(x)}\psi(x)$$

le lagrangien n'est plus invariant sous cette transformation :

$$\mathcal{L} = \bar{\psi}i\gamma^\mu(\partial_\mu)\psi \longrightarrow \mathcal{L}'$$

ou

$$\begin{aligned}\mathcal{L}' &= \mathcal{L} + \bar{\psi}i\gamma^\mu(-iq\partial_\mu\alpha)\psi \\ &= \bar{\psi}(x)(i\gamma^\mu\partial_\mu)\psi(x) + \underbrace{\bar{\psi}i\gamma^\mu(-iq\partial_\mu\alpha)\psi}_{\text{terme d'interaction}} \\ &= \bar{\psi}i\gamma^\mu\underbrace{(\partial_\mu - iqA_\mu)}_{D_\mu}\psi \\ &= \mathcal{L} + q\bar{\psi}\gamma^\mu\psi\partial_\mu\alpha = \mathcal{L} + j^\mu\partial_\mu\alpha\end{aligned}\quad (4)$$

Donc, l'invariance du lagrangien peut être restaurée en couplant le champ de Dirac au champ de Maxwell [4] :

$$\begin{aligned}\mathcal{L} &= \bar{\psi} (i\gamma^\mu \partial_\mu - m) \psi - j^\mu A_\mu \\ &= \bar{\psi} (i\gamma^\mu \partial_\mu - m) \psi - q\bar{\psi}\gamma^\mu\psi A_\mu \\ &= \bar{\psi} (i\gamma^\mu (\partial_\mu + iqA_\mu) - m) \psi\end{aligned}$$

Sous les transformations de jauge, le champ Maxwell se transforme en

$$A_\mu(x) \rightarrow A'_\mu(x) = A_\mu(x) + \partial_\mu\alpha(x) \quad (5)$$

On trouve donc que \mathcal{L} est invariant :

$$\mathcal{L}' = \mathcal{L} + q\bar{\psi}\gamma^\mu\psi\partial_\mu\alpha - q\bar{\psi}\gamma^\mu\psi\partial_\mu\alpha = \mathcal{L} \quad (6)$$

Le lagrangien contient la dérivée covariante

$$\partial_\mu \rightarrow D_\mu := \partial_\mu + iqA_\mu \quad (7)$$

La dérivée covariante du champ de fermions se transforme en

$$\begin{aligned}D_\mu\psi &\rightarrow D'_\mu\psi'(x) \\ &= (\partial_\mu + iqA'_\mu)\psi'(x) \\ &= (\partial_\mu + iq(A_\mu(x) + \partial_\mu\alpha(x)))e^{-iq\alpha(x)}\psi(x) \\ &= e^{-iq\alpha(x)}(\partial_\mu - iq(\partial_\mu\alpha(x)) + iq(A_\mu(x) + \partial_\mu\alpha(x)))\psi(x) \\ &= e^{-iq\alpha(x)}(\partial_\mu + iqA_\mu(x))\psi(x) \\ &= e^{-iq\alpha(x)}(\partial_\mu + iqA_\mu(x))e^{iq\alpha(x)}\psi'(x) \\ &= e^{-iq\alpha(x)}D_\mu e^{iq\alpha(x)}\psi'(x)\end{aligned}$$

Nous obtenons donc la transformation suivante de l'opérateur dérivé covariant

$$D'_\mu = e^{-iq\alpha(x)}D_\mu e^{iq\alpha(x)} \quad (8)$$

Le cas considéré ici est l'exemple le plus simple d'une situation plus générale, où un champ de jauge est couplé à des champs de matière.

L'image générale: On part d'une symétrie globale. $U(1) \rightarrow$ Cela donne un courant de Noether. $(j_\mu = q\bar{\psi}\gamma^\mu\psi) \rightarrow$ On généralise à une symétrie locale: $(\alpha \rightarrow \alpha(x)) \rightarrow$ On restaure l'invariance de l'action en ajoutant un champ de jauge couplé à ce courant de Noether. Ainsi une symétrie détermine l'interaction. $(-q\bar{\psi}\gamma^\mu\psi A_\mu) \rightarrow$ Pour compléter le Lagrangien, il faut ajouter la dynamique de Maxwell libre champ.

$$\mathcal{L}_{(A_\mu)} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} \quad (9)$$

avec l'intensité du champ

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu = -\frac{i}{q}[D_\mu, D_\nu]. \quad (10)$$

La densité lagrangienne complète de QED s'écrit donc

$$\begin{aligned}\mathcal{L} &= \bar{\psi} (i\gamma^\mu D_\mu - m) \psi - \frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}. \\ &= \underbrace{\bar{\psi} (i\gamma^\mu \partial_\mu + m) \psi}_{\text{champ } \psi \text{ libre}} - \underbrace{q\bar{\psi}\gamma^\mu\psi A_\mu}_{\text{interaction entre } \psi \text{ et } A_\mu} - \underbrace{\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}}_{\text{champ } A_\mu \text{ libre}} \\ &= L_D + L_{int} + L_{EM}\end{aligned} \quad (11)$$

2.4.2 Théorie de jauge non abélienne:

Le groupe $SU(2)$: $SU(2)$ est un groupe non-Abélien généré par les matrices de Pauli. Une transformation $U(x) \in SU(2)$ peut être représentée par [5] :

$$U = \exp(-iT_i\theta_i) \quad (12)$$

T_i est un générateur du groupe $SU(2)$ et θ_i est un paramètre de transformation.

La transformation de l'état $\psi(\vec{r}, t)$ sous le groupe $SU(2)$ est :

$$\psi(\vec{r}, t) \rightarrow \psi'(\vec{r}, t) = U(\vec{r})\psi(\vec{r}, t) \quad (13)$$

T_i est une matrice de Pauli : $T_i = (\sigma^1, \sigma^2, \sigma^3)$ avec:

$$\sigma^1 \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \sigma^2 \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \sigma^3 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (14)$$

le lagrangien de Dirac d'un fermion est donné par :

$$L_D = \bar{\psi}(x)(i\gamma^\mu\partial_\mu - m)\psi(x) \quad (15)$$

Nous demandons l'invariance du lagrangien sous la transformation de $SU(2)$

$$\psi(\vec{r}) \rightarrow \psi'(\vec{r}) = \exp\left(-i\frac{g}{2}\sigma_i\theta^i\right)\psi(\vec{r}) \quad (16)$$

Cette dernière équation implique que nous devrions remplacer la dérivée partielle ∂_μ par la dérivée covariante D_μ [5];

$$D_\mu = \partial_\mu - i\frac{g}{2}\vec{\tau}\vec{W}_\mu \quad (17)$$

ou g_2 est un facteur qui détermine la force de l'interaction.

L'invariance de jauge engendre trois bosons de jauge W_μ^i (médiateur de l'interaction faible) et une constante de couplage g_2 . Les bosons physiques observés sont :

$$W^\mp = \frac{1}{\sqrt{2}}(W^1 \pm W^2) \quad (18)$$

Ces bosons de jauge n'ont pas de masse, mais on sait avec les expériences que ces bosons sont massifs ce qui signifie que nous devrions inclure un terme de masse dans le Lagrangien et ce terme doit avoir la forme suivante :

$$L_{mass-bosons} = M_W^2(W^{+\nu}W_\nu^+) + M_W^2(W^{-\nu}W_\nu^-) + M_Z^2(Z^{0\nu}Z_\nu^0) \quad (19)$$

L'addition d'un tel terme de masse $L_{mass-bosons}$ à (15) brise la symétrie. Il existe plusieurs façons d'introduire ces nouveaux termes qui brisent la symétrie.

L'opérateur hélicité : Introduisons maintenant les opérateurs projecteurs $P_{L/R} = \frac{1}{2}(1 \mp \gamma_5) = \frac{1}{2}\left(1 \mp \frac{\sigma \cdot p}{|p|}\right)$ où la définition de l'opérateur d'hélicité est $H = \frac{\sigma \cdot p}{|p|}$ [5].

$$P_L = \frac{1}{2}(1 - \gamma_5) = \frac{1}{2}\left[\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\right] = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (20)$$

$$P_R = \frac{1}{2}(1 + \gamma_5) = \frac{1}{2} \left[\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \right] = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (21)$$

Ces opérateurs de projection P_L et P_R sont respectivement les projecteurs sur les états négatifs et positifs de l'hélicité.

En introduisant le spineur de Dirac à deux éléments ψ [5].

$$\psi = \begin{pmatrix} \psi_R \\ \psi_L \end{pmatrix}$$

Note : l'indice L signifie gauche (Left en anglais) et R droite (Right), chaque élément ψ_R et ψ_L est un objet à deux éléments. En appliquant l'opérateur $\frac{1}{2}(1 - \gamma_5)$ au champ ψ , nous obtenons l'élément gauche du champ, et respectivement si on applique $\frac{1}{2}(1 + \gamma_5)$ au champ ψ on obtient l'élément droite.

$$P_L \psi = \frac{1}{2}(1 - \gamma_5) \psi = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \psi_R \\ \psi_L \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \psi_L \end{pmatrix} = \psi_L \quad (22)$$

$$P_R \psi = \frac{1}{2}(1 + \gamma_5) \psi = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \psi_R \\ \psi_L \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \psi_R \\ 0 \end{pmatrix} = \psi_R \quad (23)$$

Pour un lepton sans masse, le terme de masse dans le lagrangien de Dirac disparaît et les termes qui restent sont : $L_D = i\bar{\psi}\gamma^\mu\partial_\mu\psi$

$$\begin{aligned} L_D &= i(\bar{\psi}_L + \bar{\psi}_R) \gamma^\mu \partial_\mu (\psi_L + \psi_R) \\ &= i\bar{\psi}_L \gamma^\mu \partial_\mu \psi_L + i\bar{\psi}_R \gamma^\mu \partial_\mu \psi_R + i(\bar{\psi}_L \gamma^\mu \partial_\mu \psi_R + \bar{\psi}_R \gamma^\mu \partial_\mu \psi_L) \end{aligned}$$

Si on calcule $\bar{\psi}_L \gamma^\mu \partial_\mu \psi_R$:

$$\begin{aligned} \bar{\psi}_L \gamma^\mu \partial_\mu \psi_R &= \frac{1}{2} \left(\frac{1 - \gamma_5}{2} \right) \bar{\psi} \gamma^\mu \partial_\mu \left(\frac{1 + \gamma_5}{2} \right) \psi \\ &= \frac{1}{4} (1 - \gamma_5 + \gamma_5 - \gamma_5^2) \bar{\psi} \gamma^\mu \partial_\mu \psi = 0 \end{aligned}$$

il faut noter que $\gamma_5^2 = 1$.

Donc on obtient un Lagrangien avec deux termes spécifiques (terme de gauche et de droite) :

$$L = i\bar{\psi}_L \gamma^\mu \partial_\mu \psi_L + i\bar{\psi}_R \gamma^\mu \partial_\mu \psi_R \quad (24)$$

Le lagrangien d'un lepton peut être écrit comme (24), c'est à dire, si nous prenons

$$\psi_L = \begin{pmatrix} \nu_e \\ e \end{pmatrix}_L \quad (25)$$

On sait de l'expérience réf [6] (Goldaberh 1957) que seuls les neutrinos avec une hélicité négative sont observés et dans le modèle standard la masse du neutrino est $m_\nu = 0$, donc il n'existe pas de terme droitier pour un neutrino

$$\psi_R = \begin{pmatrix} 0 \\ e_R \end{pmatrix} \quad (26)$$

Théorie électrofaible $SU(2) \times U(1)$ On a vu que la symétrie du groupe $SU(2)$ génère trois bosons de jauge W_μ^1, W_μ^2 et W_μ^3 . Il y a aussi un champ de jauge additionnel B_μ qui est associé avec l'invariance de $U(1)$ [5].

Le Lagrangienn:

$$L_{EW} = L_{lepton} + L_{jauge}$$

avec

$$L_{lepton} = i\bar{\psi}_L \gamma^\mu \partial_\mu \psi_L + i\bar{\psi}_R \gamma^\mu \partial_\mu \psi_R \quad (27)$$

et

$$L_{jauge} = -\frac{1}{4} f_{\mu\nu} f^{\mu\nu} - \frac{1}{4} (F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}) \quad (28)$$

ou $f_{\mu\nu} = \partial_\mu B_\nu - \partial_\nu B_\mu$ et $F_{\mu\nu}^l = \partial_\mu W_\nu^l - \partial_\nu W_\mu^l - g_w \epsilon^{lmn} W_\mu^m W_\nu^n$.

Le Lagrangien d'un lepton est donné par (27), si on veut une invariance sous la transformation $SU(2)$ et sous $U(1)$, on devrait remplacer ∂_μ avec $\partial_\mu + i\frac{g_Y}{2} B_\mu + i\frac{g_2}{2} \vec{\tau} \cdot \vec{W}_\mu$

Pour le terme de gauche du champ du lepton :

$$i\bar{\psi}_L \gamma^\mu \partial_\mu \psi_L \rightarrow i\bar{\psi}_L \gamma^\mu \left(\partial_\mu + i\frac{g_Y}{2} B_\mu + i\frac{g_2}{2} \vec{\tau} \cdot \vec{W}_\mu \right) \psi_L$$

Puisque le terme de droite du champ de lepton ne participe pas dans l'interaction qui fait intervenir l'isospin faible (ψ_R est invariant sous la transformation $U = \exp\left(i\frac{g_2}{2} \vec{\tau} \cdot \vec{W}_\mu\right)$) on considère seulement le terme avec le champ de jauge B_μ

$$B_\mu i\bar{\psi}_R \gamma^\mu \partial_\mu \psi_R \rightarrow i\bar{\psi}_R \gamma^\mu \left(\partial_\mu + i\frac{g}{2} B_\mu \right) \psi_R \quad (29)$$

$$L_{EW} = i\bar{\psi}_R \gamma^\mu \left(\partial_\mu + i\frac{g}{2} B_\mu \right) \psi_R + i\bar{\psi}_L \gamma^\mu \left(\partial_\mu + i\frac{g_Y}{2} B_\mu + i\frac{g_2}{2} \vec{\tau} \cdot \vec{W}_\mu \right) \psi_L - \frac{1}{4} f_{\mu\nu} f^{\mu\nu} - \frac{1}{4} (F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}) \quad (30)$$

Toutes les particules introduites jusqu'à présent : électrons, neutrinos et les 4 bosons de jauge n'ont pas de masse. C'est à dire, si on prend le lagrangien du fermion $L_{fermions}$ [5].

$$L_{fermions} = i\bar{\psi} \gamma^\mu D^\mu \psi - \bar{\psi} m \psi$$

le terme $\bar{\psi} m \psi$ est égale à :

$$\bar{\psi} m \psi = \bar{\psi}_R \cdot m \cdot \psi_L + \bar{\psi}_L \cdot m \cdot \psi_R$$

Comme on a vu plus tôt, ψ_L est un doublet $SU(2)$, ψ_R un singulet et aussi q'un tel terme de masse change l'hélicité ce qui n'est pas invariant sous $SU(2)$. Donc, on doit utiliser le lagrangien des fermions sans masse $L_{fermions} = i\bar{\psi} \gamma^\mu D^\mu \psi$. Ces particules vont acquérir des masses en utilisant la méthode de brisure de symétrie, cette méthode introduit le champ de Higgs et l'interaction des particules avec ce champ génère leur masse.

Alors, en prenant un champ scalaire

$$(\phi) = \begin{pmatrix} \phi^A \\ \phi^B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\phi_3 + i\phi_4}{\sqrt{2}} \\ \frac{\phi_1 + i\phi_2}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \quad (31)$$

Selon la liberté de jauge, on peut choisir le champ de Higgs comme: $\phi^A = 0, \phi^B = \phi_0 + \frac{h(x)}{2}$ où ϕ_0 et $h(x)$ sont des paramètres réels, le potentiel du champ de Higgs peut être écrit par : $V = \mu^2 \phi^+ \phi + \lambda (\phi^+ \phi)^2$

On cherche le minimum de ce potentiel et on obtient : $\phi_{\min} = -\frac{\mu^2}{2\lambda}$ Définissons, $\phi_{\min} = -\frac{\mu^2}{2\lambda}$

Dans la théorie de Weinberg-Salam, un terme d'interaction est introduit et ce terme couple le champ fermionique au champ de Higgs (Scalaire-fermion-fermion) :

$$L_{int}^Y = -g_Y (\bar{\psi}_L \phi \psi_R + \bar{\psi}_R \phi^+ \psi_L) \quad (32)$$

L_{int}^Y est le lagrangien d'interaction de Yukawa. En utilisant $:\bar{\psi}_L = (\bar{\nu}_e \quad \bar{e}_l)$ et $\bar{\psi}_R = \begin{pmatrix} 0 \\ \bar{e}_R \end{pmatrix}$

On obtient :

$$L_{int}^Y = -g_Y \left[\phi_0 (\bar{e}_L e_R + \bar{e}_R e_L) - \frac{h(x)}{\sqrt{2}} (\bar{e}_L e_R + \bar{e}_R e_L) \right] \quad (33)$$

On peut voir que le terme de neutrino se simplifie et le premier terme est le terme de masse du lagrangien, $L_{mass,electron} = -g_Y \phi_0 (\bar{e}_L e_R + \bar{e}_R e_L)$ On peut en déduire que l'interaction du champ de Higgs avec le champ des particules donne aux particules une masse $m_e = g_Y \phi_0$.

La Masse du boson de jauge : Les bosons de jauge acquièrent une masse par l'action de la dérivée covariante D_μ sur le champ de Higgs. Si on applique la dérivée covariante [5].

$$\begin{aligned} D_\mu \phi &= \partial_\mu \phi - i \frac{g_B}{2} \phi - i \frac{g_2}{2} \vec{\tau} \cdot \vec{W}_\mu \phi \\ &= \partial_\mu \begin{pmatrix} 0 \\ \phi_0 + \frac{1}{\sqrt{2}} h \end{pmatrix} - i \frac{g_B}{2} \begin{pmatrix} 0 \\ \phi_0 + \frac{1}{\sqrt{2}} h \end{pmatrix} - i \frac{g_2}{2} \begin{pmatrix} 0 \\ \phi_0 + \frac{1}{\sqrt{2}} h \end{pmatrix} \vec{\tau} \cdot \vec{W}_\mu \end{aligned} \quad (34)$$

Avec,

$$\begin{aligned} \vec{\tau} \cdot \vec{W}_\mu &= (\sigma_i \cdot W_\mu^i) \\ &= \left(\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \right) \cdot \begin{pmatrix} W_\mu^1 \\ W_\mu^2 \\ W_\mu^3 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & W_\mu^1 \\ W_\mu^1 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -iW_\mu^2 \\ iW_\mu^2 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} W_\mu^3 & 0 \\ 0 & -W_\mu^3 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} W_\mu^3 & \sqrt{2}W_\mu^- \\ \sqrt{2}W_\mu^+ & -W_\mu^3 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

On rappelle que :

$$W^+ = \frac{1}{\sqrt{2}} (W^1 - iW^2)$$

Et

$$W^- = \frac{1}{\sqrt{2}} (W^1 + iW^2)$$

donc on obtient :

$$D_\mu \phi = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \partial_\mu h \end{pmatrix} - i \frac{g_B}{2} B_\mu \begin{pmatrix} 0 \\ \phi_0 + \frac{h(x)}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} - i \frac{g_2}{2} \begin{pmatrix} \sqrt{2}W_\mu^+ \left(\phi_0 + \frac{h(x)}{\sqrt{2}} \right) \\ -W_\mu^3 \left(\phi_0 + \frac{h(x)}{\sqrt{2}} \right) \end{pmatrix} \quad (35)$$

la partie du lagrangien du champ de Higgs est :

$$\begin{aligned} L_{Higgs} &= (D_\mu \phi)^+ D_\mu \phi - V(\phi^+ \phi) \\ &= \left(\left(\partial_\mu - i \frac{g_B}{2} - i \frac{g_2}{2} \vec{\tau} \cdot \vec{W}_\mu \right)^+ \phi^+ \right) * \left(\partial_\mu - i \frac{g_B}{2} - i \frac{g_2}{2} \vec{\tau} \cdot \vec{W}_\mu \right) \phi - V(\phi^+ \phi) \end{aligned}$$

Donc, le Lagrangien total pour la théorie électrofaible après la brisure de symétrie possède les termes suivants :

$$L_{Weak} = L_{fermions} + L_{bosons} + L_{Higgs} \quad (36)$$

Angle de Weinberg : Le mécanisme de Higgs brise spontanément la symétrie $SU(2)_L \times U(1)_Y$, mélange les champs W_μ^3 et B_μ pour donner les observables bosons physiques Z et γ (photon gamma dans QED) [5]. Il est aussi commode d'exprimer les constantes de couplage g_2 et g_B avec $\tan \theta_W = \frac{g_2}{g_B}$.

Où θ_W est appelé angle de mélange faible ou angle de Weinberg. Cet angle établit la relation entre les champs de jauge (W_μ^3, B_μ) et les bosons physiques (Z et γ):

$$\begin{pmatrix} A_\mu \\ Z_\mu \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta_W & \sin \theta_W \\ -\sin \theta_W & \cos \theta_W \end{pmatrix} \begin{pmatrix} B_\mu \\ W_\mu^3 \end{pmatrix} \quad (37)$$

Jusqu'ici, pour simplifier les calculs on a utilisé la dérivée covariante D_μ :

$$D_\mu = \partial_\mu - i\frac{g_B}{2} - i\frac{g_2}{2} \vec{\tau} \cdot \vec{W}_\mu$$

où $\vec{\tau}$ est le générateur de $SU(2)$ et il définit les espaces des isospins faibles ; donc de manière similaire on doit écrire la transformation $U(1)$ avec un terme de générateur Y , ce dernier est un nombre qui peut dépendre de l'état sur lequel opère D_μ et on l'appelle le générateur d'hypercharge de $U(1)$ [7]. Ainsi, la forme générale de la dérivée covariante pour le groupe $SU(2) \times U(1)$ est donnée par :

$$D_\mu = \partial_\mu - ig_B \frac{Y}{2} - ig_2 \frac{\vec{\tau}}{2} \cdot \vec{W}_\mu$$

Où, Y peut avoir deux différentes valeurs pour un champ de fermion gaucher (Y_L) et pour un champ de fermion droitier (Y_R)

L'angle de Weinberg dépend des constantes g_B, g_2 mais aussi de la constante Y , il est nécessaire de noter que les bosons réels A_μ et Z doivent être déterminés avec l'aide du Lagrangien électromagnétique de l'interaction d'une particule chargée.

$$L_{ELM} = QA_\mu (\bar{e}_L \gamma^\mu e_L + \bar{e}_R \gamma^\mu e_R) \quad (38)$$

on définit le Lagrangien pour l'interaction faible neutre par :

$$L_{ELM} = QA_\mu \bar{e}_L \gamma^\mu e_L + L_{SU(2),NC}$$

Où, $L_{weak,NC} = -\frac{g_B}{2} [Y_L (\bar{\nu}_L \gamma^\mu \nu_L + \bar{e}_L \gamma^\mu e_L) + Y_R \bar{e}_R \gamma^\mu e_R] B_\mu$ et $L_{SU(2),NC} = -\frac{g_2}{2} [\bar{\nu}_L \gamma^\mu \nu_L + \bar{e}_L \gamma^\mu e_L] W_\mu^3$

$$L_{weak,NC} = \left(-\frac{g_B}{2} Y_L B_\mu - \frac{g_2}{2} W_\mu^3 \right) (\bar{\nu}_L \gamma^\mu \nu_L + \bar{e}_L \gamma^\mu e_L) + \frac{g_B}{2} Y_L B_\mu \bar{e}_R \gamma^\mu e_R \quad (39)$$

En comparant les termes de (38) aux termes de (39) on peut voir une similarité. On sait que les neutrinos ne se couplent pas avec le champ électromagnétique A_μ , donc le terme avant $\bar{\nu}_L \gamma^\mu \nu_L$ doit être défini comme le boson réel $Z \sim g_B Y_L B_\mu + g_2 W_\mu^3$ et le boson électromagnétique A_μ peut être défini comme suit : $A_\mu \sim g_2 B_\mu - g_B Y_L W_\mu^3$ Donc, en normalisant A_μ (γ) et Z , on peut définir la matrice qui transforme les bosons B_μ et W_μ^3 aux bosons réels A_μ (et γ) et Z :

$$\begin{pmatrix} A_\mu \\ Z_\mu \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{g_B^2 Y_L^2 + g_2^2}} \begin{pmatrix} g_2 & g_B Y_L \\ g_B Y_L & g_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} B_\mu \\ W_\mu^3 \end{pmatrix} \quad (40)$$

Avec (40) on peut exprimer θ_W avec les constants g_B et g_2 .

