



الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية
وزارة التعليم العالي والبحث العلمي
جامعة سعد حطاب البلدية
كلية التكنولوجيا
قسم الميكانيك



Mémoire de Fin d'Études

Présenté par

HENNI MANSOUR MOHAMED

pour l'obtention du diplôme master en génie mécanique

Option : Ingénierie Thermique et Solaire

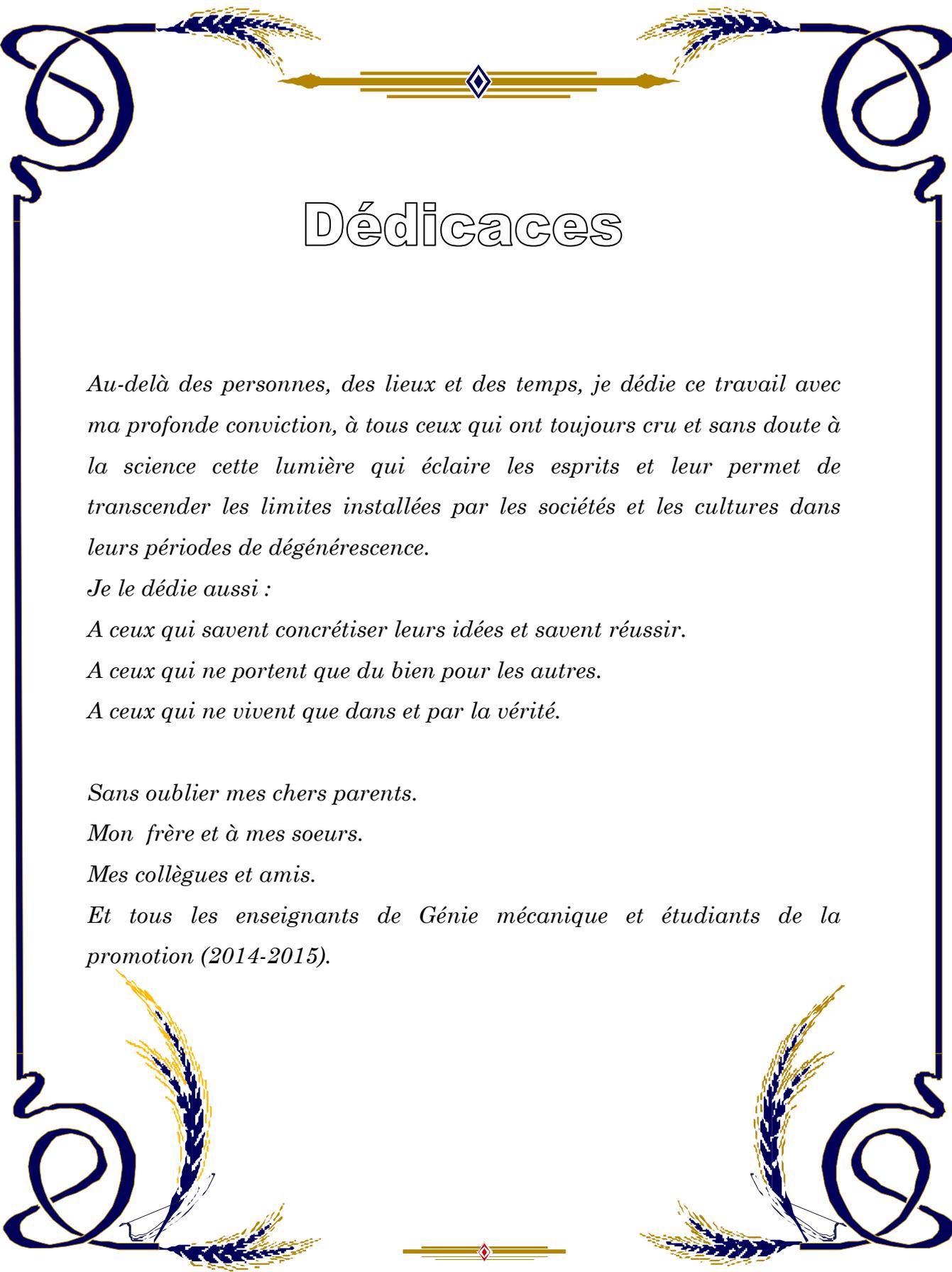
Thème

**Etude de la stabilité linéaire d'un écoulement de Taylor-Couette
pour un fluide de Bingham**

Proposé et dirigé par :

Dr. ALIBENYAHIA Brahim

Année Universitaire 2014-2015



Dédicaces

Au-delà des personnes, des lieux et des temps, je dédie ce travail avec ma profonde conviction, à tous ceux qui ont toujours cru et sans doute à la science cette lumière qui éclaire les esprits et leur permet de transcender les limites installées par les sociétés et les cultures dans leurs périodes de dégénérescence.

Je le dédie aussi :

A ceux qui savent concrétiser leurs idées et savent réussir.

A ceux qui ne portent que du bien pour les autres.

A ceux qui ne vivent que dans et par la vérité.

Sans oublier mes chers parents.

Mon frère et à mes soeurs.

Mes collègues et amis.

Et tous les enseignants de Génie mécanique et étudiants de la promotion (2014-2015).

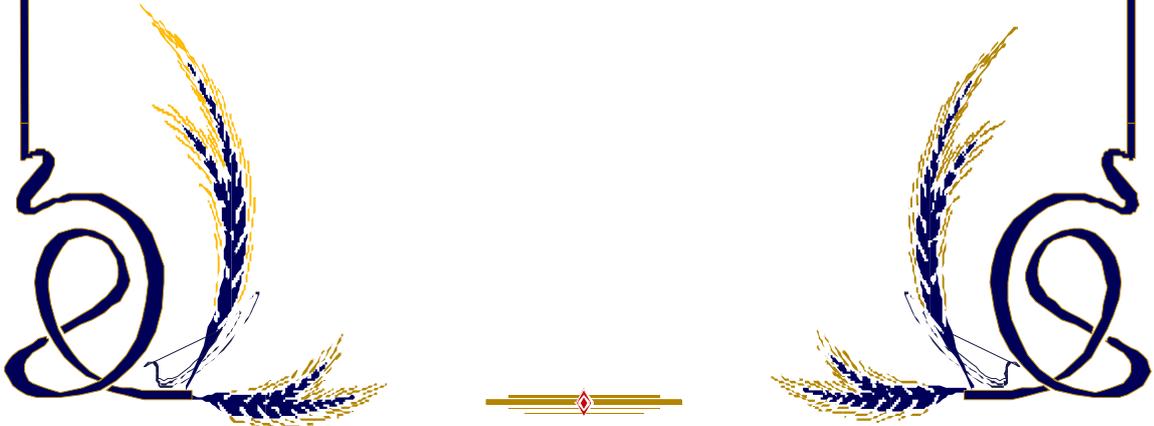


Remerciements

Au terme de ce Mémoire nous tenons à remercier tout naturellement en premier lieu **Dieu le tout Puissant** qui m'a donné la force, le courage et la patience de bien mener ce travail.

Ce travail a été réalisé sous la direction de Monsieur **Dr Ali benyahia**, Maître de Conférences (MCB) à université Saad Dahlab de Blida, qu'il trouve ainsi l'expression de ma profonde reconnaissance pour sa compétence, ses encouragements et ses précieux conseils durant le déroulement de ce travail.

Mes sentiments vont également à toutes les personnes qui ont contribué de près ou de loin à la réalisation de ce travail.



Résumé :

Une analyse linéaire de stabilité tridimensionnelle d'un écoulement entre deux cylindres coaxiaux en rotation connu sous le nom de type Taylor-Couette pour un fluide de Bingham. L'influence des paramètres rhéologiques et géométriques sur les conditions critiques et la structure des rouleaux de Taylor est examinée. Les configurations étudiées sont: seul le cylindre intérieur est en rotation et les deux cylindres tournent en contre rotation et co-rotation. Les paramètres de contrôle du problème sont le rapport de rayon et le nombre de Reynolds basé sur la vitesse de rotation du cylindre extérieur.

La simulation a été effectuée à l'aide du code de calcul MATLAB par la méthode spectral

Abstract:

Digital study considering a Bingham fluid flow between two concentric cylinders rotating known Couette-Taylor type. Configurations are considered: only the inner cylinder is in event of rotation and both of the two cylinders are in event of rotating center and co-rotating . The control parameters of the problem are the radial clearance, appearance and the Reynolds number based on the rotational speed of the outer cylinder. The simulation was performed using the computer code in MATLAB with spectral numerical method.

ملخص:

في هذا العمل نتطرق إلى الدراسة الرقمية لجريان سائل بنغامي بين اسطوانتين متمركزتين في حالة دوران، والانتقال من حالة الاستقرار نحو حالة عدم الاستقرار الذي يعرف بسيلان تايلور كوات. أين تمت دراسة في ثلاث حالات: الاسطوانة الداخلية تدور بسرعة زاوية ثابتة والحالة الثانية كلا الاسطوانتين تدوران في اتجاهين متعاكسين. ثالثا الاسطوانتان تدوران في نفس الاتجاه العوامل التي تؤثر في الجريان وعلى شروط ظهور الاستقرار هي عامل الشكل، و سرعات الزاوية وعدد رينولدز .

الدراسة أجريت باستعمال برنامج ماتلاب بطريقة عددية الطيفي. النتائج المتحصل عليها متوافقة مع النتائج التجريبية المتوفرة.

REFERENCES BIBLIOGRAPHIQUES

- [1] Ahmed ESMAEL Transition vers la turbulence pour un fluide à seuil en écoulement dans une conduite cylindrique Université Henri Poincaré – Nancy 1 le 14 novembre 2008.
- [2] Rhéologie des fluides complexes Elisabeth Guazzeli 10/2001.
- [3] Wikipédia, l'encyclopédie libre.
- [4] AGATHE CHOUIPE. Etude numérique de la réduction de traînée par injection de bulles en écoulement de Taylor-couette. Doctorat de l'université de Toulouse le 12 juillet 2012.
- [5] DJERAH FATEH Etude De L'instabilité Créée Par Une Contra rotation De Deux Cylindres Concentriques Université HADJ LAKHDAR – BATNA – 2011/2012.
- [6] Olivier CZARNY. Contribution à l'étude numérique des écoulements en rotation avec parois. Application au système de Taylor-Couette ÉCOLE DOCTORALE Mécanique, Physique et Modélisation 2003.
- [7] G. I. TAYLOR, 1923 stability of viscous liquid contained between two rotating concentric cylinders. Phil. Trans. Soc. A223, 289-343.
- [8] J.T. STUART, 1958 the non-linear mechanics of hydrodynamics stability J. Fluid Mech. Vol.4.
- [9] RANDALL TAGG, 1994 The Taylor Couette Problem Nonlinear science today. Vol.4. November, 1994.
- [10] M. P. Landry, 2003 Taylor-Couette instability of a Bingham fluid the University of British Columbia December 2003.
- [11] Notes sur les Méthodes (Pseudo)-Spectrales.
- [12] DJERAH FATEH Etude De L'instabilité Créée Par Une Contra rotation De Deux Cylindres Concentriques Université HADJ LAKHDAR – BATNA – 2011/2012.
- [13] Mémoire fin étude de l'étudiant radhwen chnatlia (Etude de la stabilité linéaire d'un écoulement de Taylor-Couette pour un fluide de Newtonien).

SOMMAIRE

Introduction générale

Chapitre I Les Fluides Newtoniens

I.1. Introduction:.....	1
I.2.Comportement Rhéologique	3
I.2.1 Introduction:.....	3
I.2.2 Fluide Newtonien:.....	4
I.2.3 Fluide non Newtonien:.....	5
I.2.2.1.Fluide pseudo plastique.....	6
I.2.2.2.Fluide Rhéoépaississante :.....	6
I.2.2.3.Fluide à seuil ou viscoplastique :.....	7
I.2.2.4.Fluide de Bingham :.....	7
I.3. écoulement de Taylor – Couette :.....	8
I.3.1 Introduction :.....	8
I.3.2 Cas d'un fluide non visqueux (critère de Rayleigh).....	10
I.3.3 cas d'un fluide visqueux :.....	12
I.4.Différents régimes de l'écoulement de Taylor Couette :.....	16
I.4.1 Notion de paramètres de contrôle :	16
a) Nombre de Reynolds :	16
b) Nombre de Taylor :.....	16
I.4.2.Régime laminaire stable :	17
I.4.3 Régime laminaire perturbé ou instable:.....	18
a) Première instabilité (instabilité de Couette Taylor) :.....	18
b) deuxième instabilité :	19
I.4.4 Régime de pré turbulence ou chaos	20
I.5.Synthèse de l'étude bibliographique :.....	22

I.6. CONCLUSION:.....	24
-----------------------	----

Chapitre 2 écoulements de base

II.1 Introduction :.....	25
II.1 Formulation mathématique :.....	26
II. 1.1. L'équation de continuité :.....	26
II.1.2 L'équation de la quantité de mouvement :.....	26
a) Equation de quantité de mouvement azimutale :.....	26
b) Equation de quantité de mouvement radiale :.....	27
c) Equation de quantité de mouvement axiale:.....	27
II.3 l'équation adimensionnelle :.....	28
II.4. écoulement de base :.....	29
II.5. Conclusion :.....	52

Chapitre 3 Analyse linéaire de la stabilité

III.1 Introduction:.....	53
III.2. résolution numérique : (méthode spectrale).....	53
III.2.1. Introduction :.....	53
III.2.2. méthode spectrale :.....	54
III.3. Formulation du problème:.....	55
III.4 La méthode des modes normaux :.....	57
III.5 Organigramme :.....	63

Chapitre 4 Résultats et discussions

IV.1. Introduction:.....	64
IV.2. La convergence :.....	64
IV.3 Les Conditions critiques : (Perturbation axisymétrique : $m = 0$).....	65
a) les fluides Newtonien :.....	65
b) fluides non Newtonien :.....	65
IV.4 étude des spectres :.....	68

a- Cas ou le cylindre intérieur en rotation et le cylindre extérieur fixe:.....	68
b - Cas deux cylindres tournants:.....	72
IV.5 Nombre de Reynolds critique Re_{1c} a différent vitesse angulaire :.....	75
IV.5. 1. Cas ou le cylindre extérieur fixe:.....	75
IV.5.2. Cas ou contre-rotation des cylindres:.....	75
IV.5.3. cas ou co-rotation pour les cylindres:.....	76
IV.6. Courbe de stabilité marginale pour $B=0$: (les fluides newtonien) :.....	77
IV.7. Courbe de stabilité marginale pour $B \neq 0$:.....	80
IV.7. Conclusion :.....	82
Conclusion générale :.....	83

Liste des figures

Chapitre I Les Fluides Newtoniens

Fig.I.1 Cimentation d'un puits [1].....	2
Fig.I.2 : courbes comportement des différents fluides [3].....	5
Fig.I.3. exemples des fluides Non Newtoniens (le miel et une crème)	6
Fig.I.4.: Ecoulement de Taylor Couette.....	8
Fig.I.5.: Ecoulement de Taylor Couette	9
Fig.I.6: Différentes structures de l'écoulement de Taylor-Couette [5].	10
Fig.I.7 : Mécanisme de l'instabilité centrifuge.....	12
Fig. I.8 – Quelques schémas techniques.....	14
Fig.I.9 - Diagramme de stabilité de l'écoulement de Couette.....	15
Fig.I.10: Représentation schématique de l'écoulement de Couette laminaire.....	18
Fig.I.11 : Représentation de la première instabilité (TVF) [7].....	19
Fig.I.12 : Représentation de la deuxième instabilité (WVF) [7].....	20
Fig. I.13 Diagramme des états observés dans un écoulement de Taylor-Couette Co- ou Contra-rotation (d'après D.J. Triton)[11].....	22

Chapitre 2 écoulements de base

Fig. II.1: l'écoulement de Taylor couette.....	25
Fig. II.2: Profil de Vitesse pour un rapporte de rayon $\eta=0.5$: (1)B=0 fluide Newtonien ; (2)B=0.5 ; (3)B=0.85 ; (4)B=1 ; (5)B=1.23.....	31
Fig. II.3: Profil de Vitesse pour un rapporte de rayon $\eta=0.3$: (1)B=0 fluide Newtonien ; (2)B=0.5 ; (3)B=0.85 ; (4)B=1 ; (5)B=1.23.....	32
Fig. II.4: Profil de Vitesse pour un rapporte de rayon $\eta=0.7$: (1)B=0 fluide Newtonien ; (2)B=0.5 ; (3)B=0.85 ; (4)B=1 ; (5)B=1.23.....	32
Fig. II.5: Profil de Vitesse pour un rapporte de rayon $\eta=0.5$: (1)B=5 ; (2)B=10 ; (3)B=20 ; (4)B=30 ; (5)B=50.....	33

Fig. II.6:Profil de Vitesse pour un rapporte de rayon $\eta=0.881$:(1)B=5 ; (2)B=10 ; (3)B=20 ; (4)B=30 ;(5)B=50.....	33
Fig. II.7: profil de Vitesse pour un rapporte de rayon $\eta=0.3$:(1)B=5;(2)B=10 ; (3)B=20; (4)B=30;(5)B=50.....	34
Fig. II.8:Profil de Vitesse pour un rapporte de rayon $\eta=0.7$:(1)B=5 ; (2)B=10 ; (3)B=20 ; (4)B=30 ;(5)B=50.....	34
Fig. II.9:Profil de Vitesse pour un rapporte de rayon $\eta=0.5$:(1)B=5 ; (2)B=10 ; (3)B=20 ; (4)B=30 ;(5)B=50.....	35
Fig. II.10:Profil de Vitesse pour un rapporte de rayon $\eta=0.3$:(1)B=5; (2)B=10 ; (3)B=20 ; (4)B=30 ;(5)B=50.....	35
Fig. II.11:Profil de Viscosité pour un rapporte de rayon $\eta=0.5$:(1)B=0 fluide Newtonien;(2)B=0.5;(3)B=0.85;(4)B=1;(5)B=1.23.....	36
Fig. II.12:Profil de Viscosité pour un rapporte de rayon $\eta=0.881$:(1)B=0 fluide Newtonien;(2)B=0.5;(3)B=0.85;(4)B=1;(5)B=1.23.....	36
Fig. II.13:Profil de Viscosité pour un rapporte de rayon $\eta=0.3$:(1)B=0 fluide Newtonien;(2)B=0.5;(3)B=0.85;(4)B=1;(5)B=1.23.....	37
Fig. II.14:Profil de Viscosité pour un rapporte de rayon $\eta=0.7$:(1)B=0 fluide Newtonien;(2)B=0.5;(3)B=0.85;(4)B=1;(5)B=1.23.....	37
Fig. II.15:Profil de Viscosité pour un rapporte de rayon $\eta=0.5$:(1)B=5; (2)B=10 ; (3)B=20 ; (4)B=30 ;(5)B=50.....	38
Fig. II.16:Profil de Viscosité pour un rapporte de rayon $\eta=0.881$:(1)B=5; (2)B=10 ; (3)B=20 ; (4)B=30 ;(5)B=50.....	38
Fig. II.17:Profil de Viscosité pour un rapporte de rayon $\eta=0.3$:(1)B=5; (2)B=10 ; (3)B=20 ; (4)B=30 ;(5)B=50.....	39
Fig. II.18:Profil de Viscosité pour un rapporte de rayon $\eta=0.7$:(1)B=5; (2)B=10 ; (3)B=20 ; (4)B=30 ;(5)B=50.....	39
Fig. II.19:Profile de Viscosité pour un rapporte de rayon $\eta=0.5$:(1)B=0 fluide Newtonien;(2)B=0.5;(3)B=0.85;(4)B=1;(5)B=1.23.....	40
Fig. II.20:Profil de Viscosité pour un rapporte de rayon $\eta=0.881$:(1)B=0 fluide Newtonien;(2)B=0.5;(3)B=0.85;(4)B=1;(5)B=1.23.....	40
Fig. II.21:Profil de Viscosité pour un rapporte de rayon $\eta=0.3$:(1)B=0 fluide Newtonien;(2)B=0.5;(3)B=0.85;(4)B=1;(5)B=1.23.....	41

Fig. II.22:Profil de Viscosité pour un rapporte de rayon $\eta=0.7$:(1)B=0 fluide Newtonien;(2)B=0.5;(3)B=0.85;(4)B=1;(5)B=1.23.....	41
Fig. II.23:Profil de Viscosité pour un rapporte de rayon $\eta=0.5$:(1)B=5; (2)B=10 ; (3)B=20 ; (4)B=30 ;(5)B=50.....	42
Fig. II.24:Profil de Viscosité pour un rapporte de rayon $\eta=0.881$:(1)B=5; (2)B=10 ; (3)B=20 ; (4)B=30 ;(5)B=50.....	42
Fig. II.25:Profil de Viscosité pour un rapporte de rayon $\eta=0.3$:(1)B=5; (2)B=10 ; (3)B=20 ; (4)B=30 ;(5)B=50.....	43
Fig. II.26:Profil de Viscosité pour un rapporte de rayon $\eta=0.7$:(1)B=5; (2)B=10 ; (3)B=20 ; (4)B=30 ;(5)B=50.....	43
Fig. II.27:Profil de Viscosité pour un rapporte de rayon $\eta=0.5$:(1)B=0 fluide Newtonien;(2)B=0.5;(3)B=0.85;(4)B=1;(5)B=1.23.....	44
Fig. II.28:Profil de Viscosité pour un rapporte de rayon $\eta=0.881$:(1)B=0 fluide Newtonien;(2)B=0.5;(3)B=0.85;(4)B=1;(5)B=1.23.....	44
Fig. II.29:Profil de Viscosité un rapporte de rayon pour $\eta=0.3$:(1)B=0 fluide Newtonien;(2)B=0.5;(3)B=0.85;(4)B=1;(5)B=1.23.....	45
Fig. II.30:Profil de Viscosité pour un rapporte de rayon $\eta=0.7$:(1)B=0 fluide Newtonien;(2)B=0.5;(3)B=0.85;(4)B=1;(5)B=1.23.....	45
Fig. II.31:Profil de Viscosité pour un rapporte de rayon $\eta=0.5$:(1)B=5; (2)B=10 ; (3)B=20 ; (4)B=30 ;(5)B=50.....	46
Fig. II.32:Profil de Viscosité pour un rapporte de rayon $\eta=0.881$:(1)B=5; (2)B=10 ; (3)B=20 ; (4)B=30 ;(5)B=50.....	46
Fig. II.33:Profil de Viscosité pour un rapporte de rayon $\eta=0.3$:(1)B=5; (2)B=10 ; (3)B=20 ; (4)B=30 ;(5)B=50.....	47
Fig. II.34:Profil de Viscosité pour un rapporte de rayon $\eta=0.7$:(1)B=5; (2)B=10 ; (3)B=20 ; (4)B=30 ;(5)B=50.....	47

Chapitre 4 Résultats et discussions

Fig. IV.1. les condition critique (λ_c , $Re1_c$, k_c) en $\eta=0.3$	65
Fig IV.2. les condition critique (λ_c , $Re1_c$, k_c) en $\eta=0.5$	66
Fig. IV.3. les condition critique (λ_c , $Re1_c$, k_c) en $\eta=0.883$	66
Fig. IV.4. les conditions critiques ($\lambda_c=-8.8199*10^{-4}$, $Re1_c=116.133$, $k_c=3.9$) en $\eta=0.883$ et le $B=1$	67
Fig. IV.5. Les conditions critiques ($\lambda_c=-8.1996*10^{-4}$, $Re1_c=128.745$, $k_c=4$) en $\eta=0.883$ et le $B=5$	68
Fig. IV.6. Spectre pour un fluide newtonien a rapport de rayon $\eta=0.5$, $\Omega_2=0$ $R_1=75.425$ et $k=4.9$	69
Fig. IV.7. Spectre pour un fluide newtonien pour un rapport de rayon $\eta=0.5$ et $\Omega_2=0$ et $R_1=55$ et $k=3.4$	70
Fig. IV.8. Spectre pour un fluide newtonien a rapport de rayon $\eta=0.5$ et $\Omega_2=0$ et $R_1=63$ et $k=3.4$	70
Fig. IV.9. Spectre pour un fluide newtonien a rapport de rayon $\eta=0.5$ et $\Omega_2=0$ et $R_1=75$ et $k=3.4$	71
Fig. IV.10. Spectre pour un fluide non newtonien a rapport de rayon $\eta=0.881$, $\Omega_2=-29.3667$ $R_1=120$ et $Re2=-4000$ et $k=3.12$ et $B=1$	72
Fig. IV.11. Spectre pour un fluide non newtonien a rapport de rayon $\eta=0.881$, $\Omega_2=-73.4167$ $R_1=120$ et $Re2=-10000$ et $k=3.12$ et $B=1$	73
Fig. IV.12. Spectre pour un fluide non newtonien a rapport de rayon $\eta=0.881$, $\Omega_2=-183.5417$ $R_1=120$ et $Re2=-25000$ et $k=3.12$ et $B=1$	73
Fig. IV.13. Spectre pour un fluide non newtonien a rapport de rayon $\eta=0.881$, $\Omega_2=-73.4167$ $R_1=120$ et $Re2=-10000$ et $k=3.12$ et $B=5$	74
Fig. IV.14. Spectre pour un fluide non newtonien a rapport de rayon $\eta=0.881$, $\Omega_2=-183.5417$ $R_1=120$ et $Re2=-25000$ et $k=3.12$ et $B=5$	74

Fig. IV.15 : Le nombre de Reynolds critique pour fluide newtonien en fonction a rapport de rayon η	75
Fig. IV.16 : Le nombre de Reynolds critique pour fluide newtonien en fonction a rapport de rayon η	76
Fig. IV.17. Le nombre de Reynolds critique pour fluide newtonien en fonction a rapport de rayon η	77
Fig. IV.18. Courbe de stabilite marginale pour un rapport de rayon $\eta=0.5$	79
Fig.IV.19. Courbe de stabilite marginale pour un rapport de rayon $\eta=0.883$	79
Fig.V.20. Courbe de stabilite marginale pour un rapport de rayon $\eta=0.883$, $N=50$	81

Liste de tableau

Chapitre 3 Analyse linéaire de la stabilité

Tableau. III.1 : L'organigramme de travail63

Chapitre 4 Résultats et discussions

Tableau. IV.1 : la convergence de fluide newtonien a $\eta=0.3$ 64

Tableau. IV .2: la convergence de fluide newtonien a $\eta=0.5$64

Tableau. IV.3 : la convergence de fluide newtonien a $\eta=0.883$64

NOMENCLATURE

Symboles latins :

Unités :

R1	Rayon du cylindre intérieur	m
R2	Rayon du cylindre extérieur	m
H	Hauteur du dispositif de Couette	m
d	Espace entre les deux cylindres coaxiaux ou espace annulaire	m
U	Composante radiale de la vitesse d'écoulement du fluide	$m.s^{-1}$
V	Composante tangentielle de la vitesse d'écoulement du fluide	$m.s^{-1}$
W	Composante axiale de la vitesse d'écoulement du fluide	$m.s^{-1}$
r	Composante cylindrique de la direction radiale	$m.s^{-1}$
z	Composante cylindrique de la direction axiale	$m.s^{-1}$
P	Pression	Pa
g	Accélération de la pesanteur	$m.s^{-2}$
Mc	Moment cinétique $kg.m^2.s^{-1}$	
Re	Nombre de Reynolds	-
Ta	Nombre de Taylor	-
Fr	Nombre de Froude- Re_1 Nombre de Reynolds de l'écoulement a cylindre intérieur-	
Re2	Nombre de Reynolds de l'écoulement	-
Re _c	Nombre de Reynolds critique de l'écoulement a cylindre extérieur-	
t	temps s	
Ri-Si	rotor-stator $m.s^{-1}$	
u', v', w'	Composantes radiale, azimutale, axiale de la vitesse	
B	le nombre de Bingham	
λ	le nombre d'onde	

Abbreviations:

TVF: Turbulent Vortex Flow

WVF: Wavy Vortex Flow

MWVF: Modulated Wavy Vortex Flow

CWVF: Chaotic Wavy Vortex Flow

TTVF: Turbulent Taylor Vortex Flow

Symboles grecs :

Ω_1	Vitesse de rotation du cylindre intérieur	$m.s^{-1}$
Ω_2	Vitesse de rotation du cylindre extérieur	$m.s^{-1}$
θ	Composante cylindrique de la direction tangentielle	$m.s^{-1}$
μ	Viscosité dynamique	Pa.s
Γ	Rapport d'aspect	-
η	Rapport des rayons	-
δ	Jeu radial	-
Δ	le laplacien	-
ν	Viscosité cinématique	$m^2.s^{-1}$
ρ	Masse volumique	$kg.m^{-3}$
τ	Contrainte de cisaillement	MPa
ω	Vitesse angulaire	$m.s^{-1}$
γ	Coefficient de diffusion	$m^2.s^{-1}$
k	Longueur d'onde de l'écoulement	m
\vec{V}	Vecteur Vitesse $\vec{V}(u, v, w)$	m

I.1. Introduction :

Le forage d'un puits est suivi des opérations de tubage et de cimentation. Des descriptions détaillées de ces opérations sont données par Nguyen et Nelson. La cimentation (**figure I.1**) consiste en la mise en place d'un laitier de ciment approprié à une cote donnée du puits dans l'espace annulaire entre les tubes et la paroi rocheuse. En fait, un fluide intermédiaire « spacer » et le laitier de ciment sont injectés depuis la surface dans la partie centrale du tube. Les deux fluides remontent dans l'espace annulaire (entre le tube et la paroi rocheuse), déplaçant ainsi les boues de forage. Ces fluides sont imposés par les spécificités du puits. Par exemple, les fluides spacer sont principalement constitués d'eau ou d'huile. Ils contiennent des particules, des polymères, ont un comportement rhéologique complexe: ils sont rhéofluidifiants et possèdent une contrainte seuil d'écoulement. Les objectifs de cette opération sont multiples : la consolidation, l'isolation et le nettoyage du puits. La maîtrise de ce procédé, fondamental pour une exploitation durable et efficace du puits, passe par la connaissance de la structure du champ dynamique. Il s'agit donc du déplacement d'un fluide à seuil par un autre fluide à seuil. La qualité de déplacement des boues de forage est meilleure et le nettoyage des puits est plus efficace lorsque l'écoulement des fluides considérés est turbulent. Il est donc nécessaire de prédire le régime d'écoulement des fluides injectés. On est particulièrement intéressé par (i) les conditions critiques de transition et (ii) les caractéristiques de l'écoulement turbulent d'un fluide à seuil dans une conduite cylindrique et annulaire. La connaissance de la structure du champ thermique est tout aussi importante, dans la mesure où elle contrôle la prise du ciment dans l'espace annulaire. Le temps de prise du ciment est lié à sa température qui, elle-même, dépend du coefficient de transfert de chaleur entre le fluide et les parois en présence. Les objectifs du travail présenté dans ce rapport sont : (i) déterminer la structure de l'écoulement en régime laminaire, transitoire et turbulent en conduites cylindrique et annulaire, (ii) préciser les conditions critiques de transition, (iii) fournir des lois de perte de charge pour les trois régimes d'écoulement, et enfin, (iv) déterminer la répartition des températures et les coefficients de transfert de chaleur. Dans ce qui suit, une étude bibliographique sur les écoulements et la convection thermique pour des fluides à seuil est présentée afin de dégager les problèmes les plus pertinents et ainsi préciser la problématique scientifique de ce travail. En guise d'introduction à l'étude bibliographique, un paragraphe sur la rhéologie des fluides à seuil et les modèles utilisés est nécessaire [1].

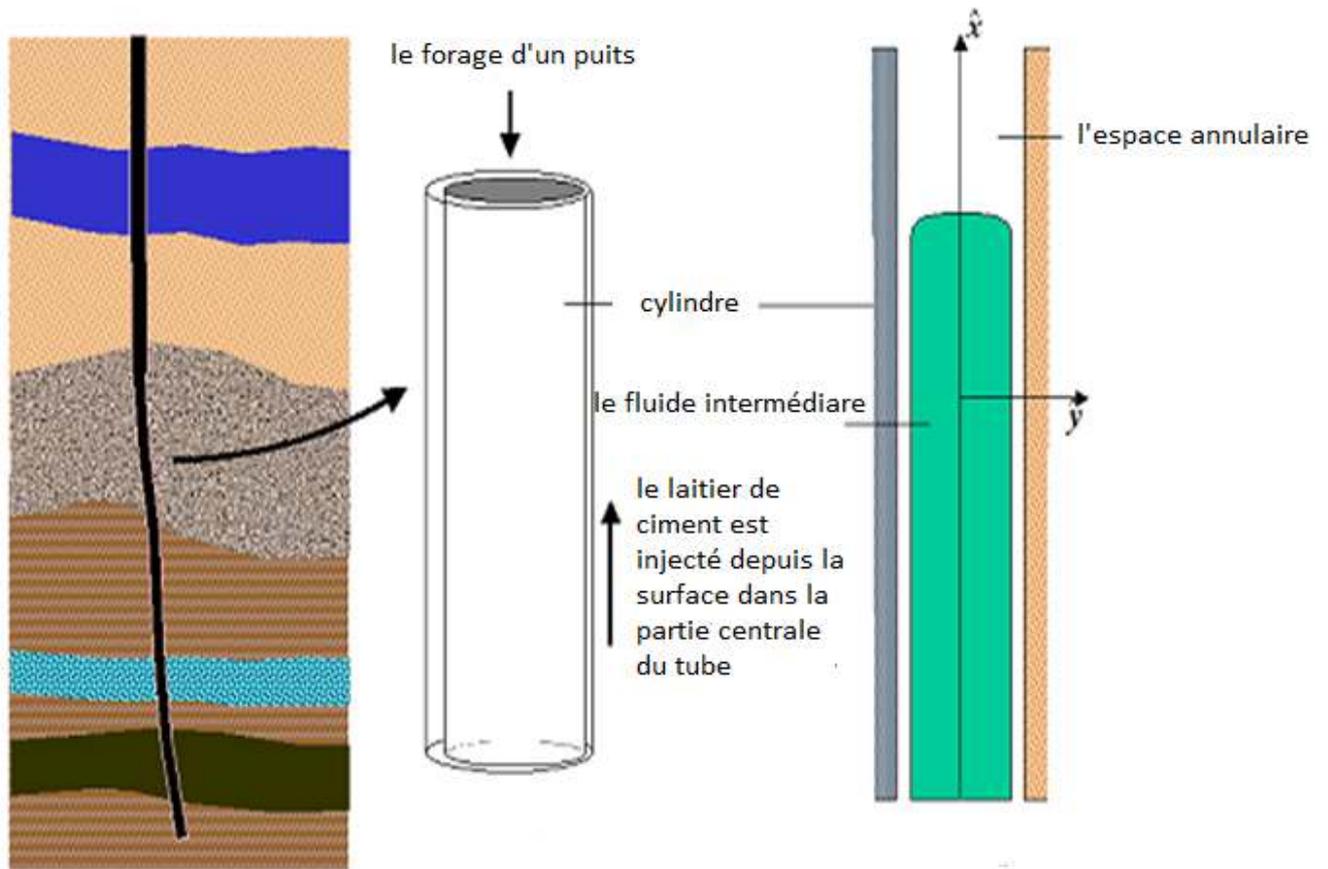


Fig.I.1Cimentation d'un puits [1].

I.2.Comportement Rhéologique :

I.2.1.Introduction:

La rhéologie (du grec rheo, couler et logos, étude) est l'étude de la déformation et de l'écoulement de la matière sous l'effet d'une contrainte appliquée. Le mot rheology (en anglais) a été introduit en 1928 par Eugene Bingham, professeur à l'université Lehigh aux États-Unis, sur une suggestion de son collègue Markus Reiner. Le mot est emprunté à la fameuse expression d'Héraclite d'Éphèse *Ta Panta Rei*, « Tout s'écoule ». Le mot a été francisé en « rhéologie » en 1943. Une espèce animale ou végétale « rhéophile » est une espèce aquatique qui vit dans le courant (mer, eau douce, torrents, estuaires). La rhéologie est l'étude des écoulements et des déformations, devant l'impuissance de la théorie d'élasticité et la mécanique de fluide (théorie élaborée au 19^{ème} siècle) à décrire et à expliquer les propriétés de matériaux aux comportements mal définis et intermédiaires entre celui du solide élastique parfait (où les contraintes sont proportionnelles aux déformations) et celui de fluide newtonien (où les contraintes sont proportionnelles aux vitesses de déformation), il est apparu nécessaire d'élaborer cette nouvelle discipline [2].

Le comportement rhéologique d'un fluide traduit la réponse mécanique de celui-ci, c'est-à-dire la relation entre les déformations du fluide et les contraintes appliquées. De manière générale, elle s'exprime par une équation constitutive reliant le tenseur des contraintes et le tenseur des taux de déformation. Il existe une grande variété de comportements rhéologiques, depuis une simple relation linéaire entre contraintes et taux de déformation, jusqu'à des comportements complexes, pouvant dépendre des vitesses de déformation, de l'histoire du fluide ou des conditions d'écoulement.

La loi d'Ostwald–de Waele permet, par exemple, de modéliser de manière simplifiée et dans certaines limites, le comportement des fluides newtoniens, rhéofluidifiants et rhéoépaississants [2].

I.2.2.Fluide Newtonien :

Chapitre 1 Les Fluides Newtoniens

C'est ainsi qu'Isaac Newton exprime de façon intuitive l'idée de viscosité pour un liquide visqueux dans son œuvre *Philosophiæ Naturalis Principia Mathematica* en **1726**.

Les vérifications expérimentales n'arrivent que bien plus tard, avec les travaux de Poiseuille en **1856** et de Couette en **1890**. L'équation de proportionnalité $\sigma = \eta \dot{\gamma}$ est ainsi vérifiée pour de nombreux liquides, que l'on qualifie alors de « newtonien ».

Un fluide newtonien est donc un fluide dont la viscosité ne varie pas suivant le gradient de vitesse.

Cela implique que :

- La viscosité de cisaillement η est indépendante du taux de cisaillement $\dot{\gamma}$.

