

## **Introduction générale :**

L'analyse des systèmes dynamiques linéaires et non linéaires, a fait l'objet d'une importante quantité de travaux de recherche menée par des chercheurs de différents domaines certains systèmes dynamiques non linéaires offrent la particularité dans certaines situations, d'avoir un comportement imprévisible à long terme : c'est le comportement chaotique. L'analyse de tels systèmes permet de déterminer dans quelles conditions le fonctionnement en mode chaotique se produit. Les applications des systèmes chaotiques sont multiples, l'une des plus importantes d'entre elles est la cryptographie ou la transmission sécurisée des données. [6]

La génération de signaux chaotique peut être réalisée grâce à des circuits électroniques analogiques, formés principalement par des amplificateurs opérationnels et des multiplieurs. Elle peut aussi être envisagée grâce à des circuits numériques

Durant cette décennie, plusieurs types de synchronisation (synchronisation complète ou identique, généralisée, de la phase, projective) ont été étudiés, et beaucoup de méthodes ont été proposées, mais tous ces types et méthodes sont englobés sous deux modes de synchronisation. Le premier mode repose sur un couplage mutuel entre deux systèmes chaotiques ou plus. Le second est appelé maître-esclave ou couplage unidirectionnel : Son principe est de choisir un système générateur de chaos appelé "émetteur". Celui-ci est caractérisé par ses variables d'état constituant le vecteur d'état. Quelques composantes de ce vecteur sont transmises à un second système dénommé récepteur. Dans ce travail on va s'intéresser au deuxième mode, et on va étudier ce type de synchronisation.

L'objectif de ce travail est, d'une part l'étude et l'analyse du système chaotique de Lorenz, la détermination de ses principales caractéristiques et l'étude de la synchronisation de systèmes chaotiques de Lorenz avec un seul type de synchronisation

Finalement son implémentation à l'aide de circuits analogiques. D'autre part, la présentation des résultats qui sont comparés avec ceux de la simulation obtenue par les logiciels Matlab/Simulink et PSpice.

# *Chapitre 1*

## *Introduction aux systèmes dynamiques chaotiques*

## 1.1 Introduction

Depuis longtemps le chaos était synonyme de désordre et de confusion. Il s'opposait à l'ordre et devait être évité. La science était caractérisée par le déterminisme, la prévisibilité et la réversibilité. Poincaré fut l'un des premiers à entrevoir la théorie du chaos. Il découvrit la notion de sensibilité aux conditions initiales à travers le problème de l'interaction de trois corps célestes.

Le terme "chaos" définit un état particulier d'un système dont le comportement ne se répète jamais et qui est très sensible aux conditions initiales, et imprédictible à long terme. Des chercheurs d'horizons divers ont alors commencé à s'intéresser à ce comportement. Ils ont cherché à répondre à des questions telles que : les arythmies cardiaque ou les variations d'une population animale obéissent-elles à des règles ? Les mouvements commerciaux ou les marchés financiers peuvent-ils s'expliquer ?

Le chaos a ainsi trouvé de nombreuses applications dans les domaines tant physiques que biologiques, chimiques ou économiques. Ainsi, ce chapitre est organisé de la manière suivante. On commence par une présentation des systèmes dynamiques. Ensuite, on passe à la présentation des systèmes chaotique et à la caractérisation de leur comportement. Finalement on s'intéresse à l'analyse du système chaotique de Lorenz.

## 1.2 Etude des systèmes dynamiques

Un système dynamique est une structure du temps de façon à la fois :

- causale, où son avenir ne dépend que de phénomènes du passé ou du présent.
- déterministe, c'est-à-dire qu'à partir d'une (condition initiale) donnée à l'instant présent va correspondre à chaque instant ultérieur un et un seul état (futur) possible.

L'évolution déterministe du système dynamique peut alors se modéliser de deux façons distinctes :

- une évolution continue dans le temps représentée par une équation différentielle non linéaires ordinaires.
- une évolution discrète dans le temps, l'étude théorique de ces modèles discrets est fondamentale, car elle permet de mettre en évidence des résultats importants qui se généralisent souvent aux évolutions dynamique continues. Elle est représentée par le modèle général des équations au différences finies

### 1.2.1 système continu

$$\dot{x}(t) = F(x(t), t) \quad (1.1)$$

Où  $F : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^n$  désigne la dynamique du système

Si on associe à cette dynamique un état initial  $x_0 = x(t_0)$ , pour chaque couple choisi  $(x_0, t_0)$  on peut identifier une solution unique.

Où  $F : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^n$  telle que :

$$\Phi_F(t_0; x_0, t_0) = x_0 \text{ et } \Phi_F(t; x_0, t_0) = F(\Phi_F(t; x_0, t_0), t) \quad (1.2)$$

Cette solution unique à l'aide des équations (1.2) et qui fournit l'ensemble d'états successifs occupés par le système à chaque instant  $t$ , s'appelle généralement la trajectoire du système dynamique.

On considère l'exemple du système de Lorenz donné par les équations suivantes :

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= \sigma(y - x) \\ \frac{dy}{dt} &= x(\rho - z) - y \\ \frac{dz}{dt} &= xy - bz \end{aligned} \quad (1.3)$$

Les paramètres pour l'exemple de la trajectoire donnée dans la figure (1.1) ont été choisis de la manière suivantes :  $\sigma = 10, \rho = 28, b = 8/3$  avec la condition initiale  $(x_0, y_0, z_0) = (2, 5, 20)$ .

La dynamique du système de Lorenz donnée par les équation (1.3) et le temps s'apparaitres comme une variable independante ce type de système est qualifié d'autonome. La trajectoire est donne par la figure1.1 :

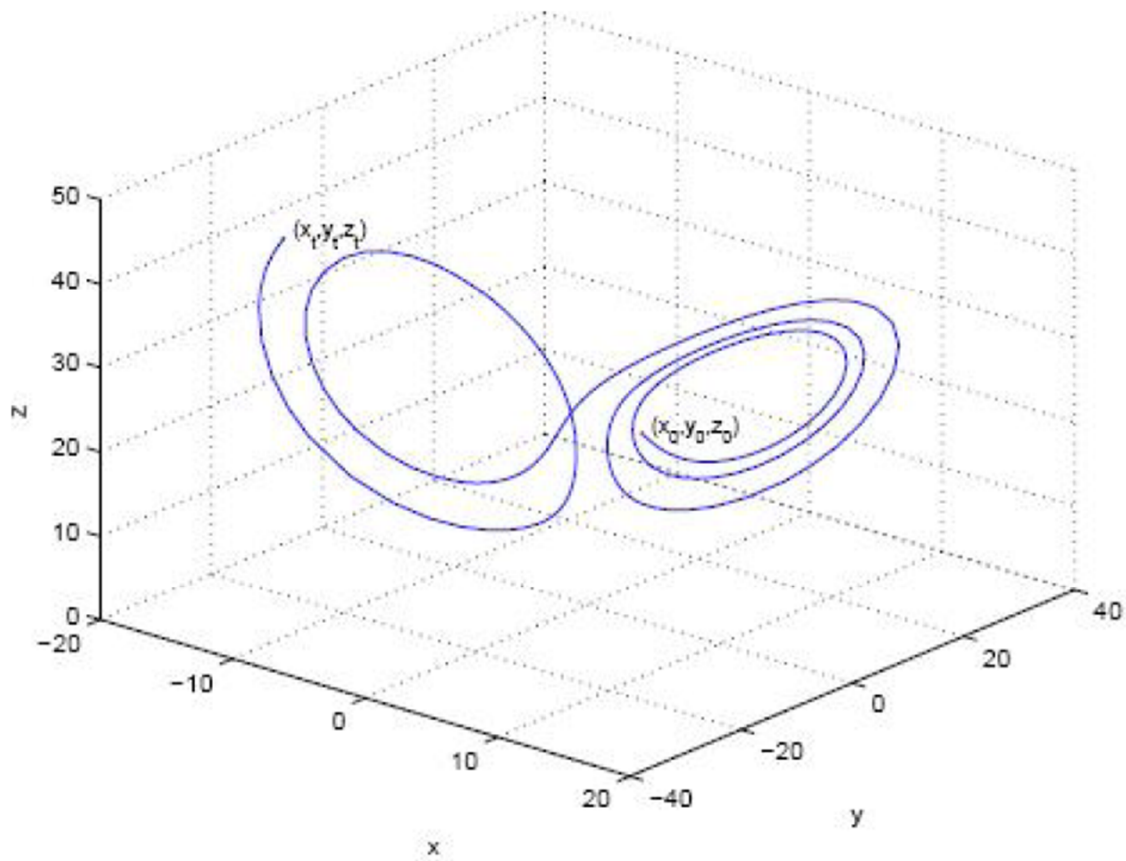


Figure 1.1 Exemple de la trajectoire du système de Lorenz

## 1.2.2 système discret

Comme il a été déjà précisé, le système dynamique est, dans ce cas, représenté par des équations aux différences finies, avec le modèle général suivant :

$$x(k + 1) = G(x(k), k) \quad (1.5)$$

où  $G: \mathbb{R}^n \times \mathbb{Z}^+ \rightarrow \mathbb{R}^n$  indique la dynamique du système en temps discret.

De même qu'en temps continu, si on associe à cette dynamique un état initial  $x_0 = x(k_0)$ , pour chaque couple choisi  $(x_0, k_0)$ , on peut identifier une solution unique.

$\Phi_G(\cdot; x_0, k_0): \mathbb{Z}^+ \rightarrow \mathbb{R}^n$  telle que :

$$\Phi_G(k_0; x_0, k_0) = x_0 \text{ et } \Phi_G(k + 1; x_0, k_0) = G(\Phi_G(k; x_0, k_0), k) \quad (1.6)$$

En temps discret on définit aussi le système autonome comme une dynamique qui ne dépend pas de l'instant  $k$ .

$$x(k + 1) = G(x(k)) \quad (1.7)$$

### 1.3 Comportement des systèmes dynamiques

A partir d'un état initial  $x_0$  et après un régime transitoire, la trajectoire d'un système dynamique atteint une région limitée de l'espace des phases. Ce comportement asymptotique, obtenu quand  $t$  et  $k$  tendent vers l'infini, est une des caractéristiques les plus importantes à étudier pour tout système dynamique. Dans le cas d'un système linéaire, si la solution asymptotique est indépendante de la condition initiale et unique, en présence de non linéarités, il existe donc une plus grande variété de régimes permanents, parmi lesquelles on trouve, par ordre de complexité : points d'équilibre, solutions périodiques, solutions quasi-périodiques et chaos, respectivement. Il faut préciser que cette fois, le comportement développé par un système chaotique particulier est fortement dépendant de la condition initiale choisie

Pour la suite, on va définir et illustrer les comportements évoqués ci-dessus, en utilisant une dynamique très connue dans la théorie des systèmes non-linéaires. Il s'agit de l'équation logistique définie par l'expression suivante :

$$x_{k+1} = f(x_k) = rx_k(1 - k) \quad (1.8)$$

Dans les figures 1.2 on montre la dynamique propre à l'équation logistique ainsi que certains modes asymptotiques particuliers. Le mécanisme de construction d'une séquence est tout d'abord montré sous la forme d'un diagramme en toile. Cette méthode permet la génération de la séquence choisie, graphiquement en utilisant la projection des états successifs par rapport à la diagonale principale figure(1.2) :  $r = 3.9$ .

Dans la partie b est représenté le diagramme de bifurcation qui montre la distribution des états limites pour différents choix du paramètre  $r$ . On appelle cette représentation diagramme de bifurcation parce que le comportement asymptotique subit, pour des valeurs du paramètre  $r$  bien déterminées, une bifurcation de l'ensemble des états limites. Dans le cas continu, la

bifurcation se manifeste comme une multiplication des trajectoires possibles. Pour cette représentation on a choisi pour chaque valeur  $r \in [1, 4]$  une séquence de 500 échantillons avec une période de transition de 50 échantillons.

### **1.3.1 Point d'équilibre**

Dans ce cas la solution asymptotique est représentée par un point, sa valeur étant déterminée en fonction de la condition initiale choisie. Ainsi pour des conditions initiales différentes on peut retrouver plusieurs points d'équilibres. De même, ces points peuvent être stables ou instables suivant que les trajectoires voisines convergent ou divergent entre elles. Dans le cas de la dynamique logistique, on observe que pour toute valeur  $r \in [1, 3]$ , le régime permanent est formé par un point limite stable, sa valeur étant dépendante du choix du paramètre  $r$  la figure 1.2 c nous donne un aperçu d'une telle trajectoire pour  $r = 2$ . Ainsi on observe qu'après une période de transition relativement courte, la séquence se stabilise autour du point fixe qui cette fois est  $x_\infty = 0.5$ .

### **1.3.2 Régime périodique**

Le régime permanent périodique correspond à une trajectoire dont les répliques d'une portion élémentaire sont espacées à des intervalles  $nT$ ,  $n \in \mathbb{N}^+$ ,  $T$  désignant la période. Pour la fonction logistique, on choisit deux exemples pour les paramètres  $r = 3.2$  puis  $r = 3.55$  pour le premier cas, ce choix nous garantit à deux échantillons (figure 1.2 d). La deuxième solution nous permet d'augmenter la dimension de l'ensemble des états limites et la période de répétition à 8 (figure 1.2 e)

### **1.3.3 Régime quasi-périodique**

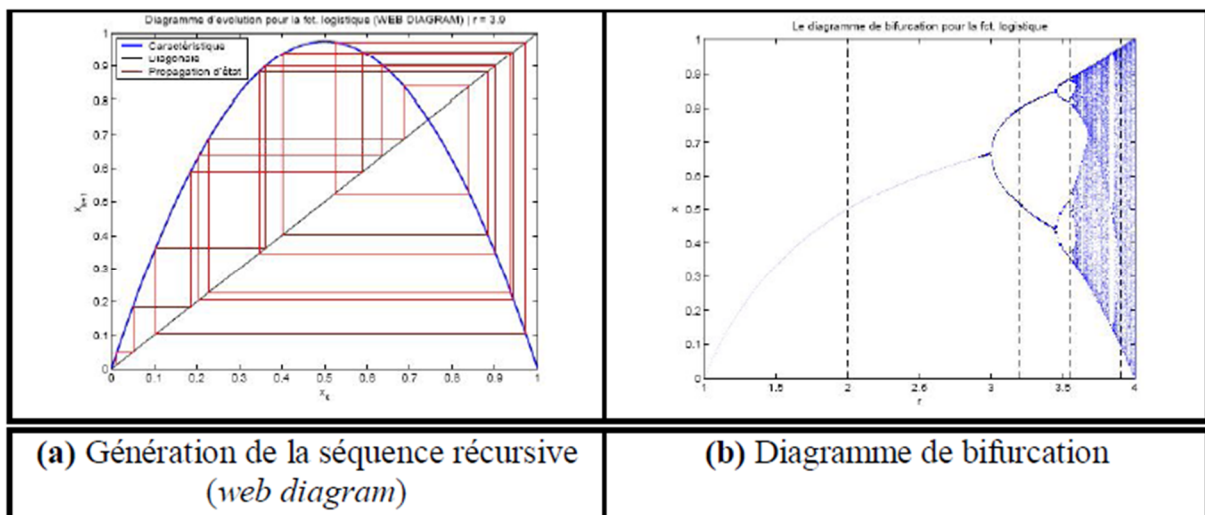
Il correspond à une somme de solutions périodiques, dont le rapport des périodes est un nombre irrationnel. Un régime quasi-périodique peut être représenté dans l'espace d'état par un tore.

### **1.3.4 Régime chaotique**

Le régime chaotique est par définition, tout régime permanent qui n'appartient à aucune des classes présentées antérieurement. Une telle solution a une trajectoire asymptotique bornée avec une extrême sensibilité aux conditions initiales.

Ainsi, deux trajectoires générées à partir de conditions initiales très proches vont diverger très vite l'une par rapport à l'autre. Cette sensibilité par rapport aux conditions initiales traduit aussi le comportement, en apparence stochastique, des générateurs chaotiques, de telle sorte qu'une prévision à long terme du comportement du système est impossible.

Dans la figure 1.2 f, un exemple est donné pour deux conditions initiales espacées par une valeur de  $10^{-4}$ . On peut observer des solutions asymptotiquement stables décrites ci-dessus et qualifiées d'attracteur. Il représente la région de l'espace d'état au voisinage de laquelle les trajectoires restent confinées lorsque  $t$  et  $k$  tendent vers l'infini. En parallèle, avec la définition de l'attracteur apparaît le bassin d'attracteur qui est défini comme la région de l'espace d'état formée par l'ensemble des conditions initiales à partir desquelles l'attracteur sera atteint.