Si on met ensemble tous les termes (NC et CC) du Lagrangien de $U(1) \times SU(2)$, on obtient la forme explicite du lagrangien de la théorie électrofaible :

$$L_W = -\frac{1}{4}f_{\mu\nu}f^{\mu\nu} - \frac{1}{4}\text{Tr}(F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}) \quad (41)$$

$$+i \sum_{lepton} \bar{\psi}\gamma^\mu \partial_\mu \psi + \frac{g_2}{\sqrt{2}} \left[\sum_{lepton} \bar{\psi}_v \gamma^\mu \left(\frac{1-\gamma_5}{2} \right) \psi_L W_\mu^- + h.c \right] \quad (42)$$

$$+ \frac{g_B}{\cos \theta_W} \sum_{lepton} [\bar{\psi}_L \gamma^\mu (T_f^3 - Q_f \sin^2 \theta_W) \psi_L + \bar{\psi}_R \gamma^\mu (-Q_f \sin^2 \theta_W) \psi_R] Z_\mu \quad (43)$$

$$+ g_B \sin \theta_W \sum_{lepton} \bar{\psi} \gamma^\mu Q_F \psi A_\mu + \frac{g_B^2}{4} W_\mu^- W^{+\mu} \quad (44)$$

$$+ \frac{g_B^2}{4} W_\mu^- W^{+\mu} + \frac{(g_B^2 + g_2^2)}{8} Z_\mu Z^\mu \quad (45)$$

La comparaison des équations 38 et 39 fixe les valeurs de $Y_R = 2Y_L$ et $Y_R = -e \frac{\sqrt{g_2^2 + g_B^2} Y_L^2}{g_B g_2}$ (on choisit Y_L)

$$G_F = \frac{\sqrt{2}g_2}{8M_W^2}, \sin \theta_W = \frac{e}{g_2} = \frac{M_W}{M_Z}$$

Dans le Lagrangien (41), on a introduit les quantités T_f et Q_f . T_f est la valeur propre de $T_3 = \tau_3/2$ pour tous les leptons f , si le lepton est un simplet droitier (e.g. un électron) alors $T_f = 0$, pour un gaucher et membre de la composante inférieure d'un doublet de $SU(2)_L$ on a $T_f = -\frac{1}{2}Q_f$; où Q_f est la charge de la particule. Dans (41), on identifie Q_f par $Q_f = T_f + \frac{Y_f}{2}$, pour un processus qui fait intervenir un courant neutre (qu'on va développer plus tard), on a le facteur de vertex: $-i \frac{g_2}{\sin \theta_W} \gamma^\mu (g_v^f - g_A^f \gamma^5)$. Où,

$$g_v^f = T_3^f - 2 \sin \theta_W Q_f$$

$$g_A^f = T_3^f$$

En résumé, La théorie de Glashow-Weinberg-Salam unifie l'interaction faible et l'interaction électromagnétique en utilisant une méthode théorique, la brisure spontanée de la symétrie dans laquelle un boson vecteur acquiert une masse. Le lagrangien montre qu'il y a deux types d'interaction faible :

1. les interactions avec les courants chargés (font intervenir les bosons W^\pm)

$$L_{CC} = \frac{g_2}{\sqrt{2}} \left(\bar{\psi}_v \gamma^\mu \left(\frac{1-\gamma_5}{2} \right) \psi_L W_\mu^- + h.c \right) \quad (46)$$

2. et l'interaction avec le courant neutre (fait intervenir le boson Z)

$$L_{NC} = \frac{g_B}{\cos \theta_W} [\bar{\psi}_L \gamma^\mu (T_f^3 - Q_f \sin^2 \theta_W) \psi_L + \bar{\psi}_R \gamma^\mu (-Q_f \sin^2 \theta_W) \psi_R] Z_\mu \quad (47)$$

	g_L	g_R
v_α	$\frac{1}{2}$	0
e, μ, τ	$-\frac{1}{2} + \sin^2 \theta_W$	$\sin^2 \theta_W$
u, c, t	$-\frac{1}{2} - \frac{2}{3} \sin^2 \theta_W$	$-\frac{2}{3} \sin^2 \theta_W$
d, s, b	$-\frac{1}{2} - \frac{2}{3} \sin^2 \theta_W$	$-\frac{2}{3} \sin^2 \theta_W$

Tableau 1.2: Constante de couplage

2.5 Les Lois de Feynman:

Un diagramme de Feynman est une représentation graphique des amplitudes quantiques d'un processus donné, composé de trois éléments lignes externes, lignes internes et sommets. A chacun de ces éléments on associe une expression mathématique dictée par le lagrangien SM, le produit de ces expressions - avec l'ordre approprié - donnera l'amplitude du processus représenté.

On va citer quelques lois utilisées .

- Lignes Externes .

Pour un fermion (antifermion) avec moment p et spin s :

$$Fermion \left\{ \begin{array}{l} \text{incomping} (\text{---} \nearrow) : u^{(s)}(p) \\ \text{outgoing} (\searrow \text{---}) : \bar{u}^{(s)}(p) \end{array} \right\}$$

$$Antifermion \left\{ \begin{array}{l} \text{incomping} (\searrow \text{---}) : \bar{v}^{(s)}(p) \\ \text{outgoing} (\text{---} \nearrow) : v^{(s)}(p) \end{array} \right\}$$

Pour un boson avec une polarisation ϵ :

$$Boson \left\{ \begin{array}{l} \text{incomping} (\text{---} \text{wavy} \text{---}) : \epsilon_u \\ \text{outgoing} (\text{---} \text{wavy} \text{---}) : \epsilon_u^* \end{array} \right\}$$

- Propagators. Chaque ligne interne est remplacé par:

$$Fermion - Antifermion (\text{---} \xrightarrow{q} \text{---}) : \frac{i(\not{q} + mc)}{q^2 - m^2c^2}$$

$$Higgs (\text{---} \text{dashed} \text{---}) : \frac{i}{k^2 - m_H^2 + i\epsilon}$$

$$W^\pm \text{ propagator} (\text{---} \text{wavy} \text{---}) : iD_{F_{\alpha\beta}}(k, M_w) = \frac{-i \left(g_{\alpha\beta} - \frac{k_\alpha k_\beta}{M_w^2 c^2} \right)}{k^2 - M_w^2 c^2}$$

$$= \frac{-ig_{\alpha\beta}}{(M_w c)^2} \quad (\text{for } k^2 \ll (M_w c)^2)$$

$$Photon (\text{---} \text{wavy} \text{---}) : \frac{-ig_{\alpha\beta}}{q^2}$$

$$Gluon (\text{---} \text{wavy} \text{---}) : \frac{-ig_{\alpha\beta} \delta^{\alpha\beta}}{q^2}$$

- Vertices. Chaque sommet est remplacé par:

$$Fermion - Photon \left(\begin{array}{c} \ell^- \quad \ell^- \\ \diagdown \quad \diagup \\ \gamma \\ \uparrow \\ (\alpha) \end{array} \right) := ie\gamma^\alpha$$

$$Fermion - W^\pm \left(\begin{array}{c} \nu_\ell \quad \ell^- \\ \diagdown \quad \diagup \\ W^\pm \\ \uparrow \\ (\alpha) \end{array} \right) := \frac{-ig}{2\sqrt{2}}\gamma^\alpha(1 - \gamma_5)$$

$$Neutrino - Z \left(\begin{array}{c} \nu_\ell \quad \nu_\ell \\ \diagdown \quad \diagup \\ Z^0 \\ \uparrow \\ (\alpha) \end{array} \right) := \frac{-ig}{4\cos\theta_w}\gamma^\alpha(1 - \gamma_5)$$

$$Fermion - Z \left(\begin{array}{c} \ell^- \quad \ell^- \\ \diagdown \quad \diagup \\ Z^0 \\ \uparrow \\ (\alpha) \end{array} \right) := \frac{-ig\gamma^\alpha}{4\cos\theta_w}(1 - 4\sin^2\theta_w - \gamma_5) = \frac{-ig\gamma^\alpha}{2\cos\theta_w}(g_V - g_A\gamma_5)$$

$$Fermion - Higgs \left(\begin{array}{c} \ell^- \quad \ell^- \\ \diagdown \quad \diagup \\ H \\ \uparrow \\ (\alpha) \end{array} \right) := \frac{-i}{v}m_\ell$$

$$Quark - gluon \left(\begin{array}{c} \quad \quad \quad \\ \diagdown \quad \diagup \\ \quad \quad \quad \\ \uparrow \\ (\alpha, \mu) \end{array} \right) := \frac{-ig_s}{2}\lambda^a\gamma^\mu$$

2.6 Problèmes avec le modèle standard:

Le Model standard (SM) est un modèle très réussi d'interactions de particules jusqu'à des énergies au moins de l'ordre de 100 GeV. En dessous de cette échelle d'énergie, il décrit avec succès la plupart des phénomènes de physique des particules observés, à quelques exceptions près. Cependant, il souffre d'un certain nombre de problèmes, d'ordre théorique aussi bien que phénoménologique. La plupart des physiciens des particules ne croient pas que le SM soit l'histoire finale, mais plutôt la limite de basse énergie d'une théorie plus fondamentale. Une telle théorie devrait apporter des solutions aux problèmes du SM. La plupart des extensions du SM qui sont proposées visent à résoudre, ou du moins à atténuer, un ou plusieurs de ces problèmes. Ici, nous ne mentionnons que les problèmes les plus importants.

Masses des neutrinos: Le modèle standard prédit que le neutrino ne devrait pas avoir de masse, tout comme le photon. Les neutrinos oscillent et se transforment les uns en les autres lorsqu'ils se déplacent [8]. Ces arguments sont acceptés à partir d'expériences d'oscillation de neutrinos. Si des termes de masse pour les neutrinos sont ajoutés dans le modèle standard, cela conduit à de nouveaux problèmes théoriques. Étant donné que les termes de masse devraient être étonnamment petits et qu'ils agissent donc comme d'autres particules fondamentales dans le modèle standard, ce qui viole la prédiction du modèle standard sur l'hypothèse des neutrinos.

Expérimentalement, on observe que les oscillations des neutrinos ne donnent que des informations sur $(dm_i)^2$. La valeur absolue de la masse du neutrino (m_i) est encore inconnue. Le résultat de Plank a révélé que la masse du neutrino est inférieure à 0,136 électron-volt [8](Valantino et al., 2015). De même, par

analyse de la désintégration bêta du titane, la limite supérieure de la masse des neutrinos est confirmée à environ 2,2 électron-volt. (Asseev et al., 2011)

Gravité et graviton : La gravité est une théorie inexpliquée du modèle standard. En fait, le modèle standard n'a pas été conçu pour expliquer le phénomène physique le plus courant, la gravité. La force la plus faible de la nature ne semble pas avoir d'impact sur les interactions subatomiques selon le modèle standard. Bien que le physicien des particules ait supposé que le graviton des particules pourrait transmettre la gravité tout comme un photon dans la théorie électromagnétique [9]. (Bilson, 2006)

Matière noire et énergie noire: Le modèle standard n'explique que 4% de l'énergie présente dans l'univers. La physique d'environ 96% de l'énergie est tellement vague à expliquer par des observations cosmologiques. Sur 96 % de l'énergie, environ 27 % sont de la matière noire, qui se comporterait comme n'importe quelle autre matière. Cette matière n'interagit que faiblement avec les champs du modèle standard. Le modèle standard ne fournit pas de particules fondamentales ou de particules d'échange qui sont bonnes pour expliquer le phénomène de matière noire. Le reste est une densité d'énergie constante pour le vide appelée énergie noire. C'est un énorme problème, comment ce genre de décalage mène à un stade précoce de l'univers. (Kraus, 2009) [10].

Rapport matière et antimatière: Comme nous le savons, l'univers qui nous entoure est dominé principalement par la matière. Si l'univers est à l'origine du Big Bang, alors la matière et l'antimatière auraient dû être produites dans un ordre égal, tout comme les deux faces d'une même pièce. Mais certains mécanismes ont gardé la matière et l'antimatière de leur schéma habituel de déséquilibres de plomb de destruction totale. Le modèle standard ne parvient pas à expliquer les causes des déséquilibres. L'indice derrière ce problème n'est pas résolu correctement. Bien que de nombreuses expériences soient en cours pour résoudre ce problème de rapport.

Le problème de la hiérarchie: L'une des raisons pour lesquelles la gravité n'est pas incluse dans le modèle standard est que la gravité est très faible par rapport aux autres forces et peut donc être ignorée en première approximation. La question demeure : pourquoi la gravité est-elle si faible ? Il y a apparemment une structure hiérarchique dans les forces d'interaction des forces. C'est le problème de la hiérarchie de la gravité.

Le scénario braneworld est l'hypothèse que nous vivons sur une hypersurface dans un espace de dimension supérieure. Seule la gravité peut se propager hors de l'hypersurface qui est à l'origine d'une solution possible du problème de la hiérarchie gravitationnelle.

Ces problèmes ont suggérés d'autres extensions du modèle standard (modèle supersymétrique, théories de grande unification, théories des cordes, Kalusa- Klein...etc.), parmi les extensions du modèle standard, on va étudier le modèle à extra-dimension, qui est une reformulation du SM dans une géométrie à dimensions supplémentaires.

3 Chapitre II: L'électrodynamique quantique à 4-dimensions

3.1 L'équation de Klein-Gordon:

Pour construire une équation de mouvement d'une particule quantique relativiste, on part d'abord de l'équation relativiste reliant l'énergie et l'impulsion [11]:

$$E^2 = |p|^2 + m^2$$

puis on applique les règles de quantification (avec $\hbar = c = 1$)

$$\vec{p} \rightarrow -i\vec{\nabla}, \quad E \rightarrow i\frac{\partial}{\partial t}$$

donne l'équation de Klein-Gordon :

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = \vec{\nabla}^2 \psi - m^2 \psi \quad (48)$$

En utilisant

$$\partial_\mu \equiv \frac{\partial}{\partial x^\mu} = \left(\frac{\partial}{\partial t}, \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right) = \left(\frac{\partial}{\partial t}, \nabla \right) \implies \square^2 \equiv \partial^\mu \partial_\mu \equiv \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{\partial^2}{\partial y^2} - \frac{\partial^2}{\partial z^2} = \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \nabla^2$$

KG peut être exprimé de manière compacte comme:

$$(\partial^\mu \partial_\mu + m^2)\psi(x) = 0$$

3.1.1 Solution libre de l'équation de Klein-Gordon:

Pour des ondes planes de la forme $\psi(x) = Ne^{i(p.r - Et)}$ [11], avec P et E constants, on a:

$$\nabla^2 \psi = |p|^2 \psi, \quad \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = -E^2 \psi$$

La fonction d'onde ψ satisfait donc l'équation de Klein-Gordon, équation 48, à condition que p et E soient liés via $|p|^2 + m^2 = E^2$ (comme prévu). Contrairement au cas non relativiste, où l'énergie $E = |p|^2/2m$ est positive sans ambiguïté, nous sommes maintenant confrontés au problème que E peut être de l'un ou l'autre signe :

$$E = \pm \sqrt{p^2 + m^2}$$

de sorte qu'il existe des solutions d'énergie négative ainsi que des solutions d'énergie positive à l'équation de Klein-Gordon pour une particule libre. Un point de vue équivalent est que, ainsi que les solutions d'ondes planes de la forme

$$\psi = Ne^{i(p.r - Et)} \quad (49)$$

l'équation de Klein-Gordon accepte également des solutions de la forme

$$\psi = Ne^{-i(p.r - Et)} \quad (50)$$

Où maintenant, dans les équations 49 et 50, il faut comprendre que $E = +\sqrt{p^2 + m^2}$ est toujours positif. Les solutions de la forme $Ne^{-i(p.r - Et)}$ ont une énergie négative en ce sens qu'elles sont des états propres de l'opérateur d'énergie standard $-\partial/\partial t$ de valeur propre $-E$. De telles solutions n'existent pas pour l'équation de Schrödinger, où elles conduiraient à la relation non physique $E = -|p|^2/2m$. Les solutions d'onde plane des équations 49 et 50 sont covariantes de Lorentz, comme on le voit facilement en considérant le produit scalaire à quatre vecteurs $p; x = Et + p.r$ où $p^\mu = (E, p)$ et $x^\mu = (t, r)$. les solutions d'énergie positive et négative peuvent donc s'écrire sous les formes manifestement covariantes

$$\psi = Ne^{-ip.x}; \quad \psi = Ne^{+ip.x}$$

3.2 L'équation de Dirac:

Dirac a tenté d'éviter les densités de probabilité négatives associées à l'équation de Klein-Gordon en recherchant une équation alternative qui était du premier ordre à la fois dans $\frac{\partial}{\partial t}$ et $\frac{\partial}{\partial x}$, à savoir l'équation de Dirac [11].

$$H\psi = (\alpha.p + \beta m)\psi \equiv i\frac{\partial\psi}{\partial t} \quad (51)$$

où H est l'opérateur hamiltonien, $p = -i\nabla$ est l'opérateur moment, et α et β sont des constantes qui restent à déterminer. en écrivant explicitement l'équation 51 en termes de ses composants, nous avons

$$(-i\alpha_x\frac{\partial}{\partial x} - i\alpha_y\frac{\partial}{\partial y} - i\alpha_z\frac{\partial}{\partial z} + \beta m)\psi = (i\frac{\partial}{\partial t})\psi \quad (52)$$

"La mise au carré" de cette équation en opérant à gauche avec $(-i\alpha_x\frac{\partial}{\partial x} - i\alpha_y\frac{\partial}{\partial y} - i\alpha_z\frac{\partial}{\partial z} + \beta m)$ et à droite avec $(i\frac{\partial}{\partial t})$ donne

$$(-i\alpha_x\frac{\partial}{\partial x} - i\alpha_y\frac{\partial}{\partial y} - i\alpha_z\frac{\partial}{\partial z} + \beta m)(-i\alpha_x\frac{\partial}{\partial x} - i\alpha_y\frac{\partial}{\partial y} - i\alpha_z\frac{\partial}{\partial z} + \beta m)\psi = (i\frac{\partial}{\partial t})(i\frac{\partial}{\partial t})\psi.$$

Cette équation peut être développée comme

$$\left[\begin{array}{c} -\alpha_x^2\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} - \alpha_y^2\frac{\partial^2\psi}{\partial y^2} - \alpha_z^2\frac{\partial^2\psi}{\partial z^2} - (\alpha_x\alpha_y + \alpha_y\alpha_x)\frac{\partial^2\psi}{\partial x\partial y} - (\alpha_x\alpha_z + \alpha_z\alpha_x)\frac{\partial^2\psi}{\partial x\partial z} \\ -(\alpha_y\alpha_z + \alpha_z\alpha_y)\frac{\partial^2\psi}{\partial y\partial z} - i(\alpha_x\beta + \beta\alpha_x)m\frac{\partial\psi}{\partial x} - (\alpha_y\beta + \beta\alpha_y)m\frac{\partial\psi}{\partial y} - (\alpha_z\beta + \beta\alpha_z)m\frac{\partial\psi}{\partial z} + \beta^2m^2\psi \end{array} \right] = -\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2} \quad (53)$$

Mais une particule libre (avec $E^2 = p^2 + m^2$) doit aussi satisfaire l'équation de Klein-Gordon

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\psi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\psi}{\partial z^2} - m^2\psi = \frac{\partial^2\psi}{\partial t^2} \quad (54)$$

Pour que les équations (53) et (54) soient cohérentes, nous devons avoir :

$$\beta^2 = \alpha_x^2 = \alpha_y^2 = \alpha_z^2 = 1 \quad (55)$$

$$\beta\alpha_j + \alpha_j\beta = 0 \quad (56)$$

$$\alpha_j\alpha_k + \alpha_k\alpha_j = 0 \quad (j \neq k) \quad (57)$$

Par conséquent, les constantes α_j et β ne peuvent pas être simplement des nombres ; elles doivent être (au moins) 4×4 matrices. Cela implique à son tour que la fonction d'onde ψ doit être un objet à quatre composants, appelé spineur (à ne pas confondre avec un vecteur à quatre)

$$\psi = \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \\ \psi_3 \\ \psi_4 \end{pmatrix}$$

Nous verrons plus loin que les quatre degrés de liberté du spineur correspondent aux deux états de spin d'une particule de spin $\frac{1}{2}$ plus les deux états de spin du spin $\frac{1}{2}$ associé.

Pour que H soit hermitien, α et β doivent aussi être hermitiens :

$$\alpha_x^+ = \alpha_x; \quad \alpha_y^+ = \alpha_y; \quad \alpha_z^+ = \alpha_z; \quad \beta^+ = \beta \quad (58)$$

Un choix pratique pour les matrices et qui satisfait aux équations (55)-(57) et à l'équation (58) est

$$\beta = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & -I \end{pmatrix}, \quad \alpha_j = \begin{pmatrix} 0 & \sigma_j \\ \sigma_j & 0 \end{pmatrix}$$

où I est la matrice unitaire 2×2 et les σ_j sont les matrices de spin de Pauli 2×2 :

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}; \quad \sigma_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}; \quad \sigma_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}; \quad \sigma_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (59)$$

On peut montrer que toutes les grandeurs physiques sont indépendantes de la représentation particulière des matrices α et β .