-

Dans un écoulement de cisaillement simple, les seules contraintes créées par l'écoulement sont des contraintes de cisaillement σ .

-

La viscosité est indépendante du temps et les contraintes s'annulent immédiatement lorsque l'écoulement est arrêté. Si on reprend le cisaillement ultérieurement, la viscosité doit être la même que précédemment.

Un fluide est dit newtonien lorsque le tenseur des contraintes visqueuses est une fonction linéaire du tenseur des taux de déformation. Le facteur de proportionnalité se nomme viscosité, il est constant et indépendant du taux de cisaillement $\dot{\gamma}$. Pour

la plupart des fluides usuels [eau, lait, jus de fruits naturels (non concentrés), la plupart des miels, huiles minérales, solvants organiques, etc.] dans des conditions standards, ce modèle est très satisfaisant [3].

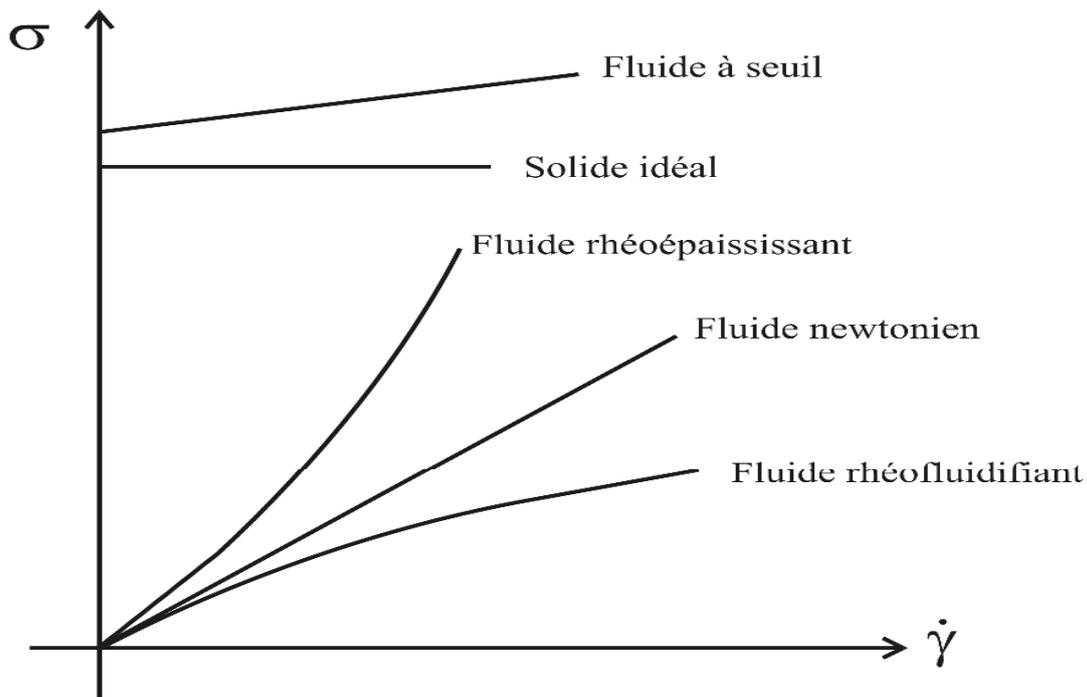


Fig.I.2 : courbes comportement des différents fluides [3]

La figure 2 représente la tenseur de contrainte visqueuse en fonction de tenseur des contraintes de déformation qui donnant des courbes de 2 modèles : fluide newtonien et l'autre non newtonien et ce dernier composantes de deux façon sont rhéoépaississant.

I.2. 3. Fluide Non Newtonien :

Un fluide est dit non newtonien lorsque le tenseur des contraintes visqueuses n'est pas une fonction linéaire du tenseur des taux de déformation. Autrement dit, lorsque sa vitesse de déformation (par exemple le taux de cisaillement) n'est pas directement proportionnelle à la force qu'on lui applique. Le meilleur exemple est celui du sable mouillé en bord de mer : quand on frappe le sable, il a la viscosité élevée d'un solide, alors que lorsqu'on appuie doucement dessus, il se comporte comme une pâte. Un autre exemple typique est un mélange épais d'eau et de *Maïzena* (féculé de maïs), dans lequel une main entre aisément à faible vitesse, mais ne peut rentrer à grande vitesse.

En rhéologie et de manière simple, un fluide non newtonien correspond à un fluide dont la viscosité η dépend du taux de cisaillement. Concrètement lorsqu'on soumet un tel matériau à une contrainte de cisaillement σ , la réponse de ce fluide n'est pas proportionnelle, ce qui serait le cas pour un fluide newtonien. Il existe plusieurs types classiques de fluide non newtonien. Ils ne sont d'ailleurs pas exclusifs l'un de l'autre, un fluide peut présenter plusieurs des propriétés présentes ci-dessous [3].



Fig.I.3.exemples des fluides Non Newtoniens(le miel et une crème)

I.2.2.1.Fluide pseudo plastique :

Pour des fluides tels les polymères en solution ou à l'état fondu, émulsions peu chargées, suspensions, dispersions (ex. : purée de fruits, moutarde), la viscosité diminue lorsque le gradient de vitesse augmente. Cela donne un système de plus en plus fluide, ce qui justifie le nom de « rhéofluidifiant ». La courbe d'écoulement (représentation graphique de $\sigma = f(\dot{\gamma})$) d'un corps pseudo plastique s'incurve vers le bas. Pour de très faibles et très élevées valeurs de $\dot{\gamma}$, le liquide est newtonien (ce qui est quasi universel), cela correspond aux 1^{er} et second domaines newtoniens, respectivement. À chacun de ces domaines est associée une viscosité constante appelée viscosité à cisaillement nul ou viscosité en écoulement continu (η_0), et viscosité infinie (η_∞), respectivement [3].

I.2.2.2.Fluide Rhéoépaississante :

Le comportement rhéoépaississant, inverse à la rhéofluidification, est assez rare. La viscosité augmente lorsque le taux de cisaillement augmente. Ce phénomène est nommé (en) dilatant ou shearthickening, (de) dilatanz. La courbe d'écoulement correspondante s'incurve vers le haut. On retrouve ce comportement pour des suspensions très

concentrées ou certains polymères associatifs (ex. : empois, certains miels et certaines formulations de plastisols, suspensions concentrées de fécule de maïs) [3].

I.2.2.3. Fluide à seuil ou viscoplastique :

Dans le cas du comportement (visco)plastique, l'écoulement n'a lieu qu'au-delà d'une certaine valeur de contrainte à appliquer sur le fluide, dite point de fluage, seuil d'écoulement, seuil de plasticité, contrainte critique ou contrainte seuil. Au-delà, on retrouve en général un comportement de type rhéofluidifiant. Quelques matériaux, tels la mayonnaise ou les boues de forage, ont cependant un comportement linéaire de type newtonien après leur seuil d'écoulement. On parle alors de fluide de Bingham. Le modèle de Bingham est $\sigma = \sigma_y + k\dot{\gamma}^n$ [3].

I.2.2.4. Fluide de Bingham :

Le fluide de Bingham est un modèle théorique de milieu viscoplastique qui correspond à un comportement de solide parfait sous faibles contraintes, et à un comportement de fluide visqueux au-delà d'une contrainte-seuil. Ce modèle porte le nom d'Eugène Bingham qui en a donné l'expression mathématique.

Ce modèle mathématique est d'emploi courant en génie pétrolier pour organiser le pompage des boues ou l'évacuation des rebuts. Un autre bon exemple est le dentifrice, qu'on ne peut extruder que moyennant l'application d'une certaine pression sur le tube, et qui se dépose comme un gel quasi-solide.

Pour présenter ses observations relatives (**Fig.I.2**) au comportement des peintures, a cherché à tracer le débit en fonction de la contrainte appliquée, ci-contre : il s'agit d'une comparaison du comportement d'un fluide de Bingham (fluide a seuil) avec un newtonien. Le diagramme s'interprète de la façon suivante : avec un liquide newtonien, l'augmentation de la pression d'entrée d'une conduite crée un champ de contrainte dans le fluide qui le met en mouvement (cisaillement), et le débit augmente en proportion de cet accroissement. Mais si la conduite est remplie d'un fluide de Bingham il faut que le cisaillement atteigne une certaine intensité, dite « contrainte d'écoulement », avant que le débit augmente avec la pression. Ces propriétés confèrent aux fluides de Bingham une texture crémeuse avec en surface des rides et des fronces, contrairement à la surface unie que présente tout fluide newtonien [3].

I.3. écoulement de Taylor – Couette :

I.3.1 Introduction :

L'un des problèmes les plus intéressants de la physique consiste en l'examen de la stabilité du régime établi du phénomène étudié. En tant que branche de la physique, la mécanique des fluides n'échappe pas à ce genre de problème.

En mécanique des fluides, le problème peut être présenté de la même manière, sachant qu'il n'existe que peu d'écoulements qui dérivent d'une fonction de forces ou du moins, la recherche de cette fonction de forces constitue un problème qui n'est pas trop complexe. La méthode plus générale consiste à écarter le système de sa position d'équilibre en le perturbant et étudier ensuite les effets de cette perturbation.

La notion de stabilité est très importante en mécanique des fluides pour les flux de fluides visqueux. Cette notion est basée sur l'amplification ou non de perturbations introduites dans le flux.

En effet, si une perturbation est introduite dans le flux de fluide visqueux, nous pouvons avoir deux cas :

1. la perturbation peut croître moins dans le temps: l'écoulement est dit **stable**
2. la perturbation peut se développer dans le temps: l'écoulement est dit **instable** et des instabilités peuvent apparaître et entraîner des turbulences.

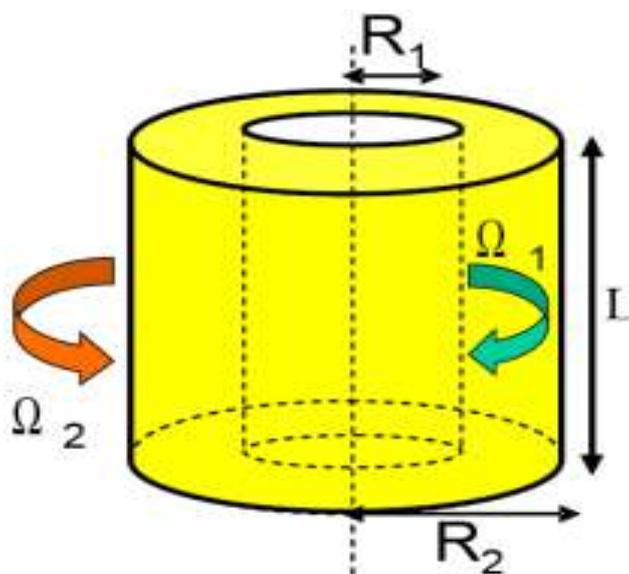


Fig.I.4.: Ecoulement de Taylor Couette

Chapitre 1 Les Fluides Newtoniens

L'écoulement de Taylor-Couette est la version cylindrique de l'écoulement de Couette plan. C'est un écoulement cisailé, entre deux cylindres coaxiaux tournants, disposés verticalement, (**Fig.I.5.**) Les cylindres sont indépendants et peuvent tourner individuellement ou simultanément. D'ailleurs, les trois cas de rotation : contre-rotation, cylindre interne fixe , cylindre externe fixe correspondent à trois régimes d'écoulement différents, excepté à très grandes valeurs de vitesse de rotation [4].

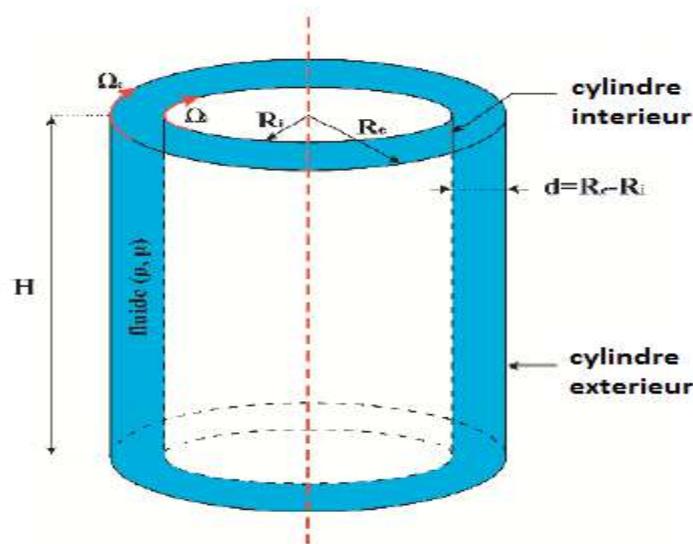


Fig.I.5.: Ecoulement de Taylor Couette

Cet écoulement de Taylor-Couette est un cas d'école pour l'étude des instabilités hydrodynamiques et de la transition vers la turbulence. Pour de faibles vitesses angulaires, l'écoulement de base est stationnaire, axisymétrique et invariant par translation verticale (**fig.I.6.a**). Au-delà d'une valeur seuil, on observe que cet écoulement de base devient instable, et il apparaît un motif de rouleaux toriques contrarotatifs qui s'étendent tout autour du cylindre (**fig.I.6.b**) ; l'écoulement reste toujours axisymétrique et stationnaire, mais cette fois la symétrie de translation verticale disparaît (elle est brisée). Si l'on continue à augmenter les vitesses en jeu, une deuxième instabilité apparaît et baisse encore la symétrie de l'écoulement[13].

Les rouleaux décrits plus hauts se mettent à osciller périodiquement (**fig.I.6.c**). En continuant à augmenter les vitesses on fait perdre à l'écoulement toute symétrie et on obtient un écoulement turbulent (**fig.I.6.d**) [5].

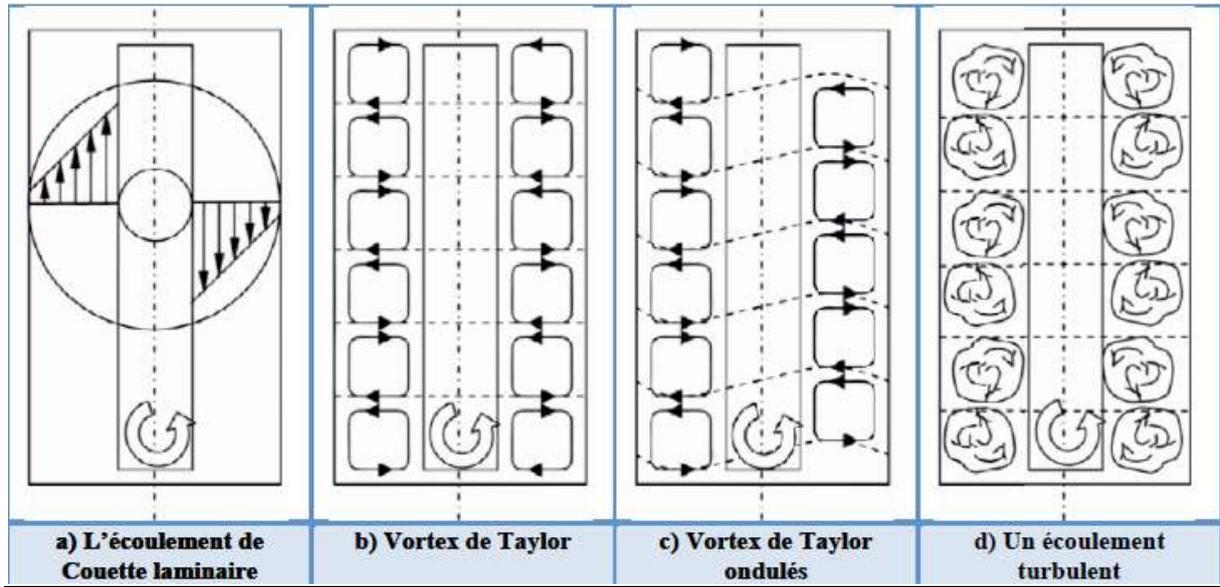


Fig.I.6: Différentes structures de l'écoulement de Taylor-Couette [5].

I.3.2 Cas d'un fluide non visqueux (critère de Rayleigh):

Sur la base d'un raisonnement euristique, Rayleigh établit son célèbre critère de stabilité. Considérons un fluide non visqueux en rotation dans une cavité cylindrique infiniment longue, et supposons que la distribution vitesse-pression est purement radiale : $\Psi = (0, V\theta(r) = r\Omega(r), 0, p(r))$. Une particule fluide, située à la distance r_1 de l'axe de rotation, subit la force centrifuge $\rho r_2 \Omega^2(r_2)$. L'ensemble des particules fluides, éjectées vers l'extérieur, exercent alors une pression plus grande près de la paroi extérieure que près de l'axe de rotation, induisant, à travers la cavité, un gradient de pression centripète (**Fig. I.4**). Lorsque l'écoulement est stable, les forces centrifuge et centripète qui s'exercent sur la particule fluide se compensent [6], [13]:

$$\left. \frac{\partial p}{\partial r} \right|_{r=r_2} = \rho \frac{v_\theta^2}{r_2} = \rho r_2 \Omega_2^2 \quad \text{I.1}$$

Supposons à présent que la même particule fluide subit un léger déplacement vers une nouvelle position $r_2 > r_1$. En l'absence de dissipation visqueuse, son moment cinétique est conservé, ce qui s'écrit :

$$r_1^2 \Omega_1 = r_2^2 \Omega_2 \quad \text{I.2}$$

Chapitre 1 Les Fluides Newtoniens

Où Ω_1 est la nouvelle vitesse de la particule à la position r_1 . La particule subit à présent une force centrifuge $\rho r_1^2 \Omega_1$. Cependant, le gradient de pression environnant est égal à $\rho r_1 \Omega^2(r_1)$. Si ce gradient est supérieur à la nouvelle force centrifuge de la particule, cette dernière est repoussée vers sa position initiale r_2 l'écoulement est **stable**. **A contrario**, s'il est plus petit, la particule continuera son mouvement vers l'extérieur : l'écoulement est **instable**. La condition de stabilité peut donc s'écrire [6]:

Soit encore :

$$\frac{\partial}{\partial r}(r^2 \Omega(r)) \geq 0 \quad \text{I.3}$$

Le cylindre interne (1, pour « in ») étant caractérisé par son rayon r_1 et sa vitesse de rotation Ω_1 , le cylindre externe (2, pour « out ») par son rayon r_2 et sa vitesse Ω_2 . Les cylindres peuvent tourner dans le même sens (**co-rotation**), ou en sens opposé (**contra-rotation**). Si l'un des deux cylindres est immobile, le système est dit **rotor-stator**. Appliqué à la distribution de vitesse (I.6), le critère de Rayleigh donne : $\Omega^3 \eta$, où $\Omega = \Omega_2 / \Omega_1$ et $\eta = r_1 / r_2$ (η est appelé **rapport des rayons**). En configuration rotor-stator, l'écoulement est stable si $\Omega_1 = 0$ et $\Omega_2 \neq 0$, $\forall \Omega_2$ (configuration stator interne, rotor externe, noté S₁-R₂), et instable si $\Omega_2 = 0$ et $\Omega_1 \neq 0$, $\forall \Omega_1$ (rotor interne/stator externe, noté R₂-S₁) Il suffit donc, selon ce modèle, que le cylindre interne tourne à n'importe quelle vitesse angulaire pour générer une situation d'instabilité [13].

Lorsque les cylindres tournent en sens opposés (contra rotation), il existe un rayon r_c^* pour lequel la vitesse angulaire s'annule ; ce rayon sépare deux couches de fluide tournant en sens contraire (Fig.II-3-c). La portion de cavité comprise entre le cylindre interne et la surface cylindrique de rayon r_2 est assimilable à un système R₁-S₂, instable donc, nous venons de le voir, $\forall \Omega_1$. Le modèle prédit par conséquent que la situation contrarotative est **toujours instable** [13].

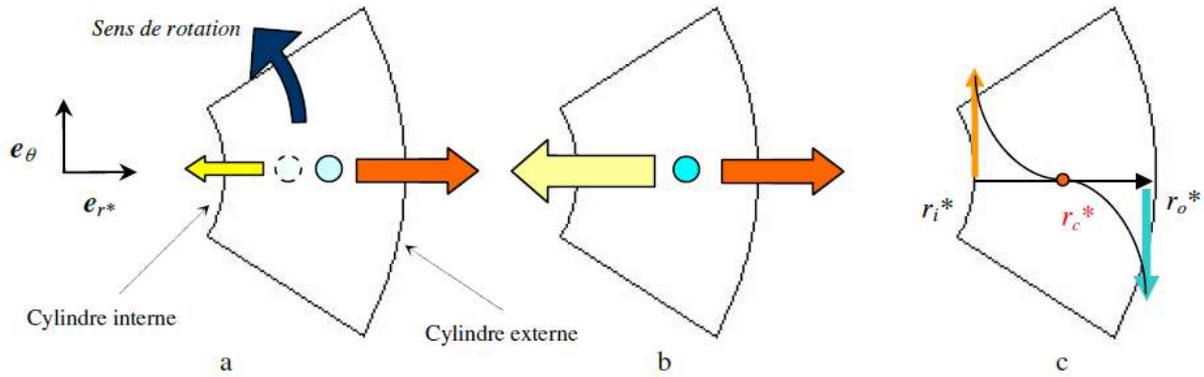


Fig.I.7 : Mécanisme de l'instabilité centrifuge (les schémas représentent une vue de dessus d'une section cylindrique du système inter-cylindre) : **a**) la particule est déplacée depuis sa position initiale (en pointillés) jusqu'à la position bleue ; si la force d'inertie qu'elle conserve (en rouge) est plus grande que le gradient de pression ambiant, elle continue son déplacement : la position est instable ; **b**) si le gradient de pression est plus grand que la force d'inertie de la particule, celle-ci revient à sa position initiale : le système est stable ; **c**) profil radial de la vitesse azimutale en régime contrarotatif : $V_{\theta s}$ s'annule en $r = r_c^*$, la zone comprise entre $r = r_i$ et $r = r_c^*$ est instable [6].

Des résultats postérieurs à la modélisation de Rayleigh vont cependant en montrer les limites : négligée dans le bilan des forces, la viscosité contribue en fait à dissiper une part de l'énergie de la particule fluide, ce qui ne conserve pas le moment cinétique et retarde l'apparition de l'instabilité centrifuge. Ce n'est donc qu'à partir d'une certaine vitesse de rotation du cylindre que cette instabilité peut se développer [13].

I.3.3 cas d'un fluide visqueux :

Les équations régissant la dynamique d'un fluide visqueux furent établies par Claude Navier (1823) et George Stokes (1845). L'introduction de la notion de viscosité (notée ν) rendit nécessaire la mise au point d'appareils capables de la mesurer le plus précisément possible (Donnelly) [9].

En 1881 à Vienne, l'Autro-hongrois Max Mergules proposa un modèle de viscosimètre constitué de deux cylindres concentriques (Meyer-Späche). En 1890, le Français Maurice Couette reprit cette technique et mesura la viscosité de l'eau au moyen d'un appareil de type $S_1 - R_2$ (voir **Fig. I.7-a**). Il remarqua que la mesure de la viscosité demeurait constante pour de faibles vitesses de rotation, puis changeait brusquement au-delà d'un certain seuil critique. Couette attribua ce comportement à l'apparition d'un régime turbulent [13].

Chapitre 1 Les Fluides Newtoniens

Indépendamment, en Anglais, Mallock mener des expérimentations similaires à celle de Couette (1888, 1896), en étendant son étude à la configuration $R_1 - S_2$ (**Fig. I.7-b**). Dans ce dernier cas, ses résultats mirent en évidence un régime instable quelles que furent les vitesses de rotation qu'il utilisa, ce qui était en totale adéquation avec le critère de Rayleigh. Mais dans le cas S_1-R_2 , il trouva des seuils de stabilité, ce qui contredisait le critère.

En 1923, dans un article fondateur, Taylor reprit les résultats de Mallock en combinant approche théorique et approche expérimentale. Par une étude de stabilité linéaire du fluide visqueux (linéarisation des équations de Navier- Stokes par méthode des petites perturbations autour d'un écoulement de base, en supposant les cylindres de longueur infinie), Taylor montra que le profil de Couette, valable pour de faibles vitesses de rotation, se révélait instable face à de petites perturbations axisymétriques au delà de certains seuils de rotation : il prouva l'existence d'un seuil de transition dans le cas R_1-S_2 (à l'inverse des résultats de Mallock qui n'en trouva pas); quant à la configuration S_1-R_2 , elle devait rester stable dans tous les cas (contrairement aux observations de Couette et Mallock). Comment dès lors interpréter les résultats de Couette et Mallock ? [13].

Taylor suggéra une liste de sources d'erreur dans le dispositif de Mallock. D'une part, une rigiditéinsuffisante du système était susceptible d'engendrer des vibrations parasites. D'autre part, le rapport $G = H/d$ (**rapport d'aspect**) entre la hauteur des cylindres H et l'épaisseur de la couche de fluide entre les cylindres $d = R_2 - R_1$ ne devait pas être trop petit, sinon les effets des parois terminales (qui limitent la cavité en haut et en bas) pouvaient perturber les zones de mesure. Mallock était déjà conscient de ces effets de bord, au point qu'il inclut des couches de mercure en guise de paroi inférieure, pour tenter de supprimer le frottement du fluide sur la paroi et les vortex engendrés par ces frottements; malgré tout, cette précaution était insuffisante pour les limiter. Taylor conçut un dispositif de grand rapport d'aspect pour réduire au maximum l'influence des effets des bords au centre du système (et se rapprocher ainsi de l'hypothèse de cylindres infiniment longs qu'il avait supposée dans son analyse théorique); en outre, l'appareillage fut solidement arrimé aux murs du laboratoire afin de supprimer les vibrations (**Fig. I.7- c**)[6].

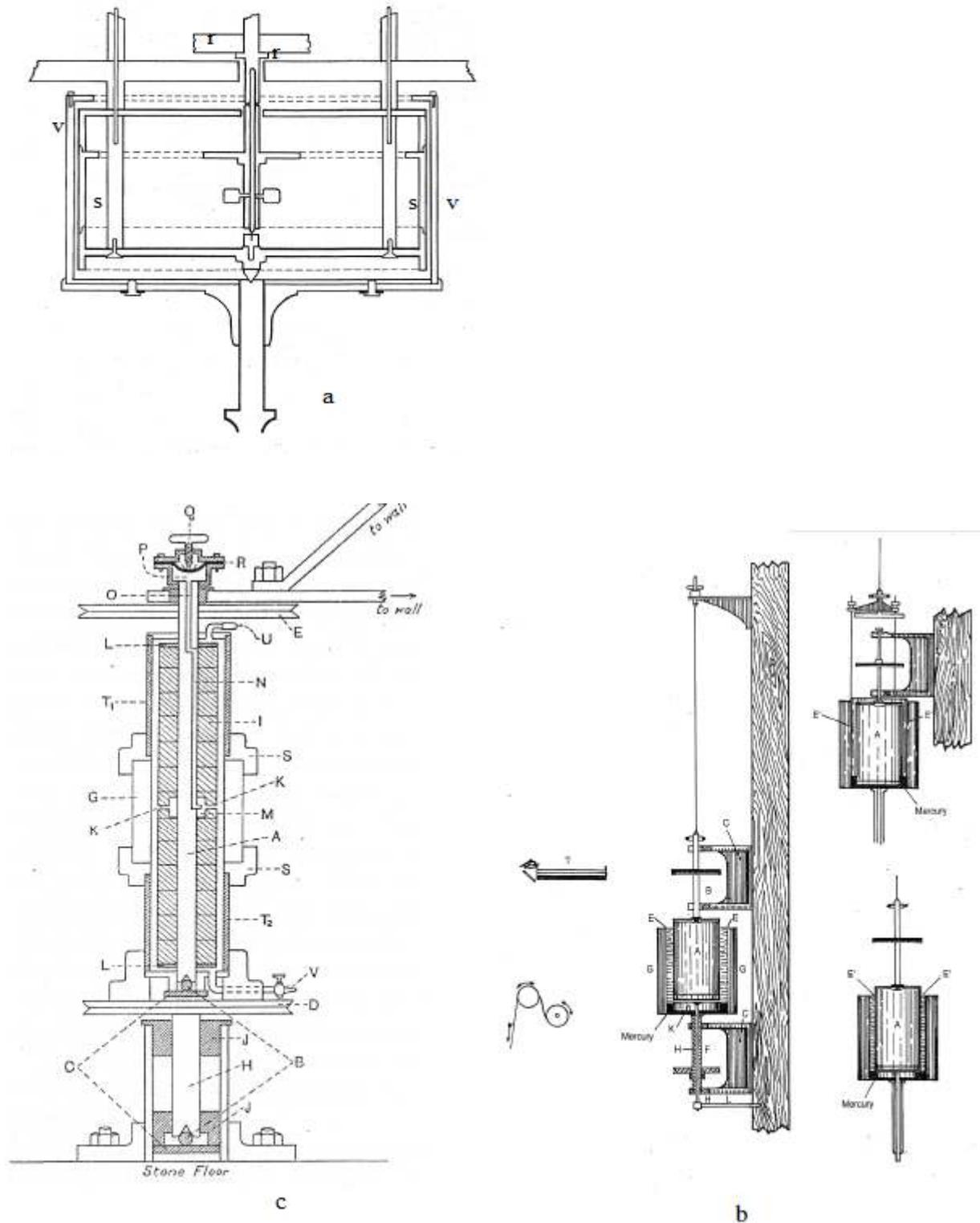


Fig. I.8– Quelques schémas techniques : a)viscosimètre de Couette : la rotation du cylindre extérieur « v » entraîne par viscosité le cylindre « s », suspendu par un fil de torsion « r »; la déviation correspondante, mesurée en « r », donne une mesure du couple exercé sur « s » par le fluide. En supposant que l'écoulement entre « s » et « v » suit le profil de Couette (qui est une solution analytique des équations de Navier- Stokes), le couple C s'écrit : $C =$

Chapitre 1 Les Fluides Newtoniens

$4\pi h r_1 \nu \Omega_2 / (1 - \eta^2)$, où h est la hauteur de « s » en contact avec le fluide; on peut donc déduire de cette formule la viscosité ν . b) Viscosimètres de Mallock, basé sur le même principe : configurations S_1-R_2 (à gauche, et en bas à droite) et R_1-S_2 (en haut à droite). c) Dispositif expérimental de Taylor [6].

Au final, Taylor obtint une très bonne concordance entre les courbes de transition théoriques et les courbes de transition expérimentales (**Fig. I.7**). Taylor reporta sur ses graphes le critère de Rayleigh (en pointillés sur la **Fig. I.7**). On peut noter que dans le cas de cylindres Co-rotation, le critère de Rayleigh correspond à une asymptote de la courbe de stabilité, ce qui n'est pas du tout le cas pour des cylindres contrarotatifs[13].

Si les effets de bords et les vibrations parasites étaient, comme le suggérait Taylor, susceptibles d'expliquer les conclusions erronées de Mallock dans la configuration S_1-R_2 , il apparut rétrospectivement que la plus petite des vitesses de rotation utilisée par Mallock lors de ses mesures en R_1-S_2 (2 tours / min) se situait, compte tenu du rapport de rayons du dispositif et de la viscosité du fluide utilisé, au-dessus du seuil de transition de l'instabilité centrifuge... Mallock ne s'est ainsi jamais trouvé en situation de pouvoir observer le régime stable (Donnelly)[9].

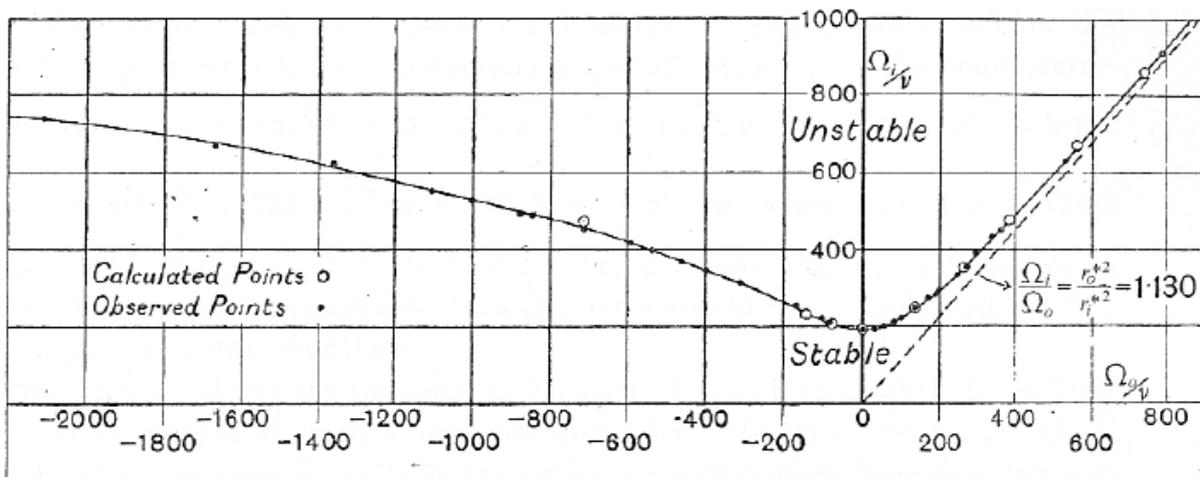


Fig.I.9- Diagramme de stabilité de l'écoulement de Couette dans le plan $(\Omega_2/\nu, \Omega_1/\nu)$, $\eta = r_2/r_1 = 0.9418$ (d'après Taylor); Ω_1 est la vitesse de rotation du cylindre intérieur, Ω_2 celle du cylindre extérieur. En pointillés, la droite de stabilité donnée par le critère de Rayleigh [6].

I.4. Différents régimes de l'écoulement de Taylor Couette :

L'écoulement de Taylor Couette est l'écoulement de fluide contenu entre deux cylindres coaxiaux de rayon R_1 pour le cylindre intérieur et R_2 pour le cylindre extérieur, lorsque ces cylindres sont mis en rotation (**Fig.II.5.**) aux vitesses angulaires respectives Ω_1 et Ω_2 . Les paramètres géométriques utilisés généralement pour caractériser les dispositifs étudiés sont :

$$\text{rapport entre les rayons : } \eta = R_1/R_2. \quad \text{II.4}$$

$$\text{et le rapport d'aspect : } \Gamma = \frac{H}{(R_2 - R_1)} \quad \text{II.5}$$

$$\text{et la distance entre les deux cylindres } d = R_2 - R_1 \quad \text{II.6}$$

η permet alors de quantifier l'importance de la courbure de la géométrie, tandis que Γ quantifie la hauteur relative du dispositif et caractérise l'influence des effets de bord.

L'écoulement de Taylor-Couette présente la particularité de voir différents régimes se développer. Si l'on considère dans un premier temps le cas des très faibles vitesses de rotation, on observe que l'écoulement reste invariant dans la direction axiale z et dans la direction azimutale θ , et qu'il est stationnaire. L'écoulement de Couette cylindrique répondant à ces hypothèses peut être calculé analytiquement en résolvant les équations de Navier Stokes [13].

I.4.1 Notion de paramètres de contrôle :

Il s'agit essentiellement de deux paramètres d'influence régissant l'écoulement:

a) Nombre de Reynolds :

Le nombre de Reynolds est défini par le rapport suivant: $Re = \frac{V_1 d}{\nu}$ II.7

Où V_1 désigne : La vitesse du cylindre intérieur tournant : $V_1 = R_1 \Omega_1$ II.8

ν : Viscosité cinématique : $\nu = \frac{\mu}{\rho}$ II.9

Ce nombre compare la prépondérance des effets des deux forces, l'une stabilisante qui est la force visqueuse et, l'autre, déstabilisante est imposée par la force centrifuge [6].

b) Nombre de Taylor :

Il est souvent utilisé comme un nombre caractéristique de la géométrie cylindrique liée aux systèmes tournants. Il apparaît comme une combinaison du nombre de Reynolds Re et du facteur géométrique $= \frac{d}{R_1}$. Ainsi, le nombre de Taylor Ta de l'écoulement apparaît comme le rapport entre deux temps caractéristiques:

$$Ta = \frac{\tau_s}{\tau_{des}} \text{II.10}$$

Où $\tau_s = t_d = \frac{d^2}{\nu}$ indique le temps de la diffusion visqueuse dû au transfert de vorticité sur la distance d (temps de stabilisation).

τ_{des} est le temps caractéristique d'advection du fluide sous l'action de la force centrifuge sur une distance d dans la direction radiale (temps de déstabilisation).

Ainsi, cette dernière peut être évaluée à partir de la loi fondamentale de la dynamique exprimant la force centrifuge exercée sur une particule dans la direction radiale telle que :

$$m \frac{d^2 r}{dt^2} = m \frac{V_1^2}{r} \quad \text{II.11}$$

En faisant apparaître les caractéristiques temporelles et spatiales de la vitesse V_1 exprimées à l'aide de τ_{des} et d dans (1.19) on a :

$$\frac{d}{\tau_{des}^2} = \frac{V_1^2}{R_1} \quad \text{II.12}$$

Dès lors le paramètre de contrôle pour les géométries courbes donné par (I.11) peut être évalué en fonction des caractéristiques de l'écoulement [10]:

$$Ta = \frac{V_1 d}{\nu} \sqrt{d/R_1} = Re \sqrt{d/R_1}$$

Qui permet d'indiquer selon les valeurs du jeu radial $\delta = d/R_1$ les principaux domaines de l'écoulement.

En fait, ce résultat est surtout valable dans le cas du petit espace annulaire ($d/R_1 \ll 1$) [6].