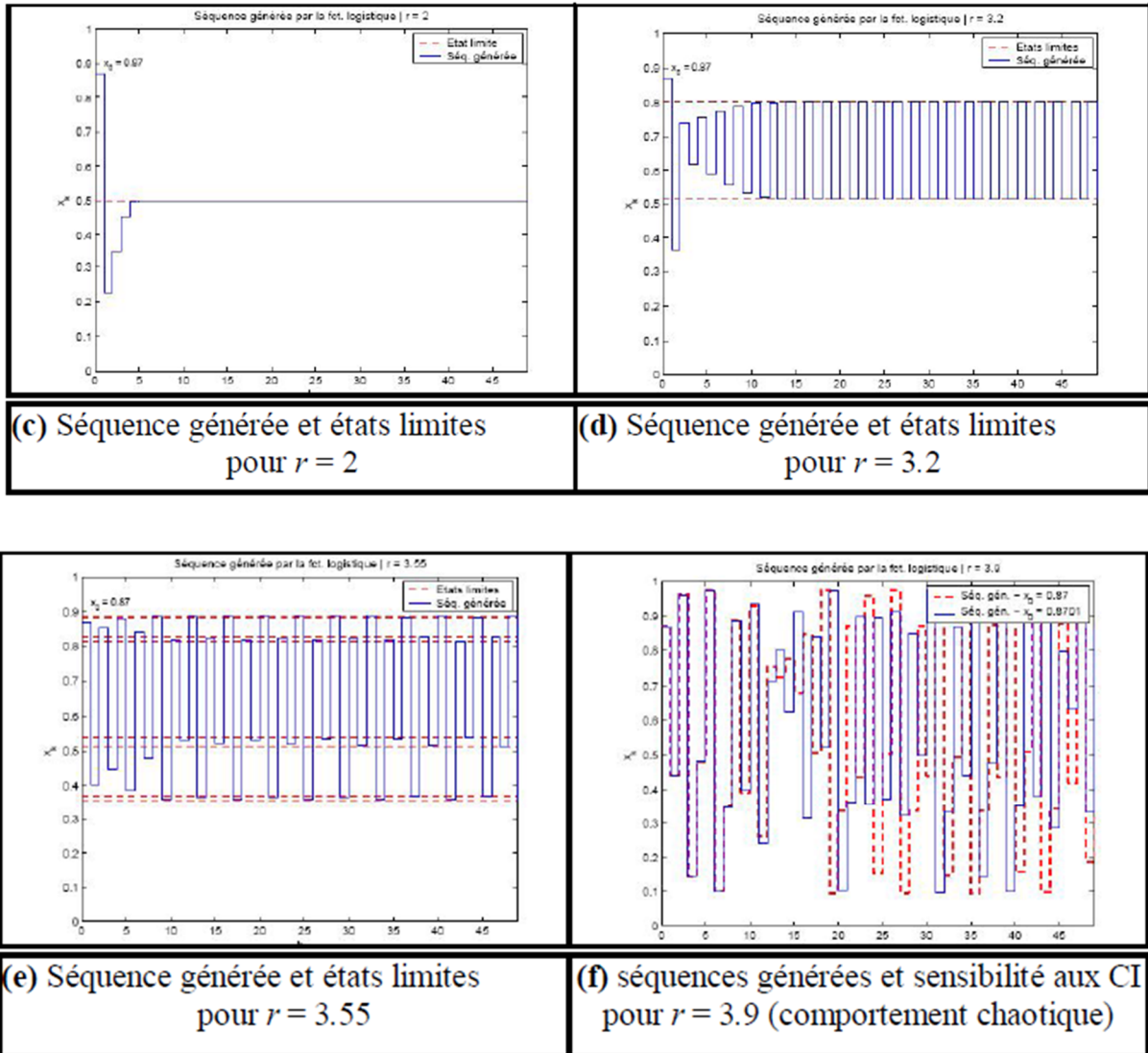


Figure 1.2 Etude du comportement dynamique pour la fonction logistique [2]

## 1.4 Evaluation du comportement dynamique

La présence d'un comportement chaotique pour un système dynamique quelconque peut être déterminée par élimination de comportements introduits auparavant : si son comportement asymptotique n'est pas un point fixe, périodique ou quasi-périodique on conclut qu'il est n'est pas connue et si en plus un bruit affecte les observations une telle méthode n'est pas envisageable. Par conséquent, la communauté scientifique a proposé des solutions avec une approche d'exposants de Lyapunov. [2]

La dimension de corrélation est un outil qui offre la possibilité de déterminer la dimension de l'attracteur reconstruit à partir d'une série temporelle observée, tandis que l'entropie ou les exposant de Lyapunov sont employés pour l'évaluation de l'instabilité propre au phénomène chaotique. Dans la pratique, ces exposants seront imposés comme des outils performants, même dans le cas de série temporelle courte, avec un coût de calcul relativement réduit par rapport à la dimension de corrélation

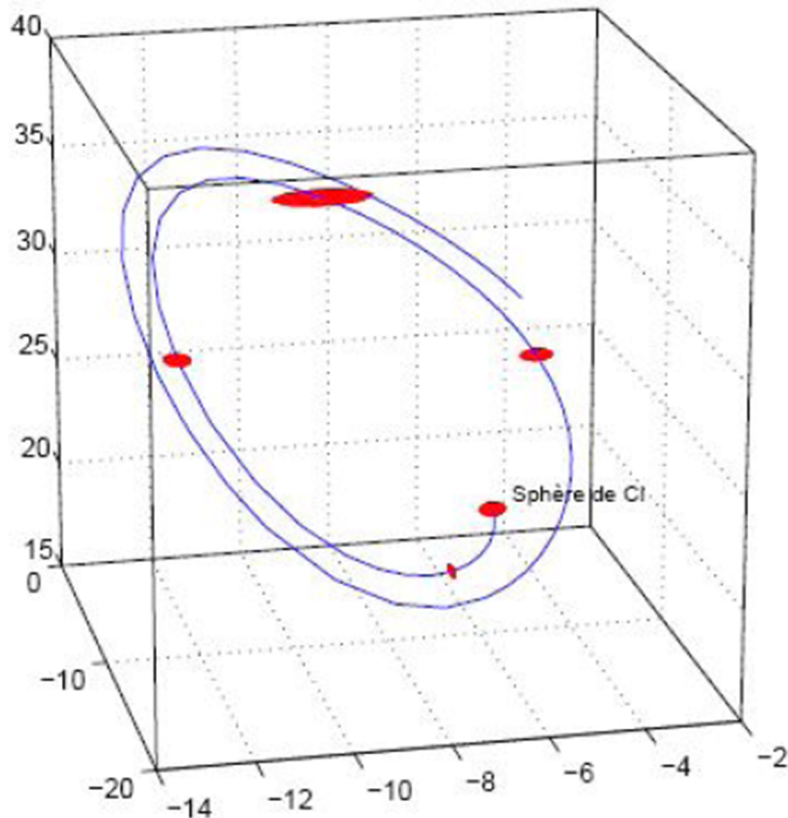


Figure 1.3 sensibilité aux conditions initiales du système de Lorenz [2]

## 1.5 Systèmes autonomes et non autonomes

Soit le système dynamique suivant :

$$\dot{x} = \frac{dx}{dt} = f(x, t) \quad (1.9)$$

Lorsque le champ de vecteur  $f$  ne dépend pas explicitement du temps, on dit que le système dynamique est autonome. Dans le cas contraire il est non autonome.

Dans un système autonome, la trajectoire ne dépend pas du temps initial  $t$ , alors que dans un système non autonome, elle dépend de  $t$ .

## **1.6 Théorie du chaos**

### **1.6.1 Définition du chaos**

Le chaos tel que le scientifique le comprend ne signifie pas l'absence d'ordre; il se rattache plutôt à une notion d'impossibilité de prévoir une évolution à long terme du fait que l'état final dépend de manière si sensible de l'état initial.

On appelle donc un système dynamique chaotique, un système qui dépend de plusieurs paramètres et caractérisé par une extrême sensibilité aux conditions initiales. Ils ne sont pas déterminés ou modélisés par des systèmes d'équations linéaires.

Les définitions et propriétés suivantes permettent de comprendre qualitativement les points marquants des systèmes chaotiques.

#### **1.6.1.1 La non-linéarité**

Un système chaotique est un système dynamique non linéaire. Un système linéaire ne peut pas être chaotique.

#### **1.6.1.2 Le déterminisme**

La notion de déterminisme signifie la capacité de prédire le futur d'un phénomène à partir d'un événement passé ou présent. L'évolution irrégulière du comportement d'un système chaotique est due aux non linéairités

Dans les phénomènes aléatoires, il est absolument impossible de prévoir la trajectoire d'une quelconque particule. A l'opposé, un système chaotique a des règles fondamentales déterministes et non probabilistes

#### **1.6.1.3 L'aspect aléatoire**

En effet, un système chaotique évolue d'une manière qui semble aléatoire.

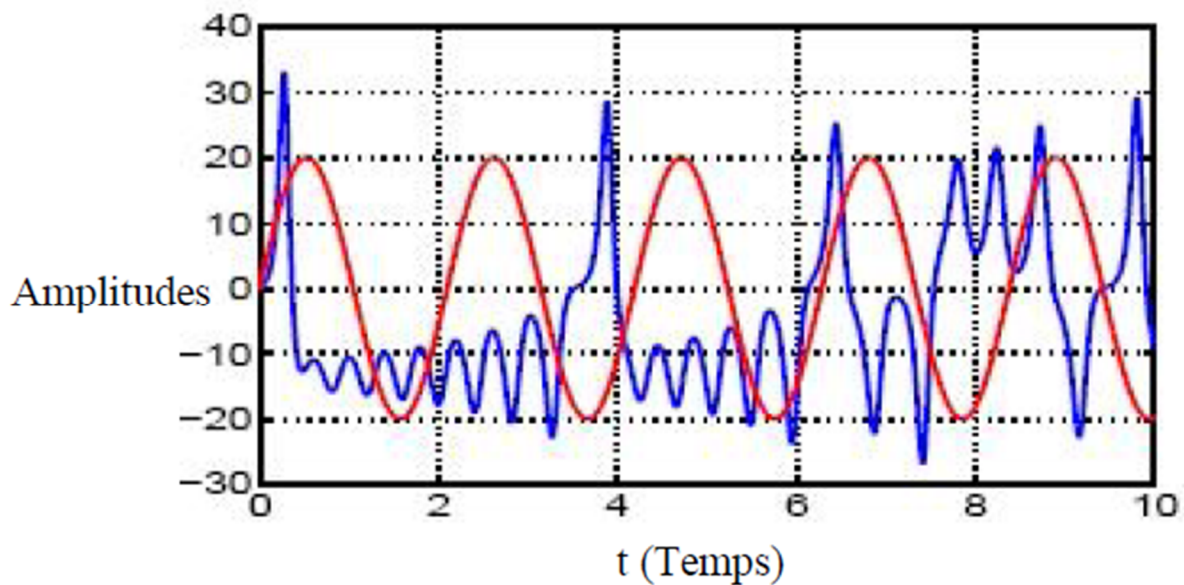


Figure 1.4 Evolution dans le temps d'un système chaotique, comparé à une sinusoïde

#### 1.6.1.4 Sensibilité aux conditions initiales

Certains phénomènes dynamiques non linéaires sont si sensibles aux conditions initiales que, même s'ils sont régis par des lois rigoureuses et parfaitement déterministes, les prédictions exactes sont impossibles. Comme la plupart des phénomènes sont non linéaires, on comprend alors l'importance de la découverte de Lorenz.

Une autre propriété des phénomènes chaotiques est qu'ils sont très sensibles aux perturbations. L'un des premiers chercheurs qui le découvrit fut Edward Lorenz qui s'intéressait à la météorologie et par conséquent aux mouvements turbulents d'un fluide comme l'atmosphère. Lorenz venait de découvrir que dans des systèmes non linéaires, d'infimes différences dans les conditions initiales engendraient à la longue des trajectoires totalement différentes. Il a illustré ce fait par l'effet papillon. Le battement d'ailes d'un papillon aujourd'hui à Pékin engendrait une tempête le mois prochain à New York.

Il est clair que la moindre erreur ou imprécision sur la condition initiale interdit de décider à tout temps quelle sera la trajectoire effectivement suivie et, en conséquence, de faire une prédiction sur l'évolution à long terme d'un système.

Une des propriétés essentielles du chaos est donc bien cette sensibilité aux conditions initiales que l'on peut caractériser en mesurant des taux de divergence des trajectoires. Ceci est illustré par la figure 1.5

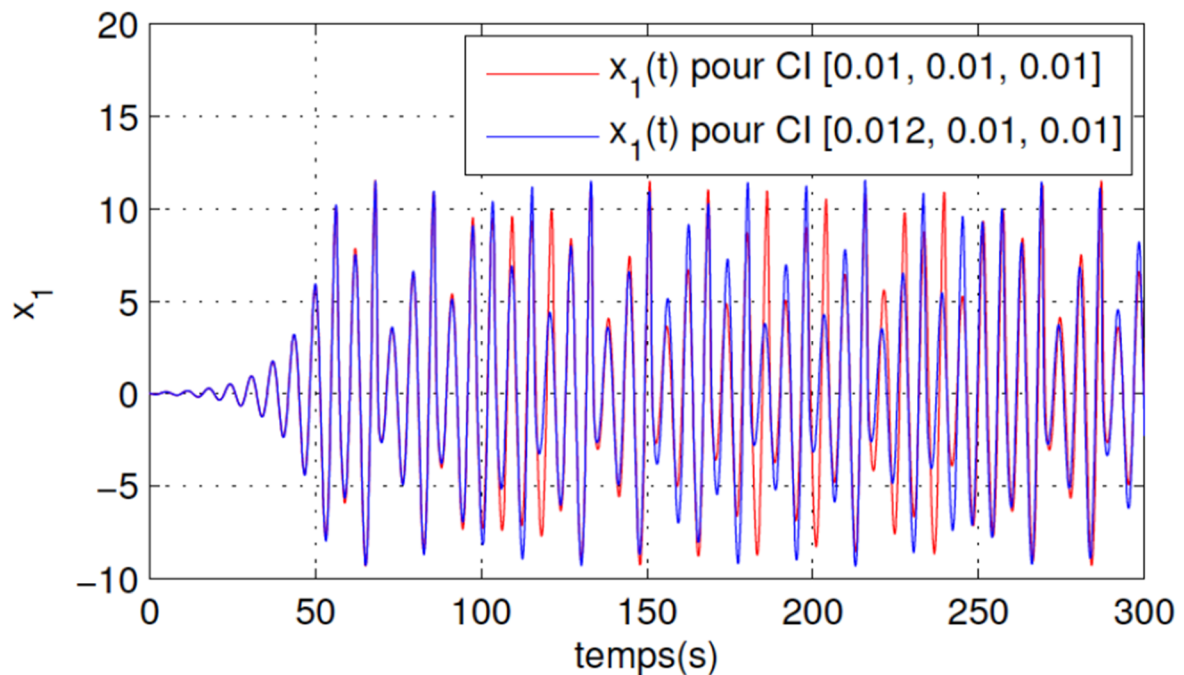


Figure 1.5 illustration de la propriété de sensibilité aux conditions initiales sur l'état  $\mathbf{x}_1[1]$

## 1.6.2 Historique du chaos

La théorie du chaos, très récemment développée, n'a pas bien été acceptée au début .

Elle représentait un grand changement de modèle, une rupture épistémologique dans la science de la fin du XIX<sup>ème</sup> siècle.

En 1890 : le roi Oscar II de Suède donne un prix au premier chercheur qui pourrait déterminer et résoudre le problème des orbites des corps célestes et ainsi prouver la stabilité du système solaire. Jusqu' ce jour, le problème n'a pas été résolu

En 1963 : Edward Lorenz découvre le premier système chaotique lié à la météo ou encore appelé attracteur étrange.

En 1975 : Tien Yien Li et James A. Yorke ont présenté la première fois le terme "chaos" dans un article appelé "period three implies chaos".

En 1990 : Edward Ott, Celso Grebogi et James A. Yorke introduisent la notion de contrôle du chaos.

En 1990 : Lou Pecora introduit la synchronisation des systèmes chaotiques.

### 1.6.3 Application du chaos

- **contrôle** : la première application du chaos est le contrôle du comportement irrégulier dans les circuits et les systèmes.
- **synchronisation** : communication sécurisée, cryptage, radio.
- **traitement d'information** : traitement d'information codage, décodage et stockage d'information
- **prédiction à court terme** : les maladies contagieuses, température, économie

### 1.6.4 Domaines d'application du chaos

- **Ingénierie** : contrôle de vibration, stabilisation des circuit, réactions turbines, étages de puissance, lasers, combustion.
- **Ordinateurs** : commutation des paquets dans des réseaux informatiques, cryptage,
- **Communications** : compression et stockage d'image, conception et management des réseaux d'ordinateurs.
- **Médecine et biologie** : cardiologie, analyse du rythme de cœur (EEG) , prédiction et contrôle d'activité irrégulière du cœur.
- **Management et finance** : prévisions économiques, analyse financière, et prévision du marché

## 1.7 Les attracteurs

### 1.7.1 Définition d'un attracteur

Un attracteur dans cet espace est un objet géométrique vers lequel tendent un ensemble de trajectoires des points de l'espace des phases, c'est-à-dire une situation vers les quelles évolue un système dynamique , pour un ensemble de conditions initiales. Le bassin d'attraction d'un attracteur est l'ensemble des points de l'espace des phases qui donnent une trajectoire

évoluant vers l'attracteur considéré. On peut donc avoir plusieurs attracteurs dans un même espace des phases.