L'équation de Dirac peut être écrite plus élégamment en introduisant les quatre matrices gamma de Dirac $\gamma^0, \gamma^1, \gamma^2, \gamma^3$ définies comme

$$\gamma^0 \equiv \beta; \quad \gamma^1 \equiv \beta\alpha_x; \quad \gamma^2 \equiv \beta\alpha_y; \quad \gamma^3 \equiv \beta\alpha_z \quad (60)$$

En prémultipliant l'équation (52) par $-\beta$, l'équation de Dirac peut s'écrire

$$i\beta\alpha_x \frac{\partial\psi}{\partial x} + i\beta\alpha_y \frac{\partial\psi}{\partial y} + i\beta\alpha_z \frac{\partial\psi}{\partial z} - \beta^2 m\psi = -i\beta \frac{\partial\psi}{\partial t}.$$

En termes de matrices gamma de Dirac, et en utilisant $\beta^2 = I$ c'est

$$i\gamma^1 \frac{\partial\psi}{\partial x} + i\gamma^2 \frac{\partial\psi}{\partial y} + i\gamma^3 \frac{\partial\psi}{\partial z} - m\psi = -i\gamma^0 \frac{\partial\psi}{\partial t} \quad (61)$$

Présentation du 4-vecteur

$$\partial_\mu = \left(\frac{\partial}{\partial t}, \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right)$$

on a

$$\gamma^\mu \partial_\mu = \gamma^0 \partial_0 + \gamma^1 \partial_1 + \gamma^2 \partial_2 + \gamma^3 \partial_3 = \gamma^0 \frac{\partial}{\partial t} + \gamma^1 \frac{\partial}{\partial x} + \gamma^2 \frac{\partial}{\partial y} + \gamma^3 \frac{\partial}{\partial z}.$$

Par conséquent, l'équation (61), l'équation de Dirac, peut être écrite de manière compacte comme

$$(i\gamma^\mu \partial_\mu - m)\psi = 0$$

3.2.1 Solution libre de l'équation de Dirac:

Nous cherchons maintenant des solutions de particules libres (ondes planes) à l'équation de Dirac de la forme [11]:

$$\psi = u(E, p) e^{i(p \cdot r - Et)} \quad (62)$$

où le coefficient $u((E, p))$ est un spineur constant à 4-composantes, et E et p sont des constantes. les dérivées du premier ordre $\partial_\mu \psi$ sont :

$$\begin{aligned} \partial_0 \psi &= \frac{\partial\psi}{\partial t} = -iE\psi \\ \partial_1 \psi &= \frac{\partial\psi}{\partial x} = ip_x \psi \\ \partial_2 \psi &= \frac{\partial\psi}{\partial y} = ip_y \psi \\ \partial_3 \psi &= \frac{\partial\psi}{\partial z} = ip_z \psi \end{aligned}$$

La substitution dans l'équation de Dirac, l'équation (61), et l'annulation du facteur de phase $e^{i(p \cdot r - Et)}$ donne alors

$$i\gamma^1 \cdot ip_x u + i\gamma^2 \cdot ip_y u + i\gamma^3 \cdot ip_z u - mu = -i\gamma^0 \cdot (-iEu).$$

Cela peut être réorganisé comme

$$(\gamma^0 E - \gamma^1 p_x - \gamma^2 p_y - \gamma^3 p_z - m)u = 0$$

ou, de manière plus compacte, comme

$$(\gamma^\mu p_\mu - m)u = 0 \quad (63)$$

Le facteur entre parenthèses est

$$\begin{aligned} \gamma^\mu p_\mu - m &= \gamma^0 E - \gamma \cdot p - m \\ &= \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & -I \end{pmatrix} E - \begin{pmatrix} 0 & \sigma_j \\ \sigma_j & 0 \end{pmatrix} \cdot p - m \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} E - m & -\sigma \cdot p \\ \sigma \cdot p & -E - m \end{pmatrix} \end{aligned}$$

L'équation(63) peut donc être écrite en termes de sous-composants de la matrice 2×2 comme

$$\begin{pmatrix} E - m & -\sigma \cdot p \\ \sigma \cdot p & -E - m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_A \\ u_B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

où u_A et u_B sont des spineurs à deux composants appelés spineurs de Weyl. On obtient ainsi deux équations couplées pour u_A et u_B

$$(\sigma \cdot p)u_B = (E - m)u_A \quad (64)$$

$$(\sigma \cdot p)u_A = (E + m)u_B, \quad (65)$$

qui peut être résolu pour donner quatre solutions d'ondes planes linéairement indépendantes. Avant de résoudre les équations (64) et (65), on vérifie d'abord que les constantes E et p apparaissant dans le facteur de phase $e^{i(p \cdot r - Et)}$ obéissent à la relation $E^2 = |p|^2 + m^2$ attendue pour une particule relativiste. La matrice $\sigma \cdot p$ est donnée par

$$\begin{aligned} \sigma \cdot p &= \sigma_x \cdot p_x + \sigma_y \cdot p_y + \sigma_z \cdot p_z \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} p_x + \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} p_y + \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} p_z \\ &= \begin{pmatrix} p_z & p_x - ip_y \\ p_x + ip_y & -p_z \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (66)$$

D'où

$$(\sigma \cdot p)^2 = \begin{pmatrix} p_z & p_x - ip_y \\ p_x + ip_y & -p_z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_z & p_x - ip_y \\ p_x + ip_y & -p_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} |p|^2 & 0 \\ 0 & |p|^2 \end{pmatrix} = |p|^2 I. \quad (67)$$

Opérer sur l'équation (65) avec $\sigma \cdot p$ donne

$$(\sigma \cdot p)^2 u_A = (E + m)(\sigma \cdot p)u_B$$

En utilisant les équations (64) et (67), cela devient

$$|p|^2 u_A = (E + m)(E - m)u_A = (E^2 - m^2)u_A,$$

de sorte que nous obtenons en effet

$$E^2 = |p|^2 + m^2$$

Il fallait s'y attendre puisque ψ devait satisfaire l'équation de Klein-Gordon, l'équation (54), ainsi que l'équation de Dirac, l'équation (51). Tout comme pour l'équation de Klein-Gordon, à la fois l'énergie positive Les solutions ($E > 0$) et énergie négative ($E < 0$) de l'équation de Dirac sont donc possibles.

Nous obtenons maintenant des solutions explicites aux équations (64) et (65). Deux solutions indépendantes peuvent être obtenu avec les choix simples (arbitraire)

$$u_A = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad or \quad u_B = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Le spineur à deux composantes correspondant u_B est alors déterminé par l'équation (65) :

$$u_B = \frac{\sigma \cdot p}{E + m} u_A = \frac{1}{E + m} \begin{pmatrix} p_z & p_x - ip_y \\ p_x + ip_y & -p_z \end{pmatrix} u_A.$$

Prenant chaque choix de u_A à son tour donne alors

$$u_1 = N \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \frac{p_z}{(E+m)} \\ \frac{(p_x+ip_y)}{(E+m)} \end{pmatrix}; \quad u_2 = N \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \frac{(p_x-ip_y)}{(E+m)} \\ \frac{-p_z}{(E+m)} \end{pmatrix} \quad (68)$$

où N est un facteur de normalisation, déterminé ci-dessous. Deux autres solutions peuvent être trouvées en choisissant.

$$u_B = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ or } u_B = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Dans ce cas, u_A est déterminé par l'équation (64) :

$$u_A = \frac{\sigma \cdot p}{E - m} u_B = \frac{1}{E - m} \begin{pmatrix} p_z & p_x - ip_y \\ p_x + ip_y & -p_z \end{pmatrix} u_B$$

$$u_3 = N \begin{pmatrix} \frac{p_z}{(E-m)} \\ \frac{(p_x+ip_y)}{(E-m)} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}; \quad u_4 = N \begin{pmatrix} \frac{(p_x-ip_y)}{(E-m)} \\ \frac{(p_x-ip_y)}{(E+m)} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (69)$$

Normalisation des solutions d'ondes planes:

Pour un spineur multi-composant ψ , la normalisation est déterminée par la valeur de $\psi^\dagger \psi = (\psi^*)^T \psi$, la généralisation directe du produit usuel $\psi^* \psi$ approprié à une fonction d'onde mono-composante. Pour une onde plane de la forme $\psi = u(p)e^{ip \cdot x}$, on a $\psi^\dagger = u(p)^\dagger e^{-ip \cdot x}$ et donc $\psi^\dagger \psi = u^\dagger u$

Pour le spineur de base u_1 de l'équation (68), nous avons.

$$u_1^\dagger u_1 = |N|^2 \left(1 + \frac{p_z^2}{(E+m)^2} + \frac{p_x^2 + ip_y^2}{(E+m)^2} \right) = |N|^2 \frac{(E+m)^2 + p^2}{(E+m)^2}$$

En utilisant la relation $E^2 = p^2 + m^2$, cela peut s'écrire

$$u_1^\dagger u_1 = |N|^2 \frac{2E^2 + 2Em}{(E+m)^2} = |N|^2 \frac{2E}{E+m}.$$

Un calcul similaire pour $u_2^\dagger u_2$, $u_3^\dagger u_3$, $u_4^\dagger u_4$ donne

$$u_1^\dagger u_1 = u_2^\dagger u_2 = |N|^2 \frac{2E}{E+m}; \quad u_3^\dagger u_3 = u_4^\dagger u_4 = |N|^2 \frac{2E}{E-m}.$$

Pour des raisons qui seront expliquées plus loin, il est classique de normaliser $2|E|$ à particules par unité de volume et choisissez

$$u_1^\dagger u_1 = u_2^\dagger u_2 = u_3^\dagger u_3 = u_4^\dagger u_4 = 2|E|.$$

Pour u_1 et u_2 , selon le signe de E , on a donc

$$N = \sqrt{(E+m)} \quad (E > 0); \quad N = \sqrt{(-E-m)} \quad (E < 0)$$

tandis que pour u_3 et u_4 , nous avons

$$N = \sqrt{(E-m)} \quad (E > 0); \quad N = \sqrt{(-E+m)} \quad (E < 0)$$

Notez que, puisque l'énergie E est en fait limitée à $E > +m$ ou $E < -m$, la racine carrée est réelle dans tous les cas.

3.2.2 Solution libre d'énergie négative:

Nous considérons maintenant les conséquences du choix de l'option d'énergie positive, $E = +p^2 + m^2$ simultanément pour les quatre solutions u_i . nous introduisons les coordonnées polaires sphériques θ et ϕ et écrivons les trois impulsions p comme[11]:

$$p = (p_x, p_y, p_z) = (p \sin \theta \cos \phi, p \sin \theta \sin \phi, p \cos \theta).$$

En prenant $N = E + m$ pour u_1 et u_2 , $N = E - m$ pour u_3 et u_4 , en utilisant $p_x \pm ip_y$, et en notant que $p = E^2 - m^2 = (E - m)(E + m)$, u_i peut s'écrire sous la forme

$$u_1 = \begin{pmatrix} \sqrt{(E + m)} \\ 0 \\ \sqrt{(E - m)} \cos \theta \\ \sqrt{(E - m)} \sin \theta e^{i\phi} \end{pmatrix}; \quad u_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ \sqrt{(E + m)} \\ \sqrt{(E - m)} \sin \theta e^{-i\phi} \\ -\sqrt{(E - m)} \cos \theta \end{pmatrix}$$

et

$$u_3 = \begin{pmatrix} \sqrt{(E + m)} \cos \theta \\ \sqrt{(E + m)} \sin \theta e^{i\phi} \\ \sqrt{(E - m)} \\ 0 \end{pmatrix}; \quad u_4 = \begin{pmatrix} \sqrt{(E + m)} \sin \theta e^{-i\phi} \\ -\sqrt{(E + m)} \cos \theta \\ 0 \\ \sqrt{(E - m)} \end{pmatrix}.$$

Sous cette forme, les spineurs u_3 et u_4 sont facilement considérés comme des combinaisons linéaires de u_1 et u_2

$$\begin{aligned} u_3 &= \cos \theta u_1 + \sin \theta e^{i\phi} u_2 \\ u_4 &= \sin \theta e^{-i\phi} u_1 - \cos \theta u_2 \end{aligned}$$

Nous concluons qu'il n'est donc pas possible de choisir l'option d'énergie positive $E = +\sqrt{p^2 + m^2}$ simultanément pour les quatre solutions u_i . Pour obtenir quatre solutions linéairement indépendantes, nous sommes obligés de considérer ensemble les solutions d'énergie positive et négative. Un choix classique est de retenir $E > 0$ pour u_1 et u_2 , et d'inverser le signe de u_3 et u_4 . À ce stade, pour l'énergie négative solutions, il devient plus pratique (et standard) de travailler avec des ondes planes de la forme

$$\psi = v(E, p) e^{-i(p.r - Et)}, \quad (70)$$

où il faut comprendre que E est maintenant toujours positif: $E = +\sqrt{p^2 + m^2}$. Notez que, bien que nous ayons maintenant $E > 0$, les solutions de solution de la forme de l'équation (87) sont néanmoins toujours des solutions d'énergie négative, dans le sens où la valeur propre de l'opérateur d'énergie $i \frac{\partial}{\partial t}$ est $-E$. Pour les solutions de la forme $\psi = v(E, p) e^{-i(p.r - Et)}$, l'équation (63) est remplacée par

$$(\gamma^\mu p_\mu + m)v = 0 \quad (71)$$

tandis que les équations (64) et (65) deviennent

$$(\sigma.p)v_B = (E + m)v_A \quad (72)$$

$$(\sigma.p)v_A = (E - m)v_B \quad (73)$$

Ces équations sont de forme identique aux équations (64) et (65), avec u_A remplacé par v_B et u_B remplacé par v_A . La solution pour $v(E, p)$ peut donc être écrite directement à partir de celles déjà obtenues pour

$u(E, p)$ simplement en intervertissant les composantes supérieure et inférieure de $u(E, p)$ L'application de cette transformation aux spineurs u_1 et u_2 de l'équation (68), parexemple, donne les solutions standard.

$$v_1 = \sqrt{(E+m)} \begin{pmatrix} (p_x - ip_y)/(E+m) \\ -p_z/(E+m) \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}; v_2 = \sqrt{(E+m)} \begin{pmatrix} p_z/(E+m) \\ (p_x + ip_y)/(E+m) \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (74)$$

Notons que les spineurs u_1 et u_2 auraient également pu être obtenus directement à partir des spineurs u_3 et u_4 de l'équation (69) en inversant les signes de E et p :

$$v_1(E, p) = u_4(-E, -p), \quad v_2(E, p) = u_3(-E, -p),$$

à condition qu'un facteur de normalisation N approprié à l'énergie négative soit utilisé pour u_1 et u_2 . Désormais, nous travaillerons entièrement en termes de u_3 et u_4 .

3.2.3 Résumé:

En résumé, l'équation de Dirac possède quatre solutions d'ondes planes linéairement indépendantes ; deux solutions à énergie positive plus deux solutions à énergie négative. Un choix standard pour l'énergie positive solutions est

$$\psi = u_1(E, p)e^{i(p.r-Et)}, \quad \psi = u_2(E, p)e^{i(p.r-Et)}$$

avec $u_1(E, p)$ et $u_2(E, p)$ donnés par l'équation (68), tandis qu'un choix standard pour la solution d'énergie négative est

$$\psi = v_1(E, p)e^{-i(p.r-Et)}, \quad \psi = v_2(E, p)e^{-i(p.r-Et)},$$

avec $v_1(E, p)$ et $v_2(E, p)$ donnés par l'équation (74). Pour toutes ces solutions, il faut comprendre que la quantité E est toujours positive : $E = +\sqrt{|p|^2 + m^2}$

Interprétation de la solution d'onde en plan: Stuckelberg (1941) et Feynman (1948) ont suggéré que les solutions d'énergie négative de la forme $\psi = v(E, p)e^{-i(p.r-Et)}$ soient interprétées physiquement comme des antiparticules d'impulsion p et d'énergie positive E Schématiquement, ces solutions peuvent être obtenues à partir de solutions de la forme $\psi = v(E, p)e^{-i(p.r-Et)}$ en inversant le signe de la énergie et trois impulsions [11]:

$$v(E, p) \equiv u(-E, -p).$$

L'approche de Stuckelberg-Feynman revient donc à réinterpréter les particules d'impulsion $-p$ et d'énergie négative $E = -\sqrt{|p|^2 + m^2}$ comme des antiparticules d'impulsion p et d'énergie positive $E = +\sqrt{|p|^2 + m^2}$.

Sous la transformation $(E, p) \rightarrow (-E, -p)$, le vecteur position r reste inchangé et donc le moment cinétique orbital $L = r \wedge p$ doit changer de signe: $L \rightarrow -L$. Conservation du moment cinétique $[H, L + S] = 0$, ne peut alors être maintenu que si $S \rightarrow -S$ également.

$$E \rightarrow -E, \quad p \rightarrow -p, \quad S \rightarrow -S,$$

de sorte que, de manière similaire à l'énergie et à l'impulsion trois, le spin physique d'une antiparticule est obtenu en inversant le signe du spin donné par l'opérateur de spin S .

Pour une particule libre ou antiparticule se déplaçant le long de l'axe z , avec $p_x = p_y = 0$ et $p = (0, 0, p_z)$, les spineurs u_1, u_2, v_1, v_2 des équations (68) et (74) deviennent

$$u_1 = N \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \frac{p_z}{E+m} \\ 0 \end{pmatrix}; u_2 = N \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -\frac{p_z}{E+m} \end{pmatrix}; v_1 = N \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{p_z}{E+m} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}; v_2 = N \begin{pmatrix} \frac{p_z}{E+m} \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Ces spineurs sont facilement considérés comme des états propres de l'opérateur de spin

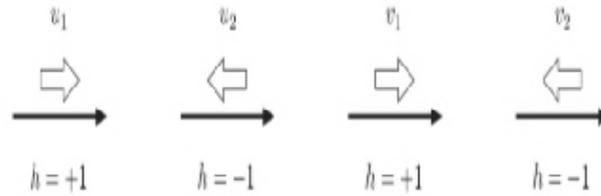
$$S_z = \frac{1}{2} \sum z = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \sigma_z & 0 \\ 0 & \sigma_z \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

aux valeurs propres $\pm \frac{1}{2}$:

$$S_z u_1 = +\frac{1}{2} u_1 \quad S_z v_1 = -\frac{1}{2} v_1 \quad (75)$$

$$S_z u_2 = -\frac{1}{2} u_2 \quad S_z v_2 = +\frac{1}{2} v_2 \quad (76)$$

Ainsi, pour le cas particulier du mouvement le long de l'axe z , les solutions standard u_1, u_2, v_1, v_2 deviennent des états propres de spin, avec le vecteur spin aligné dans la direction $\pm z$. Pour les antiparticules, en raison de la transformation $S \rightarrow -S$ discutée ci-dessus, le spin physique est l'opposé de celui donné par l'action de l'opérateur S_z . Le spin physique de l'antiparticule est donc $S_z = +\frac{1}{2}$ pour v_1 et $S_z = -\frac{1}{2}$ pour v_2 . Ces résultats peuvent être représentés schématiquement par



Notons que le spin d'antiparticule $S_z = +\frac{1}{2}$ associé au spineur v_1 est le même que le spin de particule associé au spineur u_1 . De même, le spineur d'antiparticule v_2 a le même spin, $S_z = -\frac{1}{2}$, que le spineur de particule u_2 . C'était la raison pour étiqueter les spineurs v_1 et v_2 dans l'ordre donné dans l'équation (74), plutôt que l'inverse.

Il convient de souligner que les équations (75) et (76) ne sont valables que pour le mouvement dans la direction $\pm z$, avec $p_x = p_y = 0$. Pour un mouvement dans toute autre direction, avec $p_x \neq 0$ et/ou $p_y \neq 0$, on vérifie facilement que les spineurs u_i et v_i ne sont pas des états propres de spin. Nous considérons cela plus loin Dans une annexe, section 2.17, il est montré qu'une antiparticule a la même masse mais une charge électrique opposée à sa particule correspondante. Ceci est fait en considérant l'équation du mouvement d'une particule de demi-spin dans un champ électromagnétique et en introduisant l'opérateur de conjugaison de charge, C . Comme son nom l'indique, l'opérateur C inverse le signe de toutes les charges électriques et transforme donc les particules en antiparticules et vice versa. La correspondance entre u_1 et v_1 , et entre u_2 et v_2 , ressort formellement de cette analyse.

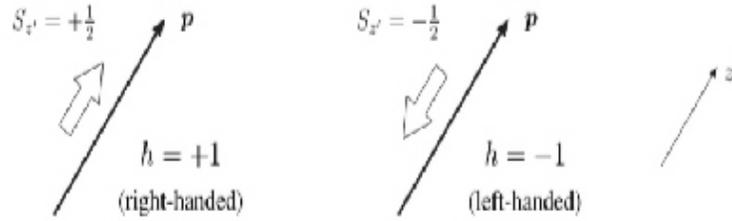
3.2.4 Hélicité :

En physique des particules, l'hélicité est la projection du spin \vec{S} sur la direction de la quantité de mouvement \vec{p} (cette projection correspond donc à la composante suivant la direction de propagation) [11]:

$$h = 2S \cdot \hat{p} = \sum \cdot p = \begin{pmatrix} \sigma \cdot \hat{p} & 0 \\ 0 & \sigma \cdot \hat{p} \end{pmatrix}$$

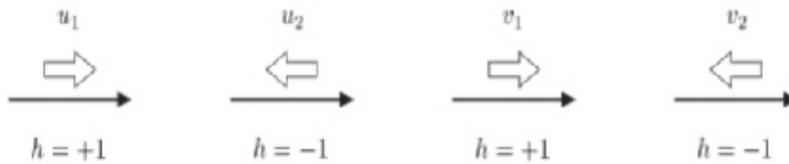
où \hat{p} est un vecteur unitaire constant le long de p , et $\sum = 2S$. Pour une particule ou antiparticule de spin libre $\frac{1}{2}$, il existe deux états propres d'hélicité possibles : un avec la valeur propre de spin $S_z = +\frac{1}{2}$ par

rapport à un axe \hat{z} orienté dans la direction du mouvement (valeur propre d'hélicité $h = +1$), et un avec la valeur propre de spin $S_z = -\frac{1}{2}$ (valeur propre d'hélicité $h = -1$).
Schématiquement, les états propres d'hélicité peuvent être représentés comme suit:



Une particule ou antiparticule dans un état propre d'hélicité avec $h = +1$ est dite de droite, tandis qu'une particule dans un état propre avec $h = -1$ est dite de gauche.

Pour une particule ou antiparticule se déplaçant vers l'avant ou vers l'arrière le long de l'axe z , avec $p^\mu = (E, 0, 0, p_z)$, les états propres d'hélicité sont donnés par les spineurs u_i et v_i . Pour un mouvement dans la direction $+z$ ($p_z > 0$), les valeurs propres d'hélicité correspondant aux états de spin u_1, u_2, v_1, v_2 sont $+1, -1, +1, -1$, respectivement :



Pour un mouvement dans la direction $-z$ ($p_z < 0$), la direction de spin reste inchangée et les valeurs propres d'hélicité sont inversées :



En général, c'est-à-dire pour un mouvement de particules non dirigé selon l'axe z , les spineurs u_i ne sont pas des états propres d'hélicité. Dans la section suivante, nous construisons les états propres d'hélicité pour les particules libres et les antiparticules se déplaçant dans une direction arbitraire.

3.2.5 Construction d'états propres d'hélicité:

Pour une particule d'impulsion p à trois-impulsions, les états propres d'hélicité positive et négative u_\uparrow et u_\downarrow sont définis par les équations [11]:

$$(\hat{p} \cdot \hat{\sigma}) u_\uparrow = +u_\uparrow \quad (77)$$

$$(\hat{p} \cdot \hat{\sigma}) u_\downarrow = -u_\downarrow \quad (78)$$

En termes de spineurs de Weyl à deux composants u_A et u_B , c'est

$$\begin{pmatrix} \sigma \cdot \hat{p} & 0 \\ 0 & \sigma \cdot \hat{p} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_A \\ u_B \end{pmatrix} = \pm \begin{pmatrix} u_A \\ u_B \end{pmatrix}$$

ce qui donne deux équations découplées identiques

$$(\sigma \cdot \widehat{p})u_A = \pm u_A \quad (79)$$

$$(\sigma \cdot \widehat{p})u_B = \pm u_B \quad (80)$$

Pour une particule se déplaçant à un angle θ par rapport à l'axe z et avec un angle azimutal ϕ , le vecteur unitaire \widehat{p} est

$$\widehat{p} = (\sin \theta \cos \phi, \sin \theta \sin \phi, \cos \theta).$$

En utilisant l'équation (66) et en désignant les deux composantes des spineurs u_A ou u_B par a et b , les équations (79) et (80) sont alors équivalentes à

$$\begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta e^{-i\theta} \\ \sin \theta e^{i\theta} & -\cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \pm \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$$

La première ligne (ou de manière équivalente la deuxième ligne) de cette équation matricielle donne

$$\frac{b}{a} = \frac{\pm 1 - \cos \theta}{\sin \theta} e^{i\theta}.$$

Pour la solution d'hélicité positive u_{\uparrow} , avec $h = +1$, on a:

$$\frac{b}{a} = \frac{1 - \cos \theta}{\sin \theta} e^{i\theta} = \frac{2 \sin^2 \theta/2}{2 \sin \theta/2 \cos \theta/2} e^{i\theta} = e^{i\theta} \tan \theta/2$$

et on peut donc prendre

$$(u_{\uparrow})_A \text{ ou } (u_{\uparrow})_B \propto \begin{pmatrix} \cos \theta/2 \\ e^{i\theta} \sin \theta/2 \end{pmatrix} \quad (81)$$

Pour la solution d'hélicité négative u_{\downarrow} , avec $h = -1$, on a à la place

$$\frac{b}{a} = \frac{-1 - \cos \theta}{\sin \theta} e^{i\theta} = \frac{-2 \sin^2 \theta/2}{2 \sin \theta/2 \cos \theta/2} e^{i\theta} = -e^{i\theta} \cot \theta/2,$$

et peut prendre

$$(u_{\downarrow})_A \text{ ou } (u_{\downarrow})_B \propto \begin{pmatrix} -\sin \theta/2 \\ e^{i\theta} \cos \theta/2 \end{pmatrix} \quad (82)$$

Une fois u_A choisie, u_B est donnée en fonction de u_A par l'équation (65) :

$$u_B = \frac{\sigma \cdot p}{E + m} u_A = \frac{p}{E + m} (\sigma \cdot \widehat{p}) u_A = \pm \frac{p}{E + m} u_A.$$

L'utilisation des deux choix possibles de u_A donnés dans les équations (81) et (82) donne ensuite les états propres d'hélicité comme

$$u_{\uparrow}(p) = N \begin{pmatrix} \cos \theta/2 \\ e^{i\theta} \sin \theta/2 \\ \frac{p}{E+m} \cos \theta/2 \\ \frac{p}{E+m} e^{i\theta} \sin \theta/2 \end{pmatrix}, \quad u_{\downarrow}(p) = N \begin{pmatrix} -\sin \theta/2 \\ e^{i\theta} \cos \theta/2 \\ \frac{p}{E+m} \sin \theta/2 \\ -\frac{p}{E+m} e^{i\theta} \cos \theta/2 \end{pmatrix},$$

où la condition de normalisation $(u_{\uparrow})^+ u_{\uparrow} = (u_{\downarrow})^+ u_{\downarrow} = 2E$ fixe la constante N comme $N = \sqrt{E + m}$.