I.4.2. Régime laminaire stable :

Pour de faibles vitesses de rotation, le fluide est animé d'un mouvement dans la direction tangentielle θ (fig. I.7). L'écoulement de base est stable, stationnaire, axisymétrique et invariant par translation verticale. Il est possible de déterminer la solution analytique d'un tel écoulement [11]:

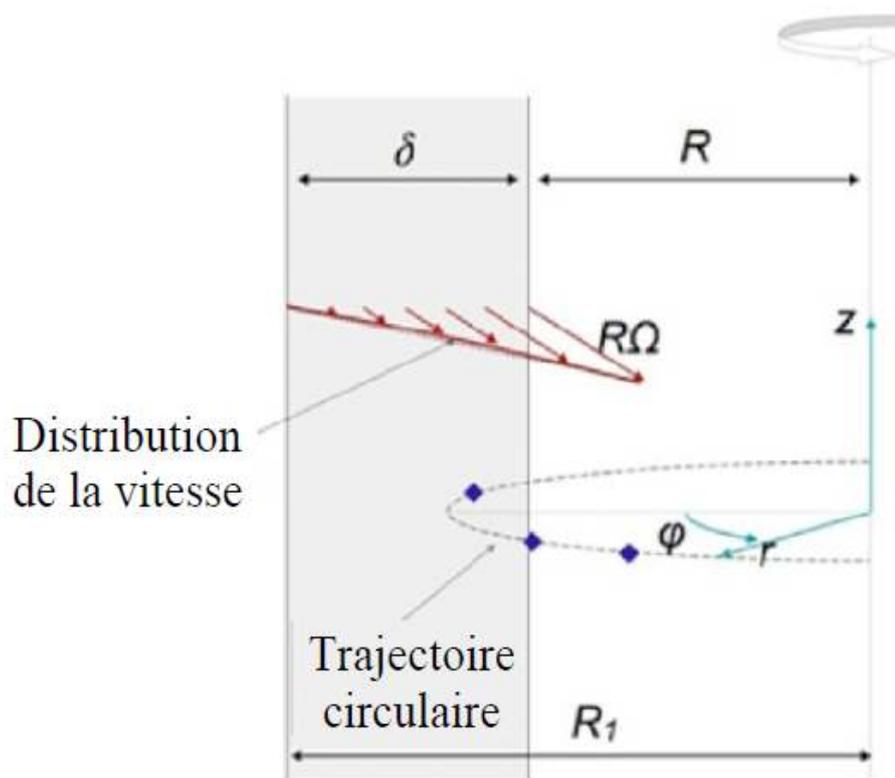


Fig.I.10: Représentation schématique de l'écoulement de Couette laminaire

Dans un système réel où la longueur des cylindres est finie, cet écoulement est modifié par le pompage d'Ekman en haut et en bas des cylindres qui introduit une circulation non azimutale sous la forme de faibles vortex horizontaux [11]

I.4.3 Régime laminaire perturbé ou instable :

Il comporte plusieurs régimes d'instabilités qu'on peut recenser comme suit :

a) Première instabilité (instabilité de Couette Taylor) :

En étudiant l'écoulement d'un fluide entre deux cylindres coaxiaux en rotation (écoulement de Couette) dont, le cylindre extérieur est fixe, le cylindre intérieur tourne à une vitesse Ω_1 et à certaines valeurs de Ω_1 , R_1 et R_2 il est observé des trajectoires d'ondes circulaires, l'apparition de ces formes circulaires est caractérisée par le paramètre du nombre de Taylor. Cette onde correspond à l'onde axiale ou cellules de Taylor.

G. I. Taylor [7] a montré en 1923, théoriquement et il a confirmé expérimentalement que le régime laminaire de base devient instable pour une valeur critique de la vitesse de rotation du

Chapitre 1 Les Fluides Newtoniens

cylindre intérieur correspondant à une valeur critique de nombre de Taylor ($Tac = 41.2$, et expérimentalement $Tac = 41.32$).

Par la suite, ce même résultat a été vérifié théoriquement par R.C Dijkstra $Tc1=41.61$ et ensuite par S. Chandrasekhar $Tc1 = 41.41$ à l'aide de deux méthodes de calculs différentes.

A partir de la valeur $Ta=Tc1$, le liquide s'organise en un empilement de tourbillons toriques contra-rotatifs qui occupent la largeur de l'espace annulaire d et se propagent suivant l'axe z . Ce type de configuration cellulaire est appelé vortex de Taylor ou perturbation axisymétrique qui reste stable dans la gamme du nombre de Taylor : $41,2 \leq Ta \leq 48$. [11]

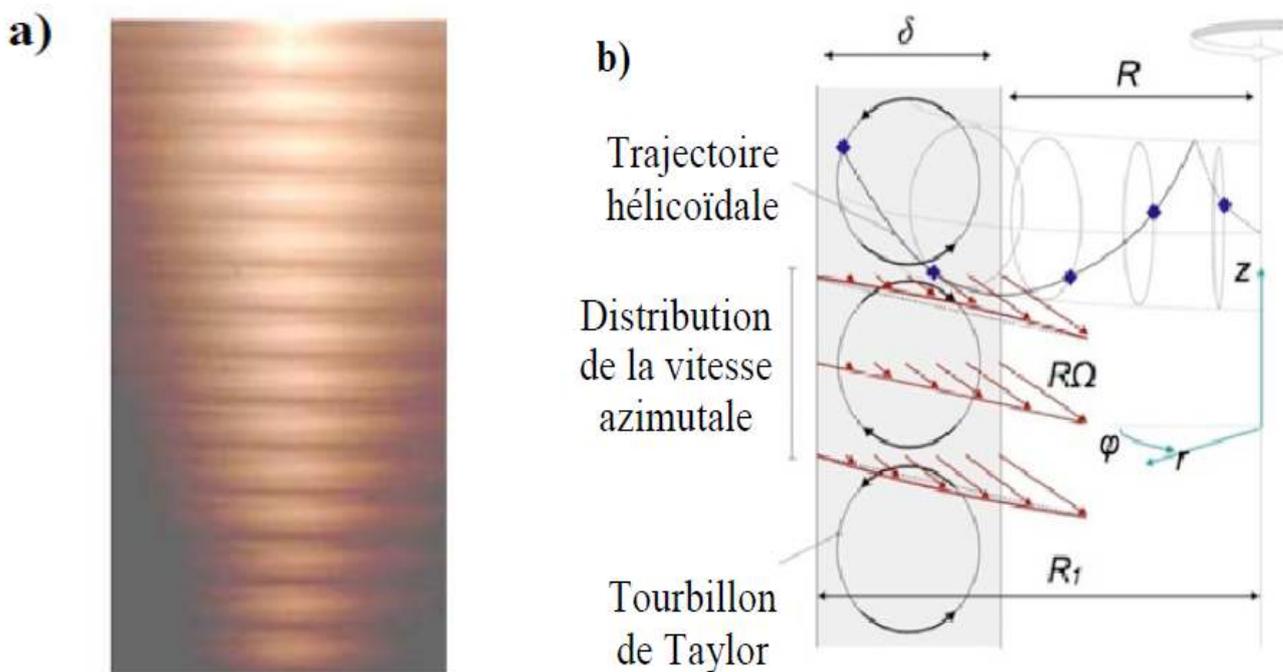


Fig.I.11 : Représentation de la première instabilité (TVF) [7]

a) Visualisation expérimentale de TVF, b) Représentation schématique de TVF [12]

b) deuxième instabilité :

En augmentant encore la vitesse de rotation, il apparaît pour un nombre de Reynolds critique $Rec2$, un mouvement comportant des tourbillons ondulés en direction azimuthale. Il s'agit de l'onde azimuthale qui se propage dans la direction angulaire (θ) avec une fréquence d'oscillation ω qui donne lieu à un système d'ondes instationnaire se superposant aux cellules de Taylor.

L'ensemble de l'écoulement est décrit selon un mouvement secondaire doublement périodique en z et θ . Ce système d'ondes est caractérisé par un nombre d'onde axiale n et un nombre d'onde azimuthal m . Ainsi D. Coles a montré que ce régime présente plusieurs états

stables pour une même valeur de nombre de Taylor et chaque état est identifié par le couple (n,m) caractérisant ce qu'on appelle « non – unicité de l'écoulement ».

En outre il montre que lorsqu'on augmente ou l'on diminue Re , le mouvement peut changer de manière discontinue et irréversible. En particulier, D. Coles retrouve le phénomène d'hystérésis de l'écoulement de Taylor Couette. Ce dernier mentionne également que l'onde axiale ou cellules de Taylor persiste en turbulence complètement développée [12]

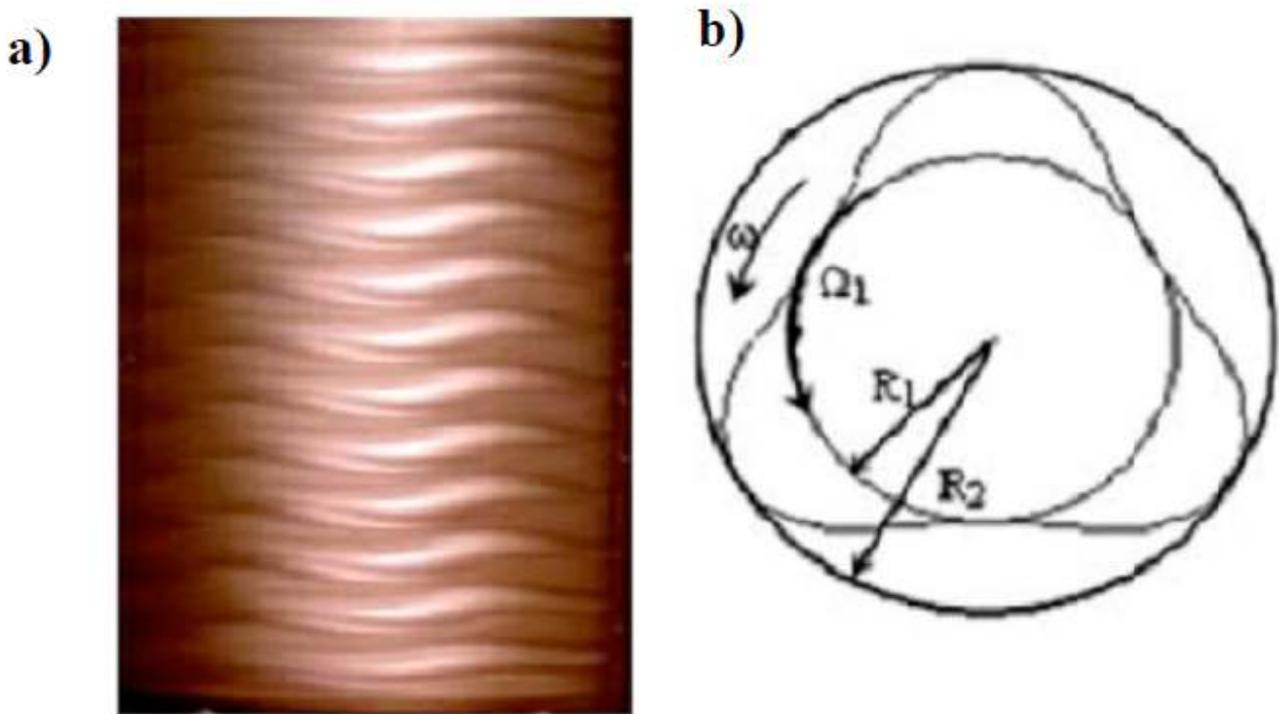


Fig.I.12 : Représentation de la deuxième instabilité (WVF) [7]

a) Visualisation de wavy mode, b) structure ondulatoire pour mode $m = 3$

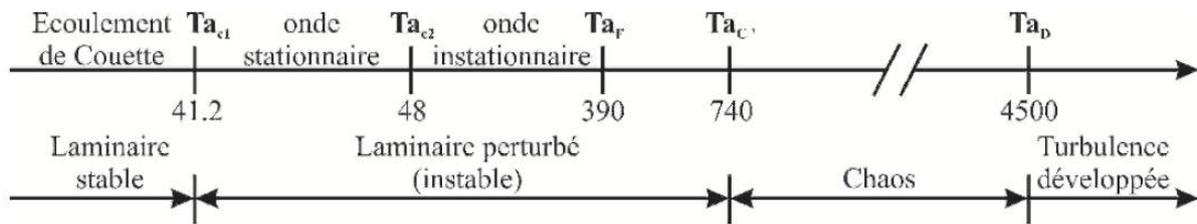
I.4.4 Régime de pré turbulence ou chaos :

Au-delà de $Tc_2 = 48$, l'écoulement se complique et il apparaît très vite que la prévision des états d'instabilités ultérieures à l'onde azimutale devient quasi inextricable et le mouvement devient de plus en plus complexes et le régime de fluctuation s'installe à $Ta \approx 400$.

Le régime chaotique ou pré turbulent s'établit avec la disparition l'onde azimutale vers $Ta \approx 740$. Au-delà de cette valeur, on observe l'établissement de la turbulence complètement développée à $Ta=4500$ qui est elle-même marquée par la persistance de l'onde axiale qui se maintient toujours malgré la vitesse de rotation très élevée imposée sur le cylindre intérieur.

Les différents régimes de transition sont résumés dans le diagramme suivant à l'aide du nombre de Taylor Ta lui (J. J Stuart) [12].

Chapitre 1 Les Fluides Newtoniens



$0 \leq Ta \leq Ta_{c1}$: Ecoulement circulaire de couette.

$Ta = Ta_{c1}$: Apparition de l'onde axiale stationnaire (cellules de Taylor).

$Ta = Ta_{c2}$: Apparition de l'onde azimutale instationnaire (wavy mode).

$Ta = Ta_F$: Apparition des fluctuations Chaotiques (fréquence à spectre large).

$Ta = Ta_{C'}$: Disparition de l'onde azimutale.

$Ta = Ta_D$: Disparition des fréquences à spectre large.

$Ta \geq Ta_D$: Régime de turbulence développée

Dans le cas général où les vitesses Ω_1 et Ω_2 varient de façon quelconque, la prévision des instabilités en milieu visqueux a été synthétisée expérimentalement par Andereck et al. sous la forme d'un diagramme (fig. I.9) dans le plan des nombres de Reynolds.[11]

Avec :

$$Re_1 = \frac{R_1 \Omega_1 d}{\nu} \text{ et } Re_2 = \frac{R_2 \Omega_2 d}{\nu}$$

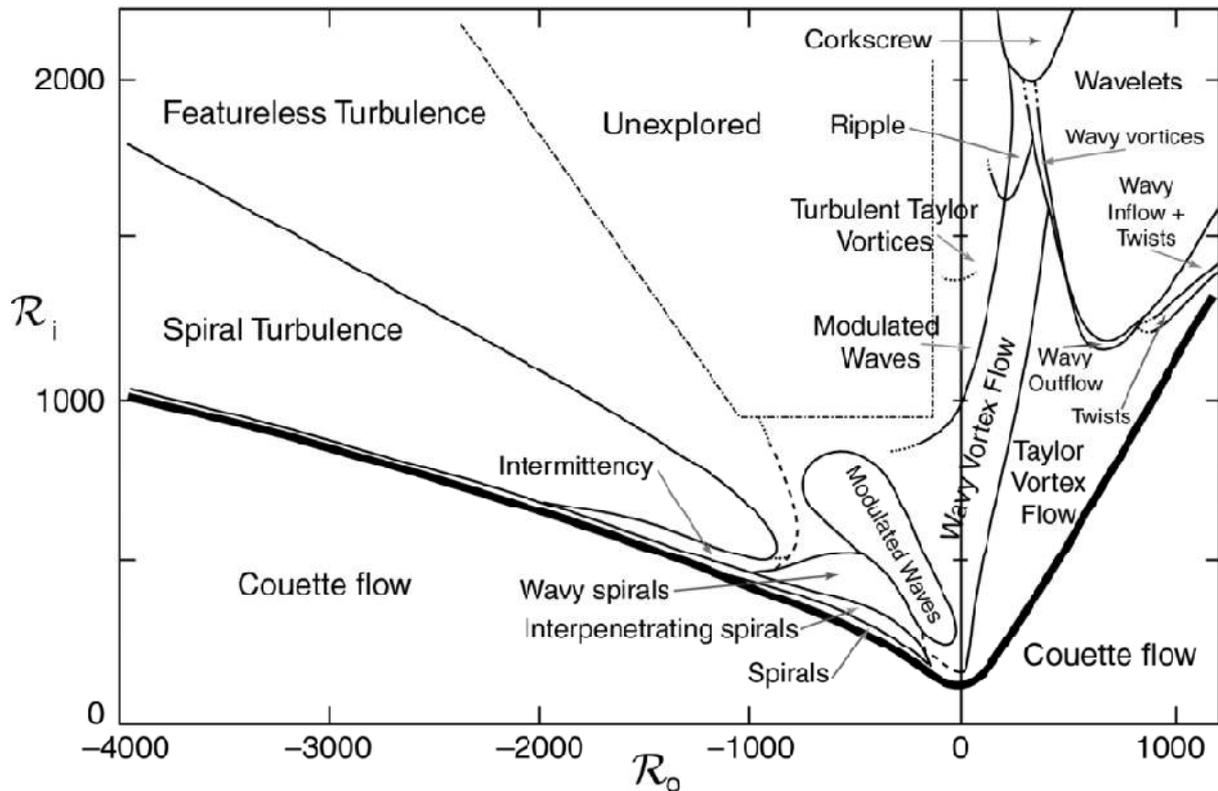


Fig.I.13 Diagramme des états observés dans un écoulement de Taylor-Couette en Co- ou Contra-rotation (d'après D.J. Triton)[12]

I.5. Synthèse de l'étude bibliographique :

L'écoulement de Taylor-Couette tient une place importante dans l'histoire de la dynamique des fluides. C'est en effet le premier cas d'écoulement pour lequel l'analyse de stabilité fut confirmée par une expérience de laboratoire (Taylor 1923[7]).

La première référence enregistrée concernant cet écoulement, remonte au 17^{ème} siècle ; il s'agit de l'étude effectuée par NEWTON en 1786. Il fut le premier qui remarqua la symétrie de ce mouvement et supposa l'aspect concentrique des lignes de courant. Plus tard, en 1848 STOKES a prévu la formation des tourbillons au sein d'un tel écoulement, lorsque le cylindre intérieur tourne avec une vitesse plus grande que celle du cylindre extérieur. Il a aussi proposé l'utilisation des grains pour visualiser l'écoulement et confirmer ses hypothèses.

En 1881, MARGULSE a prouvé que ce type d'écoulement pourrait être utilisé pour mesurer la viscosité des fluides, et autour de 1888 MALLOCK a construit un viscosimètre avec deux cylindres coaxiaux tournants. Il a remarqué que l'écoulement est toujours instable lorsque le cylindre intérieur tourne plus vite que le cylindre extérieur. Mais quand le cylindre intérieur est maintenu fixe, l'écoulement est stable jusqu'à une valeur critique de la vitesse de rotation

Chapitre 1 Les Fluides Newtoniens

du cylindre extérieur, au-delà de laquelle la turbulence se déclenche. Dans la même période, COUETTE a fabriqué un viscosimètre à cylindre intérieur fixe (connu aujourd'hui sous le nom de viscosimètre de COUETTE). Loin des parois horizontales l'écoulement est circulaire et obéit à la loi suivante : $V_{\theta}(r)=Ar +B/r$. Par la mesure du couple résistant appliqué sur l'un des deux cylindres, on peut ainsi remonter à la viscosité du fluide. COUETTE a remarqué que, contrairement au cas de la rotation du cylindre extérieur, le domaine de validité de sa solution est beaucoup moins étendu lorsque le cylindre intérieur tourne dans une gamme de vitesse croissante à partir du repos. Les travaux de MALLOCK et ceux de COUETTE ont été axés sur la mesure de viscosité valable seulement pour le cas laminaire. Néanmoins, ils furent les premiers à observer le début des instabilités dues à l'augmentation de la vitesse de rotation de l'un des cylindres.

La première attention donnée à la possibilité de l'instabilité hydrodynamique dans l'écoulement de COUETTE a été faite par Lord RAYLEIGH [1917]. Il a justifié ultérieurement les remarques de COUETTE et MALLOCK pour le cas non visqueux. A partir de son critère déjà mentionné, il est arrivé à la condition de stabilité suivante : $\Omega_e R_e^2 > \Omega_i R_i^2$ où Ω_i et Ω_e sont les vitesses angulaires de rotation, R_i et R_e sont les rayons des cylindres intérieur et extérieur respectivement.

G.I. TAYLOR 1923[7] a repris cette étude pour un fluide visqueux ; il a représenté la première approche méthodologique, expérimentale et analytique de l'apparition et du développement des instabilités entre cylindres concentriques tournants. Expérimentalement il a mis en évidence l'existence d'un écoulement secondaire succédant à l'écoulement laminaire de base, pour une valeur particulière de la vitesse de rotation du cylindre tournant. Il a en outre résolu les équations de Navier- Stokes et de continuité pour l'écoulement de Couette ; la solution est donnée sous forme de série de Bessel-Fourier. Cette étude analytique est basée sur une théorie linéaire qui consiste à superposer à la solution du régime laminaire une perturbation infinitésimale et négliger les termes non linéaires. Basé sur les observations de COUETTE et MALLOCK, TAYLOR a supposé une symétrie axiale de l'écoulement, un espace annulaire étroit, les effets de la gravité sont négligés et il supposé également une perturbation axialement périodique.

La théorie linéaire développée par TAYLOR, a permis de prévoir l'apparition de l'instabilité et de déterminer le seuil de vitesse de rotation correspondant à cette transition. Pour des vitesses plus élevées, les termes quadratiques ne sont plus négligeables. J.T.STUART (1958 [8]) fut le premier à tenir compte des termes quadratiques pour étudier par une théorie non

Chapitre 1 Les Fluides Newtoniens

linéaire, l'évolution et l'amplification de la perturbation au voisinage de la première instabilité. il a déterminé l'amplitude de ces perturbations à partir d'une équation de bilan énergétique écrite sous forme intégrale.

Après ces travaux novateurs, le phénomène physique qui est désormais connu sous le nom d'« écoulement de Couette Taylor », n'a cessé d'attirer l'attention de nombreux chercheurs, qui par leurs travaux analytiques, numériques et expérimentaux, ont contribué à une meilleure compréhension de cette classe d'écoulements complexes. Il a été bien documenté dans la revue classique publiée par DIPRIMA & SWINNEY 1985 [4]. En outre, l'article de TAGG 1994 [9] est l'une des références les plus exhaustives concernant l'historique et les avancées de la recherche sur ce sujet. Depuis l'époque des travaux fondateurs de Taylor, plus de 2000 publications scientifiques sont parues concernant le Taylor Couette. On notera également l'existence d'un colloque biannuel entièrement consacré à cette expérience « COUETTE – TAYLOR WORKSHOP » - dont la 13^{ème} édition s'est tenue en Juillet 2003 à Barcelone (Espagne).

I.6. CONCLUSION

Dans ce chapitre on essayé de faire une Définition des fluides et comprendre les fluides newtoniens et non newtonien où ce dernier est composée de plusieurs paramètres comme les fluides pseudo plastique et fluide rhéoépaississane et les fluides a seuil qui est comporte le fluide a Bingham.

Dans ce chapitre, nous avons essayé de regrouper les résultats concernant les conditions d'apparition des instabilités au sein de l'écoulement Taylor Couette.

Ces conditions dépendent de la vitesse de rotation du cylindre intérieur et extérieur, ainsi que du rapport des rayons des deux cylindres.

L'intérêt accordé à ce type d'écoulement dans l'industrie explique la richesse des études expérimentales et la diversité des approches théoriques et numériques.

Les études théoriques a vu les méthodes numériques prendre le pas sur les méthodes analytiques classiques. En fait, l'option pour une approche numérique implique, pour la méthode utilisée, qu'elle soit instationnaire, puisque les perturbations sont entraînées par l'écoulement.

II.1 Introduction :

Ce chapitre est consacré à la présentation des équations gouvernant le problème et la méthode numérique pour sa résolution. Dans la première partie, on donne les équations gouvernant le problème et on fait ressortir les différents adimensionnels qui interviennent dans le problème. Dans la deuxième partie, on décrit l'écoulement de base. Il s'agit de l'écoulement unidirectionnel stationnaire d'un fluide Bingham pour un écoulement de Taylor couette. On analyse l'influence des paramètres rhéologique sur la structure de l'écoulement de base.

Le problème physique posé par les configurations précédentes est décrit par les équations aux dérivées partielles de continuité et des quantités de mouvement, dites l'équation de Navier-Stokes, ainsi que par leurs conditions initiales et aux limites. Ces équations seront écrites dans les coordonnées cylindriques, ce qui permettra une meilleure analyse des résultats et une facilité de calcul étant donné la nature géométrique du domaine de travail. Un schéma descriptif du système à étudier est donné dans la figure II.1.

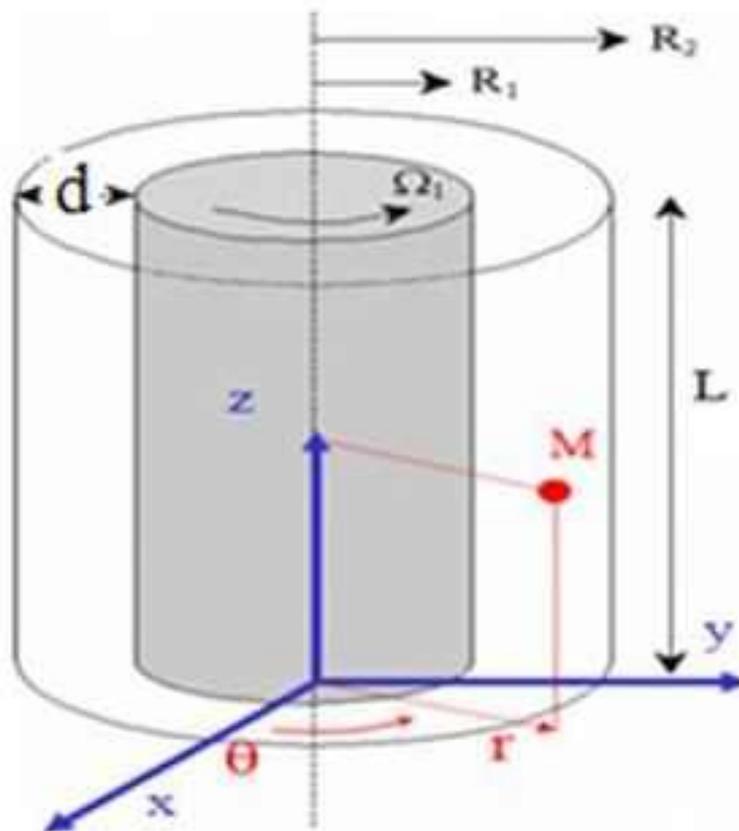


Fig. II.1: l'écoulement de Taylor couette.

II.1 Formulation mathématique :

Chapitre 2 écoulements de base

L'écoulement d'un fluide incompressible entre deux cylindres coaxiaux infiniment longs est considéré. Le cylindre intérieur de rayon R_1 tourne à la vitesse angulaire Ω_1 , le cylindre extérieur de rayon R_2 à la vitesse angulaire Ω_2 . L'écoulement dans l'espace annulaire est régi par les équations de continuité et de mouvement. Sous la forme dimensionnelle, celles-ci données par :

$$\nabla \cdot \mathbf{U} = 0 \quad \text{II.1}$$

$$\rho \left[\frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t} + (\mathbf{U} \cdot \nabla) \mathbf{V} \right] = -\nabla P + \nabla \tau \quad \text{II.2}$$

Nous présentons la formulation mathématique d'un l'écoulement de Taylor-Couette. La description du champ de vitesse \vec{V} de composantes (u_r, u_θ, u_z) et celui de pression P s'effectuent en fonction de l'espace et du temps t . Ils sont représentées dans un système de coordonnées cylindriques au point $M(r, \theta, z)$ (voir **fig. II.1**) de façon que \vec{V} et le champ de pression P vérifient les équations hydrodynamiques [1].

II. 1.1. L'équation de continuité :

Pour un écoulement incompressible, l'équation de continuité en coordonnées cylindriques se présente sous la forme suivante:

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r u_r) + \frac{1}{r} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial u_z}{\partial z} = 0 \quad \text{II.3}$$

II.1.2 L'équation de la quantité de mouvement :

En coordonnées cylindriques à symétrie axiale, les équations projetées suivant les directions radiale, azimutale et axiale s'écrivent alors :

a) Equation de quantité de mouvement azimutale :

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \text{Re} \left[\frac{V}{r} \left(\frac{\partial u}{\partial \theta} - 2v \right) \right] = -\frac{\partial p}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r \gamma_{rr}(u)) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} (\gamma_{r\theta}(u)) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial z} (\gamma_{rz}(u)) - \frac{1}{r} \gamma_{\theta\theta} + \text{B} \left(\frac{1}{r} * \frac{\partial}{\partial r} (r M_{rr}) + \frac{\partial}{\partial z} (M_{rz}) - \frac{1}{r} M_{r\theta} \right) \quad \text{II.4}$$

b) Equation de quantité de mouvement radiale :

$$\frac{\partial v}{\partial t} + \text{Re1} \left(u \frac{dv}{dr} + v \frac{v}{r} + \frac{v}{r} \frac{\partial v}{\partial \theta} \right) = \frac{1}{r} \frac{\partial p}{\partial \theta} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 \gamma_{r\theta}) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} (\gamma_{\theta\theta}) + \frac{\partial}{\partial z} (\gamma_{\theta z}) + B \left(\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} (r M_{\theta\theta}) + \frac{\partial}{\partial z} (M_{\theta z}) \right) \text{II.5}$$

c) Equation de quantité de mouvement axiale:

$$\frac{\partial w}{\partial t} + \text{Re1} \left(\frac{v}{r} \frac{\partial w}{\partial \theta} \right) = - \frac{\partial p}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} (\gamma_{zr}) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} (\gamma_{z\theta}) + \frac{\partial}{\partial z} (\gamma_{zz}) + B \left(\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r M_{zr}) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} (M_{z\theta}) + \frac{\partial}{\partial z} (M_{zz}) \right) \text{II.6}$$

Ou :

\mathbf{u}_r la vitesse azimuthale, \mathbf{u}_θ la vitesse radial, \mathbf{u}_z vitesse axiale.

La condition de non glissement à la paroi impose les conditions suivantes :

$$V(R_1) = \Omega_1 R_1 \text{II.7}$$

$$V(R_2) = \Omega_2 R_2 \text{II.8}$$

- Fluide de Bingham

Nous considérons ici le cas de fluide purement visqueux sans élasticité :

$$\tau = \mu \gamma \text{II.9}$$

Ou γ est le tenseur des taux de déformation défini par :

$$\gamma = [\nabla \cdot U + (\nabla \cdot U)^T] \text{II.10}$$

La viscosité est une fonction du deuxième invariante de γ :

$$\mu = \mu(\gamma) \text{II.11}$$

Le model de Bingham décri le comportement de fluide qui ne s'coulent que lorsque la contrainte est supérieure à un seuil. Ce comportement peut être mis en évidence dans certaines boues argileuses, pâtes, suspension concentrées etc....En utilisant, le critère Von-mises, le modèle de Bingham s'écrit :

$$\tau = \left(\mu_p + \frac{\tau_y}{\gamma}\right) \gamma \leftrightarrow \tau > \tau_y \text{ II.12}$$

$$\gamma = 0 \leftrightarrow \tau \leq \tau_y \text{ II.13}$$

Où μ_p est la viscosité plastique, τ_y est le seuil de contrainte, γ et τ sont les deuxième invariants du tenseur des taux de déformation, γ , et du déviateur de tenseur des contraintes.

Un fluide de Bingham se comporte d'un point de vue cinématique comme un solide indéformable si les contraintes qui lui sont appliquées sont inférieures à la contrainte seuil ($\tau \leq \tau_y$). Dès que cette contrainte est atteinte ($\tau > \tau_y$), le fluide a alors un comportement rhéofluidifiant.

II.3 l'équation adimensionnelle :

Pour permettre d'avoir des informations généralisées à une variété des problèmes ayant les mêmes ordres du grandeurs des coefficient de similitude d'un coté, et d'un autre coté, réduire le nombre de paramètres d'un problème, l'emploi de la variable adimensionnelle permet d'exprimer la réalité des phénomènes physiques indépendamment des systèmes de mesures. En effet, pour faire apparaître les paramètres de contrôle du problème étudié, il est nécessaire d'introduire les grandeurs de référence.

On définit les grandeurs caractéristiques introduites dans nos équations du modèle mathématique comme suit [10]:

$$V = \frac{1}{\Omega_1 R_1} \hat{V}, \quad r = \frac{1}{d} \hat{r}, \quad Z = \frac{1}{d} \hat{Z}, \quad t = \frac{1}{\hat{T}} \hat{t}, \quad P = \frac{1}{P_0} \hat{P}, \quad \tau = \frac{1}{P_0} \hat{\tau},$$

$$\text{Avec } \hat{d} = R_2 - R_1, \quad \hat{T} = \frac{\rho d^2}{\mu_p} \text{ et } P_0 = \frac{\mu_p R_1 \Omega_2}{d}$$

Les équations de continuité et de Navier-Stokes adimensionnelles deviennent alors :

$$\nabla \cdot U = 0 \tag{II.14}$$

$$\frac{\partial V}{\partial t} + Re_1 (U, \nabla) U = -\nabla P + \nabla \tau \tag{II.15}$$

Le nombre de Reynolds apparaissant dans l'équation précédent est défini par :

$$Re_1 = \frac{\rho R_1 \Omega_1 d}{\mu_p} \tag{II.16}$$

Il s'agit du nombre de Reynolds interne, associé à la rotation du cylindre intérieur.

Chapitre 2 écoulements de base

De même façon on définit le nombre de Reynolds externe par :

$$Re_2 = \frac{\rho R_2 \Omega_2 d}{\mu_P} \quad \text{II.17}$$

Aux équations précédentes, il faut rajouter les équations constitutives.

Dans cette étude, le fluide de Bingham est considéré, c.-à-d des fluides dont la viscosité effective μ décroît lorsque le taux de cisaillement augmente.

Après dimensionnement, les lois de comportement s'écrivent :

- **Fluide de Bingham :**

A l'aide des grandeurs adimensionnelles, l'équation constitutive prend la forme suivante :

$$\tau = \left(1 + \frac{B}{\gamma}\right) \gamma \quad \text{Si } \tau > B \quad \text{II.18}$$

$$\gamma = 0 \quad \text{Si } \tau \leq B \quad \text{II.19}$$

Le nombre de Bingham est défini par $B = \frac{\tau_y d}{\mu_P R_1 \Omega_1}$

II.4.écoulement de base :

L'écoulement de base est supposé avec un champ de vitesse purement azimutale $V = (0, V^b(r), 0)$. L'équation de mouvement, écrit en coordonnées cylindrique, donne :

$$0 = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 \tau_{r\theta}) \quad \text{II.20}$$

$$\tau_{r\theta}(R_1) = \tau \quad \text{II.21}$$

avec les conditions aux limites sur le cylindre intérieur et extérieur :

$$V(R_1) = \Omega_1 R_1 \quad V(R_2) = \Omega_2 R_2$$

- **Fluide de Bingham :**

Le fluide de Bingham, se caractérise d'une part une modification de la zone où l'écoulement est cisailé et d'autre part, par le caractère rhéofluidifiant.

A l'aide des grandeurs adimensionnelles, l'équation constitutive prend la forme suivante :

$$\tau_{r\theta} = \left(\mu_p + \frac{B}{\gamma}\right) \dot{\gamma}_{r\theta} \leftrightarrow \tau > B \text{ II.22}$$

$$\gamma = 0 \leftrightarrow \tau \leq B \text{ II.23}$$

L'écoulement de base dépend la contrainte appliqué au cylindre intérieur et du nombre de Bingham. Il est caractérisé par de deux régions : la première est la zone où l'écoulement est cisailé une zone, adjacente au cylindre extérieur où le cisaillement est nul.

1. Région 1 : tout l'espace annulaire est cisailé $\frac{|\tau_i|}{B} > \left(\frac{1}{\eta}\right)^2$

$$\text{Où } B = \frac{|\tau_i|}{R^2} R_1^2 \text{ II.24}$$

A partir de l'équation précédent on trouve :

$$r \frac{d}{dr} \left(\frac{v^b}{r} \right) = \frac{|\tau_i|}{r^2} R_1^2 + B \text{ II.25}$$

Après intégration on obtient :

$$v^b = \frac{|\tau_i|}{r} R_1^2 + B \ln(r) + cr \text{ II.26}$$

Les constantes τ_i et c sont déterminées par les conditions aux limites :

$$V(R_1) = \Omega_1 R_1 \quad \text{et} \quad V(R_2) = \frac{\Omega_2 R_2}{\Omega_1 R_1} = \frac{\Omega_2}{\Omega_1}$$

$$\text{Avec } R_y = \sqrt{\frac{|\tau_i|}{B}} R_1^2$$

On obtient alors :

$$v^b = \frac{\Omega}{R_1} + \frac{1}{2} \tau_i R_1^2 \left(\frac{1}{R_2^2} - \frac{1}{r^2} \right) + B \ln \left(\frac{R_2}{r} \right) \text{ sgn}(\tau_i) \text{ II.27}$$

Où $R_1 < r < R_2$

Après calculs on trouve :

$$\tau_i = \frac{2}{\eta-1} \left(\text{Sgn}(\Omega-1) B \ln(\eta) + (1-\Omega) \left(\frac{1-\eta}{\eta} \right) \right) \text{ II.28}$$

2. Région 2 : c'est la zone où l'écoulement est cisailé, dans ce cas, on a :

$$: 1 < \frac{|\tau_i|}{B} \leq \left(\frac{1}{\eta}\right)^2 \text{ II.29}$$

Après calculs on trouve :

$$V^b = \frac{\Omega}{R_1} + \frac{1}{2} \tau_i R_1^2 \left(\frac{1}{R_2^2} - \frac{1}{r^2} \right) + B \ln \left(\frac{R_2}{r} \right) \operatorname{sgn}(\tau_i) \text{ pour } R_1 < r < R_2 \quad \text{II.30}$$

$$V^b = \frac{\Omega}{R_1} r \quad \text{pour } R_1 \leq r \leq R_2 \quad \text{II.31}$$

Pour déterminer la valeur de τ_i dans la deuxième région, on utilise les conditions aux limites :

$$V(R_1) = \Omega_1 R_1$$

On trouve :

$$1 - \Omega = \frac{BR_1}{2} \left(\frac{|\tau_i|}{B} (\eta^2 - 1) + \ln(1/\eta^2) \right) \operatorname{sgn}(\tau_i) \quad \text{II.32}$$

$$\tau_i = \frac{2}{\eta - 1} \left(\operatorname{Sgn}(\Omega - 1) B \ln(\eta) + (1 - \Omega) \left(\frac{1 - \eta}{\eta} \right) \right) \quad \text{II.33}$$

Cette équation est résolue de façon numérique en utilisant un processus itératif basé sur la méthode de dichotomie classique.

