

**République Algérienne Démocratique et populaire**  
**Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la recherche scientifique**

**Université Saad Dahlab BLIDA-1-**

**Institut d'Aéronautique et des Etudes Spatiales**

**Département de Construction Aéronautique**



*Projet de fin d'études*

*En Vue de l'Obtention du Diplôme Master en aéronautique*

*Option : Avionique*

*Thème :*

---

***SIMULATION D'UN SYSTEME DE  
NAVIGATION HYBRIDE INS/GPS  
BASE SUR LE FILTRE SDRE***

---

**Réalisé par :**

- REMILI Houssemeddine
- KACHROUD Ahmed Walid

**Encadré par :**

**Mme BENCHEIKH Saliha**

**Année universitaire: 2014/2015**

## Résumé

Le but de ce mémoire est de présenter un nouveau système hybride INS/GPS, avec un filtre non linéaire basé sur l'équation de Riccati dépendante d'état, pour la navigation concernant les aéronefs. Le filtre SDRE est proposé comme une alternative au filtre de Kalman étendu (EKF), qui a été largement utilisé dans la littérature. Fondé sur la théorie du contrôle optimal, le filtre SDRE résout les problèmes rencontrés avec le filtre EKF tel que les erreurs de linéarisation qui réduit considérablement la qualité de la navigation.

Les résultats obtenus par le filtre SDRE ont été comparés aux résultats du filtre EKF. Cette comparaison montre une meilleure performance de navigation à l'aide du filtre SDRE lorsque le système est fortement non linéaire et dans le cas où le niveau de bruit de mesure des capteurs inertiels devient important.

## Abstract

The aim of this thesis is to present a new INS/GPS sensor fusion scheme, based on State-Dependent Riccati Equation (SDRE) nonlinear filtering, for aircraft navigation. SDRE navigation filter is proposed as an alternative to Extended Kalman Filter (EKF), which has been largely used in the literature. Based on optimal control theory, SDRE filter solves issues linked with EKF filter such as linearization errors, which severely decrease navigation performances.

Results obtained by SDRE navigation filter were compared to EKF navigation filter results. This comparison shows better navigation performance using SDRE filter where the system is highly nonlinear and where noise measurement becomes important.

## ملخص

الهدف من هذه الأطروحة هو تقديم نظام هجين جديد مع مرشح غير خطي يعتمد على معادلة ريكاتي المرتبطة بالحالة لفائدة الملاحة الجوية. هذا المرشح يقترح بديلا عن مرشح كالمان الممدود الجد المستعمل. مرشح sdre يقضي على المشاكل المواجهة مع مرشح كالمان مثل أخطاء الخطية و التي تقلل من نوعية الملاحة. بينت المقارنة بين نتائج كلا من المرشحين فعالية أكبر للمرشح sdre عندما يكون النظام غير خطي بدرجة كبيرة و في حالة كون أخطاء القياس عالية.



## *DEDICACE*

*C'est avec profonde gratitude et sincères mots,  
que nous dédions ce modeste travail de fin d'étude à  
nos chers parents ;*

*qui ont sacrifié leur vie pour notre réussite  
et nous ont éclairé le chemin par leurs conseils judicieux.*

*Nous espérons qu'un jour,  
nous pourrons leur rendre un peu  
de ce qu'ils ont fait pour nous,  
que Dieu leur prête bonheur et longue vie.*

*Nous dédions aussi ce travail à  
nos frères et sœurs, nos familles, nos amis,  
tous nos professeurs qui nous ont enseignés  
et à tous ceux qui nous sont chers.*

*Remili Houssemeddine  
Kachroud Ahmed Walid*

## *REMERCIEMENT*

*Tout d'abord, nous remercions Dieu, tout puissant de nous avoir donné la force pour accomplir et réaliser ce modeste travail.*

*Toute notre gratitude à Mme BENCHÉIKH Salîha, notre promotrice, pour nous avoir encadré durant cette période, pour son aide, sa disponibilité et ses conseils.*

*Nous remercions les membres du jury, qui nous ont fait l'honneur de participer au jugement de ce travail.*

*Nous tenons à remercier l'ensemble des enseignants qui nous a encadrés pendant notre cursus universitaire.*

*Finalement, ce travail n'aurait pas vu le jour sans la présence, le soutien et l'aide de nombreuses personnes ;*

*Nos sincères remerciements et nos profondes  
gratitudes sont destinés à*

*Nos chers mères et pères*

*Nos grands-parents*

*Nos amis, nos familles et nos proches*

*Ainsi que tous ceux dont nous avons oublié de  
mentionner le nom*

# SOMMAIRE

<b>Résumé</b>	
<b>Dédicace</b>	
<b>Remerciement</b>	
<b>Sommaire</b>	
<b>Liste des figures</b>	
<b>Liste des symboles</b>	
<b>Abréviations</b>	
<b>Liste des tableaux</b>	
<b>Liste des Annexes</b>	
<b>Introduction générale</b> .....	1
<b><i>Chapitre I : TECHNIQUES ET SYSTEMES DE NAVIGATION</i></b> .....	3
I.1-INTRODUCTION .....	3
I.2-TECHNIQUES DE NAVIGATION .....	3
I.2.1- Navigation à l'estime .....	3
1) Repère inertiel .....	4
2) Repère géocentrique .....	4
3) Repère de navigation .....	5
4) Repère du mobile .....	5
I.2.2- La Radionavigation .....	6
I.3-SYSTEMES DE NAVIGATIONS .....	7
I.3.1-Système de navigation inertielle .....	7
I.3.1.1-Architecture des systèmes INS .....	7
I.3.1.2-Principes de base de la navigation inertielle .....	9
I.3.1.3-Rétrospective des capteurs inertiels .....	11
I.3.1.4-La mécanisation .....	14
I.3.1.5-Techniques d'Alignement .....	19
I.3.1.6-Sources d'erreur des capteurs inertiels .....	20
I.3.2-Système de positionnement global GPS .....	22
I.3.2.1-Définition et historique .....	22
I.3.2.2-Infrastructure du GPS .....	22
I.3.2.3-Principe du système GPS .....	24
I.3.2.4-Mesures GPS .....	26
I.3.2.5- Sources d'erreurs du système GPS .....	28
I.4-NAVIGATION HYBRIDE .....	29
I.5-CONCLUSION .....	31
<b><i>Chapitre II : Modélisation des erreurs inertielle et filtrage de KALMAN</i></b> .....	32
II .1-INTRODUCTION .....	32
II.2-FILTRE DE KALMAN .....	32
II.2.1-Principe et algorithme du filtre de KALMAN .....	32

II.2.2-	Linéarisation des problèmes non linéaires .....	35
II.2.3-	Le fonctionnement de filtre de KALMAN .....	36
II.2.4-	Quelque variétés du filtre de KALMAN .....	39
II.2.4.1-	Le filtre de KALMAN Linéarisé LKF .....	39
II.2.4.2-	Le Filtre de KALMAN Etendu EKF .....	42
II.2.4.3-	Filtre de KALMAN-Schmidt SKF .....	46
II.2.5-	Stabilité du filtre de KALMAN .....	48
II.3-	LES DIFFERENTES APPROCHES D'HYBRIDATION .....	48
II.3.1-	Mode non-couplé .....	49
II.3.2-	Mode Faiblement « lâchement » Couplé .....	49
II.3.3-	Système fortement couplé .....	52
II.3.4	Système ultra-fortement couplé .....	54
II.4-	IMPLEMENTATION DU FILTRE EKF POUR LA FUSION INS/GPS .....	55
II.4.1-	Equations d'erreurs du système INS .....	55
II.4.1.1-	modele dynamique de l'erreur en position .....	55
II.4.1.2-	modele dynamique de l'erreur en vitesse .....	55
II.4.1.3-	modele dynamique des erreurs sur l'orientation .....	56
II.4.2-	Modèle dynamique du filtre en temps continu et en temps discret .....	58
II.4.3-	Modèle d'observation du GPS .....	59
II.4.4-	Effet de lever arm .....	60
II.4.5-	La synchronisation .....	60
II.4.6-	Detection des trajets multiples .....	61
II.4.7-	Reglage des paramètres du filtre .....	61
II.5-	INCONVENIENTS DU FILTRE EKF .....	63
<b>Chapitre III : LE FILTRE SDRE POUR LA FUSION INS/GPS .....</b>		<b>64</b>
III.1-	INTRODUCTION .....	64
III.2-	PRINCIPE ET DEVELOPPEMENT .....	64
III.3-	CONCEPT DE BASE .....	65
III.3.1-	Application en temps continu .....	65
III.3.2-	Application en temps discret .....	67
III.4-	LE FILTRE SDRE POUR L'HYBRIDATION INS/GPS .....	68
III.5-	CAPACITES DE CONCEPTION SDRE .....	71
III.6-	CONCLUSION .....	72
<b>Chapitre IV : RESULTATS ET INTERPRETATIONS .....</b>		<b>73</b>
IV.1-	INTRODUCTION .....	73
IV.2-	GENERATION DES DONNEES BRUTE D'UNE CENTRALE INERTIELLE .....	73
IV.2.1-	La trajectoire de référence .....	73
IV.2.2-	Génération des données idéales d'une centrale inertielle .....	74
IV.2.3-	Les données bruitées d'une centrale inertielle .....	74

IV.3-RESULTATS DE MECANISATION .....	75
IV.4-ESTIMATION DES ERREURS PAR EKF ET SDRE .....	77
IV.4.1-Estimation par EKF .....	77
IV.4.1.1-Boucle ouverte .....	77
IV.3.1.2-Boucle fermée .....	80
IV.4.1.3- Comparaison entre la boucle ouverte et la boucle fermée .....	86
IV.4.2-Estimation par SDRE .....	88
IV.5-CONCLUSION .....	90
<b>Conclusion Générale</b> .....	91
<b>Bibliographie</b> .....	92
<b>Annexes</b>	

## LISTE DES FIGURES

<b>Figure.I.1</b>	: Repère inertiel terrestre (ECI) .....	4
<b>Figure.I.2</b>	: Repère fixe terrestre (ECEF) .....	4
<b>Figure.I.3</b>	: Repère NED (en rouge) et ENU (en bleu) .....	5
<b>Figure.I.4</b>	: Repère mobile .....	5
<b>Figure.I.5</b>	: Système de navigation inertielle à plateforme stabilisée .....	8
<b>Figure.I.6</b>	: Algorithme de navigation d'un système à plateforme stabilisée .....	8
<b>Figure.I.7</b>	: Système de navigation à composantes liées .....	9
<b>Figure.I.8</b>	: Algorithmes de navigation des systèmes à composantes liées .....	9
<b>Figure.I.9</b>	: Unité inertielle de mesure .....	10
<b>Figure.I.10</b>	: Principe de la navigation inertielle .....	10
<b>Figure.I.11</b>	: Technologies d'accéléromètres et performances théoriques .....	12
<b>Figure.I.12</b>	: Technologies de gyroscopes et performances théoriques .....	13
<b>Figure.I.13</b>	: Le diagramme détaillé de la mécanisation de la centrale inertielle dans le repère de navigation .....	16
<b>Figure.I.14</b>	: Erreur de mauvais alignement entre le repère des capteurs et le repère du mobile .....	20
<b>Figure.I.15</b>	: Effet des erreurs sur le lieu géométrique des magnétomètres .....	21
<b>Figure.I.16</b>	: Segment spatial .....	23
<b>Figure.I.17</b>	: Segment de contrôle .....	23
<b>Figure.I.18</b>	: Segment d'utilisateurs .....	24
<b>Figure.I.19</b>	: Principe de trilatération appliqué à un système à trois dimensions .....	25
<b>Figure.I.20</b>	: Calcul du temps de transmission à partir des mesures de code .....	27
<b>Figure.I.21</b>	: Comparaison de phase du signal reçu et du signal généré .....	28
<b>Figure.II.1</b>	: Les paramètres principaux d'un filtre de KALMAN .....	35
<b>Figure.II.2</b>	: Une représentation de la prédiction et la mise à jour d'un état .....	37
<b>Figure.II.3</b>	: Schéma de principe montrant les paramètres d'un estimateur d'état ....	38
<b>Figure.II.4</b>	: Représentation des paramètres de l'algorithme du filtre KALMAN .....	38

<b>Figure.II.5</b>	: Trajectoire nominale et réelle pour un filtre linéarisé de KALMAN .....	40
<b>Figure.II.6</b>	: Filtre de KALMAN linéarisé (Feedforward) .....	42
<b>Figure.II.7</b>	: Trajectoire estimée (nominale) et réelle pour un filtre de KALMAN étendu .....	43
<b>Figure.II.8</b>	: Extension du filtre aux systèmes non linéaire .....	45
<b>Figure.II.9</b>	: Extension du filtre aux systèmes non linéaire .....	45
<b>Figure.II.10</b>	: Hybridation en mode non-couplé .....	49
<b>Figure.II.11</b>	: Une approche d'intégration faiblement couplée (boucle ouverte) .....	50
<b>Figure.II.12</b>	: Une approche d'intégration faiblement couplée (boucle fermée) .....	52
<b>Figure.II.13</b>	: Système fortement couplé .....	53
<b>Figure.II.14</b>	: Système ultra-fortement couplé .....	54
<b>Figure.II.15</b>	: Extrapolation des données inertielles .....	61
<b>Figure.III.1</b>	: Schéma bloc représentant la mécanisation .....	68
<b>Figure.IV.1</b>	: Trajectoire de référence .....	73
<b>Figure.IV.2</b>	: Schéma synoptique de la mécanisation .....	74
<b>Figure.IV.3</b>	: Trajectoire de référence et trajectoire générée .....	75
<b>Figure.IV.4</b>	: Comparaison entre la trajectoire de référence et la trajectoire bruitée ..	76
<b>Figure.IV.5</b>	: Position en boucle ouverte .....	77
<b>Figure.IV.6</b>	: Vitesse en boucle ouverte .....	78
<b>Figure.IV.7</b>	: Attitude en boucle ouverte .....	78
<b>Figure.IV.8</b>	: Déviation standard de la position .....	79
<b>Figure.IV.9</b>	: Déviation standard de la vitesse .....	80
<b>Figure.IV.10</b>	: Déviation standard de l'attitude .....	80
<b>Figure.IV.11</b>	: Position en boucle fermée .....	81
<b>Figure.IV.12</b>	: Vitesse en boucle fermée .....	81
<b>Figure.IV.13</b>	: Attitude en boucle fermée .....	82
<b>Figure.IV.14</b>	: Comparaison entre la trajectoire de référence et la trajectoire obtenue en boucle fermée .....	82

<b>Figure.IV.15</b> : Comparaison entre la trajectoire de référence et la trajectoire obtenue en boucle fermée (zoom) .....	83
<b>Figure.IV.16</b> : Déviation standard de la position .....	84
<b>Figure.IV.17</b> : Déviation standard de l'attitude.....	84
<b>Figure.IV.18</b> : Déviation standard de l'attitude .....	85
<b>Figure.IV.19</b> : Comparaison entre la variation d'erreur de la position en boucle ouverte et en boucle fermée .....	86
<b>Figure.IV.20</b> : Comparaison entre la variation d'erreur de la vitesse en boucle ouverte et en boucle fermée .....	86
<b>Figure.IV.21</b> : Comparaison entre la variation d'erreur de l'attitude en boucle ouverte et en boucle fermée .....	87
<b>Figure.IV.22</b> : Comparaison entre la position de référence et la position estimée par SDRE .....	88
<b>Figure.IV.23</b> : Comparaison entre la vitesse de référence et la vitesse estimée par SDRE .....	88
<b>Figure.IV.24</b> : Comparaison entre l'attitude de référence et l'attitude estimée par SDRE .....	89
<b>Figure.IV.25</b> : Comparaison entre la trajectoire de référence et la trajectoire estimée par SDRE .....	89

## LISTE DES SYMBOLES

$\varphi$	Latitude géodésique
$\lambda$	Longitude géodésique
$h$	Altitude ellipsoïdale
$\phi$	Angle de roulis (roll)
$\theta$	Angle de tangage (pitch)
$\psi$	Angle de lacet (Heading)
$\mathbf{r}$	Vecteur de position
$\mathbf{a}$	Vecteur d'accélération
$\rho$	Vecteur d'orientation
$R_M$	rayon de courbure méridional
$R_N$	rayon de courbure transversal
$e$	Vitesse de propagation
$\mathbf{g}_p$	Vecteur de gravité
$D$	Distance entre le récepteur et le satellite
$\Delta t$	Temps de propagation du signal GPS
$\mathbf{b}$	Vecteur de biais
$\mathbf{q}$	Vecteur de quaternion
$\mathbf{b}$	Repère mobile
$\mathbf{i}$	Repère inertielle
$\mathbf{n}$	Repère navigation
$\mathbf{e}$	Repère terrestre
$\boldsymbol{\omega}_{ie}$	Vecteur de vitesses angulaires (mesures de gyroscopes)
$\boldsymbol{\omega}^i_{ie}$	Vecteur rotation terrestre
$\boldsymbol{\Omega}$	La forme antisymétrique d'un vecteur
$R_b^n$	Matrice de transformation de repère-n au repère-b
$f_{ib}^b$	Vecteur de forces spécifiques (d'accéléromètres) exprimée dans le repère-b
$\boldsymbol{\omega}_{ab}^b$	Vitesse de rotation du repère-b par rapport au repère-a exprimée dans le repère-b
$\mathbf{X}$	Vecteur d'état
$\mathbf{Z}$	Vecteur de mesures
$\mathbf{F}$	Matrice de transition du vecteur d'état
$\mathbf{G}$	Matrice de commande

<b>H</b>	Matrice d'observabilité du système
<b>Q<sub>d</sub></b>	Matrice de covariance du bruit du système (discrétisée)
<b>Q<sub>c</sub></b>	Matrice de covariance du bruit du système
<b>R</b>	Matrice de covariance du bruit des mesures
<b>K</b>	Matrice de gain de KALMAN
<b>P</b>	Matrice de covariance des états
<b>s</b>	Vecteur d'innovation
<b>S</b>	Matrice de covariance de l'innovation
<b>M</b>	Solution de l'équation Riccati en temps continu
<b>P</b>	Solution de l'équation Riccati en temps discret
<b>A</b>	Factorisation des équations d'état
<b>Γ</b>	Matrice de pondération du bruit de processus
<b>u</b>	Vecteur des entrées
<b>u<sub>K</sub></b>	Vecteur de commande
<b>w<sub>K</sub></b>	Bruit de processus
<b>v<sub>k</sub></b>	Bruit de mesure.
<b>Φ</b>	Matrice de transition (discrétisée)

## ABBREVIATIONS

<b>CI</b>	Centrale Inertille
<b>DCM</b>	Direction cosine matrices
<b>ECEF</b>	Earth-centered earth-fixed
<b>ECI</b>	Earth-centered inertial
<b>EKF</b>	Extended KALMAN filter
<b>END</b>	East-North Down
<b>ENU</b>	East-North Up
<b>GDPS</b>	Global differential GPS
<b>GLONASS</b>	Global navigation satellite system
<b>GM</b>	Gauss-Markov
<b>GNSS</b>	Global navigation satellite systems
<b>GPS</b>	Global positioning system
<b>IMU</b>	Inertial measurement unit
<b>INS</b>	Inertial navigation system
<b>KF</b>	KALMAN filter
<b>LKF</b>	Linearized KALMAN filter
<b>LLF</b>	Local-level frame
<b>LLA</b>	Longitude, Latitude, Altitude
<b>MEMS</b>	Micro-electro-mechanical system
<b>NED</b>	North East Down
<b>PLL</b>	Phase-lock loops
<b>PPS</b>	Precise positioning system
<b>SDRE</b>	Stat Dependent Riccati Equation
<b>SDARE</b>	Stat Dependent Algebraic Riccati Equation
<b>SDC</b>	Stat Dependent Coefficient
<b>SINS</b>	Strap-down inertial navigation system
<b>SKF</b>	Schmidt Kalman filter
<b>SV</b>	Satellite Vehicule
<b>UKF</b>	Unscented KALMAN Filter
<b>WGS-48</b>	World geodetic system 1984
<b>WMQ</b>	Weighted Mean Quaternion



## **LISTE DES TABLEAUX**

<b>Tableau.I.1</b> : Avantages et inconvénients des systèmes GPS et INS .....	29
<b>Tableau.A.1</b> : Avantages et inconvénients des méthodes de calcul utilisées	
<b>Tableau.A.2</b> : Performances des capteurs inertiels	

# **LISTE DES ANNEXES**

## **ANNEXE A**

Annexe A.1

Annexe A.2

Annexe A.3

Annexe A.4

## **ANNEXE B**

## **INTRODUCTION GENERALE**

La navigation est l'ensemble des techniques qui permettent de connaître la position d'un mobile (ses coordonnées) par rapport à un système de référence, ou par rapport à un point fixe déterminé, de calculer ou de mesurer la route à suivre pour rejoindre un autre point de coordonnées connues, et de calculer toute autre information relative au déplacement de ce mobile (distances et durées, vitesse de déplacement, heure estimée d'arrivée, etc.). Ces techniques permettent donc à un pilote d'aéronef de bien maîtriser ses déplacements en poursuivant une route aérienne bien déterminée.

On distingue deux techniques de la navigation : la navigation à vue et la navigation aux instruments.

Les instruments utilisés pour la navigation font partie de l'avionique, catégorie regroupant l'ensemble des instruments utilisés à bord des aéronefs.

La navigation inertielle utilise l'instrument, nommé la centrale inertielle, qui dispose d'un ensemble d'accéléromètres et de gyroscopes capables de mesurer les accélérations et les vitesses de rotation selon les trois axes de l'espace. L'intégration de ces mesures au cours du temps permet de calculer la vitesse et l'attitude de l'avion et donc la trajectoire. Cette technique est totalement indépendante des moyens extérieurs, discrète puisqu'elle n'utilise pas la radio et reste la plus précise pour les besoins militaires (erreur circulaire de l'ordre du kilomètre par heure de vol).

La navigation inertielle sans autre moyen utilise un instrument très coûteux et n'est plus utilisée que pour les besoins militaires. Elle a été utilisée dans l'aviation commerciale dans les régions dépourvues d'infrastructure radioélectriques avant l'apparition des moyens satellitaires. La dérive des centrales nécessite d'effectuer un recalage de temps en temps lorsqu'on doit effectuer une navigation précise.

La navigation inertielle reste actuellement utilisée dans l'aviation commerciale mais avec une hybridation faite avec l'aide soit des GPS (INS/GPS) soit de la radio navigation (IRS/RadioNav).

Le principe de l'hybridation INS/GPS est d'utiliser le GPS pour corriger ou calibrer les données inertielles. Le système hybride permet d'obtenir une information de position, vitesse ainsi l'attitude de l'aéronef.

La fusion INS/GPS représente un système non-linéaire qui est traité généralement en utilisant le filtre de Kalman (filtre de Kalman étendu EKF principalement). Ce dernier utilise une approche analytique de linéarisation utilisant la matrice jacobéenne pour linéariser le système. Toutefois, l'EKF est également bien connu pour être difficile à mettre en œuvre, difficile à accorder et instable pour les systèmes fortement non linéaires. Pour cela, une technique récente a été émergée comme une méthode de conception générale fournissant un moyen systématique et effectif pour concevoir des contrôleurs, des observateurs et des filtres non linéaires, c'est la technique de l'équation de Riccati dépendante de l'état (State Dependent Riccati Equation (SDRE)).

La méthode SDRE a surmonté nombreuses difficultés et d'insuffisances des méthodes existantes. Elle délivre des algorithmes de calcul simple qu'ils ont été très efficaces dans une variété d'applications pratiques et des applications significatives dans des domaines divers de l'étude.

Notre plan de travail va être comme suit :

Dans le premier chapitre, nous aborderont les techniques et les systèmes de navigations afin de se familiariser avec ces derniers.

Dans le deuxième chapitre, nous présenteront un modèle hybride INS/GPS, étudieront le filtre de Kalman en détail et modéliseront les erreurs inertielles.

Dans le troisième chapitre, nous allons proposer un algorithme d'estimation basé sur la technique de State Dependent Differentiel Riccati Filter (SDDRF), pour l'estimation de la position, la vitesse et l'attitude.

Le quatrième chapitre sera notre partie pratique, dont on va élaborer un premier programme représentant l'application du filtre de Kalman en boucle ouverte et fermée, ainsi un deuxième programme concernant le filtre SDRE, ensuite, nous allons interpréter les résultats, faire une comparaison entre les deux filtres, discuter les performances.

Enfin, une conclusion pour conclure notre travail.

# **CHAPITRE I : TECHNIQUES ET SYSTEMES DE NAVIGATION**

## **I.1-INTRODUCTION**

Savoir se situer est un problème que l'homme a toujours voulu résoudre et c'est pourquoi un grand nombre de techniques ont été développées en ce sens. La navigation est la science qui regroupe l'ensemble de ces techniques permettant de connaître la position d'un mobile ainsi que toutes autres informations concernant le déplacement de ce mobile au voisinage de la terre ou dans l'espace.

L'objet de ce premier chapitre est de présenter ces différentes méthodes, des plus anciennes au plus récentes, et de détailler celles qui ont été plus particulièrement utilisées durant ce mémoire.

Ces méthodes peuvent se séparer en deux grandes familles. La première, nommée navigation à l'estime qui cherche à estimer la position présente du mobile connaissant sa position à l'instant précédent, son orientation ainsi que sa vitesse.

La seconde a pour but d'estimer la distance et/ou l'orientation du mobile à un ou plusieurs points de références dont la position est connue et ainsi de déterminer sa position dans l'espace. Ces points de références peuvent être naturels (Astronavigation ou navigation céleste) ou artificiels (Radionavigation) comme des balises, des satellites . . .

## **I.2-TECHNIQUES DE NAVIGATION**

### **I.2.1- Navigation à l'estime**

Largement utilisée pour des applications nautiques et plus tard aéronautiques, la navigation à l'estime est inspirée du comportement de tout être vivant lorsqu'il se déplace. En effet, si un individu veut se rendre d'un point A à un point B, il va tout d'abord déterminer la direction qu'il doit suivre puis va avancer d'un certain temps à une vitesse donnée. En admettant maintenant que le point B n'est pas connu, la problématique reste la même, l'individu choisit son orientation, sa vitesse, il se déplace pendant un temps donné et arrive alors à un nouveau point dont il peut calculer la position. Il existe plusieurs manières de déterminer la vitesse ou l'orientation mais, de nos jours, c'est bien souvent par le biais d'une centrale inertielle que cette tâche est réalisée. Dans ces conditions, la navigation à l'estime est alors appelée "Navigation inertielle" ou INS (Inertial Navigation

System) dont la principale difficulté réside dans les changements de repère nécessaires pour rendre les données exploitables par l'utilisateur [1].

Cependant, la navigation à l'estime nécessite la définition de quelques repères nécessaires pour la localisation. Ces repères sont :

**1) Repère inertiel :** L'origine du repère inertiel  $\mathbf{i} = (X_i, Y_i, Z_i)$  est le centre de gravité de la Terre. Ses axes  $(X_i, Y_i, Z_i)$  ne tournent pas avec la Terre et pointent vers des étoiles suffisamment lointaines pour sembler fixes à un observateur terrestre.  $Y_i$  est l'axe de rotation de la Terre,  $Z_i$  pointe vers l'équinoxe vernal et  $X_i$  vient compléter le trièdre direct.

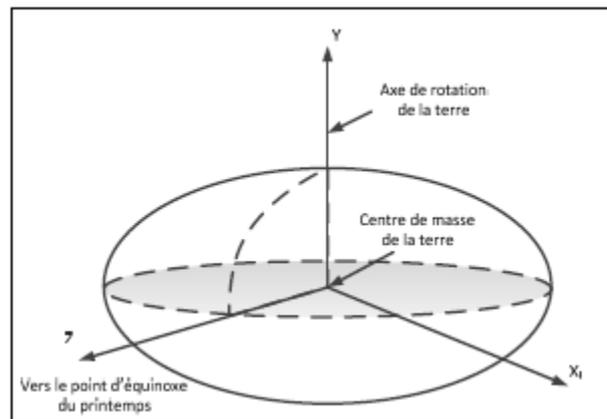


Figure I.1 : Repère inertiel terrestre (ECI)

**2) Repère géocentrique :** L'origine du repère géocentrique  $\mathbf{e} = (X_e, Y_e, Z_e)$  est le centre de gravité de la Terre et ses axes tournent en accord avec la rotation terrestre, ce qui le rend fixe par rapport à la Terre. Par définition, les repères  $\mathbf{i}$  et  $\mathbf{e}$  se déduisent l'un de l'autre par une rotation liée à la rotation de la Terre de vitesse angulaire  $\omega_i^e$ .  $Y_e$  est alors toujours l'axe de rotation de la Terre,  $Z_e$  pointe vers l'intersection de l'équateur avec le méridien de Greenwich et  $X_e$  vient compléter le trièdre direct. Pour des applications submétriques, il faut noter que le décalage des pôles magnétique et géographique serait à prendre en compte.

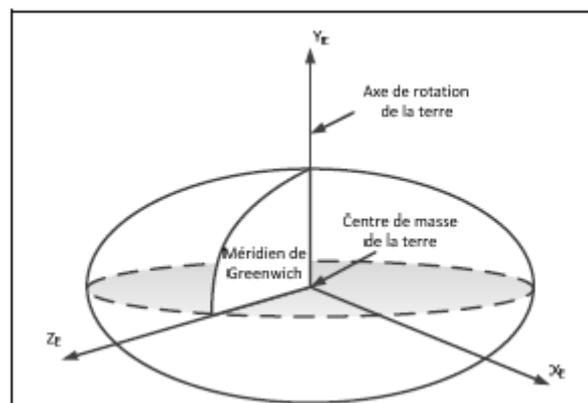
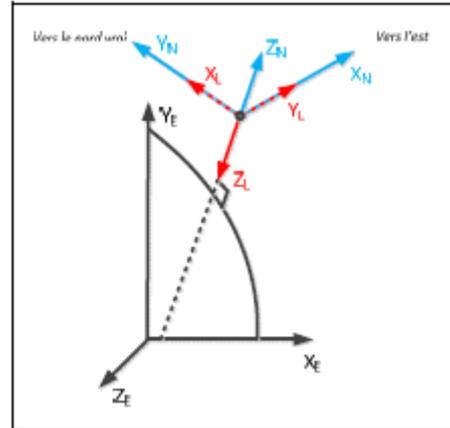


Figure I.2 : Repère fixe terrestre (ECEF)

**3) Repère de navigation :** L'origine du repère de navigation  $\mathbf{n} = (n, e, d)$  est le centre de gravité du mobile.  $\vec{n}$  pointe vers le nord géodésique,  $d$  est orthogonal à l'ellipsoïde de référence représentant la Terre et en direction du sol et  $e$  vient compléter le trièdre direct (ce qui le fait pointer globalement à l'est).

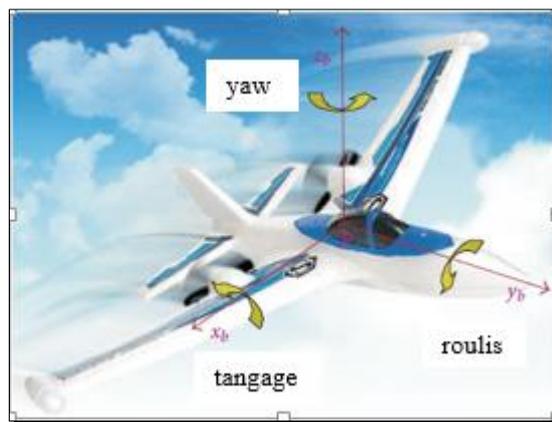
NED: North, East, Down

ENU: East, North, Up



**Figure I.3 :** Repère NED (en rouge) et ENU (en bleu)

**4) Repère du mobile :** L'origine du repère du mobile  $\mathbf{m} = (X_m, Y_m, Z_m)$  est le centre de gravité du mobile. Ce repère est solidaire du mobile et ses axes tendent à coïncider avec les axes de la plate-forme inertielle. Son orientation par rapport au repère de navigation est décrite par les angles d'Euler ( $\Phi, \theta, \psi$ ) représentant respectivement le roulis, le tangage et le lacet [1].



**Figure I.4 :** Repère mobile

### **I.2.2- La Radionavigation**

L'astronavigation permet de calculer la localisation d'un mobile à partir de l'observation de différents corps célestes utilisés comme "balises" de positionnement. La radionavigation est le prolongement technologique de cette navigation céleste où les ondes lumineuses ont été remplacées par les ondes radioélectriques et les corps célestes par des balises artificielles (stations au sol, satellites, . . .). Ceci permet à la radionavigation d'avoir comme avantage majeur par rapport à la navigation céleste de ne plus être soumis aux conditions de visibilité pour pouvoir être utilisée.

Le principe de cette méthode réside en le calcul de la distance entre des positions connues et le mobile dont il faut déterminer la position. Contrairement aux méthodes de navigation à l'estime, la radionavigation nécessite la mise en œuvre d'une infrastructure conséquente de balises. Il existe deux types différents de systèmes de radionavigation : les systèmes à base terrestre (LORAN, ILS.....) et les systèmes de positionnement par satellites (GNSS) [1].

## I.3-SYSTEMES DE NAVIGATIONS

### I.3.1-Système de navigation inertielle

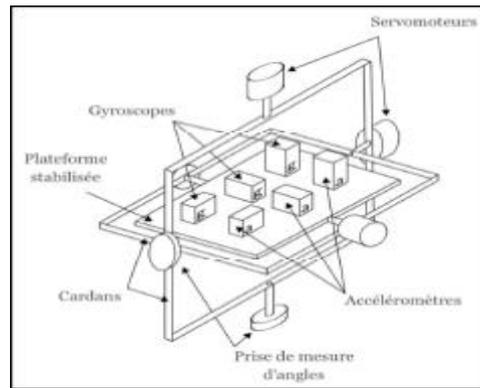
C'est en 1953 que le professeur Charles Stark Draper fait la démonstration du premier système de navigation inertielle entièrement autonome : le *Space Inertial Reference Equipment* (SPIRE). Ce système fut développé avant tout afin de répondre à une problématique commune aux systèmes de radionavigation existant à cette époque, soit la facilité de pouvoir brouiller les radiofréquences dans la bande d'opération de ces derniers, les rendant inutiles en territoire hostile. C'est d'ailleurs pour cette raison que le gouvernement américain finança la recherche dans le domaine inertiel avec la motivation de développer un système de navigation inertielle entièrement autonome. Depuis, de nombreuses études ont été entreprises dans ce domaine et les systèmes INS ont désormais atteint un certain niveau de maturité. Ce paragraphe présentera dans un premier temps l'architecture des systèmes INS de même que les principes de base de la navigation inertielle. Par la suite, les différents capteurs utilisés seront présentés. Finalement, les équations mathématiques définissant l'algorithme INS seront détaillées.

#### I.3.1.1-Architecture des systèmes INS

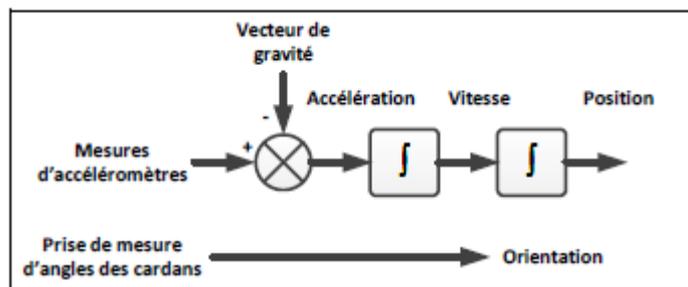
Deux types de systèmes inertiels existent :

##### A) Systèmes à plateforme stabilisée

Avant 1970, les systèmes de navigation inertielle étaient tous basés sur le principe des plateformes stabilisées, aussi appelées plateformes à cardans dont l'architecture est présentée dans la Figure I.5. Selon cette architecture, des gyroscopes sont utilisés afin de contrôler des servomoteurs servant à stabiliser une plateforme située à l'intérieur d'un cardan central sur laquelle sont disposés des accéléromètres. Ces derniers sont ainsi maintenus selon une orientation fixe par rapport au repère inertiel terrestre et se retrouvent par le fait même isolés de toute rotation possible du véhicule. Basé sur cette approche, l'algorithme de navigation repose sur deux tâches simples soit la correction des mesures d'accéléromètres pour la composante de gravité suivi d'une double intégration des mesures corrigées afin d'obtenir respectivement la vitesse et la position du mobile par rapport au repère inertiel terrestre. La Figure I.6 résume bien cette procédure.



**Figure I.5** : Système de navigation inertielle à plateforme stabilisée



**Figure I.6** : Algorithme de navigation typique d'un système à plateforme stabilisée

Bien que ces systèmes à cardans soient reconnus encore aujourd'hui pour leur stabilité, leur précision et leur fiabilité, ils comportent néanmoins plusieurs inconvénients majeurs qui limitent leur utilisation dans le cadre de certaines applications. Notamment, les systèmes INS plateforme stabilisées requièrent un assemblage mécanique complexe, généralement dispendieux et difficile d'entretien [4].

### B) Système à composantes liées

Afin de trouver une alternative aux systèmes à plateforme stabilisée, l'industrie s'est demandée : « Pourquoi ne pas se débarrasser des cardans stabilisateurs et simplement lier les composantes des capteurs sur le cadre rigide du mobile? ». Cette nouvelle approche suggérait alors d'utiliser les gyroscopes afin de mesurer les vitesses de rotation du mobile plutôt que de s'en servir comme stabilisateur pour la plateforme inertielle. Ainsi, les quantités physiques ne seraient plus mesurées selon le repère inertiel terrestre mais plutôt selon un repère fixé sur le mobile impliquant alors une stabilisation mathématique plutôt que mécanique. Cette architecture vient remplacer du même coup la complexité mécanique des systèmes à cardans par une complexité mathématique et logicielle.