Au lieu de choisir u_A puis de déterminer u_B via l'équation (65), il serait également possible de choisir u_B puis de déterminer u_A via l'équation (64). Il est simple de vérifier que cela donne exactement les mêmes expressions pour u_{\uparrow} et u_{\downarrow} que celle trouvées ci-dessus.

Passant maintenant aux antiparticules, et en se rappelant que l'opérateur de spin change de signe ($S \rightarrow -S$), les états propres d'hélicité positive et négative u_\uparrow et u_\downarrow sont définis par

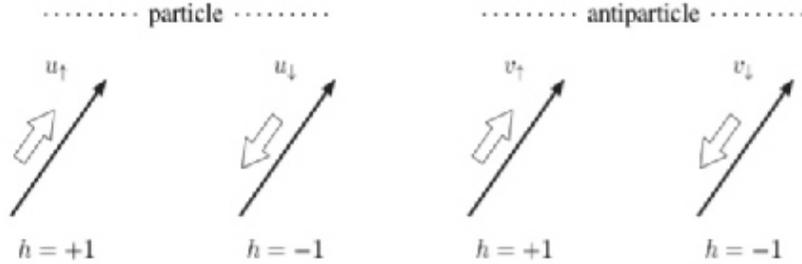
$$(\sum \cdot \hat{p})v_\uparrow = -v_\uparrow.$$

$$(\sum \cdot \hat{p})v_\downarrow = v_\downarrow.$$

C'est la même chose que les équations (77) et (78) pour les particules, mais avec u_\uparrow remplacé par u_\downarrow et u_\downarrow remplacé par u_\uparrow . De plus, pour les antiparticules, nous avons les équations (72) et (73) à la place des équations (64) et (65), qui remplacent effectivement u_A par u_B et u_B par u_A . Les spineurs d'antiparticules u_\uparrow et u_\downarrow peuvent donc être écrits directement en intervertissant les composantes supérieure et inférieure des spineurs de particules u_\uparrow et u_\downarrow puis en intervertissant \uparrow et \downarrow :

$$u_\uparrow(p) = N \begin{pmatrix} \frac{p}{E+m} \sin \theta/2 \\ -\frac{p}{E+m} e^{i\theta} \cos \theta/2 \\ -\sin \theta/2 \\ e^{i\theta} \cos \theta/2 \end{pmatrix}, \quad u_\downarrow(p) = N \begin{pmatrix} \frac{p}{E+m} \cos \theta/2 \\ \frac{p}{E+m} e^{i\theta} \sin \theta/2 \\ \cos \theta/2 \\ -e^{i\theta} \sin \theta/2 \end{pmatrix}$$

Ici, l'énergie $E > 0$ est l'énergie physique de l'antiparticule, et le facteur de normalisation peut à nouveau être montré comme étant $N = \sqrt{E + m}$. Schématiquement, les spineurs d'état propre d'hélicité peuvent être représentés comme suit:



Notez que lorsque $\theta = 0$ (et donc $p_x = p_y = 0, p_z = p$) le spineur u_\uparrow devient égal à u_1 , u_\downarrow devient égal à u_2 , u_\uparrow devient égal à u_1 , et u_\downarrow devient égal à u_2 , comme prévu. De même, lorsque $\theta = \pi$ (et donc $p_x = p_y = 0, p_z = -p$), le spineur u_\uparrow devient égal à u_2 , u_\downarrow devient égal à $-u_1$, v_\uparrow devient égal à $-v_2$, et v_\downarrow devient égal à v_1 , toujours comme prévu, la valeur globale arbitraire des facteurs de normalisation de -1 étant sans conséquence physique

Résumé des solutions d'ondes planes :

Pour une particule libre, de 4-impulsion (E, p) , les solutions d'ondes planes sont

$$\psi = u_i(E, p)e^{i(p \cdot r - Et)}$$

$$u_1 = \sqrt{E + m} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \frac{p_z}{(E+m)} \\ \frac{(p_x + ip_y)}{(E+m)} \end{pmatrix}, \quad u_2 = \sqrt{E + m} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \frac{(p_x - ip_y)}{(E+m)} \\ \frac{-p_z}{(E+m)} \end{pmatrix}$$

Pour une antiparticule libre, de 4-impulsion physique $(E, 0, p)$, les solutions sont

$$\psi = v_i(E, p)e^{-i(p \cdot r - Et)}$$

$$v_1 = \sqrt{E + m} \begin{pmatrix} \frac{(p_x - ip_y)}{(E+m)} \\ \frac{-p_z}{(E+m)} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \sqrt{E + m} \begin{pmatrix} \frac{p_z}{(E+m)} \\ \frac{(p_x + ip_y)}{(E+m)} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Pour une particule ou une antiparticule se déplaçant (vers l'avant ou vers l'arrière) le long de l'axe z , les spineurs u_i et v_i sont des états propres de l'opérateur de spin S_z , c'est-à-dire qu'ils sont des états propres d'hélicité. Dans ce cas, le spin physique de la particule ou antiparticule est $S_z = +\frac{1}{2}$ pour u_1, v_1 et $S_z = -\frac{1}{2}$ pour u_2, v_2

En général, les spineurs u_1, u_2, v_1, v_2 ne sont pas des états propres d'hélicité. Pour une particule se déplaçant à un angle θ par rapport à l'axe z , avec quatre-impulsions $p^\mu = (E, p \sin \theta \cos \phi, p \sin \theta \sin \phi, p \cos \theta)$, les états propres d'hélicité $h = +1$ (droitier) et $h = -1$ (gaucher) sont

$$u_\uparrow(p) = \sqrt{E+m} \begin{pmatrix} \cos \theta/2 \\ e^{i\theta} \sin \theta/2 \\ \frac{p}{E+m} \cos \theta/2 \\ \frac{p}{E+m} e^{i\theta} \sin \theta/2 \end{pmatrix}, \quad u_\downarrow(p) = \sqrt{E+m} \begin{pmatrix} -\sin \theta/2 \\ e^{i\theta} \cos \theta/2 \\ \frac{p}{E+m} \sin \theta/2 \\ -\frac{p}{E+m} e^{i\theta} \cos \theta/2 \end{pmatrix} \quad (83)$$

Pour une antiparticule, les états propres d'hélicité sont (avec $E > 0$)

$$v_\uparrow(p) = \sqrt{E+m} \begin{pmatrix} \frac{p}{E+m} \sin \theta/2 \\ -\frac{p}{E+m} e^{i\theta} \cos \theta/2 \\ -\sin \theta/2 \\ e^{i\theta} \cos \theta/2 \end{pmatrix}, \quad v_\downarrow(p) = \sqrt{E+m} \begin{pmatrix} \frac{p}{E+m} \cos \theta/2 \\ \frac{p}{E+m} e^{i\theta} \sin \theta/2 \\ \cos \theta/2 \\ -e^{i\theta} \sin \theta/2 \end{pmatrix} \quad (84)$$

L'un ou l'autre des deux ensembles d'états de base (u_1, u_2, v_1, v_2) ou $(u_\uparrow, u_\downarrow, v_\uparrow, v_\downarrow)$ peut être utilisé aussi bien dans les calculs d'éléments de matrice. En général, cependant, on aura tendance à préférer les spineurs d'états propres d'hélicité afin de faire ressortir plus clairement la structure de spin sous-jacente des interactions électromagnétiques, faibles et fortes.

Les spineurs ci-dessus sont tous normalisés à $2E$ particules par unité de volume :

$$\rho = \psi^\dagger(p)\psi(p) = \bar{\psi}(p)\gamma^0\psi(p) = 2E.$$

Il est montré sur la feuille d'exemples que le courant $j^\mu = \bar{\psi}(p)\gamma^\mu\psi(p)$ pour une (anti)particule libre est proportionnel à la quadri-impulsion physique de l'(anti)particule, et que le flux d'(anti)particules est donné par le courant à trois vecteurs $j = 2p$.

$$j^\mu = \bar{u}(p)\gamma^\mu u(p) = \bar{v}(p)\gamma^\mu v(p) = 2p^\mu$$

Hélicité et chiralité: Dans la limite relativiste extrême $E \gg m$, où les masses des particules peuvent être négligées, le facteur $p/E + m$ dans les équations (83) et (84) tend vers l'unité et les spineurs d'état propre d'hélicité deviennent [11]:

$$u_\uparrow = \sqrt{E} \begin{pmatrix} c \\ e^{i\phi} s \\ c \\ e^{i\phi} s \end{pmatrix}; u_\downarrow = \sqrt{E} \begin{pmatrix} -s \\ e^{i\phi} s \\ s \\ -e^{i\phi} s \end{pmatrix}; v_\uparrow = \sqrt{E} \begin{pmatrix} s \\ -e^{i\phi} s \\ -s \\ e^{i\phi} s \end{pmatrix}; v_\downarrow = \sqrt{E} \begin{pmatrix} c \\ e^{i\phi} s \\ c \\ e^{i\phi} s \end{pmatrix} \quad (85)$$

où $c \equiv \cos \theta/2$ et $s \equiv \sin \theta/2$. En introduisant la matrice γ^5 définie par

$$\gamma^5 \equiv i\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & I \\ I & 0 \end{pmatrix}$$

il est simple de vérifier que les spineurs d'états propres d'hélicité sont des états propres de γ^5

$$\gamma^5 u_\uparrow = u_\uparrow, \quad \gamma^5 u_\downarrow = u_\downarrow, \quad \gamma^5 v_\uparrow = -v_\uparrow, \quad \gamma^5 v_\downarrow = v_\downarrow \quad (86)$$

Ces équations ne sont pas valables pour le cas général où la masse m ne peut être négligée, comme on le voit immédiatement en appliquant γ^5 aux spineurs dans les équations (64) et (65).

Ainsi, dans la limite relativiste extrême, et uniquement dans cette limite, les états propres d'hélicité $u_\uparrow, u_\downarrow, v_\uparrow, v_\downarrow$, deviennent des états propres de l'opérateur γ^5 . Pour une particule, la valeur propre γ^5 donne l'hélicité de l'état de la particule tandis que pour une antiparticule γ^5 donne moins l'hélicité. Nous définissons maintenant les opérateurs de projection gaucher et droitier, P_L et P_R comme étant

$$P_L \equiv \frac{1}{2}(1 - \gamma^5) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$P_R \equiv \frac{1}{2}(1 + \gamma^5) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Tout spineur ψ peut trivialement être décomposé en

$$\psi = \psi_L + \psi_R \quad (87)$$

où ψ_L et ψ_R sont les composantes chirales gauche et droite de ψ , définies comme

$$\psi_L \equiv \frac{1}{2}(1 - \gamma^5)\psi = P_L\psi \quad (88)$$

$$\psi_R \equiv \frac{1}{2}(1 + \gamma^5)\psi = P_R\psi \quad (89)$$

En utilisant l'équation (86), nous avons

$$P_L u_\uparrow = \frac{1}{2}(1 - \gamma^5)u_\uparrow = 0 \quad P_R u_\uparrow = \frac{1}{2}(1 + \gamma^5)u_\uparrow = u_\uparrow$$

$$P_L u_\downarrow = \frac{1}{2}(1 - \gamma^5)u_\downarrow = u_\downarrow \quad P_R u_\downarrow = \frac{1}{2}(1 + \gamma^5)u_\downarrow = 0.$$

Un spineur de particule général u peut toujours être exprimé comme une combinaison linéaire des spineurs de base u_\uparrow et u_\downarrow , par exemple comme $u = \alpha_\uparrow u_\uparrow + \alpha_\downarrow u_\downarrow$ où α_\uparrow et α_\downarrow sont des constantes avec $|\alpha_\uparrow|^2 + |\alpha_\downarrow|^2 = 1$. Les composantes chirales de ce spineur général sont:

$$P_L u = \frac{1}{2}(1 - \gamma^5)u = \alpha_\downarrow u_\downarrow \quad (h = -1)$$

$$P_R u = \frac{1}{2}(1 + \gamma^5)u = \alpha_\uparrow u_\uparrow \quad (h = +1).$$

Ainsi, les opérateurs P_L et P_R projettent respectivement les composantes d'hélicité négative (gauche) et positive (droite) d'un spineur de particule général. Plus précisément, pour tout spineur de particule u , la projection $P_L u = \frac{1}{2}(1 - \gamma^5)u$ est toujours un état propre d'hélicité négative (gauche) 2, tandis que la projection $P_R u = \frac{1}{2}(1 + \gamma^5)u$ est toujours un état propre d'hélicité positive (droite). Pour une antiparticule, nous avons

$$P_L v_\uparrow = \frac{1}{2}(1 - \gamma^5)v_\uparrow = v_\uparrow \quad P_R v_\uparrow = \frac{1}{2}(1 + \gamma^5)v_\uparrow = 0$$

$$P_L v_\downarrow = \frac{1}{2}(1 - \gamma^5)v_\downarrow = 0 \quad P_R v_\downarrow = \frac{1}{2}(1 + \gamma^5)v_\downarrow = v_\downarrow.$$

L'opérateur P_L projette maintenant la composante hélicoïdale positive (droitier) tandis que P_R projette la composante négative (gaucher).

En résumé, dans la limite relativiste extrême, pour tout spineur de particules u ou spineur d'antiparticules v , nous avons :

	Gaucher ($h = -1$)	Droitier ($h = +1$)
Particule	$\frac{1}{2}(1 - \gamma^5)u (= P_L u)$	$\frac{1}{2}(1 + \gamma^5)u (= P_R u)$
Antiparticule	$\frac{1}{2}(1 + \gamma^5)v (= P_R v)$	$\frac{1}{2}(1 - \gamma^5)v (= P_L v)$

Il convient de souligner que la définition des composantes chirales gauches et droitières ψ_L et ψ_R dans les équations (88) et (89) s'applique de manière assez générale à tout spineur ψ .

Dans la limite relativiste extrême $E \gg m$, et seulement dans cette limite, les composantes chirales deviennent des états à hélicité définie, c'est-à-dire des états propres d'hélicité gauchers ou droitiers. Notez que, pour les antiparticules, l'opérateur de projection gaucher P_L projette l'état propre d'hélicité droitier, tandis que l'opérateur de projection droitier P_R projette l'état propre d'hélicité gaucher.

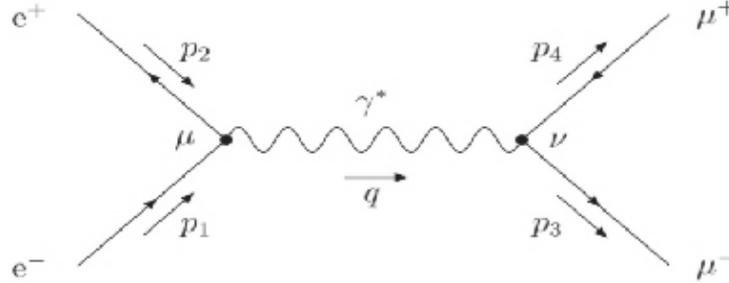
Résumé: hélicité, maniabilité et chiralité:

Une particule ou une antiparticule dans un état propre de spin avec le spin dirigé le long (opposé à) la direction du mouvement a une hélicité ± 1 et est dite droitier (gauchère). Les composantes chirales gauches et droitières d'un spineur de particule ou d'antiparticule ψ sont définies comme $\psi_L \equiv \frac{1}{2}(1 - \gamma^5)\psi$ et $\psi_R \equiv \frac{1}{2}(1 + \gamma^5)\psi$. Dans la limite relativiste, les composantes chirales ψ_L et ψ_R deviennent des états propres d'hélicité. Pour une particule, ψ_L devient un état propre d'hélicité gaucher et ψ_R devient un état propre droitier, tandis que pour une antiparticule, ψ_L devient droitier et ψ_R devient gaucher.

3.3 Applications phénoménologiques:

3.3.1 Élément de matrice pour $e^+e^- \rightarrow \mu^+\mu^-$

À l'ordre de tête de la théorie des perturbations, le processus QED $e^+e^- \rightarrow \mu^+\mu^-$ est régi par un seul diagramme de Feynman médiatisé par un photon virtuel γ^* [12].



Ici p_1 et p_2 sont les quatre impulsions des e^- et e^+ entrants, p_3 et p_4 sont les quatre impulsions des μ^+ et μ^- sortants, et $q = p_1 + p_2 = p_3 + p_4$ est les quatre impulsions de le photon virtuel. Les flèches sur les lignes externes du diagramme de Feynman indiquent la direction des particules qui, pour les antiparticules e^+ et μ^+ , est l'opposée de la direction physique des antiparticules.

Les règles de Feynman QED donnent des facteurs de $u(p_1)$ pour le e^- entrant, $\bar{v}(p_2)$ pour le e^+ entrant, $\bar{u}(p_3)$ pour le μ^- sortant, $v(p_4)$ pour le μ^+ sortant, $ig^{\mu\nu}/q^2$ pour le propagateur de photons, $ie\gamma^\mu$ pour le vertex électron-photon, et $ie\gamma^\nu$ pour le sommet muon-photon, où $-e$ est la charge électrique de e^- et u^- . Le produit de ces facteurs détermine l'élément de matrice invariant de Lorentz M_{fi} :

$$-iM_{fi} = [\bar{v}(p_2) \cdot ie\gamma^\mu \cdot u(p_1)] \cdot \frac{-ig_{\mu\nu}}{q^2} \cdot [\bar{u}(p_3) \cdot ie\gamma^\nu \cdot v(p_4)]$$

Présentation du produit scalaire invariant $s \equiv (p_1 + p_2)^2 = q^2$, on a

$$M_{fi} = -\frac{e^2}{s} g_{\mu\nu} [\bar{v}(p_2) \gamma^\mu u(p_1)] [\bar{u}(p_3) \gamma^\nu v(p_4)] \quad (90)$$

Ce n'est qu'un nombre, qui peut être calculé une fois que les états de spin initial et final ont été spécifiés. Avec deux états de spin possibles disponibles pour chacune des quatre particules externes impliquées, il y a un total de 16 configurations de spin possibles à considérer. Les différents facteurs de l'équation (90) sont ordonnés de telle sorte que les facteurs associés uniquement au sommet $e^+e^-\gamma^*$ soient regroupés, définissant le courant d'électrons

$$(j_e)^\mu = \bar{v}(p_2) \gamma^\mu u(p_1)$$

et de même pour les facteurs associés uniquement au sommet $\mu^+\mu^-\gamma^*$, définissant le courant de muon

$$(j_\mu)^\nu = \bar{u}(p_3) \gamma^\nu v(p_4).$$

L'élément de matrice global M_{fi} est proportionnel au produit scalaire des quatre vecteurs de courant d'électrons et de muons :

$$M_{fi} = -\frac{e^2}{s} (j_e \cdot j_\mu) \quad (91)$$

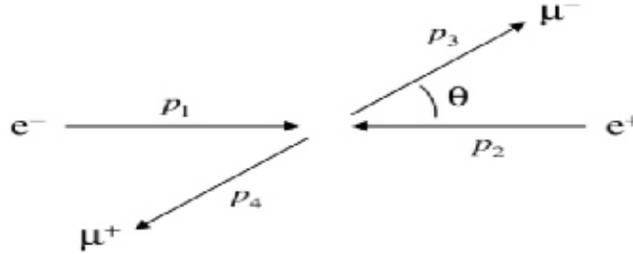
et en tant que tel est un exemple d'interaction courant-courant.

Nous considérons la diffusion $e^+e^- \rightarrow \mu^+\mu^-$ aux énergies relativistes extrêmes et travaillons dans le cadre du centre de masse. Nous choisissons la direction e^- entrante le long de l'axe $+z$ et l'axe μ^- sortant et le θ sortant vers l'axe z . le e^- et le e^+ 4-moments sont donc

$$p_1 = (E, 0, 0, E); \quad p_2 = (E, 0, 0, -E) \quad (92)$$

tandis que les μ^- et μ^+ 4-moments peuvent être considérés comme

$$p_3 = (E, E \sin \theta, 0, E \cos \theta); \quad p_4 = (E, -E \sin \theta, 0, -E \cos \theta) \quad (93)$$



La section efficace sera évaluée pour chaque combinaison possible d'hélicités e^+, e^-, μ^+, μ^- . Les spineurs $u(p_1), v(p_2), u(p_3), v(p_4)$ peuvent être trouvés en utilisant le résultat général que, pour ultra-relativiste particules ou antiparticules se déplaçant selon un angle θ par rapport à l'axe z , avec quatre-impulsions

$$p^\mu = (E, E \sin \theta \cos \phi, E \sin \theta \sin \phi, E \cos \theta) \quad (94)$$

les états propres d'hélicité sont donnés par

$$u_\uparrow = \sqrt{E} \begin{pmatrix} c \\ e^{i\phi} s \\ c \\ e^{i\phi} s \end{pmatrix}; u_\downarrow = \sqrt{E} \begin{pmatrix} -s \\ e^{i\phi} c \\ s \\ -e^{i\phi} c \end{pmatrix}; v_\uparrow = \sqrt{E} \begin{pmatrix} s \\ -e^{i\phi} c \\ -s \\ -e^{i\phi} c \end{pmatrix}; v_\downarrow = \sqrt{E} \begin{pmatrix} c \\ e^{i\phi} s \\ c \\ e^{i\phi} s \end{pmatrix} \quad (95)$$

où $c \equiv \cos \frac{\theta}{2}$, $s \equiv \sin \frac{\theta}{2}$. Une fois que l'élément de matrice a été évalué à l'aide de l'équation (90), la section efficace différentielle peut être trouvée à partir de

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{1}{64\pi^2 s} |M_{if}|^2 \quad (96)$$

où $s \equiv (p_1 + p_2)^2$. est l'énergie du centre de masse au carré.

Le courant des muons Nous commençons par évaluer le courant de muons $(j_\mu)^\mu = \bar{u}(p_3) \gamma^\nu v(p_4)$ pour chacune des quatre configurations de spin possibles pour la paire de muons [12], $\mu_L^+ \mu_L^-, \mu_L^+ \mu_R^-, \mu_R^+ \mu_L^-, \mu_R^+ \mu_R^-$, où les indices L et R se réfèrent à l'hélicité de μ^+ ou μ^- .

Les états propres d'hélicité "spin up" et "spin down" pour le μ^- sortant, avec quatre impulsions $p_3 = (E, E \sin \theta, 0, E \cos \theta)$, peuvent être écrits directement à partir de l'équation (95) simplement en définissant $\phi = 0$:

$$u_\uparrow(p_3) = \sqrt{E} \begin{pmatrix} c \\ s \\ c \\ s \end{pmatrix}; \quad u_\downarrow(p_3) = \sqrt{E} \begin{pmatrix} -s \\ c \\ s \\ -c \end{pmatrix}$$

Où $c \equiv \cos \frac{\theta}{2}$, $s \equiv \sin \frac{\theta}{2}$. le quadri-momentum μ^+ , $p_4 = (E, -E \sin \theta, 0, -E \cos \theta)$, peut être obtenu à partir de l'équation (94) en définissant $\theta \rightarrow \pi - \theta$ et $\phi = \pi$. Faire ces remplacements dans l'équation (95) donne le "spin up" et « spin down » spineurs μ^+ comme

$$v_\uparrow(p_4) = \sqrt{E} \begin{pmatrix} s \\ c \\ -s \\ -c \end{pmatrix}; \quad v_\downarrow(p_4) = \sqrt{E} \begin{pmatrix} s \\ -c \\ s \\ -c \end{pmatrix}$$

où nous avons utilisé $\sin((\pi - \theta)/2) = \cos \theta/2 = c$ and $\cos((\pi - \theta)/2) = \sin \theta/2 = s$.