La **Fig. II.2** représente le profil de Vitesse pour un rapport de rayon $\eta = 0.5$ et le Bingham $B = 0, 0.5, 0.85, 1, 1.23$ et la vitesse angulaire extérieure $\Omega_2 = 0$ et la vitesse angulaire intérieure $\Omega_1 = 1$.

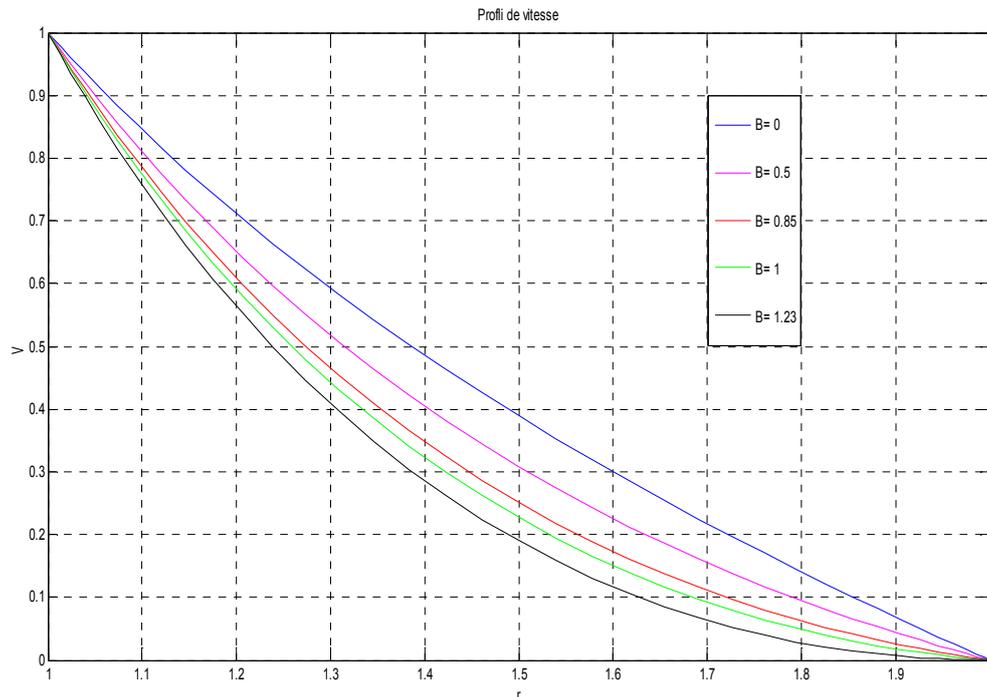


Fig. II.2: Profil de Vitesse pour un rapport de rayon $\eta = 0.5$: (1) $B = 0$ fluide Newtonien ;
(2) $B = 0.5$; (3) $B = 0.85$; (4) $B = 1$; (5) $B = 1.23$

La **Fig. II.3** représente le profil de Vitesse pour un rapport de rayon $\eta = 0.3$ et le Bingham $B = 0, 0.5, 0.85, 1, 1.23$ et la vitesse angulaire extérieure $\Omega_2 = 0$ et la vitesse angulaire intérieure $\Omega_1 = 1$.

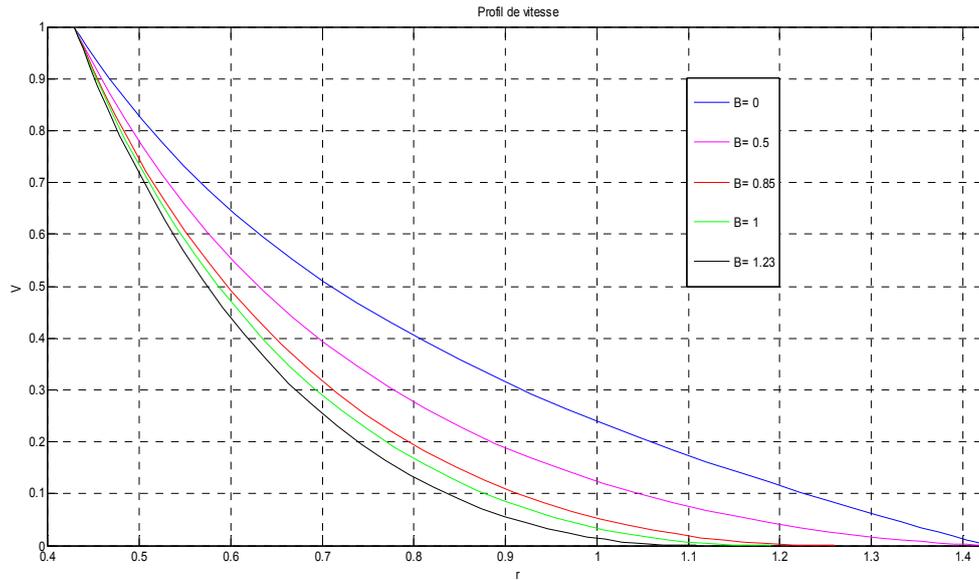


Fig. II.3: Profil de Vitesse pour un rapport de rayon $\eta=0.3$: (1) $B=0$ fluide Newtonien ; (2) $B=0.5$; (3) $B=0.85$; (4) $B=1$; (5) $B=1.23$

La Fig. II.4 représente le profil de Vitesse pour un rapport de rayon $\eta=0.7$ et le Bingham $B=0,0.5,0.85,1,1.23$ et la vitesse angulaire extérieur $\Omega_2=0$ et la vitesse angulaire intérieur $\Omega_1=1$.

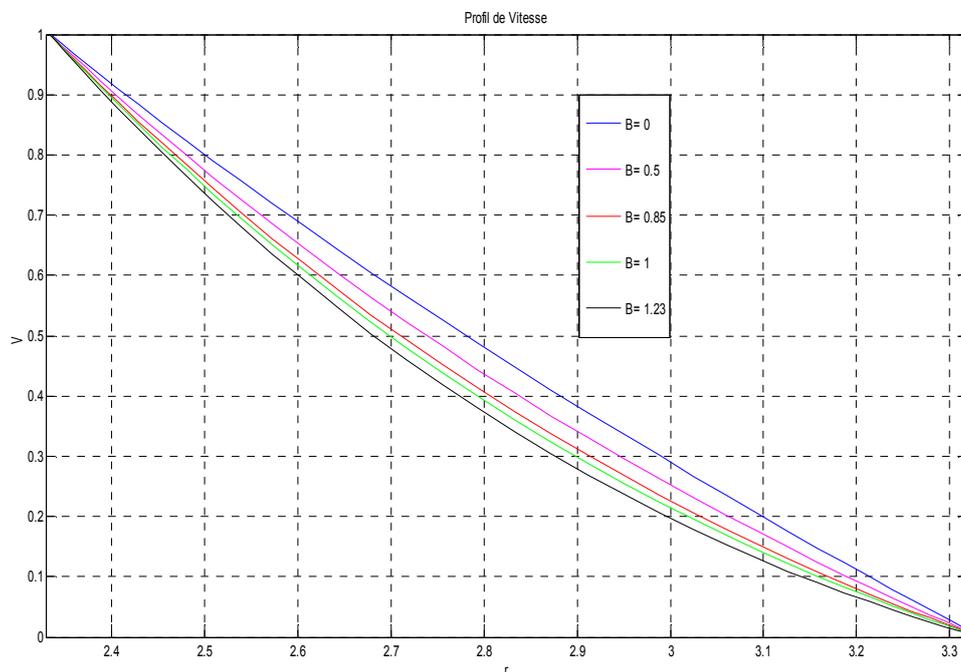


Fig. II.4: Profil de Vitesse pour un rapport de rayon $\eta=0.7$: (1) $B=0$ fluide Newtonien ; (2) $B=0.5$; (3) $B=0.85$; (4) $B=1$; (5) $B=1.23$

La Fig. II.5 représente le profil de Vitesse pour un rapport de rayon $\eta=0.5$ et le Bingham $B=5,10,20,30,50$ et la vitesse angulaire extérieur $\Omega_2=0$ et la vitesse angulaire intérieur $\Omega_1=1$.

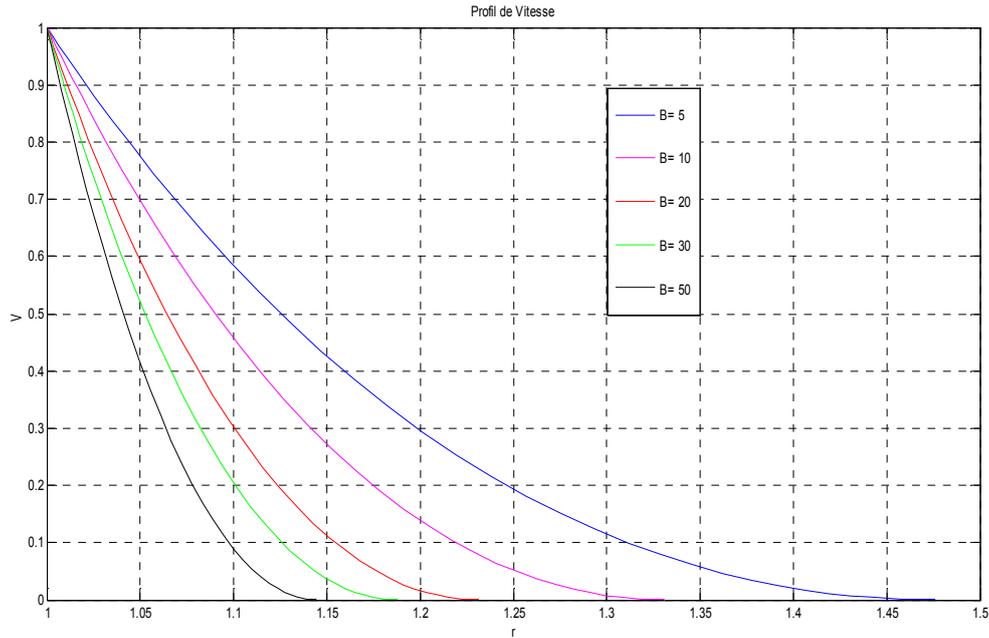


Fig. II.5: Profil de Vitesse pour un rapport de rayon $\eta=0.5$: (1)B=5; (2)B=10 ; (3)B=20; (4)B=30 ;(5)B=50.

La **Fig. II.6** représente le profil de Vitesse pour un rapport de rayon $\eta=0.881$ et le Bingham $B=5,10,20,30,50$ et la vitesse angulaire extérieure $\Omega_2=0$ et la vitesse angulaire intérieure $\Omega_1=1$

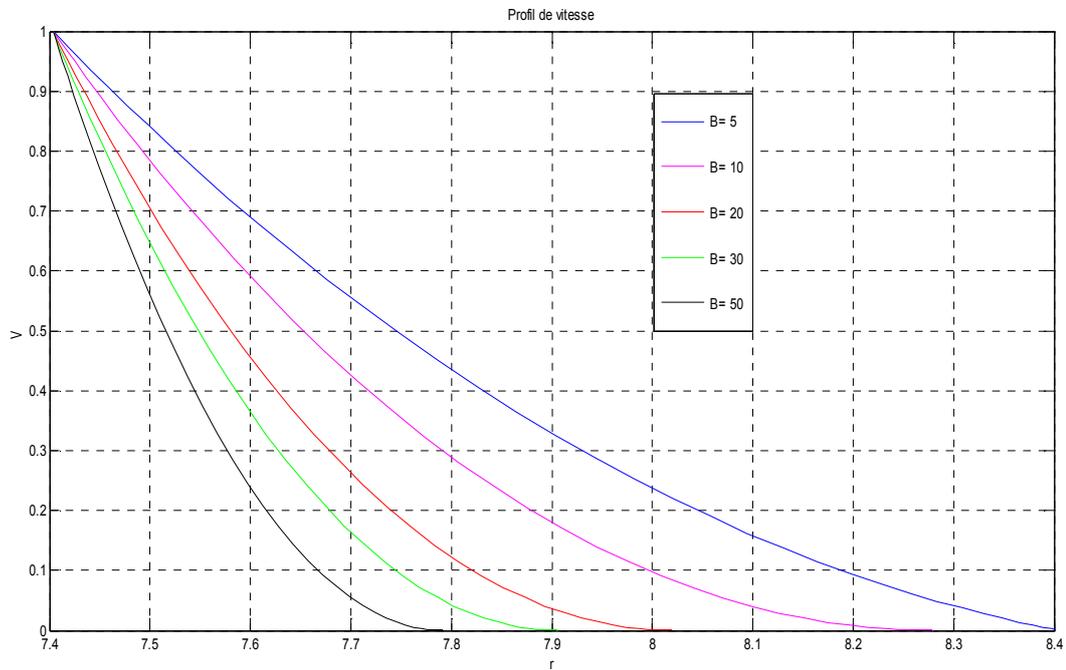
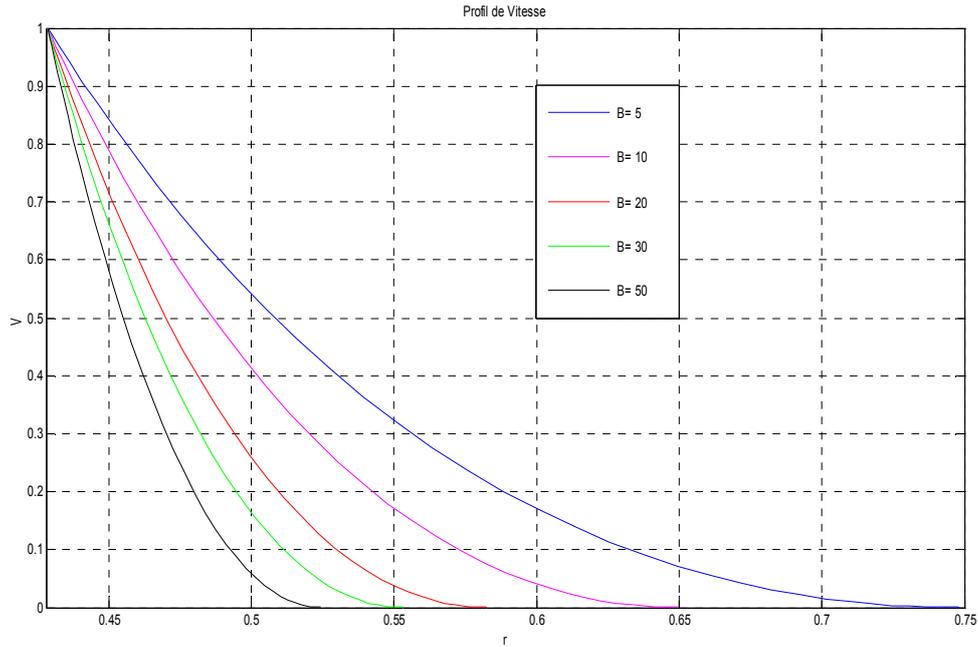


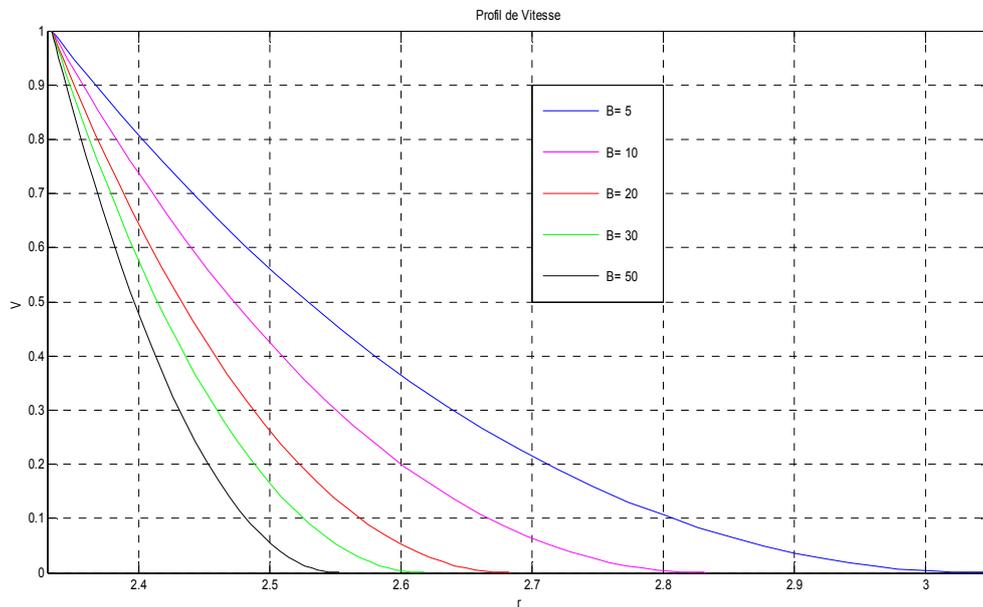
Fig. II.6: Profil de Vitesse pour un rapport de rayon $\eta=0.881$: (1)B=5 ; (2)B=10 ; (3)B=20 ; (4)B=30 ;(5)B=50.

La **Fig. II.7** représente le profil de Vitesse pour un rapport de rayon $\eta=0.3$ et le Bingham $B=5,10,20,30,50$ et la vitesse angulaire extérieure $\Omega_2=0$ et la vitesse angulaire intérieure $\Omega_1=1$



**Fig.II.7:profil de Vitesse pour un rapporte de rayon $\eta=0.3$:(1) $B=5$;(2) $B=10$; (3) $B=20$;
(4) $B=30$;(5) $B=50$.**

La Fig. II.8 représente le profil de Vitesse pour un rapport de rayon $\eta=0.7$ et le Bingham $B=5,10,20,30,50$ et la vitesse angular extérieur $\Omega_2=0$ et la vitesse angular intérieur $\Omega_1=1$



**Fig. II.8:Profil de Vitesse pour un rapporte de rayon $\eta=0.7$:(1) $B=5$; (2) $B=10$; (3) $B=20$;
(4) $B=30$;(5) $B=50$.**

Chapitre 2 écoulements de base

Les figures (de II.2 à II.8) montre que la variation de la Vitesse est existe laquelle est diminuie et commence par le point R_1 qui est le rayon de la parois intérieur jusqu'à la parois extérieur qui varié de R_0 à R_2 , ce phénomène est existe pour les deux regions.

La **Fig. II.9** représente le profil de Vitesse pour un rapport de rayon $\eta=0.5$ et le Bingham $B=5,10,20,30,50$ et la vitesse angular extérieur $\Omega_2=-5$ et la vitesse angular intérieur $\Omega_1=1$

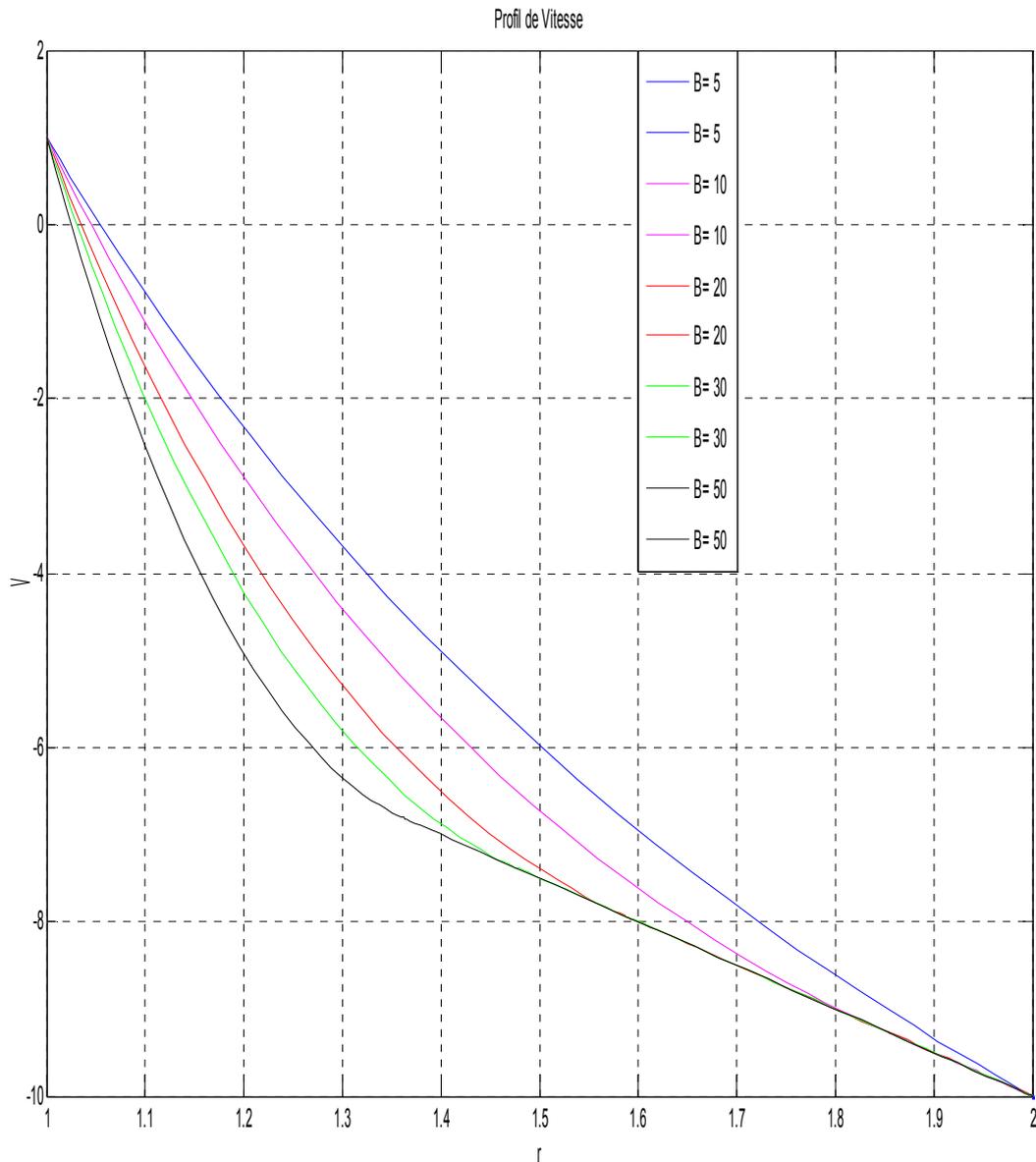


Fig. II.9: Profil de Vitesse pour un rapporte de rayon $\eta=0.5$: (1) $B=5$; (2) $B=10$; (3) $B=20$; (4) $B=30$; (5) $B=50$.

La **Fig. II.10** représente le profil de Vitesse pour un rapport de rayon $\eta=0.5$ et le Bingham $B=5,10,20,30,50$ et la vitesse angulaire extérieure $\Omega_2=-3$ et la vitesse angulaire intérieure $\Omega_1=1$

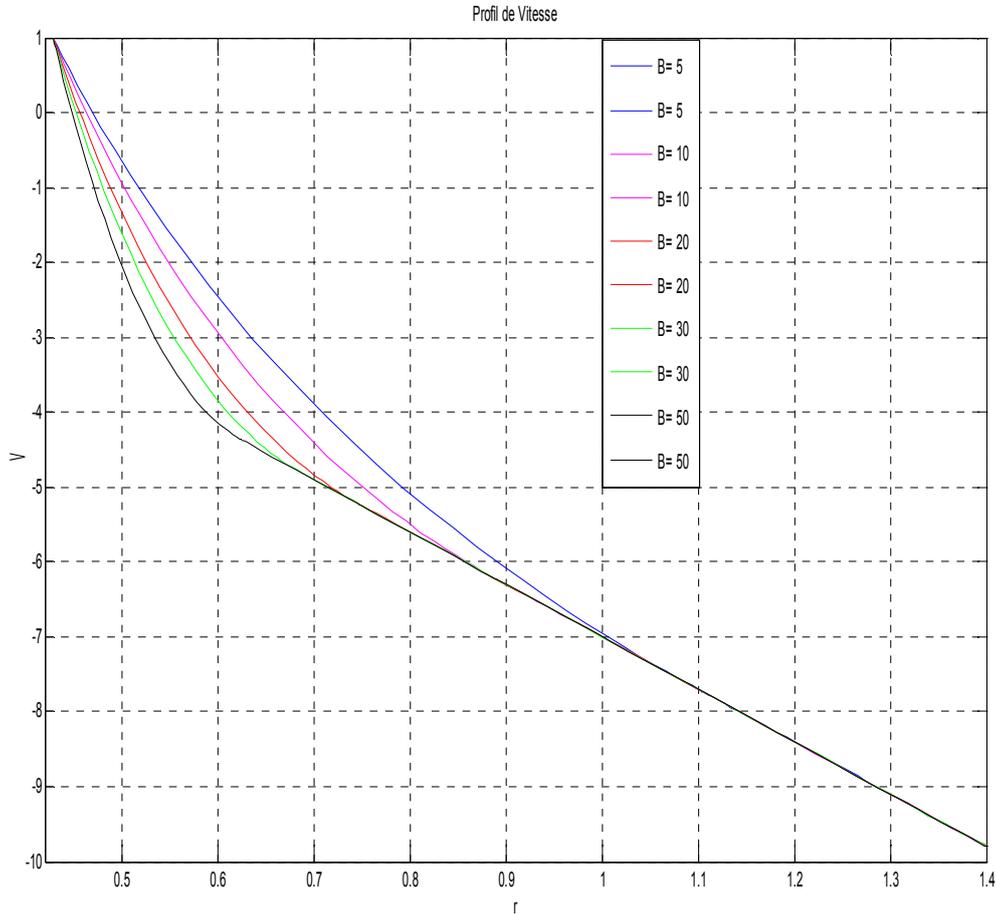


Fig. II.10: Profil de Vitesse pour un rapport de rayon $\eta=0.3$: (1) $B=5$; (2) $B=10$; (3) $B=20$; (4) $B=30$; (5) $B=50$.

Les figures (d'III.9 à III.10) qui représentent le profil de Vitesse pour différent rapport de rayon ainsi que différent valeur de nombre e Bingham indique que la vitesse est importante au niveau du cylindre intérieur.

Conclusion :

à partir des graphes (de III.2 à III.10) on conclue que la vitesse est varie lorsque on change le Bingham et éta et la vitesse angulaire et nous on s'intéresse le Bingham qui exerce un force qui réduire la vitesse de fluide donc la valeur absolue du gradient de vitesse croit sur la paroi intérieure et décroît sur la paroi extérieure.

Chapitre 2 écoulements de base

Les **Fig. II.11** et **Fig. II.12** représentent les profils de viscosité pour un rapport de rayon $\eta=0.5$ et 0.881 respectivement et en change le Bingham $B=0,0.5,0.85,1,1.23$ et la vitesse angulaire extérieur $\Omega_2=0$ et la vitesse angulaire intérieur $\Omega_1=1$.

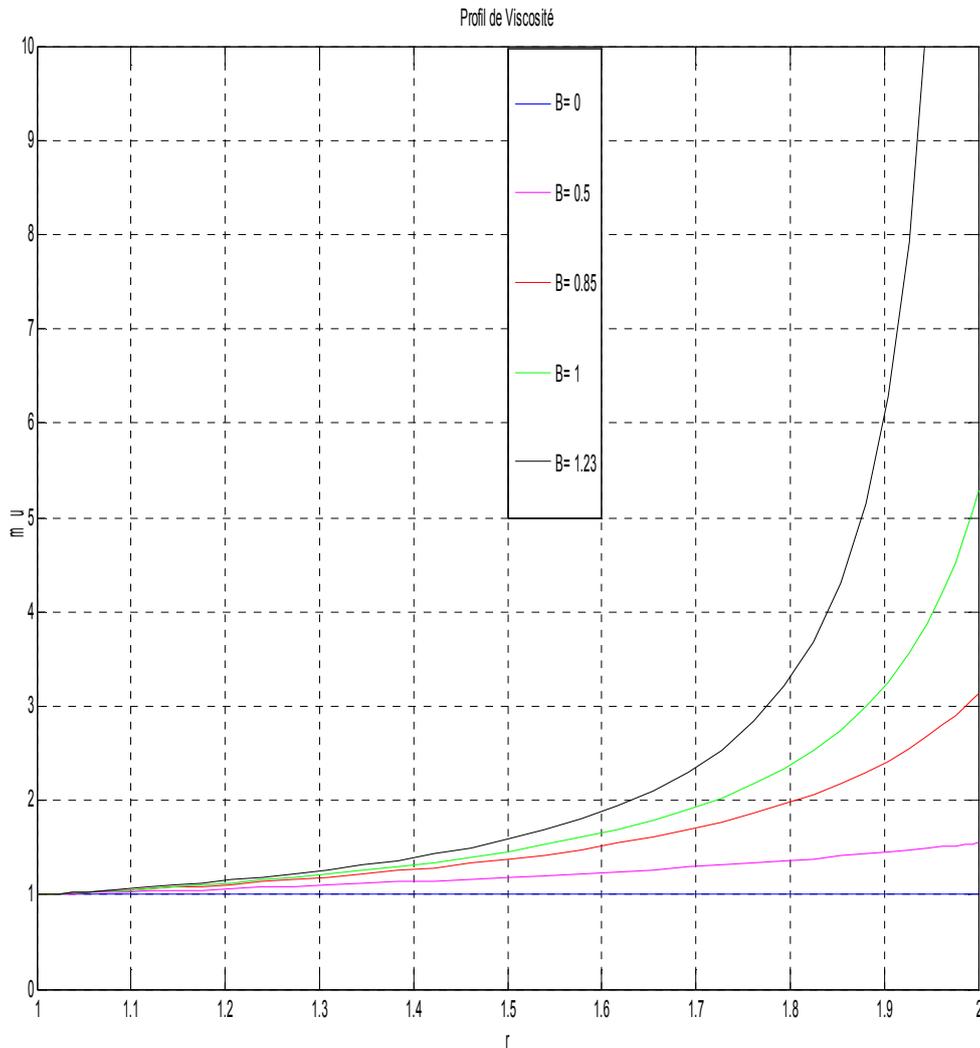


Fig. II.11: Profil de Viscosité pour un rapport de rayon $\eta=0.5$: (1) $B=0$ fluide Newtonien; (2) $B=0.5$; (3) $B=0.85$; (4) $B=1$; (5) $B=1.23$

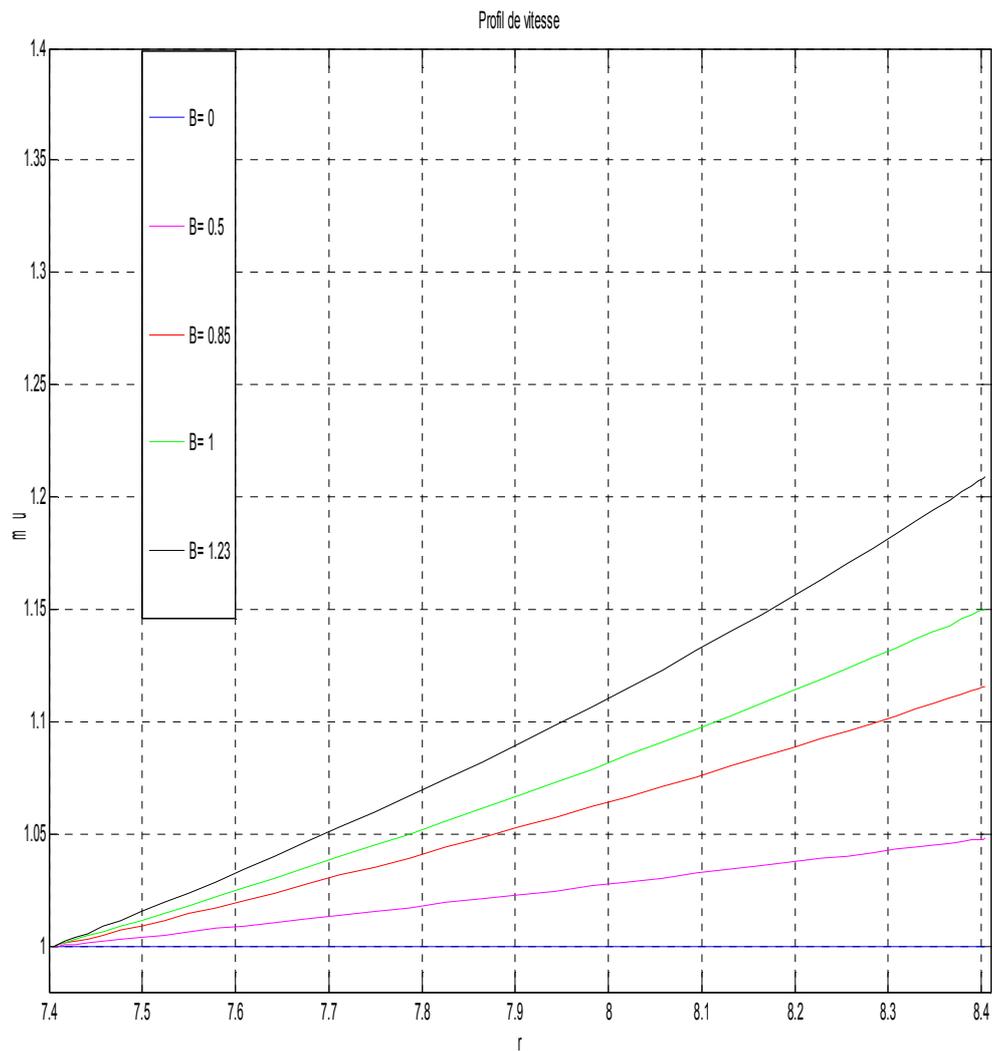


Fig. II.12: Profil de Viscosité pour un rapport de rayon $\eta=0.881$: (1) $B=0$ fluide Newtonien; (2) $B=0.5$; (3) $B=0.85$; (4) $B=1$; (5) $B=1.23$

Les **Fig. II.13** et **Fig. II.14** représentent les profils de viscosité pour un rapport de rayon $\eta=0.3$ et 0.7 respectivement et en change le Bingham $B=0,0.5,0.85,1,1.23$ et la vitesse angulaire extérieur $\Omega_2=0$ et la vitesse angulaire intérieur $\Omega_1=1$.

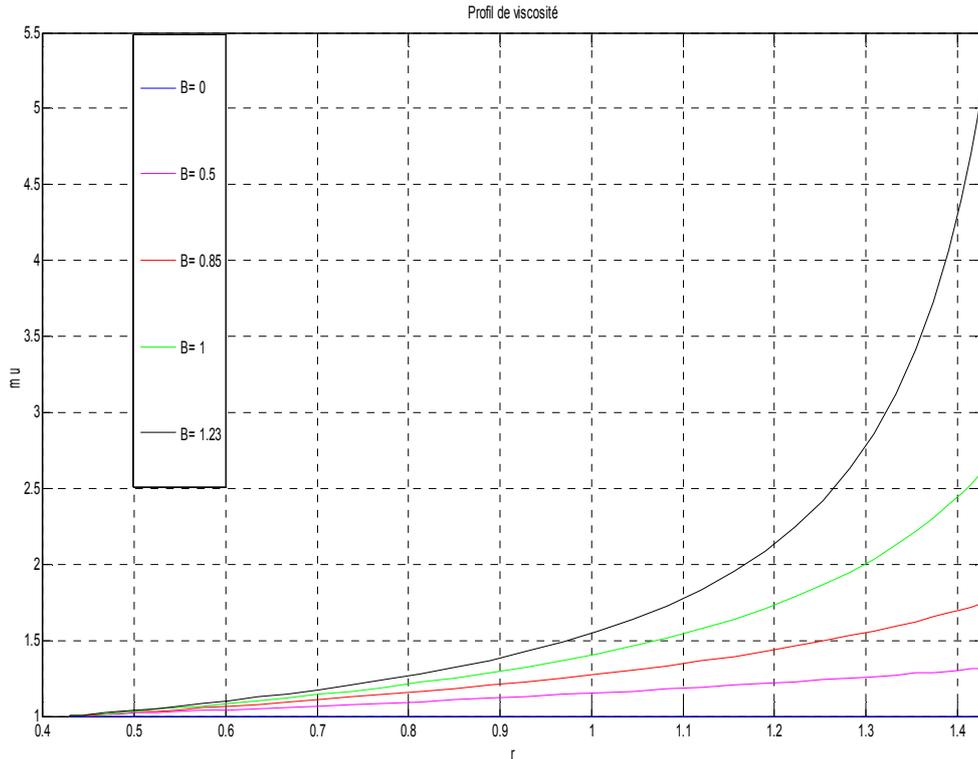


Fig. II.13: Profil de Viscosité pour un rapport de rayon $\eta=0.3$: (1) $B=0$ fluide Newtonien; (2) $B=0.5$; (3) $B=0.85$; (4) $B=1$; (5) $B=1.23$

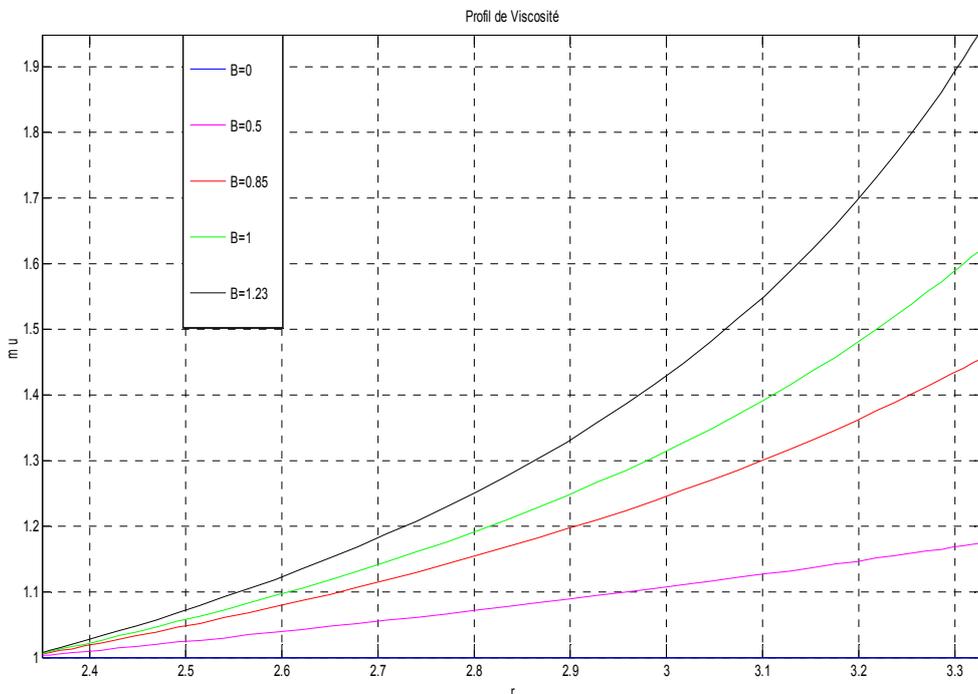


Fig. II.14: Profil de Viscosité pour un rapport de rayon $\eta=0.7$: (1) $B=0$ fluide Newtonien; (2) $B=0.5$; (3) $B=0.85$; (4) $B=1$; (5) $B=1.23$

Chapitre 2 écoulements de base

Les **Fig. II.15** et **Fig. II.16** représentent les profils de viscosité pour un rapport de rayon $\eta=0.5$ et 0.881 respectivement et en change le Bingham $B=5,10,20,30,50$ et la vitesse angulaire extérieur $\Omega_2=0$ et la vitesse angulaire intérieur $\Omega_1=1$.