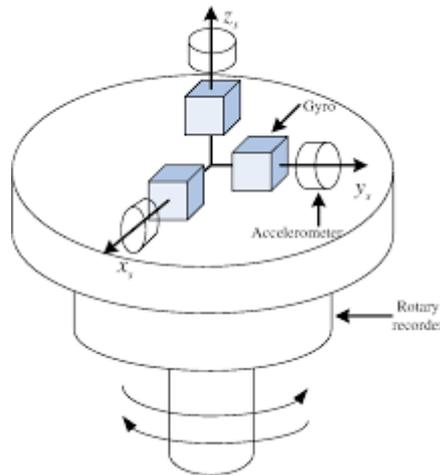


Figure I.7 : Système de navigation à composantes liées

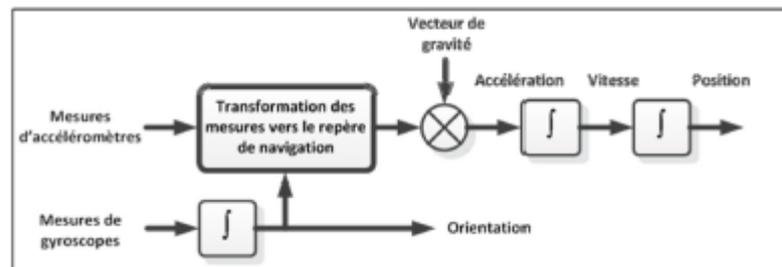
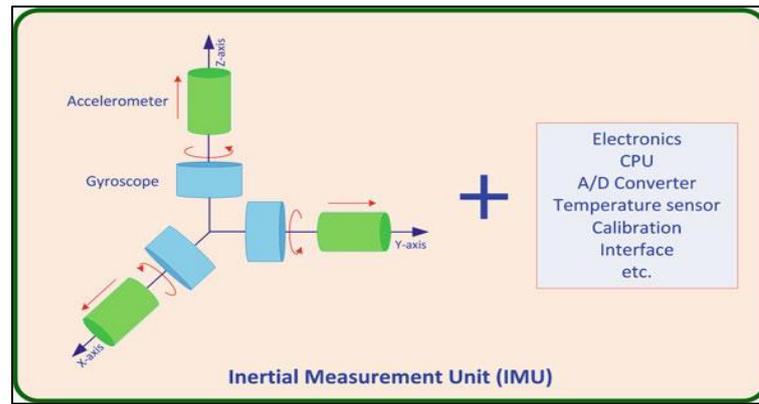


Figure I.8 : Algorithmes de navigation des systèmes à composantes liées

L'architecture typique d'un tel système est illustrée sur la Figure I.7, sur laquelle il est possible de constater une augmentation du niveau de complexité de l'algorithme de navigation comparativement à celui des systèmes à plateforme stabilisée [4].

### I.3.1.2-Principes de base de la navigation inertielle

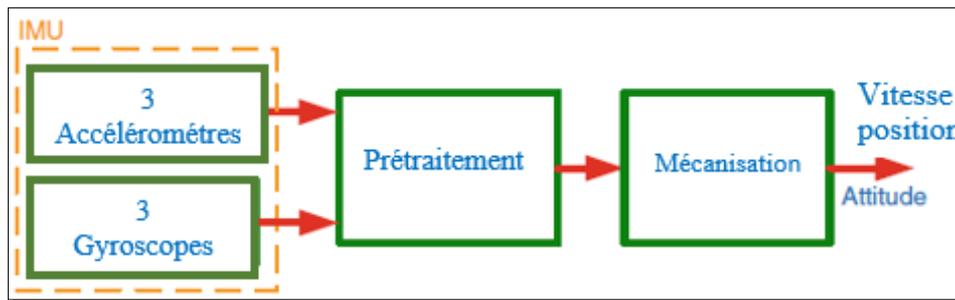
Les systèmes de navigation inertielle sont des systèmes entièrement autonomes permettant de calculer la position, la vitesse et l'attitude d'un véhicule basé, uniquement sur des mesures d'accélération linéaires et de vitesses angulaires provenant de capteurs inertiels (c.-à-d. accéléromètres et gyroscopes). Contrairement aux systèmes GPS (voir plus tard), les systèmes INS ne sont pas des systèmes de positionnement absolu mais font plutôt parti de la grande famille des systèmes de navigation à l'estime, c'est à dire qu'ils permettent uniquement de calculer le déplacement d'un mobile à partir de son état initial. De manière générale, un système INS est constitué de deux principaux éléments à savoir, la centrale inertielle (IMU – *Inertial Measurement Unit*) et l'ordinateur de calcul. L'IMU consiste en un assemblage d'accéléromètres et de gyroscopes disposés de manière à mesurer respectivement l'accélération (plus précisément les forces spécifiques) et la vitesse angulaire d'une plateforme en mouvement selon trois axes orthogonaux.



**Figure I.9** : Unité inertielle de mesure

L'ordinateur de calculs quant à lui s'occupe d'exécuter les équations dynamiques du système inertielle de manière à calculer l'attitude, la vitesse et la position du mobile selon la séquence suivante ; [4] :

- 1) le vecteur de vitesses angulaires mesuré par les gyroscopes est intégré afin de mettre à jour l'attitude du mobile;
- 2) la nouvelle attitude du mobile est utilisée afin de transformer la représentation du vecteur de forces spécifiques vers le repère de navigation;
- 3) les composantes de force d'attraction gravitationnelle, de force centripète et d'accélération de Coriolis sont retirées du vecteur de forces spécifiques afin d'obtenir uniquement l'accélération du mobile selon le repère de navigation;
- 4) l'accélération est intégrée afin d'obtenir la vitesse du mobile;
- 5) la vitesse est intégrée afin d'obtenir la position du mobile.



**Figure I.10** : Principe de la navigation inertielle.

### I.3.1.3-Rétrospective des capteurs inertiels

Les capteurs inertiels sont des dispositifs qui ont pour but de mesurer des différentes grandeurs selon l'utilisation.

On distingue les capteurs traditionnels et les capteurs modernes (MEMS).

MEMS est l'acronyme du terme anglo-saxon (Micro-Electro-Mechanical Systems), qui désigne la conception et la fabrication d'appareils électromécaniques miniatures en exploitant la technologie des semi-conducteurs.

La technique des MEMS, récemment apparue, a permis de se passer des dispositifs volumineux et difficiles à mettre en œuvre (toupies et porteurs par exemple).

Il est possible, désormais, d'intégrer ces appareils dans la majorité des plateformes grâce à leur moindre masse et encombrement. La plupart des gyroscopes MEMS sont basé sur le principe du transfert d'énergie entre deux modes de vibration dus à l'effet Coriolis.

#### A) Accéléromètres

Les accéléromètres sont des instruments permettant de déterminer l'accélération linéaire d'un objet par rapport au repère inertiel terrestre. De manière plus spécifique, la grandeur physique mesurée par ces derniers est appelée force spécifique et elle comprend, en plus de l'accélération du mobile, la force d'attraction gravitationnelle, la force centripète ainsi que l'effet de Coriolis causé par la rotation de la Terre et le taux de transport. Le principe de fonctionnement des accéléromètres varie grandement selon l'application à laquelle le capteur est destiné mais également au budget dédié à sa fabrication. La grande majorité des accéléromètres à faible coût fonctionnent selon le principe des systèmes masse-ressort ou des systèmes à poutre vibrante. La Figure I.11 présente une vue d'ensemble des différents types d'accéléromètres utilisés en navigation inertielle, de même qu'un aperçu de leurs performances théoriques [4].

Le but de L'accéléromètre est de mesure la force spécifique  $f_{ib}^b$  associé au corps. La force spécifique est la différence entre la vraie accélération dans l'espace et l'accélération en raison de la gravité [1], donné par :

$$f_{ib}^b = \mathbf{a} - \mathbf{g} \quad \text{Eq.I.1}$$

tel que :

$\mathbf{g}$  : La gravité

$\mathbf{a}$  : est l'accélération dans le repère inertiel, qui est exprimée comme double dérivée du vecteur de position  $\mathbf{r}$  d'ou :

$$\mathbf{a} = \frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} = \ddot{\mathbf{r}} \quad \text{Eq.I.2}$$

$r$  : C'est le vecteur de position écrit  $r=[\varphi, \lambda, h]$

Avec :  $\varphi$  latitude ;  $\lambda$  longitude ;  $h$  l'altitude

Le vecteur du champ gravitationnel était plus tôt monté pour être lié au vecteur de pesanteur comme :

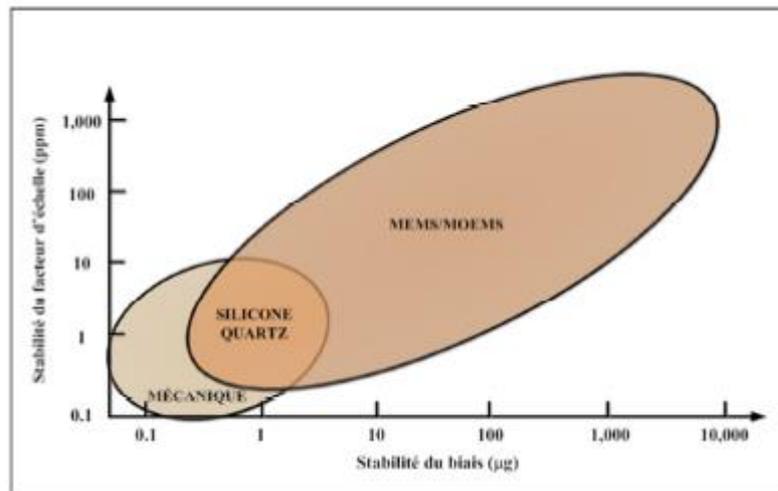
$$\mathbf{g} = \bar{\mathbf{g}} - \boldsymbol{\Omega}_{ie}\boldsymbol{\Omega}_{ie}\mathbf{r} \quad \text{Eq.I.3}$$

Où :

$\boldsymbol{\Omega}_{ie}$  : est la matrice antisymétrique représentant la rotation de la terre dans le repère inertiel.

En substituant les trois équations, on aura :

$$f_{ib}^b = \frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} - (\bar{\mathbf{g}} - \boldsymbol{\Omega}_{ie}\boldsymbol{\Omega}_{ie}\mathbf{r}) \quad \text{Eq.I.4}$$



**Figure I.11** : Technologies d'accéléromètres et performances théoriques

## B) Gyroscopes

Les gyroscopes sont des instruments permettant de mesurer les vitesses angulaires d'un objet par rapport au repère inertiel terrestre. Ces instruments sont, pour la majorité, basés soit sur l'effet gyroscopique, sur l'effet Sagnac, ou encore sur l'effet de Coriolis. Tout comme pour les accéléromètres, il existe plusieurs technologies de gyroscopes pouvant généralement être regroupées selon trois grandes familles soient les gyroscopes mécaniques, les gyroscopes optiques et les gyroscopes vibrants. La Figure I.12 présente une vue d'ensemble des différents types de gyroscopes utilisés en navigation inertielle, de même qu'un aperçu de leurs performances théoriques [4].

Les gyroscopes mesurent la vitesse angulaire d'un corps par rapport au repère inertiel. Cette quantité est exprimée dans le repère mobile et donnée par l'équation suivante :

$$\omega_{ib}^b = \omega_{ie}^b + \omega_{en}^b + \omega_{nb}^b \quad \text{Eq.I.5}$$

Tel que :

$\omega_{ib}^b$  : vitesse angulaire de rotation du repère mobile par rapport au repère inertielle exprimée dans le repère mobile.

$\omega_{ie}^b$  : vitesse angulaire de rotation du repère terrestre par rapport au repère inertielle exprimée dans le repère mobile.

$\omega_{en}^b$  : vitesse angulaire de rotation du repère de navigation par rapport au repère terrestre exprimée dans le repère mobile.

$\omega_{nb}^b$  : vitesse angulaire de rotation du repère mobile par rapport au repère de navigation exprimée dans le repère mobile.

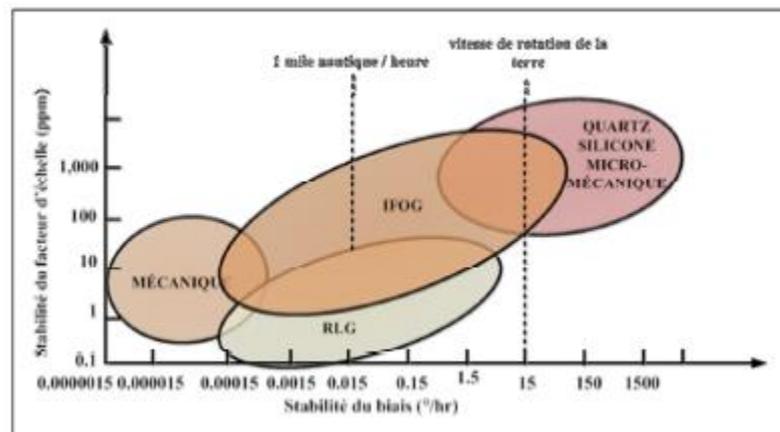


Figure I.12 : Technologies de gyroscopes et performances théoriques

### C) Magnétomètres

Bien que les magnétomètres ne soient généralement pas considérés comme étant des capteurs inertiels, plusieurs IMU à faible coût basées sur la technologie MEMS comprennent désormais, en plus d'une triade d'accéléromètres et de gyroscopes, une triade de magnétomètres. Cette architecture facilite notamment la détermination de l'attitude d'une centrale inertielle à faible coût. Les magnétomètres sont des instruments permettant de mesurer le champ magnétique local qui est généralement constitué d'une combinaison du champ magnétique terrestre et de perturbations locales pouvant soit provenir de sources permanentes fixées au capteur, ou encore faire partie de l'environnement extérieur [4].

## D) Unité de prétraitement

Les signaux sont prétraités par une certaine forme de filtrage pour éliminer des perturbations avant de les appliquer à l'algorithme de mécanisation qui convertit les signaux en signaux d'information de position et d'attitude.

### I.3.1.4-La mécanisation

La mécanisation est l'ensemble des équations utilisées pour résoudre informatiquement le système d'équations (voir Eq I.6) afin d'obtenir les incréments de la position, de la vitesse et de l'attitude.

Nous pouvons résumer les étapes de mécanisation dans le repère de navigation comme suit [5]:

- correction des mesures accélérométriques et gyroscopiques brutes,  $f_{ib}^b$  et  $\omega_{ib}^b$  de la centrale inertielle des erreurs connues ou estimées.
- Obtenir les taux de rotation  $\omega_x, \omega_y, \omega_z$  à partir des gyroscopes et les accélérations  $f_x, f_y, f_z$  à partir des accéléromètres. Ces mesures sont en relation avec le référentiel inertiel résolu dans le repère mobile (b), et ils constituent les sorties de l'IMU.
- Initiation d'attitude ( $\phi, \theta, \psi$ ).
- Calcul de la matrice de transformation du repère mobile vers le repère de navigation «  $R_b^n$  » initiale à partir d'une attitude initiale.
- Calcul des angles d'attitude ( $\phi, \theta, \psi$ ) en terme de taux de rotation ( $\omega_x, \omega_y, \omega_z$ ), où  $\phi$  le roulis,  $\theta$  le tangage,  $\psi$  le lacet.
- Utilisez  $R_b^n$  calculée précédemment pour transformer les forces spécifiques du repère mobile (b) au repère de navigation (n), ce qui donne les accélérations dans le repère local  $f_N, f_E, f_D$ .
- Soustraction (compensation) de la gravitation à partir de la force spécifique mesurée.
- Compensation de la force centrifuge due à la position excentrée du véhicule par rapport au centre de la terre.

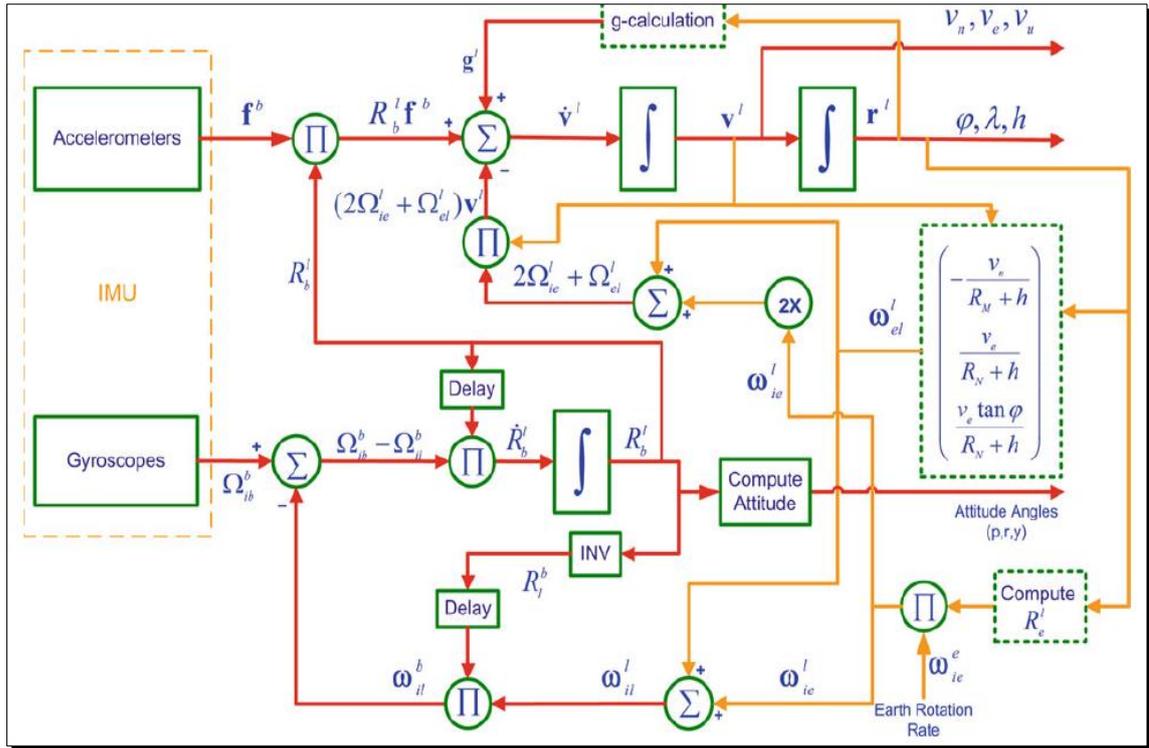
- Compensation de la force de Coriolis due au mouvement du véhicule sur surface de la terre.
- Réalisation des deux intégrations (incorporant des conditions initiales) pour obtenir les vitesses : North  $v_n$ , East  $v_e$ , Down  $v_D$  et la position  $r=[\varphi, \lambda, h]$ . Les équations de mécanisation sont alors utilisées afin d'obtenir les incréments de la position, de la vitesse et de l'attitude exprimées par le système d'équations différentielles suivant :

$$\begin{bmatrix} \dot{r}^{lla} \\ \dot{v}^n \\ \dot{R}^n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} D^{-1}V^n \\ R_{bfib}^n - (2\Omega_{ie}^n + \Omega_{en}^n)V^n + g^n \\ R_b^n(\Omega_{nb}^b - \Omega_{in}^b) \end{bmatrix} \quad \text{Eq.I.6}$$

Tel que :

$$D = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ M+h & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{(N+h)\cos\varphi} & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \quad \text{Eq.I.7}$$

La mécanisation dans le repère de navigation est plus intuitive pour la navigation en dehors ou sur la surface de la terre, car la position de la plate-forme mobile est fournie en respectant les coordonnées :  $(\varphi, \lambda, h)$  et son attitude est donnée sous forme de  $(\phi, \theta, \psi)$ . De plus, le modèle de gravité pour le repère de navigation est plus simple.



**Figure I.13 :** Le diagramme détaillé de la mécanisation de la centrale inertielle dans le repère de navigation

La figure I.13 détaille les étapes d'intégration du système Eq.I.6 pour les calculs ci-dessous.

### a) mise à jour de l'attitude

Dans la mécanisation du repère de la navigation, la mise à jour de l'attitude se fait ou bien à partir de la mise à jour de la matrice  $R_b^n$  ou bien à partir de la mise à jour du quaternion (Annexe A.2).

Dans le cas du quaternion, ce dernier peut être mis à jour grâce à divers méthodes, mais nous allons illustrer la méthode analytique trouvant ici.

La solution en forme fermée de l'équation du quaternion est :

$$q_{K+1} = q_K + \frac{1}{2} S q_K \Delta t \quad \text{Eq.I.8}$$

Une fois que le quaternion a été calculé à l'instant  $K+1$ , la matrice de transformation  $R_b^n$  peut être obtenue en utilisant la relation suivante :

$$R_b^n = \begin{bmatrix} q_1^2 + q_2^2 - q_3^2 - q_4^2 & 2(q_2q_3 - q_1q_4) & 2(q_2q_3 + q_1q_4) \\ 2(q_2q_3 + q_1q_4) & q_1^2 - q_2^2 + q_3^2 - q_4^2 & 2(q_3q_4 + q_1q_2) \\ 2(q_2q_4 - q_1q_2) & 2(q_3q_4 + q_1q_2) & q_1^2 - q_2^2 - q_3^2 + q_4^2 \end{bmatrix} \quad \text{Eq.I.9}$$

Et les angles d'attitude se déduit comme suit :

$$\begin{aligned} \text{Roulis} &= -\tan^{-1} \left[ \frac{R_b^n(3,1)}{R_b^n(3,3)} \right] \\ \text{Tangage} &= \sin^{-1} [R_b^n(3,2)] \\ \text{Lacet} &= -\tan^{-1} \left[ \frac{R_b^n(1,2)}{R_b^n(2,2)} \right] \end{aligned} \quad \text{Eq.I.10}$$

### b) Mise à jour de la vitesse

L'équation de mécanisation pour le taux de variation de la vitesse dans le repère de navigation est :

$$\begin{aligned} \dot{v}^n &= R_b^n f^b - (2\Omega_{ie}^n + \Omega_{en}^n) v^n + g^n \\ \frac{\Delta v^n}{\Delta t} &= R_b^n f^b - (2\Omega_{ie}^n + \Omega_{en}^n) v^n + g^n \\ \Delta v^n &= R_b^n f^b \Delta t - (2\Omega_{ie}^n + \Omega_{en}^n) v^n \Delta t + g^n \Delta t \\ \Delta \tilde{v}^n &= \Delta v^n - (2\Omega_{ie}^n + \Omega_{en}^n) v^n \Delta t + g^n \Delta t \end{aligned} \quad \text{Eq.I.11}$$

Tel que :

$\Delta \tilde{v}^n$  : La vitesse incrémentée mesurée après la transformation du repère de navigation.

$(2\Omega_{ie}^n + \Omega_{en}^n) v^n \Delta t$  : La correction de la force de Coriolis qui compense la rotation de la terre et la navigation de l'orientation résultant du repère de navigation.

$g^n \Delta t$  : La correction de la gravité.

Puisque l'axe **Z** du repère de navigation est défini pour être normal par rapport à l'ellipsoïde, le vecteur de la gravité normale est nul dans les autres axes.

$$g^n = [0 \quad 0 \quad -g]^T \quad \text{Eq.I.12}$$

Maintenant la vitesse à des instants courants peut être calculée par la formule d'Euler modifié :

$$v_{K+1}^n = v_K^n + 0.5(\Delta v_{K+1}^n + \Delta v_K^n) \quad \text{Eq.I.13}$$

Ou :  $v^n = [v_N, v_E, v_D]^T$

**c) Mise à jour de la position**

Les coordonnées de la position pour le repère de navigation (latitude, longitude, altitude) sont calculées comme suit :

- Le taux de variation de la latitude est :

$$\dot{\varphi} = \frac{v_N}{R_N+h} \quad \text{Eq.I.14}$$

Donc :

$$\varphi_{K+1} = \varphi_K + \frac{[v_{N,K}]}{R_N+h} \Delta t \quad \text{Eq.I.15}$$

- Le taux de variation de la longitude est :

$$\dot{\lambda} = \frac{v_E}{(R_N+h) \cos \varphi} \quad \text{Eq.I.16}$$

Donc :

$$\lambda_{K+1} = \lambda_K + \frac{[v_{E,K}]}{(R_N+h) \cos \varphi} \Delta t \quad \text{Eq.I.17}$$

- Le taux de variation de l'altitude est :

$$\dot{h} = v_D \quad \text{Eq.I.18}$$

Donc :

$$h_{K+1} = h_K + [v_{D,K}] \Delta t \quad \text{Eq.I.19}$$

### I.3.1.5-Techniques d'Alignement

Cependant, des calculs supplémentaires sont nécessaires pour éliminer l'effet des changements dans l'orientation dans le repère de navigation qui ne sont pas causés par le mouvement du véhicule lui-même, ils concernent l'alignement de la centrale inertielle dont la technique est la suivante :

➤ **Mise à niveau de l'accéléromètre**

Si le véhicule est jugé stationnaire, les accéléromètres mesurent les composantes de la réaction à la gravité en raison des angles de tangage et de roulis (par exemple l'inclinaison par rapport au plan horizontal). Ces angles peuvent être calculés comme suit :

$$\theta = \tan^{-1} \left( \frac{f_y}{\sqrt{f_x^2 + f_z^2}} \right) \quad \text{Eq.I.20}$$

$$\phi = \tan^{-1} \left( \frac{-f_x}{f_z} \right) \quad \text{Eq.I.21}$$

➤ **Compas gyroscopique**

Etant donné que l'angle de tangage et de roulis  $\theta$  et  $\Phi$  ont été déjà obtenus au cours du processus de mise à niveau de l'accéléromètre, nous allons maintenant utiliser les trois mesures du gyroscope pour obtenir l'angle de lacet  $\psi$  :

$$\psi = \tan^{-1} \left[ \frac{\omega_x}{\omega_y} \right] \quad \text{Eq.I.22}$$

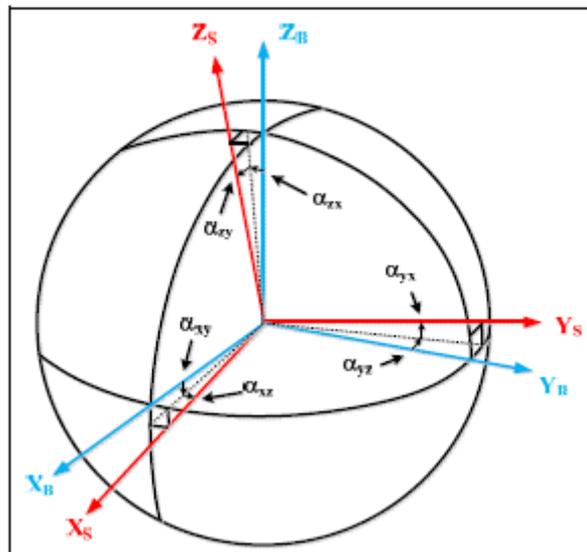
### I.3.1.6-Sources d'erreur des capteurs inertiels

Les erreurs affectants les capteurs inertiels sont de nature déterministe ou stochastique.

#### A) Erreurs de nature déterministe

Les erreurs de nature déterministe, également appelées erreurs systématiques, sont des erreurs non aléatoires qui peuvent généralement être éliminées à l'aide d'une méthode de calibration adéquate. Dans le cadre de ce mémoire, le biais, le facteur d'échelle et l'erreur de mauvais alignement des capteurs inertiels seront étudiés de même que les erreurs de fer dur et de fer doux des magnétomètres.

**Mauvais alignement :** L'erreur de mauvais alignement fait référence à une erreur d'orthogonalité présente à l'intérieur de la centrale inertielle. Ainsi, plutôt qu'être parfaitement orthogonaux, les axes du repère des capteurs peuvent parfois être quelque peu inclinés (voir Figure 4-7). Du à cette non-orthogonalité, une excitation selon un axe unique du repère des capteurs peut provoquer une mesure erronée le long des autres axe de ce même repère.

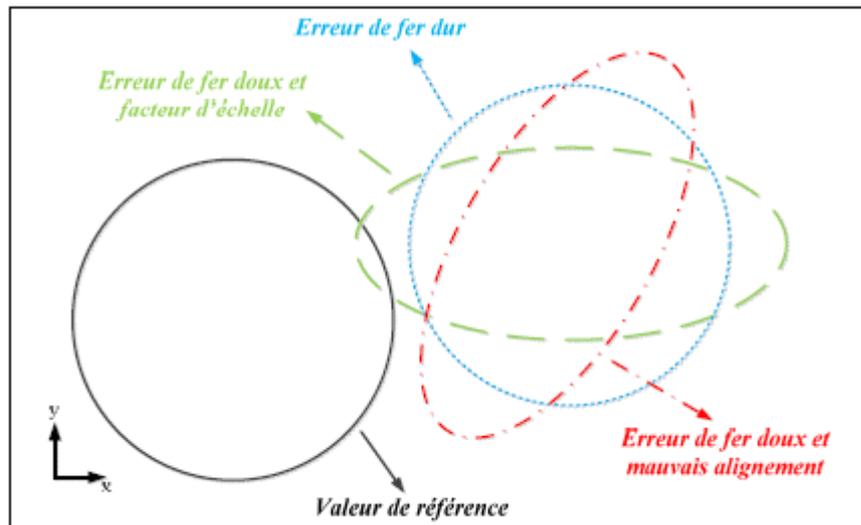


**Figure I.14 :** Erreur de mauvais alignement entre le repère des capteurs et le repère du mobile

**Biais :** fait référence à un écart constant présent entre la mesure de sortie des capteurs inertiels et la valeur de référence mesurée par ces derniers. Cette erreur est indépendante de l'amplitude de la mesure et est également présente même en l'absence d'excitation en entrée.

**Facteur d'échelle :** est défini comme étant un ratio constant entre la mesure de sortie des capteurs inertiels et la valeur de référence mesurée par ces derniers. Cette erreur est généralement exprimée en pourcentage et ne possède ainsi aucune unité.

**Erreur de fer dur** : proviennent généralement de sources magnétiques ou électromagnétiques permanentes fixées à l'assemblage de capteurs. Par exemple, ces erreurs peuvent provenir d'un support, de vis ou d'écrous constituées de matériaux ferromagnétiques, ou encore des composantes électroniques montées directement sur le circuit imprimé du capteur. Ces perturbations locales du champ magnétique terrestre évoluent avec l'assemblage de capteurs affectant ainsi les mesures de ce dernier de la même façon que le ferai un biais constant.



**Figure I.15** : Effet des erreurs de mesure sur le lieu géométrique des magnétomètres

**Erreur de fer doux** : proviennent quant à elles de sources magnétiques ou électromagnétiques externes présentes dans l'environnement dans lequel évoluent les capteurs. Ces perturbations peuvent provenir de structures ou d'objets composés de matériaux ferromagnétiques, ou encore d'instruments électroniques ou de câblage présents dans l'environnement de test. Les erreurs de fer doux sont fixes dans l'espace et affectent les mesures de magnétomètres de façon similaire aux erreurs de mauvais alignement et de facteur d'échelle.

## B) Erreurs de nature stochastique

Les erreurs de nature stochastique sont des erreurs aléatoires qui, contrairement aux erreurs de nature déterministe, ne peuvent généralement pas être éliminées lors de la calibration initiale.

On peut aussi citer comme exemples d'erreurs, le bruit de mesure qui peut être considéré comme bruit blanc, les erreurs de calcul, la dérive....

## I.3.2-Système de positionnement global GPS

### I.3.2.1-Définition et historique

GPS est la forme abrégée de NAVSTARGPS, acronyme de "NAVigation System with Time And Ranging - Global Positioning System"(Système de navigation par repérage des temps et mesurage des distances – système de positionnement à l'échelle du globe).

Le GPS apporte une solution à l'un des problèmes les plus anciens et les plus épineux que l'homme se soit posé en fournissant une réponse à la question ancestrale : "Quelle est ma position sur la Terre ? "

Le premier satellite artificiel mis en orbite autour de la Terre, Sputnik 1, a été lancé en octobre 1957 par l'Union soviétique. Cet événement marquant a donné le départ d'une course effrénée à la conquête de l'espace. En effet, dès le début des années 1960, un système de navigation par satellites (couramment appelé système Transit) était déjà exploité par la marine américaine [3].

Un nouveau projet fut proposé au début des années 1970 : le GPS. Ce système promettait de satisfaire à toutes les exigences imposées par le gouvernement des Etats-Unis, à savoir une détermination précise de la position en tout point de la surface du globe, à tout instant et indépendamment des conditions météo [2].

Le système GPS a été conçu par le département de la Défense des États-Unis au début des années 1970. Les quatre premiers satellites prototypes ont été lancés en 1978.

Une constellation de 24 satellites opérationnels a été complétée en 1993. Le coût de l'opération se chiffrait alors à quelque dix milliards de dollars américains. Aujourd'hui, un système russe (GLONASS) est en opération [3].

### I.3.2.2-Infrastructure du GPS

Le système GPS est composé de 3 parties distinctes, appelées encore segments :

**A) Le segment spatial** : est constitué actuellement d'une constellation de 31 satellites (24 initialement prévus). Ces satellites évoluent sur six plans orbitaux ayant une inclinaison d'environ  $55^\circ$ , deux plans orbitaux étant séparés de  $60^\circ$ . Ces orbites ont été choisies pour garantir qu'au moins six satellites soient toujours en vue de n'importe quel point du globe terrestre. Les satellites suivent une orbite quasi circulaire de rayon orbital moyen 26560 km qu'ils parcourent en un demi-jour sidéral, soit en 11h 58min 02s [1].

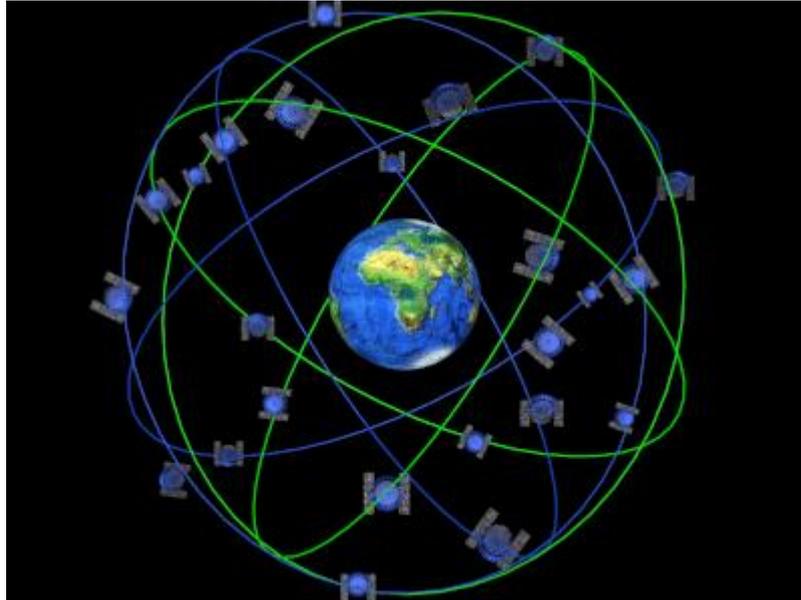


Figure I.16 : Segment spatial

**B) Le segment de contrôle** : assure la surveillance de la constellation GPS à travers cinq stations réparties dans le monde (Hawaii, Kwajalein, Ascension Island, Diego Garcia, et Colorado Springs). Les données collectées sont alors centralisées à la station maîtresse de Colorado Springs, où les corrections à apporter aux satellites (éphémérides, paramètres d'horloge) sont calculées. Les mises à jour sont alors transmises aux satellites via les différentes stations de contrôle [1].

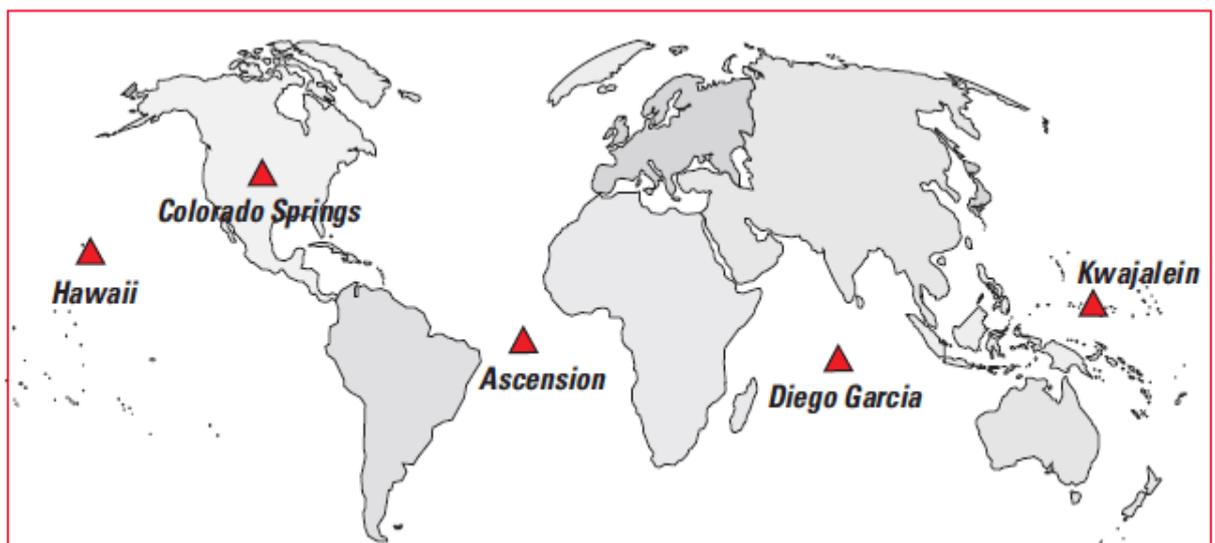


Figure I.17 : Segment de contrôle

**C) Le segment utilisateurs** : regroupe l'ensemble des récepteurs GPS qui réalisent le calcul de positionnement en temps réel. Le GPS propose deux types de services (trois initialement prévus) : le standard positioning system (SPS) accessible à tous et le precise positioning system (PPS) réservé à des utilisateurs habilités par le ministère de la défense

américaine. Le troisième type de service consistait en la dégradation volontaire du signal GPS (Annexe A.3), connu sous le nom de selective availability (SA). Ce service fut interrompu le 1er Mai 2000 [1].