Il existe deux types d'attracteurs:les attracteur réguliers et les attracteurs étranges.

### **a) Attracteur réguliers**

Les attracteur réguliers caractérisent l'évolution de systèmes non choatiques, et peuvent être de trois sortes :

#### **1 Les points fixes**

C'est le cas le plus courant, et le plus simple d'attracteur, dans lequel le système évolue vers un état de repos (point). Notons que seuls les puits peuvent être des attracteurs. Les autres types de points fixes ont en effet toujours au moins une « voie de sortie » à chaque valeur propre du jacobien de parties réelles positives est associé un vecteur propre qui pointe dans une direction où la trajectoire de phase s'éloigne du point fixe

#### **2 Le cycle limite périodique**

Il peut arriver que la trajectoire de phase se referme sur elle-même. L'évolution temporelle est alors cyclique, le système présentant des oscillations permanentes.

Dans un système physique dissipatif, cela exige la présence d'un terme de forçage dans les équations qui vient compenser en moyenne les pertes par dissipation.

#### **3 Le cycle limite pseudo périodique**

C'est presque un cas particulier du précédent. Le système présente au moins deux périodes simultanées dont le rapport est irrationnel .La trajectoire de phase ne se referme pas sur elle-même, mais s'enroule sur une variété de dimension 2.

### **b) L'attracteur étrange ou chaotique**

Le terme attracteur étrange est introduit pour la première fois par Ruelle et Takens(1971), pour appeler un ensemble limite d'un système dynamique qui n'est pas une variété et par suite il n'est pas un point fixe, un cycle limite, un tore invariant ou autre la notion de l'attracteur étrange indique la nature du modèle qui est un objet mathématique bien défini.

#### **Définition**

L'attracteur chaotique ou étrange est une forme géométrique plus complexe qui caractérise l'évolutions des systèmes dynamiques chaotiques.

## 1.8 synthèse des systèmes dynamiques chaotiques

Le plan d'étude d'un système dynamique est le suivant :

- Mise en équation du problème.
- Recherche des points fixes.
- Analyse de leur stabilité.
- Détermination des exposants de Lyapunov
- Mise en œuvre des sections de Poincaré.
- Tracé du diagramme de bifurcation

**Exemple :** étude du système chaotique de Lorenz

Pour bien comprendre comment l'analyse d'un système chaotique est effectuée, on va prendre comme exemple l'analyse du système de Lorenz.

### 1.8.1 Le système de Lorenz

L'attracteur de Lorenz tient son nom du météorologue Edward Lorenz qui l'a étudié le premier. C'est une simplification à l'extrême d'équations régissant les mouvements atmosphériques. Lorenz a étudié afin de mettre en évidence sur un système simple la sensibilité aux conditions initiales qu'il avait observée.[5]

Les équations correspondent aux «équations de la convection de Rayleigh-Bénard. Dans cette expérience, il considère un fluide entre deux plaques portées à deux températures légèrement différentes. Les deux plaques sont horizontales et la plaque la plus chaude est située en bas. Il observe des tourbillons

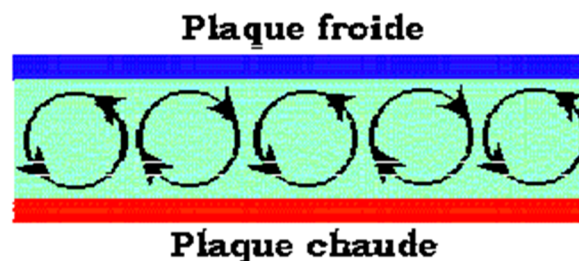


Figure 1.6-Convection de Rayleigh Bénard des tourbillons convectifs



Cette expérience a été réalisée pour quelques fluides présentant des propriétés adaptées viscosité, coefficient de dilatation, densité moyenne. Elle donne des résultats illustrant très bien le comportement chaotique.

$$\begin{cases} \dot{x} = \sigma * (y - x) \\ \dot{y} = rx - xz - y \\ \dot{z} = xy - bz \end{cases} \quad (1.10)$$

$\sigma$  désigne le nombre de Prandtl (égal à 10 dans les simulations),  $b = 8/3$  et  $r=28$  est le nombre de Rayleigh réduit.

Nous allons étudier le comportement et les différents portraits de phase obtenus pour différentes valeurs du paramètre de contrôle.

## 1.8.2 Analyse du système de Lorenz

### 1.8.2.1 Calcul des points d'équilibres

Les points fixes sont par définition tel que  $\dot{x} = \dot{y} = \dot{z} = 0$ . Un premier point fixe trivial est  $p_0$ :  
 $x = y = z = 0 \forall r \geq 0$

$$\begin{cases} \sigma(y - x) = 0 \Leftrightarrow x = y & (1) \\ rx - y - xz = 0 & (2) \\ xy - bz = 0 \Leftrightarrow z = \frac{xy}{b} & (3) \end{cases}$$

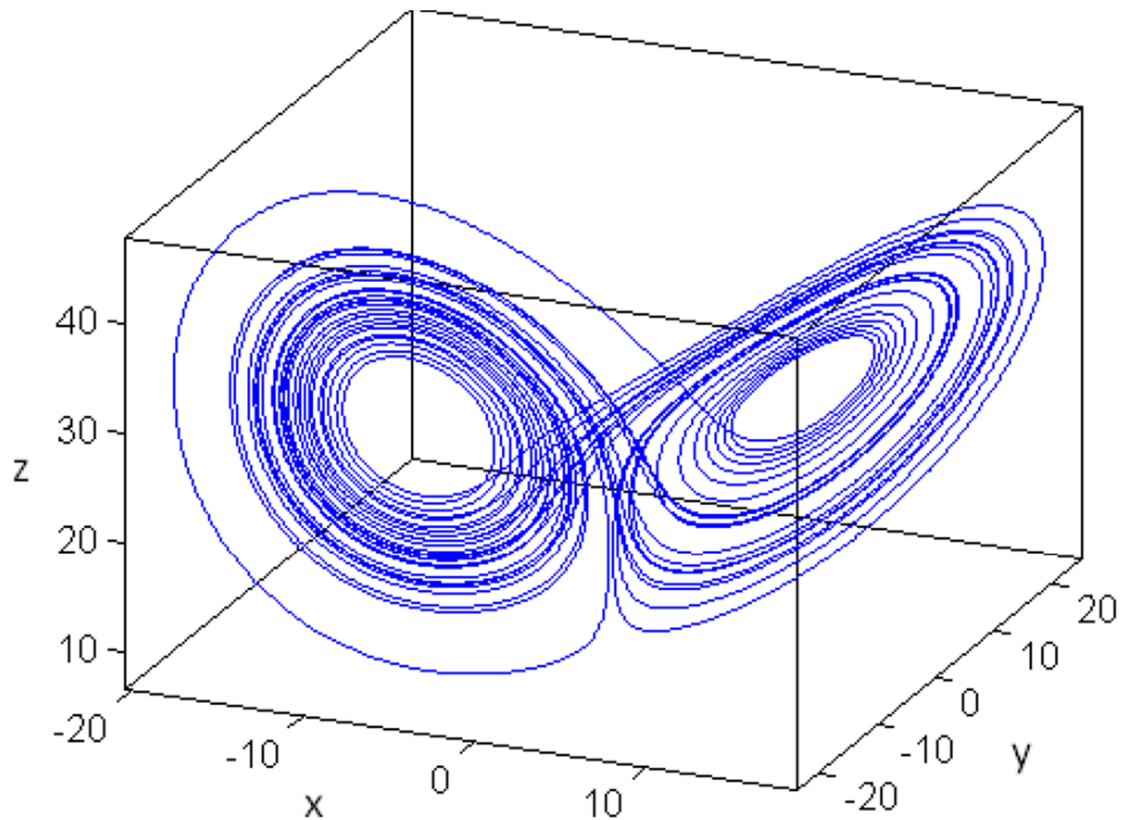


Figure 1.7 attracteur de Lorenz  $\sigma = 10, b = \frac{8}{3}, r = 28$

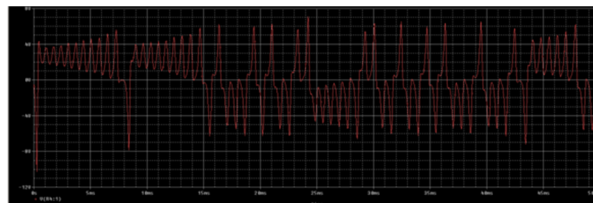
(1) dans (3) donne  $x^2 = bz \Leftrightarrow x = \pm\sqrt{bz}$

(1) dans (2) donne  $-xz + xz + rz - z = 0 \Leftrightarrow z = r - 1$

Les points fixes  $P_1$  et  $P_2$  sont donc

$$P_1 = (\sqrt{b(r-1)}, \sqrt{b(r-1)}, r-1) \text{ et } P_2 = (-\sqrt{b(r-1)}, -\sqrt{b(r-1)}, r-1) \quad (1.11)$$

Pour  $r=1$ ,  $P_0 = P_1 = P_2$  donc pour  $r \in [0; 1]$ , il n'y a qu'un seul point fixe  $P_0$  pour  $r > 1$ , il y a 3 points fixes  $P_0, P_1$  et  $P_2$



$Y=f(t)$

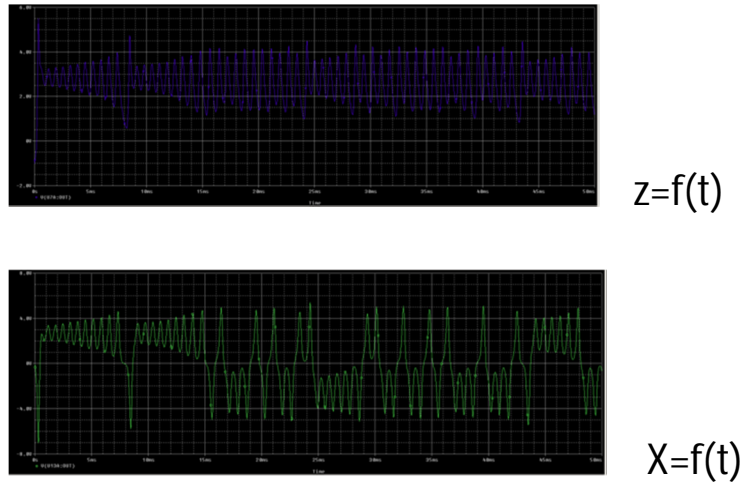


Figure 1.8 Série temporelles  $x(t)$ ,  $y(t)$ ,  $z(t)$  du système de Lorenz  $\sigma = 10$ ,  $b=8/3$ ,  $r = 28$

### 1.8.2.2 Stabilité des points d'équilibre

Nous allons maintenant étudier la stabilité des points fixes pour le cas  $|r-1| < 1$

La stabilité des points d'équilibre est déterminée en linéarisant le flot au voisinage de ces points et en calculant les valeurs propres, notées  $\lambda_i$ , de la matrice jacobienne en ces points.

La matrice jacobienne s'écrit :

$$J = \begin{pmatrix} -\sigma & \sigma & 0 \\ r - z & -1 & -x \\ y & x & -b \end{pmatrix} \quad (1.12)$$

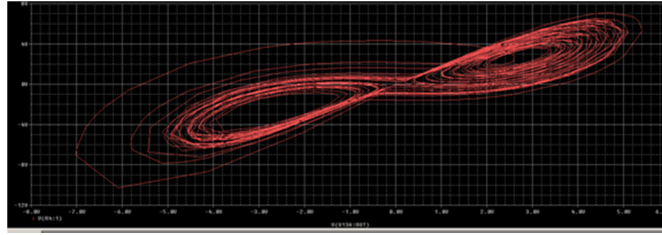
- pour  $P_0$

L'origine est un point fixe pour toutes les valeurs du paramètre  $b, \sigma$  et  $r$ , la matrice jacobienne est :

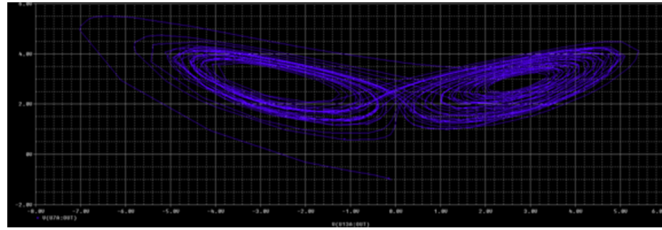
$$J = \begin{pmatrix} -\sigma & \sigma & 0 \\ r & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -b \end{pmatrix} \quad (1.13)$$

Comme  $\det(J - \lambda I) = 0$ , nous avons l'équation caractéristique suivante :

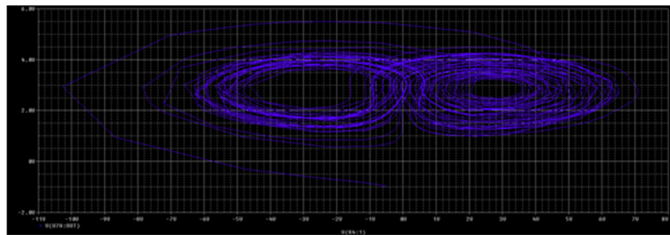
$$(\lambda + b)[\lambda^2 + (\sigma + 1)\lambda + \sigma(1 - r)] = 0 \quad (1.14)$$



espace (x-z)



espace (y-x)



espace (y-z)

Figure 1.9 Attracteur de Lorenz (a) l'espace (x-z), (b) l'espace (y-x), (c) l'espace (y-z)

qui a pour racines :

$$\lambda_1 = \frac{-\sigma - 1 + \sqrt{(\sigma - 1)^2 + 4r\sigma}}{2} \quad (1.15)$$

$$\lambda_2 = \frac{-\sigma - 1 - \sqrt{(\sigma - 1)^2 + 4r\sigma}}{2} \quad (1.16)$$

$$\lambda_3 = -b \quad (1.17)$$

**Pour  $P_1$**

La matrice jacobienne correspondant à ces points s'écrit :

$$J = \begin{pmatrix} -\sigma & \sigma & 0 \\ 1 & -1 & -\sqrt{b(r-1)} \\ \sqrt{b(r-1)} & \sqrt{b(r-1)} & -b \end{pmatrix} \quad (1.18)$$

**Pour P<sub>2</sub>**

$$J = \begin{pmatrix} -\sigma & \sigma & 0 \\ 1 & -1 & \sqrt{b(r-1)} \\ -\sqrt{b(r-1)} & -\sqrt{b(r-1)} & -b \end{pmatrix} \quad (1.19)$$

Ses valeurs propres sont les racines du polynome caractéristique :

$$\det(J - \lambda I) = \lambda^3 + (\sigma + b + 1) \lambda^2 + b(\sigma + r) \lambda + 2b\sigma(r - 1) \quad (1.20)$$

Le polynome est d'ordre trois, on peut le résoudre par les formules de Cardan et déterminer le signe des racines par les conditions de Routh-Hurwitz.

Et selon les valeur du paramètre r, ce polynome peut avoir trois racines réelles négatives ou bien une racine réelle et deux racines complexes conjuguées.

On peut simplifier ce calcul en utilisant le fait qu'il existe une valeur propre  $\lambda_1 = 0$  si  $r = 1$  donc on peut supposer que  $|\lambda_1| \ll 1$  si  $|r - 1| \ll 1$  ; on peut donc négliger  $\lambda_1^2$   $\lambda_1^3$  de l'équation

$$\lambda_1 \cong -\frac{2\sigma b(r-1)}{+br} < 0 \text{ pour } r > 1 \quad (1.21)$$

Les autres valeurs proposes  $\lambda_2, \lambda_3$  ne dépendent pas de r.

$$\lambda^2 - \lambda(\sigma + 1 + b) - (\sigma b + b) = 0 \quad (1.22)$$

On résoud donc

$$\Delta = (\sigma + 1 + b)^2 + 4b(\sigma + 1)$$

Les valeurs propres sont donc :

$$\lambda_1 = -\frac{\rho + 1 + b - \sqrt{(\sigma + 1 + b)^2 + 4b(\sigma + 1)}}{2} < 0 \quad (1.23)$$

$$\lambda_2 = \frac{-(\sigma + 1 + b) + \sqrt{(\sigma + 1 + b)^2 + 4b(\sigma + 1)}}{2} < 0 \quad (1.24)$$

On fait de même avec P<sub>2</sub> et on trouve le même résultat  $\lambda_3 < \lambda_2 < \lambda_1 < 0$  (nœud stable)

Donc les points  $P_1, P_2$  sont stable pour  $|r-1| \ll 1$ .

Pour  $r = 1$ , on a donc une bifurcation fourche supercritique.

On va maintenant montrer que les points fixes issus de la première

7ième bifurcation se destabilisent à leur tour pour une valeur  $r_c$  par une bifurcation de Hopf

Cette deuxième bifurcation est caractérisée par une paire de valeurs propres complexes conjuguées pour lesquelles la partie réelle change de signe à la bifurcation. On sait donc qu'il existe des solutions purement imaginaires  $\lambda_{1,2} = \pm i\omega$  quand  $r$  atteint sa valeur critique  $r_c$ .