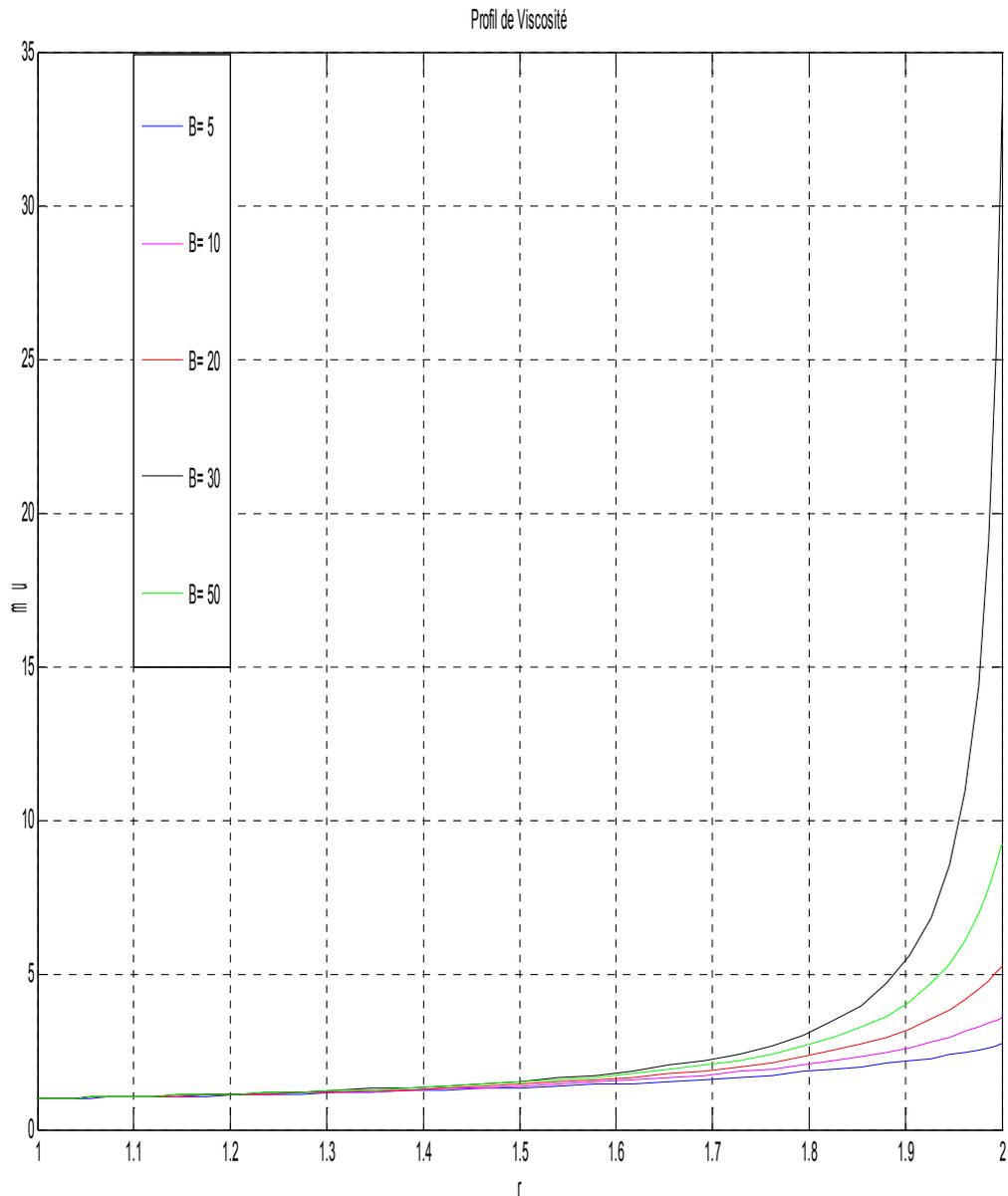


Fig. II.15: Profil de Viscosité pour un rapport de rayon $\eta=0.5$: (1) $B=5$; (2) $B=10$; (3) $B=20$; (4) $B=30$; (5) $B=50$

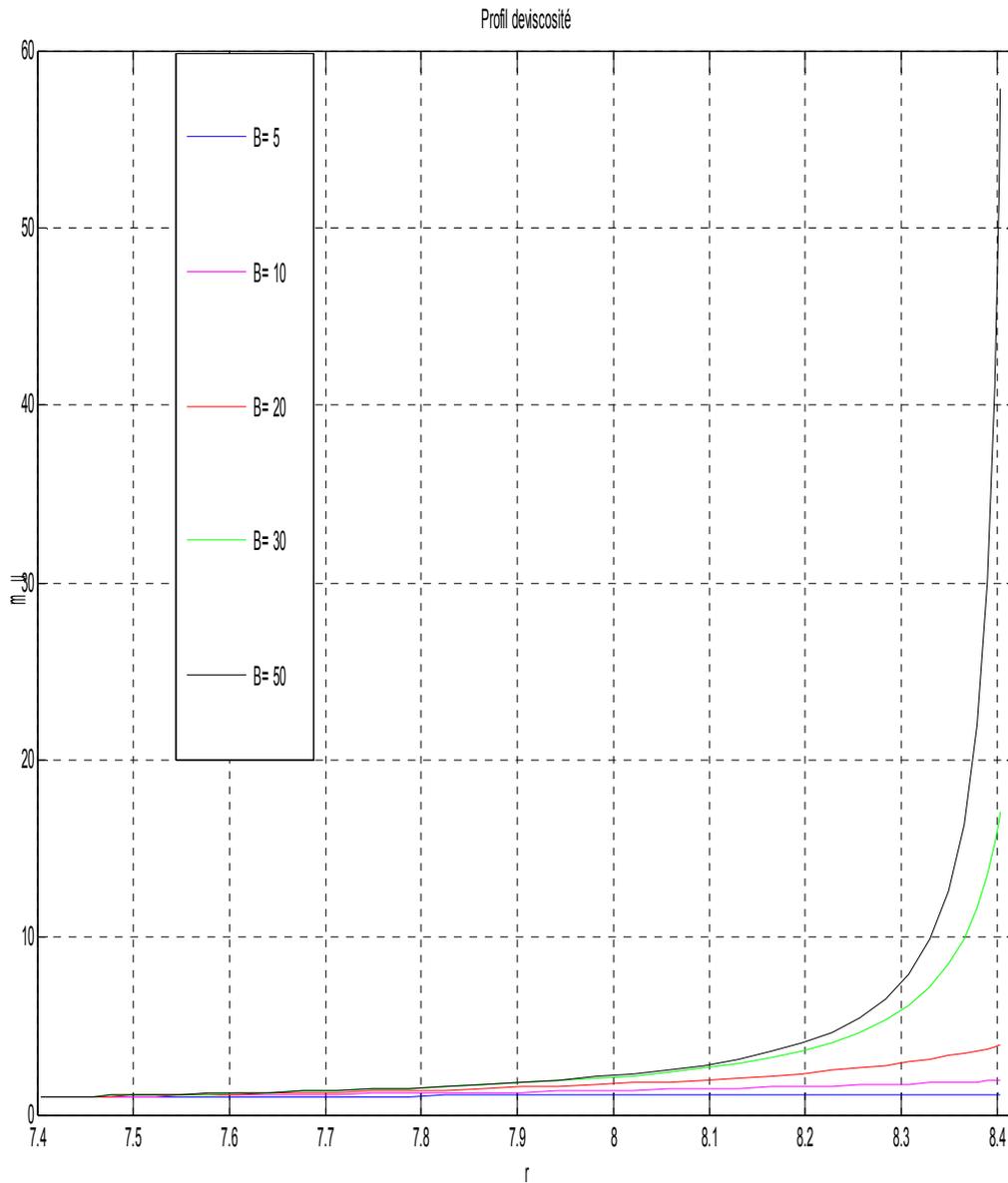


Fig.II.16: Profil de Viscosité pour un rapport de rayon $\eta=0.881$: (1)B=5; (2)B=10 ; (3)B=20 ; (4)B=30 ;(5)B=50

Les **Fig. II.17** et **Fig. II.18** représentent les profils de viscosité pour un rapport de rayon $\eta=0.3$ et 0.7 respectivement et en change le Bingham $B=5,10,20,30,50$ et la vitesse angulaire extérieur $\Omega_2=0$ et la vitesse angulaire intérieur $\Omega_1=1$.

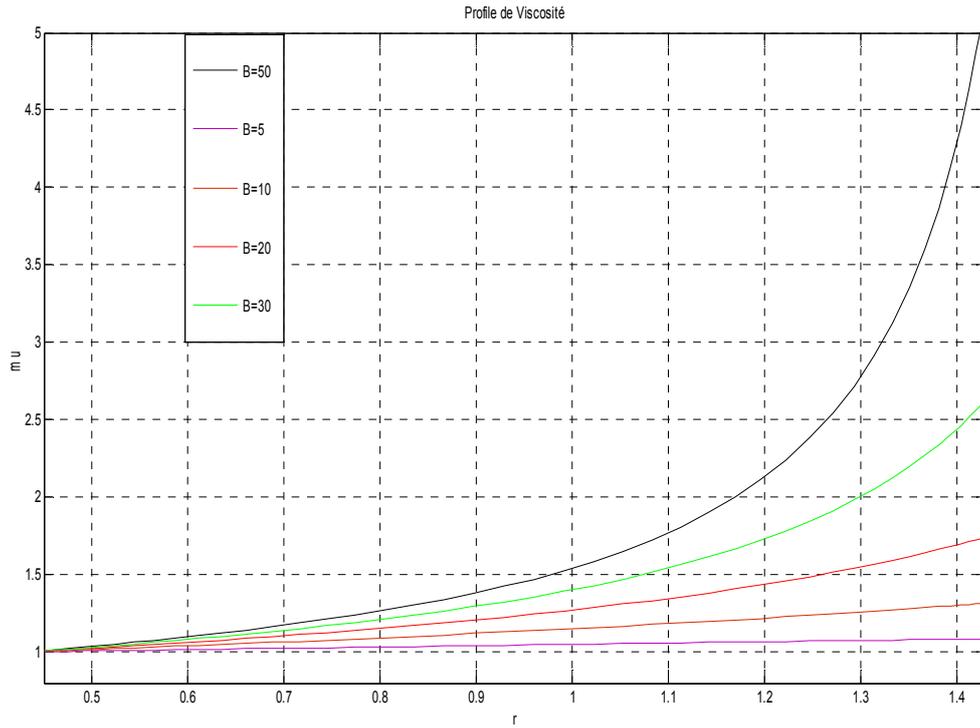


Fig. II.17: Profil de Viscosité pour un rapport de rayon $\eta=0.3$: (1) $B=5$; (2) $B=10$; (3) $B=20$; (4) $B=30$; (5) $B=50$

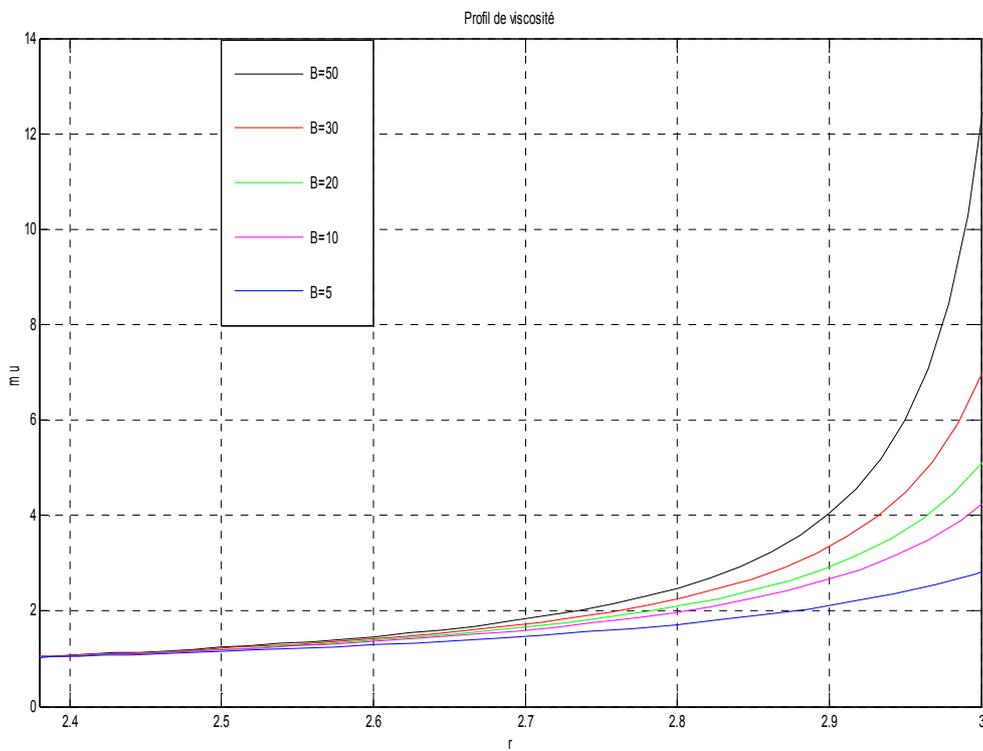


Fig. II.18: Profil de Viscosité pour un rapport de rayon $\eta=0.7$: (1) $B=5$; (2) $B=10$; (3) $B=20$; (4) $B=30$; (5) $B=50$

Chapitre 2 écoulements de base

Les Fig.II.19, Fig.II.20 représentent les profils de viscosité pour un rapport de rayon $\eta=0.5$ et 0.881 respectivement et en change le Bingham $B=0,0.5,0.85,1;1.23$ et la vitesse angulaire extérieur $\Omega_2=-5$ et -8.81 (Fig. II.22 et Fig. II.23) .et la vitesse angulaire intérieur $\Omega_1=1$.

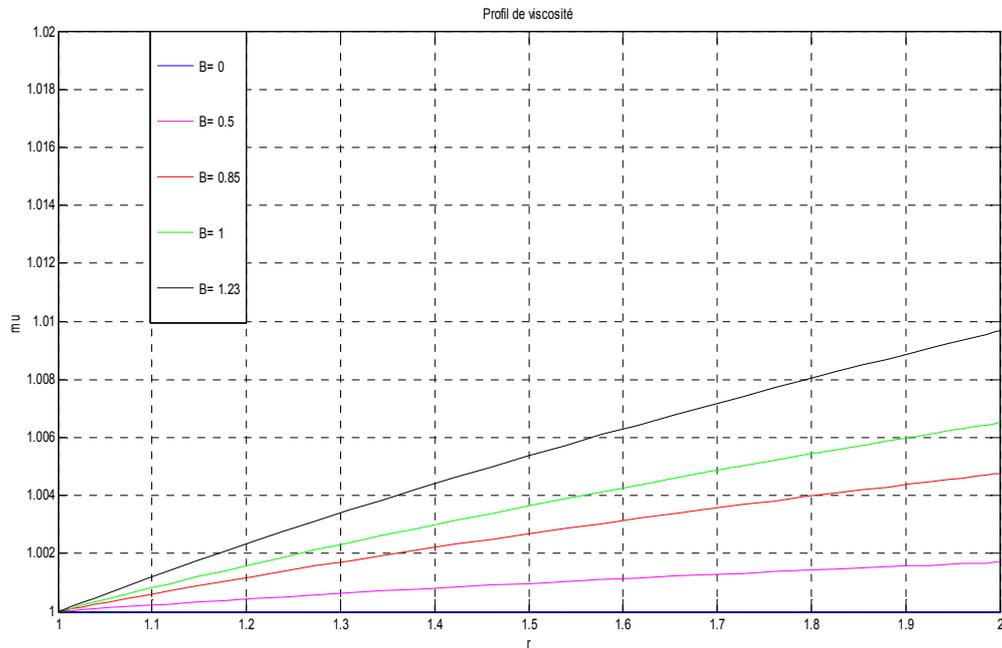


Fig. II.19: Profil de Viscosité pour un rapporte de rayon $\eta=0.5$:(1)B=0 fluide Newtonien;(2)B=0.5;(3)B=0.85;(4)B=1;(5)B=1.23

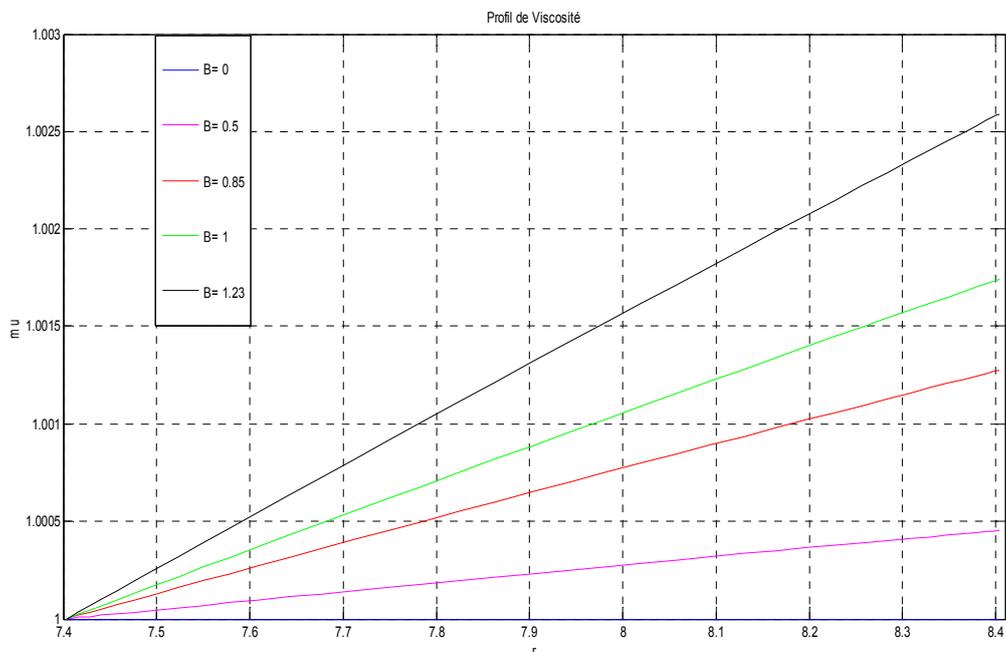


Fig. II.20: Profil de Viscosité pour un rapporte de rayon $\eta=0.881$:(1)B=0 fluide Newtonien;(2)B=0.5;(3)B=0.85;(4)B=1;(5)B=1.23

Chapitre 2 écoulements de base

Les **Fig.II.21, Fig.II.22** représentent les profils de viscosité pour un rapport de rayon $\eta=0.3$ et 0.7 respectivement et en change le Bingham $B=0,0.5,0.85,1 ; 1.23$ et la vitesse angulaire extérieur $\Omega_2=-3$ et -7 (**Fig. II.21** et **Fig. II.22**) et la vitesse angulaire intérieur $\Omega_1=1$.

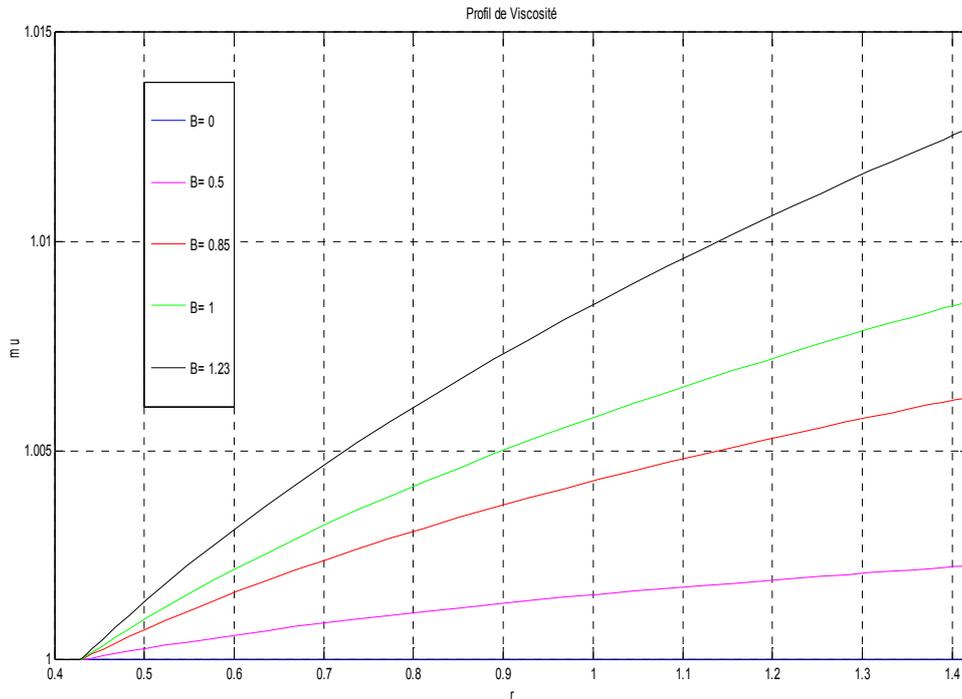


Fig. II.21: Profil de Viscosité pour un rapporte de rayon $\eta=0.3$:(1) $B=0$ fluide Newtonien;(2) $B=0.5$;(3) $B=0.85$;(4) $B=1$;(5) $B=1.23$

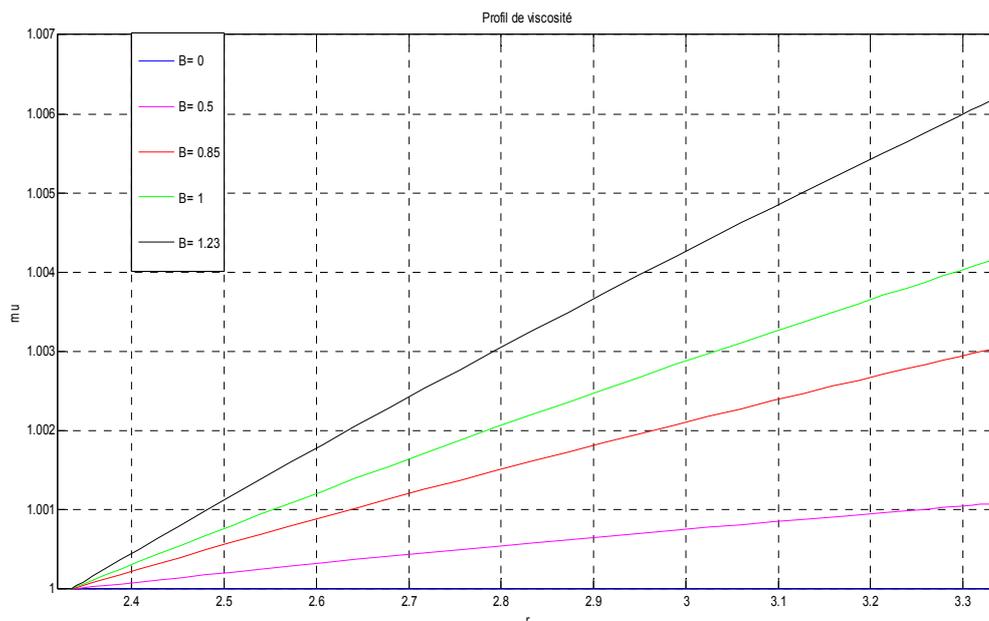


Fig. II.22: Profil de Viscosité pour un rapporte de rayon $\eta=0.7$:(1) $B=0$ fluide Newtonien;(2) $B=0.5$;(3) $B=0.85$;(4) $B=1$;(5) $B=1.23$

Chapitre 2 écoulements de base

Les Fig.II.23, Fig.II.24 représentent les profils de viscosité pour un rapport de rayon $\eta=0.5$ et 0.881 respectivement et en change le Bingham $B=5,10,20,30,50$ et la vitesse angulaire extérieur $\Omega_2=-5$ et -8.81 (Fig. II.22 et Fig. II.23) .et la vitesse angulaire intérieur $\Omega_1=1$.

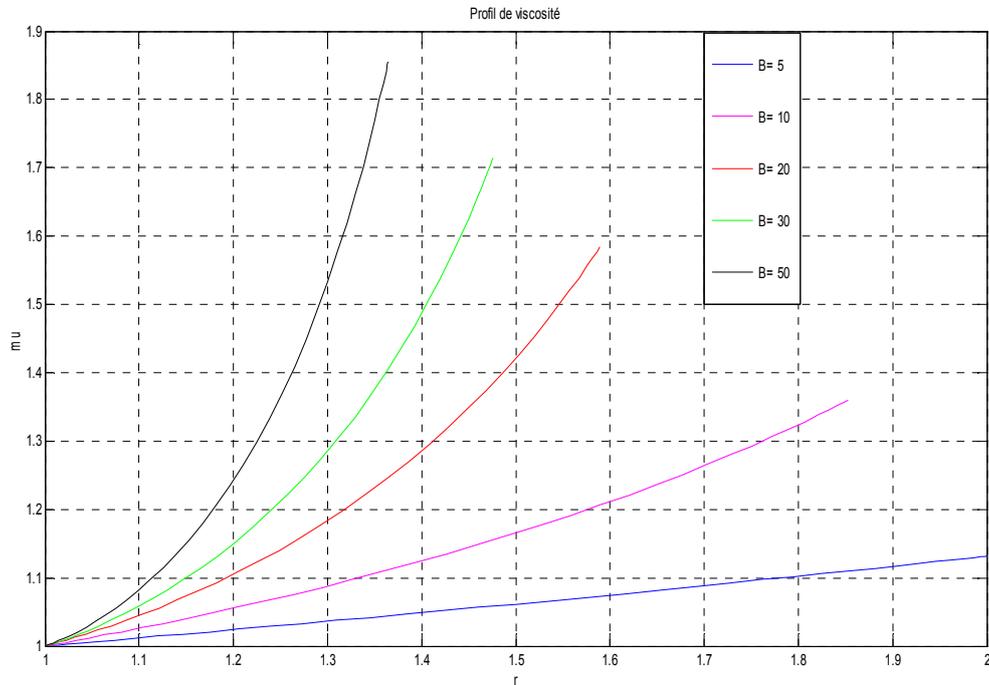


Fig. II.23: Profil de Viscosité pour un rapporte de rayon $\eta=0.5$: (1) $B=5$; (2) $B=10$; (3) $B=20$; (4) $B=30$; (5) $B=50$

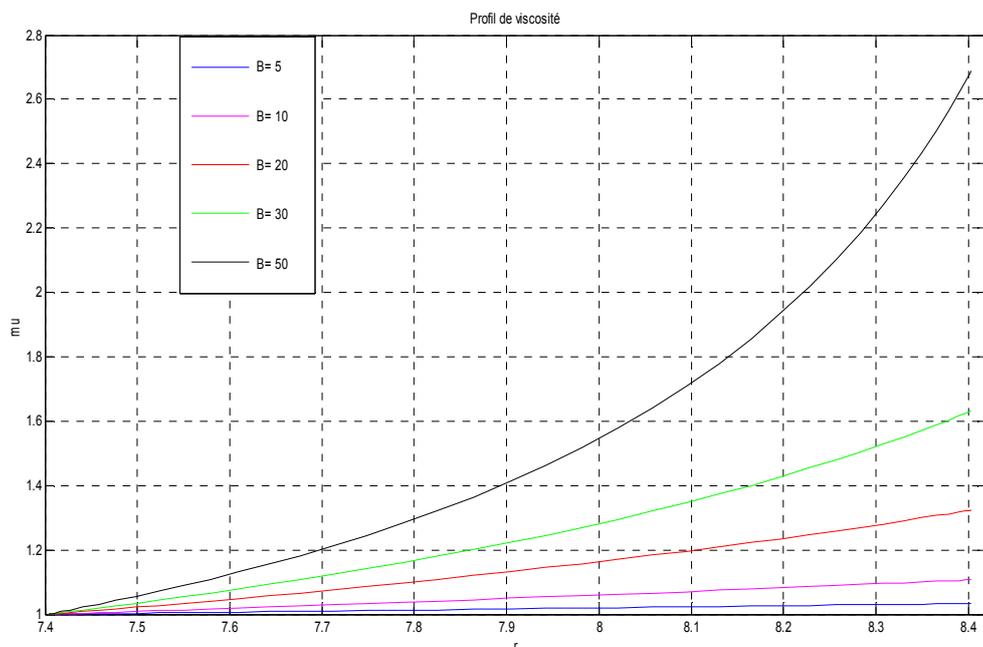


Fig. II.24: Profil de Viscosité pour un rapporte de rayon $\eta=0.881$: (1) $B=5$; (2) $B=10$; (3) $B=20$; (4) $B=30$; (5) $B=50$

Chapitre 2 écoulements de base

Les Fig.II.25, Fig.II.26 représentent les profils de viscosité pour un rapport de rayon $\eta=0.3$ et 0.7 respectivement et en change le Bingham $B=5,10,20,30,50$ et la vitesse angulaire extérieur $\Omega_2=-3$ et -7 (Fig. II.25 et Fig. II.26) et la vitesse angulaire intérieur $\Omega_1=1$.

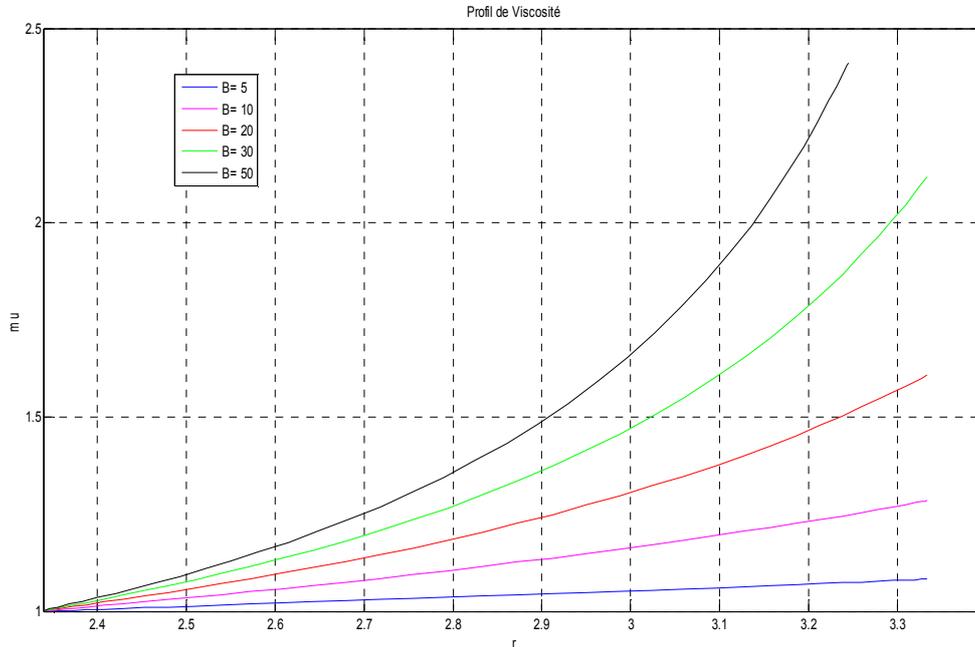


Fig. II.25: Profil de Viscosité pour un rapporte de rayon $\eta=0.3$: (1) $B=5$; (2) $B=10$; (3) $B=20$; (4) $B=30$; (5) $B=50$

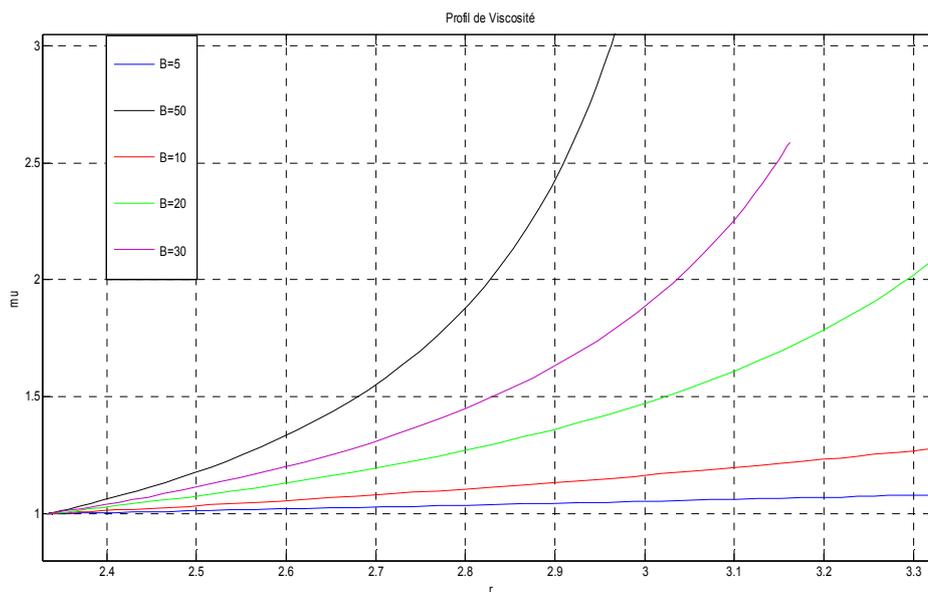


Fig. II.26: Profil de Viscosité pour un rapporte de rayon $\eta=0.7$: (1) $B=5$; (2) $B=10$; (3) $B=20$; (4) $B=30$; (5) $B=50$

Chapitre 2 écoulements de base

Les Fig.II.27, Fig.II.28 représentent les profils de viscosité pour un rapport de rayon $\eta=0.5$ et 0.881 respectivement et en change le Bingham $B=0,0.5,0.85,1,1.23$ et la vitesse angulaire extérieur $\Omega_2=5$ et 8.81 (Fig. II.27 et Fig. II.28) .et la vitesse angulaire intérieur $\Omega_1=1$.

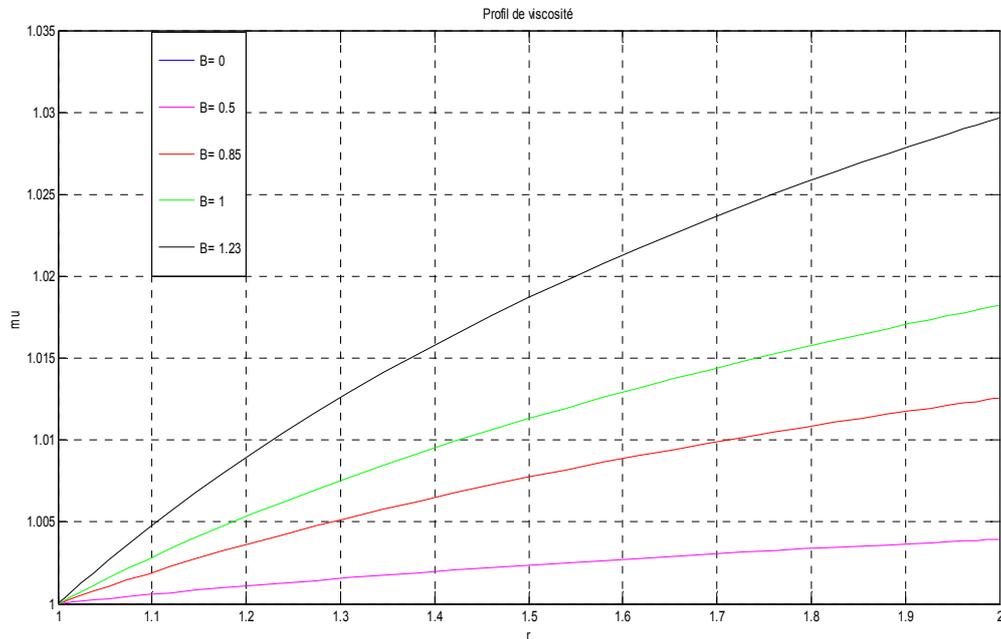


Fig. II.27: Profil de Viscosité pour un rapporte de rayon $\eta=0.5$:(1) $B=0$ fluide Newtonien;(2) $B=0.5$;(3) $B=0.85$;(4) $B=1$;(5) $B=1.23$

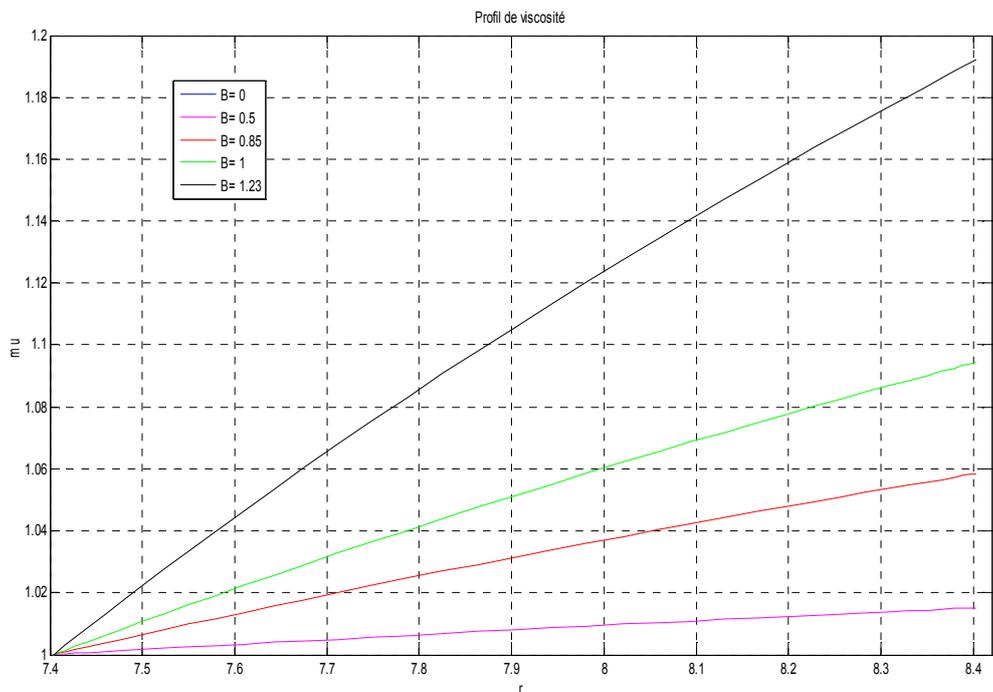


Fig. II.28: Profil de Viscosité pour un rapporte de rayon $\eta=0.881$:(1) $B=0$ fluide Newtonien;(2) $B=0.5$;(3) $B=0.85$;(4) $B=1$;(5) $B=1.23$

Chapitre 2 écoulements de base

Les Fig.II.29, Fig.II.30 représentent les profils de viscosité pour un rapport de rayon $\eta=0.3$ et 0.7 respectivement et en change le Bingham $B=0,0.5,0.85,1,1.23$ et la vitesse angulaire extérieur $\Omega_2=3$ et 7 (Fig. II.29 et Fig. II.30) et la vitesse angulaire intérieur $\Omega_1=1$.