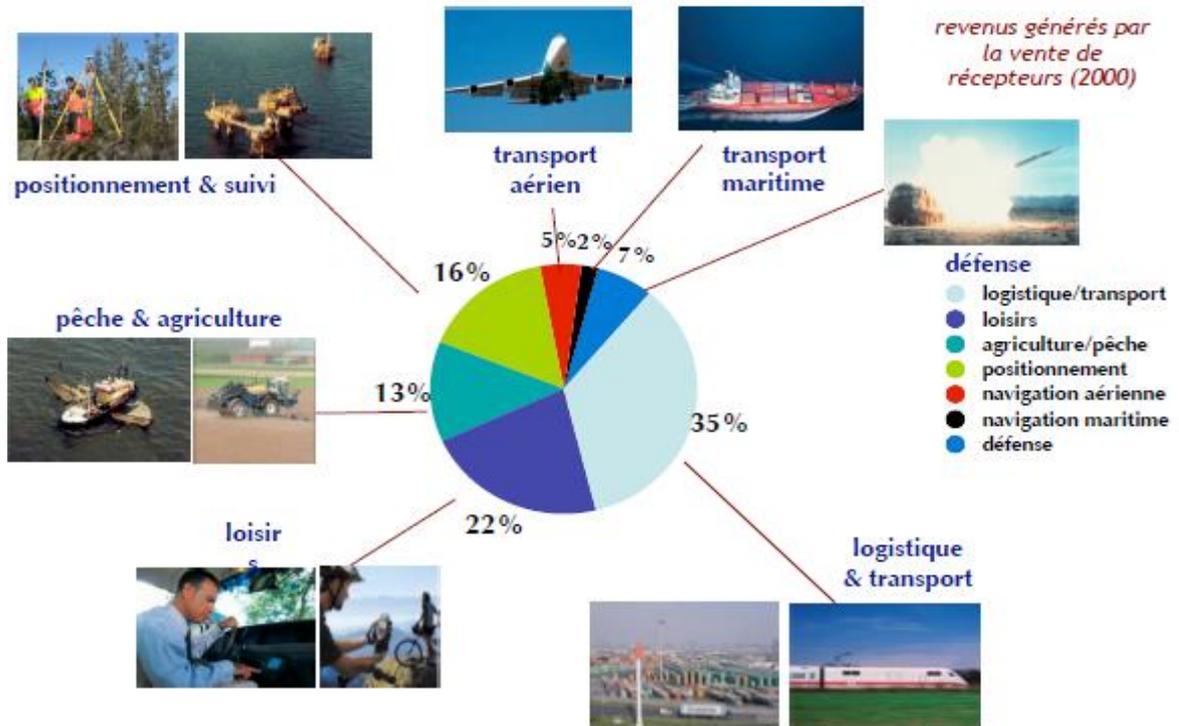


Figure I.18 : Segment d'utilisateurs

### I.3.2.3-Principe du système GPS :

Les systèmes GPS délivrent à tout utilisateur muni d'un récepteur adéquat des informations précises de position, vitesse et temps.

De manière générale, les récepteurs GPS fonctionnent selon le principe de trilatération. Ce principe consiste en une approche géométrique permettant de déterminer la position d'un point dans l'espace à partir de mesures de distance par rapport à certains repères connus (satellites dans le cas du système GPS). La Figure 3-1, illustre ce principe pour un système à trois dimensions. En exprimant de façon mathématiquement ce système, il est possible de constater que nous avons affaire à un système à trois équations et trois inconnus tel que :

$$r_A = \sqrt{(x_A - x_p)^2 + (y_A - y_p)^2 + (z_A - z_p)^2} \quad \text{Eq.I.23}$$

$$r_B = \sqrt{(x_B - x_p)^2 + (y_B - y_p)^2 + (z_B - z_p)^2} \quad \text{Eq.I.24}$$

$$r_C = \sqrt{(x_C - x_P)^2 + (y_C - y_P)^2 + (z_C - z_P)^2} \quad \text{Eq.I.25}$$

Où :

$r_A, r_B, r_C$  : Mesures de distance connues entre le point P et les points A, B et C

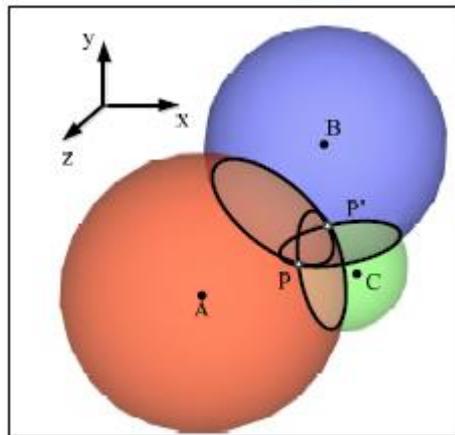
$x_A, y_A, z_A$  : Coordonnées connues du point A

$x_B, y_B, z_B$  : Coordonnées connues du point B

$x_C, y_C, z_C$  : Coordonnées connues du point C

$x_P, y_P, z_P$  : Coordonnées inconnues du point P

Ainsi, les coordonnées d'un récepteur GPS peuvent être obtenues en solutionnant ce système non linéaire à trois équations. Toutefois, dans le cas d'un récepteur GPS, il est nécessaire d'utiliser une quatrième équation afin de résoudre l'incertitude temporelle.



**Figure I.19** : Principe de trilatération appliqué à un système à trois dimensions

Cependant, tel qu'illustré sur la Figure I.19, il existe une certaine ambiguïté entre les points P et P'. Afin de résoudre cette dernière, il serait généralement nécessaire d'utiliser l'équation provenant d'un troisième point de repère. Or, pour le système GPS, il est tout à fait plausible d'assumer que les coordonnées du point recherché seront celles situées le plus près de la surface de la Terre, ce qui permet de lever le doute sur cette ambiguïté.

#### I.3.2.4-Mesures GPS

Deux mesures s'effectuent par le système GPS : mesure de pseudo distance et mesure de phase.

##### a) Mesure de pseudo distance

Les mesures de pseudo distance séparant le récepteur GPS des différents satellites peuvent être calculées à partir des temps de transmission et de réception des signaux. En effet, étant donné que les signaux GPS se propagent à la vitesse de la lumière, cette mesure de distance peut être calculée par l'équation suivante :

$$d = c \cdot \Delta t \qquad \text{Eq.I.26}$$

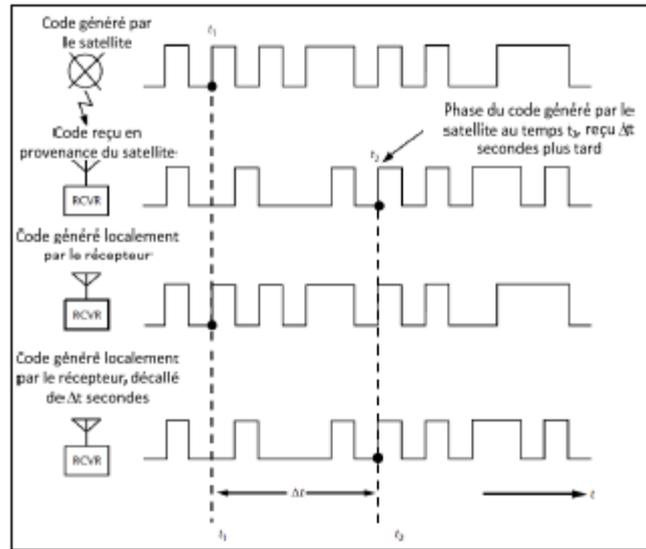
Où :

$d$ : Mesure de distance entre le récepteur et le satellite

$c$  : vitesse de la lumière,

$\Delta t$ : Temps de propagation du signal GPS

L'approche classique afin de déterminer le temps de propagation des signaux GPS consiste, en partie, à utiliser la différence de phase entre le code d'étalement généré localement et celui provenant du satellite en question tel qu'illustré sur la Figure 3-3, adaptée de Kaplan et Hegarty (2006). En effet, en considérant que l'horloge du satellite et celle du récepteur sont parfaitement synchronisés, lorsque le satellite transmet son code PRN (*Pseudorandom Noise*), le récepteur génère une réplique exacte et en phase de ce code. Après un certain temps, équivalent au temps de propagation du signal GPS, le code PRN transmis par le satellite sera perçu par le récepteur avec une certaine différence de phase et un nombre ambigu de période de code (*voir Figure 3-3*). En multipliant cette différence de phase par la vitesse de la lumière, la distance entre le satellite et le récepteur est obtenue.



**Figure I.20** : Calcul du temps de transmission à partir des mesures de code

L'hypothèse voulant que les deux horloges soient parfaitement synchronisées est cependant erronée et les mesures de distance séparant le récepteur GPS et les différents satellites se retrouvent plutôt contaminées par une erreur de synchronisation appelée biais d'horloge. De plus, les signaux GPS peuvent également être contaminés par différentes sources d'erreur, telles que les erreurs atmosphériques, affectant ainsi le temps de propagation du signal. C'est pour ces raisons que le terme pseudo-distance est généralement utilisé plutôt que le terme distance afin de caractériser cette mesure. Ainsi, la pseudo-distance représente la distance mesurée séparant le récepteur d'un satellite, en incluant les différentes erreurs associées tel que :

$$\rho = d + c \cdot \delta t + \eta_\rho \quad \text{Eq.I.27}$$

Où :

$\rho$  : Mesure de pseudo-distance

$\delta t$  : Biais d'horloge du récepteur

$\eta_\rho$  : Erreurs supplémentaires affectant la mesure de pseudo-distance

Basé sur le principe de trilatération, la mesure de pseudo distance d'un satellite peut être définie tel que :

$$\rho_i = \sqrt{(x_i - x)^2 + (y_i - y)^2 + (z_i - z)^2} + b_{clk} + \eta_\rho \quad \text{Eq.I.28}$$

Où :

$\rho_i$  : Mesure de pseudo-distance du satellite i

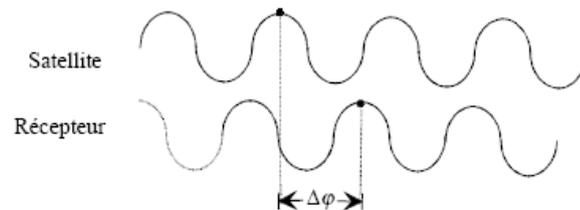
$x, y, z$  : Coordonnées du récepteur GPS

$x_i, y_i, z_i$  : Coordonnées du satellite i

$b_{clk}$  : Erreur de pseudo-distance associé au biais d'horloge ( $b_{clk} = c \cdot \delta t$ )

### b) Mesure de la phase

La mesure de phase se fait sur les ondes porteuses L1 et L2 de longueurs d'ondes 19,0 cm et 24,4 cm. Le principe de la mesure est la comparaison de la phase du signal reçu par le récepteur avec la phase du signal généré par le récepteur et qui est une réplique du signal du satellite. Le récepteur reçoit à l'instant  $t^r$  la phase du signal émis par le satellite à l'instant  $t^e$ .



**Figure.I.21:** Comparaison de phase du signal reçu et du signal généré

La distance entre le récepteur et le satellite est donnée en multipliant le terme  $\phi$  par la longueur d'onde  $\lambda$ :

$$\rho^i = \lambda \times \phi = \lambda(\Delta\phi + \eta_R) \quad \text{Eq.I.29}$$

Avec  $\Delta\phi$  est le déphasage entre l'instant de réception ( $T_r$ ) et l'instant d'émission ( $T_e$ ) et  $\eta_R$  est le nombre de cycles comptés par le récepteur à l'instant de réception.

#### I.3.2.5- Sources d'erreurs du système GPS

Les mesures provenant des signaux GPS sont contaminées par différentes sources d'erreur (Annexe A.4). De manière générale, ces erreurs peuvent provenir soit des satellites, soit du récepteur, ou encore être causée par la propagation des signaux. De plus, la géométrie des satellites constitue également un facteur important pouvant affecter la précision de la solution de navigation calculée par un récepteur GPS.

## I.4-NAVIGATION HYBRIDE

Le terme de navigation hybride s'adapte à tous les types de navigation utilisant plusieurs systèmes de nature différente pouvant réaliser l'estimation de la position de manière indépendante (GPS, INS, WSS (Wheel Speed Sensor), . . .). Dans ces conditions, le système hybride combine les propriétés et fonctionnements des autres systèmes. Comme cela a été expliqué précédemment, GPS et INS reposent sur des techniques de positionnement très différentes et complémentaires.

Contrairement aux systèmes de positionnement par satellite, les systèmes de navigation inertielle sont entièrement autonomes et ne nécessitent l'usage d'aucun signal externe afin de calculer une solution de navigation. Ainsi, ils ne sont pas affectés par l'environnement dans lequel ils évoluent et offrent donc une alternative idéale aux récepteurs GPS en environnement difficile. Cependant, étant donné les erreurs inhérentes sur les mesures de capteurs inertiels (gyroscopes et accéléromètres), la solution de navigation calculée par les systèmes INS n'est pas parfaite et tend à dériver avec le temps. Selon Schmidt (2004) cette dérive peut atteindre jusqu'à 500 m/h et ce, même pour les systèmes INS autonomes de haut niveau utilisés pour des applications militaires de grande précision. Il est donc nécessaire de corriger périodiquement cette erreur à l'aide de mesures externes telles que celles provenant d'un système GPS de manière à contenir cette dernière en-dessous d'un seuil tolérable. Le **Tableau.I.1** présente les avantages et inconvénients de l'utilisation de chacun des systèmes GPS et INS de manière indépendante, mettant ainsi en évidence la synergie qui existe entre ces derniers et motivant par le fait même leur intégration.

	<b>Avantages</b>	<b>Inconvénients</b>
<b>GPS Autonome</b>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Erreurs restreintes</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Taux d'échantillonnage faible</li> <li>• Aucune information sur l'attitude du mobile</li> <li>• Sensible au brouillage</li> </ul>
<b>INS Autonome</b>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Taux d'échantillonnage élevé</li> <li>• Informations en translation et en rotation</li> <li>• Entièrement autonome (insensible au brouillage)</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Erreurs non restreintes</li> </ul>

**Tableau.I.1.**Avantages et inconvénients des systèmes GPS et INS

Cette synergie, est principalement caractérisée par les quatre points suivants (Schmidt et Phillips, 2004) :

- 1) les méthodes conventionnelles d'intégration GPS/INS permettent d'utiliser les mesures inertielles afin d'assister les boucles de poursuite (code et porteuse) du récepteur GPS de manière à permettre une réduction considérable de leur largeur de bande respective. Ainsi, le récepteur accepte un niveau moindre de bruit et parvient à poursuivre des signaux de plus faible intensité;
- 2) les systèmes inertiels peuvent fournir une solution continue même lorsque les signaux GPS deviennent inaccessibles. La connaissance de la position et de la vitesse du mobile permet de réduire considérablement le temps de réacquisition des signaux GPS à la suite d'un décrochage du récepteur;
- 3) l'utilisation des mesures GPS à l'intérieur d'un filtre de navigation permet d'estimer les erreurs de biais des capteurs inertiels. Ainsi, la précision de la solution de navigation calculée par les systèmes INS est considérablement améliorée, augmentant du même coup l'impact des points 1) et 2);
- 4) l'utilisation d'un système INS au cœur du système de navigation permet de se libérer de la contrainte d'avoir quatre satellites en ligne de vue afin de calculer une solution de navigation. De plus, chacun des satellites joue un rôle important dans le calcul de la solution de navigation hybride GPS/INS même lorsque la visibilité est réduite [4].

## **I.5-CONCLUSION**

Ce chapitre a permis de présenter les différentes techniques de navigation ainsi que les méthodes de résolution qu'il faut mettre en œuvre pour obtenir une information de positionnement. Une description plus détaillée a été apportée pour les techniques utilisées dans le cadre des travaux menés durant ce mémoire. Ainsi, la navigation inertielle et la radionavigation par satellite ont été plus particulièrement expliquées, ce qui a alors permis d'introduire la notion de navigation hybride dans le cas spécifique GPS/INS.

Présentée dans un cadre général, cette navigation hybride, qui va être expliquée et détaillée d'avantage, pourra alors être utilisée dans le cas qui a été plus particulièrement étudié durant ce mémoire, la comparaison entre le filtre de Kalman et le filtre SDRE appliqués dans un système hybride GPS/INS.

## **CHAPITRE II : MODELISATION DES ERREURS INERTIELLES ET FILTRAGE DE KALMAN**

### **II.1-INTRODUCTION**

Les insuffisances des deux systèmes INS et GPS citées dans le chapitre précédent rendent possible leur hybridation. Le système hybride est piloté par le filtre numérique de KALMAN qui permet d'estimer les erreurs issues des capteurs avec minimum de variance.

Dans ce chapitre, nous allons rappeler le principe du filtrage de KALMAN, en particulier le filtre EKF, et détailler les équations mathématiques linéaires construisant le filtre.

Le chapitre expose également les différentes architectures d'hybridation. Plusieurs considérations de mise en application du filtre de KALMAN (synchronisation, détection des trajets multiples, réglage des paramètres du filtre,...) sont discutées après avoir développées les équations du modèle dynamique d'erreur du système inertiel, en se basant sur une linéarisation par différentiation, et les équations du modèle des observations fournies par le GPS.

L'intégration de deux systèmes de navigation est généralement réalisée via un filtre d'hybridation qui calcule la solution de navigation à partir des données fournies par les deux systèmes de capteurs.

Le couplage consiste à utiliser les mesures GPS pour évaluer les erreurs d'estimation commises par la centrale inertielle [8].

### **II.2-FILTRE DE KALMAN**

#### **II.2.1-Principe et algorithme du filtre de KALMAN**

Une idée centrale dans le filtre de KALMAN est de modéliser le système étudié comme un système dynamique linéaire affecté par des bruits. Les capteurs du système sont également soumis à des bruits. En disposant d'une information statistique sur la nature du bruit (ses premiers ordres statistiques), il est possible de construire une estimation optimale de l'état du système bien que les capteurs soient inexacts. C'est l'idée fondamentale de la théorie de l'estimation. Sans connaître les erreurs elles-mêmes, la connaissance de leurs statistiques permet la construction des estimateurs utiles en se

basant seulement sur cette information. La méthode de KALMAN est une procédure d'estimation dynamique des paramètres qui sont fonctions du temps. Soit  $t_n$  l'instant pour lequel on veut estimer les paramètres et  $t_m$  l'instant à laquelle les mesures sont effectuées [7].

La méthode de KALMAN permet :

- La prédiction si  $t_m < t_n$
- Le filtrage si  $t_m = t_n$
- Le lissage si  $t_m > t_n$

Le système d'équations utilisé dans le filtre de KALMAN repose sur la définition de deux modèles que sont le modèle de processus et le modèle de la mesure (les modèles sont la représentation d'états d'un système dynamique). Il est utilisé pour estimer l'état ( $x \in (\mathfrak{R}^n)$ ) d'un système dynamique observé. Le modèle du processus qui décrit l'évolution de ce système dynamique est défini par l'équation d'état linéaire récursive suivante:

$$\dot{x} = Fx + Gu \quad \text{Eq.II-1}$$

### Le modèle de temps discret

Par temps discret, on entend que l'évolution du système n'est pas prise en compte de façon continue par le calculateur et que les mesures ne sont disponibles qu'à certains instants et non en continu. Cette considération est largement suffisante pour de faibles vitesses de déplacement. L'approche semi-continue, qui autorise une évolution continue du modèle du système tout en observant un échantillonnage des mesures, n'est pas abordée dans le contexte de ce mémoire.

Le modèle dynamique linéaire du système, ou l'équation d'état à l'instant  $k, k-1$  :

$$x_{k+1} = \Phi_K x_k + G_K u_k + w_k \quad \text{Eq.II-2}$$

Avec :

$x_k, x_{k+1}$  sont des paramètres du système (*le vecteur d'état*) à l'instant  $k$  et  $k+1$ .

$\Phi_K \in M_{(n \times n)}(\mathfrak{R})$  est la matrice dynamique du système (*la matrice de transition de  $k$  à  $k+1$* ), c'est une matrice qui fait le lien entre les paramètres du système à deux étapes successives.

$u_k \in \mathfrak{R}^m$  est le vecteur de commande, (*vecteur d'entrée*).

$G_K \in M_{(m \times m)}(\mathfrak{R})$  est la matrice de commande qui représente la distribution de l'entrée (vecteur d'entrée) dans le vecteur d'état. Elle fait le lien entre les valeurs optionnelles de contrôle et l'état du système.

$w_K \in \mathfrak{R}^m$  est le bruit d'état.

Le modèle de mesure décrit l'information fournie par le ou les capteurs en une équation liant les paramètres de l'état de la mesure et du bruit. L'équation de mesure ou d'observation est donnée par :

$$z_K = H_K \cdot x_k + v_k \quad \text{Eq.II-3}$$

Avec :

$z_K \in \mathfrak{R}^p$  est la mesure à l'instant  $k$ .

$H_K \in M_{(p \times n)}(\mathfrak{R})$  est la matrice d'observation, c'est la matrice qui fait le lien entre les paramètres du système et les mesures.

$v_k \in \mathfrak{R}^n$  est le bruit de mesure.

Lors de l'utilisation de ce filtre, l'hypothèse est faite que les bruits d'état  $v_k$  et de mesure  $w_k$  sont des variables aléatoires dont les distributions gaussiennes sont connues à priori (doivent être estimées à l'avance), indépendantes, blanches et indépendantes de l'état initial du système. Cette indépendance des bruits permet de simplifier le formalisme des équations d'évolution et d'observation, donc :

$$\begin{aligned} P(w_k) &\sim N(0, Q_K) \\ P(v_k) &\sim N(0, R_K) \\ E[w, v_i^T] &= 0, \forall_{j,i} \end{aligned} \quad \text{Eq.II-4}$$

Où,  $Q_k$  et  $R_K$  sont les matrices de covariances de processus et des mesures respectivement.

La détermination de la covariance du bruit du système est généralement plus difficile que celle de la mesure, parce que l'observation directe de l'état du système est impossible, La Figure(Figure.II.1) montre les différentes étapes d'estimation des paramètres du système. Il y a deux étapes principales pour l'estimation de ces paramètres : l'estimation à priori (la prédiction) et l'estimation à posteriori (la correction). Les paramètres du système sont estimés premièrement à partir des valeurs de l'étape précédente et ensuite ils sont corrigés par des mesures dans l'étape de correction. Les deux étapes tournent d'une façon récursive après une étape d'initialisation.

## II.2.2- Linéarisation des problèmes non linéaires

La formulation du filtre présentée est basée sur un modèle linéaire des systèmes et elle n'est donc pas applicable dans les situations où le modèle du système ou le modèle de la mesure ou bien les deux sont non-linéaires. Ainsi, le problème principal dans ces cas est de linéariser d'abord le modèle, et puis d'appliquer le filtre standard de KALMAN pour obtenir l'état du système. Un certain nombre de méthodes ont été développées dans cette direction; ici nous discuterons trois de telles approches.

Quand la linéarisation se fait autour d'une certaine trajectoire nominale dans l'espace d'état qui ne dépend pas des données de mesure, le filtre résultant s'appelle le Filtre Linéarisé de KALMAN. La linéarisation autour d'une trajectoire (estimée) qui est continuellement mise à jour avec les estimations d'état résultant des mesures s'appelle le Filtre de KALMAN Etendu. Dans les deux cas, la linéarisation est faite en utilisant la série de Taylor. Une autre méthode est de linéariser en utilisant un ensemble de points-échantillons choisis, ceci donne le (Unscented KALMAN Filter) ou (Sigma-point KALMAN Filter).

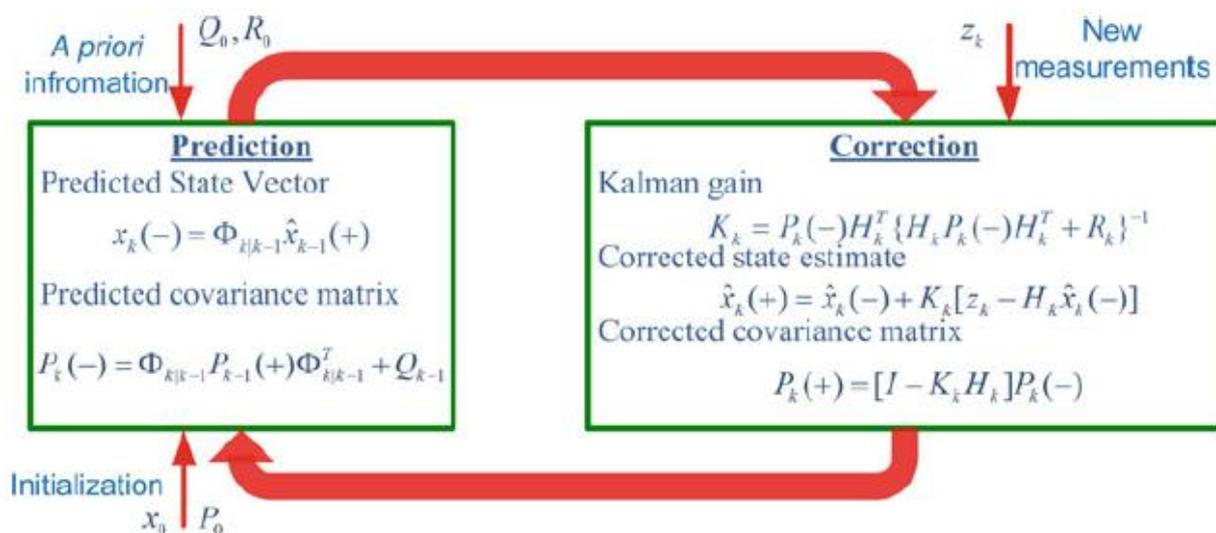


Figure.II.1 : Les paramètres principaux d'un filtre de KALMAN

### II.2.3-Le fonctionnement de filtre de KALMAN

Les étapes constituant le filtrage de KALMAN dans un cadre linéaire sont :

- **Initialisation**

L'état initial est une variable gaussienne, indépendante des bruits du système, de moyenne et de matrice de covariances connues.

$$\begin{aligned}\hat{x}_{0/0} &= E(x_0) \\ p_{0/0} &= E\left((x_0 - \hat{x}_{0/0})(x_0 - \hat{x}_{0/0})^T\right) = \text{Var}[x_0]\end{aligned}\quad \text{Eq.II-5}$$

- **Prédiction temporelle**

Cette étape permet la prédiction de l'état et de sa précision à l'instant  $k+1$  à partir de l'état à l'instant  $k$  et du modèle d'évolution du système. On obtient donc l'état  $\hat{x}_{k+1/k}$  avec sa matrice de covariances associée  $P_{k+1/k}$ :

$$\begin{aligned}\hat{x}_{k+1/k} &= \Phi_K \cdot \hat{x}_{k/k} + G_K \cdot u_K \\ P_{k+1/k} &= \Phi_K \cdot P_{k/k} \cdot \Phi_K^T + Q_K \\ \hat{z}_{k+1/k} &= H_{k+1} \cdot \hat{x}_{k+1/k}\end{aligned}\quad \text{Eq.II-6}$$

- **Correction et mise à jour des mesures (Innovation)**

Une fois la mesure  $z_{k+1}$  est disponible, l'état prédit peut alors être corrigé par l'innovation  $\hat{S}_{k+1/k}$  (et sa covariance associée Eq.II-7) pondérée par le gain du filtre  $K_{k+1}$ . On en déduit alors l'estimation de l'état  $\hat{x}_{k+1/k+1}$  avec sa matrice de covariances associée  $P_{k+1/k+1}$ .

$$\begin{aligned}\hat{S}_{k+1/k} &= z_{k+1} - \hat{z}_{k+1/k} \\ S_{k+1/k} &= H_{k+1} \cdot P_{k+1/k} \cdot H_{k+1}^T + R_{k+1} \\ K_{k+1} &= P_{k+1/k} \cdot H_{k+1}^T \cdot \left(S_{k+1/k}\right)^{-1} \\ \hat{x}_{k+1/k+1} &= \hat{x}_{k+1/k} + K_{k+1} \cdot \hat{S}_{k+1/k} \\ P_{k+1/k+1} &= (I - K_{k+1} \cdot H_{k+1}) \cdot P_{k+1/k}\end{aligned}\quad \text{Eq.II-7}$$

$$\text{Eq.II-8}$$

Avec :

$K_{k+1}$  est le gain de KALMAN, entre 0 et 1.

$\hat{x}_{k/k}$  est le vecteur d'état, et  $P_{k/k}$  la matrice de covariances.

$\Phi_K$  est la matrice de transition entre les instants  $k-1$  et  $k$ .

$Q_K$  est la matrice de covariances de processus. (Le bruit du système).

$z_{K+1}$  est le vecteur de mesures.

$H_{K+1}$  est la matrice d'observation.

$R_K$  est la matrice de covariances des mesures.

En fait, le gain de KALMAN a été calculé de façon à minimiser la covariance d'erreur à Posteriori  $P_{k+1/k}$ .

Le gain de KALMAN toujours compris entre 0 et 1, joue un rôle très important dans l'étape de correction, il permet de connaître la confiance que l'on peut apporter à la mesure par rapport à la prédiction, il est égal à la covariance de prédiction d'état  $P_{k+1/k}$ ,  $H_{K+1}^T$  divisée par la covariance d'innovation  $S_{k+1/k}$ .

Si notre mesure est plus précise que notre erreur de système, alors :

$$R_{K+1} \ll P_{K+1} \text{ Et } K_{K+1} \cong 1$$

Dans ce cas, l'équation  $\hat{x}_{K+1/K+1} = \hat{x}_{K+1/K} + K_{K+1} \cdot \hat{s}_{K+1/K}$  est approximativement identique à:

$\hat{x}_{k+1/K+1} = \hat{x}_{k+1/K} + \hat{s}_{k+1/K}$ , ce qui donnerait plus de poids à la mesure dans l'estimation de l'état.

Si en revanche nous connaissons notre erreur de système plus précisément que notre mesure, nous devrions alors rendre la correction due à la mesure très petite. Dans ce cas,  $R_{K+1} \gg P_{K+1}$  et  $K_{K+1} = P_{K+1}/R_{K+1}$  ainsi la correction sera très faible.

Le résiduel (innovation) reflète l'écart entre la mesure prédite et la mesure réelle. Un résiduel de zéro, signifie que les deux mesures sont équivalentes [6].

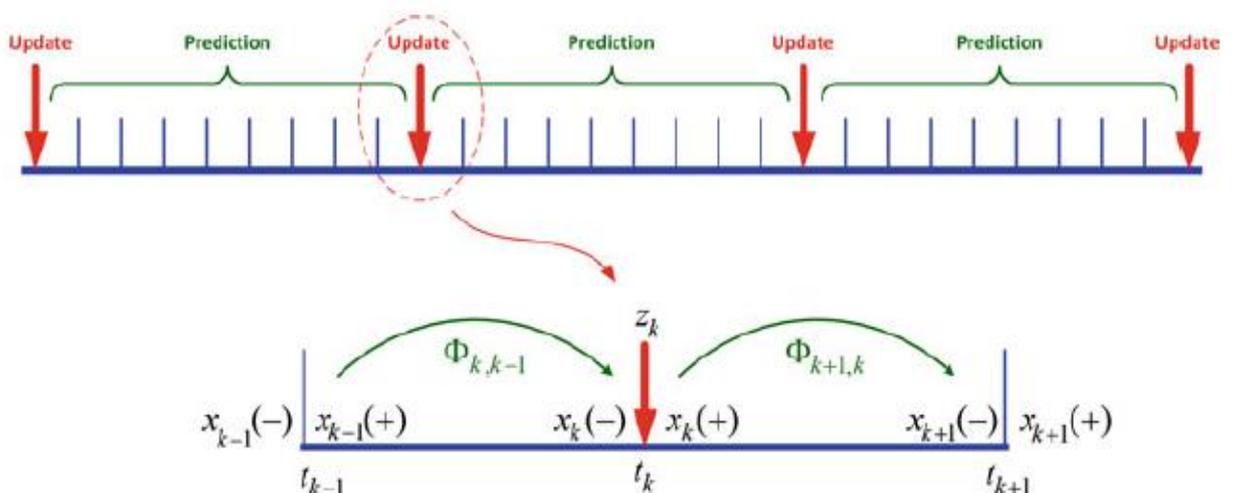


Figure.II.2 : Une représentation de la prédiction et la mise à jour d'un état

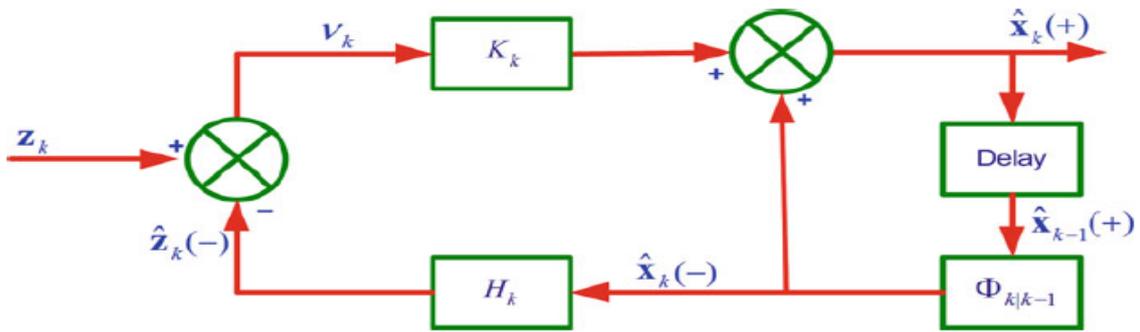


Figure.II.3 : Un schéma de principe montrant les paramètres d'un estimateur d'état

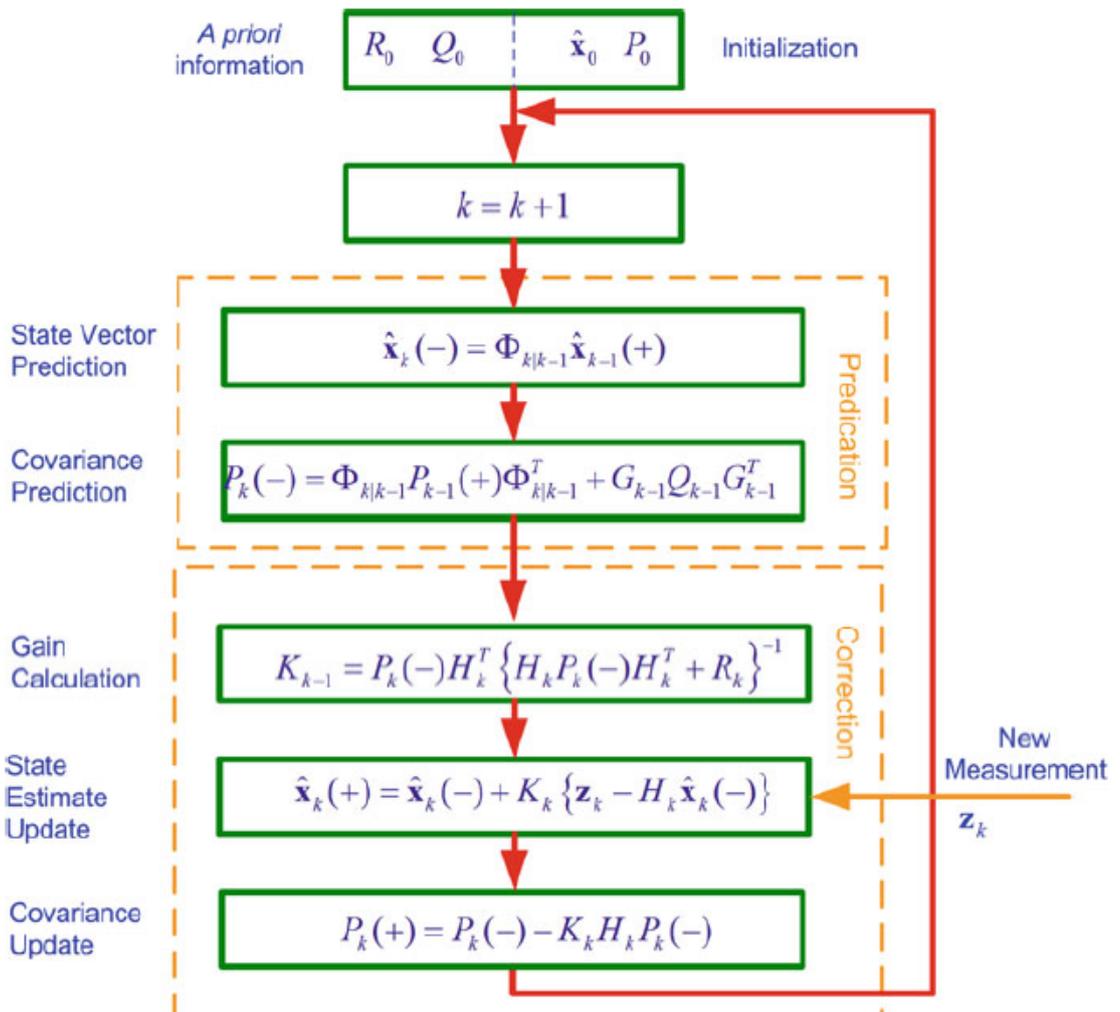


Figure.II.4 : Représentation des paramètres de l'algorithme du filtre KALMAN

## II.2.4-Quelque variétés du filtre de KALMAN

### II.2.4.1-Le filtre de KALMAN Linéarisé LKF

Dans le filtre linéarisé de KALMAN, la linéarisation est faite autour d'une certaine trajectoire nominale, qui ne dépend pas des données de mesure, c.-à-d. que l'expansion en série de Taylor utilisée pour la linéarisation est évaluée à un certain point nominal connu [7].