Le courant de muon $\bar{u}(p_3) \gamma^\nu v(p_4)$ peut maintenant être évalué, tour à tour, pour chacun des quatre appariements d'hélicité possibles, en utilisant la multiplication matricielle standard. Les spineurs adjoints $\bar{u}_\uparrow(p_3)$ et $\bar{u}_\downarrow(p_3)$ sont donnés par

$$\bar{u}_\uparrow(p_3) = \sqrt{E} (c, s, -c, -s); \quad \bar{u}_\downarrow(p_3) = (-s, c, -s, c).$$

Les expressions générales pour une multiplication matricielle de la forme $\bar{\psi} \gamma^\mu \phi$ sont dérivées dans la feuille d'exemples.

Pour des spineurs arbitraires ψ et ϕ , à composantes réelles ψ_i et ϕ_i , ces expressions donnent

$$\begin{aligned} \bar{\psi} \gamma^0 \phi &= \psi_1 \phi_1 + \psi_2 \phi_2 + \psi_3 \phi_3 + \psi_4 \phi_4 \\ \bar{\psi} \gamma^1 \phi &= \psi_1 \phi_4 + \psi_2 \phi_3 + \psi_3 \phi_2 + \psi_4 \phi_1 \\ \bar{\psi} \gamma^2 \phi &= -i(\psi_1 \phi_4 - \psi_2 \phi_3 + \psi_3 \phi_2 - \psi_4 \phi_1) \\ \bar{\psi} \gamma^3 \phi &= \psi_1 \phi_3 - \psi_2 \phi_4 + \psi_3 \phi_1 - \psi_4 \phi_2. \end{aligned}$$

Considérons d'abord le cas $\mu_R^+ \mu_L^-$ où le μ^+ est droitier, $\phi = v_\uparrow(p_4)$ et le μ^- est gaucher, $\psi = u_\downarrow(p_3)$. Les expressions ci-dessus donnent alors

$$\bar{u}_\downarrow(p_3) \gamma^0 v_\uparrow(p_4) = E(-sc + cs - sc + cs) = 0$$

$$\bar{u}_\downarrow(p_3) \gamma^1 v_\uparrow(p_4) = E(s^2 - c^2 + s^2 - c^2) = 0$$

$$\bar{u}_\downarrow(p_3) \gamma^2 v_\uparrow(p_4) = -iE (s^2 + c^2 + s^2 + c^2) = -2iE$$

$$\bar{u}_\downarrow(p_3) \gamma^3 v_\uparrow(p_4) = E (sc + cs + sc + cs) = 4Esc$$

Cela peut être écrit de manière compacte comme le quadrivecteur du courant du muon

$$\begin{aligned} \bar{u}_\downarrow(p_3) \gamma^\mu v_\uparrow(p_4) &= 2E (0, s^2 - c^2, -i, 2sc) \\ &= 2E (0, -\cos s\theta, -i, \sin \theta) \end{aligned}$$

où nous avons utilisé les identités $2sc = 2 \sin \theta/2 \cos \theta/2 = \sin \theta$ and $c^2 - s^2 = \cos^2 \theta/2 - \sin^2 \theta/2 = \cos \theta$. Le courant de muon pour les configurations de spin restantes est facilement évalué de la même manière, donnant globalement (dans la limite relativiste) :

$$\mu_L^+ \mu_R^- : \bar{u}_\uparrow(p_3) \gamma^\mu v_\downarrow(p_4) = 2E (0, -\cos \theta, i, \sin \theta) \quad (97)$$

$$\mu_R^+ \mu_R^- : \bar{u}_\uparrow(p_3) \gamma^\mu v_\uparrow(p_4) = (0, 0, 0, 0) \quad (98)$$

$$\mu_L^+ \mu_L^- : \bar{u}_\downarrow(p_3) \gamma^\mu v_\downarrow(p_4) = (0, 0, 0, 0) \quad (99)$$

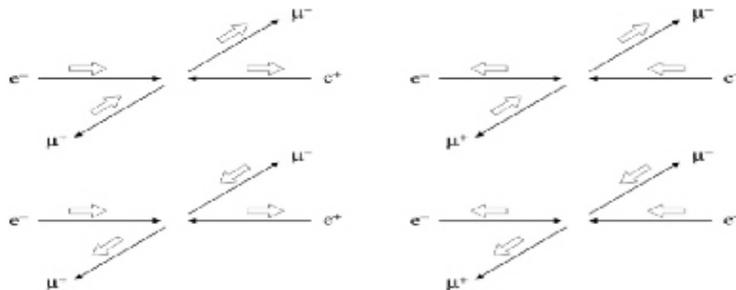
$$\mu_R^+ \mu_L^- : \bar{u}_\downarrow(p_3) \gamma^\mu v_\uparrow(p_4) = 2E (0, -\cos \theta, -i, \sin \theta) \quad (100)$$

Conservation de l'hélicité: Les résultats ci-dessus montrent que le courant du muon (et donc l'élément de matrice M_{if}) n'est non nul que pour les cas $\mu_L^+ \mu_R^-$ et $\mu_R^+ \mu_L^-$, où μ^+ et μ^- ont des hélicités opposées. Puisque l'hélicité physique d'une antiparticule (μ^+ dans ce cas) est opposée à l'hélicité de la particule d'énergie négative correspondante, cela équivaut à l'affirmation selon laquelle le courant de muon n'est non nul que si l'hélicité de la particule est la même avant et après l'interaction avec le photon virtuel. Ceci est un exemple d'une propriété générale de QED connue sous le nom de conservation de l'hélicité : dans la limite relativiste, l'hélicité des particules est préservée dans les interactions avec les photons. On verra que la conservation de l'hélicité s'applique également aux interactions faibles et fortes [12].

La conservation de l'hélicité s'applique également au sommet de l'électron, comme nous le montrerons explicitement dans la section suivante ; le courant d'électrons n'est non nul que pour les cas $e_L^+ e_R^-$ et $e_R^+ e_L^-$. Par conséquent, dans la limite sans masse, seules quatre des 16 configurations de spin possibles donnent un élément de matrice non nul. Ceux-ci sont illustrés au verso; seules les configurations avec une projection de spin total $S_z = \pm 1$ dans les états initial et final sont autorisées.

La conservation de l'hélicité dans QED est une conséquence du résultat général suivant, dont la preuve est reportée à la feuille d'exemples.

$$\bar{\psi} \gamma^\mu \psi = \bar{\psi}_L \gamma^\mu \psi_L + \bar{\psi}_R \gamma^\mu \psi_R \quad (101)$$



Où $\psi_L = \frac{1}{2}(1 - \gamma^5)$ et $\psi_R = \frac{1}{2}(1 + \gamma^5)$ sont les composantes chirales gauche et droite de ψ . Il n'y a pas de contribution au courant $\bar{\psi}\gamma^\mu\psi$ des termes mixtes $\bar{\psi}_R\gamma^\mu\psi_L$ ou $\bar{\psi}_L\gamma^\mu\psi_R$:

$$\bar{\psi}_R\gamma^\mu\psi_L = 0 \quad (102)$$

$$\bar{\psi}_L\gamma^\mu\psi_R = 0 \quad (103)$$

Ainsi, dans QED, les composants chiraux gauchers ne se couplent qu'aux composants chiraux gauchers, et les composants chiraux droitiers ne se couplent qu'aux composants chiraux droitiers, c'est-à-dire que la chiralité des particules est préservée dans une interaction avec un photon. Aux énergies relativistes extrêmes, les composantes chirales gauche et droite deviennent des états propres d'hélicité, et l'hélicité des particules est alors également conservée dans l'interaction. La conservation de la chiralité, les équations (101) – (103) est un résultat général qui tient à toutes les énergies des particules alors que la conservation de l'hélicité, les équations (98) et (99), ne tient que dans la limite relativiste.

Le courant les électrons: Les spineurs d'électrons $\mu_\uparrow(p_1)$ et $\mu_\downarrow(p_1)$ peuvent être obtenus à partir de l'équation (95) en définissant $\theta = 0$ et $\phi = 0$, tandis que les spineurs de positons $v_\uparrow(p_2)$ et $v_\downarrow(p_2)$ peuvent être obtenus en définissant $\theta = \pi$ et $\phi = 0$ [12]:

$$\mu_{\uparrow(p_1)} = \sqrt{E} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}; \mu_{\downarrow(p_1)} = \sqrt{E} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}; v_{\uparrow(p_2)} = \sqrt{E} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}; v_{\downarrow(p_2)} = \sqrt{E} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Le courant d'électrons $(j_e)^\mu = \bar{v}(p_2)\gamma^\mu\mu(p_1)$ pour chaque configuration de spin possible pourrait clairement être évalué en utilisant la multiplication matricielle directe, comme cela a été fait ci-dessus pour le courant de muons. Une façon plus élégante de procéder est de noter que le courant d'électrons, de la forme $\bar{v}\gamma^\mu\mu$, peut être obtenu à partir du conjugué complexe du courant de muons, de la forme $\bar{u}\gamma^\mu v$. Pour le démontrer, traitez chaque élément du quadrivecteur actuel comme une matrice 1×1 , donnant

$$\begin{aligned} [\bar{u}(p_a)\gamma^\mu v(p_b)]^* &= [\bar{u}(p_a)\gamma^\mu v(p_b)]^+ \\ &= [u^+(p_a)\gamma^0\gamma^\nu v(p_b)]^+ && \text{puisque } \bar{u} \equiv u^+\gamma^0 \\ &= v^+(p_b)\gamma^{\nu+}\gamma^{0+}u(p_a) && \text{puisque } (AB)^+ = B^+A^+ \\ &= v^+(p_b)\gamma^{\nu+}\gamma^0u(p_a) && \text{puisque } \gamma^{0+} = \gamma^0 \\ &= v^+(p_b)\gamma^0\gamma^\nu u(p_a) && \text{puisque } \gamma^{\nu+}\gamma^0 = \gamma^0\gamma^\nu \\ &= \bar{v}(p_b)\gamma^\nu u(p_a) && \text{puisque } \bar{v} \equiv v^+\gamma^0 \end{aligned}$$

Prendre le conjugué complexe des courants de muons des équations (97) à (100) donne alors

$$\bar{v}_\downarrow(p_4)\gamma^\mu u_\uparrow(p_3) = [\bar{u}_\uparrow(p_3)\gamma^\mu v_\downarrow(p_4)]^* = 2E(0, -\cos\theta, -i, \sin\theta) \quad (104)$$

$$\bar{v}_\uparrow(p_4)\gamma^\mu u_\uparrow(p_3) = [\bar{u}_\uparrow(p_3)\gamma^\mu v_\uparrow(p_4)]^* = (0, 0, 0, 0) \quad (105)$$

$$\bar{v}_\downarrow(p_4)\gamma^\mu u_\downarrow(p_3) = [\bar{u}_\downarrow(p_3)\gamma^\mu v_\downarrow(p_4)]^* = (0, 0, 0, 0) \quad (106)$$

$$\bar{v}_\uparrow(p_4)\gamma^\mu u_\downarrow(p_3) = [\bar{u}_\downarrow(p_3)\gamma^\mu v_\uparrow(p_4)]^* = 2E(0, -\cos\theta, i, \sin\theta) \quad (107)$$

Les quatre impulsions d'électrons p_1 et p_2 de l'équation (92) ne sont qu'un cas particulier des quatre impulsions de muons p_3 et p_4 de l'équation (93), obtenus en fixant $\theta = 0$ dans cette dernière. Par conséquent,

le courant d'électrons j_e pour chacune des quatre combinaisons possibles d'états propres d'hélicité e^+ et e^- peut être écrit directement en définissant $\theta = 0$ dans les équations (104) – (107) :

$$e_L^+ e_R^- : \bar{v}_\downarrow(p_2) \gamma^\mu u_\uparrow(p_1) = 2E(0, -1, -i, 0) \quad (108)$$

$$e_R^+ e_L^- : \bar{v}_\uparrow(p_2) \gamma^\mu u_\uparrow(p_1) = (0, 0, 0, 0) \quad (109)$$

$$e_L^+ e_L^- : \bar{v}_\downarrow(p_2) \gamma^\mu u_\downarrow(p_1) = (0, 0, 0, 0) \quad (110)$$

$$e_R^+ e_L^- : \bar{v}_\downarrow(p_2) \gamma^\mu u_\downarrow(p_1) = 2E(0, -1, i, 0) \quad (111)$$

Le courant d'électrons n'est non nul que si e^+ et e^- ont une hélicité opposée, comme prévu par la conservation de l'hélicité.

Calcul des éléments de matrice: L'élément de matrice M_{fi} est proportionnel au produit scalaire des 4-vecteurs de courant d'électrons j_e de Équations (108) – (108) avec les 4 vecteurs de courant de muon j_μ de l'équation (97) – (100) :

$$M_{fi} = -\frac{e^2}{s} (j_e, j_\mu) \quad (112)$$

Ce produit scalaire est non nul pour seulement quatre des 16 configurations d'hélicité possibles [12] :

$$e_R^- e_L^+ \rightarrow \mu_R^- \mu_L^+ : M_{RR} \propto 2E(0, -1, -i, 0) \cdot 2E(0, -\cos\theta, i, \sin\theta) \quad (113)$$

$$e_R^- e_L^+ \rightarrow \mu_L^- \mu_R^+ : M_{RL} \propto 2E(0, -1, -i, 0) \cdot 2E(0, -\cos\theta, -i, \sin\theta) \quad (114)$$

$$e_L^- e_R^+ \rightarrow \mu_R^- \mu_L^+ : M_{LR} \propto 2E(0, -1, i, 0) \cdot 2E(0, -\cos\theta, i, \sin\theta) \quad (115)$$

$$e_L^- e_R^+ \rightarrow \mu_L^- \mu_R^+ : M_{LL} \propto 2E(0, -1, i, 0) \cdot 2E(0, -\cos\theta, -i, \sin\theta) \quad (116)$$

Ici, le premier suffixe sur les éléments de la matrice M_{IJ} marque l'hélicité du e^- et le second marque l'hélicité du μ^- . Pour le processus $e_L^- e_R^+ \rightarrow \mu_L^- \mu_R^+$ de l'équation (116) par exemple, où e^- et μ^- sont tous les deux gauchers, l'élément de matrice est

$$\begin{aligned} M_{LL} &= -\frac{e^2}{s} (2E(0, -1, i, 0) \cdot 2E(0, -\cos\theta, -i, \sin\theta)), \\ &= -\frac{e^2}{s} \cdot 4E^2 (-\cos\theta - 1). \end{aligned}$$

La somme des quatre moments initiaux est $p_1 + p_2 = (2E, 0, 0, 0)$, de sorte que $s = (p_1 + p_2)^2 = 4E^2$. D'où

$$M_{LL} = e^2 (1 + \cos\theta).$$

L'élément de matrice au carré est donc

$$|M_{LL}|^2 = (4\pi\alpha)^2 (1 + \cos\theta)^2.$$

où $\alpha = e^2/4\pi \approx 1/137$ est la constante de structure fine. Les éléments de matrice pour les configurations d'hélicité restantes, les équations (113) – (116), peuvent être évalués de manière similaire, donnant

$$|M_{LL}|^2 = |M_{RR}|^2 = (4\pi\alpha)^2 (1 + \cos\theta)^2 \quad (117)$$

$$|M_{LR}|^2 = |M_{RL}|^2 = (4\pi\alpha)^2 (1 - \cos\theta)^2 \quad (118)$$

À partir de l'équation (96), les sections efficaces différentielles correspondantes sont alors

$$\frac{d\sigma_{LL}}{d\Omega} = \frac{d\sigma_{RR}}{d\Omega} = \frac{\alpha^2}{4s} (1 + \cos\theta)^2 \quad (119)$$

$$\frac{d\sigma_{LR}}{d\Omega} = \frac{d\sigma_{RL}}{d\Omega} = \frac{\alpha^2}{4s} (1 - \cos\theta)^2 \quad (120)$$

Les sections efficaces totales sont obtenues en intégrant sur θ et ϕ en utiliser

$$\int (1 \pm \cos\theta)^2 d\Omega = 2\pi \int_{-1}^{+1} (1 \pm \cos\theta)^2 d\cos\theta = \frac{16\pi}{3}.$$

Cela donne

$$\sigma_{LL} = \sigma_{RR} = \sigma_{LR} = \sigma_{RL} = \frac{4\pi\alpha^2}{3s}$$

Remarquons que, dans e^+e^- annihilation, le facteur propagateur $1/q^2 = 1/(p_1 + p_2)^2 = 1/4E^2$ dans l'élément de matrice est une constante finie, conduisant à une section efficace totale qui est également finie. Ceci est en contraste avec le cas des processus de diffusion élastique tels que $e^-\mu^- \rightarrow e^-\mu^-$, que nous examinerons brièvement, où le facteur propagateur se traduira par une section efficace qui est formellement infinie.

Section efficace non polarisée $e^+e^- \rightarrow \mu^+\mu^-$ Les équations (119) et (120) représentent les sections efficaces différentielles pour la diffusion d'un faisceau d'électrons polarisé (purement gaucher ou purement droitier) à partir d'un faisceau polarisé de positrons, dans un état final où les μ^+ et μ^- les deux ont une polarisation définie. Bien que des faisceaux e^\pm polarisés puissent effectivement être produits (environ 80% de polarisation sont atteints pour le faisceau d'électrons au SLAC par exemple), la situation la plus typique (comme au LEP par exemple) est que les faisceaux e^+ et e^- sont tous deux non polarisés, c'est-à-dire effectivement un mélange égal de particules gauchers et droitiers. Habituellement, aussi, les expériences sont insensibles à (c'est-à-dire qu'elles ne peuvent pas déterminer) la polarisation des μ^+ et μ^- sortants [12].

Par conséquent, la section efficace pertinente pour les expériences est généralement celle où toutes les particules à l'état initial ne sont pas polarisées et toutes les polarisations à l'état final sont comptées sans discrimination. Cette section efficace est calculée en prenant une moyenne sur les états de spin possibles des particules à l'état initial et une somme sur les états de spin possibles des particules à l'état final. Nous devons donc considérer l'élément de matrice moyenné en spin au carré $\langle |M_{if}|^2 \rangle$ donné par

$$\langle |M_{if}|^2 \rangle = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} (|M_{RR}|^2 + |M_{LR}|^2 + |M_{RL}|^2 + |M_{LL}|^2)$$

où le premier facteur de $\frac{1}{2}$ est moyen sur les spins e^+ et le second sur les spins e^- .

À partir des équations (117) et (118), on obtient

$$\begin{aligned} \langle |M_{if}|^2 \rangle &= \frac{1}{4} (4\pi\alpha)^2 [2(1 + \cos\theta)^2 + 2(1 - \cos\theta)^2] \\ &= (4\pi\alpha)^2 (1 + \cos\theta)^2. \end{aligned}$$

La section efficace différentielle est alors donnée en remplaçant dans l'équation (96) :

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{1}{64\pi^2 s} (4\pi\alpha)^2 (1 + \cos\theta)^2.$$

Par conséquent, pour une annihilation $e^+e^- \rightarrow \mu^+\mu^-$ non polarisée à haute énergie dans le cadre du centre de masse, nous obtenons

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{\alpha^2}{4s} (1 + \cos^2\theta) \quad (121)$$

où θ est la direction du μ^- sortant par rapport à la direction e^- entrante.

La section efficace totale non polarisée $e^+e^- \rightarrow \mu^+\mu^-$ QED est obtenue en intégrant sur θ et ϕ en utilisant

$$\int (1 + \cos^2 \theta) d\Omega = 2\pi \int (1 + \cos^2 \theta) d\cos \theta = \frac{4}{3}\pi :$$

$$\sigma(e^+e^- \rightarrow \mu^+\mu^-) = \frac{4\pi\alpha^2}{3s} \quad (122)$$

qui est aussi juste $\sigma = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot (\sigma_{LL} + \sigma_{LR} + \sigma_{RL} + \sigma_{RR})$.

Dans le QED d'ordre supérieur, les quatre combinaisons d'hélicité RR, RL, LR, LL se combinent avec une force égale, ce qui donne la distribution angulaire symétrique $(1 + \cos^2 \theta)$ de l'équation (121). Pour les interactions faibles, où le photon virtuel est remplacé par un Z^0 virtuel, nous constaterons que les sections efficaces gauche et droite ont des amplitudes différentes en raison de la violation de la parité, ce qui entraîne une distribution angulaire asymétrique.

4 Chapitre III: Théorie quantique des champs à extra-dimensions

4.1 Introduction:

Les premières idées concernant la physique des dimensions supplémentaires datent des travaux de Kaluza et Klein (KK) aux alentours de 1920 dans lesquels on retrouve une tentative d'unifier l'électromagnétisme de Maxwell et la gravitation d'Einstein. Ceux-ci proposèrent une théorie avec une cinquième dimension compacte (repliée sur elle-même et non pas infinie comme les 4 autres). Le photon était alors généré par la 5ème composante de la métrique de l'espace-temps. Ainsi, l'électromagnétisme pouvait se décrire géométriquement comme la gravitation. Depuis, il y a eu diverses tentatives d'unification de la gravitation et des interactions forte et électrofaible dans une théorie quantique consistante. Parmi ces théories, il y a notamment les théories des (super)cordes. Celles-ci décrivent les particules observées comme des modes d'excitation de cordes très petites mais de taille finie, vivant dans un espace-temps à 10 ou 11 dimensions. De plus ces théories ont la particularité d'inclure la supersymétrie comme ingrédient nécessaire pour des raisons de stabilité [3]. Pendant un temps, il était conventionnel de supposer que les dimensions supplémentaires étaient très petites, de l'ordre de la longueur de Planck, $l_{pl} \sim 10^{-33}\text{cm} \sim 10^{-19}\text{ GeV}^{-1}$.

Depuis un peu moins de 10 ans, il a été réalisé que des dimensions supplémentaires beaucoup plus grandes pouvaient être permises sans qu'il y ait de conflits avec l'expérience. Ainsi, une dimension supplémentaire très grande de taille $R \sim 1\text{ TeV}^{-1}$ pourrait tout à fait être découverte aux collisionneurs tels que le LHC. Dès lors, il y a eu une activité considérable dans l'étude de modèles qui incorporent des nouvelles dimensions spatiales. De plus, ces modèles apportent de nouvelles perspectives d'étude des énigmes actuelles de la physique des particules telles que : le problème de la hiérarchie de jauge, la physique de la saveur et du neutrino, la matière noire etc.

L'attrait pour les théories extra-dimensionnelles vient de la richesse dans la construction de modèles qui permettent de générer des phénoménologies très différentes les unes des autres.

4.2 Décomposition de Kaluza-Klein:

4.2.1 Compactification:

La question la plus évidente à laquelle toute théorie incluant des dimensions spatiales supplémentaires doit pouvoir répondre est pourquoi les dimensions supplémentaires n'ont pas été observées. De toute évidence, toute dimension supplémentaire doit différer des trois dimensions spatiales ordinaires d'une manière ou d'une autre. La solution la plus courante à ce problème a été fournie par Oskar Klein en 1926 [1]. Il a suggéré que la raison pour laquelle les dimensions supplémentaires n'ont pas été observées est qu'elles sont petites. Plus précisément, les dimensions supplémentaires sont compactes, ayant par exemple la géométrie d'un cercle de petit rayon. Afin de sonder des dimensions aussi compactes, des particules avec de petites longueurs d'onde seraient nécessaires, et par la mécanique quantique, la longueur d'onde d'une particule est inversement proportionnelle à son énergie. Ainsi, dans les mesures effectuées à une échelle d'énergie inférieure à celle correspondant à la taille des dimensions supplémentaires, ces dimensions seraient effectivement masquées.

L'espace qui est couvert par les dimensions supplémentaires compactes est généralement appelé l'espace interne, et l'espace-temps complet de dimension supérieure est appelé le volume.