En prenant les parties réelles et imaginaires de l'équation caractéristique, on trouvera deux équations indépendantes permettant de déterminer  $\omega$  et la valeur de  $r_c$

Reprenons l'équation

$$P(\lambda) = \lambda^3 + (\sigma + b + 1)\lambda^2 + b(\sigma + r)\lambda + 2b\sigma(r - 1)$$

$$\Leftrightarrow (i\omega)^3 + (\sigma + b + 1)(i\omega)^2 + b(\sigma + r_c)(i\omega) + 2b\sigma(r_c - 1) \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} \omega^2(\sigma + 1 + b) + 2\sigma b(1 - r_c) = 0 \\ \omega^3 - \omega(\sigma b + br_c) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \omega^2 = \frac{2\sigma b(r_c - 1)}{\sigma + 1 + b} \\ \omega^2 = \sigma b + br_c \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} r_c = \frac{\sigma b + \frac{2\sigma b}{\sigma + 1 + b}}{\frac{2\sigma b}{\sigma + 1 + b} - b} \\ \omega = \pm((\sigma b + b)r_c) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} r_c = \frac{\sigma(\sigma + b + 3)}{\sigma - b - 1} \\ \omega = \pm((\sigma b + b)r_c) \end{cases}$$

Application numérique :  $r_c = 24.74$  et  $\omega = \pm 92.64$

## 1.9 Exposant de Lyapunov

L'exposant de Lyapunov sert à mesurer le degré de stabilité d'un système. Un système sensible à très petites variations de la conditions initiale aura un exposant positif (système chaotique). En revanche, l'exposant est négatif si le système n'est pas sensible à des petites variations des conditions initiales, les trajectoires se rapprochent et on perd donc l'information sur les conditions initiales. Un système de dimension  $n$  possède  $n$  exposants de Lyapunov qui mesurent le taux de divergence suivant un des axes de l'espaces de phase. L'apparition du chaos exige l'existence d'un exposant positif selon au moins un axe, tout en rendant compte que la somme des exposants est négative (respectivement nulle ) pour les systèmes dissipatifs(respectivement conservatifs).

Un exposant de Lyapunov positif(respectivement négatif) selon une direction indique, qu'une divergence entre deux trajectoires voisines augmente(respectivement diminue) exponentiellement avec le temps

Figure(1.10) représente le tracé valeur des exposant de lypunov pour le système de lorenz en utilisant Matlab et matds

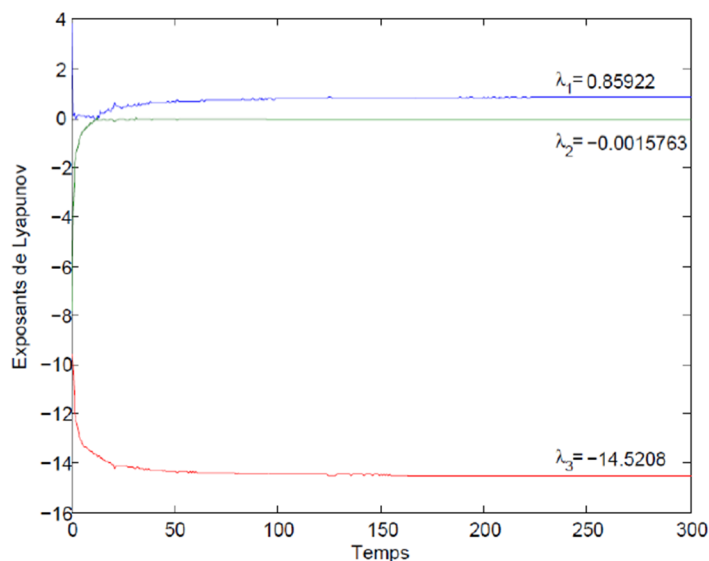


figure 1.10 Les exposants de Lyapunov du système de lorenz :  $\sigma = 10$ ,  $b = 8/3$ ,  $r=28$

## 1.10 Section de Poincaré

La section de Poincaré est un outil mathématique permettant de transformer un système continu en un système dynamique discret. Cette transformation s'opère via une réduction de l'ordre du système.

Faire une section poincaré revient à couper la trajectoire dans l'espace des phases, afin d'étudier les intersections de cette trajectoire avec, par exemple en dimension trois, un plan illustre en bleu l'attracteur de Lorenz avec en rouge la figure(1.11), sa section de poincaré correspond au plan x-y.

L'ensemble des points d'intersection, situés sur la surface représente la section poincaré

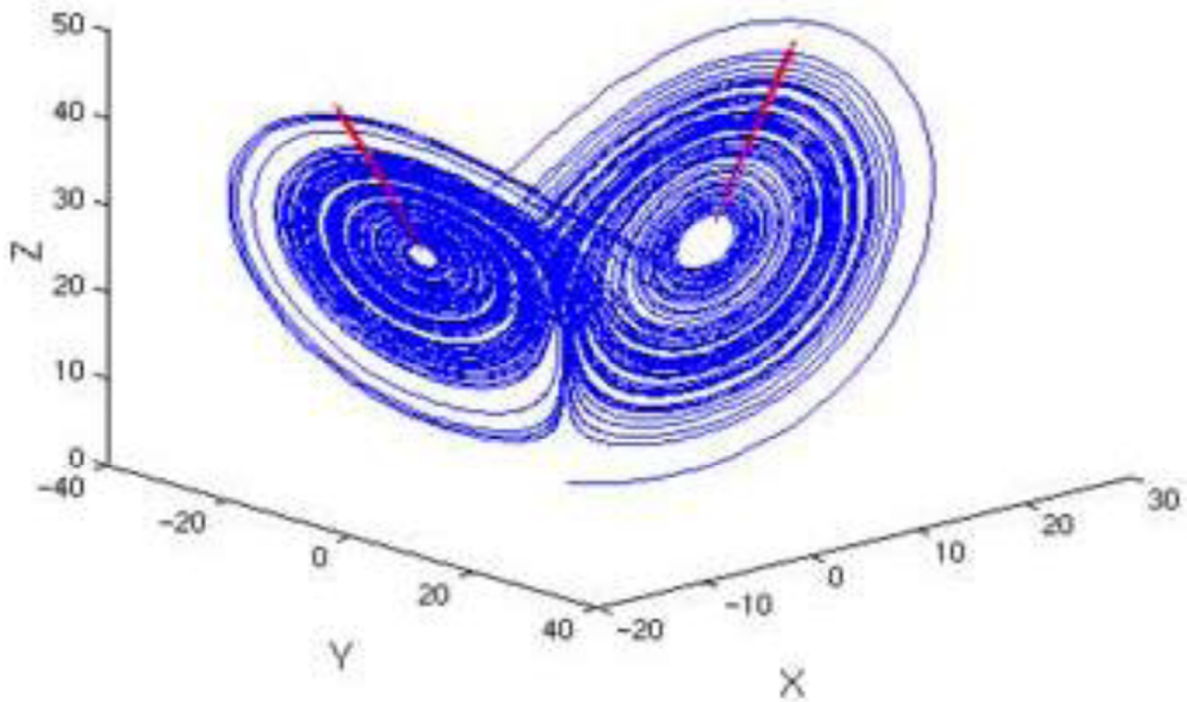


Figure 1.11 Représentation de la section de Poincaré pour le système de Lorenz

## 1.11 Bifurcation

La théorie de bifurcation est l'étude mathématique de changement qualitatifs ou topologiques de la structure d'un système dynamique

Le diagramme de bifurcation est un outil qui permet de repérer les valeurs du paramètre qui induisent des bifurcations. C'est un diagramme qui porte les valeurs du paramètre en abscisse et des valeurs particulières d'une variable d'état en ordonnées.

Dans les systèmes dynamiques, un diagramme de bifurcation montre les comportements possibles d'un système, à long terme, en fonction des paramètres de bifurcation (figure 1.12)



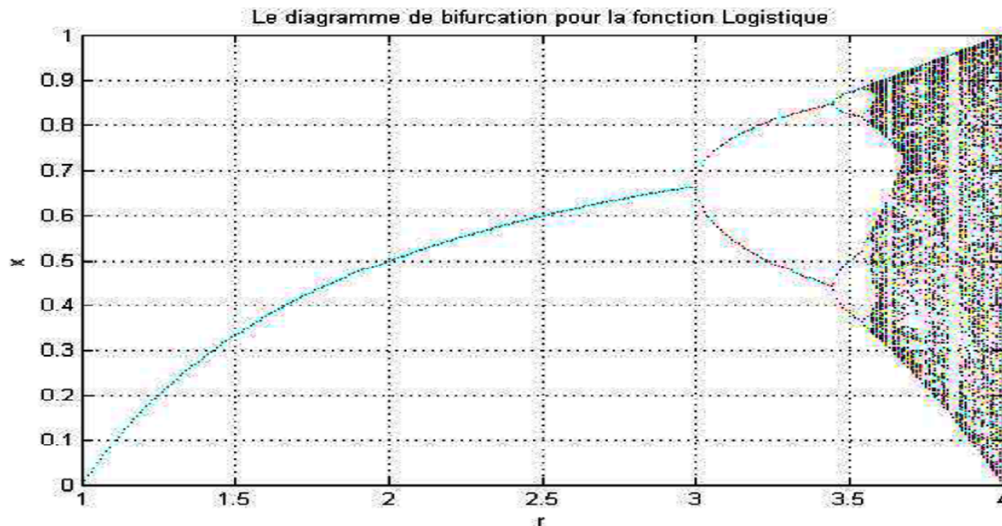


Figure 1.12 diagramme de bifurcation pour la fonction logistique

Dans les équations de Lorenz par exemple, la résolution du système n'apporte pas toujours le chaos. Ce régime n'apparaît que pour certaines valeurs des paramètres. Pour caractériser le chaos il peut être intéressant d'étudier l'apparition du chaos (ce qu'on appelle le scénario ou la route vers le chaos).

On distingue trois scénarios théoriques d'évolution vers le chaos. Toutes ces évolutions ont permis de classer certains phénomènes expérimentaux comme chaotique déterministes.

On obtient l'apparition du chaos en modifiant la valeur d'un paramètre du système que ce soit de manière théorique ou expérimentale

### - le doublement de période

L'augmentation d'un paramètre provoque, pour un système périodique, l'apparition d'un doublement de période, la période se multiplie ainsi en 4, 8, 16,.....

A partir d'une certaine valeur du paramètre, les doublements étant de plus en plus rapprochés, on tend vers un point auquel on obtiendrait hypothétiquement une fréquence infinie et c'est à ce moment que le chaos apparaît.

### - L'intermittence

Ce scénario est caractérisé par un mouvement périodique stable entrecoupé par des mouvements chaotiques qui apparaissent de manière irrégulière.

Le système conserve pendant un certain laps de temps un régime périodique ou pratiquement quasi périodique, c'est à dire une certaine "régularité", et il se déstabilise, brutalement, pour donner lieu à un comportement chaotique. Il se stabilise de nouveau, pour donner lieu à une autre explosion chaotique plus tard.

Ce troisième scénario fait intervenir pour un système périodique l'apparition d'une autre période dont le rapport avec la première n'est pas rationnel

### 1.12 Schéma de simulation sur matlab/simulink

On procède à une simulation sur simulink, la figure(1.13) représente le schéma global du système de Lorenz.

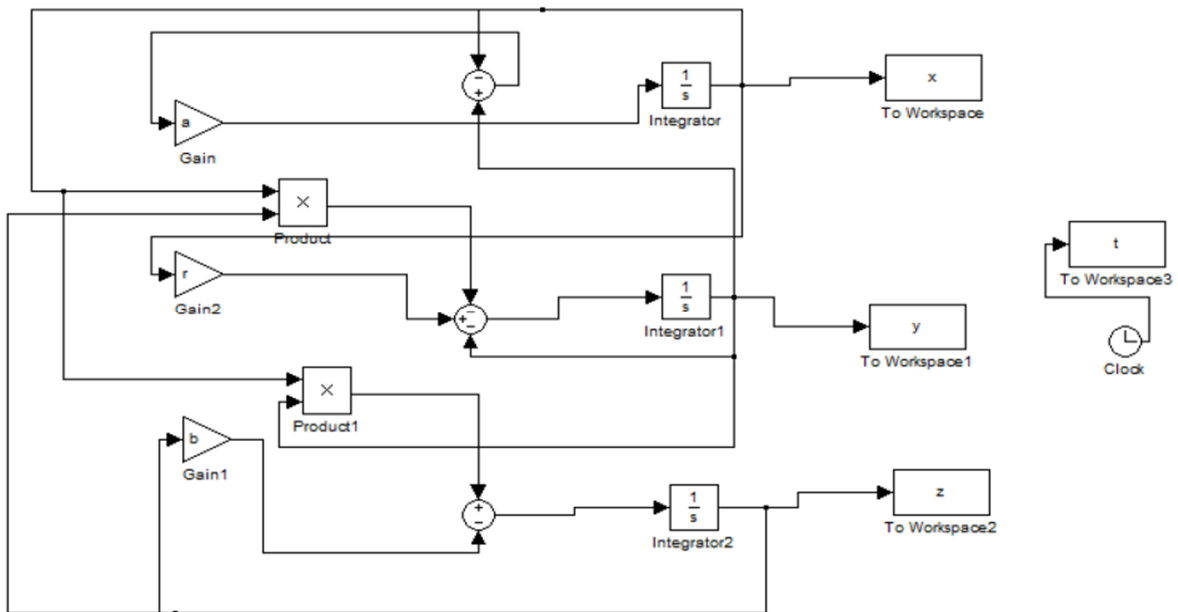
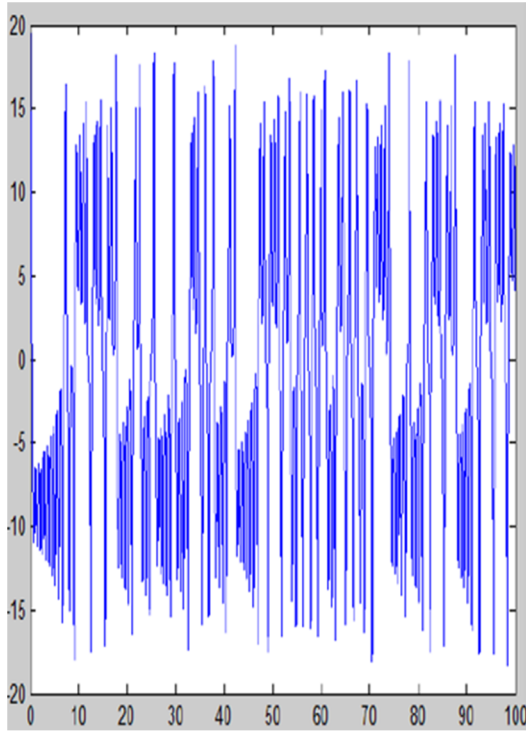
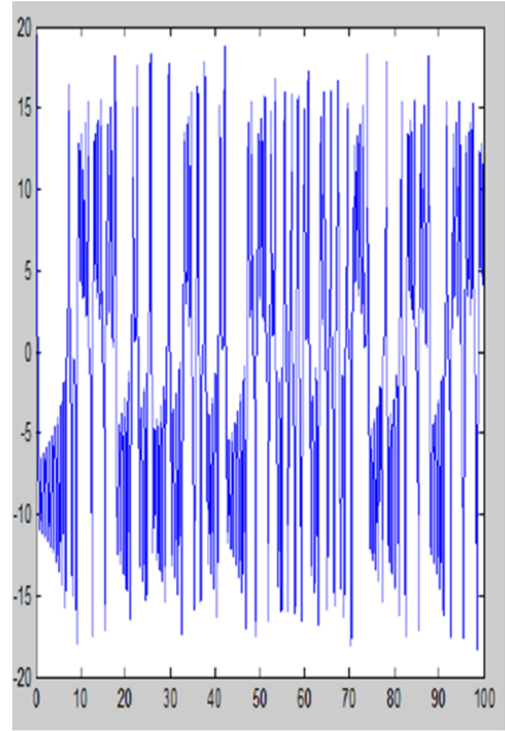


Figure 1.13 schéma simulink de système de Lorenz

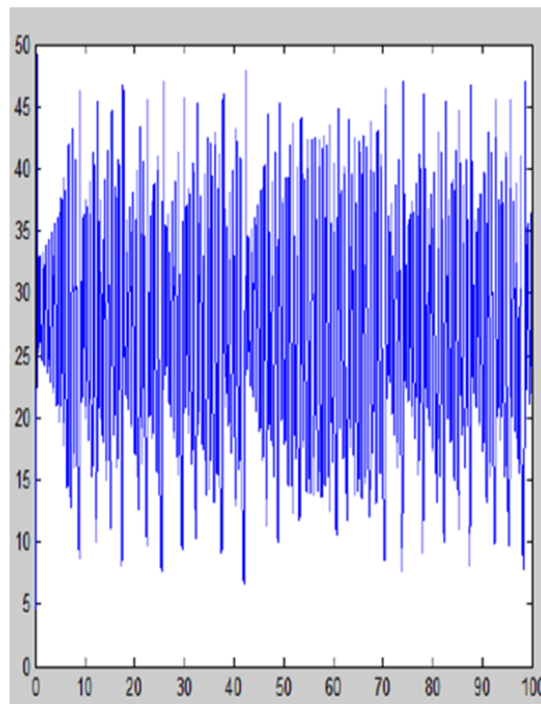
### 1.13 les resultat obtenus



Résultat simulé sur matlab **signal  $x(t)$**



Résultat simulé sur matlab **signal  $y(t)$**



Résultat simulé sur matlab **signal  $z(t)$**

Figure 1.14 resultat de signal  $x(t)$ ,  $y(t)$ ,  $z(t)$

## 1.14 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons donné un aperçu sur les systèmes dynamiques et présenté quelques définitions permettant de cerner leurs caractéristiques essentielles. Nous avons aussi décrit les principales caractéristiques des systèmes chaotiques.