Considérez un modèle non-linéaire d'un système défini comme suit :

Modèle du processus :

$$x_K = f(x_{K-1}, u_{K-1}) + w_{K-1} \quad \text{Eq.II-9}$$

Modèle de mesure:

$$z_K = h(x_K) + v_K \quad \text{Eq.II-10}$$

Là où,  $f$  et  $h$  sont des fonctions non-linéaires connues,  $u_k$  est le vecteur de commande et  $w_k$  et  $v_k$  sont des processus de type bruit blanc non corrélés. La non-linéarité peut résider soit dans le modèle du processus soit dans le modèle de mesure soit dans les deux fonctions.

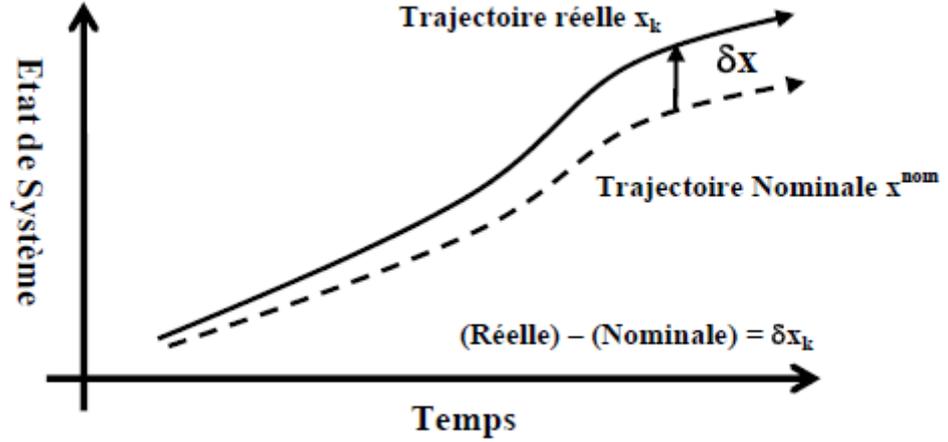
Supposez qu'une trajectoire approximative  $x_K^{nom}$  (Figure.II.5) puisse être déterminée par un quelconque moyen, celle-ci est référée en tant que trajectoire nominale (la trajectoire de référence). La trajectoire réelle (actuelle)  $x_k$ , peut être écrite en termes de  $x_K^{nom}$  et d'erreur  $\Delta x_k$  comme suit :

$$x_K = x_K^{nom} + \delta x_K \quad \text{Eq.II-11}$$

Les équations (Eq.II-8) et (Eq.II-9) deviennent alors :

$$x_K^{nom} + \delta x_K = f(x_{K-1}^{nom} + \delta x_{K-1}, u_{K-1}) + w_{K-1} \quad \text{Eq.II-12}$$

$$\hat{x}_{K+1/K+1} = \hat{x}_{K+1/K} + \hat{s}_{K+1/K} \quad \text{Eq.II-13}$$



**Figure.II.5** : Trajectoire nominale et réelle pour un filtre linéarisé de KALMAN

Par l'application de l'expansion de série de Taylor dans l'équation (Eq.II-12) et en supposant que  $x_k$  est petit, nous allons réaliser une expansion de  $f$  autour de  $x_k^{nom}$  en ne gardant que le terme de premier ordre :

$$x_k = x_k^{nom} + \delta x_k^{nom} = \left( f(x_{k-1}^{nom}, u_{k-1}) + \frac{\partial f}{\partial x} \Big|_{x=x_{k-1}^{nom}} \cdot \delta x_{k-1} + \text{terme d'ordre élevés} \right) + w_{k-1} \quad \text{Eq.II-14}$$

$$f(x_{k-1}^{nom}, u_{k-1}) = x_k^{nom}$$

$$\Rightarrow \delta x_k \approx \Phi_{k-1} \delta x_{k-1} + w_{k-1} \text{ (la dynamique linéarisée)} \quad \text{Eq.II-15}$$

$$\varphi_{k-1} = \left[ \frac{\delta f}{\delta x} \right]_{x=x_{k-1}^{nom}} = \begin{bmatrix} \frac{\delta f_1}{\delta x_1} & \frac{\delta f_1}{\delta x_2} & \frac{\delta f_1}{\delta x_3} & \dots \\ \frac{\delta f_2}{\delta x_1} & \frac{\delta f_2}{\delta x_2} & \frac{\delta f_2}{\delta x_3} & \dots \\ \frac{\delta f_3}{\delta x_1} & \frac{\delta f_3}{\delta x_2} & \frac{\delta f_3}{\delta x_3} & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \end{bmatrix}_{x=x_k^{nom}} \quad \text{Eq.II-16}$$

Avec :

$$w_k \sim N(0, Q_k)$$

En négligeant le second terme et les termes d'ordres supérieurs, la prédiction de l'état est propagée par les équations non-linéaires tandis que les erreurs d'état le sont par un système linéaire séparé.

Maintenant, la mesure peut être également linéarisée en utilisant l'expansion de la série de Taylor, en linéarisant  $h$  et négligeant les termes d'ordres supérieurs.

$$z_K = \left[ h \left( x_K^{nom} + \frac{\partial h}{\partial x} \Big|_{x_K=x_K^{nom}} \right) \cdot \delta x_K + \text{termed'ordreelvels} \right] + v_K \quad \text{Eq.II-17}$$

$$\delta z_K \approx z_K - h(x_K^{nom}) \quad \text{Eq.II-18}$$

$$\Rightarrow \delta z_k \approx H_K \cdot \delta x_k + v_K \quad (\text{Équation de mesure linéarisée})$$

Où

$$H_K = \left[ \frac{\delta h}{\delta x} \right]_{x_K=x_K^{nom}} = \begin{bmatrix} \frac{\delta h_1}{\delta x_1} & \frac{\delta h_1}{\delta x_2} & \frac{\delta h_1}{\delta x_3} & \dots \\ \frac{\delta h_2}{\delta x_1} & \frac{\delta h_2}{\delta x_2} & \frac{\delta h_2}{\delta x_3} & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \end{bmatrix}_{x_K=x_K^{nom}} \quad \text{Eq.II-19}$$

Et  $v_K \sim (0, R_K)$

Le filtre linéarisé est utilisé dans une configuration de « feedforward » comme montré ci-dessous (Figure.II.6). Sous cette forme, la trajectoire nominale n'est pas mise à jour pour refléter les estimations d'erreur calculées par le filtre. Le modèle de « feedforward » peut être utilisé pour intégrer un système de navigation inertielle avec un certain nombre d'aides externes de navigation. Nous devons choisir une trajectoire nominale autour de laquelle la linéarisation sera effectuée. L'INS seul est pris comme le modèle du système et ses sorties sont considérées comme la trajectoire de référence (nominale). Cette trajectoire de référence ne sera pas toute parfaite car c'est une combinaison de la trajectoire vraie avec les erreurs d'INS. Notre but est d'estimer les erreurs du système inertiel en utilisant des systèmes de mesures externes. Ces erreurs sont appliquées à la référence (et à la sortie brute du système inertiel) pour produire une sortie correcte et améliorée du système inertiel. Le point à noter ici est que le filtre de KALMAN agit seulement sur les erreurs du système. Ainsi, nous avons besoin d'un modèle de l'espace d'état décrivant ces erreurs-là et il doit être linéaire avec le bruit blanc. Par ailleurs, les mesures d'INS ne sont pas utilisées en tant que « mesures » dans le filtre de KALMAN mais plutôt pour la trajectoire de référence.

Ce type de filtre est difficile d'utilisation pour des missions prolongées parce qu'après une certaine durée, la trajectoire de référence peut diverger en un point où l'hypothèse linéaire n'est plus valide à travers la variation du vecteur d'état. Enfin, le filtrage linéarisé a l'avantage de permettre généralement une exécution en temps réel. Cependant, il est

moins robuste vis-à-vis des approximations non-linéaires des erreurs que le filtrage étendu. Un remède simple et efficace pour le problème de la déviation réside dans le remplacement de la trajectoire nominale par la trajectoire estimée, ce qui ramène au filtre de KALMAN étendu [7].

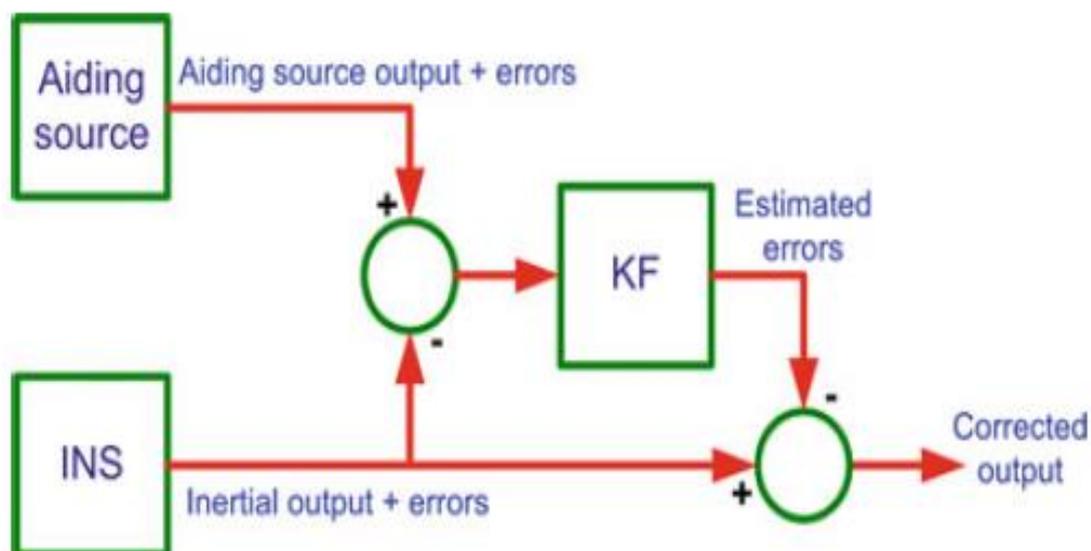


Figure.II.6 : Filtre de KALMAN linéarisé (Feedforward)

#### II.2.4.2-Le Filtre de KALMAN Etendu EKF

Le filtre de KALMAN étendu « EKF » a été développé par Stanley F. Schmidt. Il représente probablement l'approche la plus commune et la plus populaire pour traiter un système non linéaire. Son fonctionnement consiste simplement à linéariser tous les modèles non-linéaires de sorte que le filtre linéaire traditionnel de KALMAN puisse être appliqué. L'EKF est devenu une approche standard pour un certain nombre d'applications d'estimation non linéaire.

EKF est similaire à un filtre linéarisé de KALMAN sauf que la linéarisation a lieu autour de la trajectoire estimée du filtre plutôt que de la trajectoire nominale pré-calculée (Figure.II.7). Ceci signifie que les dérivés partiels sont évalués le long de la trajectoire qui a été mise à jour avec les estimations du filtre ; ce qui dépend des mesures. Ainsi, le gain du filtre dépendra de la séquence d'échantillons de mesure et ne sera pas prédéterminé par les prévisions du modèle du processus.

Modèle non linéaire du processus :

$$x_k = f(x_{k-1}, u_{k-1}) + w_{k-1} \quad \text{Eq.II-20}$$

Modèle de mesure :

$$z_k = h(x_k) + v_k \quad \text{Eq.II-21}$$

L'approximation de Taylor de  $f$  est faite autour de l'estimation de l'instant précédent  $\hat{x}_{k-1}$  :

$$\Phi(\hat{x}, k) \approx \left. \frac{\partial f(x, k)}{\partial x} \right|_{x=\hat{x}_{k-1}} \quad \text{Eq.II-22}$$

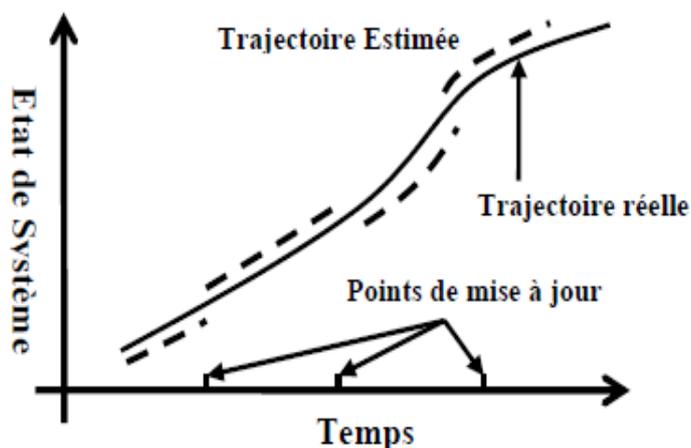
L'approximation de Taylor de  $h$  est faite à la position (ou à l'état) prédite correspondante :

$$H(\hat{x}, k) \approx \left. \frac{\partial h(x, k)}{\partial x} \right|_{x=\hat{x}_{k-1/k}} \quad \text{Eq.II-23}$$

Comme dans le cas du filtre linéarisé de KALMAN, le développement limité donne cette fois-ci :

$$x_k \approx x_{k/k-1} + \Phi_{k-1}(x_{k-1} - \hat{x}_{k-1}) + w_{k-1} \quad \text{Eq.II-24}$$

$$z_k \approx \hat{z}_k + k_k(x_k - \hat{x}_k) + v_k \quad \text{Eq.II-25}$$



**Figure.II.7** : Trajectoire estimée (nominale) et réelle pour un filtre de KALMAN étendu

Les équations (Eq.II-24) et (Eq.II-25) constituent un modèle linéarisé pour le cas discret. En général, l'EKF est difficile en raison du bouclage (le feedback) de la mesure

au modèle du processus, mais il arrive à mettre à jour la trajectoire utilisée pour la linéarisation pendant que le temps évolue.

L'avantage de l'EKF est qu'il est plus exploitable pour les missions prolongées. Mais il peut encore parfois aboutir à une trajectoire pire que la trajectoire nominale particulièrement dans les cas où l'incertitude initiale et les erreurs de mesure sont grandes. Néanmoins, le filtre linéarisé et le filtre étendu de KALMAN sont utilisés dans des applications différentes, chacun ayant ses propres avantages et inconvénients.

Le filtre étendu peut être visualisé dans une configuration de « feedback » comme montré ci-dessous (Figure.II.8). Dans un système de navigation inertielle assisté par le GPS, les erreurs du système inertiel sont retournées et les corrections sont faites intérieurement dans le système inertiel, ainsi nous n'avons pas les données inertielles brutes à la sortie du système inertiel.

La distinction précise entre les deux filtres (linéarisé et étendu) est basée sur la fonction de mesure  $h(\hat{x})$ , et plus précisément sur la façon dont elle est mise à jour : à partir de *la trajectoire corrigée* (filtre étendu) ou de *la trajectoire nominale* (filtre linéarisé).

Lorsque  $h(\hat{x})$  est calculée avant que les corrections ne soient faites aux sorties inertielles, le filtre est alors un filtre de KALMAN linéarisé ordinaire. Si  $h(\hat{x})$  est calculée après que les corrections aient été faites, le filtre est un filtre de KALMAN étendu. En général, l'EKF est préféré particulièrement quand la durée de la mission est longue, parce que dans ce cas la trajectoire de référence peut diverger de la vraie trajectoire au-delà des limites acceptables.

La Figure (Figure.II.9) montre les différentes étapes de l'algorithme d'estimation des paramètres du système non linéaire [7].

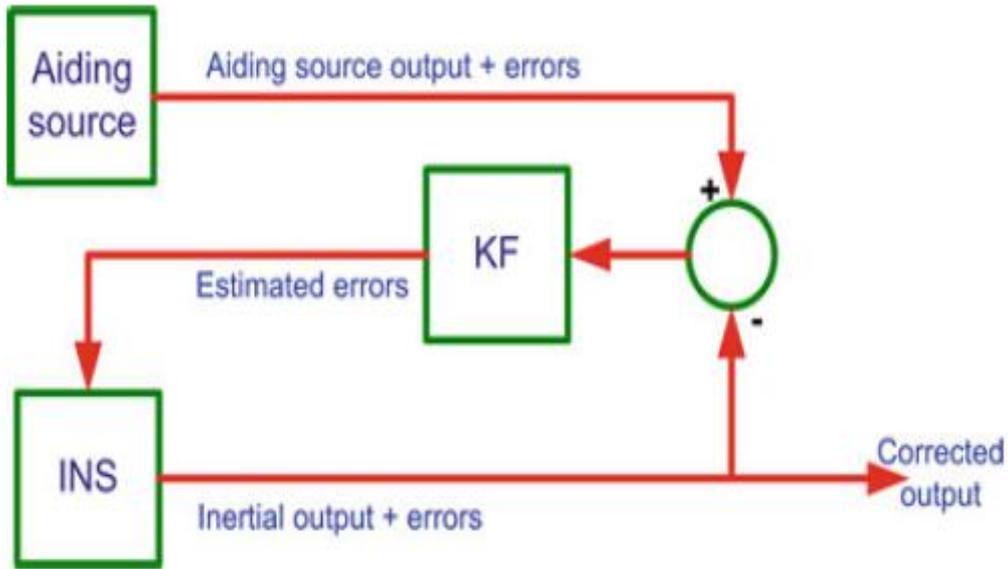


Figure.II.8 : Filtre de KALMAN Etendu (feedback)

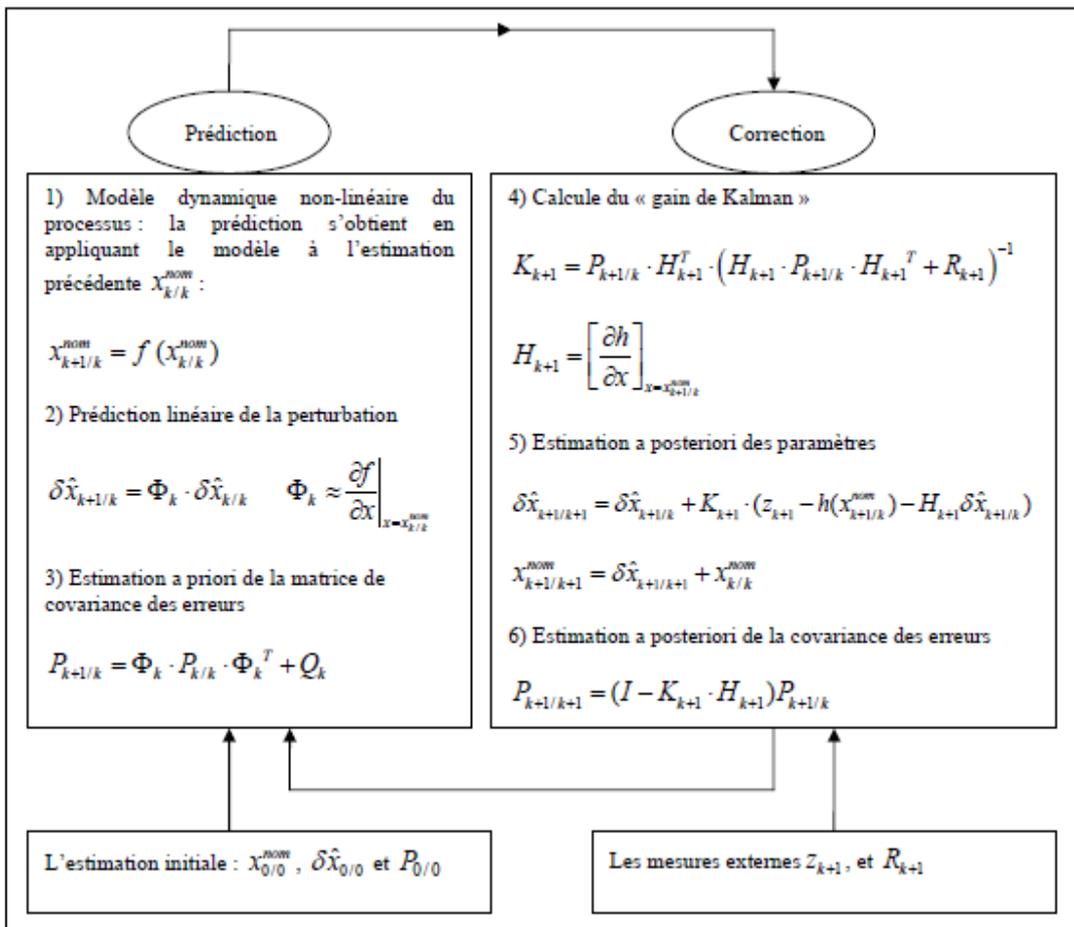


Figure.II.9 : Extension du filtre aux systèmes non linéaire

### II.2.4.3-Filtre de KALMAN-Schmidt SKF

Dans certaines applications, le système peut dépendre de paramètres dont on ne connaît pas d'une façon précise l'évolution au cours du temps (paramètres incertains) et dont la connaissance ne présente pas d'intérêt pratique. Par exemple, considérons le système suivant :

$$\begin{cases} x_k = F_k x_{k-1} + B_k u + G_k W_k \\ y_k = H_k x_k + N_k P + V_k \end{cases}$$

Où  $u$  et  $p$  sont des vecteurs de paramètres incertains.

On suppose qu'on connaît les propriétés statistiques de  $u$  et de  $p$  :

$$\begin{cases} E[u] = 0 \\ E[uu^T] = U_0 \end{cases}, \quad \begin{cases} E[p] = 0 \\ E[pp^T] = W_0 \end{cases}$$

Et  $u$ ,  $p$ ,  $W_k$  et  $V_k$  sont corrélés.

On peut aborder ce problème de 2 façons différentes :

- a- ignorer les paramètres incertains dans le modèle du filtre en fixant des valeurs arbitraires et en gonflant la matrice de bruit d'état. Cependant, on risque de faire diverger le filtre par le fait que le filtre a trop confiance en son estimée. La covariance de l'erreur estimée par l'EKF est alors petite alors que la covariance réelle de l'erreur commise est grande.
- b- estimer les paramètres incertains en les incluant dans le vecteur d'état.

$$\begin{aligned} x_k &= \begin{pmatrix} F_k & B_k & 0 \\ 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & I \end{pmatrix} x_{k-1} + \begin{pmatrix} G_k \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} W_k \\ y_k &= (H_k \quad 0 \quad N_k) x_k + V_k \end{aligned}$$

On obtient alors un système de plus grande dimension. Le temps de calcul du filtre augmente et d'autre part, les paramètres incertains peuvent dégrader la qualité de l'estimation des autres paramètres du vecteur d'état. En 1963, Stanley Schmidt propose une alternative intéressante à ce problème en développant une variante de l'EKF appelée filtre de KALMAN-Schmidt (SKF). Le vecteur d'état n'inclut pas les paramètres incertains, mais le filtre prend en compte l'incertitude sur ces paramètres viable calcul de leur matrice de covariance. Ceci permet de robustifier l'EKF quel que soit son mode d'application (a , b).

On a:

$$P_k = \begin{pmatrix} P & C_u & C_p \\ C_u^T & U_0 & 0 \\ C_p^T & 0 & W_0 \end{pmatrix} \quad \text{Eq.II-26}$$

$P$  est la matrice de covariance de l'état  $x_k$ , avec

$$C_u = E((x_k - \hat{x}_k)u^T) \quad \text{Eq.II-27}$$

$$C_p = E((x_k - \hat{x}_k)p^T) \quad \text{Eq.II-28}$$

❖ Equations de prédiction :

$$\left\{ \begin{array}{l} \hat{x}_{k/k-1} = F_k \hat{x}_{k-1} \\ p_{k/k-1} = \begin{pmatrix} F_k & B_k & 0 \\ 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} P_k & C_k^u & C_k^p \\ C_k^{uT} & U_0 & 0 \\ C_k^{pT} & 0 & W_0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} F_k^T & 0 & 0 \\ \Psi_k^T & I & 0 \\ 0 & 0 & I \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} G_k Q_k G_k^T & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{array} \right. \quad \text{Eq.II-29}$$

$$P_{k/k-1} = F_k P_{k-1} F_k^T + F_k C_{k-1}^u B_k^T + B_k C_{k-1}^{uT} F_k^T + B_k U_0 B_k^T + G_k Q_{k-1} G_k^T$$

$$C_{k/k-1}^u = F_k C_{k-1}^u + B_k U_0 \quad \text{Eq.II-30}$$

$$C_{k/k-1}^p = F_k C_{k-1}^p$$

❖ Equations de correction :

$$M_k = [H_k \quad 0 \quad N_k]$$

$$y_k = M_k P_k M_k^T + R_k$$

$$= H_k P_k H_k^T + H_k C_k^p N_k^T + N_k C_k^{pT} H_k^T + N_k W_0 N_k^T + R_k \quad \text{Eq.II-31}$$

$$\hat{x}_k = \hat{x}_{k/k-1} + \mathcal{K}_k [y_k - H_k \hat{x}_{k/k-1}] \quad \text{Eq.II-32}$$

Avec :

$$\mathcal{K}_k = [P_k H_k^T + C_k^p N_k^T] y_k^{-1} \quad \text{Eq.II-33}$$

$$P_k = P_{k/k-1} - \mathcal{K}_k [H_k P_{k/k-1} + N_k C_{k/k-1}^p] \quad \text{Eq.II-34}$$

$$C_k^u = C_{k/k-1}^u - \mathcal{K}_k H_k C_{k/k-1}^u \quad \text{Eq.II-35}$$

$$C_k^p = C_{k/k-1}^p - \mathcal{K}_k [H_k C_k^p + N_k W_0] \quad \text{Eq.II-36}$$

Les filtres analytiques présents ci-dessus ne sont pas adaptés lorsque la densité conditionnelle est multimodale.

## II.2.5- Stabilité du filtre de KALMAN

L'étude de stabilité de la solution du filtre de KALMAN est fonction de la matrice de covariance  $P_k$  de l'état du système qui doit être symétrique et semi positive définie. Ces caractères sont assurés par factorisation de  $P_k$ . Exemple de factorisation, la technique U-D permet de décomposer la matrice P sous la forme :

$$P=U.D.U^T \quad \text{Eq.II-37}$$

Où U est une matrice triangulaire supérieure dont les éléments diagonaux sont égaux à l'unité et D est une matrice diagonale.

Si la matrice  $P_k$  converge vers une valeur limite  $P_i$  quand  $t \rightarrow \infty$ , c.à.d.:  $\lim_{t \rightarrow \infty} p_k = P_i$ , alors la solution  $P_i$  doit satisfaire l'équation de la matrice de covariance de la mise à jour.

La combinaison des équations de prédiction et de la correction permet d'écrire  $x_{k/k}$  comme suit :

$$\begin{aligned} \hat{x}_{k/k} &= [\phi_k - K_k H_k] \hat{x}_{k-1/k-1} + k_{kz_k} & \text{Eq.II-38} \\ &= \overline{\phi}_k \hat{x}_{k-1/k-1} + k_{kz_k} \end{aligned}$$

D'où une nouvelle matrice de transition correspondante  $\overline{\phi}_k$  telle que :  $\lim_{k \rightarrow \infty} \overline{\phi}_k = F_i$

Et la solution réelle symétrique semi positive définie de P est dite stable si la matrice de transition correspondante  $\overline{\phi}_k$  a des valeurs propres tous inférieures à l'unité.

## II.3-LES DIFFERENTES APPROCHES D'HYBRIDATION

La façon dont le filtre est structuré dans le système de navigation dépend des types de capteurs et des modèles utilisés. Pour les systèmes de navigation inertielle aidée par un capteur extérieur, le composant inertiel peut être une unité inertielle (CI) qui fournit seulement les données brutes (l'accélération et la vitesse angulaire), ou un système de navigation inertiel (INS) fournissant la position, la vitesse et les informations d'attitude. La source d'aide (GPS, etc.) peut être considérée comme un capteur fournissant des informations brutes de capteur (par exemple des pseudo-distances), ou comme un système de navigation fournissant la position, la vitesse et/ou les informations d'attitude. Les états principaux d'intérêt qui sont estimés par le filtre, et par conséquent qui régissent le type de modèle à mettre en application, sont la position, la vitesse et l'attitude du véhicule, ou encore les erreurs de position, de vitesse et d'attitude [7].

Quatre approches d'intégration peuvent être mentionnées.

### II.3.1-Mode non-couplé

Dans le mode non couplé, les systèmes GPS et INS produisent indépendamment les solutions de navigation sans l'influence de l'une sur l'autre (Figure.II.10). Les  $(P V)$  GPS sont la position et la vitesse du GPS, tandis que  $(PVA)$  INS sont la position, vitesse et l'attitude de l'INS,  $(PVA)$  est sont les paramètres estimés des positions, des vitesses et des attitudes. La solution intégrée de navigation est mécanisée par un processus externe d'intégration. Il peut être simplement un « interrupteur », ou alors il peut être aussi complexe qu'un filtre de KALMAN. Un sélecteur est la manière la plus simple de combiner ces deux systèmes ensemble, et la précision de la solution de navigation ne sera pas plus mauvaise que la précision de l'INS. La précision peut être très basse dans le cas d'utilisation des unités inertielles de précision moyenne et basse. Un filtre de KALMAN est alors une bonne solution dans ce cas-ci.

L'avantage de la méthode d'intégration non-couplée est qu'elle est la méthode la plus facile, la plus rapide et la moins chère pour intégrer le GPS et l'INS [7].

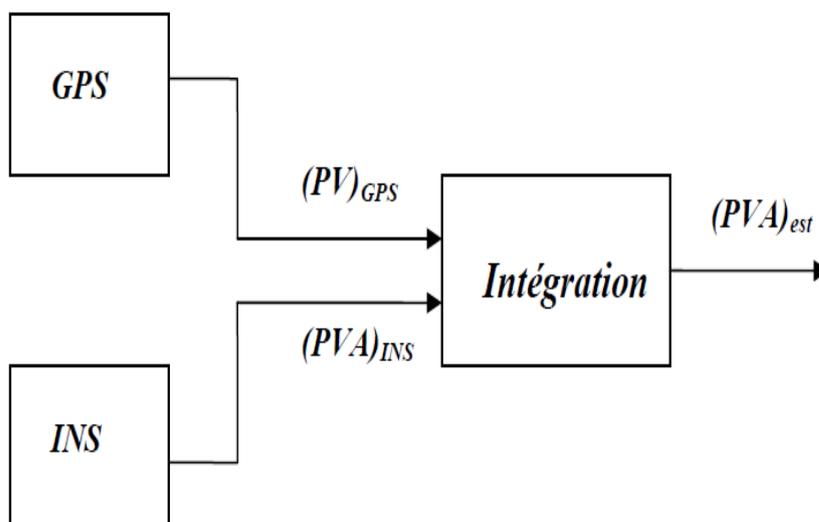


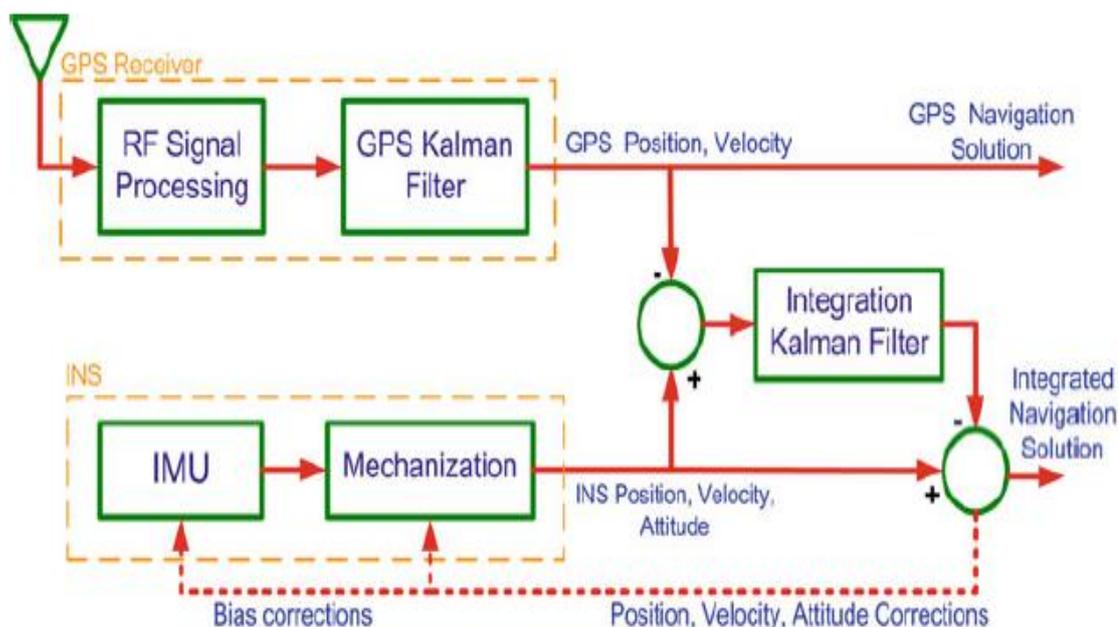
Figure.II.10 : Hybridation en mode non-couplé

### II.3.2-Mode Faiblement « lâchement » Couplé

Dans un système faiblement couplé, le récepteur GPS a son propre filtre de KALMAN qui traite la pseudo-distance (pseudo range) ou les mesures Doppler qui sont utilisées pour calculer des positions et des vitesses. Les positions et les vitesses GPS sont ensuite combinées avec les positions et les vitesses de l'INS pour former les erreurs résiduelles qui sont envoyées au filtre de KALMAN de navigation. Ce filtre corrige l'INS

par asservissement (retour d'état). Ainsi, les effets des biais, des dérives, et des erreurs de non alignement, sont sensiblement diminués.

L'observation qui est fournie au filtre est l'erreur observée de la solution de navigation inertielle, c'est à dire, la différence entre la solution de navigation inertielle et la solution de navigation fournie par la source d'aide (GPS). Puisque l'observation est l'erreur observée de la solution de navigation inertielle et puisque le filtre estime les erreurs dans la solution de navigation inertielle, alors le modèle de processus doit être sous forme de modèle d'erreur des équations standard de navigation inertielle. Ainsi les équations de navigation inertielle sont linéarisées pour former les équations d'erreur, donc la mise en application du filtre prend une forme linéaire. Le filtre s'appelle dans ce cas un filtre complémentaire [7].



**Figure.II.11** : Une approche d'intégration faiblement couplée (boucle ouverte)

Selon l'application, un arrangement faiblement couplé peut être mis en œuvre dans différentes configurations. On trouve la configuration en boucle ouverte (Feedforward = asservissement indirect) et en boucle fermée (Feedback = asservissement direct). Dans le cas de la boucle ouverte, toutes les mesures GPS (position et vitesse préfiltrées) et INS (position et vitesse) sont traitées dans le filtre de KALMAN de navigation. Car il n'y a pas un vrai asservissement (il n'y a aucun), toutes les mesures sont utilisées sans précorrection. L'erreur est soustraite à la sortie. La mise en application de

la boucle ouverte est directe et facile à réaliser. Le problème néanmoins est que les états de la CI divergent. Cependant, il est seulement approprié à l'intégration avec un capteur inertiel de bonne précision et aux applications à court terme. Les unités inertielles de précisions moyenne et basse propagent des erreurs de navigation relativement grandes dans un intervalle fixe de temps comparé à celui d'un système de bonne précision. S'il n'y a aucune boucle d'asservissement pour produire la compensation au niveau du capteur inertiel et de l'équation de mécanisation, les mesures auront des valeurs plus élevées qui abîmeront la prétention linéaire du système. La Figure(Figure.II.11) montre une configuration d'intégration faiblement couplée sans asservissement (une boucle ouverte). Pour une configuration en boucle fermée, l'asservissement est appliqué à partir du filtre d'intégration aux capteurs inertiels et/ou aux équations de mécanisation. Les résultats de l'étape précédente sont utilisés pour réduire au minimum l'erreur. Une configuration en boucle fermée est particulièrement utile quand les précisions des capteurs sont faibles. Puisque les capteurs inertiels de précisions moyenne et basse ont habituellement un changement rapide des propriétés d'erreur, l'estimation et la compensation en temps réel ou proches du temps réel de ces erreurs sont très importantes pour améliorer la précision des solutions de navigation de l'INS. La Figure (Figure.II.12) montre une configuration d'intégration faiblement couplée avec asservissement (boucle fermée).

Les configurations faiblement couplées offrent l'avantage d'être fortement modulaires en précision et en coût. Le concepteur du système peut mettre en application le modèle de son choix avec l'INS désiré dans la structure de navigation préférée (ouverte, fermée). N'importe quel capteur d'aide peut alors être ajouté au système de navigation. Le retour d'état (de l'erreur) vers le système de navigation inertielle réduira les erreurs de l'INS. C'est particulièrement important pour les unités inertielles de précisions moyenne et basse parce que la boucle d'asservissement corrige efficacement les erreurs des capteurs.

L'approche par intégration faiblement couplée a été largement utilisée dans la dernière décennie en raison de sa flexibilité et ses performances élevées [6].