4.2.2 Tour Kaluza-Klein:

Ces déclarations peuvent être traitées de manière plus précise grâce à la technique importante connue sous le nom de décomposition de Kaluza-Klein (kk) d'un champ de dimension supérieure [13]. Cette idée fournit une reformulation mathématique d'une théorie des champs de dimension supérieure en théorie à quatre dimensions, où l'existence des dimensions supplémentaires est codée dans la structure des particules et leurs interactions. La procédure est plus facilement démontrée dans le cadre simple d'un champ scalaire

complexe dans une seule dimension supplémentaire qui est compactifiée sur un cercle de rayon R . L'action pour ce modèle est donnée par

$$S = \int d^5x (d_M \phi^* d^M \phi - M^2 \phi^* \phi) \quad (123)$$

Puisque la cinquième dimension est un cercle, ϕ doit être périodique en coordonnée x^5 selon cette direction, c'est-à-dire $\phi(x^\mu, x^5) = \phi(x^\mu, x^5 + 2\pi R)$. Cela signifie que, sans perte de généralité, le champ peut être étendu en une série de Fourier en x^5 , c'est-à-dire,

$$\phi(x^\mu, x^5) = \frac{1}{\sqrt{2\pi R}} \int \sum_{n=-\infty}^{\infty} \phi^{(n)}(x^\mu) e^{\frac{inx^5}{R}} \quad (124)$$

En utilisant cette dépendance x^5 explicite, nous pouvons intégrer la cinquième dimension dans l'équation (123). On obtient alors l'action

$$S = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int d^4x \left[\partial_\mu \phi^{(n)} \partial^\mu \phi^{(n)} - \left(m^2 + \frac{n^2}{R^2} \right) \phi^{(n)*} \phi^{(n)} \right] \quad (125)$$

qui décrit une théorie de champ à quatre dimensions avec un nombre infini de champs scalaires $\phi^{(n)}$, connus sous le nom de modes KK du champ ϕ . Ces champs sont étiquetés par l'entier n , et la masse du champ $\phi^{(n)}$ est $m_n = \sqrt{m^2 + n^2/R^2}$. L'ensemble de ces champs est connu sous le nom de tour KK correspondant au champ scalaire de dimension supérieure. Dans la tour KK, la seule différence entre les modes est leur masse. Le mode $n = 0$, appelé mode zéro, est le mode le plus léger de la tour, et il correspond à un champ qui n'a pas d'impulsion le long de la dimension supplémentaire.

La physique derrière cette soi-disant réduction dimensionnelle peut être comprise de manière simple en considérant la relation énergie-impulsion relativiste,

$$E^2 = p^2 + m^2 = (p_1^2 + p_2^2 + p_3^2) + p_5^2 + m^2. \quad (126)$$

Ici, la quantité de mouvement au carré a été divisée en deux termes : la partie tridimensionnelle ordinaire $p_1^2 + p_2^2 + p_3^2$ et la contribution supplémentaire p_5^2 de la cinquième dimension. Ici, la quantité de mouvement au carré a été divisée en deux termes. D'un point de vue à cinq dimensions, ces deux parties de la quantité de mouvement sont sur un pied d'égalité, au moins localement. Cependant, d'un point de vue quadridimensionnel, où la possibilité de mouvement le long de la cinquième dimension est inconnue, les mesures de l'énergie et de la quantité de mouvement d'une particule nous conduiraient à interpréter la partie à cinq dimensions de la quantité de mouvement comme faisant partie du carré Masse. Cela signifie qu'une particule de masse m dans un espace-temps à cinq dimensions est considérée comme ayant une masse à quatre dimensions égale à $\sqrt{m^2 + p_5^2}$. Puisque l'espace interne est compact, la quantité de mouvement le long de la dimension supplémentaire est quantifiée, c'est-à-dire qu'elle n'est autorisée à prendre qu'un ensemble discret de valeurs spécifiques. Dans le cas que nous considérons, la quantité de mouvement peut prendre les valeurs $p_5^{(n)} = n/R$, pour $n \in \mathbb{Z}$. Ainsi, la masse quadridimensionnelle effective est également quantifiée, comme $m_n = \sqrt{m^2 + n^2/R^2}$. Les états propres de quantité de mouvement sont interprétés comme une tour KK infinie de particules distinctes, comme illustré à la Fig 3.1.

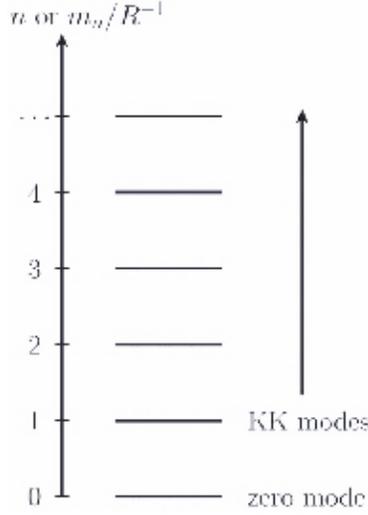


Figure 3.1: Illustration de la tour KK, pour le cas $m = 0$

Au début de cette section, il a été indiqué que l’existence de petites dimensions supplémentaires serait cachée aux basses énergies. L’exemple donné ci-dessus montre les caractéristiques générales du fonctionnement pratique de ce mécanisme, du point de vue de la physique des particules. La quantification de la quantité de mouvement le long de la dimension supplémentaire implique que, pour qu’une particule se déplace le long de cette dimension, sa quantité de mouvement doit être supérieure à R^{-1} . De manière équivalente, du point de vue quadridimensionnel, R^{-1} est l’énergie de seuil pour la production de modes KK excités. En dessous de cette échelle d’énergie, seuls les modes nuls des champs sont observés. Aux énergies de l’ordre de R^{-1} , les effets de la dimension supplémentaire commencent à devenir importants, et à mesure que l’énergie augmente, la structure de dimension supérieure émerge successivement à travers les modes KK de niveau supérieur.

Correspondance des paramètres: En utilisant la décomposition KK, nous pouvons relier les paramètres d’une théorie des champs de dimension supérieure aux paramètres effectifs de la théorie des basses énergies. A titre d’exemple, nous ajoutons un terme d’auto-interaction à l’action(123),

$$S_{int} = - \int d^5x \lambda_5 |\phi|^4 \quad (127)$$

Dans la limite de basse énergie, $E \ll R^{-1}$, on peut insérer le développement KK donné dans l’Eq.(124) dans l’éq.(127), ne garder que le mode zéro, et intégrer sur x^5 . On obtient alors l’action effective

$$S_{int}^{(0)} = -2\pi R \int d^5x \lambda_5 \frac{1}{(2\pi R)^2} |\phi^{(0)}|^4 = - \int d^4x \frac{\lambda_5}{2\pi R} |\phi^{(0)}|^4. \quad (128)$$

En comparant cette expression à l’action correspondante pour une théorie à quatre dimensions,

$$S_{int} = - \int d^4x \lambda_4 |\phi|^4, \quad (129)$$

et en identifiant le champ à quatre dimensions ϕ avec le mode nul $\phi^{(0)}$, on obtient la relation

$$\lambda_5 = 2\pi R \lambda_4 \quad (130)$$

entre les paramètres. Par conséquent, étant donné le rayon de la dimension supplémentaire, la valeur de la constante de couplage à cinq dimensions peut être déduite de la constante à quatre dimensions

effective. Puisque λ_4 est une quantité sans dimension, cette relation implique que la constante de couplage à cinq dimensions a une dimension de masse égale à -1 . En général, les théories des champs quantiques en interaction où les constantes de couplage ont des dimensions de masse négatives ne sont pas renormalisables [14]. Nous allons maintenant montrer qu'il s'agit d'une caractéristique générale des théories quantiques des champs de dimension supérieure.

4.2.3 Non-renormalisabilité:

Une propriété importante et générale des théories quantiques des champs dans plus de quatre dimensions de l'espace-temps est qu'elles ne sont pas renormalisables [13]. Une façon simple d'observer cela est d'écrire l'action pour une théorie des champs en interaction dans les dimensions de l'espace-temps D ,

$$S = \int d^5x l \tag{131}$$

et analyser les dimensions de masse des constantes de couplage. Nous désignons la dimension de masse d'une quantité par des crochets, $[\dots]$. Dans les unités naturelles, l'action est sans dimension, et par conséquent, la densité lagrangienne doit avoir la dimension de masse D afin d'équilibrer la mesure d'intégration, qui a la dimension de masse $-D$.

$$[\phi] = [A] = \frac{D - 2}{2} \tag{132}$$

$$[\psi] = 4 - D \tag{133}$$

Les interactions dans le SM sont des interactions de bosons de jauge, des interactions de Yukawa et des auto-interactions scalaires. Les constantes de couplage apparaissant dans ces interactions ont les dimensions de masse. Bien que ces constantes de couplage soient toutes sans dimension pour $D = 4$, elles ont une dimension de masse négative pour $D > 4$. Cela signifie que toutes les interactions SM ne sont pas renormalisables pour $D > 4$. Notez que cette propriété des théories quantiques des champs de dimension supérieure dépend uniquement sur le nombre de dimensions de l'espace-temps, et non sur la géométrie de ces dimensions. Dans l'image de dimension supérieure, la non-renormalisabilité de la théorie est manifeste à partir des dimensions de masse négatives des constantes de couplage. Cependant, dans l'image à quatre dimensions, les constantes de couplage sont sans dimension, et il semblerait que la théorie soit en fait renormalisable. Cependant, les tours KK sont infinies et il n'y a pas de borne supérieure sur les masses des modes KK. C'est ainsi que la non-renormalisabilité se manifeste dans l'image à quatre dimensions, et par conséquent, dans toute complétion UV renormalisable, la tour KK doit être tronquée d'une manière ou d'une autre au-dessus d'une certaine échelle d'énergie.

4.2.4 Finitions ultraviolettes:

Étant donné que la non-renormalisabilité des théories quantiques des champs de dimension supérieure ne dépend que de la dimensionnalité de l'espace-temps, il est difficile de construire des complétions UV bien définies de tels modèles. De loin, l'alternative la plus courante est la théorie des cordes, qui n'est pas une QFT, mais une théorie des objets étendus. Dans la théorie des cordes, la soi-disant tension des cordes fournit une coupure naturelle proche de l'échelle de Planck, et par conséquent, la théorie est bien définie pour les hautes énergies. Une alternative à la théorie des cordes dans ce contexte est fournie par les modèles dits de déconstruction dimensionnelle [15][16]. Dans ces modèles, l'espace-temps est fondamentalement quadridimensionnel, mais apparaît de dimension supérieure dans une certaine plage d'énergie. Cet effet est dû à une structure particulière du groupe de jauge, qui est un produit direct d'un certain nombre de copies du même groupe.

4.2.5 Modèles de plus grande dimension à l'échelle du TeV:

Inspirés par la théorie des cordes, plusieurs modèles de dimensions supplémentaires, qui pourraient potentiellement résoudre certains des problèmes avec le SM, ont été proposés. Une caractéristique commune à nombre de ces modèles est que leurs effets deviennent pertinents à des échelles d'énergie proches de 1 TeV, ce qui signifie qu'ils pourraient potentiellement être testés au LHC. Les modèles les plus importants incluent le modèle UED [17], qui a reçu beaucoup d'attention dans le domaine du DM, et le modèle ADD [18] [19] ainsi que le modèle Randall-Sundrum (RS) [20][21], qui visent tous deux à résoudre le problème de hiérarchie du SM. nous décrivons le modèle UED.

4.2.6 Caractéristiques générales des théories KK:

Comme mentionné, Klein a proposé que la dimension supplémentaire compacte ait la topologie d'un cercle, S^1 , de rayon R . illustre cette compactification pour un espace-temps 4+1. Si $y = x^5$, cette compactification correspond à imposer la condition,

$$y = y + 2\pi R \quad (134)$$

Considérons un champ scalaire $\phi = (x^\mu, y)$, où $\mu = 0, 1, 2, 3$ désignent les quatre dimensions régulières, de masse m pouvant se propager en 5 dimensions. Il est décrit par l'équation de Klein-Gordon en 5D [22].

$$(\square^5 - \partial_y^2 + m^2) \phi(x^\mu, y) = 0 \quad (135)$$

$$(\partial_t^2 - \partial_i^2 - \partial_y^2 + m^2) \phi(x^\mu, y) = 0 \quad (136)$$

où $i = 1, 2, 3$ désigne les trois dimensions spatiales ordinaires et $\square^{(n)} = \partial_t^2 - \partial_M^2, M = 1, 2, \dots, n$.

En raison de la compactification sur un cercle, qui donne la condition dans l'Eq.(135), la dépendance à y peut être extraite de la manière suivante :

En insérant ceci dans l'équation de Klein-Gordon 4D, on trouve :

$$(\square^5 - \partial_y^2 + m^2) \phi(x^\mu, y) = (\square^{(4)} - \partial_y^2 + m^2) \frac{1}{\sqrt{2\pi R}} \sum_n e^{i\frac{n}{R}y} \phi^{(n)}(x^\mu) \quad (137)$$

$$= \left(\square^{(4)} + \frac{n^2}{R^2} + m^2 \right) \frac{1}{\sqrt{2\pi R}} \sum_n e^{i\frac{n}{R}y} \phi^{(n)}(x^\mu) \quad (138)$$

$$= 0$$

Ainsi, les composantes de Fourier $\phi^{(n)}(x^\mu)$ satisfont l'équation de Klein-Gordon en 4D :

$$(\square^{(4)} + m_n^2) \phi^{(n)}(x^\mu) = 0, \quad (139)$$

avec la nouvelle masse,

$$M^{(n)} = \sqrt{\frac{n^2}{R^2} + m^2}. \quad (140)$$

La même procédure est valable pour les fermions, avec les champs décrits par l'équation de Dirac,

$$\bar{\psi} (i\partial - i\gamma^5 \partial_y + m) \psi = 0 \quad (141)$$

Puisque l'équation de Dirac est linéaire, les masses de fermions dépendent linéairement de la quantité de mouvement extradimensionnelle :

$$M_\psi^{(n)} = \frac{n}{R} + m. \quad (142)$$

L'impulsion dans la cinquième dimension est interprétée comme un terme de masse supplémentaire, puisque l'énergie supplémentaire mesurée dans quatre dimensions ne peut être prise en compte que comme un trait intrinsèque de la particule. Ainsi, par expansion de Fourier, les théories de Kaluza-Klein acquièrent un

nombre infini de nouvelles particules, appelées "tour d'états de Kaluza-Klein", chacune avec une masse différente, mais avec les mêmes nombres quantiques que la particule de mode zéro. Dans une théorie multi-particules, chaque nombre n de Kaluza-Klein (KK) donnera un nouvel ensemble de particules dont les masses sont données par les eqs. (140) et (142). Cela ne s'applique qu'aux particules autorisées à se propager dans la dimension supplémentaire. L'expansion de Fourier de la quantité de mouvement donne également lieu à une nouvelle quantité conservée, le nombre KK n , à partir de la conservation de la quantité de mouvement dans la cinquième dimension. Cette symétrie est particulièrement importante dans les théories extradimensionnelles universelles, puisqu'un sous-groupe de cette symétrie, la parité KK, fournit un candidat de matière noire.

4.3 Dimensions supplémentaires universelles:

Les DEU ont été proposés pour la première fois par Appelquist, Cheng et Dobrescu en 2000 [17]. Dans ces modèles, tous les champs du SM sont promus en champs de dimension supérieure. Il existe un certain nombre de versions de modèles UED, différant par le nombre de dimensions supplémentaires et la géométrie de l'espace interne. La teneur en particules est généralement choisie de la manière minimale qui reproduit le SM dans la limite de basse énergie. Cependant, pour des raisons qui seront précisées dans ce chapitre, il existe nécessairement des degrés de liberté supplémentaires aux niveaux KK non nuls, par rapport à ceux SM. Les motivations des modèles UED incluent l'existence d'une particule candidate DM [23][24], la nécessité de trois générations de fermions afin d'annuler les anomalies de jauge [25] et la stabilité du proton [26].

Nous commençons ce chapitre par une discussion sur les propriétés des fermions et des bosons de jauge dans les modèles de dimension supérieure. Afin de reproduire la phénoménologie du SM aux basses énergies, les modèles doivent être compactifiés sur des orbifolds. Nous discutons des conséquences de l'orbifolding, y compris le concept important de conservation de la parité KK. Ensuite, nous discutons des modèles UED réalistes. Enfin, nous résumons les contraintes expérimentales sur de tels modèles.

4.3.1 Fermions et orbifolding:

Promouvoir des fermions vers des champs de dimension supérieure n'est pas aussi simple que de le faire avec des scalaires, car les propriétés des fermions dépendent considérablement de la dimensionnalité de l'espace-temps. Dans le SM, les interactions de jauge $SU(2)_L$ des fermions sont chirales, c'est-à-dire que leurs parties gauche et droite ont des propriétés de transformation de groupe de jauge différentes. Cette structure est rendue possible par le fait que la représentation de Dirac est réductible en quatre dimensions. Un fermion de Dirac peut être décomposé en deux représentations irréductibles de chiralité définie, appelées fermions de Weyl. Cette décomposition n'est pas possible pour une dimensionnalité spatio-temporelle arbitraire. En particulier, la représentation de Dirac est irréductible en un nombre impair de dimensions, et dans ce cas, il n'y a pas de notion de représentations chirales. Cela signifie qu'au niveau du lagrangien à cinq dimensions, les fermions ont des interactions non chirales, et il en va de même pour les modes nuls, qui représentent les champs SM. C'est ce qu'on appelle le problème de la chiralité. Dans un nombre impair de dimensions $D = 2k + 1$, les spineurs sont des objets à 2^k composants [27], et donc, pour $D = 5$, les spineurs ont quatre composants, comme en quatre dimensions. La clé pour résoudre le problème de la chiralité est de supprimer l'une des composantes chirales du mode zéro de chaque fermion. De cette manière, les modes zéro se comportent comme des fermions chiraux, et la théorie est effectivement chirale pour les énergies inférieures à R^{-1} . En général, le mode zéro d'un champ peut être supprimé en remplaçant le cercle S^1 par l'orbifold S^1/\mathbb{Z}_2 , qui est obtenu à partir de S^1 en identifiant les points opposés x^5 et $-x^5$, comme illustré sur la Fig 3.2. Pour que l'action soit invariante sous la transformation de parité $x^5 \rightarrow -x^5$, les champs à cinq dimensions doivent être pairs ou impairs sous cette transformation. En écrivant le développement KK donné dans l'équation.(124) en termes de fonctions trigonométriques, le développement d'un champ

pair est donné par

$$\phi_{even}(x^\mu, x^5) = \frac{1}{\sqrt{\pi R}} \left[\phi^0(x^\mu) + \sqrt{2} \sum_{n=1}^{\infty} \phi^n(x^\mu) \cos\left(\frac{nx^5}{R}\right) \right] \quad (143)$$

tandis que celle d'un champ impair est donnée par

$$\phi_{odd}(x^\mu, x^5) = \sqrt{\frac{2}{\pi R}} \sum_{n=1}^{\infty} \phi^n(x^\mu) \sin\left(\frac{nx^5}{R}\right). \quad (144)$$

La propriété importante est que, alors qu'une série d'expansion paire comprend un mode zéro, une série impaire n'en a pas.

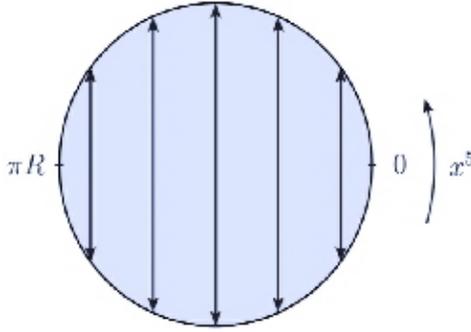


Figure 3.2. Illustration de la construction de l'orbifold S^1/\mathbb{Z}_2 à partir d'un cercle de rayon R . Les points x^5 et $-x^5$ sont repérés, donnant un intervalle de longueur πR . Alternativement, l'orbifold peut être vu comme un intervalle de longueur πR . De ce point de vue, les différents développements de KK dépendent des conditions aux limites d'un champ sur cet intervalle.

Les fermions se transforment sous $x^5 \rightarrow -x^5$

$$\Psi(x^\mu, x^5) \rightarrow \Psi'(x^\mu, x^5) = \gamma_5 \Psi(x^\mu, -x^5), \quad (145)$$

ou, en termes de composants chiraux potentiels,

$$\begin{pmatrix} \psi_L(x^\mu, x^5) \\ \psi_R(x^\mu, x^5) \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} -\psi_L(x^\mu, -x^5) \\ \psi_R(x^\mu, -x^5) \end{pmatrix} \quad (146)$$

Ainsi,

$$\Psi \text{ pair} \iff \psi_L \text{ impaire et } \psi_R \text{ pair}$$

$$\Psi \text{ impair} \iff \psi_L \text{ pair et } \psi_R \text{ impair}$$

C'est-à-dire que ψ_L et ψ_R ont nécessairement des propriétés de transformation opposées, de sorte que les fermions sur S^1/\mathbb{Z}_2 sont toujours effectivement chiraux au niveau des modes zéro. Maintenant, le problème de chiralité peut être résolu en introduisant deux fermions de Dirac à cinq dimensions pour chaque fermion de Dirac Ψ dans le SM. L'un d'eux, Ψ_D (D pour doublet), a les nombres quantiques de ψ_L , tandis que l'autre, Ψ_S (S pour singulet), a les nombres quantiques de ψ_R . Afin de reproduire correctement le SM dans la limite de basse énergie, Ψ_D doit être impair et Ψ_S pair, c'est-à-dire,

$$\Psi_D(x^\mu, x^5) = \frac{1}{\sqrt{\pi R}} \left[\begin{aligned} &P_L \Psi_D^{(0)}(x^\mu) + \sqrt{2} \sum_{n=1}^{\infty} P_L \Psi_D^{(n)}(x^\mu) \cos\left(\frac{nx^5}{R}\right) \\ &+ \sqrt{2} \sum_{n=1}^{\infty} P_R \Psi_D^{(n)}(x^\mu) \sin\left(\frac{nx^5}{R}\right) \end{aligned} \right] \quad (147)$$

$$\Psi_S(x^\mu, x^5) = \frac{1}{\sqrt{\pi R}} \left[\begin{array}{c} P_R \Psi_S^{(0)}(x^\mu) + \sqrt{2} \sum_{n=1}^{\infty} P_R \Psi_S^{(n)}(x^\mu) \cos\left(\frac{nx^5}{R}\right) \\ + \sqrt{2} \sum_{n=1}^{\infty} P_L \Psi_S^{(n)}(x^\mu) \sin\left(\frac{nx^5}{R}\right) \end{array} \right] \quad (148)$$

Ici, $P_{R/L} = (1 \pm \gamma_5)/2$ sont les opérateurs de projection à quatre dimensions, et nous identifions les fermions SM chiraux comme $\psi_L = P_L \Psi_D^{(0)}$ et $\psi_R = P_R \Psi_S^{(0)}$.

A chaque niveau KK non nul, les deux spineurs de Dirac Ψ_D et Ψ_S reçoivent des contributions à leurs masses de la quantité de mouvement le long des dimensions supplémentaires, ainsi que du mécanisme de Higgs. Les contributions des dimensions supplémentaires proviennent des termes cinétiques du lagrangien à cinq dimensions et, par conséquent, elles sont diagonales. Par contre, les contributions du mécanisme de Higgs impliquent nécessairement un mélange des deux fermions de Dirac. La matrice de masse des fermions au n niveau KK, en $\{\Psi_S^{(n)}, \Psi_D^{(n)}\}$ base, est donnée par

$$M_\Psi^{(n)} = \begin{pmatrix} -n/R & m_\Psi \\ m_\Psi & n/R \end{pmatrix} \quad (149)$$

où $m_\Psi = Y_\Psi v / \sqrt{2}$. Les valeurs propres de cette matrice sont

$$M_\Psi^{(n)} = \pm \sqrt{\frac{n^2}{R^2} + m_\Psi^2}. \quad (150)$$

Étant donné que la matrice de masse en base de saveur n'est pas diagonale, les fermions de Dirac Ψ_D et Ψ_S se mélangent généralement les uns aux autres. L'angle de mélange $\alpha(n)$ au nième niveau KK est donné par

$$\tan 2\alpha^{(n)} = \frac{m_\Psi}{n/R} \quad (151)$$

c'est-à-dire qu'il est supprimé à tous les niveaux KK si $R^{-1} \gg m_\Psi$.