Nous avons abordé les caractéristiques suivantes :

- Détermination des points d'équilibre.
- Calcul des valeurs propres de la jacobéenne aux points d'équilibre.
- Calcul des exposants de Lyapunov et de la section Poincaré.
- Diagramme de bifurcation.

Dans le chapitre suivant, nous allons nous intéresser à l'implémentation du circuit analogique de Lorenz .

# *Chapitre 2*

## *Synchronisation des systèmes chaotique*

## 2.1 Introduction

L'utilisation du chaos dans les systèmes de télécommunication a été rendue possible depuis la maîtrise de la synchronisation des systèmes chaotique. En effet, le problème de synchronisation du récepteur dans le but de dupliquer le signal chaotique utilisé au niveau du récepteur se pose directement.

La synchronisation des systèmes chaotiques peut paraître énigmatique et ambiguë. En effet la synchronisation de ces systèmes présente plus de contraintes contrairement au cas d'oscillations périodique où il n'ya pas d'instabilité intrinsèque.

Dans la littérature plusieurs concepts de synchronisation chaotique ont été proposés, tout d'abord avec les travaux de Yamada et Fujisaka [1] qui ont utilisé une approche locale de la synchronisation chaotique. Par la suite, Afraimovich [1] et al, ont développé les concepts importants liés à la synchronisation chaotique et ultérieurement Pecora et Carroll [1] ont défini la synchronisation chaotique sous le nom de synchronisation identique, développée sur la base de circuit chaotique couplés, avec l'un maître et l'autre esclave ; ces travaux ont ouvert la voie des applications du chaos aux télécommunications.

## 2.2 Les systèmes couplés

### Définition 1

On dit que deux oscillateurs sont couplés si l'existence d'une perturbation dans l'un entraîne une perturbation dans l'autre ; ce qui se traduit par un transfert d'énergie entre les deux oscillateurs. Ce type d'accouplement est appelé accouplement mutuel.

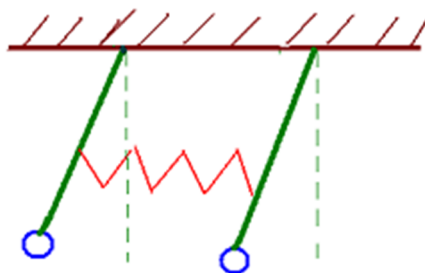


Figure 2.1 : Deux pendules couplés

Maintenant, et après ce cas particulier, on donne la définition d'accouplement pour deux systèmes dynamiques en général

## 2.2.1 Accouplement unidirectionnel

Supposons qu'on a deux systèmes dynamiques identiques représentés par les deux équations suivantes :

$$\dot{x} = f(x,t) \quad (2.1)$$

$$\dot{y} = f(y,t) \quad (2.2)$$

Si l'équation (2.2) va être modifiée par l'effet d'accouplement, et si le résultat de cette modification nous donne de nouvelles équations de la forme :

$$\dot{x} = f(x,t) \quad (2.3)$$

$$\dot{y} = g(y,x,t) \quad (2.4)$$

Tel que  $g(y,x,t) = f(x,t)$  pour  $x = y$ , dans ce cas on parle de l'accouplement unidirectionnel.

Le premier système s'appelle système émetteur (maître), et le deuxième système récepteur (esclave). La dernière représentation signifie que le système émetteur a un effet sur le récepteur, et le contraire est faux. Il est bien clair que ce type d'accouplement est un cas particulier d'accouplement mutuel, mais dans ce mémoire on s'intéresse à l'accouplement unidirectionnel.

## 2.2.2 Méthode d'accouplement par contrôle continu

Dans ce cas le système émetteur est toujours donné par l'équation (2.3) tandis que le système récepteur est donné par l'équation

$$\dot{y} = g(y,x) = f(y,t) + M_{n \times n}(x - y) \quad (2.5)$$

Avec  $M_{n \times n}$  une matrice diagonale carré d'ordre  $n$ , et constituée d'éléments constants.

## 2.2.3 Méthode d'accouplement par remplacement des variables

Cette méthode a été utilisée dans les travaux de Carroll et Pecora[6]. Son principe est de décomposer le système émetteur, qui est représenté par l'équation (2.3) en deux sous-systèmes présentés par :

$$\dot{x}_1 = f_1(x_1, x_2) \quad (2.6)$$

$$\dot{x}_2 = f_2(x_1, x_2) \quad (2.7)$$

## 2.3 Communication sécurisée à base du chaos

Comme il a été mentionné dans le premier chapitre, le chaos déterministe peut générer des comportements dynamiques d'apparence aléatoires. Il serait donc intéressant d'utiliser ces derniers comme porteuse d'informations en télécommunication.

En 1990, L.M. Pecora et T.L. Carroll [1] ont introduit la notion de synchronisation de deux systèmes chaotiques identiques. Trois ans plus tard, Cuomo [1] et Oppenheim présentèrent le premier dispositif de communication entre deux systèmes chaotiques de Lorenz identiques en 1997. Kolumban Kennedy et Chua [1] réalisèrent des communications numériques à base de deux circuits de Chua [1] identiques. Plus tard, le domaine du chaos attira l'attention de la communauté scientifique et plusieurs systèmes de communications symétriques furent présentés.

Le diagramme principal de la communication sécurisée par le chaos est montré sur la figure (2.1) : le principe est de masquer une information par deux signaux chaotiques et de l'envoyer vers le récepteur sur un canal public. L'information cryptée est récupérée au niveau du récepteur.

La clé du système de transmission est l'ensemble des paramètres des deux générateurs chaotiques à l'émission et à la réception qui doivent être synchronisés c'est-à-dire  $x=y$ .



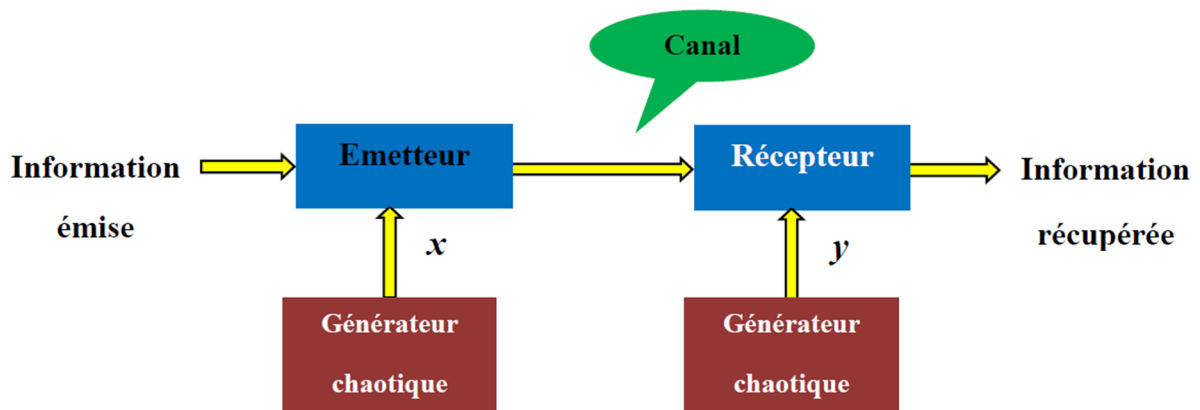


Figure 2.2 Principe de la communication sécurisée à base du chaos

## 2.4 Concept et méthode de synchronisation

Le concept de synchronisation repose sur le constat qu'un système chaotique est déterministe et possède un ou plusieurs exposants de Lyapunov positifs et qu'il est instable. Il est donc possible de construire une réplique identique à ce système et d'essayer de synchroniser de façon que les deux signaux chaotiques issus des deux exemplaires soient identiques.

Il existe deux classes de synchronisation suivant la manière avec laquelle les deux systèmes chaotiques sont couplés ; on distingue la synchronisation unidirectionnelle et la synchronisation bidirectionnelle.

### 2.4.1 Synchronisation unidirectionnelle

Dans le cas d'une synchronisation unidirectionnelle, le couplage entre deux systèmes identiques  $a$  et  $b$  est réalisé à l'aide d'un élément fonctionnant dans un seul sens, par exemple l'utilisation d'un circuit électrique suiveur.

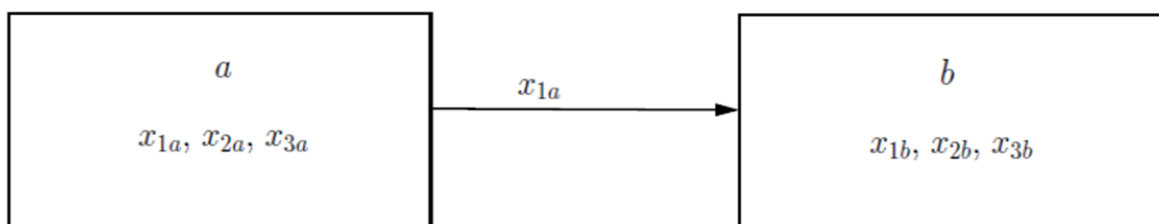


Figure 2.3 Couplage unidirectionnel

## 2.4.2 Synchronisation bidirectionnelle

Dans le cas d'une synchronisation bidirectionnelle, le couplage entre deux systèmes identiques  $a$  et  $b$  est réalisé à l'aide d'un élément permettant l'échange d'énergie dans les deux sens, par exemple l'utilisation d'une simple résistance.

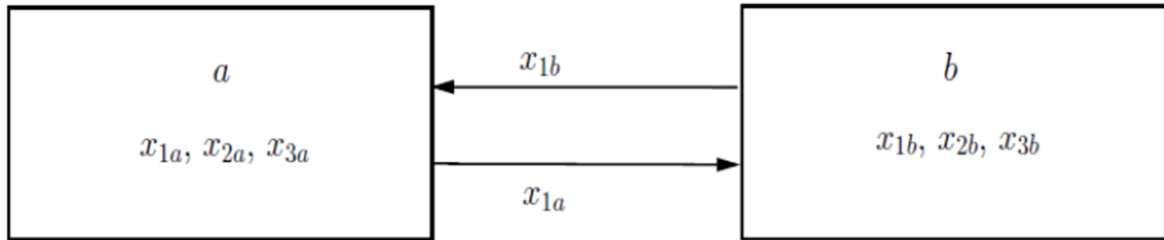


Figure 2.4 Couplage bidirectionnel

## 2.4 Méthode de synchronisation

Plusieurs méthodes de synchronisation ont été proposées dans la littérature. Dans ce qui suit nous citerons quelques approches en expliquant leurs principes et avantages

### 2.4.1 Synchronisation par répartition du système

Pour illustrer la méthode de synchronisation par couplage entre deux systèmes chaotiques, nous avons choisi de présenter la synchronisation identique proposée par Pecora et Carroll. L'avantage de cette approche est de représenter une solution simple et performante. L'objectif est qu'un système esclave reproduise le plus fidèlement possible l'état du maître, après un régime transitoire

L'idée consiste à diviser le système d'origine en deux sous-systèmes de telle sorte que

les variables dynamiques au départ soient de part et d'autre de chacun des sous-systèmes. Il s'agit ensuite de reproduire les sous-systèmes à l'identique et de les mettre en cascade. Le signal issu du système de départ (système maître) sert à piloter (synchroniser) le premier des deux sous-systèmes dupliqués.

Partant d'un système chaotique défini par la dynamique suivante :

$$\dot{x}(t) = f(x(t)) \quad (2.8)$$

où  $x = [x_1 \dots \dots x_n]$

On divise le système initial en deux sous-systèmes avec une réorganisation des variables d'état dans un ordre quelconque.

$$\begin{cases} S_1: \dot{x}^{\{1\}} = F^{\{1\}}(x^{\{1\}}, x^{\{2\}}) \\ S_2: \dot{x}^{\{2\}} = F^{\{2\}}(x^{\{1\}}, x^{\{2\}}) \end{cases} \quad (2.9)$$

Avec

$$x^{\{1\}} = [x_1, \dots, x_m]^T$$

$$x^{\{2\}} = [x_{m+1}, \dots, x_n]^T$$

$$F(x) = [F^{\{1\}}(x); F^{\{2\}}(x)]$$

Soit un autre système  $S'_2$  de dynamique identique  $F^{\{2\}}$  et un vecteur d'état  $\hat{x}^{\{2\}}$ :

$$S'_2: \dot{\hat{x}}^{\{2\}} = F^{\{2\}}(x^{\{1\}}, \hat{x}^{\{2\}}) \quad (2.10)$$

Pecora et Carroll ont démontré que le système  $S'_2$  est candidat pour se synchroniser avec le système initial à la condition nécessaire et suffisante qu'il soit stable ; ceci est une convergence parfaite des trajectoires ainsi accomplies.

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \|\hat{x}^{\{2\}}(t) - x^{\{2\}}(t)\| = 0 \quad (2.11)$$

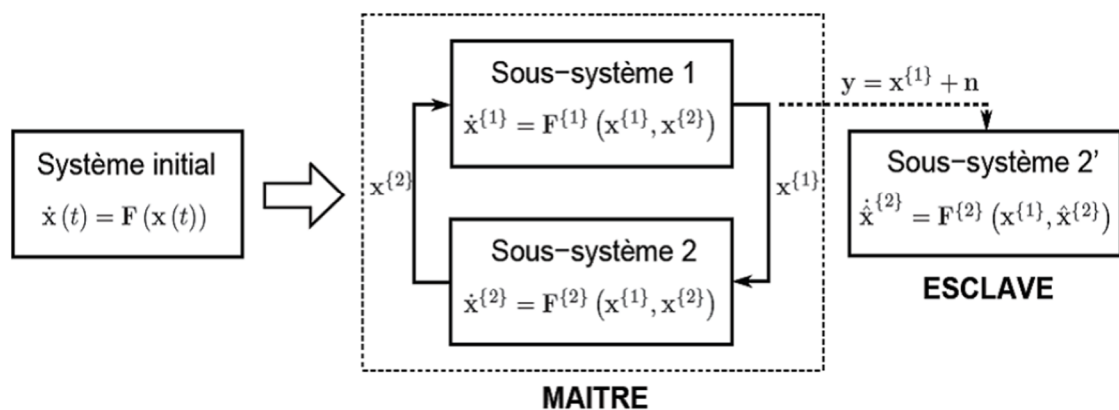


Figure 2.5 Synchronisation maître-esclave

## 2.4.2 Synchronisation généralisée

Cette méthode est une généralisation du concept de synchronisation identique. Les deux systèmes se synchronisent, au sens généralisé s'il existe une transformation  $M$  telle que

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \|x(t) - M(x(t))\| = 0 \quad (2.12)$$

où  $x(t)$  est l'état du système émetteur et  $\hat{x}(t)$  est l'état du système récepteur.

Les conditions initiales ne sont pas tenues en compte dans ce cas si  $M$  est inversible, alors  $M^{-1}(\hat{x})$  fournit une estimation de l'état  $x$  ; dans le cas contraire, il serait impossible de fournir une estimation de l'état  $x$ . Ceci présente alors un inconvénient majeur pour les techniques de communication utilisant l'état de l'émetteur pour décrypter le message transmis.

## 2.4.3 Synchronisation par boucle fermée

La synchronisation des systèmes chaotique par les méthodes en boucle ouverte implique une sensibilité aux variations paramétriques. Pour y remédier, de nouvelles technique basées sur un bouclage par contre-réaction ont été proposées.

L'idée est d'appliquer une correction au système en fonction de l'erreur entre le signal transmis par le premier système et le signal régénéré par l'autre. Cette erreur est ainsi injectée en contre-réaction d'où l'appellation de l'approche.

Cette technique permet également la synchronisation entre des paires différentes de systèmes chaotiques.

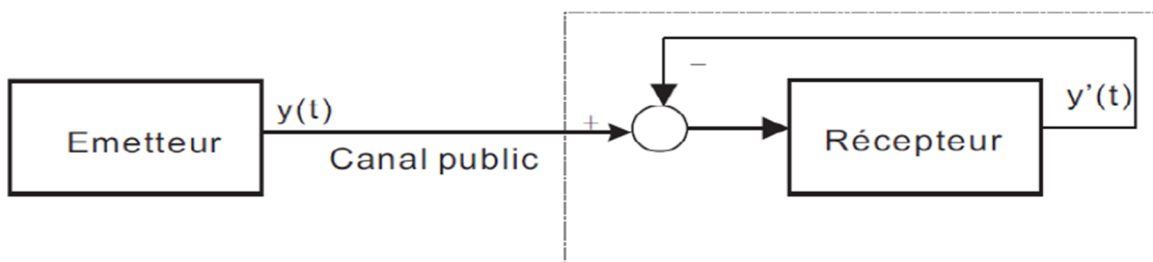


Figure 2.6 Synchronisation par boucle fermée

## 2.4.4 Synchronisation de phases

Pour de systèmes périodiques de phase  $\Phi_1$  et  $\Phi_2$ , la synchronisation est exprimée par la relation :

$$|n\Phi_1 - m\Phi_2| < c \quad (2.13)$$

Avec  $m, n$  des entiers naturels et  $c$  est une constante positive.