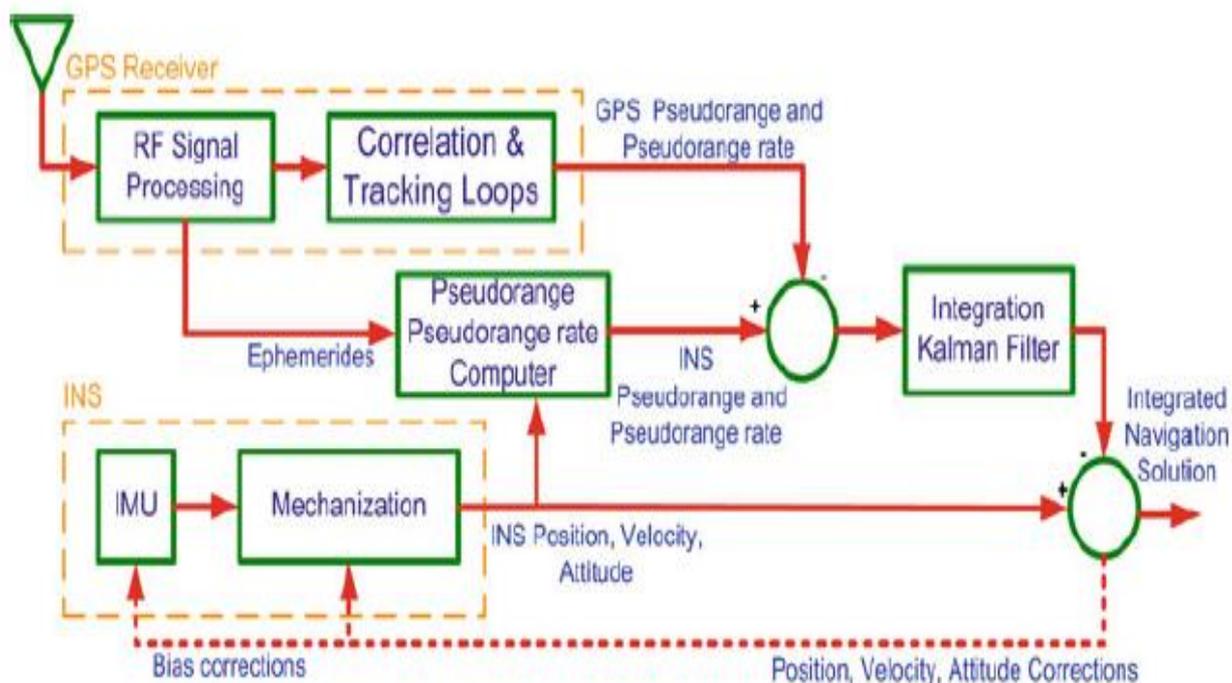


Figure.II.12 : Une approche d'intégration faiblement couplée (boucle fermée)

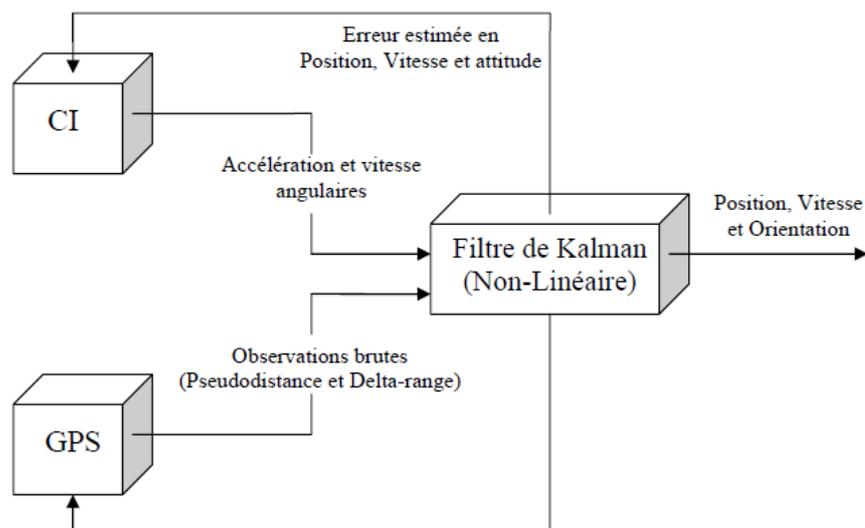
### II.3.3-Système fortement couplé

Dans ce système, les données « pseudo range » et « pseudo rate » des satellites GPS ont été utilisées pour aider le filtre de navigation, ainsi que l'accélération et la vitesse angulaire de la CI. La fusion se fait directement au niveau des données brutes. Il y a un asservissement fourni par le système d'aide externe (GPS). On obtient une configuration plus serrée qui améliore l'intégrité du système.

Dans cette architecture, les filtres de KALMAN séparés pour le récepteur GPS et le processus de navigation sont combinés dans un seul filtre d'intégration. L'état d'erreurs du filtre incluse maintenant l'état d'erreurs INS (position, vitesse, attitude, dérive gyroscopique, biais d'accéléromètres) aussi bien que de nouveaux états représentant le biais et la dérive d'horloge du récepteur GPS. Les composants du vecteur d'état du filtre qui représentent les erreurs d'INS sont utilisées pour calibrer l'INS et pour corriger ses estimations de la position, de la vitesse et de l'attitude du véhicule. Les estimations du biais et de la dérive d'horloge par le filtre sont utilisées pour corriger les mesures GPS.

De même, ses informations peuvent permettre le tracking (pistage) du groupe des satellites intéressants (ceux dont le DOP est le plus bas).

Le modèle du processus peut être sous une forme telle que le vecteur d'état représente les variables physiques elles-mêmes (position, vitesse, attitude, etc.). Dans ce cas, puisque les équations sont non-linéaires, la mise en application du filtre prend une forme non-linéaire.



**Figure.II.13** : Système fortement couplé

L'architecture étroitement couplée utilise plus efficacement les mesures disponibles et l'information à priori pour déterminer et corriger des erreurs de système d'un mode fortement intégrée. Elle peut apporter ainsi une meilleure performance et une plus grande robustesse que le système lâchement couplé, fournissant des estimations de navigation précises pendant des périodes où la dynamique du véhicule est élevée et pendant les périodes de blocage des signaux (*jamming*), et assure une meilleure élasticité face à une géométrie défavorable des satellites, aux pertes de données, et aux erreurs de la CI. Mais il est plus cher à mettre en application et plus difficile à développer. En outre, si un capteur différent est utilisé, les modèles et les algorithmes doivent changer sensiblement.

L'inconvénient principal de cette approche est qu'elle exige que les concepteurs du système aient accès au matériel et aux variables utilisées dans le récepteur GPS pour la mettre en application. Par conséquent cette approche n'est pas à la disposition du grand public [6].

### II.3.4 Système ultra-fortement couplé

Ce type d'intégration, est appelé également l'intégration profonde. Il y a deux différences majeures entre cette architecture et ceux qui sont décrites ci-dessus. Tout d'abord, il y a un changement de base de l'architecture du récepteur GPS pour fournir une autre mise en œuvre des boucles de poursuite. En second lieu, les informations de l'INS sont utilisées en tant que partie intégrante du récepteur GPS ; donc l'INS et le GPS ne sont plus les navigateurs indépendants. Ce schéma nécessite généralement l'accès au matériel GPS interne et il est complexe à mettre en œuvre.

Les avantages de ce système sont la réduction de largeur de bande de suivi de piste et sa résistance au brouillage. Ce type d'intégration peut fonctionner sous un signal plus faible par rapport au bruit et fournit une solution dans les scénarios dans lesquels le nombre de satellites GPS tombe en dessous de quatre. la caractéristique de ce type d'intégration est le chemin de retour de l'estimateur qui fournit les données Doppler et la phase porteuse estimés à la structure de GPS pour permettre à ses boucles à verrouillage de phase (PLL) et les boucles de retard-lock (DLL) de fournir une meilleure précision, la robustesse et l'amélioration globale du système[6].

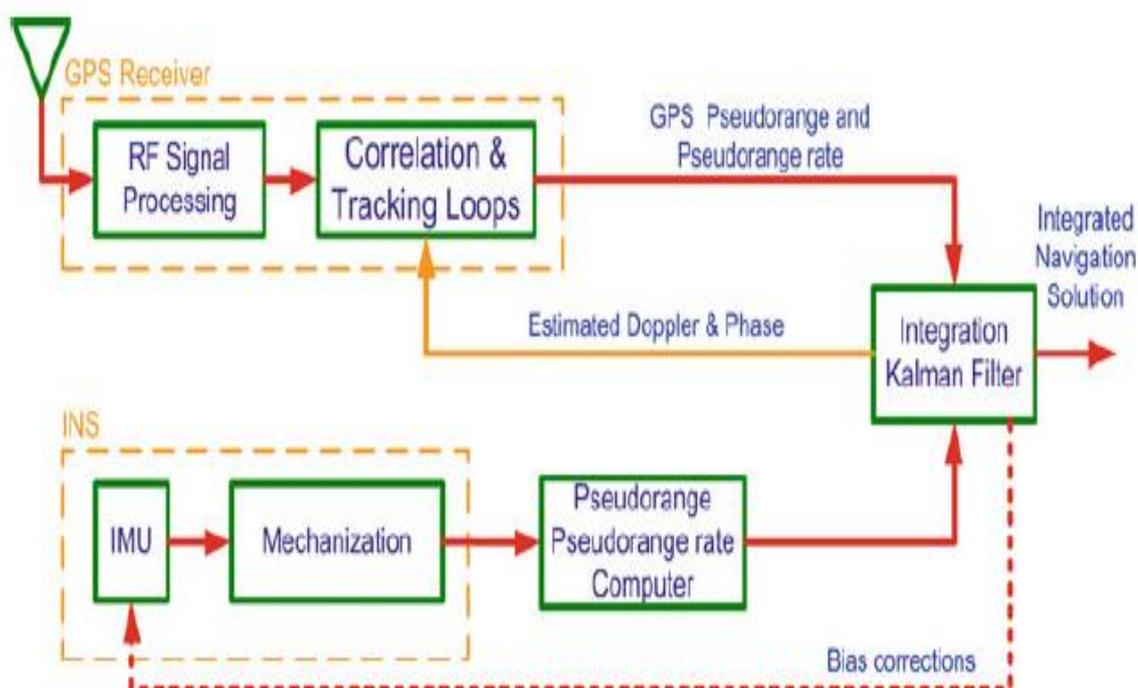


Figure.II.14 : Système ultra-fortement couplé

## II.4-IMPLEMENTATION DU FILTRE EKF POUR LA FUSION INS/GPS

### II.4.1-Equations d'erreurs du système INS

Les équations de mécanisation, discrétisées dans le chapitre précédent, ne fournissent aucune information sur les erreurs du système. En pratique, il est souvent exigé d'estimer les erreurs du système dans l'ordre d'améliorer les performances. Cela est fait en utilisant un filtre de KALMAN. Les erreurs que nous avons besoin de les estimer incluent les erreurs de la position  $\delta r$ , de la vitesse  $\delta v$ , de l'attitude  $\delta \gamma$  et des capteurs inertiels. Leur fonctionnement peut être modélisé en appliquant les techniques de perturbation au système d'équations (Eq.I.6) [6].

Les perturbations de la position, de la vitesse, de l'attitude sont données comme suit :

$$\hat{r}^{LLa} = r^{LLa} + \delta r^{LLa} \quad \text{Eq.II-39}$$

$$\hat{v}^n = v^n + \delta v^n \quad \text{Eq.II-40}$$

$$\hat{C}_b^n = (I_3 - E^n)C_b^n \quad \text{Eq.II-41}$$

#### II.4.1.1-MODELE DYNAMIQUE DE L'ERREUR EN POSITION

L'équation dynamique de la position (Eq.I.7) est une fonction de la position et de la vitesse. Par différentiation, l'équation dynamique de l'erreur en position peut être obtenue comme suit [6] :

$$\delta \dot{r}^{Ua} = F_{rr} \delta r^{Ua} + F_{rv} \delta v^n \quad \text{Eq.II-42}$$

Avec :

$$F_{rr} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \phi}{\partial \varphi} & \frac{\partial \phi}{\partial \lambda} & \frac{\partial \phi}{\partial \eta} \\ \frac{\partial \lambda}{\partial \varphi} & \frac{\partial \lambda}{\partial \lambda} & \frac{\partial \lambda}{\partial \eta} \\ \frac{\partial \eta'}{\partial \varphi} & \frac{\partial \eta'}{\partial \lambda} & \frac{\partial \eta'}{\partial \eta} \end{bmatrix}; F_{rv} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \phi'}{\partial v_N} & \frac{\partial \phi'}{\partial v_E} & \frac{\partial \phi'}{\partial v_D} \\ \frac{\partial \lambda'}{\partial v_N} & \frac{\partial \lambda'}{\partial v_E} & \frac{\partial \lambda'}{\partial v_D} \\ \frac{\partial \eta'}{\partial v_N} & \frac{\partial \eta'}{\partial v_E} & \frac{\partial \eta'}{\partial v_D} \end{bmatrix}$$

#### II.4.1.2-MODELE DYNAMIQUE DE L'ERREUR EN VITESSE

De L'équation (Eq.I.14), le résultat de perturbation est donné par [6] :

$$\delta \dot{v}^n = F_{vr} \delta r^{lla} + F_{vv} \delta v^n + (f^n X) \varepsilon^n + R_b^n \delta f^b \quad \text{Eq.II-43}$$

Où :

$$F_{vr} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \dot{u}_N}{\partial \varphi} & \frac{\partial \dot{u}_N}{\partial \lambda} & \frac{\partial \dot{u}_N}{\partial \dot{h}} \\ \frac{\partial \dot{u}_E}{\partial \varphi} & \frac{\partial \dot{u}_E}{\partial \lambda} & \frac{\partial \dot{u}_E}{\partial \dot{h}} \\ \frac{\partial \dot{u}_D}{\partial \varphi} & \frac{\partial \dot{u}_D}{\partial \lambda} & \frac{\partial \dot{u}_D}{\partial \dot{h}} \end{bmatrix}; F_{vv} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \dot{v}_N}{\partial v_N} & \frac{\partial \dot{v}_N}{\partial v_E} & \frac{\partial \dot{v}_N}{\partial v_D} \\ \frac{\partial \dot{v}_E}{\partial v_N} & \frac{\partial \dot{v}_E}{\partial v_E} & \frac{\partial \dot{v}_E}{\partial v_D} \\ \frac{\partial \dot{v}_D}{\partial v_N} & \frac{\partial \dot{v}_D}{\partial v_E} & \frac{\partial \dot{v}_D}{\partial v_D} \end{bmatrix}$$

### II.4.1.3-MODELE DYNAMIQUE DES ERREURS SUR L'ORIENTATION

L'équation dynamique d'erreur sur l'orientation s'exprime comme suit [6] :

$$\delta \dot{\rho}^n = F_{pr} \delta r^{LLa} + F_{pv} \delta v^n - (\omega_{in}^n \times) \delta \rho^n - C_b^n \delta \omega_{ib}^b \quad \text{Eq.II-44}$$

Où  $\delta \omega_{ib}^b$  sont les erreurs résiduelles des gyroscopes,  $(\omega_{in}^n \times)$  est la forme antisymétrique de  $\omega_{in}^n$  :

$$(\omega_{in}^n \times) = \begin{bmatrix} 0 & -\omega_D & \omega_E \\ \omega_D & 0 & -\omega_N \\ -\omega_E & \omega_N & 0 \end{bmatrix}; F_{pr} = \begin{bmatrix} \frac{\delta \dot{\rho}_N}{\delta \varphi} & \frac{\delta \dot{\rho}_N}{\delta \lambda} & \frac{\delta \dot{\rho}_N}{\delta h} \\ \frac{\delta \dot{\rho}_E}{\delta \varphi} & \frac{\delta \dot{\rho}_E}{\delta \lambda} & \frac{\delta \dot{\rho}_E}{\delta h} \\ \frac{\delta \dot{\rho}_D}{\delta \varphi} & \frac{\delta \dot{\rho}_D}{\delta \lambda} & \frac{\delta \dot{\rho}_D}{\delta h} \end{bmatrix}; F_{pv} = \begin{bmatrix} \frac{\delta \dot{\rho}_N}{\delta v_N} & \frac{\delta \dot{\rho}_N}{\delta v_E} & \frac{\delta \dot{\rho}_N}{\delta v_D} \\ \frac{\delta \dot{\rho}_E}{\delta v_N} & \frac{\delta \dot{\rho}_E}{\delta v_E} & \frac{\delta \dot{\rho}_E}{\delta v_D} \\ \frac{\delta \dot{\rho}_D}{\delta v_N} & \frac{\delta \dot{\rho}_D}{\delta v_E} & \frac{\delta \dot{\rho}_D}{\delta v_D} \end{bmatrix}$$

### II.4.1.4-MODELE DYNAMIQUE DES ERREURS DES CAPTEURS INERTIELS

Des incertitudes larges existent toujours à la sortie des capteurs inertiels de mauvaise qualité (cout bas). La bonne manière de traiter ces incertitudes est de déterminer les erreurs des capteurs pendant les calibrations. Cependant, puisque la calibration croit significativement le coût de fabrication, les capteurs inertiels coûts bas sont rarement calibrés par les fabricants. Même après calibration, il existe toujours des variations aléatoires d'erreur dans le temps, avec :

$$\hat{f}_{ib}^b = f_{ib}^b + \delta f_{ib}^b \quad \text{Eq.II-45}$$

$$\hat{\omega}_{ib}^b = \omega_{ib}^b + \delta \omega_{ib}^b \quad \text{Eq.II-46}$$

Pour ce but, les erreurs inertielles ont besoin d'être modélisées dans le vecteur d'état du filtre de navigation en addition aux erreurs de position, vitesse et d'attitude.

Pour le cas du biais  $b$ , du facteur d'échelle  $s$ , et de non-orthogonalité  $\gamma$ , es équations d'erreurs d'accéléromètres  $\delta f_{ib}^b$  et de gyroscopes  $\delta \omega_{ib}^b$  s'écrivent respectivement comme suit:

$$\delta f_{ib}^b = b_a + \text{diag}(f_{ib}^b) s_a + \Gamma_a \cdot \gamma_a \quad \text{Eq.II-47}$$

$$\delta \omega_{ib}^b = b_g + \text{diag}(\omega_{ib}^b) s_g + \Gamma_g \cdot \gamma_g \quad \text{Eq.II-48}$$

Les indices  $a$  et  $g$  désignent les erreurs correspondant aux accéléromètres et aux gyroscopes respectivement,  $f_{ib}^i = [f_x f_y f_z]^T$ ,  $\omega_{ib}^b = [\omega_x \omega_y \omega_z]^T$

Les vecteurs de non-orthogonalité  $\gamma_a$  et  $\gamma_g$  sont:

$$\gamma_a = [\gamma_{a,xy}, \gamma_{a,xz}, \gamma_{a,yx}, \gamma_{a,yz}, \gamma_{a,zx}, \gamma_{a,zy}]^T; \text{ et } \gamma_g = [\gamma_{g,xy}, \gamma_{g,xz}, \gamma_{g,yx}, \gamma_{g,yz}, \gamma_{g,zx}, \gamma_{g,zy}]^T$$

$\Gamma_a$  et  $\Gamma_g$  sont deux matrices définies par :

$$\Gamma_a = \begin{bmatrix} f_y & f_z & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & f_x & f_z & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & f_x & f_y \end{bmatrix}; \quad \Gamma_g = \begin{bmatrix} \omega_y & \omega_z & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \omega_x & \omega_z & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \omega_x & \omega_y \end{bmatrix}$$

L'évolution des erreurs des capteurs peut être exprimée par les équations dynamiques ci-dessous:

$$\dot{b}_a = \text{diag}(c_{ab}) \cdot b_a + w_{ab} \quad \text{Eq.II-49a}$$

$$\dot{b}_g = \text{diag}(c_{gb}) \cdot b_g + w_{gb} \quad \text{Eq.II-49b}$$

$$\dot{s}_a = \text{diag}(c_{as}) \cdot s_a + w_{as} \quad \text{Eq.II-49c}$$

$$\dot{s}_g = \text{diag}(c_{gs}) \cdot s_g + w_{gs} \quad \text{Eq.II-49d}$$

$$\dot{\gamma}_a = \text{diag}(c_{a\gamma}) \cdot \gamma_a + w_{a\gamma} \quad \text{Eq.II-49e}$$

$$\dot{\gamma}_g = \text{diag}(c_{g\gamma}) \cdot \gamma_g + w_{g\gamma} \quad \text{Eq.II-49f}$$

$c_{ab}, c_{gb}, c_{ac}, c_{gs}, c_{a\gamma}$  et  $c_{g\gamma}$  sont les paramètres des processus stochastiques en temps continu (Radom walk, Radom constant, processus de Gauss-Markov du premier ordre,.....)

Le bruit de mesure est un bruit de haute fréquence et qui peut être modélisé comme un bruit blanc. Les biais et les erreurs dues à la dérive sont parfois modélisés comme un processus de Gauss-Markov du premier ordre. Le modèle est d'écrit par l'équation ci-dessous où  $1/\beta$  est le temps de corrélation de la variable aléatoire  $\delta a$  et  $w$  est un bruit blanc gaussien :

$$\delta \dot{a} = -\beta \delta a + w \quad \text{Eq.II-50}$$

## II.4.2-Modèle dynamique du filtre en temps continu et en temps discret

En tenant compte du bruit dynamique du système, le modèle d'erreur peut s'écrire en temps continu sous la forme matricielle suivante :

$$\delta\dot{x} = F\delta x + Gw \quad \text{Eq.II-51}$$

Où :

$\delta x = [\delta r \ \delta v \ \delta \rho \ \delta f_{ib}^b \ \delta \omega_{ib}^b]$  est le vecteur d'état qui regroupe les erreurs de position, de vitesse, d'attitude, des accéléromètres et des gyroscopes.

F est la matrice dynamique du système, G est la matrice de commande, et  $w = [w_v w_\rho w_a w_g]^T$  est le vecteur de bruit du système formé par les bruits de vitesse, d'attitude, des accéléromètres, et des gyroscopes.

Le cas où les biais des accéléromètres et des gyroscopes sont seuls considérés, et en tenant compte des équations (Eq.II-42), (Eq.II-43), (Eq.II-44), (Eq.II-49a) et (Eq.II-49b), les matrices (F, G) et le vecteur  $w$  s'expriment comme suit :

$$F = \begin{bmatrix} F_{rr} & F_{rv} & 0_3 & 0_3 & 0_3 \\ F_{vr} & F_{vv} & (f^n \times) & C_b^n & 0_3 \\ F_{\rho r} & F_{\rho v} & (-\omega_{in}^n \times) & 0_3 & -C_b^n \\ 0_3 & 0_3 & 0_3 & \text{diag}(C_{ab}) & 0_3 \\ 0_3 & 0_3 & 0_3 & 0_3 & \text{diag}(C_{gb}) \end{bmatrix}; \quad G = \begin{bmatrix} 0_3 & 0_3 & 0_3 & 0_3 \\ C_b^n & 0_3 & 0_3 & 0_3 \\ 0_3 & C_b^n & 0_3 & 0_3 \\ 0_3 & 0_3 & I_3 & 0_3 \\ 0_3 & 0_3 & 0_3 & I_3 \end{bmatrix};$$

$$w = [w_v w_\rho w_{ab} w_{gb}]^T$$

Puisque les systèmes inertiels de type strapdown sont habituellement mis en application avec une fréquence d'échantillonnage élevée, l'équation (Eq.II-51) peut être ramenée à sa forme discrète :

$$\delta\hat{x}_{k+1/k} = \Phi_k \cdot \delta\hat{x}_{k/k} + w_k \quad \text{Eq.II-52}$$

$\Phi_K$  est la matrice de transition donnée par :

$$\Phi_k = \exp(F\Delta t) \approx I + F\Delta t + \frac{1}{2}F^2\Delta t^2 + \dots \quad \text{Eq.II-53}$$

Par approximation, nous pouvons écrire  $\Phi_K$  comme suit :

$$\Phi_k \approx I + F\Delta t \quad \text{Eq.II-54}$$

$w_k$  est un processus aléatoire d'une distribution gaussienne de matrice de covariances donnée sous la forme intégrale suivante :

$$\begin{aligned}
 Q_k &= E[w_k w_k^T] \\
 &= E \left\{ \left[ \int_{t_k}^{t_{k+1}} \Phi(t_{k+1}, \xi) G(\xi) u(\xi) d\xi \right] \left[ \int_{t_k}^{t_{k+1}} \Phi(t_{k+1}, \eta) G(\eta) u(\eta) d\eta \right]^T \right\} \\
 &= \int_{t_k}^{t_{k+1}} \int_{t_k}^{t_{k+1}} \Phi(t_{k+1}, \xi) G(\xi) E[u(\xi) u^T(\eta)] G^T(\eta) \Phi^T(t_{k+1}, \eta) d\xi d\eta \quad \text{Eq.II-55}
 \end{aligned}$$

Et qui peut être approximée, si les différentes entrées de type bruit blanc ne sont pas corrélées et si les intervalles de temps d'intégration sont petits :

$$Q_k \approx G Q G \Delta t \quad \text{Eq.II-56}$$

Avec Q la matrice diagonale de densité spectrale.

### II.4.3-Modèle d'observation du GPS

L'observation utilisée pour recaler l'INS est les estimations de la latitude, de la longitude, de l'altitude et de la vitesse calculées par GPS. Il s'agit d'une configuration lâchement couplée. L'équation d'observation du système s'écrit :

$$\delta z_k = H_k \delta x_k + v_k \text{Eq.} \quad \text{II-57}$$

Le vecteur de mesure est la différence entre les données GPS (position et vitesse) et la solution inertielle résultant de l'étape de prédiction.

$$\delta z_{k+1} = (z_{k+1})_{GPS} - h(x_{k+1/k}^{nom}) = \begin{pmatrix} r_{INS}^{LLa} & r_{GPS}^{LLa} \\ r_{INS}^n & r_{INS}^n \end{pmatrix}_{k+1} = \begin{pmatrix} \varphi_{INS} - \varphi_{GPS} \\ \lambda_{INS} - \lambda_{GPS} \\ h_{INS} - h_{GPS} \\ v_{INS}^n - v_{GPS}^n \end{pmatrix}_{k+1} \quad \text{Eq.II-58}$$

La matrice d'observation  $H_k$  est :

$$H_k = \begin{pmatrix} I_{3 \times 3} & 0_{3 \times 3} & 0_{3 \times 3} & 0_{3 \times 3} & 0_{3 \times 3} \\ 0_{3 \times 3} & I_{3 \times 3} & 0_{3 \times 3} & 0_{3 \times 3} & 0_{3 \times 3} \end{pmatrix} \quad \text{Eq.II-59}$$

La matrice de covariances sur les bruits de mesure  $R_k$  sera alors :

$$R_k = \text{diag}(\sigma_\varphi^2 \quad \sigma_\lambda^2 \quad \sigma_h^2 \quad \sigma_{vn}^2 \quad \sigma_{ve}^2 \quad \sigma_{vd}^2) \quad \text{Eq.II-60}$$

#### II.4.4-Effet de lever arm

Puisque les deux capteurs (GPS et CI) ne peuvent pas être installés au même endroit dans le véhicule, la position et la vitesse de la CI sont différentes de celles du GPS. Ceci s'appelle le (*lever-arm correction*). Les corrections de la position et de la vitesse peuvent être écrites comme:

$$r_{IMU}^{LLa} = r_{GPS}^{LLa} - DR_b^n \Delta r^b \quad \text{Eq.II-61}$$

$$v_{IMU}^n = v_{GPS}^n - R_b^n \omega_{nb}^b \Delta r^b \quad \text{Eq.II-62}$$

$D$  est la matrice de transformation du repère  $n$  dans le système LLA (Longitude, Latitude, Altitude).

#### II.4.5-La Synchronisation

Pour effectuer une intégration correcte, il est nécessaire de déterminer à quel moment ont été effectuées les mesures. L'information temporelle des différents capteurs doit être relative à une même échelle de temps. La solution pour synchroniser les mesures GPS et INS est d'acquérir les mesures selon une même échelle de temps. L'échelle choisie est celle du GPS [7].

Il reste une différence de temps entre les mesures GPS et de la CI. Ainsi, la position de la CI et la vitesse absolue peuvent être interpolées en utilisant les données avant et après l'arrivée de la mesure GPS. Supposons que des mesures de CI sont faites à l'instant  $t_{k-1}$  et à l'instant  $t_k$ , et que la mesure GPS est faite à l'instant  $t_{GPS}$ , on peut appliquer une extrapolation linéaire pour obtenir la position et la vitesse de la CI au temps exact de la mesure GPS :

$$\begin{aligned} r^{LLa}(t_{GPS}) &= r^{LLa}(t_{k-1}) + \frac{r^{LLa}(t_k) - r^{LLa}(t_{k-1})}{t_k - t_{k-1}} (t_{GPS} - t_{k-1}) \\ &= \frac{(t_k - t_{GPS})}{(t_k - t_{k-1})} r^{LLa}(t_{k-1}) + \frac{(t_{GPS} - t_{k-1})}{(t_k - t_{k-1})} r^{LLa}(t_k) \end{aligned} \quad \text{Eq.II-63}$$

$$v^n(t_{GPS}) = \frac{(t_k - t_{GPS})}{(t_k - t_{k-1})} v^n(t_{k-1}) + \frac{(t_{GPS} - t_{k-1})}{(t_k - t_{k-1})} v^n(t_k) \quad \text{Eq.II-64}$$

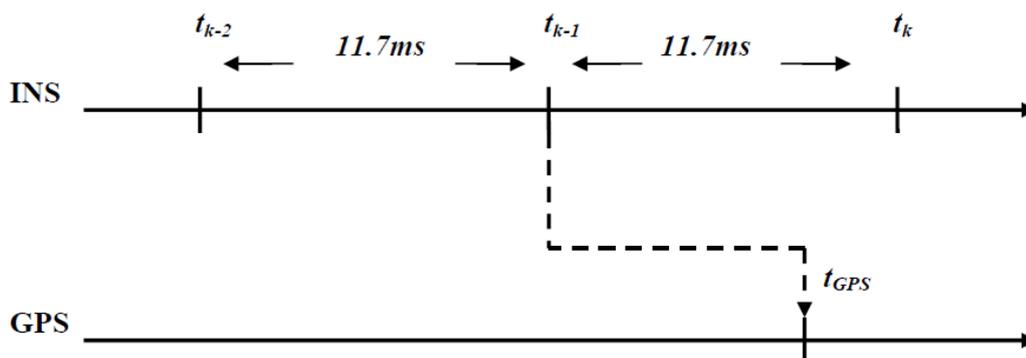


Figure.II.15 : Extrapolation des données inertielles

### II.4.6-Détection des trajets multiples

La seule information fournie par le monde extérieur est l'observation, et par conséquent la seule forme de mesure pour déterminer le comportement du filtre est la différence entre l'observation et l'observation prédite, c'est-à-dire, l'innovation :

$$s_k = z_k - H_k x_k(-) \quad \text{Eq.II-65}$$

Avec la matrice de covariance P :

$$S_k = H_k P_k(-) H_k^T + R_k \quad \text{Eq.II-66}$$

L'innovation est blanche et a une distribution gaussienne centrée, de covariance  $S_k$ , si le filtre fonctionne correctement. Pour déterminer si c'est le cas, l'innovation est normalisée par la fonction :

$$\gamma = s_k^T S_k^{-1} s_k \quad \text{Eq.II-67}$$

L'équation ci-dessus peut être utilisée comme fonction de déclenchement (gating function). Quand une observation est obtenue, l'équation est appliquée, et si la valeur de cette équation est inférieure à un seuil prédéfini, alors l'observation est acceptée. Ceci offre le moyen de détecter tous les défauts dans l'observation.

### II.4.7-Réglage des paramètres du filtre

L'utilisation du filtre de KALMAN suppose que les matrices de covariances des bruits de modèle et de mesure sont connues. Cette dernière hypothèse impose d'évaluer correctement la variance des différents bruits affectant le système. Ces réglages sont détaillés ci-dessous.

Comme nous l'avons mentionné, il y a deux étapes dans le filtre, l'étape de prédiction où les erreurs inertielles prédites sont toujours initialisées à zéro et où l'incertitude augmente

avec le temps, et l'étape de correction où les estimations des erreurs inertielles sont obtenues par des observations et l'incertitude est limitée. Si aucune observation n'est obtenue pendant une longue période de temps, ou d'une manière équivalente si les mesures GPS sont rejetées à cause des erreurs, le filtre tournera dans un cycle sans interruption en mode de prédiction et aucune correction ne sera faite. Plus la durée sans correction est longue, plus l'incertitude dans la solution de navigation inertielle est grande. Quand une observation se produit, elle peut passer le test de la fonction de déclenchement malgré qu'elle soit erronée car l'incertitude dans la solution inertielle est importante. Le réglage des paramètres du filtre de KALMAN consiste principalement à choisir des valeurs pour les matrices de covariances de processus  $Q_k$  et d'observation  $R_k$ . Par exemple, un grand  $Q_k$  impliquera un système inertiel imprécis.

Pendant l'étape de prédiction, l'incertitude dans les données inertielles augmentera selon l'importance de  $Q_k$ . Quand une mesure du GPS se produit, il y a une plus grande possibilité que l'unité inertielle soit corrigée en utilisant la première mesure disponible, indépendamment de la précision de cette mesure. De même, les petites valeurs dans  $R_k$  impliqueront des mesures précises du GPS qui peuvent poser un problème quand la mesure est erronée et puis fusionnée avec des capteurs inertiels de basse précision. De ce fait, le réglage devient un ajustement sensible et délicat des matrices  $Q_k$  et  $R_k$  avec l'emploi de la fonction de déclenchement (Eq.II-67), afin de rejeter les défauts du GPS à haute fréquence.

Les erreurs de positionnement du GPS sont relativement connues du fabricant ou par l'expérimentation. Les variances le long de la diagonale de  $R_k$  sont déterminées simplement en obtenant les valeurs de PDOP ou GDOP à partir du récepteur GPS et en supposant qu'il n'y a aucune corrélation entre les observations sur les axes de navigation. C'est à dire que la variance finale est fonction de la PDOP:

$$R_k = \frac{PDOP^2 * UERE^2}{3} I$$

Où UERE (*User Equivalent Range Error*) désigne une variance fixée par défaut. Le carré donne plus de poids au PDOP. Le facteur 3 a été la plus appropriée expérimentalement. La détermination des valeurs pour  $Q_k$  est plus difficile parce qu'elle a besoin de beaucoup de tests et d'apprentissages (trial-and-errors). Mais, elle dépend principalement des niveaux de bruit des capteurs inertiels utilisés qui peuvent être obtenus à partir du fabricant ou par l'expérimentation [7].

Les méthodes de calcul adaptatives peuvent être appliquées pour aider au réglage de  $Q_k$ .

## II.5-INCONVENIENTS DU FILTRE EKF

Le filtre de KALMAN étendu est probablement le filtre le plus largement répandu pour un système non linéaire. Cependant, il présente certains inconvénients et défauts :

1. Une opération centrale et essentielle effectuée dans l'EKF est la propagation d'une variable aléatoire gaussienne (GRV) par la dynamique du système. Dans l'EKF, la distribution d'état est approximée par un GRV qui est alors propagé analytiquement par une linéarisation du premier ordre du système non linéaire. Les termes négligés dans la linéarisation peuvent être relativement grands ce qui peut présenter de grandes erreurs dans l'estimation de la moyenne et de la covariance à posteriori du GRV transformé. Ceci peut mener à une performance sub-optimale et parfois à la divergence du filtre.
2. Le coût calculatoire de l'EKF est intensif par rapport au filtrage linéarisé de KALMAN. Puisque la linéarisation est faite autour des estimations obtenues à partir du filtre, nous ne pouvons pas calculer le paramètre de filtre à l'avance, ce qui augmente la charge de calcul en temps réel.
3. La dérivation des matrices Jacobéennes n'est pas triviale dans la plupart des applications et introduisent souvent ensuite des difficultés d'implémentation significatives.

Simon Julier a proposé un nouvel algorithme appelé UKF «Unscented KALMAN Filter» pour s'occuper du système non linéaire qui résout la plupart des problèmes d'EKF. Ainsi, d'autre technique de filtrage est récemment applicable pour l'estimation et de contrôle appelée le filtrage SDRE et qui sera détaillée dans le chapitre suivant.

## CHAPITRE III : LE FILTRE SDRE POUR LA FUSION INS/GPS

### III.1-INTRODUCTION

Le filtre de Kalman se révèle être la solution optimale pour l'estimation des systèmes linéaires avec bruit additif, mais il ne fonctionne pas aussi bien pour les systèmes non linéaires. Au cours des 40 dernières années, le filtre de Kalman étendu (FKE), qui linéarise localement le modèle non linéaire de telle sorte que la théorie du filtre de Kalman peut être appliquée, a été l'outil principal de l'estimation d'état non linéaire. Toutefois, l'EKF est également bien connu pour être difficile à mettre en œuvre, difficile à accorder et instable pour les systèmes fortement non linéaires.

Une autre alternative de l'EKF, l'estimateur de l'équation de Riccati dépendante de l'état (State Dependent Riccati Equation (SDRE)) pour l'estimation des systèmes non linéaires, a été proposée par Cloutier et al.