Pour un nombre pair de dimensions, $D = 2k$, les spineurs sont des objets à 2^k composants [27]. Par conséquent, les spineurs en six dimensions ont huit composants. Une réduction en états de chiralité définie est possible, mais cette chiralité de dimension supérieure n'est pas la même que celle en quatre dimensions. Les représentations chirales, appelées états de chiralité $+/-$, portent la moitié des degrés de liberté des représentations de Dirac, c'est-à-dire qu'elles sont des objets à quatre composants. Ces représentations de fermions sont irréductibles, et clairement, les fermions chiraux ne peuvent pas représenter les fermions SM dans la limite de basse énergie. Cependant, comme ils ont quatre composantes, la situation est similaire au cas à cinq dimensions, et une solution analogue au problème est possible, à condition seulement que l'espace interne soit choisi de telle manière que les modes nuls des champs puissent être projetés dehors. Ainsi, pour chaque fermion de Dirac dans le SM, le modèle doit inclure deux fermions à six dimensions avec une chiralité définie à six dimensions et avec des nombres quantiques correspondant aux parties gauche et droite du fermion SM. Les chiralités de fermions à six dimensions sont contraintes par l'exigence d'annulation des anomalies, et la structure est donnée par $Q_+ = (u_+, d_+)$, $u_-, d_-, L_+ = (v_+, e_+)$, e_- et v_- [25][28]. Il est intéressant de noter que, contrairement au SM, les annulations d'anomalies exigent l'existence d'un fermion stérile v_- .

En six dimensions, le nombre d'espaces internes possibles est augmenté. L'un des cas les plus étudiés est le carré dit chiral, T^2/\mathbb{Z}_4 [29][30]. Cet orbifold peut être construit à partir d'un carré de côté L en identifiant les côtés $(y, 0)$ et $(0, y)$ ainsi que (y, L) et (L, y) , pour $0 \leq y \leq L$, c'est-à-dire, en pliant le carré le long de la diagonale, comme illustré à la Fig. 3.3. Contrairement aux deux choix possibles pour les conditions aux limites d'un champ sur l'orbifold S^1/\mathbb{Z}_4 , le carré chiral admet quatre choix cohérents différents. Avec $n = 1, 2, 3, 4$ désignant le choix des conditions aux limites, l'expansion d'un champ sur cet orbifold est donnée par [29]

$$A_n(x^u, x^5, x^6) = \frac{1}{L} \left[\delta_{n,0} A^{(0,0)} + \sum_{j \geq 1} \sum_{k \geq 0} f_n^{(j,k)}(x^5, x^6) A^{(j,k)}(x^u) \right] \quad (152)$$

ou

$$f_n^{(j,k)}(x^5, x^6) = e^{-in\pi/2} \cos\left(\frac{jx^5 + kx^6}{R} + \frac{n\pi}{2}\right) + \cos\left(\frac{kx^5 - jx^6}{R} + \frac{n\pi}{2}\right) \quad (153)$$

et nous avons défini $R = L/\pi$. La masse au carré pour un mode KK d'indices (j, k) est $m_{j,k}^2 = (j^2 + k^2)$. Notez que seuls les champs $n = 0$ ont des modes nuls et qu'il n'y a pas de mode $(0, 1)$. Cela signifie que, pour chaque champ, il existe un seul mode KK le plus léger, d'indices $(1, 0)$ et de masse $m_{1,0} = R^{-1}$. Nous appelons ce mode le premier mode KK.

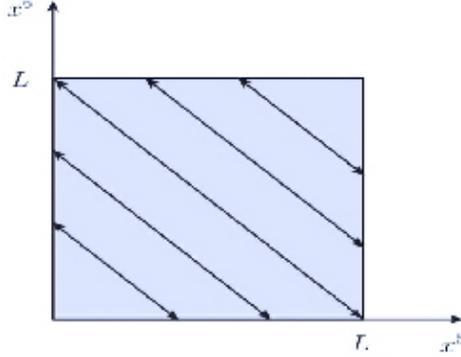


Figure 3.3 . Illustration de la construction de l'orbifold T^2/\mathbb{Z}_2 à partir d'un carré de côté L . Les côtés $(y, 0)$ et $(0, y)$ ainsi que (y, L) et (L, y) , pour $0 \leq y \leq L$, sont identifiés.

4.3.2 Bosons de jauge:

Ensuite, nous nous tournons vers les propriétés des bosons de jauge dans les théories quantiques des champs de dimension supérieure. Étant donné que le nombre de composants de tout champ vectoriel est égal à la dimensionnalité de l'espace-temps, ces bosons de jauge auront des composants supplémentaires, par rapport au cas quadridimensionnel. Le choix correct des propriétés de transformation orbifold de chacun des composants est une question importante, qui affecte la phénoménologie des modèles [13]. Afin de simplifier le traitement, nous ne considérons dans ce qui suit que les bosons de jauge abéliens. Les calculs peuvent être directement étendus au cas des non-abéliens. Les mêmes conclusions sont valables pour ce cas, avec l'ajout d'auto-interactions entre les différents composants du champ de jauge. En cinq dimensions, le terme cinétique d'un boson de jauge abélien est donné par

$$\begin{aligned} L_{YM}^{5D} &= -\frac{1}{4} F_{MN} F^{MN} \\ &= -\frac{1}{4} (F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} + 2F_{\mu 5} F^{\mu 5}) \\ &= -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} - \frac{1}{2} \partial_\mu A_5 \partial^\mu A^5 - \frac{1}{2} \partial_5 A_\mu \partial^5 A^\mu + \partial_\mu A^5 \partial_5 A^\mu \\ &= -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} + \frac{1}{2} \partial_\mu a \partial^\mu a + \frac{1}{2} \partial_5 A_\mu \partial_5 A^\mu - \partial_\mu a \partial_5 A^\mu, \end{aligned} \quad (154)$$

où nous avons défini $a \equiv A_5 = -A^5$. Puisque les dérivées partielles se transforment sous la transformation orbifold \mathbb{Z}_4 $x^5 \rightarrow -x^5$ comme

$$\partial_\mu \rightarrow \partial_\mu \quad (155)$$

$$\partial_5 \rightarrow -\partial_5, \quad (156)$$

les trois premiers termes de l'Eq. (154) sont invariants sous cette transformation, quelles que soient les propriétés de transformation des composants de A_M . Le dernier terme, en revanche, n'est invariant

que si la cinquième composante A_5 a des propriétés de transformation opposées à celles de la partie quadridimensionnelle A_μ . Exiger que la partie à quatre dimensions ait un mode zéro donne

$$A_\mu(x^\mu, x^5) = \frac{1}{\sqrt{\pi R}} \left[A_\mu^{(0)} + \sqrt{2} \sum_{n=1}^{\infty} A_\mu^{(n)} \cos\left(\frac{nx^5}{R}\right) \right] \quad (157)$$

$$a(x^\mu, x^5) = \sqrt{\frac{2}{\pi R}} \sum_{n=1}^{\infty} a^{(n)} \sin\left(\frac{nx^5}{R}\right). \quad (158)$$

En utilisant ces développements KK, il est facile de montrer que le Lagrangien à quatre dimensions correspondant à l'Eq (154) est donné par

$$L_{YM} = \sum_{n=0}^{\infty} -\frac{1}{4} F_{\mu\nu}^{(n)} F^{\mu\nu(n)} + \frac{1}{2} \left(\frac{n}{R}\right)^2 A_\mu^{(n)} A^{\mu(n)} + \frac{1}{2} \partial_\mu a^{(n)} \partial^\mu a^{(n)} + \frac{n}{R} A^{\mu(n)} \partial_\mu a^{(n)} \quad (159)$$

Cette forme du lagrangien fait bien comprendre que, du point de vue quadridimensionnel, les modes KK $a^{(n)}$ de la cinquième composante a du champ de jauge apparaissent comme des scalaires. Le dernier terme dans l'éq(159), qui est un terme bilinéaire mélangeant $A_\mu^{(n)}$ et $a^{(n)}$, peut être supprimé en ajoutant au lagrangien le terme fixateur de jauge

$$\begin{aligned} L_{gf} &= \int_0^{\pi R} dx^5 \left[-\frac{1}{2\xi} \left(\partial_\mu A^\mu - \xi \frac{n}{R} a \right)^2 \right] \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \left[-\frac{1}{2\xi} (\partial_\mu A^\mu)^2 + \frac{n}{R} a^{(n)} \partial_\mu A^{\mu(n)} - \frac{1}{2} \left(\sqrt{\xi} \frac{n}{R} \right)^2 (a^{(n)})^2 \right] \end{aligned} \quad (160)$$

Notez que ce terme n'est pas invariant de Lorentz à cinq dimensions, puisqu'il contient le scalaire de Lorentz à quatre dimensions $\partial_\mu A^\mu$, plutôt que $\partial_M A^M$. Cependant, l'invariance de Lorentz à cinq dimensions est déjà explicitement brisée par la procédure d'orbifolding. Ajout d'éq (159) à l'éq (160), on obtient finalement

$$L_{YM} + L_{gf} = \sum_{n=0}^{\infty} \left[-\frac{1}{4} F_{\mu\nu}^{(n)} F^{\mu\nu(n)} + \frac{1}{2} m_{A(n)}^2 A_\mu^{(n)} A^{\mu(n)} - \frac{1}{2\xi} (\partial_\mu A^\mu)^2 + \frac{1}{2} \partial_\mu a^{(n)} \partial^\mu a^{(n)} - \frac{1}{2} \left(\sqrt{\xi} m_{A(n)} \right)^2 (a^{(n)})^2 \right] \quad (161)$$

où $m_{A(n)} \equiv n/R$. En comparant ce Lagrangien à l'équation suivante

$$\begin{aligned} L_{YM} + L_{Higgs} + L_{Boson} &= -\frac{1}{2} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} + \frac{1}{2} m_A^2 A_\mu A^\mu - \frac{1}{2\xi} (\partial_\mu A_\mu)^2 + \frac{1}{2} \partial_\mu H \partial^\mu H + \\ &\quad \frac{1}{2} \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi - \frac{1}{2} \left(\sqrt{\xi} m_A \right)^2 \phi^2 + \text{interaction terms} \end{aligned}$$

On observe que les champs de jauge à quatre dimensions $A_\mu^{(n)}$, pour $n \geq 1$, obtiennent des masses en mangeant les champs $a^{(n)}$, qui sont interprétés comme des bosons de Goldstone. Enfin, notez que si a n'était pas restreint à être impair par la procédure d'orbifolding, il y aurait un scalaire sans masse $a^{(0)}$ dans le spectre des particules. Un tel scalaire sans masse, avec des interactions jauge-force, est exclu par les expériences, et c'est un deuxième problème potentiel du modèle que l'orbifolding résout.

Dans le cas à six dimensions, la situation concernant les bosons de jauge est plus compliquée que dans le cas à cinq dimensions. En cinq dimensions, les modes KK de la cinquième composante de chaque boson de jauge sont consommés, afin de donner des masses aux modes KK correspondants de la partie quadridimensionnelle du boson de jauge. En six dimensions, il y a deux composants supplémentaires pour chaque boson de jauge, et une combinaison linéaire de ceux-ci est mangée, de la même manière qu'en cinq dimensions, tandis que la combinaison orthogonale apparaît comme un scalaire physique dans le spectre. Cette particule est connue sous le nom de scalaire adjoint. Les composants supplémentaires d'un champ de jauge doivent être affectés de conditions aux limites de manière à ce que le scalaire adjoint n'ait pas de mode nul, ce qui signifie qu'il n'apparaît qu'à partir du premier niveau KK excité.

4.3.3 Termes localisés aux frontières et parité Kaluza-Klein:

Tout en résolvant le problème de chiralité et en supprimant les modes zéro des composants supplémentaires des bosons de jauge, la procédure d'orbifolding complique également le modèle. L'orbifold S^1/\mathbb{Z}_2 a deux points fixes sous la transformation \mathbb{Z}_2 , $y = 0$ et $y = \pi R$, c'est-à-dire les points limites de l'intervalle. À de tels points, les symétries de la théorie permettent des termes localisés dans le lagrangien, appelés termes localisés aux limites (BLT_S). Ces termes pourraient modifier le spectre de masse ainsi que les interactions entre les particules. Les BLT_S sont générés par des corrections radiatives [31], ce qui signifie qu'il est incohérent de ne pas les inclure. Contrairement aux paramètres de masse dans le lagrangien UED, les BLT_S ne sont pas déterminés par les paramètres SM et, par conséquent, ce sont des entrées distinctes de la théorie. Dans le cas le plus général, tous les BLT_S autorisés par l'invariance de jauge SM doivent être inclus, et les coefficients de ces opérateurs ne peuvent être contraints que par des expériences. Dans la littérature, l'ansatz est souvent fait que les BLT_S disparaissent à l'échelle de coupure, Λ , de la théorie de dimension supérieure. Cet ansatz définit le modèle UED minimal (MUED). Bien que les BLT_S soient supposés nuls à l'échelle d'énergie Λ , le fonctionnement des paramètres induit des termes non nuls aux énergies inférieures.

Donc la conservation de la cinquième composante de la quantité de mouvement. Les BLT_S le font explicitement, et en plus, il y a des contributions à la rupture des processus en boucle qui s'enroulent autour de la dimension compacte. Ces dernières sont intrinsèquement supprimées en boucle, et dans le modèle MUED, les BLT_S ne sont générés que par des corrections radiatives, de sorte que ces contributions sont également supprimées en boucle. Au niveau de la théorie à quatre dimensions, cela signifie que le nombre KK n'est pas conservé, mais qu'il n'est rompu qu'au niveau de la boucle. Dans le cas important où les BLT_S aux deux points fixes sont égaux, le lagrangien est invariant sous une translation de πR , qui mappe les points fixes l'un sur l'autre. Cette translation discrète définit une transformation \mathbb{Z}_2 sur l'orbifold S^1/\mathbb{Z}_2 . En conséquence, il devrait y avoir une quantité conservée. En effet, sous la translation $x^5 \rightarrow x^5 + \pi R$, les fonctions d'onde KK se transforment en

$$\cos\left(\frac{nx^5}{R}\right) \rightarrow (-1)^n \cos\left(\frac{nx^5}{R}\right) \quad (162)$$

$$\sin\left(\frac{nx^5}{R}\right) \rightarrow (-1)^n \sin\left(\frac{nx^5}{R}\right). \quad (163)$$

Si le lagrangien doit être invariant sous cette transformation, la condition

$$(-1)^{\sum_i n_i} = 1 \quad (164)$$

doit tenir pour chaque sommet. Par conséquent, la conservation du nombre KK est rompue, mais le nombre total de KK dans chaque sommet doit être pair. En d'autres termes, au niveau quadridimensionnel, il existe un nombre quantique conservé multiplicativement, qui peut être défini comme $(-1)^n$. L'hypothèse selon laquelle les BLT apparaissent symétriquement est cohérente, en ce sens qu'elles évoluent de la même manière avec l'échelle d'énergie. Cela signifie que s'ils sont égaux à une certaine échelle d'énergie, cela est vrai pour toutes les énergies. La parité KK est analogue à la parité R , qui est une symétrie discrète qui apparaît dans les extensions supersymétriques du SM. Dans de tels modèles, les partenaires supersymétriques des particules SM sont chargés sous la parité R , ce qui implique que tous les sommets incluent un nombre pair de ces partenaires supersymétriques. Les conséquences des deux symétries sont similaires.

Dans le modèle UED à six dimensions sur le carré chiral, la situation est similaire. Comme l'orbifold S^1/\mathbb{Z}_2 , le carré chiral a des points fixes, $(x^5, x^6) = (0, 0), (L, L)$ et $(0, L)$. Ces points induisent des BLT et brisent la conservation de KK Numéro. Si les BLT aux points $(0, 0)$ et (L, L) sont identiques, le lagrangien est invariant sous une rotation de π autour du centre du carré, c'est-à-dire,

$$x^5 \rightarrow L - x^5 \quad (165)$$

$$x^6 \rightarrow L - x^6 \quad (166)$$

Sous cette rotation, les fonctions d'onde KK données dans l'équation. (153) transformer comme

$$\begin{aligned}
f_n^{(j,k)}(x^5, x^6) &\rightarrow f_n^{(j,k)}(L - x^5, L - x^6) \\
&= e^{-in\pi/2} \cos\left(-\frac{jx^5 + kx^6}{R} + (j+k)\pi + \frac{n\pi}{2}\right) + \cos\left(-\frac{kx^5 - jx^6}{R} + (k-j)\pi + \frac{n\pi}{2}\right) \\
&= e^{-in\pi/2} \cos\left(\frac{jx^5 + kx^6}{R} + \frac{n\pi}{2} - (k-j+n)\pi\right) + \cos\left(\frac{kx^5 - jx^6}{R} + \frac{n\pi}{2} - (k-j+n)\pi\right) \\
&= (-1)^{j+k+n} e^{-in\pi/2} \cos\left(\frac{jx^5 + kx^6}{R} + \frac{n\pi}{2}\right) + (-1)^{-j+k+n} e^{-in\pi/2} \cos\left(\frac{kx^5 - jx^6}{R} + \frac{n\pi}{2}\right) \\
&= (-1)^{j+k+n} f_n^{(j,k)}(x^5, x^6). \quad (167)
\end{aligned}$$

où nous avons utilisé le fait que $(-1)^j = (-1)^{-j}$. On peut montrer qu'il existe des symétries supplémentaires dans le modèle qui imposent la contrainte $(-1)^n$ pour chaque sommet [29]. Donc, il y a encore une parité KK conservée, qui est donnée par $(-1)^{j+k}$.

Pour résumer, dans les modèles MUED, la parité KK est toujours conservée, tandis que le nombre KK est conservé au niveau de l'arbre, mais rompu au niveau de la boucle. Ces contraintes sur les interactions des particules KK ont des conséquences importantes sur les contraintes et la phénoménologie du modèle.

4.3.4 Stabilité de la particule Kaluza-Klein la plus légère:

Une conséquence importante de la conservation de la parité KK est que la particule Kaluza-Klein (LKP) la plus légère, c'est-à-dire le mode KK de premier niveau le plus léger, est complètement stable. Par définition, les seules particules plus légères que le LKP sont les particules SM, et par conservation de l'énergie, ce sont les seules particules en lesquelles le LKP pourrait se désintégrer. Par conséquent, tout sommet de désintégration du LKP aurait un nombre KK net $n = 1$, ce qui est interdit par la parité KK. Le fait que le LKP soit stable signifie qu'il pourrait potentiellement être un candidat DM. Ce type de DM est connu sous le nom de matière noire de Kaluza-Klein (KKDM) et a été proposé pour la première fois dans les réf. [23][24]. La situation est tout à fait analogue aux modèles supersymétriques où la R-parité est conservée.

4.3.5 Corrections de masse:

Au niveau de l'arbre, la masse pour un champ donné avec une masse de mode zéro m_0 est donnée par

$$m_n = \sqrt{m_0^2 + \frac{n^2}{R^2}} \quad (168)$$

dans le cas à cinq dimensions, et

$$m_{j,k} = \sqrt{m_0^2 + \frac{j^2 + k^2}{R^2}} \quad (169)$$

dans le cas à six dimensions. Si les contributions du mode zéro aux masses des particules sont ignorées, tous les modes KK à un niveau donné sont dégénérés et des processus tels que $e^{(2)} \rightarrow e^{(1)} + \gamma(1)$ seraient légèrement autorisés cinématiquement. Bien que le problème semble être résolu par les masses en mode zéro, ces contributions pourraient être complètement hors de propos par rapport aux corrections radiatives des masses [32]. Cela signifie que les corrections radiatives jouent un rôle majeur dans la détermination des schémas de désintégration des particules KK dans les modèles UED. De plus, l'identité du LKP est sensible aux corrections radiatives et pourrait avoir un impact important sur les études de KKDM, où le LKP est le candidat DM potentiel.

Puisque les contributions aux masses des modes KK provenant des dimensions supplémentaires sont en réalité des parties des impulsions, ces parties sembleraient être protégées par l'invariance de Lorentz, et donc n'obtenir aucune correction. Cependant, en raison de la compactification de la cinquième dimension sur un cercle, l'invariance de Lorentz est brisée au niveau de la boucle par des particules virtuelles s'enroulant autour de cette dimension. Comme il s'agit d'un effet à longue distance, il ne donne lieu qu'à des corrections finies et bien définies du spectre de masse. Ces corrections sont présentes pour tout modèle de dimensions supplémentaires compactées.

Une deuxième source de corrections radiatives est l'orbifolding de l'espace interne, qui induit des *BLT*, qui cassent localement l'invariance de Lorentz. Dans les modèles MUED, ces corrections peuvent être déterminées de manière unique. Dans ce cas, ils évoluent de zéro à l'échelle de coupure Λ , et sont proportionnels à $\ln \Lambda$.

4.4 Dimensions supplémentaires universelles minimales:

Nous sommes maintenant en mesure de discuter du contenu en particules et de la phénoménologie des modèles MUED réalistes. Nous commençons par le modèle à cinq dimensions, suivi du modèle à six dimensions sur le carré chiral.

4.4.1 Cinq dimensions:

A chaque niveau KK, les bosons de jauge électrofaible $B^{(n)}$ et $W^{3(n)}$ se mélangent pour former des états propres de masse, de la même manière que dans le SM. La matrice de masse au nième niveau KK, en base $\{B^{(n)}, W^{3(n)}\}$ est donnée par [23]

$$M_{gauge}^{(n)} = \begin{pmatrix} \frac{n^2}{R^2} + \delta m_{B^{(n)}}^2 + \frac{1}{4}g'v^2 & \frac{1}{4}g'gv^2 \\ \frac{1}{4}g'gv^2 & \frac{n^2}{R^2} + \delta m_{W^{3(n)}}^2 + \frac{1}{4}g^2v^2 \end{pmatrix} \quad (170)$$

où $\delta m_{B^{(n)}}^2$ et $\delta m_{W^{3(n)}}^2$ sont des corrections aux masses au niveau de l'arbre. En raison de la différence entre ces corrections, le mélange est faible pour $n \gg 0$. Pour $R^{-1} \geq 300$ GeV, l'angle de Weinberg de premier niveau est borné par $\sin \theta_W^{(1)} \leq 0,05$, et pour des valeurs plus grandes de n , il est encore plus petit. Cela signifie que nous pouvons faire l'approximation $B^{(n)} \simeq A^{(n)}$ et $W^{3(n)} \simeq Z^{(n)}$. Afin de se conformer à la notation la plus couramment utilisée dans la littérature, nous appellerons ces champs $B^{(n)}$ et $Z^{(n)}$. Dans le cadre de DM, nous utiliserons les notations simplifiées B^1 et Z^1 pour les excitations KK de niveau un. Dans le SM, chacun des bosons de faible jauge obtient une masse en mangeant une composante du champ de Higgs. Dans une théorie de jauge à cinq dimensions, les masses des modes KK non nuls d'un boson de jauge peuvent être comprises comme étant dues au boson de jauge mangeant sa cinquième composante à chaque niveau KK, de manière tout à fait analogue. Dans le cas des bosons de faible jauge dans le modèle à cinq dimensions, chaque mode KK reçoit des termes de masse de ces deux sources, et par conséquent, le mécanisme correspondant est plus compliqué. Le cinquième composant du boson de jauge et le composant correspondant du champ de Higgs se mélangent à chaque niveau KK pour former deux particules scalaires. L'un d'eux est mangé par le boson de jauge afin de générer une masse, et l'autre apparaît comme un scalaire physique dans le spectre des particules. L'angle de mélange $B^{(n)}$ au nième niveau KK est donné par

$$\tan B^{(n)} = \sqrt{\frac{m_A^2}{(n/R)^2 + \delta m_{A^{(n)}}^2 + m_A^2}} \quad (171)$$

Pour simplifier, les effets de la rupture de symétrie électrofaible (EWSB) sont généralement ignorés par rapport à l'échelle de masse R^{-1} , c'est-à-dire que les termes d'ordre $(vR)^2$ sont négligés. En utilisant cette approximation, la teneur en particules du modèle est résumée dans le tableau 5.1.

Le spectre de masse, y compris les deux sources de corrections radiatives, a été déterminé dans la Réf.

[32]. En figue. 3.4, le spectre de masse pour le modèle à cinq dimensions avec ces corrections est montré pour $R^{-1} = 500$ GeV, $\Lambda R = 20$ et $m_H = 125$ Gev.