Cette notion de synchronisation a été étendue aux systèmes chaotiques. L'approche analytique est l'une des solutions permettant de définir la phase d'un système chaotique.

Un signal analytique  $\Psi(t)$  est une fonction complexe définie comme suit :

$$\Psi(t) = s(t) + j\tilde{s}(t) = A(t)e^{j\Phi(t)} \quad (2.14)$$

où  $\tilde{s}(t)$  est la transformée de Hilbert de la série temporelle  $s(t)$ ,  $A(t)$  est l'amplitude de  $\Psi(t)$  et  $\Phi(t)$  sa phase .

La synchronisation de phase entre deux systèmes chaotiques couplés se réalise si :

$$|n\Phi_1(t) - m\Phi_2(t)| < c \quad (2.15)$$

Il est à noter que dans ce cas , les amplitudes restent corrélées

## 2.4.5 Synchronisation impulsive

Dans un schéma de transmission usuel, un des états du système dynamique est transmis afin de réaliser la synchronisation par le récepteur. Dans le but de réduire la redondance du signal transmis, la synchronisation impulsive a été proposée (figure 2.7).

Le contrôle impulsif d'un système signifie qu'à des moments choisis, les états du système changent soudainement.

Dans ce schéma de synchronisation, on considère un système maître de la forme générale suivante :

$$\dot{x}(t) = f(x(t)) \quad (2.16)$$

On définit un signal impulsif qui consiste en une suite d'instantanés discrets auxquelles un signal  $y(t) = Cx(t)$  est envoyé par le système maître au système esclave, dont les variables d'état subissent un saut et un changement d'état.

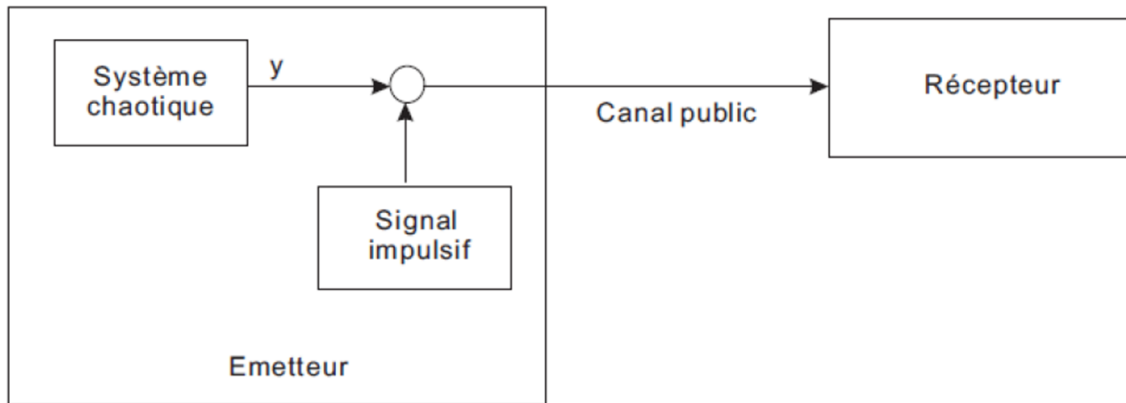


Figure 2.7 synchronisation impulsive

Cette méthode être appliquée pour la réalisation d'un système de transmission sécurisée

## 2.5 Application de la synchronisation unidirectionnelle au système de Lorenz

Soit le système de Lorenz

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = \sigma * (x_2 - x_1) \\ \dot{x}_2 = r * x_1 - x_2 - x_1 * x_3 \\ \dot{x}_3 = x_1 * x_2 - b * x_3 \end{cases}$$

Avec  $a = 10, b = 28, c = 8/3$

$$\text{Avec } K_1 = 0 \Leftrightarrow K_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et } K_2 = \begin{pmatrix} K_{21} & 0 & 0 \\ 0 & K_{22} & 0 \\ 0 & 0 & K_{23} \end{pmatrix}$$

$$p = \begin{pmatrix} p_1 & 0 & 0 \\ 0 & p_2 & 0 \\ 0 & 0 & p_3 \end{pmatrix}, \quad p_1 = p_2 = p_3 = 1$$

$$\varepsilon = 0.01 \tag{2.17}$$

On considère les deux systèmes chaotiques suivant de dimension 3

$$\begin{cases} \dot{x} = A * x + f(x) \\ \dot{y} = A * y + f(y) + K_2 * (x - y) \end{cases} \tag{2.18}$$

$$\text{Système maître} \Rightarrow \begin{cases} \dot{x}_1 = \sigma * (x_2 - x_1) \\ \dot{x}_2 = r * x_1 - x_2 - x_1 * x_3 \\ \dot{x}_3 = x_1 * x_2 - b * x_3 \end{cases} \quad (2.19)$$

$$\text{système esclave} \Rightarrow \begin{cases} \dot{y}_1 = \sigma * (y_2 - y_1) + \mathbf{K}_{21}(x_1 - y_1) \\ \dot{y}_2 = r * y_1 - y_2 - y_1 * y_3 + \mathbf{K}_{22}(x_2 - y_2) \\ \dot{y}_3 = y_1 * y_2 - b * y_3 + c + \mathbf{K}_{23}(x_3 - y_3) \end{cases} \quad (2.20)$$

On applique le théorème 1[6] :

$$a = (A + (M_{x*y} - K_2)) * p^T + p * (A + (M_{x*y} - K_2)) < -\varepsilon * I \Leftrightarrow$$

$$(A + (M_{x*y} - K_2)) * p^T + p * (A + (M_{x*y} - K_2)) + \varepsilon * I < 0$$

Donc

$$\begin{pmatrix} -2 * p_1(\sigma + k_{21}) + \varepsilon & 2\sigma & 0 \\ 2r - 2y_3 & -2 * p_2(1 + k_{22}) + \varepsilon & 0 \\ 2y_2 & 2x_2 & -2 * p_3(k_{23}) + \varepsilon \end{pmatrix} < 0 \quad (2.21)$$

Une matrice  $a$ ,  $n * n$  est semi définie négative si chacun de ses mineurs principaux d'ordre impair est négatif, et chacun de ses mineurs principaux d'ordre pair est positif.

Alors

Premier mineur de  $a$  impair (det1),

Deuxième mineur de  $a$  pair (det2),

Troisième mineur de  $a$  impair (det3),

Donc

$$a < 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \det1 < 0 ; \\ \det2 > 0 ; \\ \det3 < 0 ; \end{cases}$$

Donc

Premier mineur de  $a$  impair (det1):

$$\det1 < 0 \Leftrightarrow -2 * p_1(\sigma + k_{21}) + \varepsilon \Leftrightarrow k_{21} > -\frac{-\varepsilon+2*p_1*\sigma}{2*p_1} \quad (2.22)$$

Deuxième mineur de  $a$  pair (det2):

$$\det2 > 0 \Leftrightarrow \det2 = \begin{vmatrix} -2 * p_1(\sigma + k_{21}) + \varepsilon & 2\sigma \\ 2r - 2y_3 & -2 * p_2(1 + k_{22}) + \varepsilon \end{vmatrix} > 0 \Leftrightarrow \quad (2.23)$$

$$k_{22} > \frac{k_{21}(4*p_1*p_2-2*p_1*\varepsilon)-4*p_1*p_2*\sigma-\varepsilon^2+2*p_1*\sigma*\varepsilon+2*p_2*\varepsilon}{4*p_1*\sigma*4*p_1*k_{21}-2} \quad (2.24)$$

Troisième mineur de  $a$  impair (det 3):

$$\det3 < 0 \Leftrightarrow$$

$$\begin{vmatrix} -2 * p_1(\sigma + k_{21}) + \varepsilon & 2\sigma & 0 \\ 2r - 2y_3 & -2 * p_2(1 + k_{22}) + \varepsilon & 0 \\ 2y_2 & 2x_2 & -2 * p_3(k_{23}) + \varepsilon \end{vmatrix} \quad (2.25)$$

$$k_{23} >$$

$$\frac{4p_1*p_2*\sigma*\varepsilon+4*p_1*p_2*k_{21}*\varepsilon-2p_2*\varepsilon^2-4*\sigma*r*\varepsilon+4*y_3*\sigma*\varepsilon}{8*p_1*p_2*p_3*\sigma-4*p_1*p_3*\sigma*k_{22}-8*p_1*p_2*p_3*k_{21}-4*p_1*p_2*k_{21}*k_{22}+4*p_2*p_3*\varepsilon+2*p_2*p_3*\varepsilon+8*\sigma*r*p_3-8*y_3*\sigma*p_3}$$

Application numérique:

$$\begin{pmatrix} -18 < x_1 < 15 \\ -2 < x_2 < 48 \\ -21 < x_3 < 20 \end{pmatrix} \text{ et } \begin{pmatrix} -15 < y_1 < 15 \\ 5 < y_2 < 48 \\ -20 < y_3 < 20 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} K_{21} > 9.9975 \\ K_{22} > 8.007 \\ K_{23} > 9.02 * 10^{-5} \end{cases}$$

$$\text{Donc on choisit } \begin{cases} K_{21} = 12 \\ K_{22} = 12 \\ K_{23} = 12 \end{cases}$$

### 2.5.1. Schéma de simulation sur Matlab/simulink



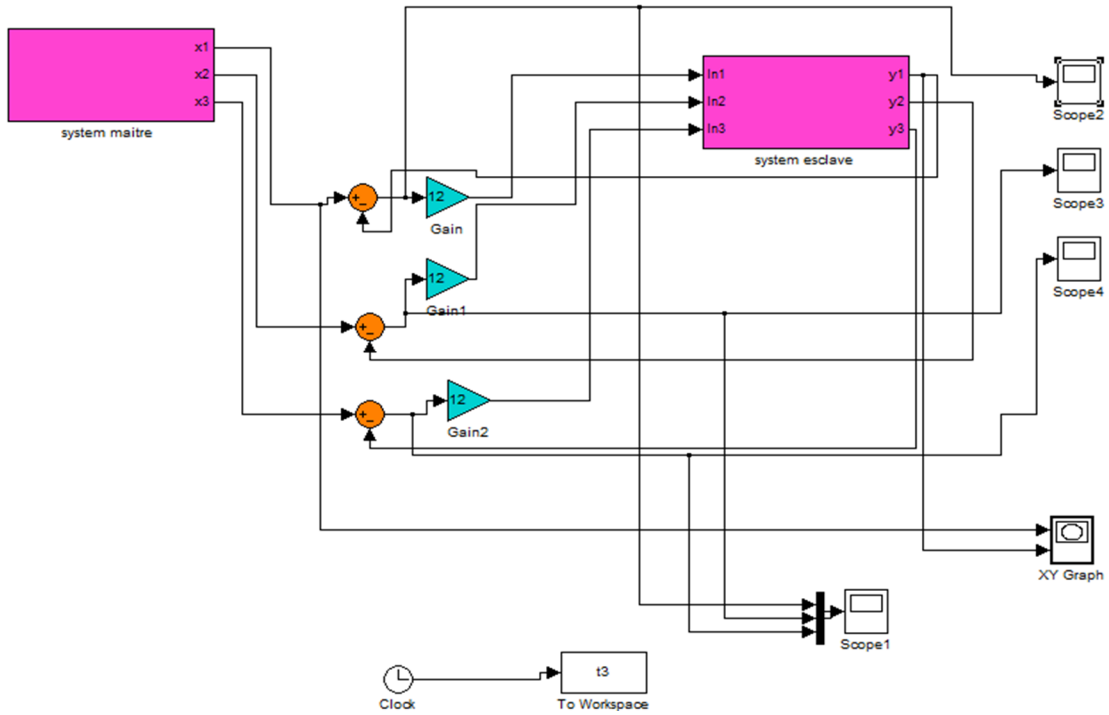


Figure 2.8 : Schéma de synchronisation unidirectionnelle par la mesure de  $x_1, x_2$  et  $x_3$

### 2.5.2. Résultat de simulation sur Matlab/simulink

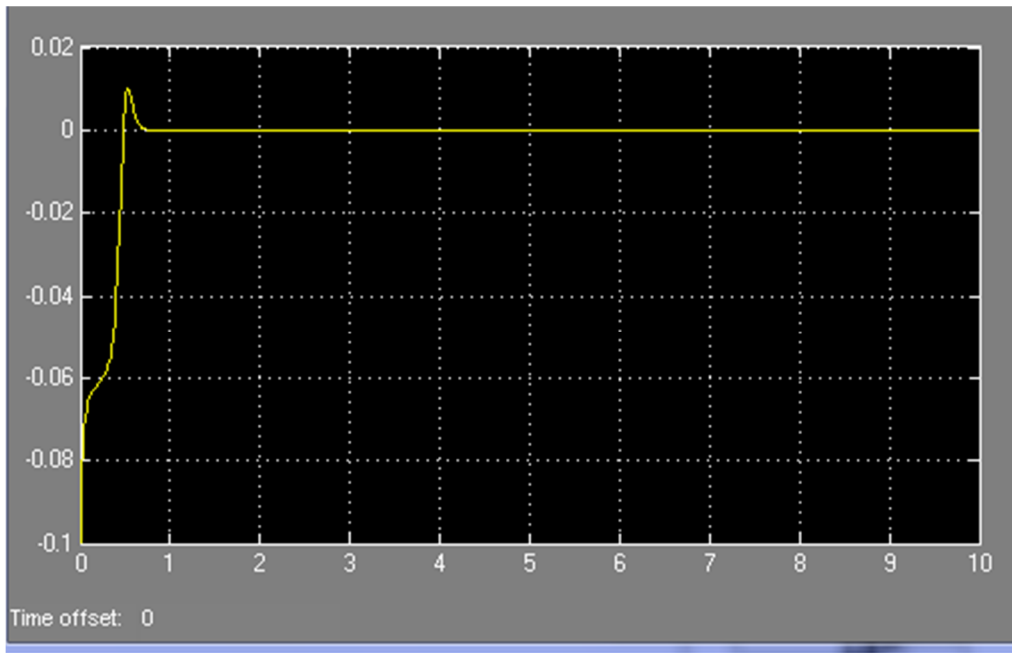


Figure 2.9 : Synchronisation des états ( $x_1, y_1$ ) avec la synchronisation unidirectionnelle par la  
Mesure de  $x_1, x_2$  et  $x_3$

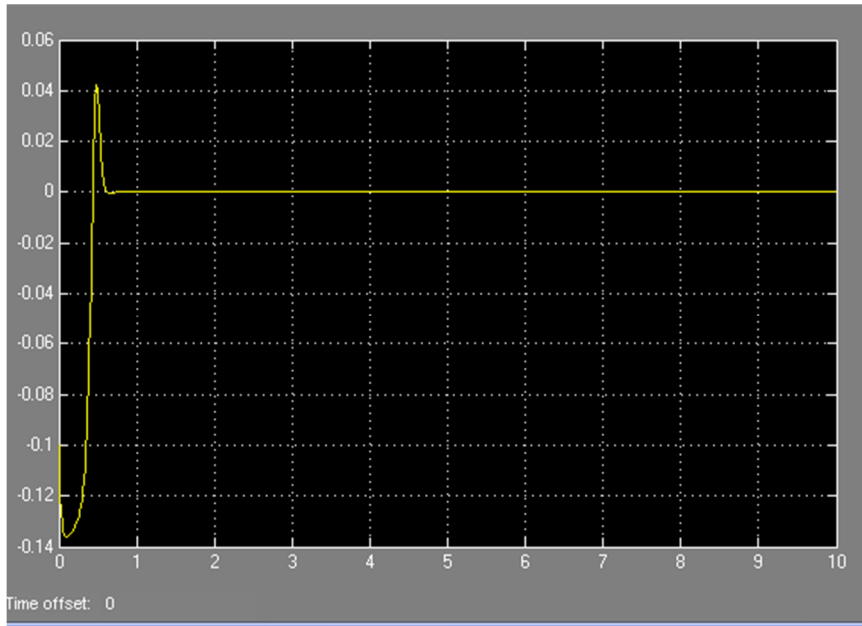


Figure (2.10) : Synchronisation des états  $(x_2, y_2)$  avec la synchronisation unidirectionnelle par la mesure de  $x_1, x_2$  et  $x_3$