Depuis les années 1990, la stratégie de State Dependent Riccati Equation (SDRE) a été émergée comme une méthode de conception générale qui fournit un moyen systématique et effectif pour concevoir des contrôleurs, des observateurs et des filtres non linéaires. Cette méthode a surmonté nombreuses difficultés et d'insuffisances des méthodes existantes. Et elle délivre des algorithmes de calcul simple qu'ils ont été très efficaces dans une variété d'applications pratiques, et des applications significatives dans des domaines divers de l'étude tels que missiles, avions, satellites, navires, les véhicules autonomes sous-marins ...

### III.2-PRINCIPE ET DEVELOPPEMENT

La méthode de SDRE fournit un simple et efficace algorithme informatique pour résoudre les problèmes non linéaires difficiles. Le principe de la méthode est la paramétrisation d'état. Il permet à la dynamique non linéaire exprimée par des équations d'être paramétré en produit d'une fonction matrice-évaluée et de vecteur d'état tout en préservant les non-linéarités du système original. En fin de compte, une structure dite linéaire est obtenu sous la forme de l'espace d'état. Les coefficients sont état-dépendants et non-unique. La méthode de contrôle a été avec succès appliquée dans un grand choix

d'applications pratiques à travers une variété de disciplines. Spécifiquement, Mracek et Cloutier ont appliqué la méthode SDRE au pilote automatique longitudinal de missile. Cimen a proposé une méthode approximative SDRE de cheminement non linéaire qui a été employée pour concevoir le pilote automatique d'un pétrolier géant. Gao a appliqué la méthode de contrôle de SDRE dans un problème de cheminement de rentrée pour un réutilisable lanceur (RLV). Bogdanov a testé en vol le contrôleur de SDRE à bord d'un petit hélicoptère téléguidé. Les essais en vol étaient procédés pour évaluer l'exactitude du cheminement sous le Contrôle SDRE. Ces travaux démontrent que la méthode de contrôle de SDRE est une méthode de contrôle non linéaire capable ayant le grand potentiel dans les réalisations pratiques.

L'algorithme consiste donc à résoudre, à un moment donné dans l'espace d'état, l'équation algébrique de Riccati dépendante de l'état (SDRE) dont la solution qui stabilise le système durant l'évolution conduit à la conception de la loi de commande non linéaire de SDRE. Comme la technique SDRE ne dépend que de l'état actuel, le calcul peut être effectué en ligne, auquel cas SDRE est définie le long de la trajectoire de l'Etat [9].

### III.3-CONCEPT DE BASE

Dans de nombreuses applications, la conception des observateurs et des algorithmes de contrôle nécessite un traitement avec des processus non linéaire.

Un certain nombre de méthodes ont été développées pour le traitement de ces procédés. La méthode équation de Riccati (SDRE) dépendant de l'état, développé au cours des dernières années, est une de ces méthodes. La méthode n'est pas encore totalement rigoureuse, mais il a été démontré empiriquement dans un certain nombre d'applications. En outre, les tentatives pour trouver des exemples dans lesquels la méthode échoue ont généralement échoué.

L'algorithme de la méthode de SDRE est discrétisé ci-dessous.

#### III.3.1-Application en temps continu

La méthode est basée sur «la linéarisation étendue» de la dynamique du processus.

La dynamique en absence de bruit d'état et de mesure est exprimée par :

$$\dot{x} = A(x)x + B(x)u \quad \text{Eq.III.1}$$

Les observations sont données par :

$$y = H(x)x \quad \text{Eq.III.2}$$

Les matrices  $A(x)$ ,  $B(x)$ , et  $H(x)$ , ne sont pas uniques. La Sélection efficace de ces matrices est basée sur le «problème de paramétrage" qui peut affecter la performance de l'observateur ou du système de contrôle.

L'idée de base de la méthode est de concevoir l'observateur SDRE en traitant les matrices comme si elles sont constantes et calculer les paramètres d'un filtre linéaire correspondant.

Dans le cas d'un contrôleur, où tous les composants du vecteur d'état  $x$  sont directement mesurés, la loi de la commande est donc:

$$u = -G(x)x \quad \text{Eq.III.3}$$

Où  $G(x)$  est donnée par :

$$G = R^{-1}B'(x)M(x) \quad \text{Eq.III.4}$$

Avec  $M(x)$  étant la solution de l'équation Eq.III.5 «State Dependent Algebraic Riccati Equation » (SDARE)

$$M(x)A(x) + A'(x)M(x) - M(x)B(x)R^{-1}B'(x)M(x) + Q(x) = 0 \quad \text{Eq.III.5}$$

Les matrices  $Q(x)$  et  $R(x)$  sont les matrices de conception choisies, comme dans le cas d'un système linéaire, pour donner du poids à l'état et au contrôle, respectivement. Parce que le processus n'est pas linéaire, il ne serait pas approprié de les identifier avec l'intégrale d'une forme quadratique que la loi de commande (Eq.III.3) minimise.

Si l'état  $x$  n'est pas mesuré directement, une estimation  $\hat{x}$  est utilisée. L'estimation est obtenue par l'utilisation d'un observateur «étendu». L'état  $x$  estimé est donné par :

$$\dot{\hat{x}} = A(\hat{x})\hat{x} + K(\hat{x})[y - H(\hat{x})\hat{x}] \quad \text{Eq.III.6}$$

Où la matrice de gain d'observateur  $K(\hat{x})$  est donnée par la solution de la SDARE:

$$K(\hat{x}) = P(\hat{x})H'(\hat{x})W^{-1}(\hat{x}) \quad \text{Eq.III.7}$$

Avec

$$P(\hat{x})A'(\hat{x}) + A(\hat{x})P(\hat{x}) - P(\hat{x})H'(\hat{x})W^{-1}(\hat{x})H(\hat{x})P(\hat{x}) + V(\hat{x}) = 0 \quad \text{Eq.III.8}$$

Bien que les résultats empiriques obtenus en utilisant la méthode SDRE ont été tout à fait favorables, déterminer le gain de l'état dépendant des matrices  $G(\hat{x})$  et  $K(\hat{x})$  est un calcul intensif. Cela peut ne pas être un problème majeur dans certaines applications, en particulier avec

la vitesse et la mémoire des ordinateurs qui continuent à augmenter. Mais de nombreuses applications projetées peuvent s'appuyer sur les ordinateurs incrustés qui peuvent avoir la vitesse, mais pas la mémoire nécessaire pour soutenir la solution en ligne.

Un autre problème est que des algorithmes pour la solution SDRE sont par nature itératifs: le nombre d'étapes de calcul ne peut pas être prédit avec précision, et par conséquent, les opérations ne peuvent pas être chronométrées avec précision. Il peut y avoir une certaine réticence de la part des ingénieurs système à employer un tel algorithme en temps réel lorsque la convergence dans un délai imparti n'est pas garantie [10].

### III.3.2-Application en temps discret

On modélise le système en utilisant un temps discret par une représentation non linéaire de l'état du système dans l'espace. Le système est supposé être dérangé par le bruit gaussien de processus,  $w_k$ , et le bruit de mesure,  $v_k$ , de matrices de covariance  $Q$  et  $R$  respectivement [11].

$$x_{k+1} = f(x_k, u_k) + \Gamma w_k \quad \text{Eq.III.9}$$

$$z_k = h(x_k) + v_k \quad \text{Eq.III.10}$$

La matrice  $\Gamma$  est une matrice de pondération du bruit de processus. Pour transformer ce système en forme State Dependent coefficient SDC (coefficient dépendants de l'état) nous effectuons la factorisation suivante des équations d'état et d'observation:

$$f(x_k, u_k) = A(x_k, u_k)x_k \quad \text{Eq.III.11}$$

$$h(x_k) = H(x_k)x_k \quad \text{Eq.III.12}$$

Le modèle INS est facilement converti en forme de la SDC au moyen de quelques transformations mathématiques. Ceci rend l'application du filtre non-linéaire SDRE pratique. La forme utilisée dans les équations du filtre est la suivante:

$$\hat{x}_{k+1} = F(\hat{x}_k, u_k)\hat{x}_k + K_f(\hat{x}_k)(z_k - H(\hat{x}_k)\hat{x}_k) \quad \text{Eq.III.13}$$

Où  $K_f(\hat{x}_k)$  est le gain donné par :

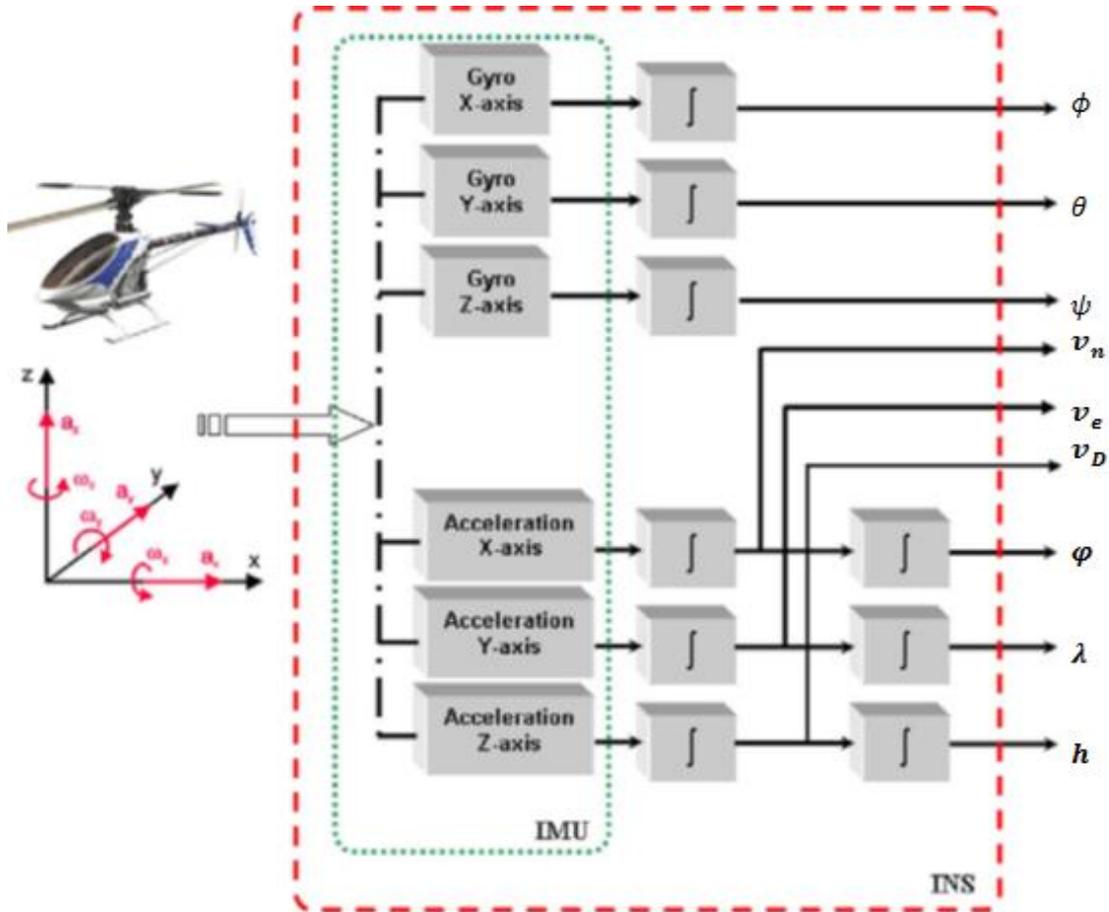
$$K_f(\hat{x}_k) = P_k H^T(\hat{x}_k) R^{-1} \quad \text{Eq.III.14}$$

Et  $P_k$  est la solution définie positive de l'équation de Riccati suivante :

$$F(\hat{x}_k, u_k)P_k + P_k F^T(\hat{x}_k, u_k) - P_k H^T(\hat{x}_k) R^{-1} H(\hat{x}_k) P_k + \Gamma Q \Gamma^T = 0 \quad \text{Eq.III.15}$$

### III.4-LE FILTRE SDRE POUR L'HYBRIDATION INS/GPS

La navigation débute à partir du bloc IMU. Comme déjà dit, Ce dernier mesure l'accélération (force spécifique  $f_{ib}^b = [a_x, a_y, a_z]$  et les vitesses angulaires  $\omega_{ib}^b = [p, q, r]$ . Ces mesures sont traitées et envoyées à l'INS pour fournir la position  $r = [\varphi, \lambda, h]$ , la vitesse  $v = (v_n, v_E, v_D)$  et l'attitude  $(\phi, \theta, \psi)$ .



**Figure.III.1.** Schéma bloc représentant la mécanisation

L'INS est représenté par le modèle non linéaire suivant :

$$\dot{x}(t) = f(x(t), u(t), t) \quad \text{Eq.III.16}$$

$$y(t) = h(x(t), u(t), t) \quad \text{Eq.III.17}$$

Où

$x(t) = [\varphi, \lambda, h, v_n, v_E, v_D, \phi, \theta, \psi]^T$  est le vecteur d'état, inclue la position, la vitesse et les angles d'Euler.

$u(t) = [p, q, r, a_x, a_y, a_z]^T$  Le vecteur des entrées (force spécifique et vitesse angulaire).

Les équations de navigation nécessitent de mentionner au moins deux repères, le repère mobile et le repère de navigation.

Les équations de mouvement sont obtenues par simple intégration. Et en faisant référence au système dynamique de l'INS donné dans le chapitre I par Eq.I.6 et qui sera réécrit comme suit :

$$\dot{r} = [\dot{\phi} \quad \dot{\lambda} \quad \dot{h}]^T \quad \text{Eq.III.18}$$

Avec :

$$\dot{\phi} = \frac{v_N}{R_M + h} \quad \text{Eq.III.19}$$

$$\dot{\lambda} = \frac{v_E \sec \phi}{R_N + h} \quad \text{Eq.III.20}$$

$$\dot{h} = -v_D \quad \text{Eq.III.21}$$

En supposant que l'IMU est installé au centre de gravité de l'aéronef, les accélérations vraies sont données par :

$$\dot{v} = [\dot{v}_n \quad \dot{v}_e \quad \dot{v}_D]^T \quad \text{Eq.III.22}$$

$$\begin{aligned} \dot{v}_N &= f_{nb_N}^b - v_E(2\Omega + \dot{\lambda}) \sin \phi + v_D \dot{\phi} \\ &= f_{nb_N}^b - 2\Omega v_E \sin \phi + \frac{v_N v_D - v_E^2 \tan \phi}{R_N + h} \end{aligned} \quad \text{Eq.III.23}$$

$$\begin{aligned} \dot{v}_E &= f_{nb_E}^b - v_N(2\Omega + \dot{\lambda}) \sin \phi + v_D(2\Omega + \dot{\lambda}) \cos \phi \\ &= f_{nb_E}^b - 2\Omega(v_N \sin \phi + v_D \cos \phi) + \frac{v_E}{R_N + h}(v_D + v_N \tan \phi) \end{aligned} \quad \text{Eq.III.24}$$

$$\dot{v}_D = f_{nb_D}^b - v_E(2\Omega + \dot{\lambda}) \cos \phi - v_N \dot{\phi} + g = f_{nb_D}^b - 2\Omega v_E \cos \phi - \frac{v_E^2 + v_N^2}{R_M + h} + g \quad \text{Eq.III.25}$$

$$\dot{\rho} = [\dot{\phi} \quad \dot{\theta} \quad \dot{\psi}]^T \quad \text{Eq.III.26}$$

Les vitesses angulaires d'Euler sont calculées par les équations :

$$\dot{\phi} = (\omega_{nb_N}^b \sin \phi + \omega_{nb_D}^b \cos \theta) \tan \theta + \omega_{nb_E}^b \quad \text{Eq.III.27}$$

$$\dot{\theta} = \omega_{nb_N}^b \cos \phi + \omega_{nb_D}^b \sin \phi \quad \text{Eq.III.28}$$

$$\dot{\psi} = (\omega_{nb_N}^b \sin \phi + \omega_{nb_D}^b \cos \phi) \sec \theta \quad \text{Eq.III.29}$$

Les données des équations ci-dessus sont détaillées d'avantage dans l'Annexe C

Alors la matrice  $f(x, u)$  de l'Eq.III.16 est donnée par :

$$f(x, u) = \begin{pmatrix} \frac{v_N}{R_M + h} \\ \frac{v_E \sec \phi}{R_N + h} \\ -v_D \\ f_{nb_N}^b - 2\Omega v_E \sin \phi + \frac{v_N v_D - v_E^2 \tan \phi}{R_N + h} \\ f_{nb_E}^b - 2\Omega(v_N \sin \phi + v_D \cos \phi) + \frac{v_E}{R_N + h}(v_D + v_N \tan \phi) \\ f_{nb_D}^b - 2\Omega v_E \cos \phi - \frac{v_E^2 + v_N^2}{R_M + h} + g \\ (\omega_{nb_N}^b \sin \phi + \omega_{nb_D}^b \cos \theta) \tan \theta + \omega_{nb_E}^b \\ \omega_{nb_N}^b \cos \phi + \omega_{nb_D}^b \sin \phi \\ (\omega_{nb_N}^b \sin \phi + \omega_{nb_D}^b \cos \phi) \sec \theta \end{pmatrix}$$

**Eq.III.30**

Dans le cas de mesures de position et de vitesse GPS, la matrice  $h$  est donnée comme suit :

$$h(x) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

**Eq.III.31**

Comme on peut remarquer, la matrice  $h(x)$  ne nécessite pas une factorisation puisqu'elle ne dépend pas du vecteur d'état  $x$ .

### III.5-CAPACITES DE CONCEPTION SDRE

Nombreuses méthodologies de conception existent pour la synthèse de lois de commande pour des problèmes non linéaires. Chacune de ces techniques à ses conditions, caractéristiques et capacités. Certains sont limités à des systèmes ayant certaines structures, tels que les systèmes en cascade, tandis que d'autres ne sont pas systématiques et nécessitent des mini-conceptions pour être effectuée sur une seule équation à la fois, et d'autres ont encore une applicabilité très limitée en raison des conditions imposées sur le système. La méthode SDRE permet la conception systématique de contrôleurs non linéaires pour une large classe de systèmes non-linéaires, et elle offre de nombreuses fonctionnalités que d'autres méthodes de conception non-linéaires ne les ont pas. Les degrés de liberté supplémentaires de conception qui sont disponibles dans la non unicité du paramétrage SDC de  $A(x)$  peuvent également être utilisés pour améliorer les performances du contrôleur. Ces degrés de liberté ne sont pas disponibles dans les techniques traditionnelles de commande non linéaire. La technique permet également la conception du contrôle non linéaire pour les systèmes qui existent uniquement sous forme de simulation. En outre, la plupart des problèmes de commande pratique implique d'une manière ou d'une autre des fortes contraintes sur la commande. Comme il y a très peu d'approches de conception qui peuvent gérer ces contraintes à priori, au contraire, l'approche SDRE offre la possibilité d'imposer des limites sur la commande, le taux de contrôle ou même de l'accélération de contrôle.

En raison de ces capacités et le caractère systématique de la technique de SDRE, les praticiens de contrôle ont utilisés la méthode dans une variété d'applications réelles [12].

### **III.5-CONCLUSION**

Dans ce chapitre, on a proposé une nouvelle méthode SDRE pouvant être utilisée dans les systèmes de navigation (système hybride INS/GPS dans notre cas). Cette méthode a été proposée comme une alternative du filtre EKF vu les insuffisances présentées par ce dernier et la simplicité et l'efficacité du filtre SDRE.

Dans la partie pratique, une comparaison entre les deux filtres sera établie.

## CHAPITRE IV : RESULTATS ET INTERPRETATIONS

### IV.1-INTRODUCTION

Après avoir détaillé les algorithmes nécessaires pour le positionnement par le système hybride INS/GPS dans les chapitres précédents, nous allons examiner dans ce chapitre les résultats obtenus par le traitement des données INS/GPS (les données sont supposées d'une façon pour être proche des données réelles).

Deux programmes écrits sous Matlab sont réalisés : Le programme par implémentation EKF et le programme d'alignement de la technique SDRE. La mécanisation d'INS est la base de ces deux programmes.

Les différentes erreurs de l'état du système sont analysées et comparées.

### IV.2-GENERATION DES DONNEES BRUTE D'UNE CENTRALE INERTIELLE

#### IV.2.1-La trajectoire de référence

Afin d'assurer que les techniques utilisées dans la mécanisation sont justes, on a supposé une trajectoire circulaire qu'on a appelé trajectoire de référence.

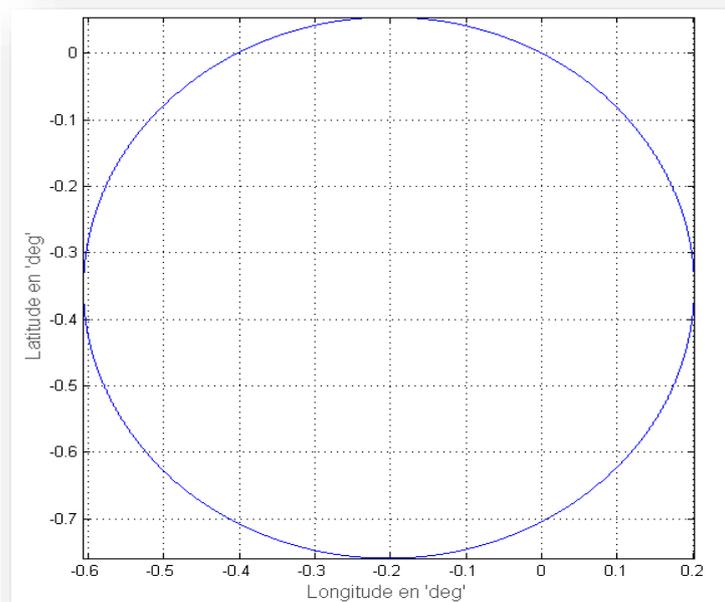


Figure.IV.1 : Trajectoire de référence

### IV.2.2-Génération des données idéales d'une centrale inertielle

A partir de la trajectoire de référence, nous pouvons déduire les données idéales d'une centrale inertielle comme suit :

$$\omega_{ib}^b = \omega_{in}^b + \omega_{nb}^b$$

$$f_{ib}^b = R_n^b(\dot{v}^n + (2\Omega_{ie}^n + \Omega_{en}^n)V^n) + g^n$$

Une fois  $f_{ib}^b$  et  $\omega_{ib}^b$  obtenus on démarre la mécanisation utilisant la méthode du quaternion (expliquée dans le chapitre I) pour l'INS (t=0.01s).

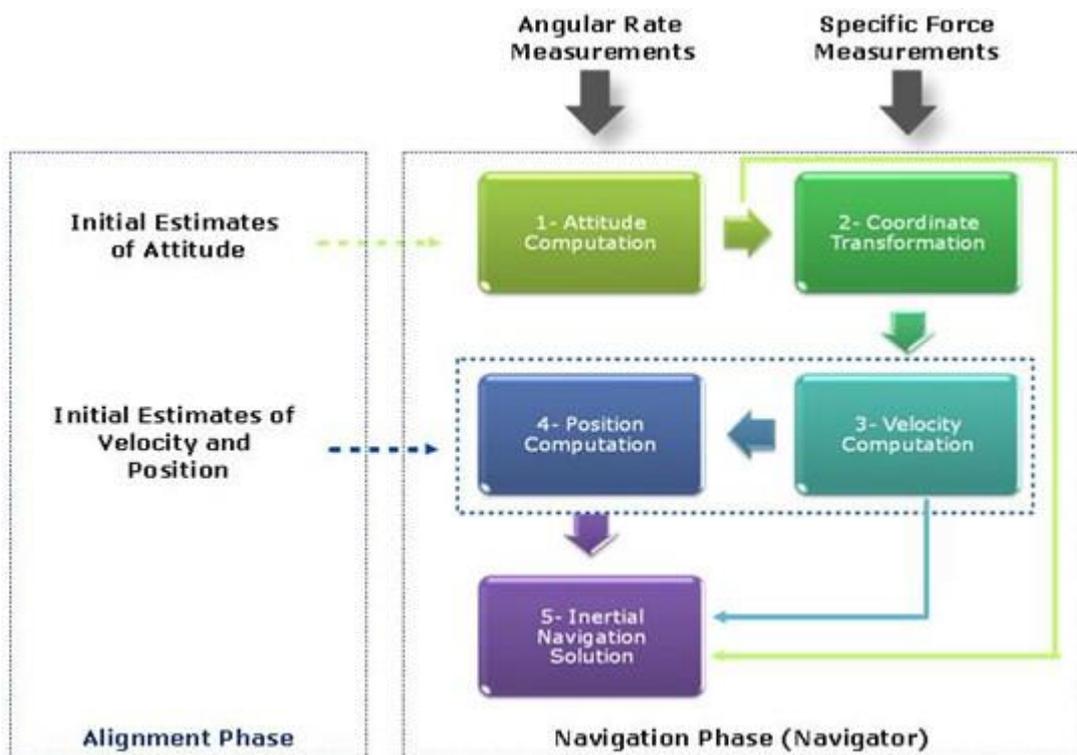


Figure.IV.2 : Schéma synoptique de la mécanisation

A partir de la trajectoire de référence, on a obtenu la trajectoire circulaire du GPS pour un intervalle (t=1s)

### IV.2.3-Les données bruitées d'une centrale inertielle

Les types et la nature des erreurs ont été expliqués et détaillés dans le premier chapitre, dans ce passage, on va injecter ces erreurs (bruit, dérive, erreurs de mesure...) à l'aide de quelques fonctions spécifiques sous Matlab.

### IV.3-RESULTATS DE MECANISATION

a) Sans bruit

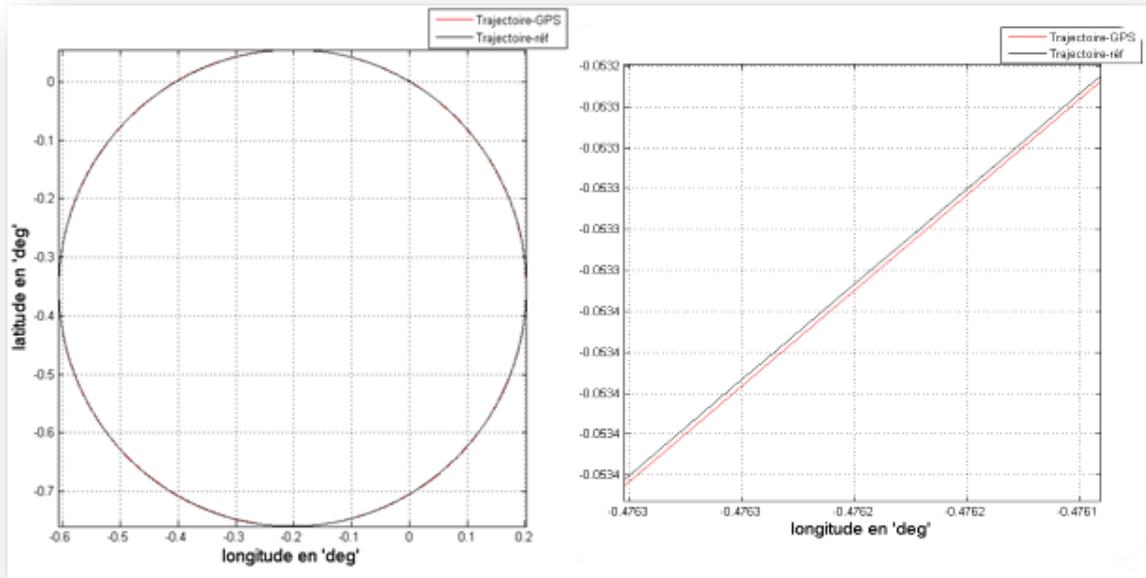
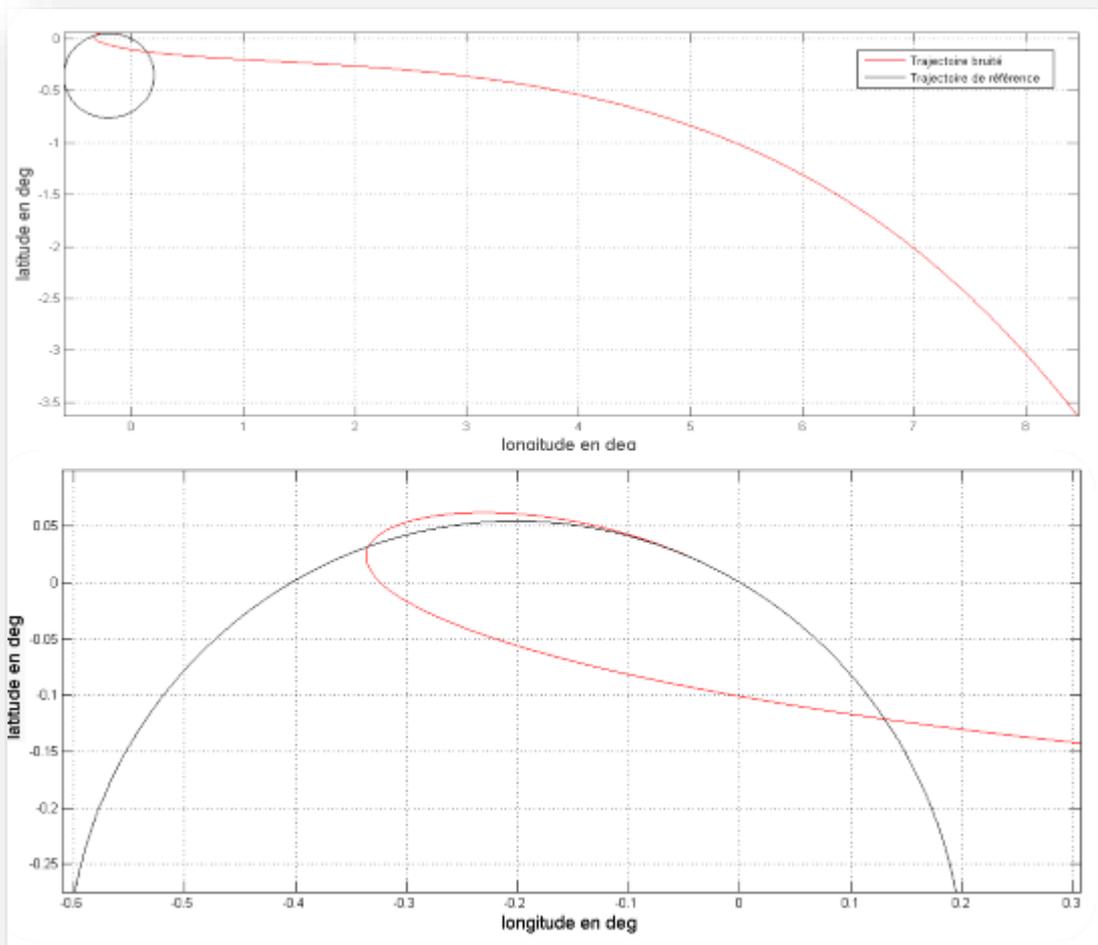


Figure.IV.3 : Trajectoire de référence et trajectoire générée

b) Avec bruit



**Figure.IV.4 :** Comparaison entre la trajectoire de référence et la trajectoire bruitée

D'après les deux figures ci-dessus, on voit clairement une divergence de la trajectoire étudiée lors de l'injection du bruit ( $\omega_{ib}^b$  et  $f_{ib}^b$  bruitées).

## IV.4-ESTIMATION DES ERREURS PAR EKF ET SDRE

Après avoir créé un modèle proche de la réalité, on va appliquer les filtres, EKF et SDRE sur notre système.

### IV.4.1-Estimation par EKF

Nous allons présenter dans cette partie, les estimations de position, vitesse, attitude ainsi que les erreurs et les déviations standards en boucle ouverte et en boucle fermée.

Nous rappelons qu'une correction sera faite une fois qu'une observation GPS soit disponible. En absence de l'information GPS, le filtre restera en boucle de prédiction.

#### IV.4.1.1-Boucle ouverte

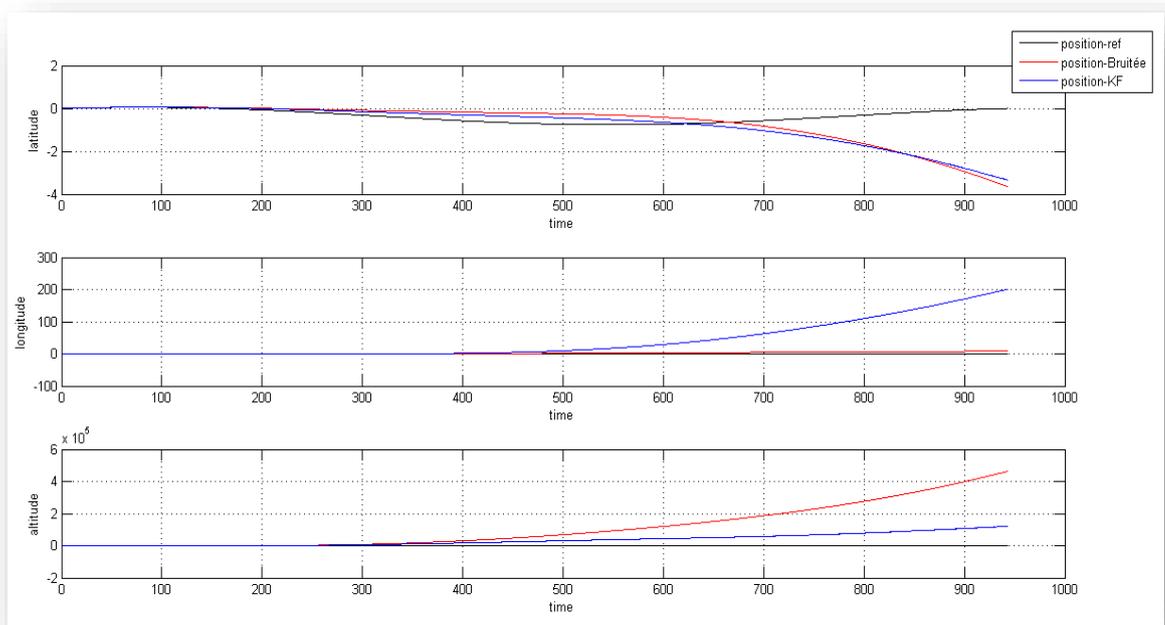


Figure.IV.5 : Position en boucle ouverte

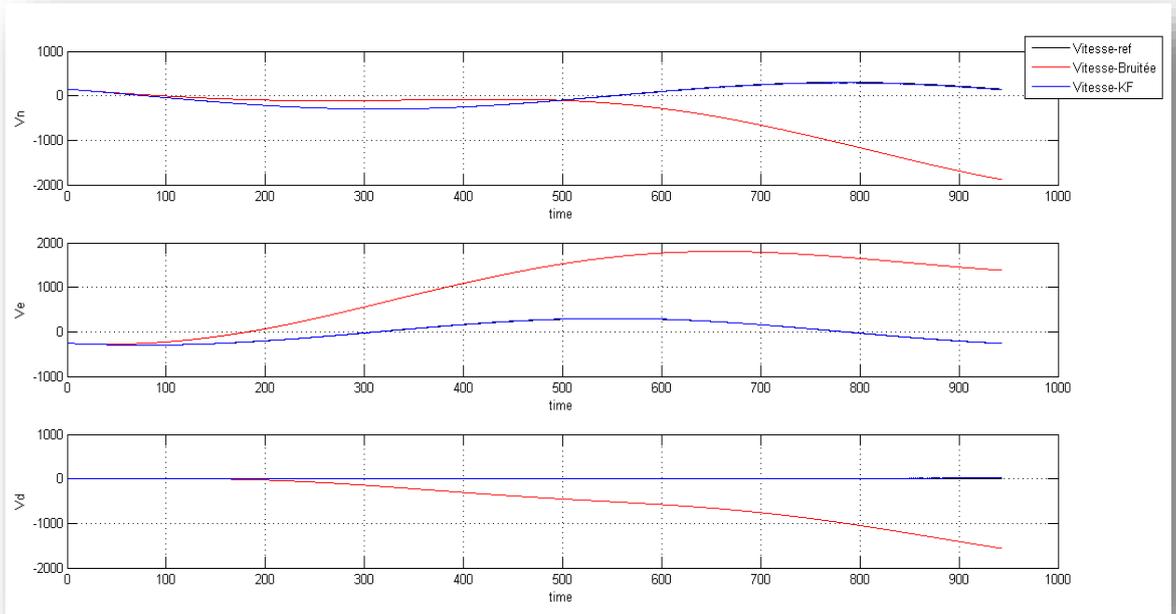


Figure.IV.6 : Vitesse en boucle ouverte

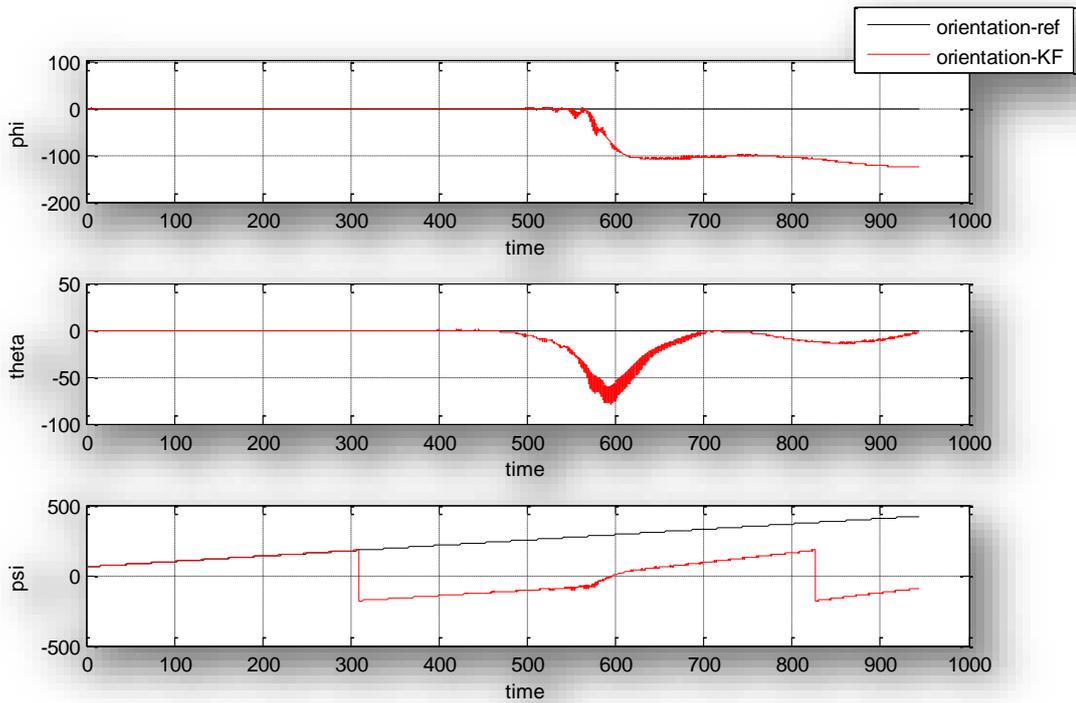


Figure.IV.7 : Attitude en boucle ouverte

En comparant les courbes obtenues par l'EKF avec celles bruitées et celles de référence, on voit que notre filtre a relativement bien estimé la position, la vitesse et l'attitude.

