

REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE

MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR
ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

UNIVERSITE DE BLIDA

INSTITUT DE MECANIQUE

THESE DE MAGISTER
SPECIALITE: GENIE MECANIQUE
OPTION: ENERGETIQUE

THEME:

ETUDE NUMERIQUE DES ECOULEMENTS
DANS DIFFERENTES CUVES AGITEES EN
REGIME LAMINAIRE

PRESENTEE PAR : Mr SETTOUF Mohamed

JURY:

PRESIDENT:	Dr AIT MESSAOUDENE - Maitre de Conferences
RAPPORTEUR:	Dr TOUATI - Maitre de Conferences
EXAMINATEUR:	Dr HARHAD - Maitre de Conferences
	Mr BENKEDDA Chargé de cours





32-530-545-1

REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE

**MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR
ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE**

UNIVERSITE DE BLIDA

INSTITUT DE MECANIQUE

**THESE DE MAGISTER
SPECIALITE: GENIE MECANIQUE
OPTION: ENERGETIQUE**

THEME:

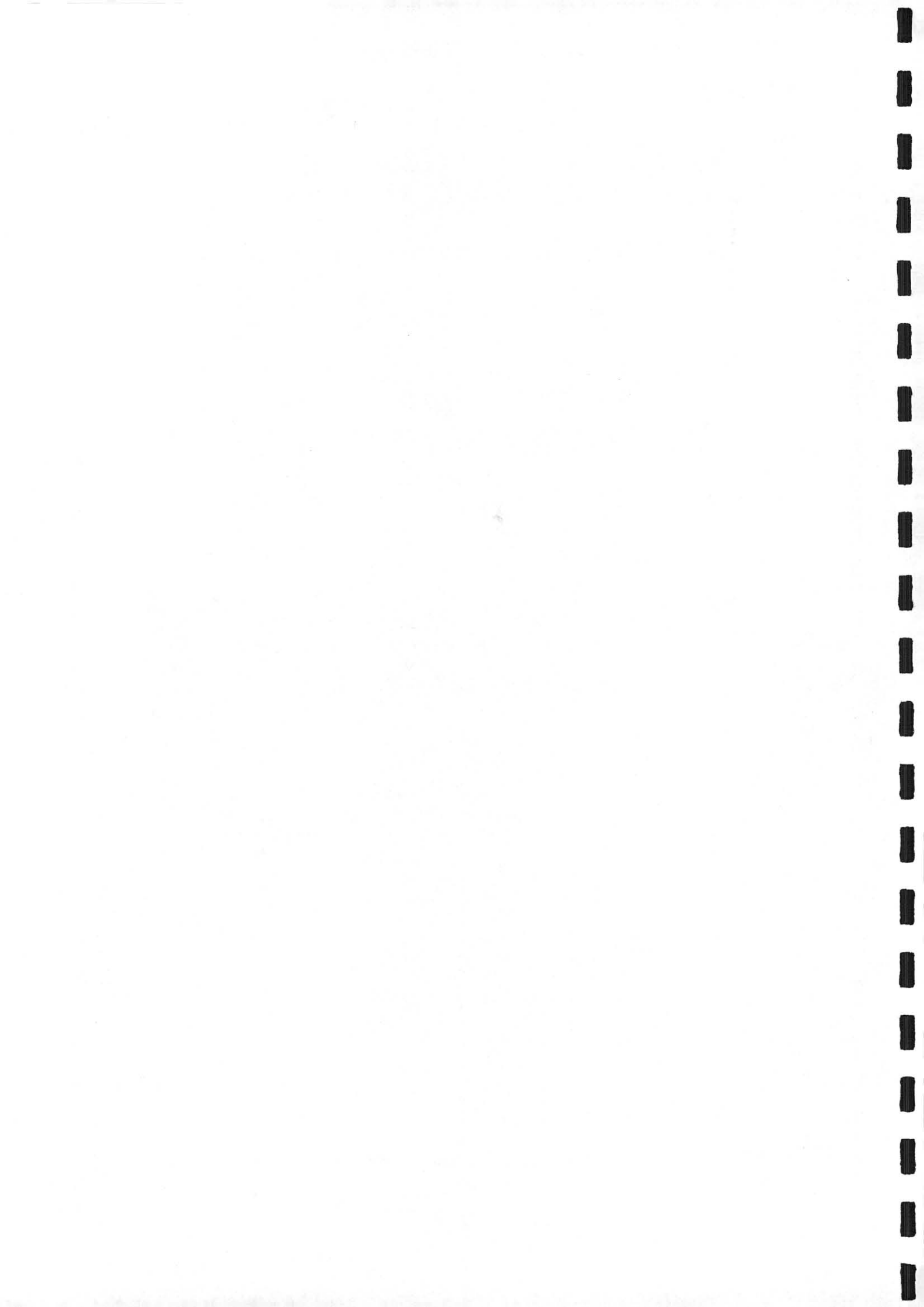
**ETUDE NUMERIQUE DES ECOULEMENTS
DANS DIFFERENTES CUVES AGITEES EN
REGIME LAMINAIRE**