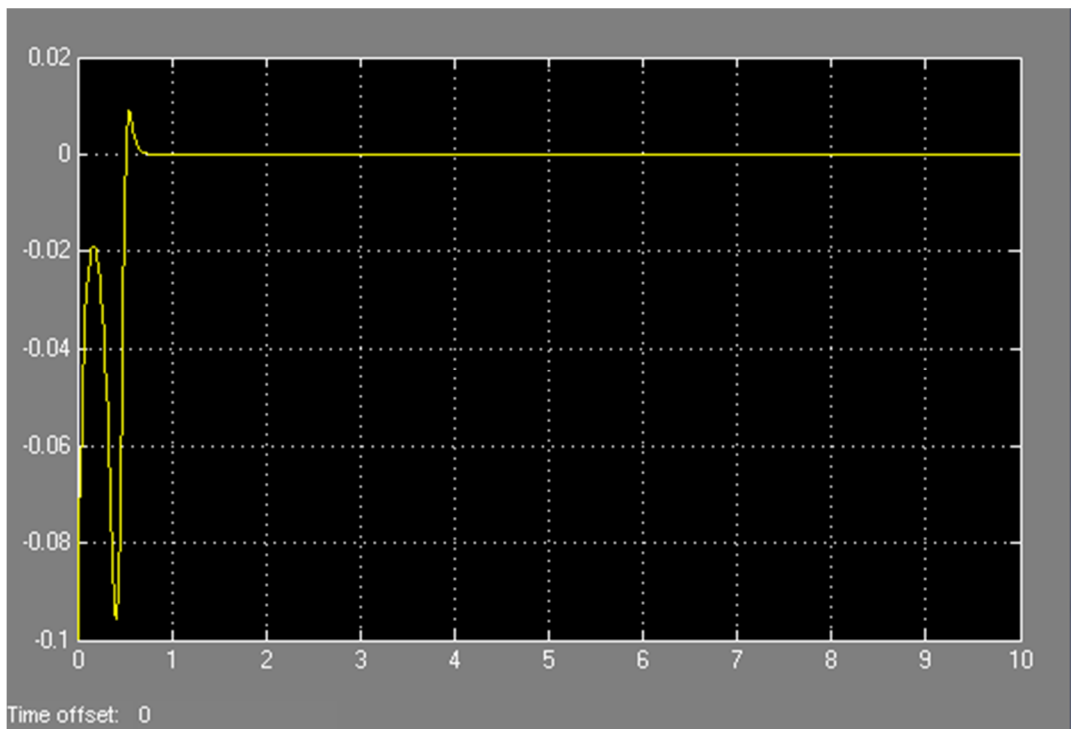


Figure (2.11) : Synchronisation des états  $(x_3, y_3)$  avec la synchronisation unidirectionnelle par la mesure de  $x_1, x_2$  et  $x_3$

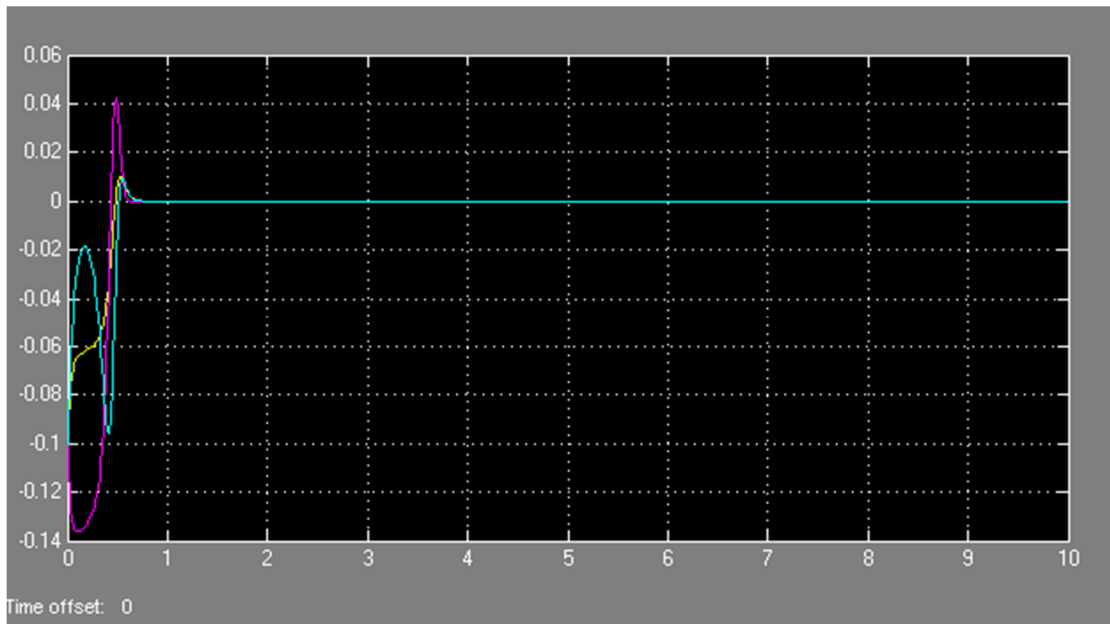


Figure 2.12 : La trajectoire d'erreurs dans le cas de la synchronisation unidirectionnelle par la mesure de  $x_1, x_2$  et  $x_3$

### 2.5.3 Commentaires 1 :

Les figures ((2.9), (2.10), (2.11)) représente la synchronisation entre les états du système (maître et esclave), avec les valeurs de  $k_2 = (k_{21} = 12, k_{22} = 12, k_{23} = 12)$  et les valeurs initiales du maître (0.1 ,0.1 ,0.1) .

La figure (2.12) indique l'erreur entre les états de système (maître et esclave).

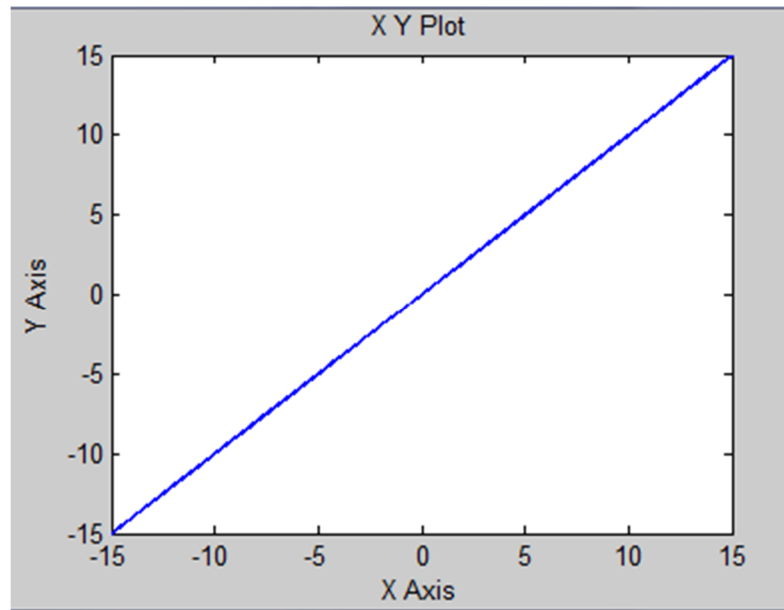


Figure 2.13 la synchronisation entre les deux signal (x) ,(y)

### **Remarque :**

Dans les trois figures, on remarque que les états du système (maître et esclave) sont totalement superposés après environ 1s. Nous avons montré ce résultat sur la figure (2.13), lorsque l'erreur converge vers zéro.

## **2.6 Conclusion**

D'après notre étude sur la synchronisation des systèmes chaotiques, on constate que la méthode de synchronisation unidirectionnelle est réalisée à l'aide d'un élément fonctionnant dans un seul sens, Dans le chapitre suivant nous présentons l'implémentation du circuit de Lorenz et nous ferons une comparaison entre les signaux expérimentaux et les signaux théoriques relevés sur le système chaotique de Lorenz .

# *Chapitre 3*

## *Implémentation du système de Lorenz*

### 3.1 Introduction

Dans ce chapitre, nous présentons la mise en oeuvre analogique du circuit de Lorenz.

On détaille le circuit électronique complet avec une courte description des composants utilisés pour son implémentation. Pour finir, nous présentons les différents résultats obtenus (signaux chaotiques de sortie) .

### 3.2 Le circuit électronique de Lorenz

Le système de Lorenz est donné les trois équations différentielles ci-dessous :

$$\begin{cases} \dot{x} = \sigma * (y - x) \\ \dot{y} = rx - xz - y \\ \dot{z} = xy - bz \end{cases} \quad (3.1)$$

La mise en oeuvre des équations du système de Lorenz dans un circuit analogique est relativement aisée. Pour cela, on a besoin des composants suivants :

- Trois amplificateurs opérationnels montés en intégrateur et qui font aussi la somme, et un amplificateur opérationnel différentiel.
- Deux multiplieurs analogiques, pour former les produits  $xz$  et  $xy$

Pour mieux expliquer notre démarche pour réaliser le circuit complet, nous étudions les circuits de chaque du système de Lorenz. En suite, il suffira de connecter les sorties des intégrateurs avec les entrées adéquates.

Afin d'ajuster au mieux les paramètres  $\sigma, r, b$  on utilise des potentiomètres au lieu de simples résistances

#### 3.2.1 Circuit de calcul de $x$

Pour calculer la variable  $x$ , on a besoin d'un amplificateur opérationnel différentiel qui fait la différence  $x - y$ , et un intégrateur qui intègre cette différence.

L'amplificateur opérationnel utilisé est un TL081. Il est réalisé dans un boîtier de 8 broches.

Le circuit de calcul de x est présenté sur la figure 3.1

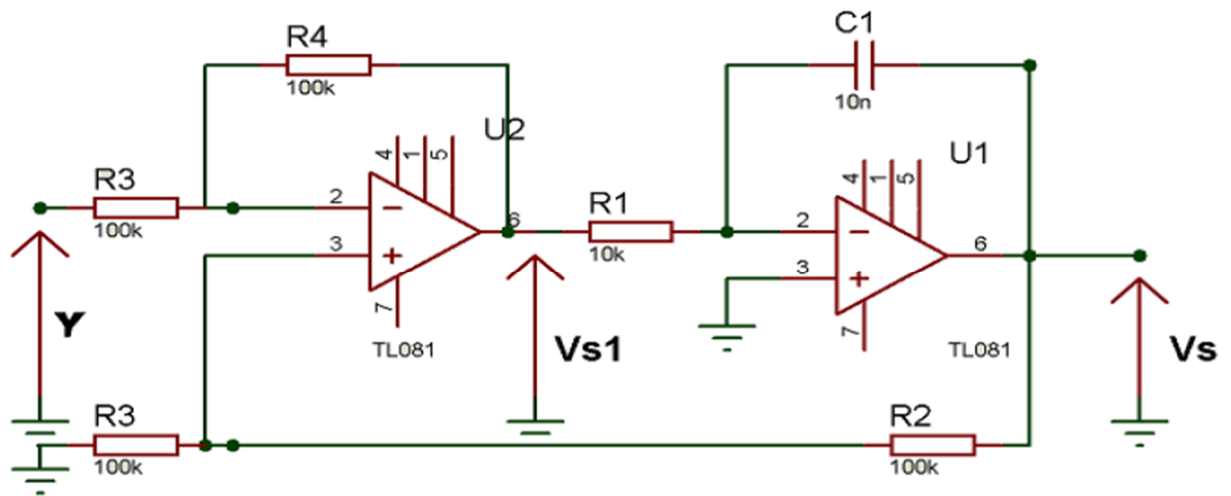


Figure 3.1 Circuit de calcul de x

$$Vs1 = x - y \quad (3.2)$$

$$Vs = \frac{-1}{R_1 C} \int (x - y) dt$$

(3.3)

### 3.2.2 Circuit de calcul de y

Pour calculer la variable  $y$ , on a besoin d'un amplificateur opérationnel qui fait l'intégration et un autre composant le AD633, un multiplieur qui nous donne un produit entre deux signaux  $x$  et  $z$  avec un facteur de gain qui égale  $1/10$ . Il est alimenté tout comme les amplificateurs opérationnels par deux tensions symétriques comme suit :

- la borne  $V_s^+$  par une tension  $+15$
- la borne  $V_s^-$  par une tension  $-15$

L'équation de sortie du multiplieur AD633 est égale à :

$$W = \frac{(x_1 - x_2) * (y_1 - y_2)}{10} + Z \quad (3.4)$$

Le circuit de calcul de y est représenté sur la figure 3.2

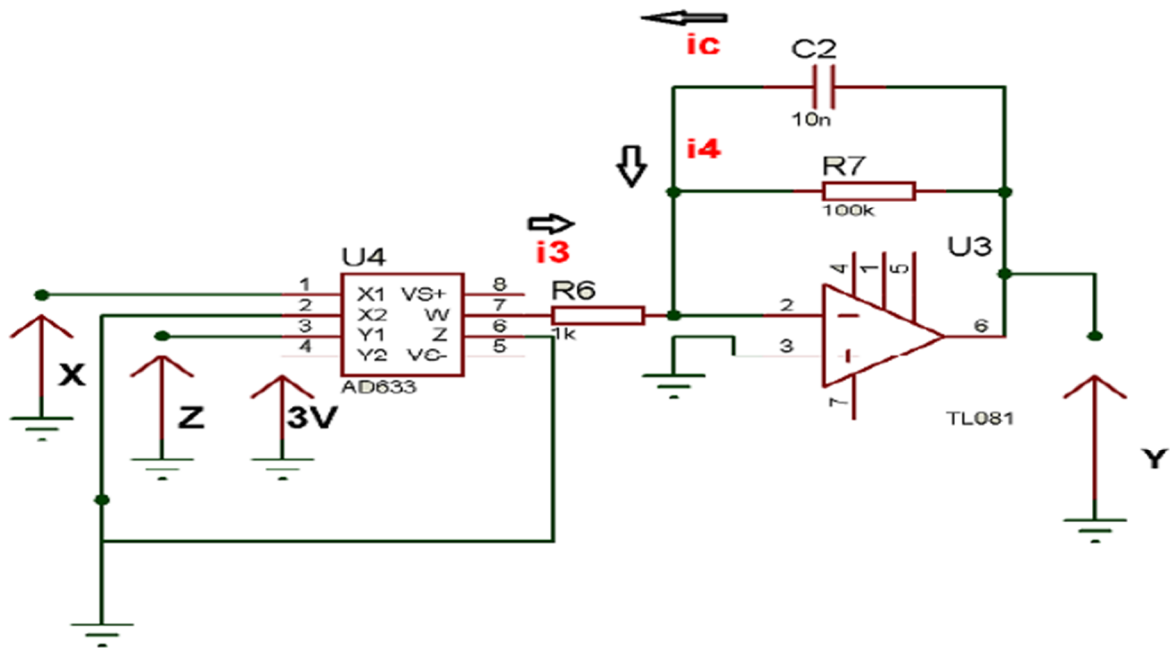


Figure 3.2 Circuit de calcul de y

$$i_3 + i_4 + i_c = 0 \quad (3.5)$$

$$i_c = C \frac{dy}{dt} \quad (3.6)$$

$$i_4 = \frac{y}{R_4} \quad (3.7)$$

$$i_3 = \frac{-x(z-3)}{R_3} \quad (3.8)$$

$$C \frac{dy}{dt} + \frac{y}{R_4} + \frac{-x(z-3)}{R_3} = 0 \quad (3.9)$$



$$\text{avec } \frac{1}{R_4 C} = 1, \frac{1}{R_3 C} = \frac{R}{3}, \text{ d'où } \frac{3}{R_3 C} = R \quad (3.10)$$

### 3.2.3 Circuit de calcul de z

Pour calculer le variable  $z$ , on a besoin aussi d'un amplificateur opérationnel qui fait l'intégration et un multiplieur qui fait le produit des deux signaux  $x$  et  $y$  avec un facteur de gain qui est égale à  $1/10$

Le circuit de calcul de  $z$  est représenté sur la figure 3.3

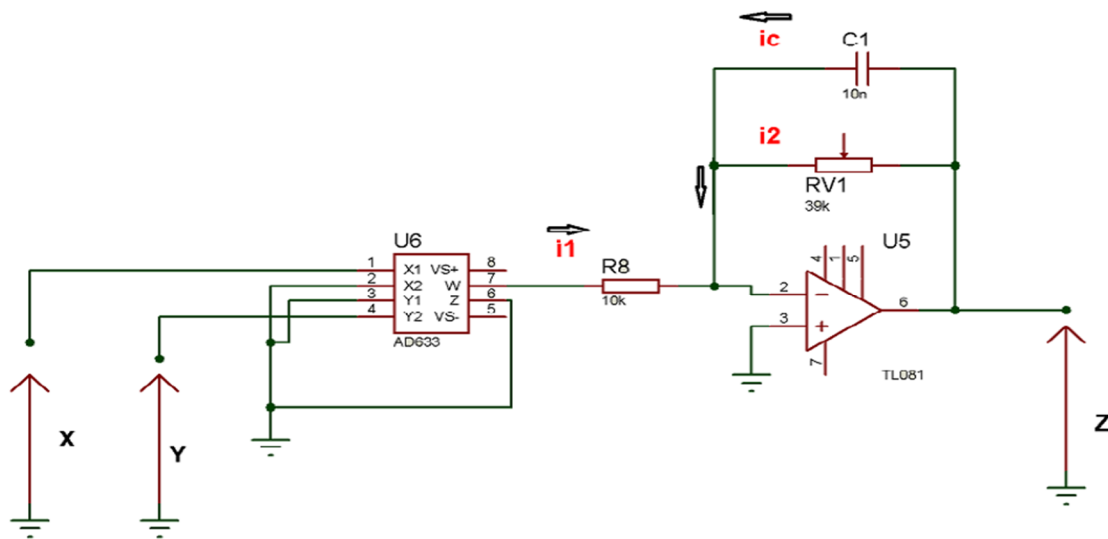


Figure 3.3 Circuit de calcul de Z

$$i_c + i_1 + i_2 = 0 \quad (3.11)$$

$$i_c = C \frac{dz}{dt} \quad (3.12)$$

$$i_1 = \frac{-xy}{R_1} \quad (3.13)$$

$$C \frac{dz}{dt} - \frac{xy}{R_1} + \frac{-z}{R_2} = 0 \quad (3.14)$$

$$\frac{dz}{dt} = \dot{z} = \frac{-z}{R_2C} + \frac{xy}{R_1C} \quad (3.15)$$

avec  $b = \frac{1}{R_2C}$ , et  $\frac{1}{R_1C} = 1$  (3.16)