Après un certain nombre d'itération, on remarque une divergence, cette dernière est due à l'accumulation des erreurs due à l'augmentation de nombre de calcul.

### La déviation standard

La diagonale la matrice de covariance d'erreur contient la variance de l'erreur d'estimation de chacun des états du système. Ainsi, le tracer de ces variances des erreurs représente la déviation standard de chaque élément de ces variances et constitue par le fait même un indicateur de la stabilité du filtre.

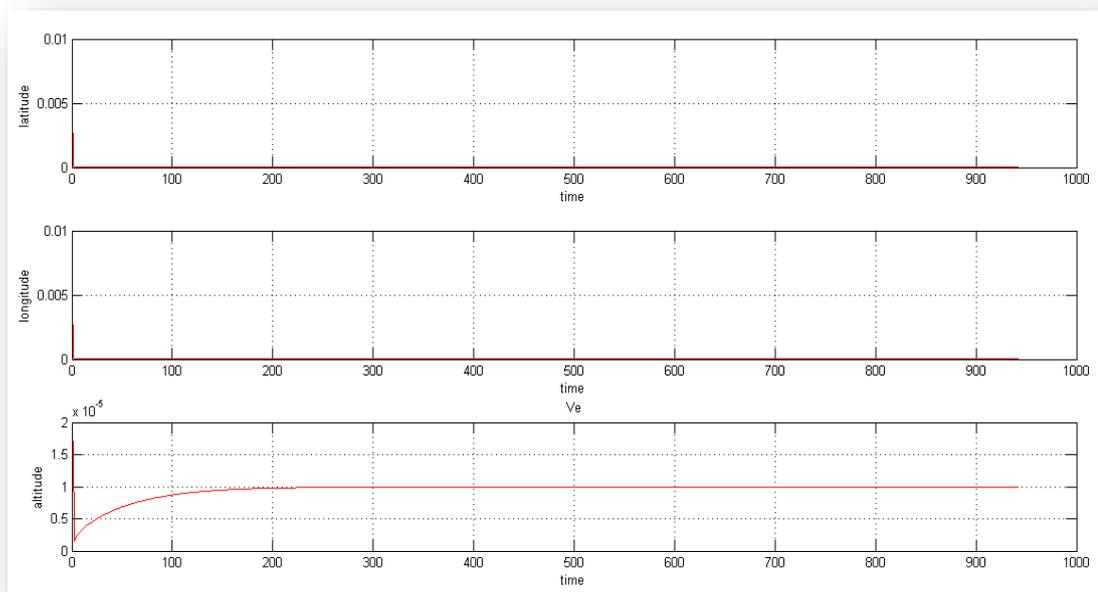
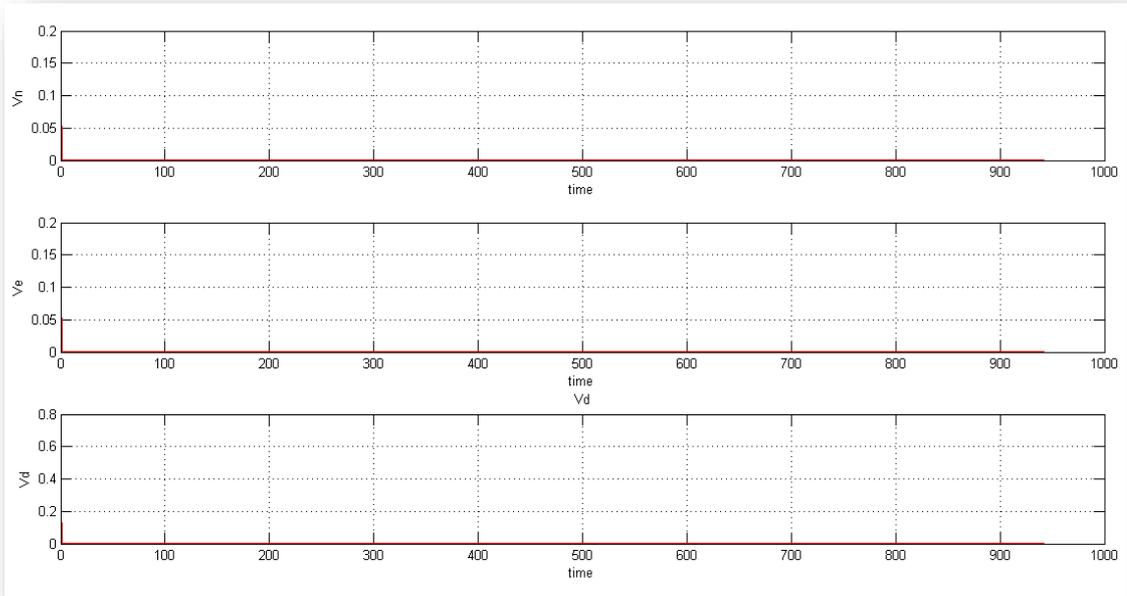
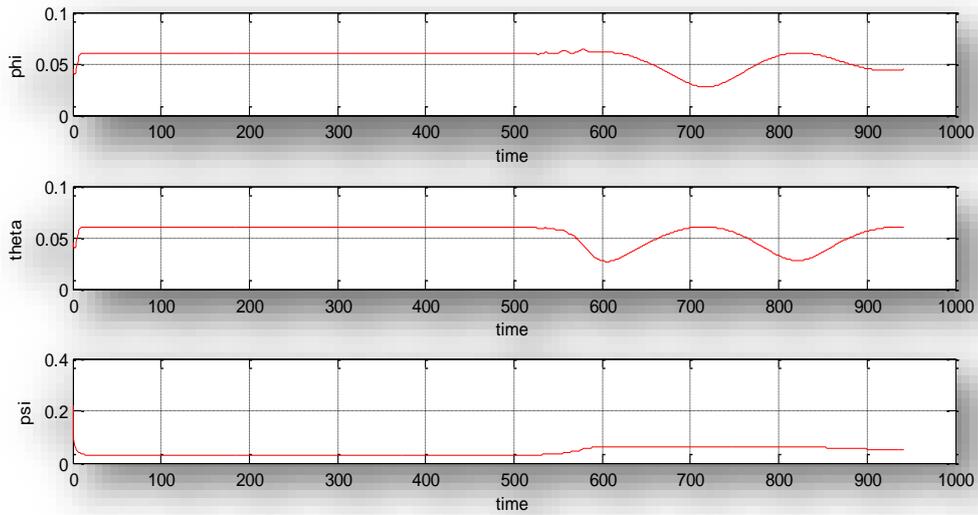


Figure.IV.8 : Déviation standard de la position



**Figure.IV.9** : Déviation standard de la vitesse



**Figure.IV.10** : Déviation standard de l'attitude

On voit que la déviation standard est stable et tend vers une constante à chaque fois soit pour la position, la vitesse ou pour l'attitude. Donc notre filtre est stable.

### IV.3.1.2-Boucle fermée

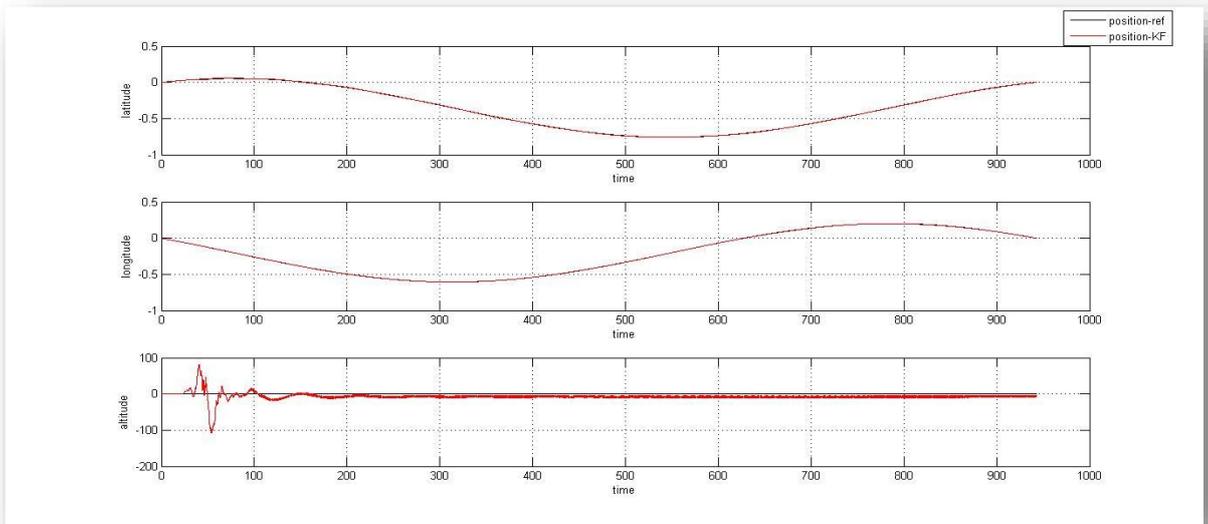


Figure.IV.11 : Position en boucle fermée

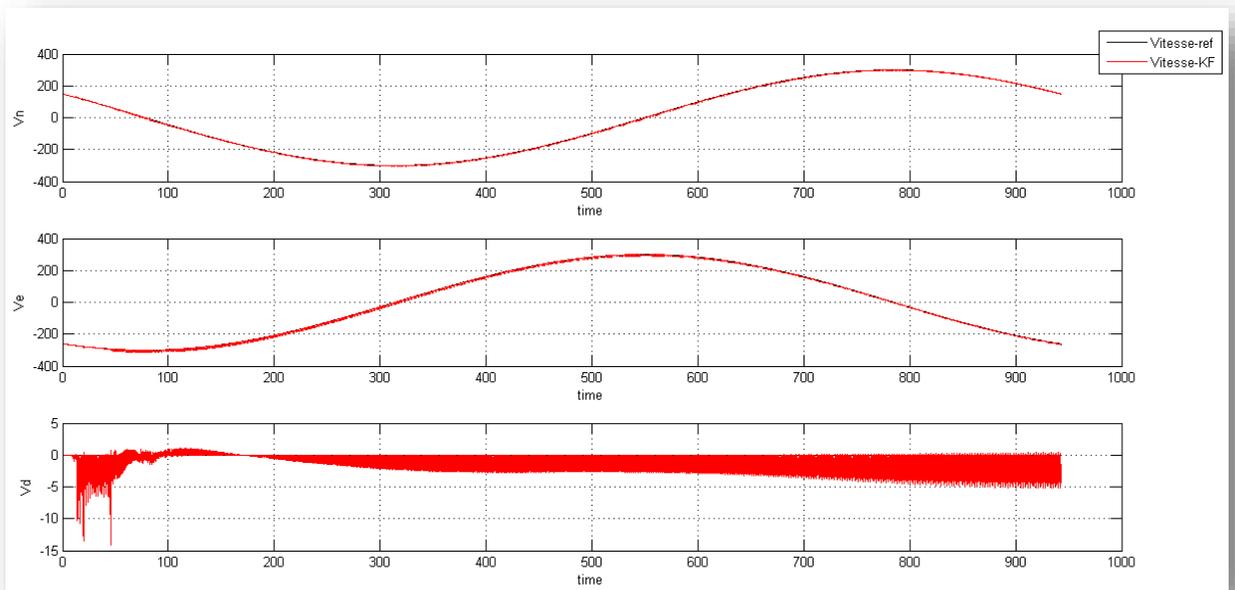


Figure.IV.12 : Vitesse en boucle fermée

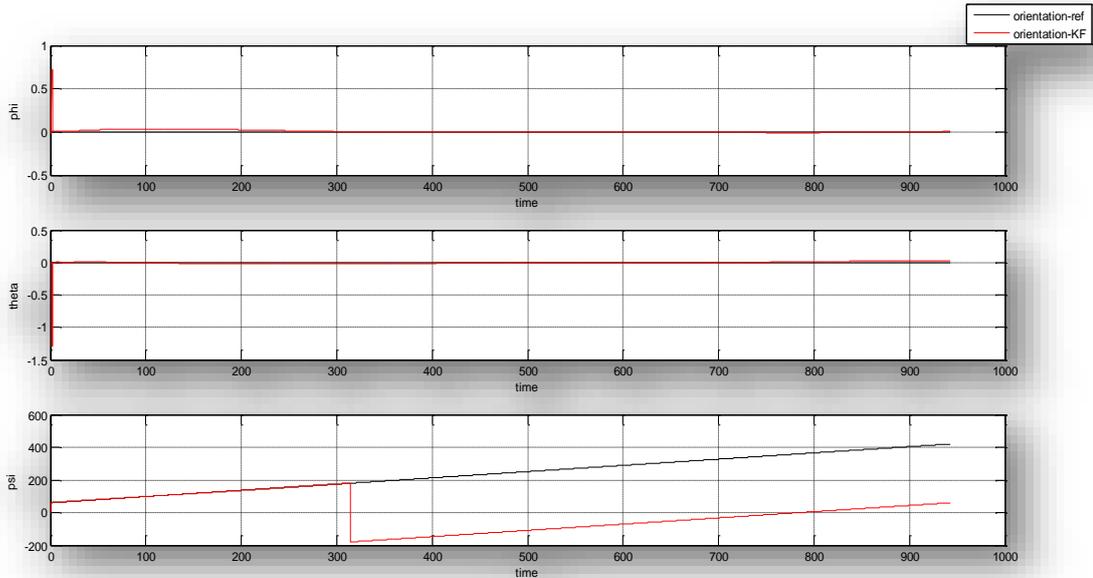


Figure.IV.13 : Attitude en boucle fermée

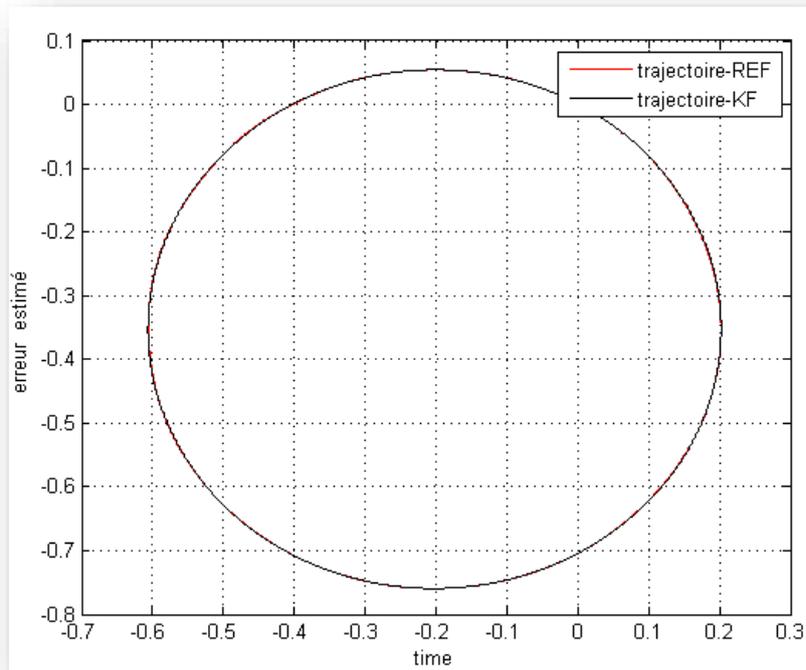
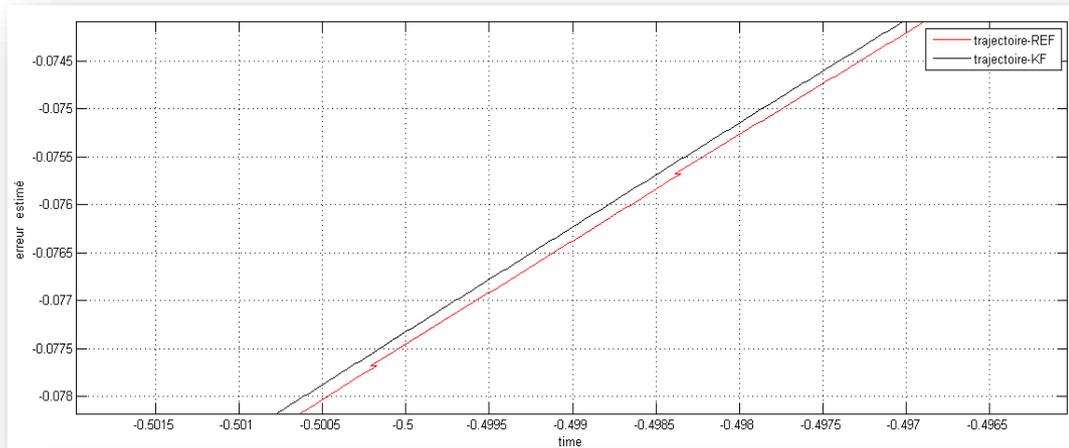


Figure.IV.14 : Comparaison entre la trajectoire de référence et la trajectoire obtenue en boucle fermée

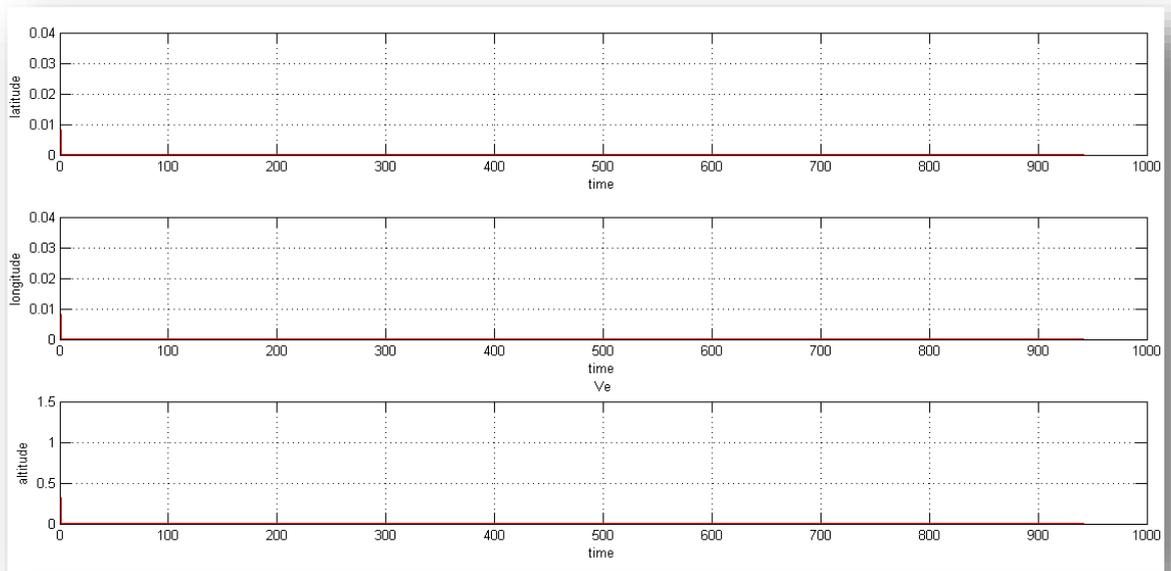


**Figure.IV.15** : Comparaison entre la trajectoire de référence et la trajectoire obtenue en boucle fermée (zoom)

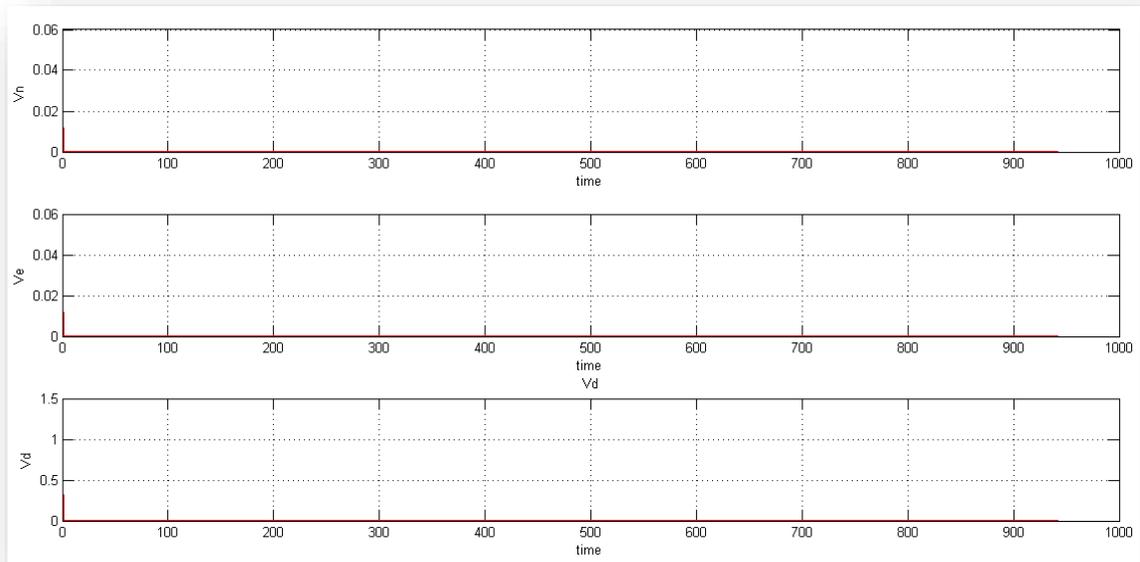
En analysant les courbes obtenues en boucle fermées et après les avoir comparées avec celles de référence, on remarque que l'EKF en boucle fermée a très bien estimé la position et la vitesse. On remarque des oscillations en ce qui concerne l'altitude  $h$  et une petite divergence concernant  $v_D$ . Ces deux sont dues à la gravité, c'est pour ça, l'avion est équipé de plusieurs instruments en plus spécialisés dans la navigation verticale.

Pour l'attitude, on remarque une divergence relativement importante dans les deux cas (boucle ouverte et boucle fermée). Cela peut être expliqué par la forte dérive et au mauvais alignement.

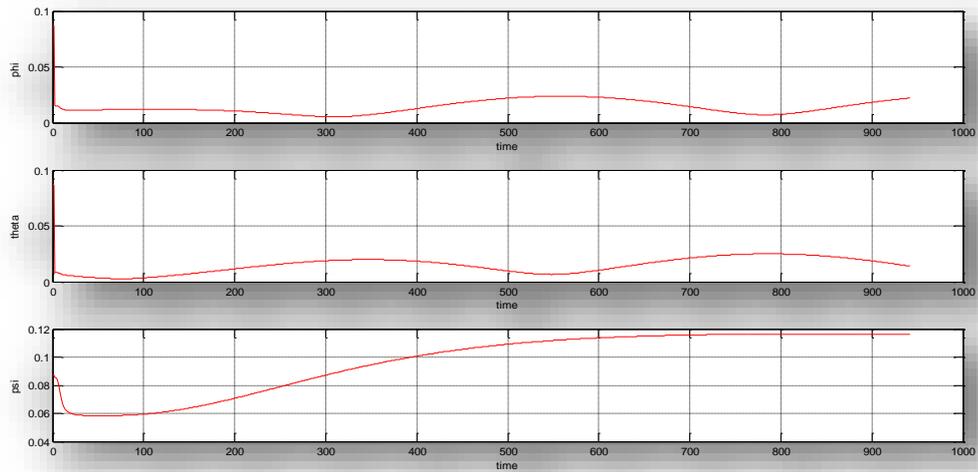
## La déviation standard



**Figure.IV.16** : Déviation standard de la position



**Figure.IV.17** : Déviation standard de la vitesse



**Figure.IV.18** : Déviation standard de l'attitude

On voit que la déviation standard est stable et tend vers une constante à chaque fois soit pour la position, la vitesse ou pour l'attitude. Donc notre filtre est stable.

IV.4.1.3- Comparaison entre la boucle ouverte et la boucle fermée

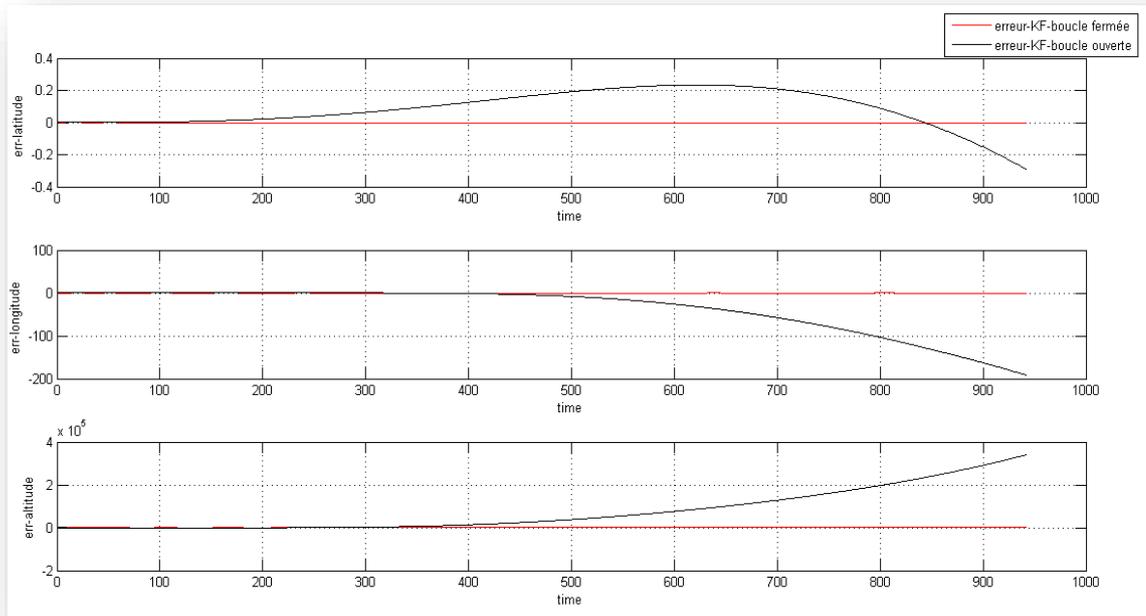


Figure.IV.19 : Comparaison entre la variation d'erreur de la position en boucle ouverte et en boucle fermée

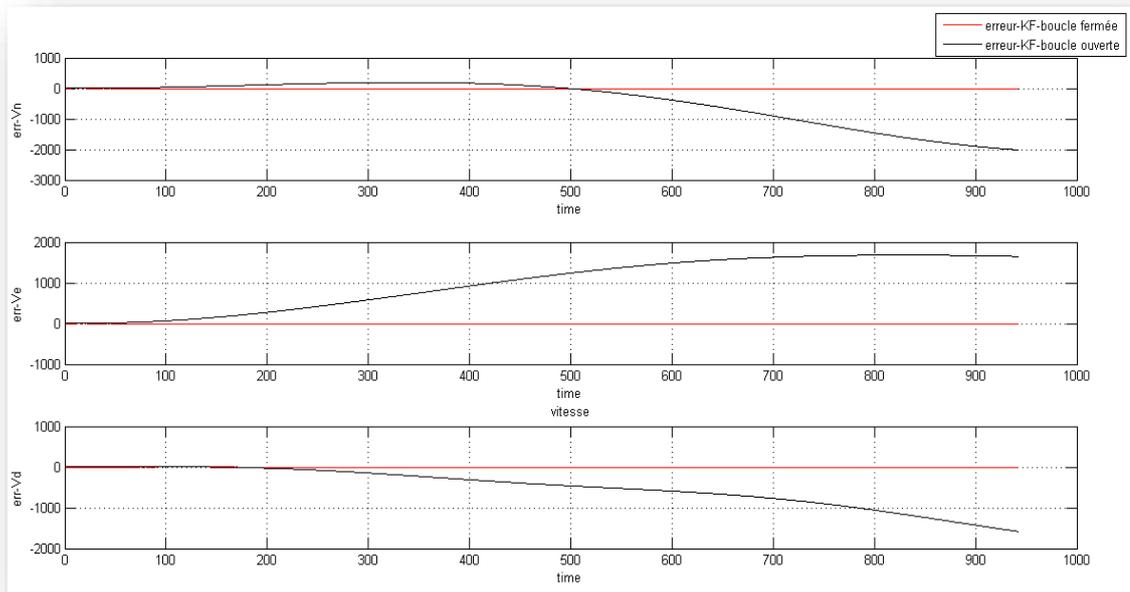
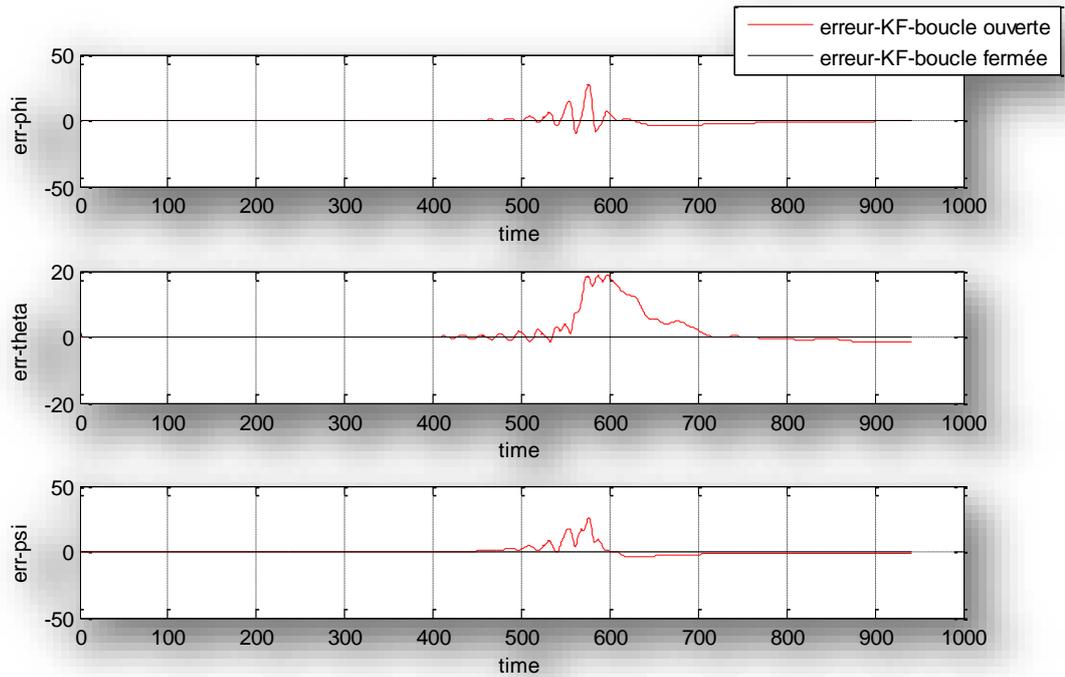


Figure.IV.20 : Comparaison entre la variation d'erreur de la vitesse en boucle ouverte et en boucle fermée



**Figure.IV.21** : Comparaison entre la variation d'erreur de l'attitude en boucle ouverte et en boucle fermée

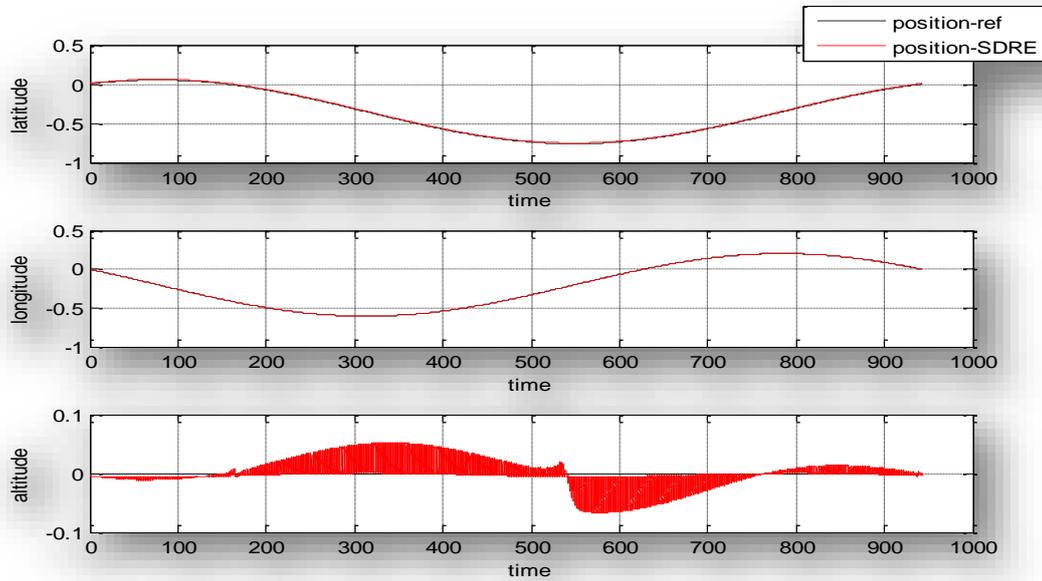
D'après les figures de comparaison d'erreur du filtre EKF en boucle ouverte et en boucle fermée, on voit clairement une erreur qui tend vers le 0 à chaque fois (position, vitesse et attitude) dans la boucle fermée et une erreur qui augmente avec le temps dans la boucle ouverte.

Donc l'EKF en boucle fermée a une meilleure performance que l'EKF en boucle ouverte, car en boucle fermée le filtre corrige continuellement non seulement les paramètres de sortie (position, vitesse et attitude) mais aussi les paramètres d'entrée ( $f_{ib}^b$  et  $\omega_{ib}^b$ )

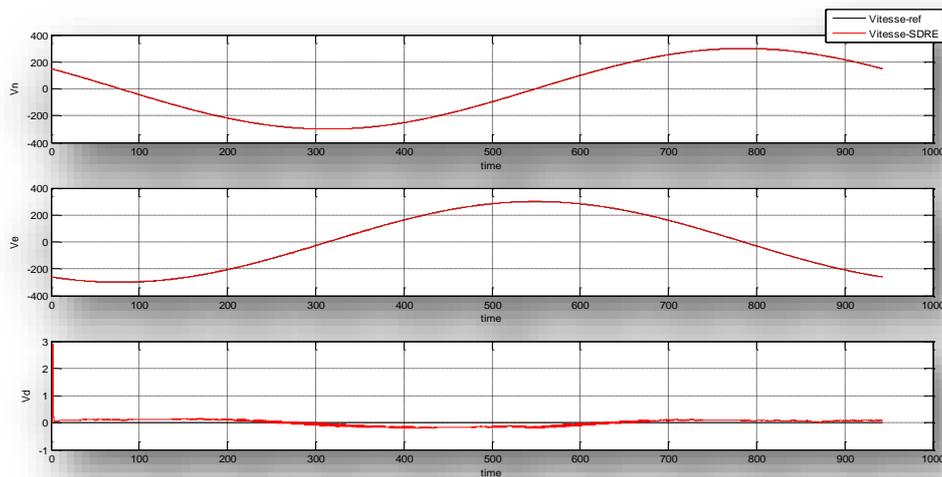
#### IV.4.2-Estimation par SDRE

Avec Matlab, nous avons élaboré un programme concernant le filtre SDRE.

Les résultats obtenus sont affichés sous forme de figures ci-dessous.