PRESENTEE PAR : Mr SETTOUF Mohamed

JURY:

PRESIDENT:	Dr AIT MESSAOUDENE - Maitre de Conferences
RAPPORTEUR:	Dr TOUATI - Maitre de Conferences
EXAMINATEUR:	Dr HARHAD - Maitre de Conferences
	Mr BENKEDDA Chargé de cours

PROMOTION: NOVEMBRE 1995



REMERCIEMENTS

En premier lieu je tiens à remercier tous les enseignants ayant contribué à ma formation et j'exprime ma profonde gratitude à mon promoteur Dr.DAHMANE TOUATI de l'institut de mécanique " Université de Blida", pour m'avoir guidé et orienté à la réalisation de cette thèse, qu'il trouve ici ma sincère reconnaissance.

Mes remerciements vont directement à Monsieur le président de jury, Dr. Nourddine AIT MESSAOUDENE, pour l'intérêt qu'il a porté à cette thèse et de ses conseils précieux durant toute ma formation.

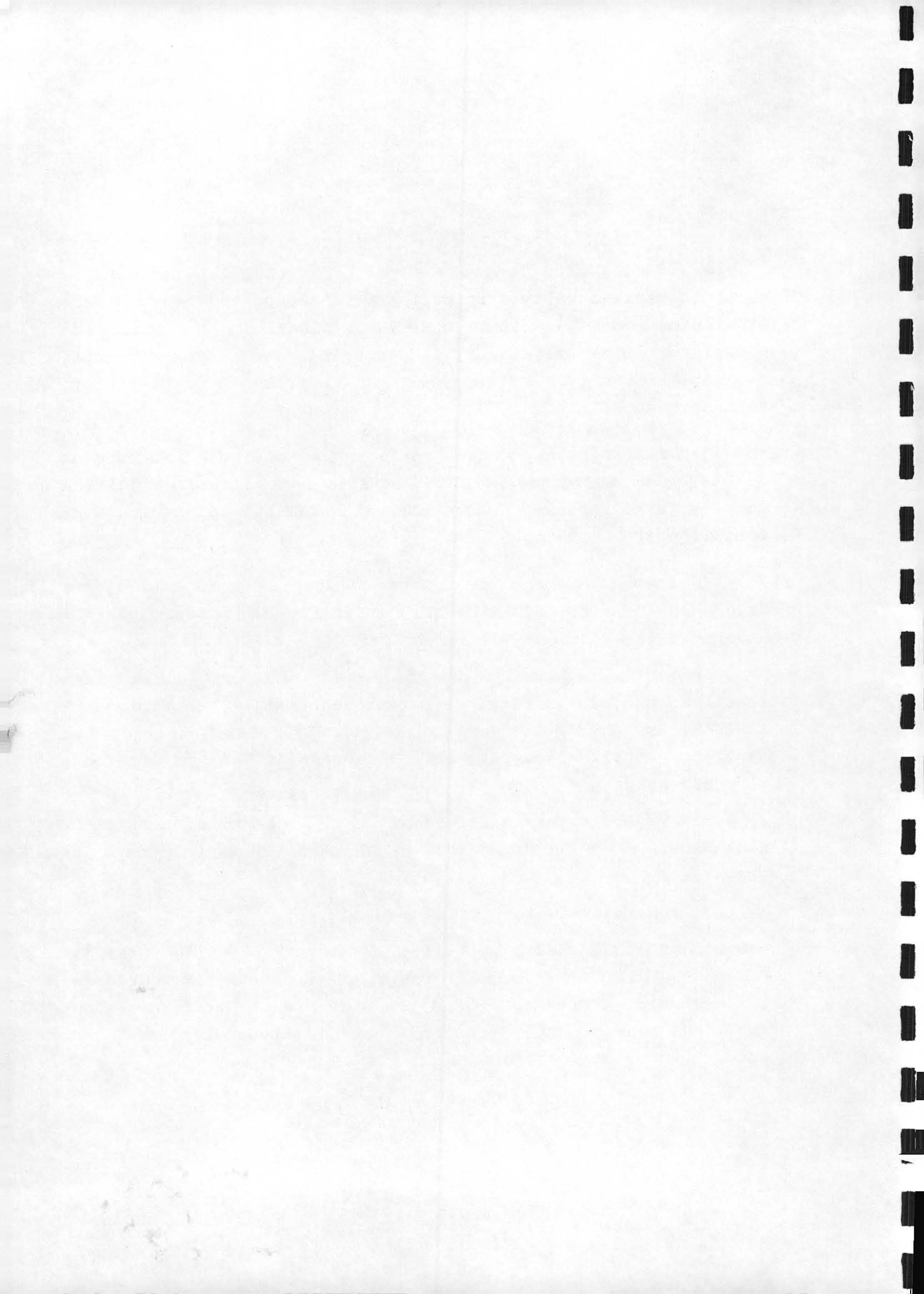
Je tiens aussi à remercier Messieurs les membres de jury, Dr. A.HARHAD et Dr. BENKHADA qui m'ont fait l'honneur de juger et de mettre en valeur ce modeste travail.