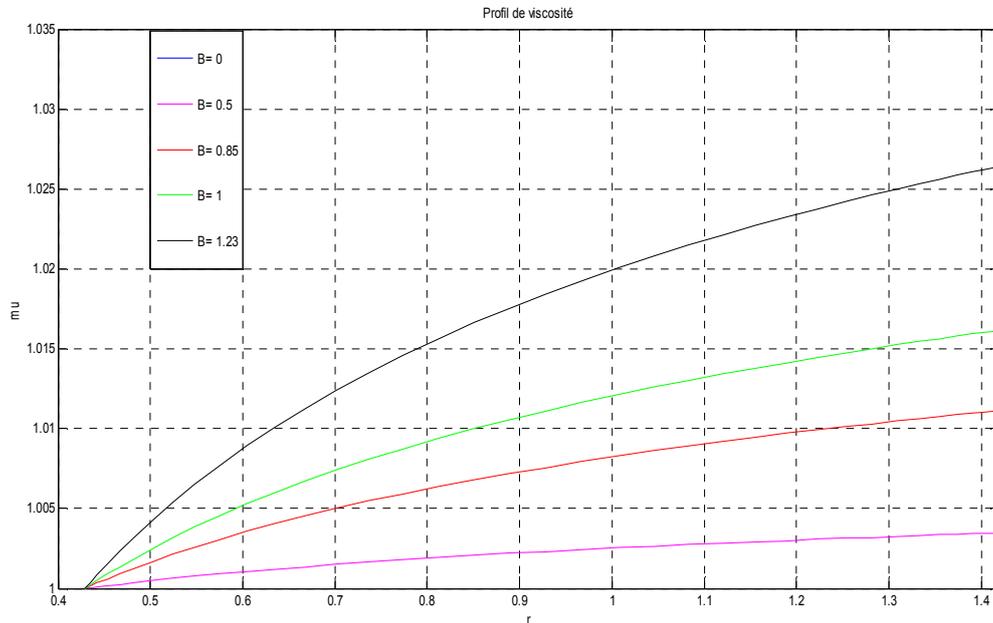


Fig. II.29: Profil de Viscosité un rapporte de rayon pour $\eta=0.3$: (1) $B=0$ fluide Newtonien; (2) $B=0.5$; (3) $B=0.85$; (4) $B=1$; (5) $B=1.23$

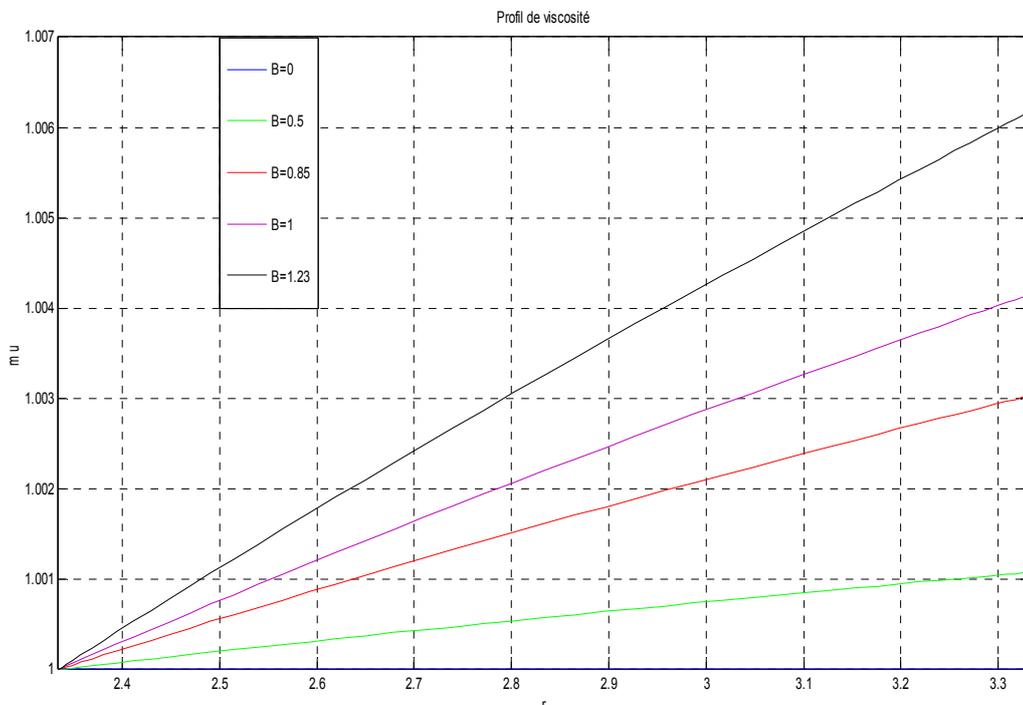


Fig. II.30: Profil de Viscosité pour un rapporte de rayon $\eta=0.7$: (1) $B=0$ fluide Newtonien; (2) $B=0.5$; (3) $B=0.85$; (4) $B=1$; (5) $B=1.23$

Chapitre 2 écoulements de base

Les Fig.II.31, Fig.II.32 représentent les profils de viscosité pour un rapport de rayon $\eta=0.5$ et 0.881 respectivement et en change le Bingham $B=5,10,20,30,50$ et la vitesse angulaire extérieur $\Omega_2=5$ et 8.81 (Fig. II.31 et Fig. II.32) .et la vitesse angulaire intérieur $\Omega_1=1$.

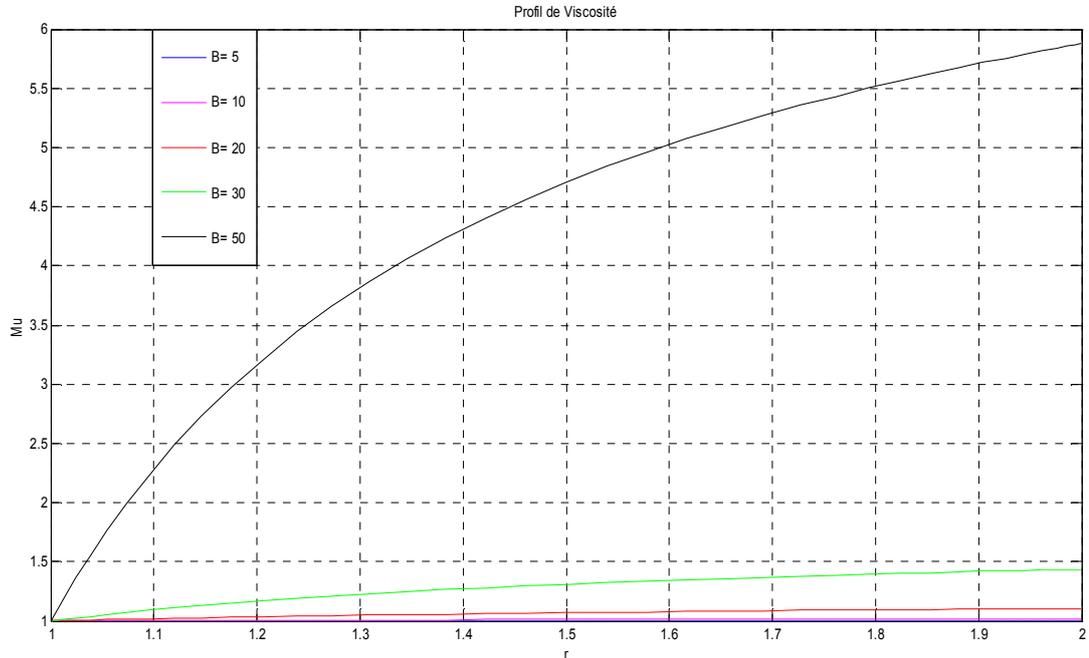


Fig. II.31: Profil de Viscosité pour un rapporte de rayon $\eta=0.5$:(1) $B=5$; (2) $B=10$; (3) $B=20$; (4) $B=30$;(5) $B=50$

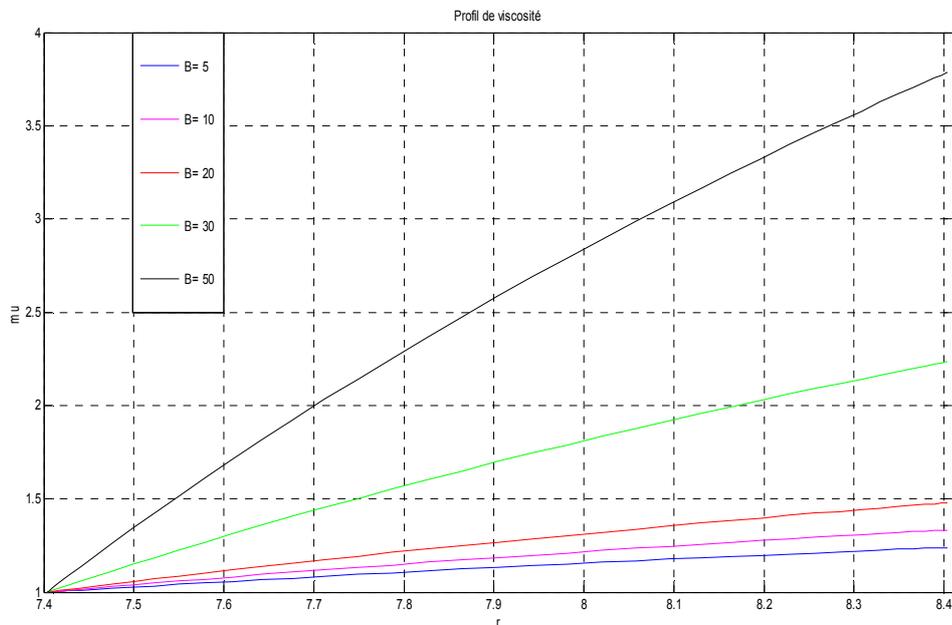


Fig. II.32: Profil de Viscosité pour un rapporte de rayon $\eta=0.881$:(1) $B=5$; (2) $B=10$; (3) $B=20$; (4) $B=30$;(5) $B=50$

Les **Fig.II.33, Fig.II.34** représentent les profils de viscosité pour un rapport de rayon $\eta=0.3$ et 0.7 respectivement et en change le Bingham $B=5,10,20,30,50$ et la vitesse angulaire extérieur $\Omega_2=3$ et 7 (**Fig. II.33** et **Fig. II.34**) .et la vitesse angulaire intérieur $\Omega_1=1$.

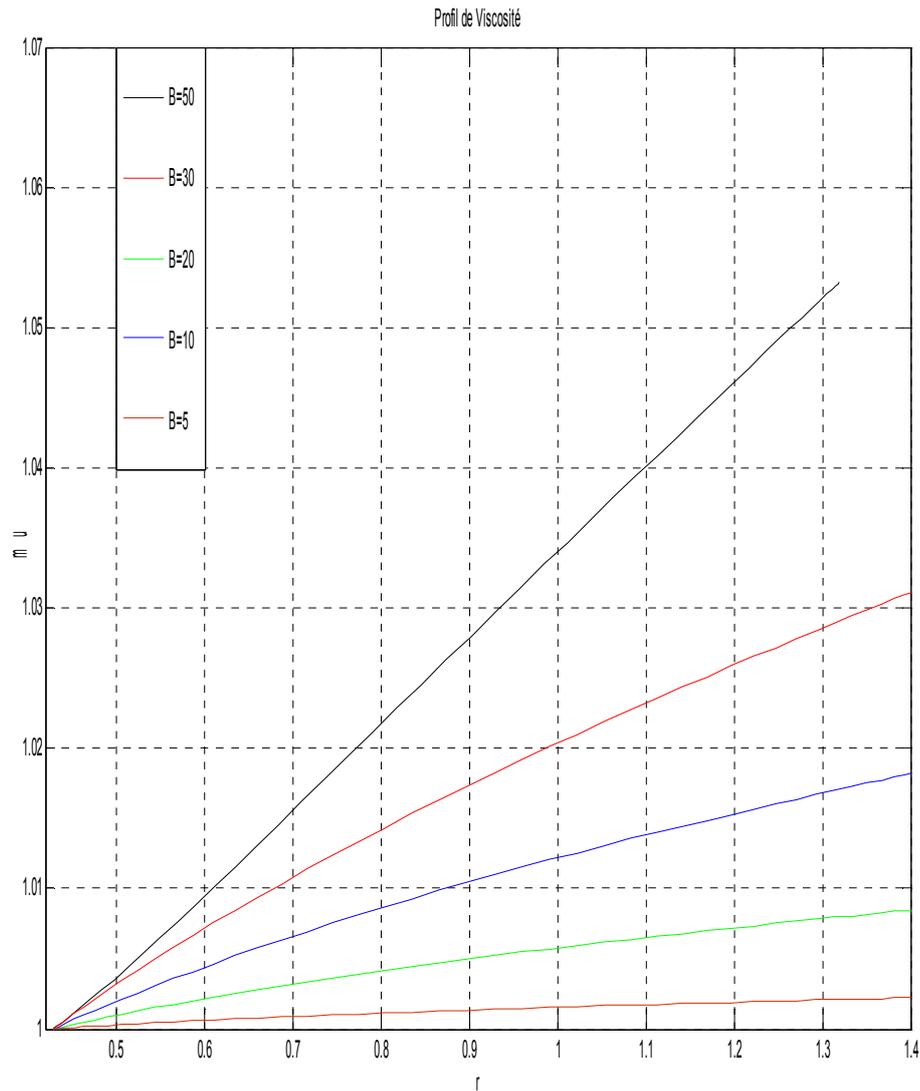


Fig. II.33: Profil de Viscosité pour un rapporte de rayon $\eta=0.3$:(1)B=5; (2)B=10 ; (3)B=20 ; (4)B=30 ;(5)B=50

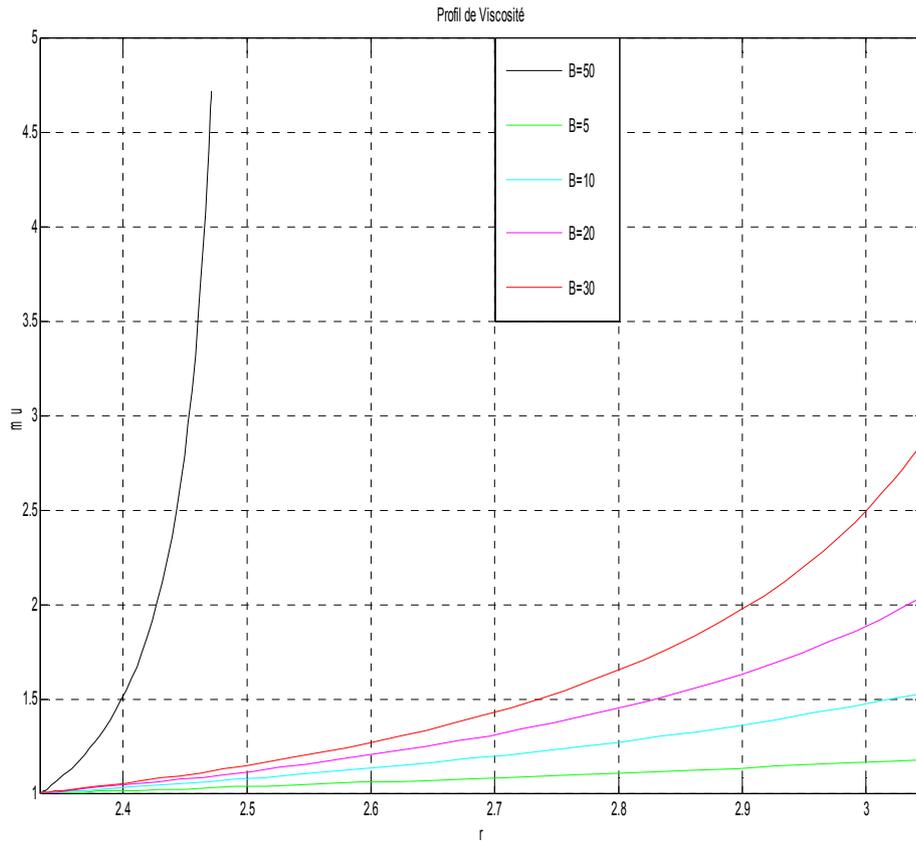


Fig. II.34: Profil de Viscosité pour un rapporte de rayon $\eta=0.7$: (1)B=5; (2)B=10 ; (3)B=20 ; (4)B=30 ;(5)B=50

à partir des figures (de III.11 à III.34) on observe que si on augmente le Bingham la viscosité augmente pour les trois cas où au début la vitesse angulaire extérieure est égale à 0 et on un cas le 2 eme est contre courant le 3 eme cas cocorant.

Conclusion :

On début on fait le Bingham égale à 0 le fluide est newtonien sa viscosité égale à 0 et après on varie sa quantité (Bingham $\neq 0$) la viscosité de fluide augmente et le fluide ne sera pas newtonien (non newtonien) donc si on augmente le Bingham le fluide devient visqueux.

II.5.Conclusion:

Finalement, l'écoulement de base est contrôlé par 3 paramètres (le B et η et Re). Dans ce qui suit, on étudie l'influence de ce dernier sur la stabilité de cet écoulement vis à vis d'une perturbation infinitésimale. En réalité, l'influence de B se manifeste par cinq effets:

- la modification de l'épaisseur de la zone cisailée, où a lieu l'échange d'énergie entre l'écoulement de base et la perturbation.
- la modification du gradient de vitesse.
- la condition aux limites aux interfaces qui désigne la vitesse de la perturbation.
- l'augmentation de la viscosité.
- la Rhéofluidification.

III.1 Introduction :

Pour déterminer quelle valeur de Re l'instabilité primaire survient, nous allons suivre une méthode laquelle en ajoutant une petite perturbation à l'écoulement de base, et de déterminer si cette perturbation croît ou décroît avec le temps. En supposant un mode normal solution pour cette perturbation, la perturbation linéaires équations devenue un système d'ordinaire plutôt que partielle différente équations, qui mène à une valeur propre problème. En outre, les conditions aux limites pour la perturbation sera dérivée. En plus de l'absence de patinage conditions aux limites sur les parois du cylindre.

III.2. résolution numérique : (méthode spectrale)

III.2.1. Introduction :

Comme nous l'avons vu dans le chapitre précédent, une première approche permettant de modéliser l'écoulement de base dans des structures compliquées consiste à résoudre l'équation des Navier stocks écrite sous forme différentielle en coordonnées cylindrique, par exemple en utilisant une méthode pseudo-spectrale. Bien que cette approche puisse être utilisée avec succès dans certains cas, elle présente l'inconvénient majeur d'être limitée au cas où une transformation globale de maillage suffisamment lisse peut être trouvée entre le domaine physique étudié et le domaine carré dans lequel sont effectués les calculs, ce qui est rarement le cas lorsque l'on considère des modèles réalistes. Une approche beaucoup plus naturelle, permettant de résoudre cette difficulté, consiste à utiliser la formulation variationnelle de l'équation des Navier stocks sur un maillage adapté aux contraintes géométriques du modèle. Classiquement, cela conduit à la méthode des éléments finis (Zienkiewicz, 1977 ; Hughes, 1987 ; Dhatt et Touzot, 1984). Quelques tentatives pour utiliser cette méthode en géophysique ont été effectuées (Lysmer et Drake, 1972 ; Drake, 1972) mais, en raison du faible ordre d'approximation qui est utilisé ordinairement afin de réduire le coût de calcul de tels schémas, la précision des résultats s'est souvent révélée décevante (Marfurt, 1984). Au vu de ces résultats, et dans le but d'augmenter la précision de la modélisation tout en maintenant un coût de calcul raisonnable, nous utilisons dans ce chapitre une méthode d'éléments spectraux (Patera, 1984 ; Bernardi et Maday, 1992 ; Azaiez et al., 1994 ; Priolo et al., 1994 ; Tordjman, 1995 ; Faccioli et

al., 1996) qui, au cours de la dernière décennie, a prouvé son efficacité essentiellement dans le domaine de la mécanique des fluides (Patera, 1984 ; Rønquist, 1988 ; Maday et Patera, 1989 ; Fisher, 1990 ; Azaiez et al., 1994 ; Yoon et Chung, 1996). Une telle méthode permet de résoudre l'équation des ondes élastiques dans des milieux compliqués, L'application de méthode numériques spectrales aux simulations numérique est apparue au début des années 1970 [11].

III.2.2. méthode spectrale :

Le but de ces méthodes est d'exposer notre problème en termes simples, les méthodes (pseudo)-spectrales, en tant qu'outil pour la résolution numérique d'équations aux dérivées partielles. Le point de vue essentiellement concret : il s'agit de comprendre pourquoi un physicien aurait besoin de celles-ci.

D'abord, pourquoi le nom méthodes spectrales (plus précisément, méthode spectrale, vu qu'il s'agit d'une méthode et non de plusieurs ! il y a plusieurs méthodes "pseudo-spectrales" comme on verra plus loin) ? La réponse est que cette méthode consiste à transformer un problème à celui du calcul des valeurs propres et fonctions propres d'un opérateur, ce que l'on appelle déterminer le spectre de l'opérateur en question. Et la raison pourquoi ceci est une chose intéressante est que, si l'opérateur est un opérateur linéaire, la fonction, dont on cherche à calculer les valeurs, peut être exprimée comme une combinaison linéaire des fonctions, sur lesquelles l'opérateur agit de façon "facilement" calculable. Le cas le plus simple est celui de ses fonctions propres, sur lesquelles il agit par multiplication par un nombre (la valeur propre correspondante), mais l'on va rencontrer d'autres cas aussi (d'où la variante "pseudo-spectrales", puisque dans ce cas l'on ne diagonalise pas l'opérateur qui nous intéresse). Commençons, donc, par un exemple concret, qui illustre comment on utilise la méthode spectrale pour calculer explicitement les valeurs d'une fonction, solution d'une équation aux dérivées partielles l'équation de Schrödinger dépendante du temps. [11]

Pour la résolution numérique de problème aux valeurs propres, nous utilisons la méthode numérique spectrale.

Les fonctions de base peuvent être des polynômes de Tchebycheff, des polynômes de Legendre, ou des fonctions trigonométriques (série de Fourier), si le phénomène est des solutions périodiques dans certains cas ou peut leur appliquer la transformation de Fourier rapide (FFT).

Un avantage des méthodes spectrales est que l'ordre d'erreur maximale... plus rapidement que $1/N^\alpha$, pour tout α ou N représente le rang de troncature dans les fonctions d'essai. Grâce aux méthodes spectrales, on peut étudier le phénomène dans le plan réel et dans le plan spectral, ce qui est spécialement intéressant dans l'étude de la turbulence.

Mais les méthodes spectrales présentent les difficultés suivantes : Efficacité limitée aux géométries simples (mais on surmonte cette difficulté en utilisant la transformation conforme). Algorithme de programmation plus compliqué que pour les différences finies par exemple. Aboutissement à des équations linéaires dont les matrices associées n'ont pas toujours une forme simple. Problèmes de conditionnement numérique et de stabilité [11].

III.3. Formulation du problème:

À l'écoulement de base, on superpose une perturbation infinitésimale notée (u', p') . L'écoulement perturbé s'écrit formellement sous la forme :

$$u = u + u', v = v + \Delta v', w = w + \Delta w' \quad \text{III.1}$$

Et de la pression

$$p = p + \Delta p'$$

Où $\Delta \ll 1$ est un petit paramètre sans dimension. L'écoulement perturbé est alors décrit par $\mathbf{U} + \mathbf{u}'$, $\mathbf{P} + \mathbf{p}'$ avec $U = (0, U(r), 0)$. Les équations de conservation de la masse et de la quantité de mouvement sont données par:

$$\nabla \cdot (U + u') = 0 \quad \text{III.2}$$

$$u'_t + Re_1(U + u') \cdot \nabla (U + u') = -\nabla(P + p') + \nabla \cdot \tau(U + u') \quad \text{III.3}$$

En soustrayant les équations (II.1) et (II.2) de (III.2) et (III.3), et en ne retenant que les termes linéaires on obtient :

$$\nabla \cdot u' = 0 \quad \text{III.4}$$

$$\epsilon(u'_t + Re_1[(u' \cdot \nabla)U + (U \cdot \nabla)u']) = -\epsilon \nabla p' + \nabla \cdot (\tau(U + \epsilon u') - \tau(U)) \quad \text{III.5}$$

Nous avons ensuite:

$$\tau_{ij}(U + \epsilon u') - \tau_{ij}(U) = \mu_e(U + \epsilon u') \dot{\gamma}_{ij}(U + \epsilon u') - \mu_e(U) \dot{\gamma}_{ij}(U) \text{III.6}$$

Avec $\mu_e = 1$

et

$$\dot{\gamma}_{ij}(U + \epsilon u') = \dot{\gamma}_{ij}(U) + \epsilon \dot{\gamma}_{ij}(u') \text{III.7}$$

Après développements :

$$u' \cdot \nabla U + U \cdot \nabla u' = \frac{v}{r} \left(\frac{\partial u'}{\partial \theta} - 2v' \right) e_r + \left(u' \frac{dv}{dr} + u' \frac{v}{r} + \frac{v}{r} \frac{\partial v'}{\partial \theta} \right) e_\theta + \left(\frac{v}{r} \frac{\partial w'}{\partial \theta} \right) e_z \text{III.8}$$

En remplaçant les développements (III.6 et III.7) dans (III.4. et III.5), on déduit les équations aux perturbations linéarités, soit [10]:

$$\frac{\partial u'}{\partial r} + \frac{u'}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial v'}{\partial \theta} + \frac{\partial w'}{\partial z} = 0 \text{III.9}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial u'}{\partial t} + Re_1 \frac{v}{r} \left(\frac{\partial u'}{\partial \theta} - 2v' \right) &= -\frac{\partial p'}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r \dot{\gamma}_{rr}(u')) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} (\dot{\gamma}_{r\theta}(u')) + \\ \frac{\partial}{\partial z} (\dot{\gamma}_{rz}(U)) - \frac{1}{r} \dot{\gamma}_{\theta\theta} & \text{III.10} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial v'}{\partial t} + Re_1 \left(u' \frac{dv}{dr} + u' \frac{v}{r} + \frac{v}{r} \frac{\partial v'}{\partial \theta} \right) &= -\frac{1}{r} \frac{\partial p'}{\partial \theta} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 \dot{\gamma}_{r\theta}) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} (\dot{\gamma}_{\theta\theta}) + \\ \frac{\partial}{\partial z} (\dot{\gamma}_{\theta z}) & \text{III.11} \end{aligned}$$

$$\frac{\partial w'}{\partial t} + Re_1 \left(\frac{v}{r} \frac{\partial w'}{\partial \theta} \right) = -\frac{\partial p'}{\partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r \dot{\gamma}_{zr}) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} (\dot{\gamma}_{z\theta}) + \frac{\partial}{\partial z} (\dot{\gamma}_{zz}) \text{III.12}$$

Avec

$$\begin{aligned} \dot{\gamma}_{rr}(u') &= 2 \frac{\partial u'}{\partial r} \\ \dot{\gamma}_{r\theta}(u') &= \frac{1}{r} \left(\frac{\partial u'}{\partial \theta} - v' \right) + \frac{\partial v'}{\partial r} \\ \dot{\gamma}_{rz}(u') &= \frac{\partial u'}{\partial z} + \frac{\partial w'}{\partial r} \end{aligned}$$

$$\dot{\gamma}_{\theta\theta}(u') = \frac{2}{r} \left(\frac{\partial v'}{\partial \theta} + u' \right)$$

$$\dot{\gamma}_{\theta z}(u') = \frac{1}{r} \frac{\partial w'}{\partial \theta} + \frac{\partial v}{\partial z}$$

$$\dot{\gamma}_{zz}(u') = 2 \frac{\partial w'}{\partial z}$$

On remplace $\dot{\gamma}_{ij}$ dans les équations III.9- III.11 [10]

$$\frac{\partial u'}{\partial r} + \frac{u'}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial v'}{\partial \theta} + \frac{\partial w'}{\partial z} = 0 \text{ III.13}$$

$$\frac{\partial u'}{\partial t} + \text{Re}_1 \frac{U}{r} \left(\frac{\partial u'}{\partial \theta} - 2v' \right) = -\frac{\partial p'}{\partial r} + \nabla^2 u' - \frac{2}{r^2} \frac{\partial v'}{\partial \theta} - \frac{u'}{r^2} \text{ III.14}$$

$$\frac{\partial v'}{\partial t} + \text{Re}_1 \left(u' D_* U + \frac{U}{r} \frac{\partial v'}{\partial \theta} \right) = -\frac{1}{r} \frac{\partial p'}{\partial \theta} + \nabla^2 v' - \frac{2}{r^2} \frac{\partial u'}{\partial \theta} - \frac{v'}{r^2} \text{ III.15}$$

$$\frac{\partial w'}{\partial t} + \text{Re}_1 \left(\frac{U}{r} \frac{\partial w'}{\partial \theta} \right) = -\frac{\partial p'}{\partial z} + \nabla^2 w' \text{ III.16}$$

Où $D_* = \frac{d}{dr} + \frac{1}{r} \text{Et} \quad \dot{\gamma} = \gamma(U) = |\dot{\gamma}_{r\theta}| = \frac{|\tau_1| R_1^2}{r^2}$

III.4 La méthode des modes normaux

Les équations aux perturbations linéarités (III.13-III.16) ne varie pas aux directions angulaire, il s'en suit que toute solution peut être écrite sous la forme d'une superposition de modes de Fourier complexes [10] :

$$(u', v', w', p') = e^{\lambda t + i(m\theta + kz)} (u(r), v(r), w(r), p(r)) \text{ III.17 Avec}$$

m : sont le nombre d'onde dans les directions longitudinale.

k : sont le nombre d'onde dans les directions azimutale.

Ou $\lambda = \lambda_r + i\lambda_i$

λ_r : c'est la partie réelle représentant le taux d'amplification.

λ_i : partie imaginaire (la vitesse de phase)

Pour :

$$\alpha = \lambda t + i(m\theta + kz)$$

On remplace $\mathbf{D} = \frac{d}{dr}$ chaque fois avec le symbole $\dot{\gamma}_{ij}$ et en obtenir :

$$\dot{\gamma}_{rr}(u') = 2 \frac{\partial u'}{\partial r} = 2D u e^{\alpha} \text{III.18}$$

$$\dot{\gamma}_{r\theta}(u') = \frac{1}{r} \left(\frac{\partial u'}{\partial \theta} - v' \right) + \frac{\partial v'}{\partial r} = \left(\frac{1}{r} (i m u - v) + D v \right) e^{\alpha} \text{III.19}$$

$$\dot{\gamma}_{rz}(u') = \frac{\partial u'}{\partial z} + \frac{\partial w'}{\partial r} = (i k u + D w) e^{\alpha} \text{III.20}$$

$$\dot{\gamma}_{\theta\theta}(u') = \frac{2}{r} \left(\frac{\partial v'}{\partial \theta} + u' \right) = \frac{2}{r} (i m v + u) e^{\alpha} \text{III.21}$$

$$\dot{\gamma}_{\theta z}(u') = \frac{1}{r} \frac{\partial w'}{\partial \theta} + \frac{\partial v}{\partial z} = \left(\frac{1}{r} i m w + i k v \right) e^{\alpha} \text{III.22}$$

$$\dot{\gamma}_{zz}(u') = 2 \frac{\partial w'}{\partial z} = 2 i k w e^{\alpha} \text{III.23}$$

Avec :

$$\frac{\partial u'}{\partial r} = D u e^{\alpha}, \quad \frac{\partial v'}{\partial r} = D v e^{\alpha}, \quad \frac{\partial w'}{\partial r} = D w e^{\alpha} \text{III.24}$$

$$\frac{\partial u'}{\partial \theta} = i m u e^{\alpha}, \quad \frac{\partial v'}{\partial \theta} = i m v e^{\alpha}, \quad \frac{\partial w'}{\partial \theta} = i m w e^{\alpha} \text{III.25}$$

$$\frac{\partial u'}{\partial z} = i k u e^{\alpha}, \quad \frac{\partial v'}{\partial z} = i k v e^{\alpha}, \quad \frac{\partial w'}{\partial z} = i k w e^{\alpha} \text{IV.26}$$

On remplace IV.24-IV.26 a équation de continuité IV.13 [10] :

$$D u' e^{\alpha} + \frac{u'}{r} e^{\alpha} + \frac{1}{r} i m v e^{\alpha} + i k w e^{\alpha} = 0 \Leftrightarrow \left[D u' + \frac{u'}{r} + \frac{1}{r} i m v + i k w \right] e^{\alpha} = 0$$

$$\Leftrightarrow D_* u' + \frac{1}{r} i m v + i k w = 0 \text{III.27}$$

Réécrire les équations (III.14.-III.16) à la forme suivant :

$$\frac{\partial u'}{\partial t} = -Re_1 \frac{U}{r} \left(\frac{\partial u'}{\partial \theta} - 2v' \right) - \frac{\partial p'}{\partial r} + \nabla^2 u' - \frac{2}{r^2} \frac{\partial v'}{\partial \theta} - \frac{u'}{r^2} \text{III.28}$$

$$\frac{\partial v'}{\partial t} = -Re_1 \left(u' D_* U + \frac{v}{r} \frac{\partial v'}{\partial \theta} \right) - \frac{1}{r} \frac{\partial p'}{\partial \theta} + \nabla^2 v' - \frac{2}{r^2} \frac{\partial u'}{\partial \theta} - \frac{v'}{r^2} \text{III.29}$$

$$\frac{\partial w'}{\partial t} = -Re_1 \left(\frac{U}{r} \frac{\partial w'}{\partial \theta} \right) - \frac{\partial p'}{\partial z} + \nabla^2 w' \text{III.30}$$

Avec

$$\frac{\partial u'}{\partial t} = \lambda u' e^\alpha, \quad \frac{\partial v'}{\partial t} = \lambda v' e^\alpha, \quad \frac{\partial w'}{\partial t} = \lambda w' e^\alpha \text{III.31}$$

$$\frac{\partial p'}{\partial r} = D p e^\alpha, \quad \frac{\partial p'}{\partial \theta} = i m p e^\alpha, \quad \frac{\partial p'}{\partial z} = i k p e^\alpha \text{III.32}$$

On remplace les équations (IV.18-IV.26) et (IV.31-IV.32) en (IV.28-IV.30) pour devenir [10]

$$\begin{aligned} \lambda u' e^\alpha = & -Re_1 \frac{U}{r} (i m u' e^\alpha - 2v' e^\alpha) - D p' e^\alpha + D^2 u' e^\alpha + \frac{D u'}{r} e^\alpha + \\ & (i k)^2 u' e^\alpha + (i m)^2 u' e^\alpha - \frac{2}{r^2} i m u' e^\alpha - \frac{u' e^\alpha}{r^2} \text{III.33} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \lambda v' e^\alpha = & -Re_1 \left(D_* v u' e^\alpha - \frac{U}{r} i m v' e^\alpha \right) - \frac{1}{r} i m p' e^\alpha + D^2 v' e^\alpha + \frac{D v'}{r} e^\alpha \\ & + (i k)^2 v' e^\alpha + (i m)^2 v' e^\alpha - \frac{2}{r^2} i m u' e^\alpha - \frac{v' e^\alpha}{r^2} \end{aligned}$$

III.34

$$\begin{aligned} \lambda w' e^\alpha = & -Re_1 \left(\frac{U}{r} i m w' e^\alpha \right) - \frac{1}{r} i k p' e^\alpha + D^2 w' e^\alpha + \frac{D w'}{r} e^\alpha + \\ & (i k)^2 w' e^\alpha + (i m)^2 w' e^\alpha \text{III.35} \end{aligned}$$

Perturbation axisymétrique : $m=0$

Dans le premier cas Bingham = 0

L'équation de continuité III.27 est [10] :

$$D_*u + ikw = 0 \text{ III.36}$$

Les équations de quantité mouvement (III.33-III.35) est :

$$\lambda u - 2Re_1 \left(\frac{v}{r} \right) v = -Dp + D^2u + \frac{Du}{r} - K^2u - \frac{u}{r^2} \text{ III.37}$$

$$\lambda v + Re_1 u D_*v = D^2v + \frac{Dv}{r} - K^2v - \frac{v}{r^2} \text{ III.38}$$

$$\lambda w = -ikp + D^2w + \frac{Dw}{r} - K^2w \text{ III.39}$$

En utilisant le fait que $DD_* = \frac{d^2}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d}{dr} - \frac{1}{r^2}$ et $D_*D = \frac{d^2}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d}{dr}$ nous pouvons réécrire les équations (III.36) à (III.39) comme :

$$D_*u = -ikw \text{ III.40}$$

$$(DD_* - k^2 - \lambda)u + 2Re_1 \left(\frac{v}{r} \right) v = -Dp \text{ III.41}$$

$$(DD_* - k^2 - \lambda)v = Re_1 u (D * V) \text{ III.42}$$

$$(DD_* - k^2 - \lambda)w = ikp \text{ III.43}$$

On élimine w et la pression p . ces manipulations conduisent aux équations suivantes formulées seulement en u et v .