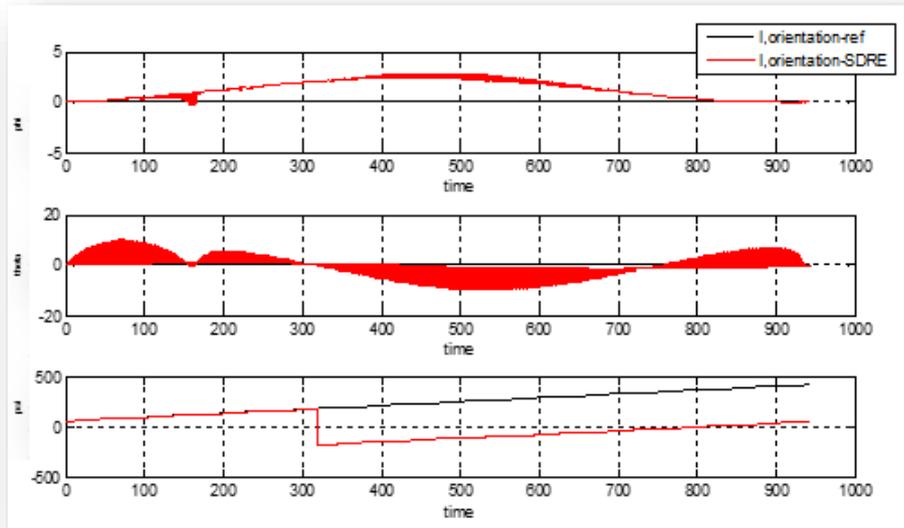


**Figure.IV.22** : Comparaison entre la position de référence et la position estimée par SDRE



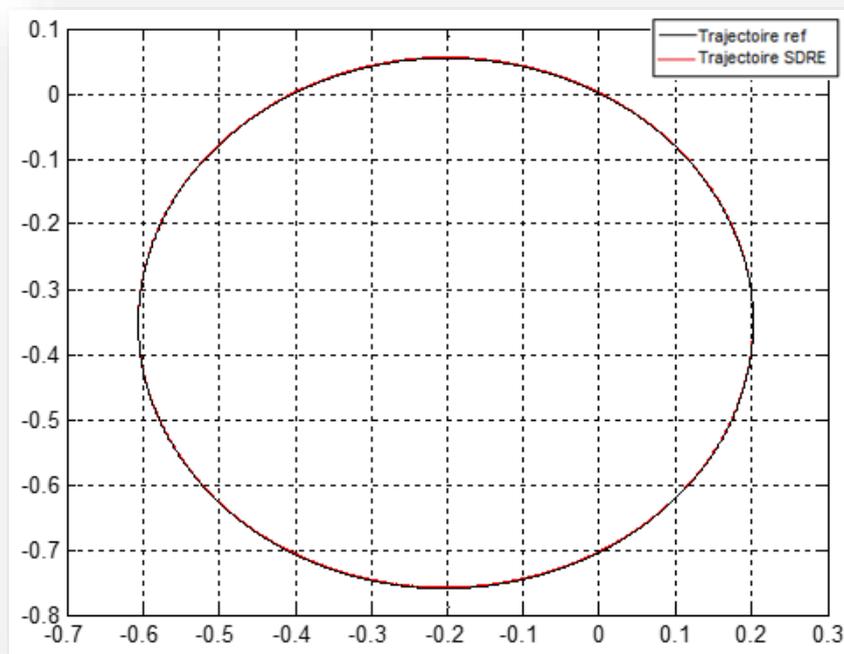
**Figure.IV.23** : Comparaison entre la vitesse de référence et la vitesse estimée par SDRE

D'après les figures ci-dessus, le filtre SDRE a très bien estimé la position et la vitesse, bien qu'on remarque une divergence en altitude  $h$  et en vitesse verticale  $v_D$  due à la gravité.



**Figure.IV.24** : Comparaison entre l'attitude de référence et l'attitude estimée par SDRE

Les courbes de l'attitude souffrent toujours d'une divergence due à la dérive comme expliqué déjà, donc le filtre SDRE n'a pas pu estimer l'attitude convenablement.



**Figure.IV.25** : Comparaison entre la trajectoire de référence et la trajectoire estimée par SDRE

La trajectoire obtenue par le filtre SDRE est presque identique, à celle de référence.

## **IV.5-CONCLUSION**

Après la simulation des deux filtres EKF et SDRE et par comparaison de leurs performances en se basant sur l'évolution de la dynamique de l'erreur, la stabilité et les trajectoires obtenues on voit clairement que le filtre basé sur la technique de SDRE a des performances meilleurs que le filtre de Kalman étendu, en plus, le filtre SDRE ne nécessite pas une linéarisation de l'état donc on a pas besoin de calculer la matrice jacobéenne comme dans le filtre de Kalman étendu donc son cout de calcul est moins élevé. Une légère marge d'erreur a été constatée surtout dans la trajectoire, nous l'expliquons par des erreurs trouvées dans la matrice de factorisation.

## **CONCLUSION GENERALE**

L'objectif de notre travail était l'étude et la mise en œuvre d'une technique d'estimation moderne connue par State Dependent Riccati Equation (SDRE) développée au cours de ces dernières années, qui fait actuellement l'objet de plusieurs travaux de recherches. Pour promouvoir les résultats de simulation de cette dernière, on les a comparés avec des techniques classiques utilisées dans la navigation.

Dans le premier chapitre, nous avons abordé les systèmes de navigations existants, expliqué leurs principes de fonctionnement ainsi que leurs défauts.

Dans le deuxième chapitre, nous avons présenté un modèle hybride INS/GPS et étudié le filtre de Kalman en détail.

Dans le troisième chapitre nous avons proposé un algorithme d'estimation basé sur la technique de State Dependent Differentiel Riccati Filter (SDDRF), pour l'estimation de la position, la vitesse, et l'attitude.

Dans le quatrième chapitre qui a été notre partie pratique, nous avons élaboré un premier programme représentant l'application du filtre de Kalman en boucle ouverte et fermée, ainsi un deuxième programme concernant le filtre SDRE.

Nous avons comparé les performances et la stabilité de notre filtre avec celles du filtre (EKF). De meilleurs résultats ont été obtenus avec le filtre non linéaire SDRE notamment dans le cas d'une non-linéarité importante.

Le filtre SDRE s'est avéré une meilleure alternative du filtre de Kalman alors on propose, pour des futurs projets, d'intégrer la technique SDRE dans la navigation d'avantage en tenant compte de ses inconvénients.

## BIBLIOGRAPHIE

- [1] Jean –Rémi De Boer. “*Capteur MEMS : Optimisation des méthodes de traitement capteurs, de navigation et d’hybridation*». Thèse de doctorat à l’université de Toulouse. (2010).
- [2] Leica Géosystems. (Version 1.0 Français). “Notions de base du GPS ”
- [3] Direction des inventaires forestiers, Direction de l’assistance technique, en collaboration avec les directions régionales de MRNFP. “*Système GPS, Guide d’information et de bonne pratique*”. Ministère des ressources naturelles, de la faune et des parcs. (2004).
- [4] Philippe Lavoie. “*Système de navigation hybride GPS/INS à faible coût pour la navigation robuste en environnement urbain*”. Mémoire présenté à l’école de technologie supérieure, Québec, comme exigence partielle à l’obtention de la maîtrise en génie électrique. (2012).
- [5] MAKRI Omar, ZEGGA Abdel Ghani. “*Estimation des paramètres de navigation par une centrale inertielle avionique à composants liés IRS*”. Mémoire de Master, option avionique. Institut d’Aéronautique de Blida. Algérie. (2014)
- [6] Aboelmagd Noureldin ; Tashfeen B. Karamat ; Jacques Georgy. “*Fundamentals of Inertial Navigation, Satellite-based Positioning and their Integration*”. Springer-Verlag Berlin Heidelberg. 2013.
- [7] Iyad ABUHADROUS. “*Système embarqué temps réel de localisation et de modélisation 3D par fusion multi-capteur*”. Thèse pour obtenir le grade de Docteur de l’Ecole des Mines de Paris, Spécialité « Informatique temps réel – Robotique – Automatique ». (2005).
- [8] Majd Alshawa. Contribution à la cartographie mobile : “Développement et caractérisation d’un système basé sur un scanner laser terrestre”. Thèse présentée pour obtenir le grade Docteur à l’université de Strasbourg. Discipline : Génie civile. (2010)
- [9] Gong Xin Xu. “*Nonlinear Fault-Tolerant Guidance and Control for Damaged Aircraft*”. Mémoire Master de science appliqué. Université de Toronto. (2011).
- [10] David A. Haessig and Bernard Friedland. “*State dependent differential riccati equation for nonlinear estimation and control*”. Publication, Department of Electrical and Computer Engineering New Jersey Institute of Technology Newark, USA. (2002).
- [11] Abdelkrim Nemra and Nabil Aouf. “*Robust INS/GPS Sensor Fusion for UAV Localization Using SDRE Nonlinear Filtering*”. (2010).
- [12] Boudaha El Walid. “*Commande des Systèmes non linéaire, Application aux procédés biotechnologiques*”. Mémoire de Magistère présenté au département de l’électrotechnique. Université Ferhat Abbas, Sétif. Algérie. (2012).

## ANNEXE A

Dans cette annexe, nous allons présenter quelques données, équations, et démonstrations nécessaires pour mieux comprendre le chapitre I

**Transformation entre le repère mobile et le repère de navigation** Le développement des équations inertielles nous oriente d'abord à la détermination de la matrice de rotation  $R_b^n$  qui transforme le repère mobile (b) vers le plan local de navigation (n) effectivement cette matrice est une fonction des trois angles d'Euler ( $\varphi$ ,  $\theta$ ,  $\psi$ ) elle peut s'exprimer comme suit :

$$\begin{aligned} R_b^n &= (R_b^n)^{-1} = (R_b^n)^T = (R_b^n R_b^n R_b^n)^T \\ &= (R_a^b)^T (R_c^b)^T (R_c^d)^T \end{aligned} \quad \text{Eq.A.1}$$

La matrice de rotation peut être écrite sous forme des matrices élémentaires comme suit :

$$R_b^n = \begin{bmatrix} \cos\psi & \sin\psi & 0 \\ -\sin\psi & \cos\psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & \sin\theta \\ 0 & -\sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \cos\Phi & 0 & -\sin\Phi \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin\Phi & 0 & \cos\Phi \end{bmatrix}^T$$

$$R_b^n = \begin{bmatrix} \cos\psi & -\sin\psi & 0 \\ \sin\psi & \cos\psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos\Phi & 0 & \sin\Phi \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin\Phi & 0 & \cos\Phi \end{bmatrix}$$

Eq.A.2

 $R_b^n =$ 

$$\begin{bmatrix} \cos\psi \cos\Phi - \sin\psi \sin\theta \sin\Phi & -\sin\psi \cos\theta & \cos\psi \sin\Phi + \sin\psi \sin\theta \cos\Phi \\ \sin\psi \cos\Phi + \cos\psi \sin\theta \sin\Phi & \cos\psi \cos\theta & \sin\psi \sin\Phi - \cos\psi \sin\theta \cos\Phi \\ -\cos\theta \sin\Phi & \sin\theta & \cos\theta \cos\Phi \end{bmatrix}$$

Eq.A.3

### Transformation ECEF(e), plan tangent(n) et inertielle(i) :

Le vecteur de rotation du système e par rapport au système i exprimé dans le système e, est donné par la vitesse de rotation de la terre.

$$\omega_{ie}^e = [0 \quad 0 \quad \omega_e]^T$$

Où  $\omega_e$  est la valeur WGS-84 de la vitesse de rotation de la terre.

Et sa projection dans le système n est :

Eq.A.4

$$\omega_{ie}^n = R_e^n \omega_{ie}^e = [\omega_e \cos\varphi \quad 0 \quad -\omega_e \sin\varphi]^T$$

$\omega_{en}^n$  est le taux de transport représentant la vitesse de rotation du système  $n$  par rapport au système  $e$ , on peut l'exprimer en termes de taux de changement de latitude et de longitude comme :

$$\omega_{ie}^n = \begin{bmatrix} \dot{\lambda} \cos \varphi \\ -\dot{\varphi} \\ -\dot{\lambda} \sin \varphi \end{bmatrix} = \quad \text{Eq.A.5}$$

Avec

Vitesse en longitude :

$$\dot{\lambda} = \frac{d\lambda}{dt} = \frac{-v_E}{(R_n+h)\cos\varphi} \quad \text{Eq.A.6}$$

Vitesse en latitude

$$\dot{\varphi} = \frac{d\varphi}{dt} = \frac{v_N}{R_m+h} \quad \text{Eq.A.7}$$

Vitesse en altitude

$$\dot{h} = \frac{dh}{dt} = -v_d \quad \text{Eq.A.8}$$

$R_n$  et  $R_m$  sont les rayons de courbure Méridional (nord-sud) et Transversal (est-ouest) donné par :

$$R_n = \frac{a}{\sqrt{(1-e^2\sin^2\varphi)}} \quad \text{Eq.A.9}$$

$$R_m = \frac{a(1-e^2)}{(1-e^2\sin^2\varphi)^{3/2}} \quad \text{Eq.A.10}$$

$$a = 6378137.0 \text{ m}$$

$$b = 6356752.3142 \text{ m}$$

$$e^2 = (a^2 - b^2)/a^2$$

Où,  $a$  et  $e$  sont respectivement l'axe semi-principal et l'excentricité de l'ellipsoïde de référence,  $b$  est l'axe semi-mineur.

On peut obtenir  $\omega_{in}^n$  de la manière suivante :

**Eq.A.11**

$$\omega_{in}^n = \omega_{ie}^n + \omega_{en}^n$$

Dans le cas où la qualité du gyroscope est mauvaise (très bruité), la vitesse de rotation de la terre ne peut pas être mesurée, on peut alors approximer  $\omega_{in}^n$  par  $\omega_{en}^n$  parce que  $\omega_{ie}^n$  est négligeable par rapport à  $\omega_{en}^n$ .

L'algorithme de développement des équations de mécanisation nécessite le calcul de la matrice d'orientation  $R_b^n$  qui transforme le repère mobile dans le plan local  $n$ . Cette matrice est une fonction des trois angles d'Euler (roulis  $\phi$ , tangage  $\theta$ , lacet  $\psi$ ) qui sont regroupés dans un vecteur noté  $\rho = [\phi \ \theta \ \psi]^T$ .

La vitesse angulaire  $\omega_{ib}^b$ , mesurée par les gyroscopes entre le repère  $b$  et le repère  $i$  exprimée dans le repère  $b$ , peut être écrite comme suit :

$$\omega_{ib}^b = \omega_{in}^b + \omega_{nb}^b \quad \text{Eq.A.12}$$

Où  $\omega_{in}^b$  est la vitesse de rotation du repère  $n$  par rapport au repère  $i$  exprimée dans le repère  $b$  et  $\omega_{nb}^b$  est la vitesse de rotation du repère  $b$  par rapport au repère  $n$  exprimée dans le repère  $b$ .

La dernière équation nous permet d'écrire :

$$\omega_{nb}^b = \omega_{ib}^b - \omega_{in}^b \quad \text{Eq.A.13}$$

En utilisant la matrice de rotation  $R_b^n$ , le vecteur  $\omega_{in}^b$  peut être exprimé comme suit :

$$\omega_{in}^b = \omega_{ie}^b - \omega_{en}^b \quad \text{Eq.A.14}$$

$$\omega_{in}^b = R_b^n \omega_{in}^n \quad \text{Eq.A.15}$$

Où  $R_n^b = (R_b^n)^T$

$$\text{et } \omega_{in}^n = \omega_{ie}^n - \omega_{en}^n \quad \text{Eq.A.16}$$

L'équation devient

$$\omega_{nb}^b = \omega_{ib}^b - R_b^n (\omega_{ie}^n - \omega_{en}^n) \quad \text{Eq.A.17}$$

<b>Méthodes</b>	<b>Avantages</b>	<b>Inconvénients</b>
<b>Angles d'Euler</b>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• On a juste besoin de trois équations différentielles (trois paramètres indépendants).</li> <li>• Initialisation directe des angles roulis, tangage et lacet.</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Equations différentielles non-linéaires.</li> <li>• Présence de singularité lors ce que l'angle s'approche de <math>90^\circ</math>.</li> <li>• L'ordre de rotation est important.</li> </ul>
<b>Cosinus directeur</b>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Equations différentielles linéaires.</li> <li>• Pas de singularités.</li> <li>• Calcul de la direction de la matrice de transformation.</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• On a six équations différentielles indépendantes.</li> <li>• Calcul complexe.</li> <li>• Les angles d'Euler ne sont pas directement disponibles.</li> </ul>
<b>Quaternion</b>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• On n'a que quatre équations différentielles.</li> <li>• Pas de singularités.</li> <li>• Calcul simple.</li> <li>• On a juste besoin de trois équations différentielles (trois paramètres indépendants).</li> <li>• Initialisation directe des angles roulis, tangage et lacet.</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Les angles d'Euler ne sont pas directement disponibles.</li> <li>• la matrice de transformation n'est pas directement disponible.</li> <li>• Les conditions initiales utilisant les angles d'Euler sont exigées.</li> </ul>

**Tableau.A.1.**avantages et inconvénients des méthodes de calcul utilisées

## Quaternions

D'après le Tableau.I.1 .la méthode la plus courante pour le paramétrage de la matrice de rotation  $R_b^l$  est l'approche du quaternion.

Les états du théorème d'Euler, indique que la rotation d'un corps rigide (représenté dans le repère (b)) par rapport au repère de référence (dans ce cas, c'est le repère de calcul) peut être exprimée comme étant un angle de rotation  $\theta$  tournant autour d'un axe fixe et le cosinus directeur de l'axe de rotation définit la direction de rotation.

$$\theta = \sqrt{\theta_x^2 + \theta_y^2 + \theta_z^2}$$

Un quaternion est une représentation de quatre paramètres d'une matrice de transformation qui est défini comme suit :

$$\mathbf{q} = \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \\ q_4 \end{bmatrix} \quad \text{Eq.A.18}$$

Les composantes d'un quaternion sont liées par la contrainte :

$$q_1^2 + q_2^2 + q_3^2 + q_4^2 = 1 \quad \text{Eq.A.19}$$

Les paramètres du quaternion sont en fonction du temps, et l'équation différentielle qui lui est associé.

$$\dot{\mathbf{q}} = \frac{1}{2} \bar{\Omega}(\omega) \mathbf{q} \quad \text{Eq.A.20}$$

Ou :  $\bar{\Omega}(\omega)$  est la matrice antisymétrique de la forme suivante :

$$\bar{\Omega}(\omega) = \begin{bmatrix} 0 & \omega_z & -\omega_y & \omega_x \\ -\omega_z & 0 & \omega_x & \omega_y \\ \omega_y & -\omega_x & 0 & \omega_z \\ -\omega_x & -\omega_y & -\omega_z & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\Omega_{3 \times 3} & \vdots & \omega_{3 \times 1} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ -\omega_{3 \times 3}^T & \vdots & 0 \end{bmatrix} \quad \text{Eq.A.21}$$

$\omega = (\omega_x, \omega_y, \omega_z)^T$  est la vitesse angulaire de la rotation du véhicule et  $\Omega$  est la forme antisymétrique de  $\omega$ .

$$\theta = \begin{bmatrix} \theta_x \\ \theta_y \\ \theta_z \end{bmatrix} = \int \omega dt = \omega \Delta t = \begin{bmatrix} \omega_x \Delta t \\ \omega_y \Delta t \\ \omega_z \Delta t \end{bmatrix} \quad \text{Eq.A.22}$$

## Relation entre la matrice de transformation et les paramètres du quaternion

Une fois que les paramètres du quaternion sont connus à un certain moment, la matrice de rotation  $R_b^l$  peut être obtenue en utilisant la relation directe ci-dessous :

$$R_b^n = \begin{bmatrix} R(1,1) & R(1,2) & R(1,3) \\ R(2,1) & R(2,2) & R(2,3) \\ R(3,1) & R(3,2) & R(3,3) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} q_1^2 + q_2^2 - q_3^2 - q_4^2 & 2(q_2q_3 - q_1q_4) & 2(q_2q_4 + q_1q_3) \\ 2(q_2q_3 + q_1q_4) & q_1^2 - q_2^2 + q_3^2 - q_4^2 & 2(q_3q_4 - q_1q_2) \\ 2(q_2q_4 - q_1q_3) & 2(q_3q_4 + q_1q_2) & q_1^2 - q_2^2 - q_3^2 + q_4^2 \end{bmatrix} \quad \text{Eq.A.23}$$

Après la détermination de la matrice de rotation initiale à partir des angles d'attitude mesurés pendant le processus d'alignement, les valeurs initiales du quaternion seront calculées :

$$\begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \\ q_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sqrt{1 - q_2^2 - q_3^2 - q_4^2} \\ \frac{1}{2} \sqrt{1 + R(1,1) - R(2,2) - R(3,3)} \\ \frac{1}{2} \sqrt{1 - R(1,1) + R(2,2) - R(3,3)} \\ \frac{1}{2} \sqrt{1 - R(1,1) - R(2,2) + R(3,3)} \end{bmatrix} \quad \text{Eq.A.24}$$

## Exemples des erreurs et performances des systèmes inertiels

Category		High Performance	Medium Performance	Low Performance
Stand Alone Position Errors		< 30 (m/hr)	1 – 4 (km / hr)	20 (km/hr) (tactical) – 2 (km/min) (Consumer)
Gyros	Bias (deg/h)	0.0001 – 0.005	0.01 – 0.1	0.1-10 (can be larger: 100-10 000 for consumer grade)
	Scale Factor (ppm)	-	5 - 50	200 -500 (N/A for consumer grade)
	Angular Random Walk (Noise) (deg/hr $\sqrt{Hz}$ )	-	0.002 – 0.005	0.2 – 0.5 (N/A for consumer grade)
Accelerometers	Bias (mg)	0.001	0.05 – 0.1	2 – 4 (> 12 for consumer grade)
	Scale Factor (ppm)	-	10 – 20	400 – 1000 (N/A for consumer grade)
	Velocity Random Walk (Noise) (mg/h $\sqrt{Hz}$ )	-	0.05 – 0.1	2 -4 (N/A for consumer grade)

Tableau.A.2 : Performances des capteurs inertiels

## Signal GPS :

Chaque satellite émet continûment un message de navigation à 50 bits/s qui contient la date d'émission, la position du satellite et la correction d'horloge, informations nécessaires à la résolution du problème de navigation. Ce message de navigation est rendu robuste aux perturbations extérieures grâce à l'utilisation d'un code pseudo-aléatoire et la séquence résultante module la porteuse adéquate. Le signal GPS ainsi réalisé est alors émis sur ces deux porteuses en bande  $L$ , dénotées  $L1$  et  $L2$  :

$$S_{L1}(t) = \sqrt{2A} d(t)c(t) \cos(2\pi f_1 t + \theta_1) + \sqrt{A} d(t)p(t) \sin(2\pi f_1 t + \theta_1),$$

Eq.A.26

$$S_{L2}(t) = \sqrt{\frac{A}{2}} d(t)p(t) \sin(2\pi f_2 t + \theta_2),$$

Eq.A.25

$A$  est la puissance moyenne du signal émis,

$d(t)$  est le message de navigation,

$c(t)$  est le signal correspondant au code pseudo-aléatoire  $C/A$ ,

$p(t)$  est le signal correspondant au code pseudo-aléatoire  $P$ ,

$f_1$  est fréquence de la porteuse  $L1$  (= 1575, 42Mhz),

$f_2$  est fréquence de la porteuse  $L2$  (= 1227, 6Mhz).

Il faut noter que chaque satellite utilise des codes pseudo-aléatoires orthogonaux les uns par rapport aux autres, ce qui aura la particularité de donner de faibles intercorrélations entre deux différents codes. Cette technique de transmission permet à tous les satellites GPS de pouvoir émettre simultanément sans interférences et porte le nom de CDMA (code division multiple accès).

## ANNEXE B

### Linéarisation par différenciation

L'analyse de l'erreur utilise la différenciation pour linéariser les équations différentielles de notre système. L'expansion par série de Taylor utilisée pour la linéarisation d'une fonction  $f(x)$  est évaluée autour d'un certain point nominal connu  $f(x_0)$ , [6] et [7].

L'état (ou la trajectoire) réelle  $\hat{x}^n$ , peut être écrit en termes de  $x^n$  et d'erreur  $\delta x^n$  comme suit :

$$\hat{x}^n = x^n + \delta x^n \quad \text{B.1}$$

Par exemple, les perturbations de la position, la vitesse, l'attitude, et de la gravité peuvent être exprimées comme :

$$\hat{r}^n = r^n + \delta r^n \quad \text{B.2}$$

$$\hat{v}^n = v^n + \delta v^n \quad \text{B.3}$$

$$\hat{R}_b^n = (I - E^n)R_b^n \quad \text{B.4}$$

$$\hat{g}^n = g^n + \delta g^n \quad \text{B.5}$$

Où  $\gamma^n$  signifie le vecteur normal de gravité sur l'ellipsoïde.  $E^n$  est la matrice antisymétrique représentant les erreurs d'orientation.

$$E^n = S(\delta \rho^n) = (\varepsilon^n \times) \begin{pmatrix} 0 & -\varepsilon_D & \varepsilon_E \\ \varepsilon_D & 0 & -\varepsilon_N \\ -\varepsilon_E & \varepsilon_N & 0 \end{pmatrix} \quad \text{B.6}$$

### Modèles dynamiques de l'erreur inertielle (position, vitesse, attitude)

#### Le modèle dynamique de l'erreur en position

On peut obtenir le modèle dynamique linéarisée de l'erreur en position par la différenciation de l'équation Eq.II-42 (les équations dynamiques pour la position géodésique). Puisque les équations dynamiques de la position sont des fonctions de la position et de la vitesse, les équations dynamiques d'erreur en position peuvent être obtenues en utilisant les dérivées partielles :

$$\delta r^n = F_{rr} \delta r^n + F_{rv} \delta v^n \quad \text{B.7}$$

$$F_{rr} = \begin{pmatrix} \frac{\partial \varphi}{\partial \varphi} & \frac{\partial \varphi}{\partial \lambda} & \frac{\partial \varphi}{\partial h} \\ \frac{\partial \lambda}{\partial \varphi} & \frac{\partial \lambda}{\partial \lambda} & \frac{\partial \lambda}{\partial h} \\ \frac{\partial h}{\partial \varphi} & \frac{\partial h}{\partial \lambda} & \frac{\partial h}{\partial h} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \frac{-v_N}{(r_M+h)^2} \\ \frac{v_E \sin \varphi}{(r_T+h) \cos^2 \varphi} & 0 & \frac{-v_E}{(r_T+h) \cos \varphi} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{B.8}$$

$$F_{rv} = \begin{pmatrix} \frac{\partial \varphi}{\partial v_N} & \frac{\partial \varphi}{\partial v_E} & \frac{\partial \varphi}{\partial v_D} \\ \frac{\partial \lambda}{\partial v_N} & \frac{\partial \lambda}{\partial v_E} & \frac{\partial \lambda}{\partial v_D} \\ \frac{\partial h}{\partial v_N} & \frac{\partial h}{\partial v_E} & \frac{\partial h}{\partial v_D} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{r_M+h} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{(r_T+h) \cos \varphi} & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{B.9}$$

Et  $r_M$ ,  $r_T$  sont les rayons de courbure Méridional (nord - sud) et Transversal (est-ouest).

### Le modèle dynamique de l'erreur en vitesse

En référence à l'équation Eq.II-43, l'équation dynamique de la vitesse peut être exprimée comme :

$$\hat{v}^n = \hat{R}_b^n \tilde{f}_{ib}^b - (2\hat{\omega}_{ie}^n + \hat{\omega}_{en}^n) \times \hat{v}_{en}^n + \gamma^n \quad \text{B.10}$$

La perturbation de la dernière équation donne :

$$\hat{v}^n + \delta \hat{v}^n = (I - E^n) R_b^n (f_{ib}^b + \delta f_{ib}^b) - (2\omega_{ie}^n + \omega_{en}^n + 2\delta\omega_{ie}^n + \delta\omega_{en}^n) \times (v_{en}^n + \delta v_{en}^n) + g^n + \delta g^n$$

En rassemblant les termes du premier ordre, l'équation ci-dessus peut être réduite à :

$$\delta \hat{v}^n = -(2\delta\omega_{ie}^n + \delta\omega_{en}^n) \times (v_{en}^n) + \delta g^n - (2\omega_{ie}^n + \omega_{en}^n) \times (\delta v_{en}^n) - \varepsilon^n \times f_{ib}^n + R_b^n \delta f_{ib}^b \quad \text{B.11}$$

$$= v_{en}^n \times (2\delta\omega_{ie}^n + \delta\omega_{en}^n) + \delta g^n - (2\omega_{ie}^n + \omega_{en}^n) \times \delta v_{en}^n + f_{ib}^n \times \varepsilon^n + R_b^n \delta f_{ib}^b \quad \text{B.12}$$

Les premier et deuxième termes peuvent être développés en fonction des erreurs de position et de vitesse. On trouve :

$$2\omega_{ie}^n + \omega_{en}^n = \begin{pmatrix} 2\omega_e \cos \varphi + v_E / (r_M + h) \\ -v_N / (r_M + h) \\ -2\omega_e \sin \varphi - v_E \tan \varphi / (r_T + h) \end{pmatrix} \quad \text{B.13}$$

La perturbation de la dernière équation donne :

$$2\delta\omega_{ie}^n + \delta\omega_{en}^n = \delta\Omega_r \delta r^n + \delta\Omega_v \delta v^n \quad \text{B.14}$$

Système embarqué temps réel de localisation et de modélisation 3D par fusion multi-capteur  
Où,

$$\delta\Omega_r = \begin{pmatrix} -2\omega_e \sin \varphi & 0 & \frac{-v_E}{(r_T + h)^2} \\ 0 & 0 & \frac{v_N}{(r_M + h)^2} \\ -2\omega_e \cos \varphi - \frac{v_E}{(r_T + h) \cos^2 \varphi} & 0 & \frac{v_E \tan \varphi}{(r_T + h)^2} \end{pmatrix}$$

Et,

$$\delta\Omega_v = \begin{pmatrix} 0 & 1/(r_T + h) & 0 \\ -1/(r_M + h) & 0 & 0 \\ 0 & -\tan \varphi / (r_T + h) & 0 \end{pmatrix} \quad \text{B.15}$$

En utilisant l'Eq. B.14, le premier terme du côté droit de l'Eq. B.12, peut être développé en fonctions des erreurs de position et de vitesse :

$$v_{en}^n \times (2\delta\omega_{ie}^n + \delta\omega_{en}^n) = (v_{en}^n \times) (\delta\Omega_r \delta r^n + \delta\Omega_v \delta v^n) = (v_{en}^n \times) \delta\Omega_r \delta r^n + (v_{en}^n \times) \delta\Omega_v \delta v^n \quad \text{B.16}$$

En poursuivant la dérivation, nous obtenons :

$$(\mathbf{v}_{en}^n \times) \delta \mathbf{\Omega}_r = \begin{pmatrix} -2v_E \omega_e \cos \varphi - \frac{v_E^2}{(r_T + h) \cos^2 \varphi} & 0 & \frac{-v_N v_D}{(r_M + h)^2} + \frac{v_E^2 \tan \varphi}{(r_T + h)^2} \\ 2\omega_e (v_N \cos \varphi - v_D \sin \varphi) + \frac{v_E v_N}{(r_T + h) \cos^2 \varphi} & 0 & \frac{-v_E v_D}{(r_T + h)^2} - \frac{v_N v_E \tan \varphi}{(r_T + h)^2} \\ 2v_E \omega_e \sin \varphi & 0 & \frac{v_E^2}{(r_T + h)^2} + \frac{v_N^2}{(r_M + h)^2} \end{pmatrix} \quad \text{B.17}$$

Et,

$$(\mathbf{v}_{en}^n \times) \delta \mathbf{\Omega}_v = \begin{pmatrix} \frac{v_D}{r_M + h} & \frac{-v_E \tan \varphi}{r_T + h} & 0 \\ 0 & \frac{v_D}{r_T + h} + \frac{v_N \tan \varphi}{r_T + h} & 0 \\ \frac{-v_N}{r_M + h} & \frac{v_E}{r_T + h} & 0 \end{pmatrix} \quad \text{B.18}$$

Le vecteur de pesanteur dans le repère de navigation,  $\mathbf{g}^n$  est approximé par le vecteur normal de pesanteur  $(0 \ 0 \ \gamma)^T$ , et  $\gamma$  change avec l'altitude. Supposons un modèle sphérique de la terre et le modèle simplifié suivant de la pesanteur:

$$\gamma = \gamma_0 \left( \frac{R}{R+h} \right)^2 \quad \text{B.19}$$

Là ou  $\gamma_0$  est la pesanteur normale à  $h = 0$ , et  $R = \sqrt{r_M r_T}$ . Par la différenciation de la dernière équation on obtient :

$$\delta \gamma = -2 \left( \frac{\gamma}{R+h} \right) \delta h \quad \text{B.20}$$

En utilisant les équations de B.13 à B.20, l'équation dynamique d'erreur dans la vitesse B.12 peut être réécrite comme suit :

$$\delta \dot{\mathbf{v}}^n = F_{vr} \delta r^n + F_{vv} \delta v^n + (f^n \times) \boldsymbol{\varepsilon}^n + \mathfrak{R}_b^n \delta f^b \quad \text{B.21}$$

Où,

$$F_{vr} = \begin{pmatrix} -2v_E \omega_e \cos \varphi - \frac{v_E^2}{(r_T + h) \cos^2 \varphi} & 0 & \frac{-v_N v_D}{(r_M + h)^2} + \frac{v_E^2 \tan \varphi}{(r_T + h)^2} \\ 2\omega_e (v_N \cos \varphi - v_D \sin \varphi) + \frac{v_E v_N}{(r_T + h) \cos^2 \varphi} & 0 & \frac{-v_E v_D}{(r_T + h)^2} - \frac{v_N v_E \tan \varphi}{(r_T + h)^2} \\ -2v_E \omega_e \sin \varphi & 0 & \frac{v_E^2}{(r_T + h)^2} + \frac{v_N^2}{(r_M + h)^2} - 2\gamma / (R+h)^2 \end{pmatrix} \quad \text{B.22}$$

$$F_{\nu\nu} = \begin{pmatrix} \frac{v_D}{r_M + h} & -2\omega_e \sin \varphi - 2 \frac{v_E \tan \varphi}{r_T + h} & \frac{v_N}{r_M + h} \\ 2\omega_e \sin \varphi + \frac{v_E \tan \varphi}{r_T + h} & \frac{v_D + v_N \tan \varphi}{r_T + h} & 2\omega_e \cos \varphi + \frac{v_E}{r_T + h} \\ -2 \frac{v_N}{r_M + h} & -2\omega_e \cos \varphi - 2 \frac{v_E}{r_T + h} & 0 \end{pmatrix} \quad \text{B.23}$$

### Le modèle dynamique de l'erreur sur l'orientation

Le résultat calculé de la mécanisation sur l'orientation fournie par l'équation Eq.II.44 peut être exprimé par :

$$\hat{R}_b^n = \hat{R}_b^n (S(\hat{\omega}_{nb}^b)) = R_b^n (S(\hat{\omega}_{ib}^b) - S(\hat{\omega}_m^b)) = \hat{R}_b^n (\hat{\Omega}_{ib}^b - \hat{\Omega}_m^b) \quad \text{B.24}$$

En comparant la dérivée de l'équation B.4 à l'équation B.24, ceci donne :

$$\begin{aligned} -\dot{E}^n R_b^n + (I - E^n) \dot{R}_b^n &= (I - E^n) R_b^n (\Omega_{ib}^b - \Omega_m^b + \delta\Omega_{ib}^b - \delta\Omega_m^b) \\ &= (I - E^n) R_b^n (\Omega_{ib}^b - \Omega_m^b) + (I - E^n) R_b^n (\delta\Omega_{ib}^b - \delta\Omega_m^b) \\ &= (I - E^n) R_b^n (\Omega_{nb}^b) + (I - E^n) R_b^n (\delta\Omega_{ib}^b - \delta\Omega_m^b) \end{aligned}$$

Système embarqué temps réel de localisation et de modélisation 3D par fusion multi-capteur par conséquent, l'équation ci-dessus peut être réduite à :

$$-\dot{E}^n R_b^n = (I - E^n) R_b^n (\delta\Omega_{ib}^b - \delta\Omega_m^b) \quad \text{B.25}$$

En rassemblant les termes du premier ordre, l'équation B.25 peut être réduite à :

$$\dot{E}^n = -R_b^n (\delta\Omega_{ib}^b - \delta\Omega_m^b) R_n^b \quad \text{B.26}$$

Ou sous la forme vectorielle :

$$\dot{\varepsilon}^n = -R_b^n (\delta\omega_{ib}^b - \delta\omega_m^b) \quad \text{B.27}$$

Pour obtenir l'équation d'erreur pour  $\delta\omega_{in}^b$ , commençons par  $\hat{\omega}_{in}^b = R_n^b \hat{\omega}_{in}^n$ , qui peut être développé a :

$$\omega_m^b + \delta\omega_m^b = R_n^b (I + E^n) (\omega_m^n + \delta\omega_m^n) \quad \text{B.28}$$

En écrivant les termes de premières d'ordre,

$$\delta\omega_m^b = R_n^b (\delta\omega_m^b + E^n \omega_m^n) = R_n^b [\delta\omega_m^n + (\varepsilon^n \times) \omega_m^n] \quad \text{B.29}$$

En utilisant les équations B.29 et B.27

$$\dot{\varepsilon}^n = \delta\omega_m^n + (\varepsilon^n \times) \omega_m^n - R_b^n \delta\omega_{ib}^b = \delta\omega_m^n + (\omega_m^n \times) \varepsilon^n - R_b^n \delta\omega_{ib}^b \quad \text{B.30}$$

En remplaçant le premier terme du côté droit par les termes d'erreur de position et de vitesse explicitement, et en retournant aux équations B.14, les équations dynamiques d'erreur sur

l'orientation peuvent être réécrites comme :

$$\dot{\varepsilon}^n = F_{er} \delta r + F_{ev} \delta v^n - \omega_m^n \varepsilon^n - \mathfrak{R}_b^n \delta \omega_{ib}^b \quad \text{B.31}$$

Où,

$$F_{er} = \begin{pmatrix} -\omega_e \sin \varphi & 0 & \frac{-v_E}{(r_T + h)^2} \\ 0 & 0 & \frac{v_N}{(r_M + h)^2} \\ -\omega_e \cos \varphi - \frac{v_E}{(r_T + h) \cos^2 \varphi} & 0 & \frac{v_E \tan \varphi}{(r_T + h)^2} \end{pmatrix} \quad \text{B.32}$$

$$F_{ev} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{r_T + h} & 0 \\ \frac{-1}{r_M + h} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{-\tan \varphi}{r_T + h} & 0 \end{pmatrix} \quad \text{B.33}$$