Le LKP est la première excitation KK du boson B , le B^1 . En général, l'identité du LKP dans le modèle MUED dépend de la valeur de l'échelle de compactification ainsi que de la masse de Higgs [33]. Dans certaines parties de l'espace des paramètres, le LKP pourrait être le mode KK de premier niveau du graviton ou le boson de Higgs chargé, $H^\pm(1)$. Cependant, en tenant compte des contraintes actuelles sur le modèle MUED, le $H^\pm(1)$ LKP est exclu, et dans la majeure partie de l'espace des paramètres restant, le B^1 est le LKP. Une autre caractéristique importante du spectre est que les modes de niveau un les plus lourds sont ceux qui interagissent fortement, c'est-à-dire les quarks KK et les gluons. Ce sont les particules qui ont les taux de production les plus élevés dans les collisionneurs de hadrons tels que le Tevatron et le LHC, et le fait qu'elles possèdent de nombreux canaux de désintégration cinématiquement ouverts est important pour la phénoménologie qui en résulte.

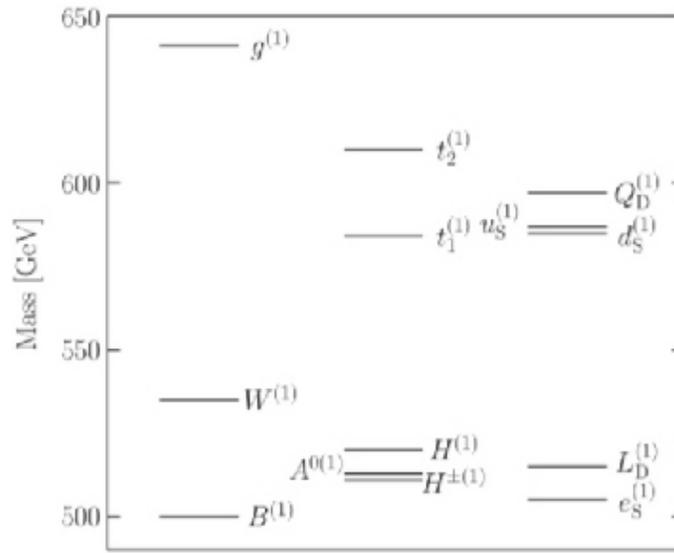


Figure 3.4. Le spectre de masse du modèle MUED à cinq dimensions, y compris les corrections radiatives.

4.4.2 Six dimensions:

En général, les deux composants supplémentaires de chacun des bosons de faible jauge sont mélangés avec les composants du champ de Higgs. Dans la limite où l'inverse du rayon

Zero modes	S^1/\mathbb{Z}_2	T^2/\mathbb{Z}_4
$n = 0 / (j, k) = (0, 0)$	$n \geq 1$	$(j, k) \neq (0, 0)$
Gauge bosons		
A_μ	$B_\mu^{(n)} \simeq A_\mu^{(n)}$	$B_\mu^{(j,k)} \simeq A_\mu^{(j,k)}$
Z_μ	$W_\mu^{3(n)} \simeq Z_\mu^{(n)}$	$W_\mu^{3(j,k)} \simeq Z_\mu^{(j,k)}$
W_μ^\pm	$W_\mu^{\pm(n)}$	$W_\mu^{\pm(j,k)}$
g_μ^a	$g_\mu^{a(n)}$	$g_\mu^{a(j,k)}$
Fermions		
$Q_L = \begin{pmatrix} u_L \\ d_L \end{pmatrix}$	$Q_D^{(n)} = \begin{pmatrix} u_D^{(n)} \\ d_D^{(n)} \end{pmatrix}$	$Q_D^{(j,k)} = \begin{pmatrix} u_D^{(j,k)} \\ d_D^{(j,k)} \end{pmatrix}$
u_R	$u_S^{(n)}$	$u_S^{(j,k)}$
d_R	$d_S^{(n)}$	$d_S^{(j,k)}$
$L_L = \begin{pmatrix} \nu_L \\ e_L \end{pmatrix}$	$L_D^{(n)} = \begin{pmatrix} \nu_D^{(n)} \\ e_D^{(n)} \end{pmatrix}$	$L_D^{(j,k)} = \begin{pmatrix} \nu_D^{(j,k)} \\ e_D^{(j,k)} \end{pmatrix}$
e_R	$e_S^{(n)}$	$e_S^{(j,k)}$ $\nu_S^{(j,k)}$
Scalars		
H	$H^{(n)}$ $A^{0(n)}$ $H^{\pm(n)}$	$H^{(j,k)}$ $A^{0(j,k)}$ $H^{\pm(j,k)}$ $B_H^{(j,k)}$ $W_H^{3(j,k)}$ $W_H^{\pm(j,k)}$ $g_H^{a(j,k)}$

Tableau 3.1. La teneur en particules dans les deux modèles UED décrits dans ce chapitre, en négligeant les effets EWSB. Pour le modèle à six dimensions, les valeurs autorisées des indices KK sont $(j, k) = (0, 0)$ et $j \geq 1, k \geq 0$, c'est-à-dire qu'il n'y a pas de modes $(0, 1)$. Les modes KK non nuls des fermions sont des particules de Dirac, et S et D désignent respectivement les singulets et doublets $SU(2)_L$. L'indice H sur les scalaires dans le modèle à six dimensions désigne des scalaires adjoints. de l'espace interne est beaucoup plus grand que le VEV du champ de Higgs, l'une des combinaisons physiques est principalement composée du champ de Higgs, tandis que l'autre est principalement une combinaison des composants supplémentaires du boson de faible jauge. Au total, il y a 15 nouveaux scalaires à chaque niveau KK.

La contenu en particules, en négligeant les effets de l'EWSB, est résumée dans le tableau 3.1. Le spectre de masse pour le modèle MUED à six dimensions sur le carré chiral, qui a été calculé dans les réf. [34][35], est illustré à la Fig. 3.5. Dans ce modèle, le LKP est le scalaire adjoint B_H^1 , plutôt que B^1 . Par conséquent, la phénoménologie du modèle est assez différente du cas à cinq dimensions. De plus, les divisions de masse relatives entre les modes KK de premier niveau sont plus grandes que dans le cas à cinq dimensions.

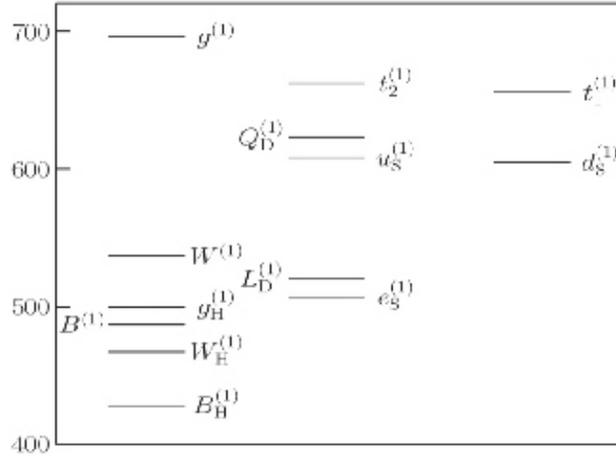


Figure 3.5. Le spectre de masse du modèle MUED à six dimensions sur le carré chiral, y compris les corrections radiatives.

Les masses des champs de Higgs dépendent de manière quadratique de l'échelle de coupure et, par conséquent, aucune valeur fiable ne peut être donnée pour ces masses.

4.4.3 Phénoménologie du collisionneur:

Dans les collisionneurs, la conservation de la parité KK implique que les modes KK de premier niveau ne peuvent être produits que par paires. Une fois qu'un tel mode KK a été produit, il se désintègrera dans une chaîne où la parité KK est conservée, se terminant par la production du LKP. À chaque étape de cette chaîne de désintégration, une particule SM est émise, donnant des signaux comprenant des jets, des leptons, des photons et de l'énergie manquante. Étant donné que le spectre de masse KK de premier niveau est relativement dégénéré, ces particules SM seront molles, ce qui signifie qu'il pourrait être difficile de les séparer du fond. Pour les jets, le bruit de fond est important au LHC, et une meilleure stratégie de recherche consiste à rechercher des leptons [36]. La voie la plus prometteuse est celle des quatre leptons plus l'énergie manquante, pour laquelle le LHC devrait pouvoir sonder jusqu'à un rayon de compactification d'environ 1,5 TeV.

Une stratégie alternative, qui pourrait également être utilisée pour distinguer les modèles UED des modèles supersymétriques au LHC, consiste à rechercher des signaux provenant des modes KK de second niveau. La production d'une seule particule KK de deuxième niveau est compatible avec la conservation de la parité KK, mais pas du nombre KK. Par conséquent, un tel processus peut se produire au niveau de la boucle dans les modèles MUED. Étant donné que les masses des particules de second niveau sont environ deux fois plus grandes que celles des modes de premier niveau, une particule de second niveau peut se désintégrer en particules SM ou en une paire de particules KK de premier niveau. Dans Réf. [37], il a été constaté que les modes KK de second niveau des bosons de jauge y et Z offrent les meilleures perspectives de détection au LHC. Ces particules peuvent être détectées comme des résonances dans les distributions de masse invariantes des paires d'électrons et de muons.

Dans le modèle UED à six dimensions sur le carré chiral, la situation concernant les modes de second niveau est différente [38]. Dans ce cas, le deuxième niveau KK est constitué des états $(1, 1)$, qui ont des masses d'environ $\sqrt{2}R^{-1}$. Ceci a deux conséquences importantes pour la phénoménologie de ces modes. Premièrement, pour une valeur donnée de R^{-1} , les modes de second niveau sont beaucoup plus légers que dans le modèle à cinq dimensions, améliorant leurs sections efficaces de production. Deuxièmement, les désintégrations en modes de premier niveau, qui ont des masses d'environ R^{-1} , sont cinématiquement interdites. Cela signifie que les modes de second niveau ne peuvent se désintégrer qu'en particules SM, améliorant la production résonnante de paires de fermions à partir des désintégrations de bosons de gros calibre.

4.5 Règles de Feynman pour mUED:

Vous trouverez ci-dessous une liste des règles de Feynman nécessaires pour calculer les amplitudes de diffusion des processus de signal mUED et les désintégrations à deux corps qui en résultent dans les chaînes de désintégration en cascade résultantes. Les sommets indiqués dans le Tableau A.1 contiennent le couplage fort, noté ici g_3 . Ces sommets sont nécessaires à la production de quarks SU(2)-doublet KK et de gluons KK, et à la désintégration d'un gluon KK en un quark SU(2)-doublet KK. Les sommets indiqués dans le Tableau A.2 contiennent soit le couplage faible g_2 , soit le couplage électromagnétique g_1 . Ces sommets apparaissent dans les chaînes de désintégration à partir du quark SU(2)-doublet KK. Ces règles de Feynman ont été dérivées dans [39] du lagrangien compactifié à 5 dimensions après réducti

$$\begin{aligned}
 & \text{Diagram 1: } A_\mu \text{ (k}_1\text{) } \rightarrow W_\nu^{n+} \text{ (k}_2\text{) } + W_\lambda^{n-} \text{ (k}_3\text{)} \\
 & \qquad \qquad \qquad = -ie[(k_1 - k_2)g_{\mu\nu} + (k_2 - k_3)g_{\nu\lambda} + (k_3 - k_1)g_{\lambda\mu}] \\
 & \text{Diagram 2: } Z_\mu^2 \text{ (k}_1\text{) } \rightarrow W_\nu^{1+} \text{ (k}_2\text{) } + W_\lambda^{1-} \text{ (k}_3\text{)} \\
 & \qquad \qquad \qquad = -i\frac{g_2}{\sqrt{2}} \cos \theta_W [(k_1 - k_2)g_{\mu\nu} + (k_2 - k_3)g_{\nu\lambda} + (k_3 - k_1)g_{\lambda\mu}] \\
 & \text{Diagram 3: } A_\mu \rightarrow Z_\nu^2 + W_\rho^{1-} \\
 & \qquad \qquad \qquad = -i\frac{1}{\sqrt{2}}\frac{e^2}{\sin \theta_W} (2g^{\mu\nu}g^{\rho\sigma} - g^{\mu\rho}g^{\nu\sigma} - g^{\mu\sigma}g^{\nu\rho})
 \end{aligned}$$

Table A.1: Règles de Feynman pour les particules colorées. Les f^{abc} sont les constantes de structure pour $SU(3)_c$. $g_{\mu\nu}$ est le tenseur métrique 4D (+, -, -, -). L'opérateur de projection de gauche est représenté par $P_L = \frac{1-\gamma^5}{2}$

$$\begin{aligned}
 & \text{Diagram 4: } Z_n \text{ (wavy) } \rightarrow f_n^D + \bar{f}_0 \\
 & \qquad \qquad \qquad = -iI_3 g_2 \gamma^\mu P_L \\
 & \text{Diagram 5: } W_n^\pm \text{ (wavy) } \rightarrow f_n^D + \bar{f}'_0 \\
 & \qquad \qquad \qquad = -i\frac{g_2}{\sqrt{2}} \gamma^\mu P_L V_{ff'}
 \end{aligned}$$

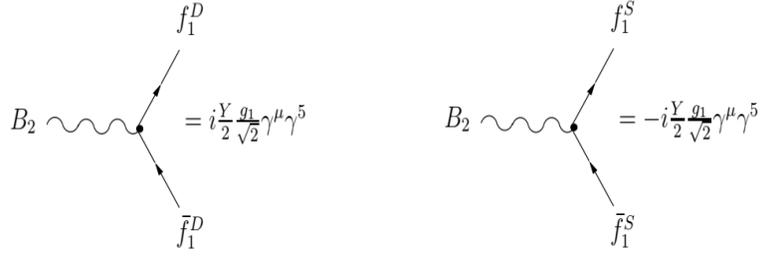


Table A.2: Règles de Feynman pour les particules à interaction faible et électromagnétique. f et F_1 représentent respectivement les fermions SM et $n = 1KK SU(2)$. I_3 est l'isospin faible. Y représente les hypercharges de fermions. L'opérateur de projection de gauche est représenté par $P_L = \frac{1-\gamma^5}{2}$.

4.6 Electron-positron annihilation to KK gravitons:

Dans les supernovae, la température centrale (T_{SN}) est suffisamment élevée pour la création de paires d'électrons et de positrons [40], qui s'annihilent ensuite en gravitons KK, comme illustré sur la figure 3.6, avec une section transversale totale (en négligeant la masse d'électrons depuis moi $\langle T_{SN} \rangle$ donnée par

$$\sigma_{e^-e^+ \rightarrow G_{kk}}(s, m_{\vec{n}}) = \frac{\pi k^2 \sqrt{s}}{64} \delta(m_{\vec{n}} - \sqrt{s}).$$

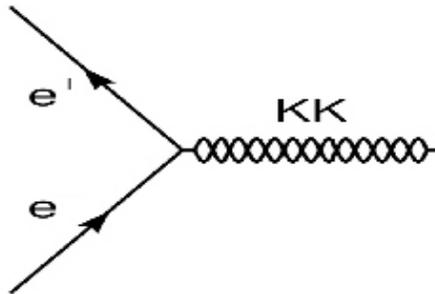
L'émissivité volumique est obtenue par moyennage thermique sur la distribution de Fermi-Dirac

$$\begin{aligned} Q_e &= \int \frac{2d^3 \vec{k}_1}{(2\pi)^3} \frac{1}{e^{(E_1 + \mu_e)/T} + 1} \frac{s(E_1 + E_2)}{2E_1 E_2} \sum_{\vec{n}} \sigma_{e^-e^+ \rightarrow G_{kk}}(s, m_{\vec{n}}) \\ &= \frac{2^n I_e(n)}{(n+4)\pi^2} \frac{T^{n+7}}{M_s^{n+2}}, \end{aligned}$$

où μ_e et $-\mu_e$ sont les potentiels chimiques des électrons et des positons; $\mu_e = (3\pi^2 n_e)^{1/3} \simeq 345$ MeV avec la densité électronique $n_e \simeq 1.8 \times 10^{38} \text{ cm}^{-3}$ au cœur de la supernova. Le facteur intégral est

$$I_e(n) = \int_0^\infty dx dy \frac{(xy)^{n/2+2} (x+y)}{(e^{x-\mu_e/T} + 1)}. \quad (172)$$

Numériquement, la valeur de cette intégrale varie de 0,08 à 86 ($n = 2$) et de 0,62 à 450 ($n = 3$) pour T_{SN} de 20 MeV à 60 MeV. Nous notons que la formule du taux de perte d'énergie Eq. (172) peut aussi s'appliquer à l'annihilation neutrino-antineutrino dans la sphère des neutrinos de la supernova.



FIGO 3.6: Diagrammes de Feynman pour l'annihilation électron-positon en un graviton kk

5 Conclusion:

Le Modèle Standard décrit la nature à des échelles atomiques et subatomiques où les interactions ne sont pas régies par la gravité, bien que couronné de succès expérimentaux. Présente certaines faiblesses auxquelles de nombreuses théories de Nouvelle Physique au-delà du Modèle Standard tentent d'apporter des solutions. Plusieurs des problèmes en suspens auxquels le modèle standard (SM) est confronté peuvent avoir de nouvelles solutions dans des contextes de plus grande dimension comme le modèle extra-dimensionnel. Les dimensions supplémentaires doivent être compactées sur un collecteur de très petit volume afin de ne pas entrer en conflit avec les phénomènes observés. Au moins cette conclusion serait valable dans un modèle où tous les champs SM se propagent dans les dimensions supérieures.

Dans ces modèles, les champs SM sont confinés à un sous-espace de la variété dimensionnelle supérieure complète et seuls la gravité et les autres singulets SM peuvent se propager dans la masse. Ce modèle était motivé par le fait qu'il pouvait abaisser l'échelle fondamentale de la gravité jusqu'à l'échelle électrofaible, et ainsi résoudre le problème de hiérarchie lié au grand désert énergétique entre ces échelles.

L'exploitation des symétries des champs (parité) était un outil très utile pour éliminer les champs qui n'existent pas à 4d, ce qui nous a permis de reproduire le SM à partir de Le modèle dimensions supplémentaires universelles minimales mUED, le modèle (mUED) peut décrire même des phénomènes liés à la gravitation, donc il peut être plus approprié pour la description des phénomènes des hautes énergies.

References

- [1] O. Klein, Quantum theory and five-dimensional theory of relativity, *Z. Phys.*37(1926) 895.
- [2] T. Kaluza, On the problem of unity in physics, *Sitzungsber. Preuss. Akad. Wiss. Berlin (Math. Phys.)* 1921, 966 (1921).
- [3] B. Sébastien, "{Recherche de physique au-delà du modèle standard dans le secteur du quark top et calibration de l'échelle en énergie des jets avec l'expérience CMS du LHC}" (l'université Claude Bernard – Lyon1, 2014).
- [4] G. Münster, and G. Bergner, "{Gauge theories of the strong and electroweak interactions}" (Univeristy of Münster, 2011).
- [5] V. Narisoa Marc, "{INCL++, UN MODÈLE DE TRANSPORT DE HADRONS DANS GENIE}" (Université D'antananarivo, 2021).
- [6] M. Goldhaber, L. Grodzins, and A. W. Sunyar, Helicity of neutrinos, *Physical review* 109.3 (1958) 1015.
- [7] G. Kane, *Modern Elementary Particle Physics*, Addison-Wesley Publishing Company, (1993).
- [8] E. Di Valentino, Cosmological Axion and neutrino mass constraints from Planck 2015 temperature and polarization data, (2015).
- [9] B.Thompson,O. Sundance, Fotini Markopoulou, and Lee Smolin, Quantum gravity and the standard model, *Classical and Quantum Gravity* 24.16 (2007)3975.
- [10] L. Krauss, "{A Universe from nothing}", AAI conference. (2009).
- [11] Michaelmas. Dr J R Batley, "{NST Part III Experimental and Theoretical Physics, Particle Physics Major Option}". Page[1-24]. (2005).
- [12] Michaelmas. Dr J R Batley, "{NST Part III Experimental and Theoretical Physics, Particle Physics Major Option}". Page[1-9]. (2005).
- [13] H. Melbéus, "{Particle Phenomenology of Compact Extra Dimensions}" (Universitetservice US AB, Stockholm April 2012).
- [14] M. Peskin and D. Schroeder, "{Quantum field theory}" (Publié par Addison-Wesley, University of Chicago Press,1995).
- [15] N. Arkani-Hamed, A. G. Cohen and H. Georgi, (De)constructing dimensions, *Phys.Rev.Lett.*86 (2001) 4757.
- [16] C. T. Hill, S. Pokorski and J. Wang, Gauge invariant effective Lagrangian for Kaluza–Klein modes, *Phys.Rev. D*64 (2001) 105005.
- [17] Kamiokande Collaboration, Evidence for oscillation of atmospheric neutrinos, *Phys.Rev.Lett.*81,1562 (1998).
- [18] N. Arkani-Hamed, S. Dimopoulos and G. R. Dvali, The hierarchy prob lem and new dimensions at a millimeter, *Phys. Lett. B*429, 263 (1998).
- [19] N. Arkani-Hamed, S. Dimopoulos and G. R. Dvali, Phenomenology, astrophysics and cosmology of theories with sub-millimeter dimensions and TeV scale quantum gravity, *Phys.Rev. D*59 (1999) 086004.

- [20] L. Randall and R. Sundrum, An alternative to compactification, *Phys. Rev.Lett.* 83 (1999) 4690.
- [21] L. Randall and R. Sundrum, A large mass hierarchy from a small extra dimension, *Phys. Rev. Lett.* 83 (1999) 3370.
- [22] J. Sunniva, "{Relic Density of Kaluza-Klein Dark Matter}" (Univerity of oslo, 2019).
- [23] G. Servant and T. M. P. Tait, Is the lightest Kaluza–Klein particle a viable dark matter candidate, *Nucl. Phys. B*650 (2003) 391.
- [24] H. C. Cheng, J. L. Feng and K. T. Matchev, Kaluza–Klein dark matter, *Phys. Rev. Lett.* 89 (2002) 211301.
- [25] B. A. Dobrescu and E. Poppitz, Number of fermion generations derived from anomaly cancellation, *Phys. Rev. Lett.* 87 (2001) 031801.
- [26] T. Appelquist et al., Proton stability in six-dimensions, *Phys. Rev. Lett.* 87 (2001) 181802.
- [27] J. Polchinski, "{String theory. Vol. 2: Superstring theory and beyond}" (Cambridge University Press, 1998).
- [28] T. Appelquist et al., Neutrinos vis-a-vis the six-dimensional standard model, *Phys. Rev. D*65 (2002)105019.
- [29] B. A. Dobrescu and E. Ponton, Chiral compactification on a square, *JHEP* 03 (2004) 071.
- [30] G. Burdman, B. A. Dobrescu and E. Ponton, Six-dimensional gauge theory on the chiral square, *Journal of Energy Physics*,vol 2006, *JHEP*02(2006).
- [31] H. Georgi, A. K. Grant and G. Hailu, Brane couplings from bulk loops, *Phys. Lett. B*506 (2001) 207-2014.
- [32] H. C. Cheng, K. T. Matchev and M. Schmaltz, Radiative corrections to Kaluza–Klein masses, *Phys. Rev. D*66 (2002) 036005.
- [33] Cembranos, Jose AR, Jonathan L. Feng, and Louis E. Strigari, Exotic collider signals from the complete phase diagram of minimal universal extra dimensions, *Physical Review D* 75.3 (2007) 036004.
- [34] E. Ponton and L. Wang, Radiative effects on the chiral square, *JHEP* 0611 (2006) 018.
- [35] B. A. Dobrescu, K. Kong and R. Mahbubani, Leptons and photons at the LHC: Cascades through spinless adjoints, *JHEP*0707 (2007) 006.
- [36] H. C. Cheng, K. T. Matchev and M. Schmaltz, Bosonic supersymmetry? Getting fooled at the CERN LHC, *Phys. Rev. D*66 (2002) 056006.
- [37] A. Datta, K. Kong and K. T. Matchev, Discrimination of supersymmetry and universal extra dimensions at hadron colliders, *Phys. Rev. D*72 (2005) 096006.
- [38] G. Burdman, B. A. Dobrescu and E. Ponton, Resonances from two universal extra dimensions, *Phys. Rev. D*74 (2006) 075008.
- [39] A. Datta, K. Kong, and K. T. Matchev, Minimal Universal Extra Dimensions in CalcHEP/CompHEP, *New J.Phys.* 12 (2005) 075017.
- [40] V. Barger, T. Han, C. Kao, and R. J. Zhang, Astrophysical constraints on large extra dimensions, *Physics Letters B*,461(1-2), 34-42, (1999).