Par combinaison entre l'équation (III.40) et (III.43) on obtient

$$(DD_* - k^2 - \lambda)D_*u = -ik(ikp) = k^2p \text{ III.44}$$

Alors
$$Dp = \frac{1}{k^2} D(D_*D - K^2 - \lambda)D_*u \text{ III.45}$$

Substituer l'expression ci-dessus pour la Dp en équation (III.41) pour obtenir

$$(DD_* - k^2 - \lambda)u + 2Re_1 \left(\frac{v}{r} \right) v = \frac{1}{k^2} D(D_*D - K^2 - \lambda)D_*u \text{ III.46}$$

Noter

$$\frac{1}{k^2} D(D_*D - K^2 - \lambda)D_*u - (DD_* - k^2 - \lambda)u = \frac{1}{k^2} (D_*D - K^2 - \lambda)(D_*D - K^2)u$$

III.47

Afin que nous puissions obtenir les équations différentielles [10]

$$(D_*D - K^2 - \lambda)(DD_* - k^2)u = 2k^2 \operatorname{Re}_1 \left(\frac{V}{r} \right) v \text{ III.48}$$

$$(DD_* - k^2 - \lambda)v = \operatorname{Re}_1(D_*V)u \text{ III.49}$$

Qui peut être réécrite comme le système linéaire

$$A = \lambda * B$$

$$\begin{pmatrix} (DD_* - k^2)^2 & -2k^2 \operatorname{Re}_1 \left(\frac{V}{r} \right) \\ -\operatorname{Re}_1(D_*V) & (DD_* - k^2) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} DD_* - k^2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \text{ III.50}$$

$$A = \begin{pmatrix} (DD_* - k^2)^2 & -2k^2 \operatorname{Re}_1 \left(\frac{V}{r} \right) \\ -\operatorname{Re}_1(D_*V) & (DD_* - k^2) \end{pmatrix} \text{ III.51}$$

$$B = \begin{pmatrix} DD_* - k^2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

III.52

maintenant on ajoute se terme de Bingham ($B \neq 0$), donc la martrice sera écreé commss suivant [10] :

$$M_{\text{Newtonien}} = \begin{pmatrix} (DD_* - k^2)^2 & -2k^2 \operatorname{Re}_1 \left(\frac{V}{r} \right) \\ -\operatorname{Re}_1(D_*V) & (DD_* - k^2) \end{pmatrix} \text{ III.53}$$

$$M_{\text{Bingham}} = \begin{pmatrix} -D' & 0 \\ 0 & -\frac{K^2}{\gamma'} \end{pmatrix} \text{ III.54}$$

$$M_{\text{Newtonien}} + M_{\text{Bingham}} = \begin{pmatrix} (DD_* - k^2)^2 & -2k^2 \operatorname{Re}_1 \left(\frac{V}{r} \right) \\ -\operatorname{Re}_1(D_*V) & (DD_* - k^2) \end{pmatrix} + B \begin{pmatrix} -D' & 0 \\ 0 & -\frac{K^2}{\gamma'} \end{pmatrix} \text{ III.55}$$

Donc l'équation III.50 devient comme suit :

$$M_{\text{Newtonien}} + M_{\text{Bingham}} = \begin{pmatrix} (DD_* - k^2)^2 - BD' & -2k^2 \text{Re}_1 \left(\frac{V}{r} \right) \\ -\text{Re}_1(D_* V) & (DD_* - k^2) - B \frac{K^2}{\gamma'} \end{pmatrix} \text{III.56}$$

$$\text{Où } D'u = D\phi_z + k^2 \phi_r \text{III.57}$$

$$\text{Où } \phi_z = a_3 D^3 u + a_2 D^2 u + a_1 D u + a_0 u \text{III.58}$$

Où

$$a_0 = \frac{K^2}{r\gamma'} + \frac{K^2 D\gamma'}{\gamma'^2} + \frac{D\gamma'}{\gamma'^2 r^2} + \frac{1}{r^3 \gamma'} \text{III.59}$$

$$a_1 = \frac{K^2}{\gamma'} + \frac{1}{r^2 \gamma'} + \frac{D\gamma'}{\gamma'^2 r} \text{III.60}$$

$$a_2 = -\frac{1}{r\gamma'} + \frac{D\gamma'}{\gamma'^2} \text{III.61}$$

$$a_3 = -\frac{1}{\gamma'} \text{III.62}$$

$$\text{avec } \phi_r = \left(\frac{1}{\gamma'} \right) D^2 u + \left(\frac{1}{r\gamma'} - \frac{2D\gamma'}{\gamma'^2} \right) D u - \left(\frac{1}{r^2 \gamma'} + \frac{K^2}{\gamma'} \right) u \text{III.63}$$

Pour tracer la courbe de stabilité marginale nous prenons les valeurs de Re_1 de chaque rapport de rayon η qui déterminent aux étapes précédentes et déterminent le nombre de Reynolds critique de 2^{ème} cylindre Re_2 et en change la valeur de $B=0, 1, 5$ et 10 .

$$\text{Re}_1 = \frac{\rho R_1 \Omega_1 d}{\mu}$$

$$\text{Re}_2 = \frac{\rho R_2 \Omega_2 d}{\mu}$$

On obtient la relation suivante :

$$\text{Re}_2 = \text{Re}_{1c} \frac{\Omega}{\eta}$$

On trace la courbe (Re_2 , Re_1) :

III.4 : Organigramme :

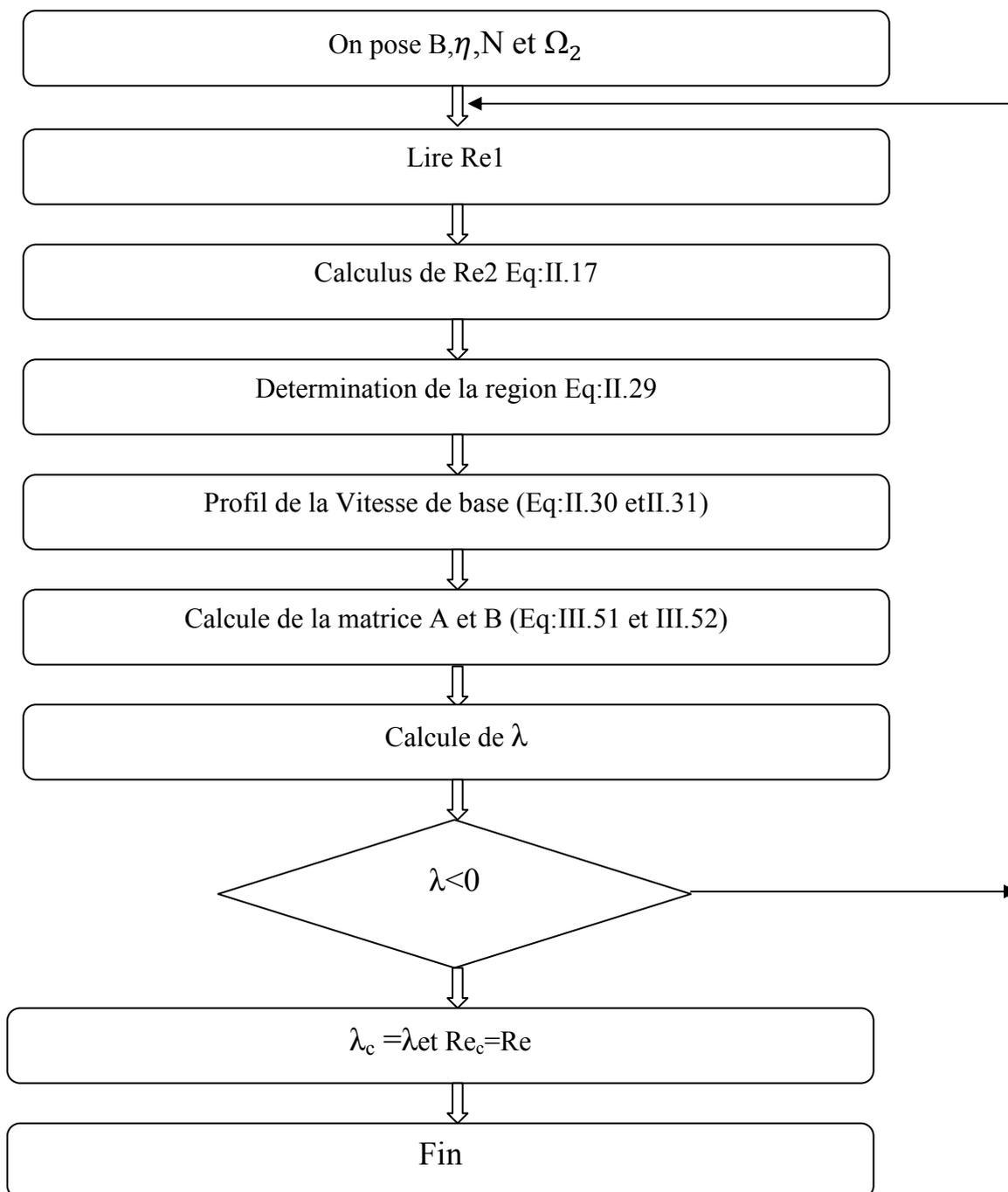


Tableau. III.1 : L'organigramme de travail.

IV.1. Introduction :

Dans ce chapitre, nous présentons les résultats obtenus sur la stabilité de l'écoulement d'un fluide de Bingham pour un écoulement de Taylor Couette, vis-à-vis d'une perturbation infinitésimale. L'approche présentée dans cette partie a permis de déterminer les conditions critiques d'instabilité ainsi que la structure du mode le moins stable. Nous commençons par l'étude des spectres pour le cas où le cylindre intérieur est en rotation et le cylindre extérieur fixe et le cas où les deux cylindres tournent pour une perturbation axisymétrique. La dernière partie est consacrée à l'étude de la stabilité marginale.

IV.2. La convergence :

Pour tester la convergence de la méthode numérique, le calcul de l'état critique est fait pour différentes valeurs de N . Les tests numériques sont faits pour assurer la convergence et de la précision.

N	10	20	30	40	50
Re _{lc}	66.7262	66.7169	66.7169	66.7169	66.7169
kc	3.9916	3.9925	3.9930	3.9930	3.9930

Tableau. IV.1 : la convergence de fluide newtonien à $\eta=0.3$

N	10	20	30	40	50
Re _{lc}	62.5015	62.5016	62.5017	62.5017	62.5017
kc	3.9259	3.9160	3.9159	3.9159	3.9159

Tableau. IV.2 : la convergence de fluide newtonien à $\eta=0.5$

N	10	20	30	40	50
Re _{lc}	112.5469	112.5476	112.5476	112.5476	112.5476
kc	3.8458	3.8458	3.8485	3.8485	3.8485

Tableau. IV.3 : la convergence de fluide newtonien à $\eta=0.883$

Les résultats sont illustrés dans les tableaux IV.1, IV.2, et IV.3 pour les fluides newtoniens. On observe que les 30 points admis une précision suffisante pour les paramètres

rhéologiques, donc on peut considérer les résultats donnés dans ce travail ont été obtenues avec $N = 50$ périodiquement.

IV.3 Les Conditions critiques :(Perturbation axisymétrique : $m = 0$)

L'approche modale présentée dans cette partie a permis de déterminer les conditions critiques d'instabilité ainsi que la structure du mode le moins stable. Nous allons donc rechercher pour le cas où le cylindre intérieur est en rotation et le cylindre extérieur fixe, la valeur du nombre de Reynolds critique (Re_c) minimale à partir de laquelle une valeur propre devient positive. Nous calculons également la valeur de nombre d'onde critique k_c qui lui est associé. Dans ce qui suit, on va examiner l'influence des paramètres rhéologiques sur l'amplification de l'énergie et les caractéristiques de la perturbation optimale. Comme il a été déjà indiqué, cette influence se manifeste à travers : (i) les effets des conditions aux limites à l'interface, (ii) la variation globale de la viscosité effective et (iii) la stratification de la viscosité.

a) les fluides Newtonien:

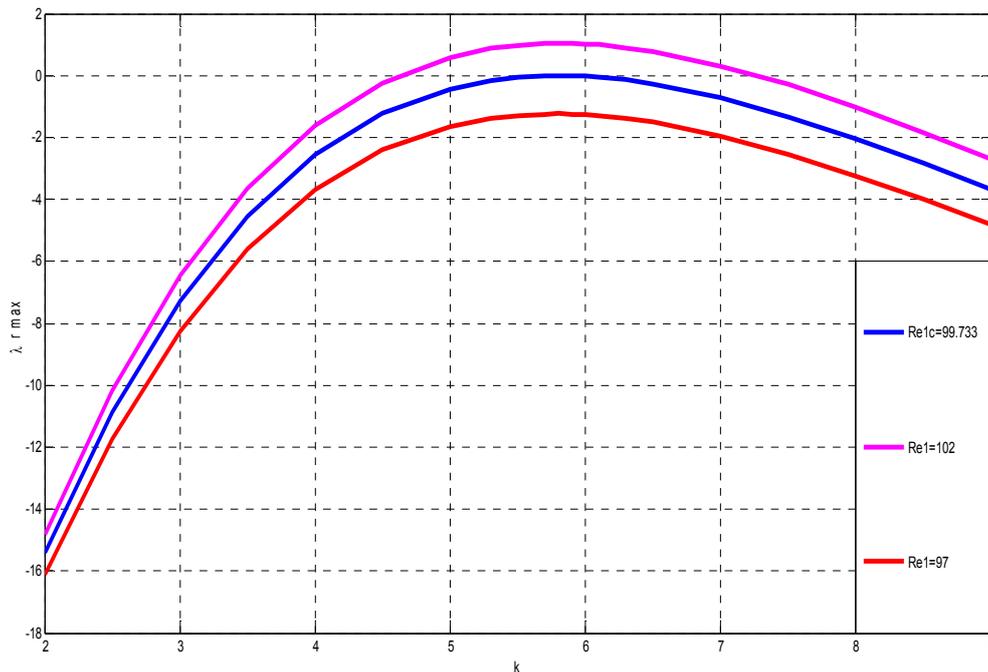
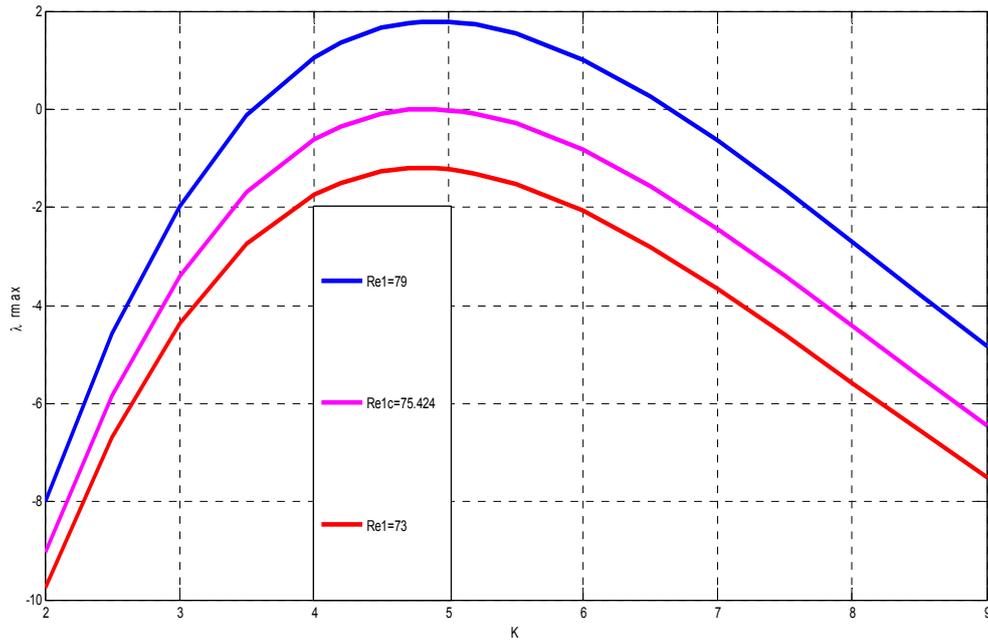


Fig.IV.1. les condition critique (λ_c , $Re1_c$, k_c) en $\eta=0.3$

la figure(IV.1) représente la variation de nombre de Reynolds $Re1$ pour $\Omega_2=0$ et un rapport de rayon $\eta=0.3$, l'écoulement est stable pour $Re1=97$ ($\lambda < 0$) et instable pour $Re1=102$ ($\lambda > 0$) et pour $Re1=99.733$ donc λ est pré de zéros qui représente le $Re1_c$ et donc $Re1_c=99.733$ et $\lambda_c=-0.097$.



FigIV.2. Les conditions critiques (λ_c , $Re1_c$, k_c) en $\eta=0.5$

la figure(IV.2) représente la variation de nombre de Reynolds $Re1$ pour $\Omega_2=0$ et un rapport de rayon $\eta=0.5$, l'écoulement est stable pour $Re1=73$ ($\lambda < 0$) et instable pour $Re1=79$ ($\lambda > 0$) et pour $Re1=75.424$ donc λ est pré de zéros qui représente le $Re1_c$ et donc $Re1_c=75.424$ et $\lambda_c=-0.073$

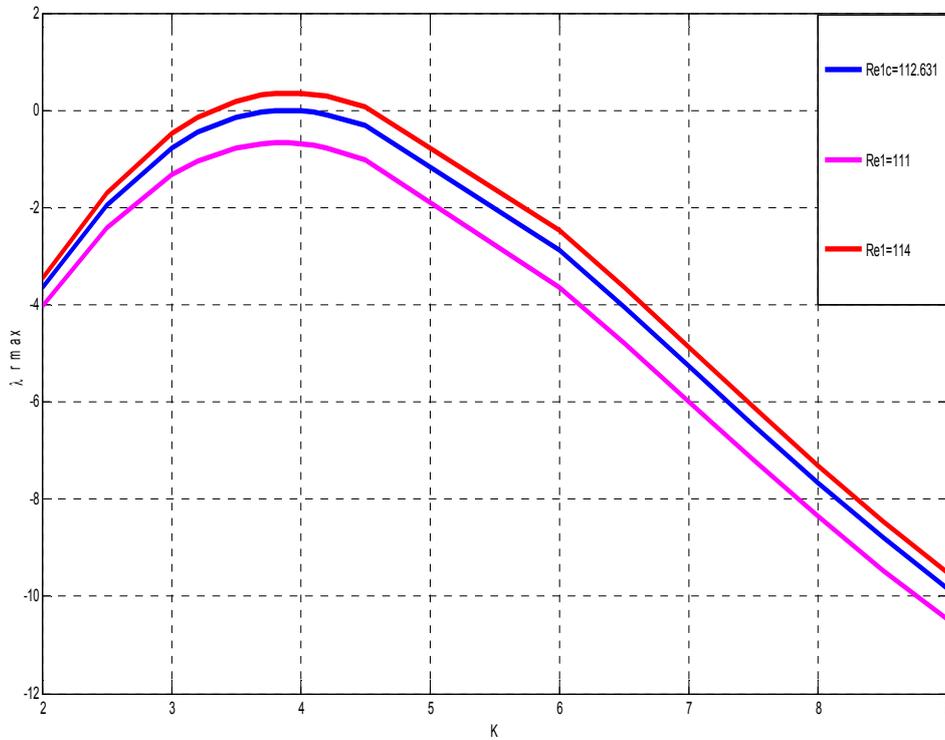


Fig.IV.3. les condition critique (λ_c , $Re1_c$, k_c) en $\eta=0.883$

la figure(IV.3) représente la variation de nombre de Reynolds Re_1 pour $\Omega_2=0$ et un rapport de rayon $\eta=0.5$, l'écoulement est stable pour $Re_1=118(\lambda<0)$ et instable pour $Re_1=114(\lambda>0)$ et pour $Re_1=116.133$ donc λ est pré de zéros qui représente le Re_{1c} et donc $Re_{1c}=116.133$ et $\lambda_c=-0.0137$ c.-à-d :

$Re_1 \leq Re_{1c}$ si écoulement stable.

$Re_1 \geq Re_{1c}$ si écoulement instable.

b) les fluides non Newtonien:

Cette figure représente le λ_r max en fonction de k lorsque le cas critique ici est le $Re_{1c}=116.133$ donc la valeur $Re_1=118$ implique que l'écoulement est instable et lorsque la valeur de $Re_1=114$ est stable.

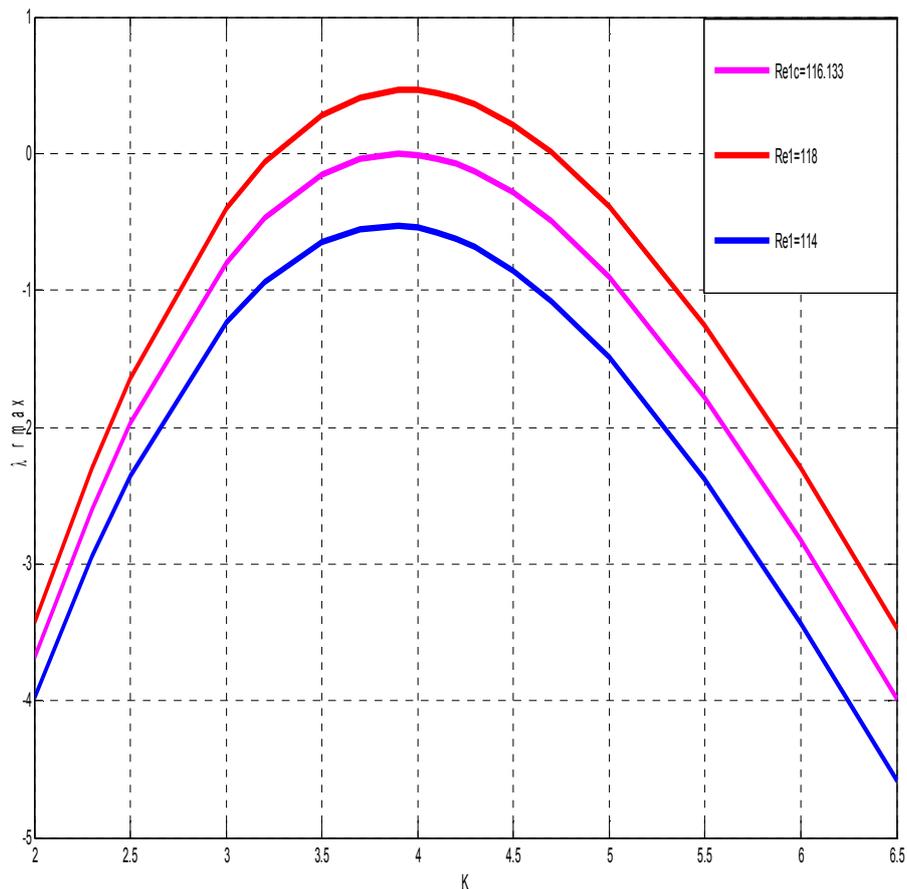


Fig.IV.4. les conditions critiques ($\lambda_c=-8.8199*10^{-4}$, $Re_{1c}=116.133$, $k_c=3.9$) en $\eta=0.883$ et le $B=1$

Pour tracer cette Fig.IV.4 au début en cherche le Re_{1c} pour un $B=1$ et en laisse la vitesse angulaire extérieur nul $\Omega_2=0$ et en même temps on trouve le K_c et λ_{rc} , et pour

trouver plusieurs points en donne k et on trouve le λ_{max} , donc l'importance de ce travail est de comprendre comment trouver les conditions critiques et s'avoir de connaître si ce que le fluide est stable ou non.

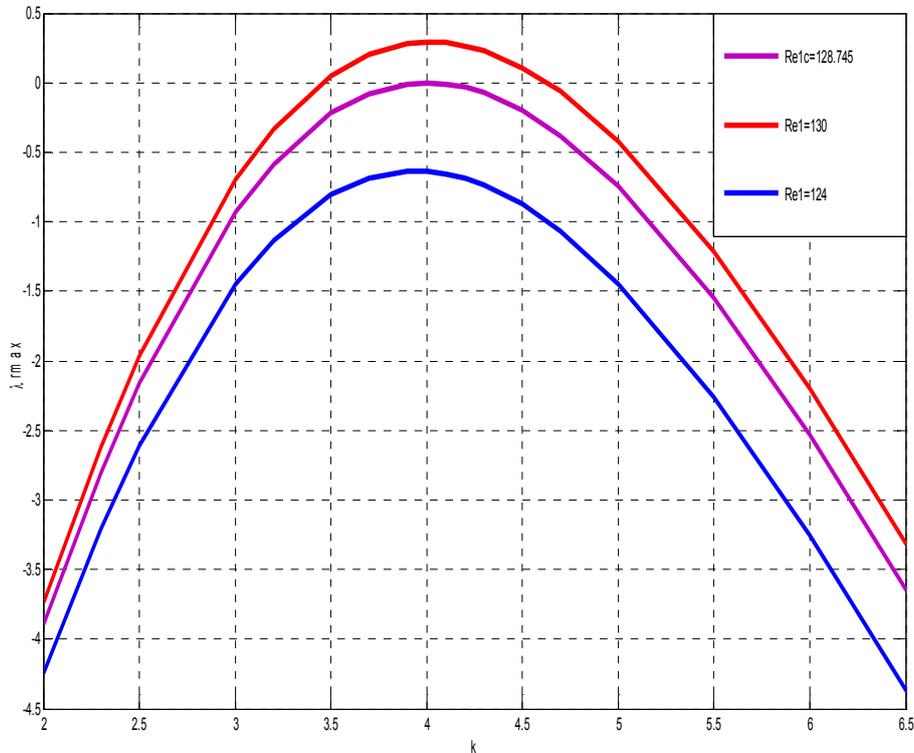


Fig.IV.5. Les conditions critiques ($\lambda_c = -8.1996 \cdot 10^{-4}$, $Re_c = 128.745$, $k_c = 4$) en $\eta = 0.883$ et le $B = 5$

IV.4 étude des spectres :

Selon les valeurs des nombres d'ondes k et m , plusieurs situations peuvent être considérées : (1) perturbation axisymétrique $k \neq 0$, $m = 0$; (2) perturbation tridimensionnelle $k \neq 0$, $m \neq 0$ et (3) perturbation homogène dans la direction axiale $k = 0$, $m \neq 0$. Dans notre cas on s'intéresse que pour la première situation c.-à-d. perturbation axisymétrique $k \neq 0$, $m = 0$

a- Cas où le cylindre intérieur en rotation et le cylindre extérieur fixe :

Dans un premier temps, nous commençons par considérer le cas où le cylindre intérieur est en rotation et le cylindre extérieur fixe. Dans le cas d'une perturbation axisymétrique, la formulation (u, v) est utilisée. On représentera les spectres des valeurs propres obtenus pour le fluide de Bingham, loi ainsi que le cas Newtonien (figures IV.6, IV.7, IV.8 et IV.9). En premier lieu, si l'on regarde le spectre, on s'aperçoit que toutes les valeurs propres sont disposées sur l'axe des réels et ont donc une pulsation nulle : ceci correspond à des modes qui ne se propagent pas et décroissent sur place. D'autre part, on peut remarquer que les

Chapitre 4 [Résultats et Discussion]

valeurs propres ne sont pas réparties de manière homogène dans le plan complexe. Non seulement, elle se rapproche à mesure que l'on tend vers la valeur propre nulle, mais elles sont de plus en plus appariées, tout comme si l'on avait affaire à des doublets propres. On retrouve d'ailleurs ce phénomène de doublet dans les fonctions propres, car deux fonctions propres d'un même doublet auront le même nombre de nœuds. Dans le cas d'un fluide à seuil, on note que le nombre de Bingham (contrainte seuil adimensionnelle) réduit de manière significatives les doublets retrouvés dans les cas newtonien.

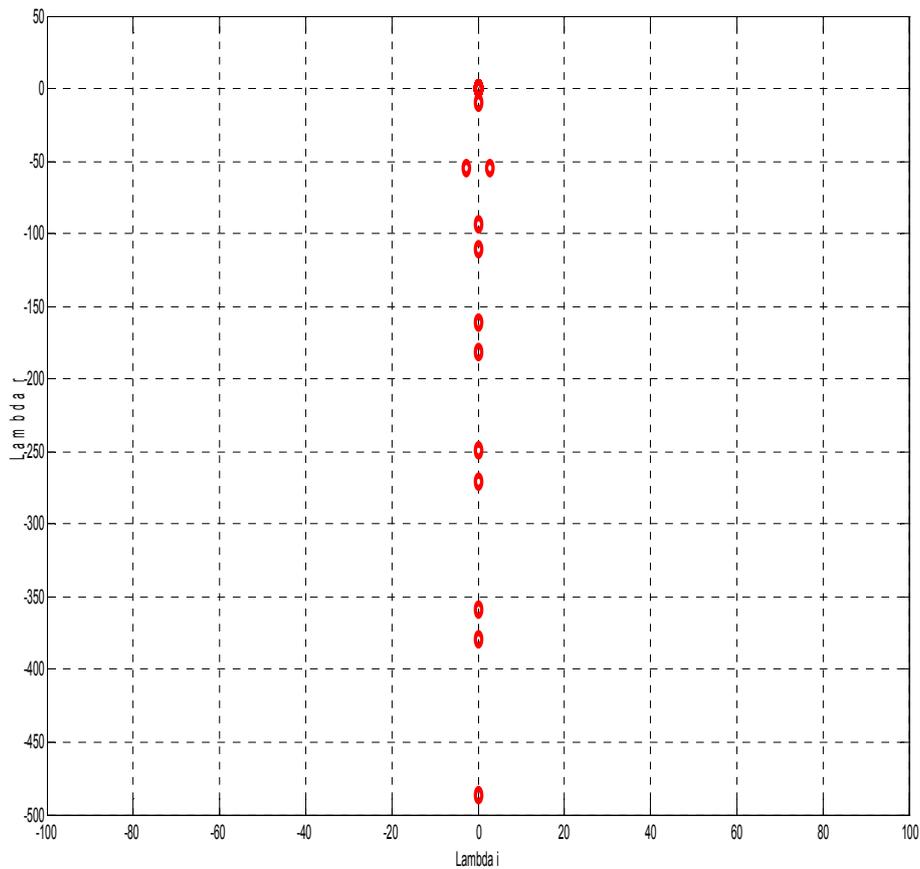


Fig.IV.6. Spectre pour un fluide newtonien a rapport de rayon $\eta=0.5$, $\Omega_2=0$ $R_1=75.425$ et $k=4.9$

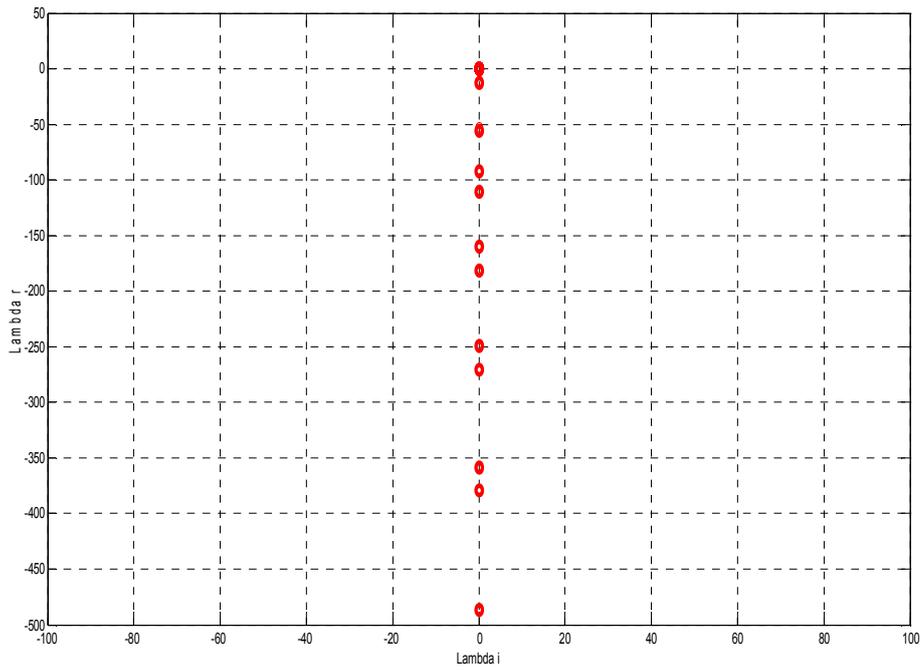


Fig.

IV.7. Spectre pour un fluide newtonien pour un rapport de rayon $\eta=0.5$ et $\Omega_2=0$ et $R_1=55$ et $k=3.4$

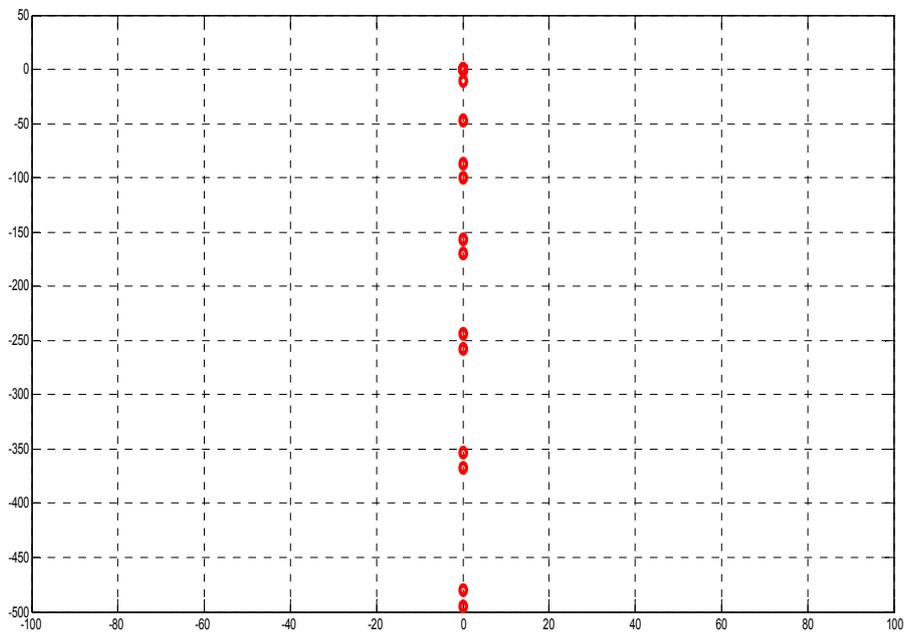


Fig. IV.8. Spectre pour un fluide newtonien a rapport de rayon $\eta=0.5$ et $\Omega_2=0$ et $R_1=63$ et $k=3.4$

Chapitre 4 [Résultats et Discussion]

Pour les cylindres contra - rotatifs, les figures **IV.10**, **IV.11**, **IV.12**, **IV.13** et **IV.14** montrent des spectres de valeurs propres obtenus pour un fluide Newtonien. Le nombre de Reynolds intérieur est fixé et le nombre de Reynolds extérieur augmente en valeur absolue. Lorsque $Re_2=0$, le spectre est constitué de valeurs propres à partie imaginaire nulle. Lorsque le Reynolds extérieur augmente en valeur absolue, deux branches littérales symétriques apparaissent.