### 3.2.4 Circuit complet de Lorenz

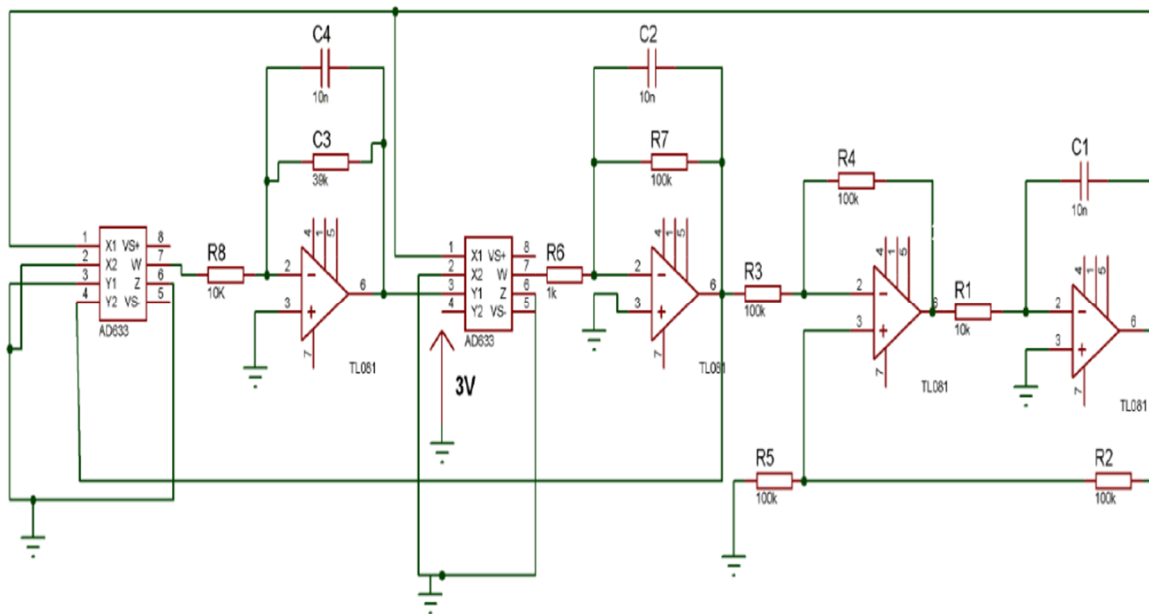


Figure 3.4 Circuit électronique du système de Lorenz

### 3.3 Résultats

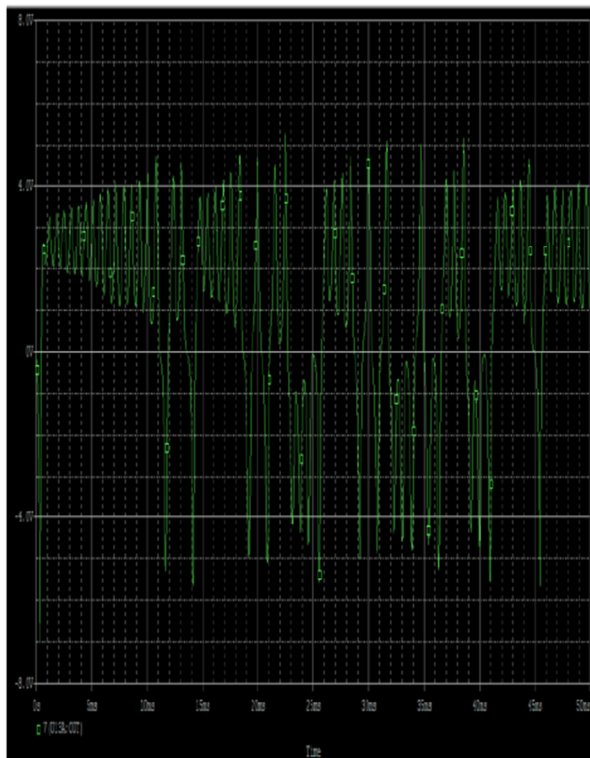
Dans cette partie, on montre les différents résultats expérimentaux et simulés du système de Lorenz. Ces résultats sont donnés par les figures (3.5) à (3.10). Les signaux chaotiques obtenus en sortie sont visualisés sur un oscilloscope, puis comparés avec les résultats obtenus par simulation Matlab Simulink et avec Pspice.

**Remarque :** L'échelle des signaux expérimentaux  $x(t)$ ,  $y(t)$ ,  $z(t)$  est comme suit :

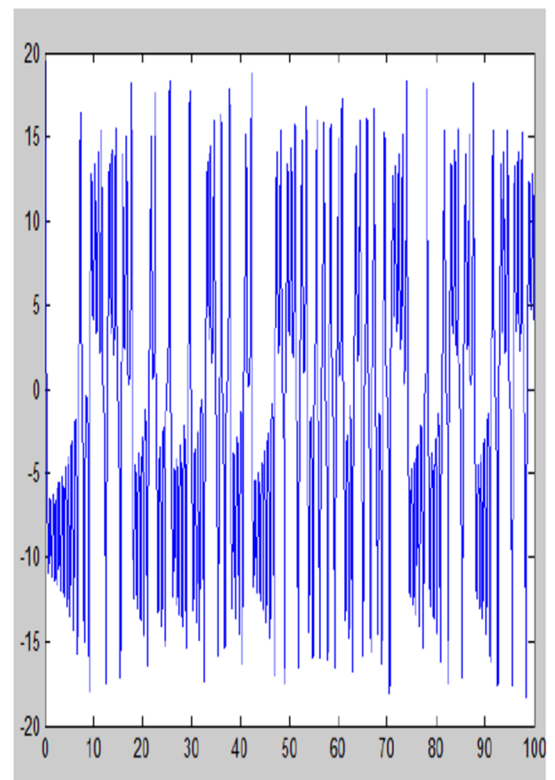
- Horizontalement 10ms/div

- verticalement 4V/div

**signal  $x(t)$**



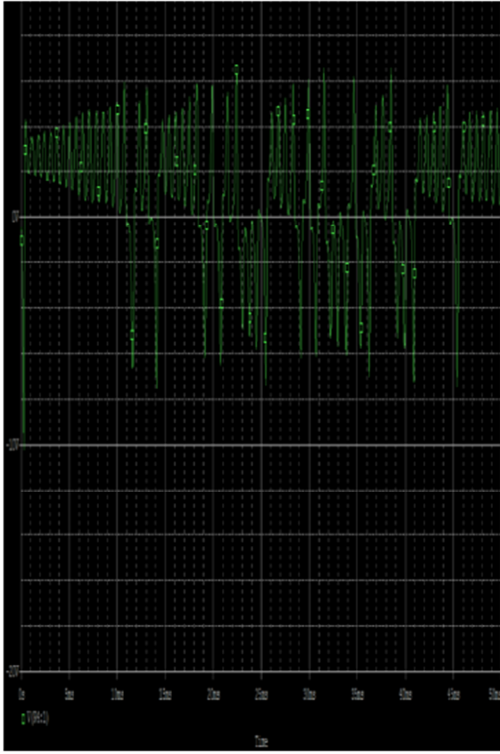
a- Resultat simulé sur PSpice



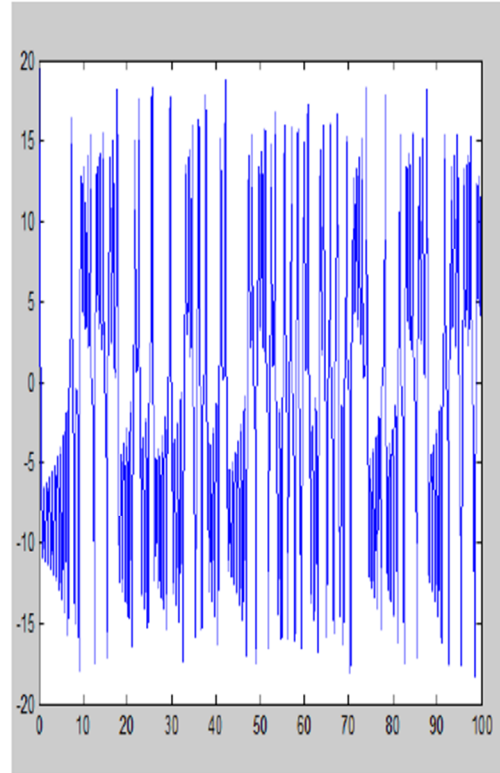
b- Résultat simulé sur matlab

Figure 3.6 Résultat de simulation

**Signal  $y(t)$**



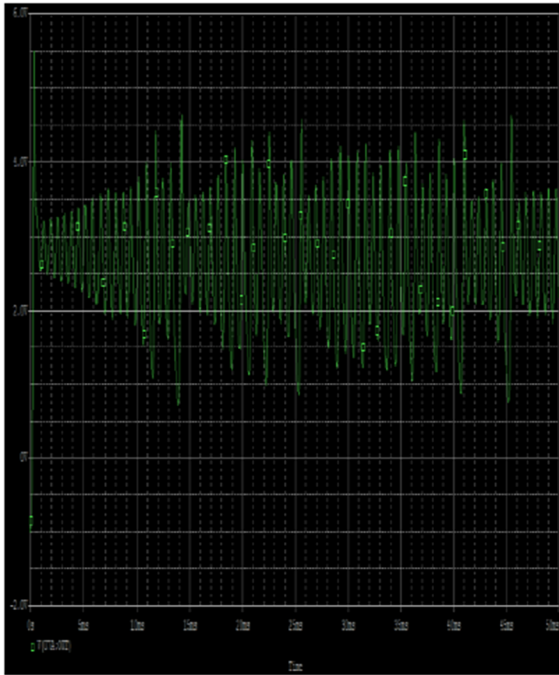
a- Résultat simulé sur PSpice



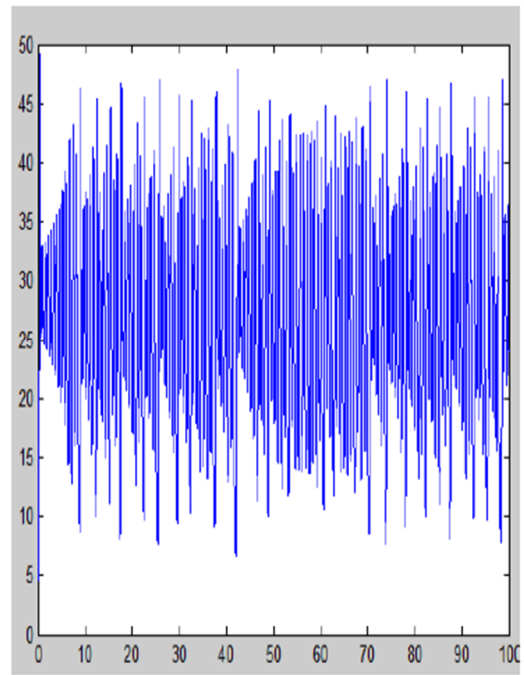
b- résultat simulé sur Matlab

Figure 3.7 Résultat de simulation

**Signal  $z(t)$**



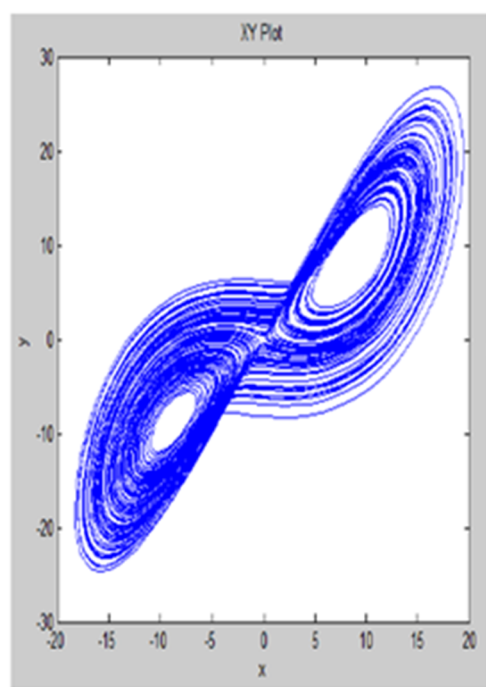
a- Résultat simulé sur PSpice



b- Résultat simulé sur matlab

Figure 3.8 Résultat de simulation

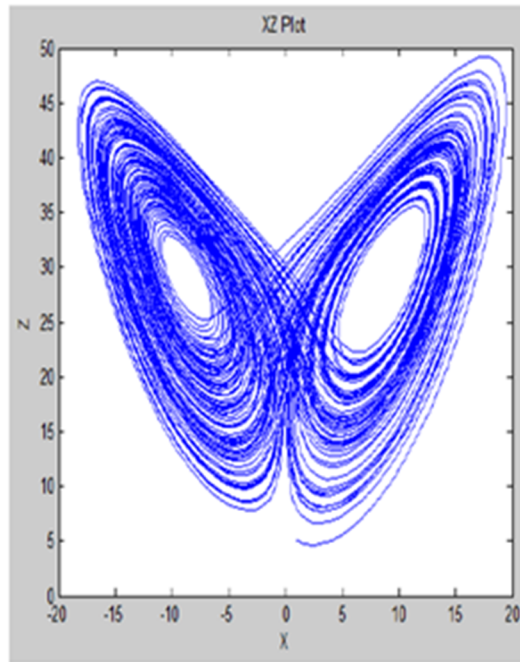
### Plan de phase $x, y$



b- Résultat simulé sur matlab

Figure 3.9 Résultat d'implémentation, plan de phase  $x, y$

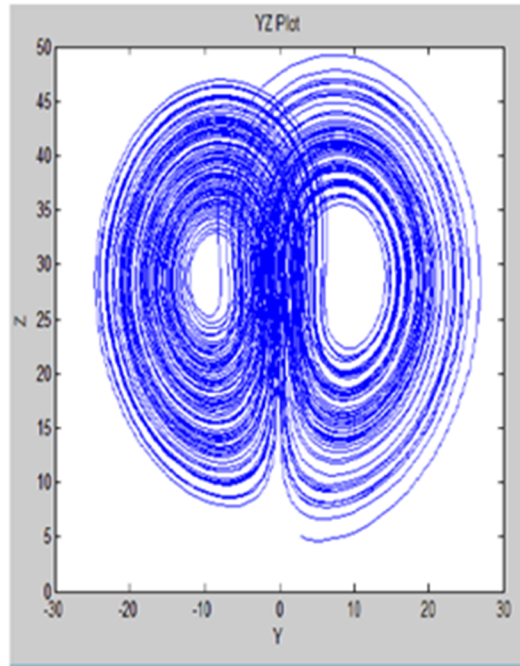
**Plan de phase  $x, z$**



b- Résultat simulé sur Matlab

Figure 3.9 Résultat d'implémentation, plan de phase  $x, z$

**Plan de phase  $y, z$**



b- Résultat simulé sur Matlab

Figure 3.10 Résultat d'implémentation, plan de phase  $y, z$

### 3.4 Conclusion

Nous avons présentés dans ce chapitre l'étude numérique et expérimentale. Nous avons examiné l'attracteur chaotique de Lorenz, la réalisation pratique de notre projet nous a permis de nous familiariser avec le logiciel PSpice, pour la simulation analogique, ainsi qu'avec le logiciel Matlab/ Simulink et l'utilitaire de Matds, pour la simulation numérique et l'analyse et la caractérisation des systèmes chaotiques. Le logiciel protégés a été utilisé pour la conception des circuits électriques et des circuit imprimés

## **Conclusion générale**

L'étude effectuée dans ce mémoire est constituée de 2 parties : la première partie se compose du chapitre 1 décrivant les notions de base des systèmes dynamiques et du chaos ; la deuxième partie a été consacrée à l'étude du phénomène de la synchronisation. Ainsi, dans le chapitre 2, on s'est basé sur le type de synchronisation : synchronisation unidirectionnelle avec la mesure de toutes les variables du système. Le dernier chapitre a été consacré à l'implémentation du système de Lorenz.

On peut conclure que la synchronisation des systèmes chaotiques qui a été largement étudiée dans les deux dernières décennies, a plusieurs applications dans divers domaines tels que la biologie, la chimie, les télécommunications (sécurité des informations) et la physique. Ces précités ne sont que des exemples. Cette synchronisation peut être généralisée aux systèmes chaotiques déjà, vu dans ce mémoire.