L'étendue de ces branches augmente avec l'augmentation de la valeur absolue Reynolds extérieur :

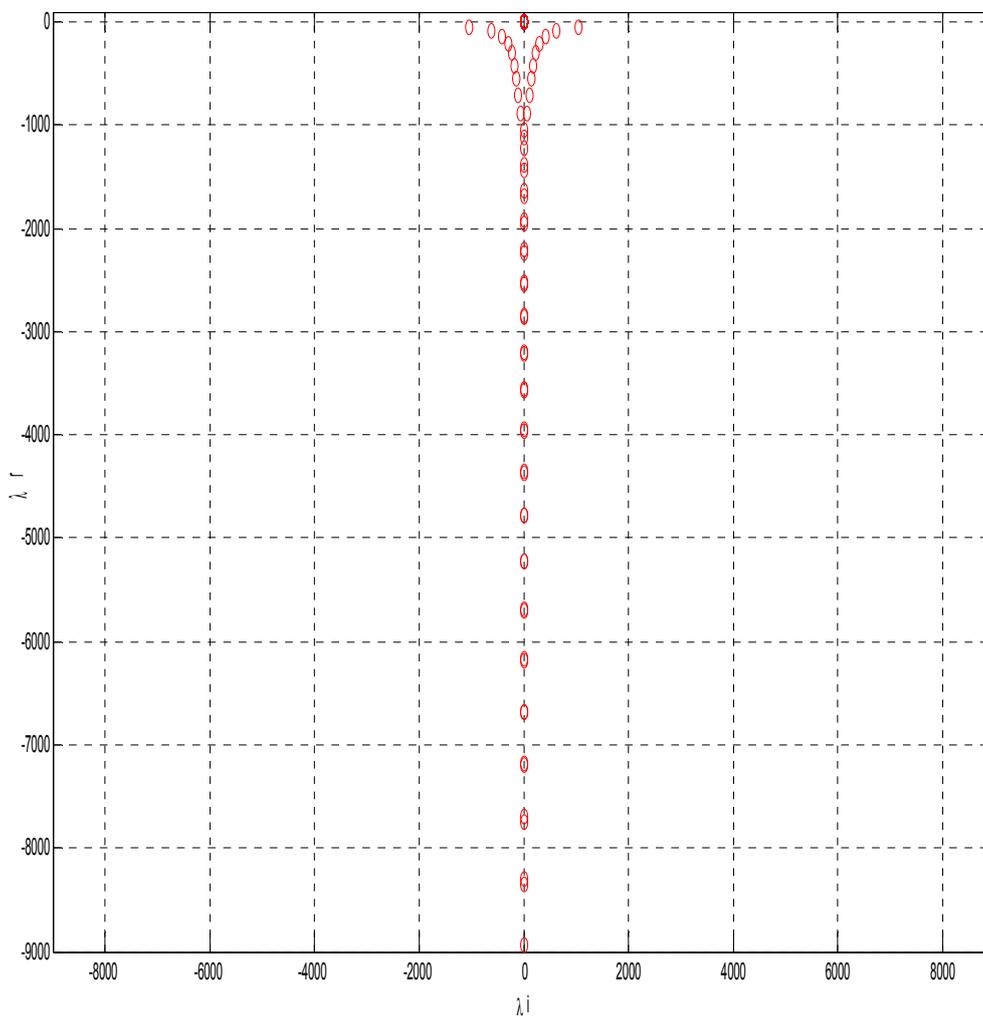


Fig.IV.10. Spectre pour un fluide non newtonien a rapport de rayon $\eta=0.881$, $\Omega_2=-29.3667$
 $R_1=120$ et $Re_2=-4000$ et $k=3.12$ et $B=1$.

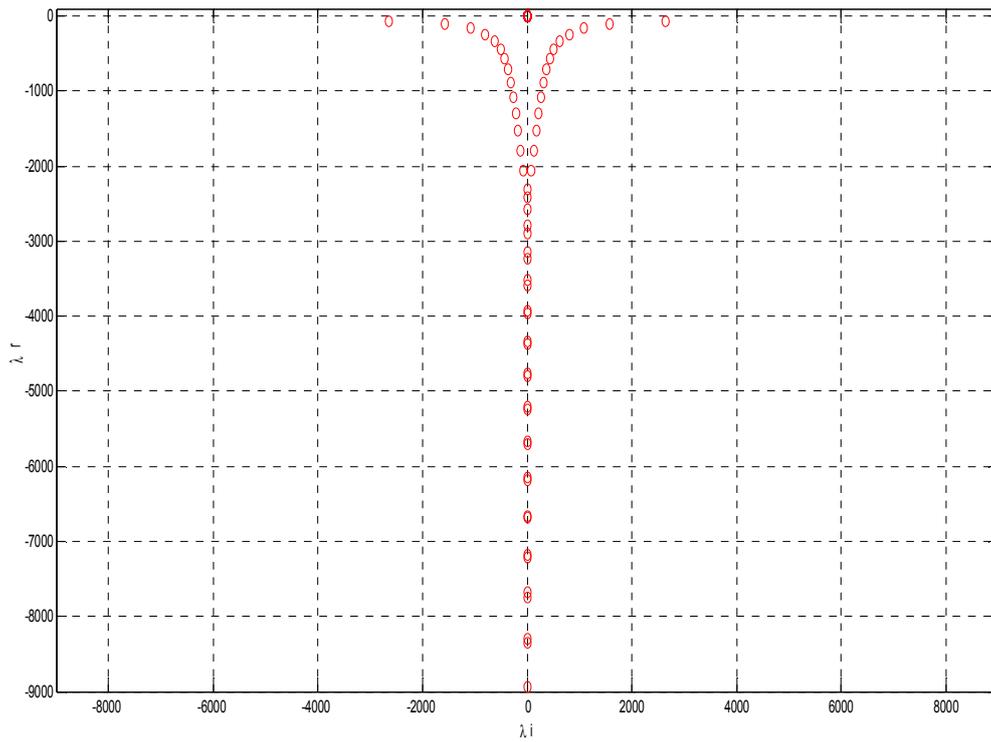


Fig.IV.11. Spectre pour un fluide non newtonien a rapport de rayon $\eta=0.881$, $\Omega_2=-73.4167$
 $R_1=120$ et $Re_2=-10000$ et $k=3.12$ et $B=1$.

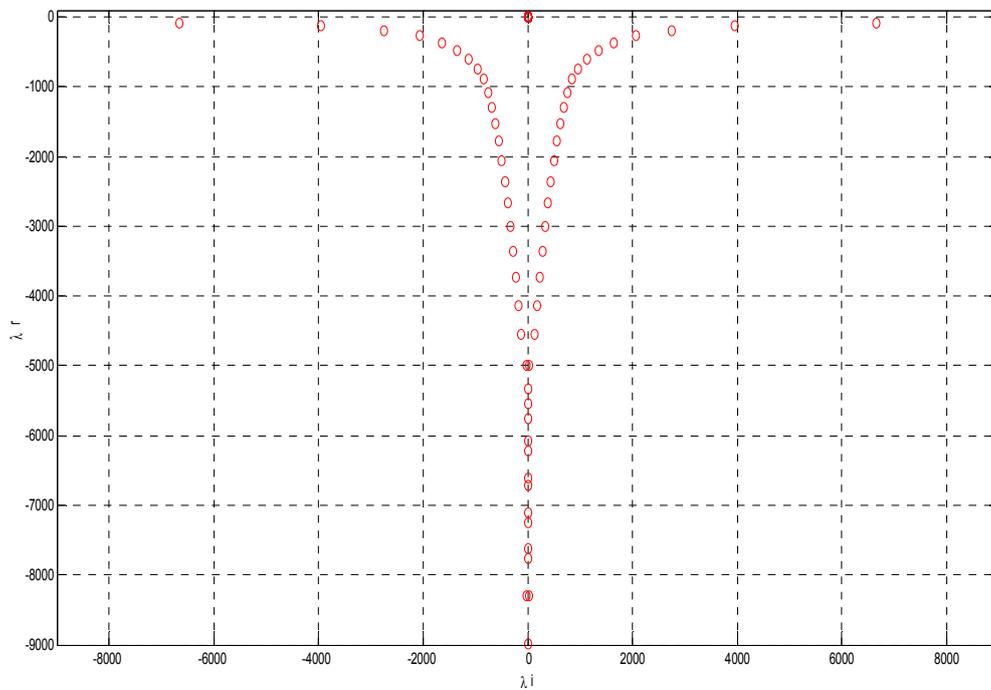


Fig.IV.12. Spectre pour un fluide non newtonien a rapport de rayon $\eta=0.881$, $\Omega_2=-$
 183.5417 $R_1=120$ et $Re_2=-25000$ et $k=3.12$ et $B=1$.

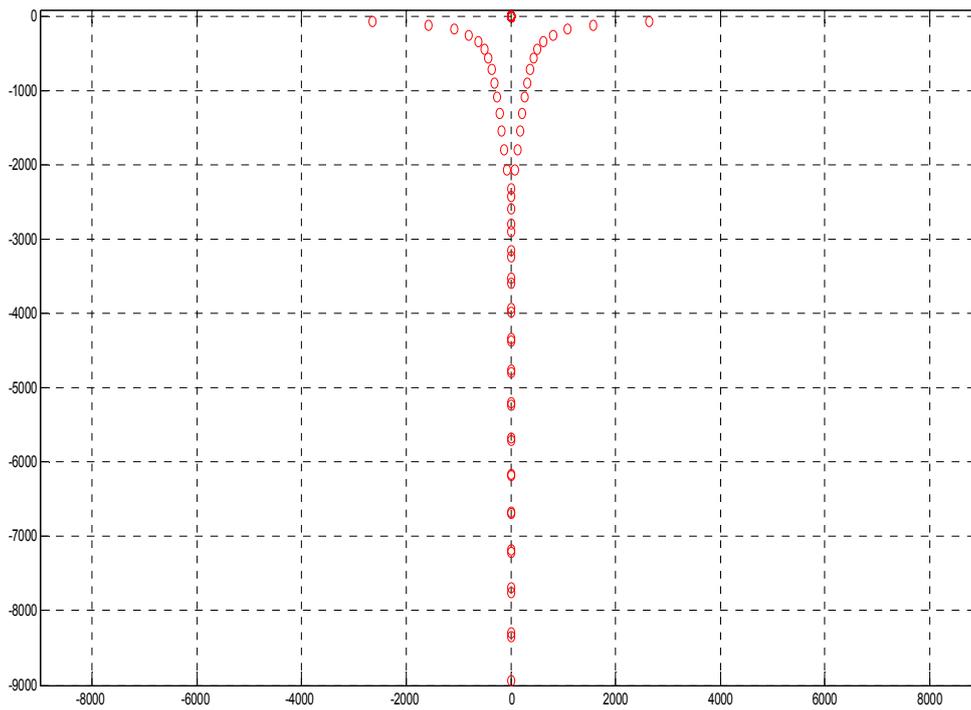


Fig.IV.13. Spectre pour un fluide non newtonien a rapport de rayon $\eta=0.881$, $\Omega_2=-73.4167$
 $R_1=120$ et $Re_2=-10000$ et $k=3.12$ et $B=5$

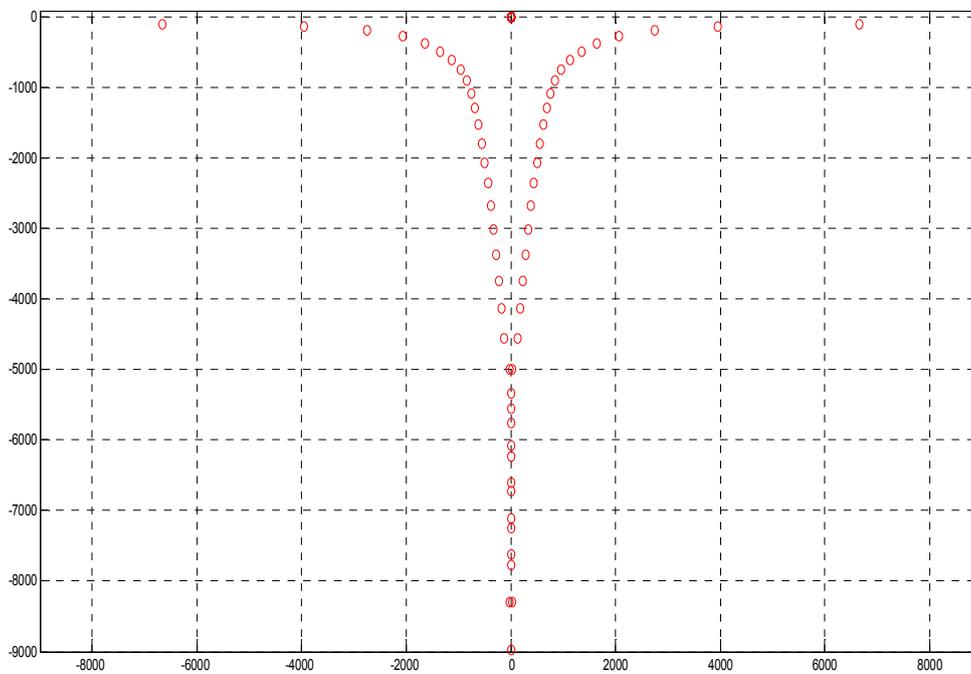


Fig.IV.14. Spectre pour un fluide non newtonien a rapport de rayon $\eta=0.881$, $\Omega_2=-183.5417$
 $R_1=120$ et $Re_2=-25000$ et $k=3.12$ et $B=5$.

IV.5 Nombre de Reynolds critique Re_{1c} a différent vitesse angulaire :

Ce travail pour déterminer les valeurs de nombre de Reynolds a chaque rapport de rayon η à plusieurs vitesses de rotation de cylindre extérieur. Pour détermine les nombres de Reynolds critique Re_{1c} .on fixe la vitesse de rotation de la cylindre extérieur Ω_2 et détermine les valeurs de Re_{1c} en fonction a rapport de rayon η . Ensuite,nous prenons une autre valeur Ω_2 .

IV.5.1. Cas ou le cylindre extérieur fixe :

Dans ce cas on fixe la cylindre extérieur et on détermine les valeurs de Re_{1c} et on trace le graphe Re_{1c} en fonction arapporte de rayon η ,

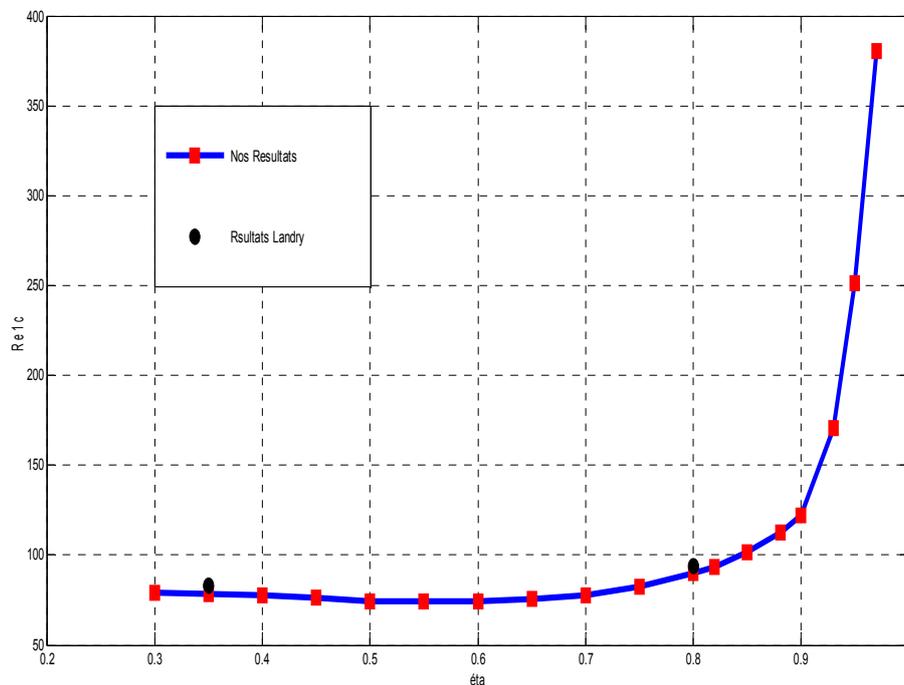


Fig.IV.15 : Le nombre de Reynolds critique pour fluide newtonien en fonction a rapport de rayon η et $\Omega_2=0$.

Discussion : nos résultats sont comparés aux résultats de Landry [10] et on trouve un bon accord avec ses résultats.

IV.5.2. Cas ou contre-rotation des cylindres :

Dons ce cas les cylindres est on **contre-rotation**. On déterminer les valeurs de Re_{1c} et trace le graphe Re_{1c} en fonction arapporte de rayon η .

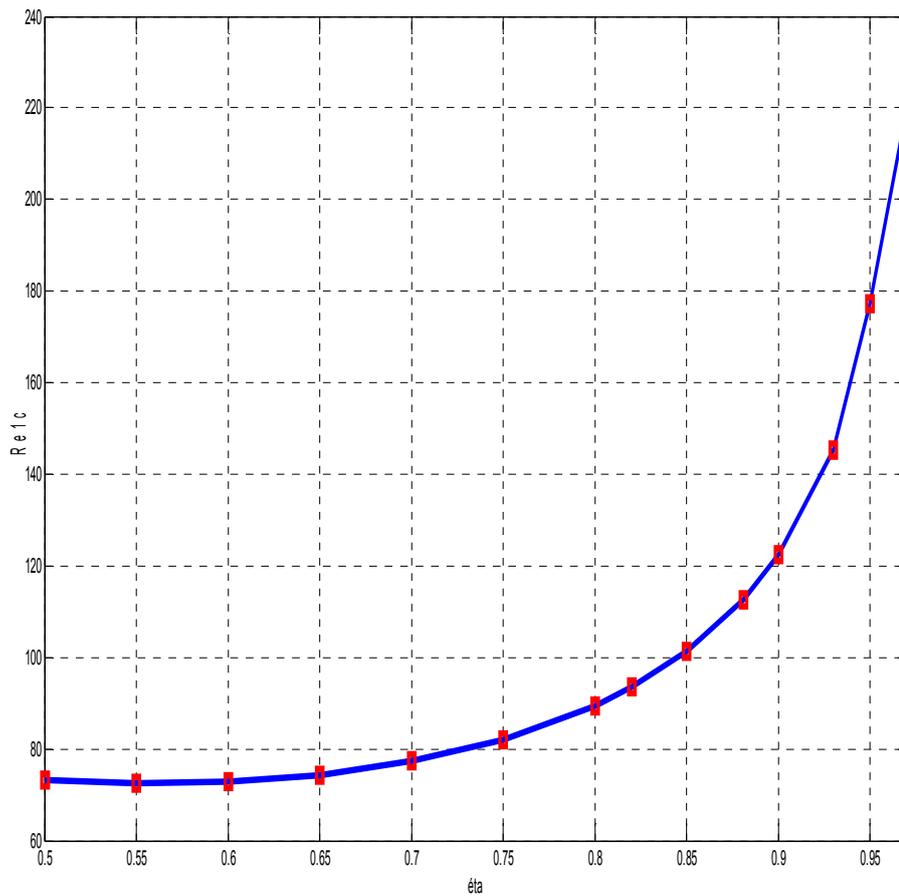


Fig.IV.16 : Le nombre de Reynolds critique pour fluide newtonien en fonction a rapport de rayon $\eta \Omega_2 = -5$.

IV.5.3. cas ou co-rotation pour les cylindres :

Dons ce cas les cylindre est **co-rotation** on On déterminer les valeurs de Re_{1c} et trace le graphe Re_{1c} en fonction a rapporte de rayon η .

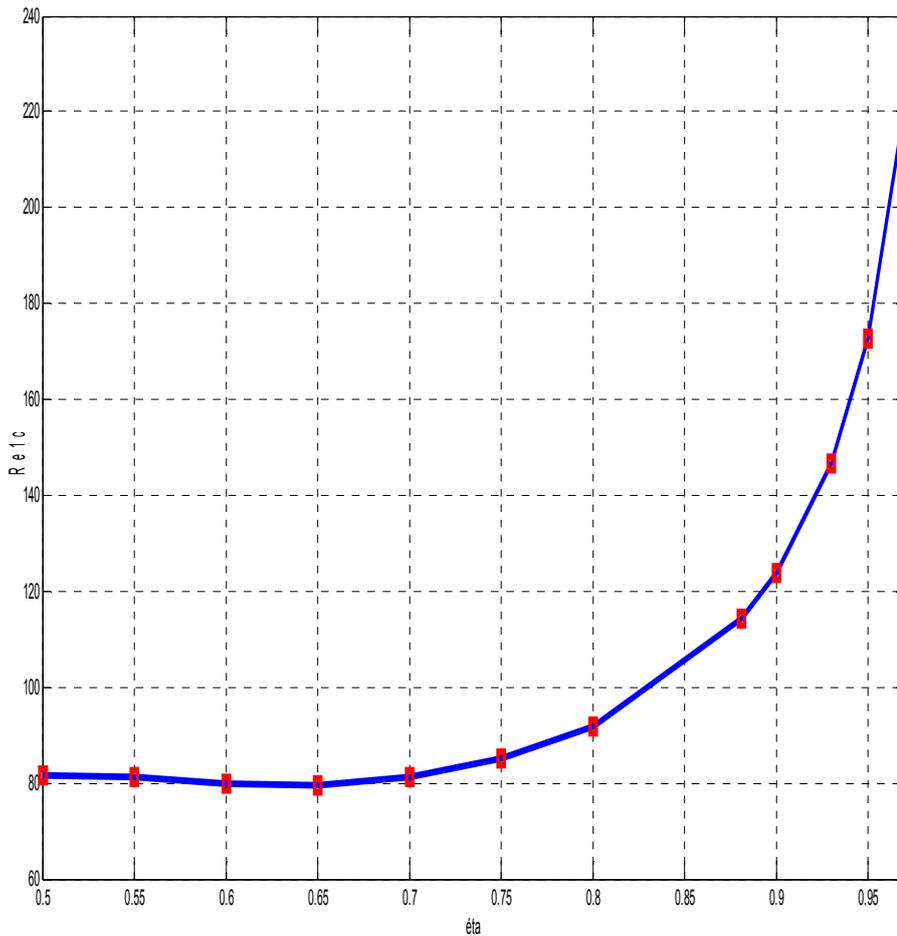


Fig.IV.17. Le nombre de Reynolds critique pour fluide newtonien en fonction a rapport de rayon $\eta\Omega_2=5$.

En examinant la figure (IV.17), nous pouvons constater que nos résultats numériques sont en bon accord tant qualitatif que quantitatif avec les résultats expérimentaux de Landry ,et toutes ces comparaisons valident notre code de calcul en lui attribuant la confiance désirée pour l'utilisation.

IV.6. Courbe de stabilité marginale pour $B=0$: (les fluides newtonien)

Lorsqu'on considère une perturbation tridimensionnelle. On trouve des solutions non axisymétriques pour des rapports Ω_2/Ω_1 suffisamment négatifs. Le nombre de Reynolds critique Re_{c1} peut être exprimé en fonction du nombre de Reynolds basé sur le cylindre extérieur Re_2 . Nos résultats sont comparés aux résultats expérimentaux d'Andereck en 1986[12].

Chapitre 4 [Résultats et Discussion]

Présentons pour finir la courbe de stabilité que nous recherchions. Nous l'avons obtenue en suivant l'évolution de la valeur propre fondamentale. Les points reportés sur la figure 3-16 correspondent aux couples (Re_1, Re_2) . On voit à partir de la figure que toute perturbation de l'écoulement décroît donc exponentiellement ; au dessus c'est l'instabilité centrifuge, avec ses structures toroïdales caractéristiques qui redistribuent la quantité de mouvement. On retrouve ici parfaitement la courbe de stabilité marginale qu'avait obtenue Taylor à l'époque, mais cette étude nous a en outre permis d'analyser plus en détail les autres modes que ne sont en principe pas considérés dans les études de stabilité classique.

Le nombre de Reynolds critique Re_c peut être exprimé en fonction du nombre de Reynolds basé sur le cylindre extérieur Re_2 . Dans les figures.(IV.18,IV.19),nos résultats sont comparés à ceux des Landry [10]. Les figures montrent que nos résultats reproduisent parfaitement ce de Landry ; ce qui contribue à valider notre approche et nos calculs. Pour tracer la courbe de stabilité marginale nous prenons les valeurs de Re_1 de chaque rapport de rayon η qui déterminent à les étapes précédentes et déterminent le nombre de Reynolds critique de 2^{ème} cylindre Re_2 .

$$Re_1 = \frac{\rho R_1 \Omega_1 d}{\mu} \text{IV.1}$$

$$Re_2 = \frac{\rho R_2 \Omega_2 d}{\mu} \text{IV.2}$$

On obtient la relation suivante :

$$Re_2 = Re_{1c} \frac{\Omega}{\eta} \text{IV.3}$$

On trace la courbe (Re_2, Re_1) .

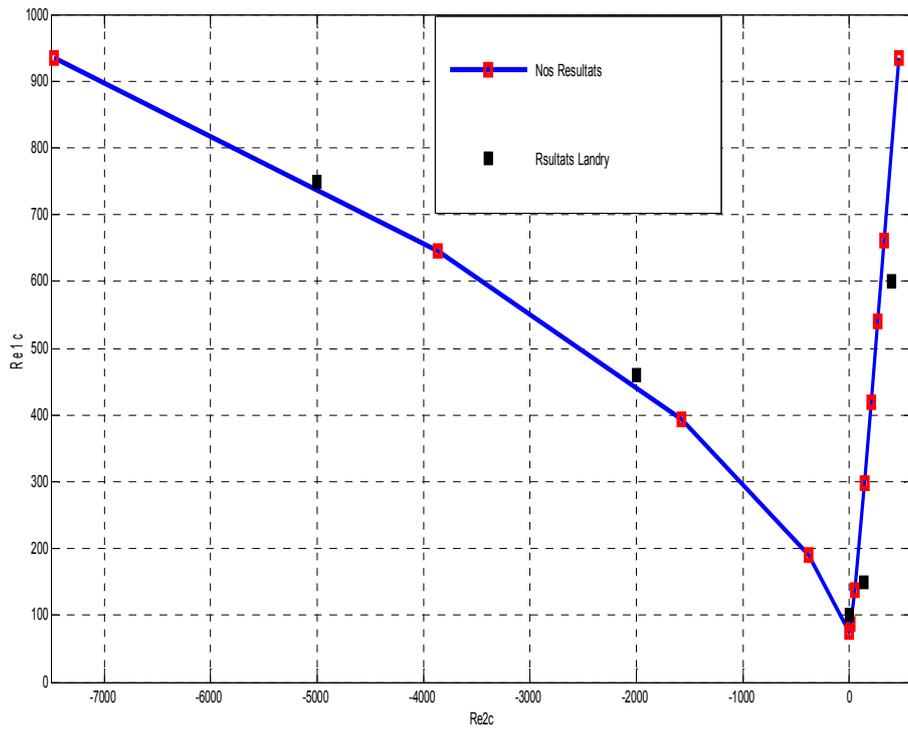


Fig. IV.18. Courbe de stabilité marginale pour un rapport de rayon $\eta=0.5$

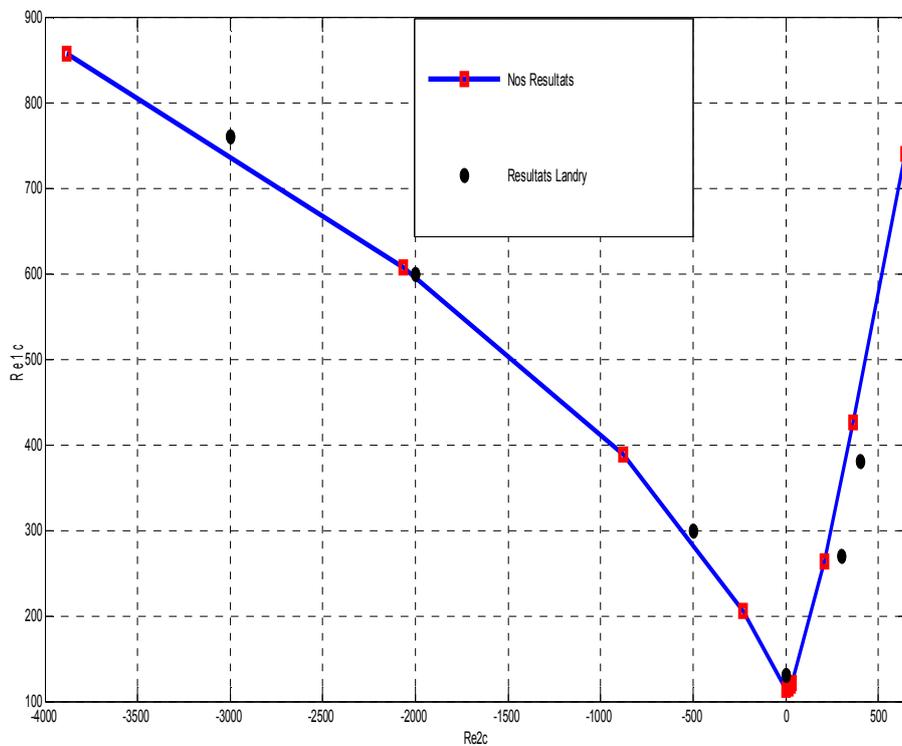


Fig.IV.19. Courbe de stabilité marginale pour un rapport de rayon $\eta=0.883$

Interprétation :

les figures (IV.18,IV.19), montre les courbes de stabilité marginale dans plan (Re_1, Re_2) pour un fluide newtonien et pour un rapporte de rayon $\eta=0.883$ et $\eta=0.05$ respectivement, pour chaque rapporte de rayon il y a une courbe de stabilité marginale différent.

Pour tester la validation, nous avons comparé nos **courbes de stabilité marginale** pour un fluide newtonien avec **courbes de stabilité marginale** de Landry [10].

IV.7. Courbe de stabilité marginale pour $B \neq 0$:

Pour trace la courbe de stabilité marginale nous pronons les valeurs de Re_1 de chaque rapport de rayon η qui determiner a les etapes précédentes et determine le nombre de reylonds critique de 2^{eme} cylindre Re_2 et en change la valeur de $B=0, 1, 5$ et 10 .

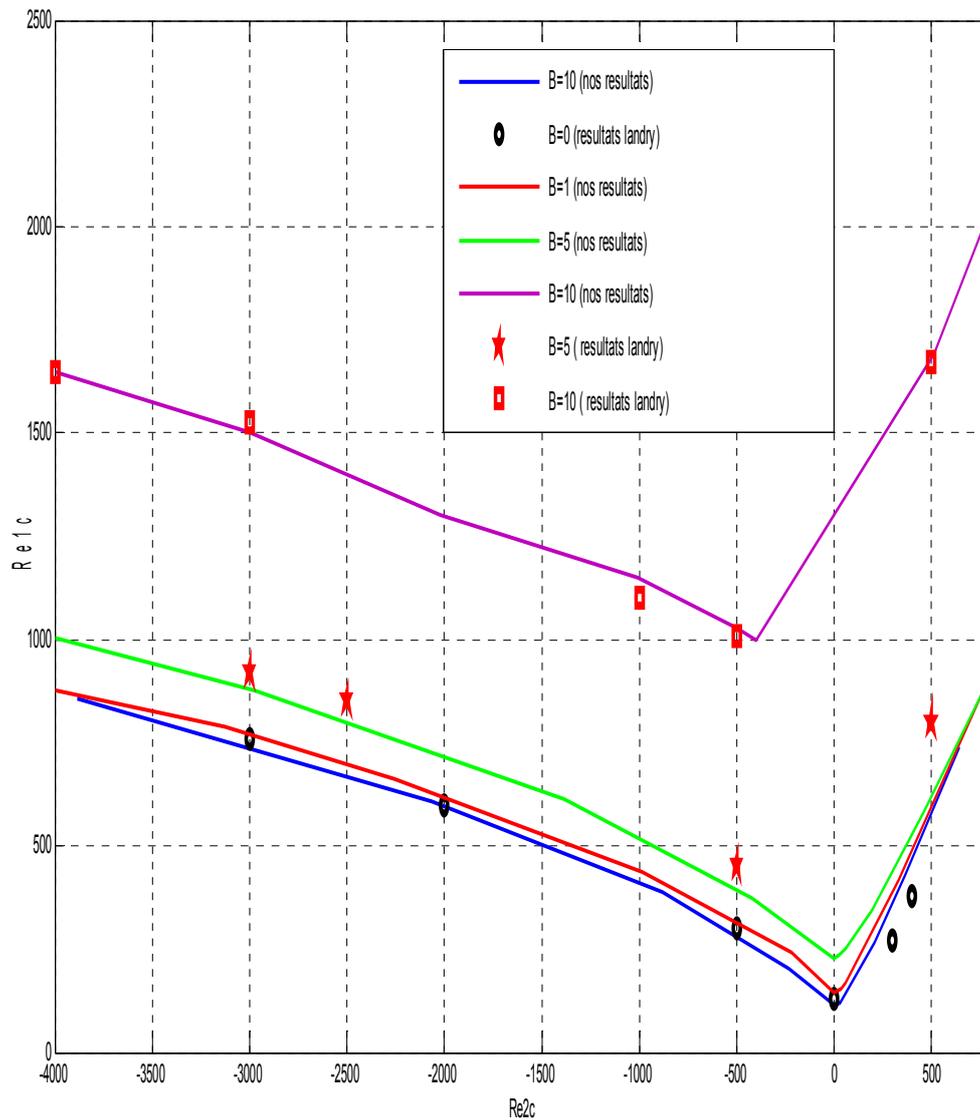


Fig.V.20. Courbe de stabilite marginale pour un rapport de rayon $\eta=0.883, N=50$

Discussion : nos résultats sont comparés aux résultats de Landry [10] et on trouve un bon accord avec ses résultats.

IV.7.Conclusion :

Chapitre 4 [Résultats et Discussion]

Une analyse de stabilité linéaire adimensionnelle de la stabilité d'un écoulement de Couette entre deux cylindres coaxiaux pour un fluide rhéofluidifiant purement visqueux a été effectuée. Le cylindre extérieur est fixe et le cylindre intérieur en rotation. Contrairement à ce qui a été avancé dans la littérature, le nombre de Reynolds critique minimal est obtenu pour une perturbation axisymétrique. Les résultats numériques montrent que lorsque Re_c est défini avec la viscosité calculée à la paroi du cylindre intérieur, la stratification de la viscosité induite par le caractère rhéofluidifiant retarde l'apparition des rouleaux de Taylor. La taille de ceux-ci, i.e. la longueur d'onde axiale, varie de manière significative avec le caractère rhéofluidifiant et le rapport des rayons. Cette étude se poursuit, en considérant le cas où les deux cylindres sont en rotation. Des analyses de stabilité linéaire avec des approches modale et non modale seront conduites, ainsi qu'une analyse faiblement non linéaire pour déterminer le type de bifurcation selon l'effet rhéofluidifiant.

INTRODUCTION GENERALE

Pour la compréhension des phénomènes d'instabilités et de transitions vers la turbulence, la mécanique des fluides s'intéresse plus particulièrement à des systèmes relativement simples, tel que, les cylindres tournants, qui sont l'objectif de notre étude, les sphères tournantes, les cônes tournants, disques tournants, etc.....

L'étude de l'instabilité de l'écoulement entre deux cylindres concentriques en rotation connue sous le nom de « Taylor-Couette » a suscité un grand intérêt depuis les travaux initiaux de G.I. Taylor [0]. Bien que cette instabilité soit aujourd'hui bien connue théoriquement, expérimentalement et numériquement, des effets extérieurs peuvent être ajoutés à cet écoulement qui le rend alors plus complexe: champ magnétique, parois complantes, fluide viscoélastique, flux thermique, effet de la stratification, etc. En outre, des facteurs influencent la stabilité de l'écoulement : facteur de forme, rapport d'aspect, l'angle de l'inclinaison, les vitesses de rotation des cylindres ainsi que la viscosité du fluide utilisé dans l'espace annulaire. L'inertie du fluide en mouvement, notamment la force centrifuge créée par la rotation a tendance à faire croître les instabilités (effet déstabilisant), alors que la viscosité du fluide a tendance à gommer les instabilités (effet stabilisant).

A faible vitesse, l'écoulement entre les deux cylindres est laminaire, les lignes de courant sont des cercles concentriques. La viscosité arrive à contenir les effets déstabilisant de l'inertie. C'est l'écoulement de Couette.

Si l'on augmente la vitesse de rotation du cylindre intérieur, les effets de l'inertie deviennent trop forts et la viscosité ne peut plus empêcher la création d'une instabilité. On observe l'apparition de rouleaux dans l'écoulement. L'écoulement est dit Taylor-couette.

Si l'on continue à augmenter la vitesse de rotation, une deuxième instabilité apparaît et diminue encore la symétrie de l'écoulement. Les rouleaux décrits plus hauts se mettent à osciller périodiquement.

En continuant à augmenter les vitesses celles-ci font perdre à l'écoulement toute symétrie et on obtient un écoulement turbulent.

Ce genre d'écoulement est lié à un grand nombre d'applications. Citons par exemple les machines rotatives et centrifuges, les paliers de butée, les viscosimètres, le pompage des métaux liquides à hautes températures de fusion, la production des

cristaux, la rotation des disques durs d'ordinateurs : cet empilement de disques en rotation rapide entraîne une mince couche d'air interstitielle, dont les instabilités peuvent induire des vibrations, et donc un risque d'endommagement par contact avec la tête de lecture.

Le présent travail comporte quatre chapitres. Le premier est consacré à une recherche bibliographique sur l'écoulement Taylor-Couette et les principales études théoriques, expérimentales concernant cet écoulement.

La description de l'écoulement et la formulation mathématique du problème avec les caractéristiques géométriques et physiques dans le 2^{ème} chapitre.

En troisième partie par étude de stabilité linéaire nous déterminons le système linéaire pour la résolution numérique. On y présente les étapes de la démarche numérique.

Les résultats et leurs discussions seront présentés dans le quatrième chapitre.

CONCLUSION GENERALE

Une analyse bidimensionnelle de la stabilité linéaire de l'écoulement de Couette-Taylor circulaire d'un fluide à seuil est réalisée. Les écarts entre les résultats existants peuvent être attribués en partie à l'échelle de la viscosité utilisée comme référence. Ce problème est longuement abordé dans le présent travail.

Le modèle de Bingham a été envisagé. Afin d'obtenir des solutions en mode normal, les équations aux perturbations linéarisées sont transformées pour obtenir un problème aux valeurs propres ; celui-ci étant à son tour résolu en utilisant la méthode de spectrale.

Une perturbation axisymétrique est introduite dans l'écoulement et le nombre de Reynolds critique est calculé pour différentes valeurs des paramètres caractérisant le comportement rhéologique du fluide (le nombre de Bingham (B)). D'autre part, l'influence de l'aspect géométrique est aussi prise en compte à travers la variation du rapport des rayons externe et interne (η).

Les résultats obtenus pour le nombre de Reynolds critique sont comparés avec plusieurs résultats antérieurs cités dans la littérature tel que Landry [10] et Meseigneur [13]. Dans tous les cas étudiés, on observe que lorsque la viscosité diminue quand on s'approche de la paroi interne, le caractère rhéofluidifiant a un effet stabilisateur.

Pour terminer, les perspectives qui pourraient être suggérées afin de compléter l'étude entamée dans le présent travail peuvent être résumées comme suit :

- * Extension pour un fluide en loi de puissance et fluide de carreau.
- * étude de la stabilité faiblement non linéaire.