Je tiens également à remercier en particulier les enseignants de l'institut de mécanique de BLIDA, le Professeur A.SOUAHI, Dr. M.AZINE et Dr. CHEIKH (USTHB), pour leur aide et soutien, qu'ils trouvent ici l'expression de ma profonde reconnaissance.

Mes remerciements s'adressent aussi à mes amis H.BENTRAD, R.SAADAOUI et B.CHOUCRAT qui m'ont aidé beaucoup dans ce travail.

Je remercie vivement tous mes amis (es):

N.Souâd, Abass HALLAZ, I. Chérif, H.Fares F.BENCHIKH ,G.Nadia, O.Nadia, S.Aïcha, Assia, Yahia, A.Abdenour S.Nourddine, B.Abdelhamid, G.Mohamed, H.Nadjia, B.Zouhir, N.Saadi et à tout les enseignats du Technicum de Birkhadem, pour leur encouragement et soutien.



Résumé

L'agitation mécanique occupe une place très importante au sein des procédés industriels. Grâce à cela, les praticiens, par leurs expériences, et les numériciens, par l'analyse numérique et l'informatique, donnent de plus en plus d'informations détaillées et fiables sur la structure des écoulements en cuve agitée. Les études combinant les deux approches ont également contribué à cet approfondissement de la connaissance.

Par rapport aux systèmes déjà existants, l'amélioration apportée par notre travail se situe dans la possibilité d'utiliser des géométries différentes de cuves agitées par un ou plusieurs mobiles de natures différentes, pour un fluide newtonien.

En régime laminaire, nous avons simulé les écoulements en cuve non chicanée, ce qui nous a permis de supposer l'écoulement tridimensionnel et axisymétrique, donc homogène dans la direction tangentielle. L'avantage est la mise au point d'un code de calcul assez léger en capacité mémoire, exigeant des temps de calcul faibles sur un micro-ordinateur de type PC, muni d'un coprocesseur arithmétique.



SOMMAIRE

LISTE DES TABLEAUX	
LISTE DES FIGURES	
NOMENCLATURE	
INTRODUCTION GENERALE	

CHAPITRE N°: 1

INTRODUCTION AUX PHENOMENES D'AGITATION ET DES MELANGES	
1-1 INTRODUCTION	1
1-2 GEOMETRIE DES SYSTEME D'AGITATION	3
a) Les cuves	3
b) Les agitateurs	4
- Agitateurs à refoulement radial	4
- Agitateurs à refoulement axial	5
- Systèmes à mouvement tangentiel	6
1-3 SYSTEMES RETENUS POUR LA SIMULATION	7

CHAPITRE N°: 2

CARACTERISTIQUES MACROSCOPIQUES DE L'AGITATION MECANIQUE	
2-1 INTRODUCTION	8
2-2 PUISSANCE D'AGITATION ET NOMBRE DE PUISSANCE	8
- Nombre de Reynolds	8
- Nombre de Froude	10
- Nombre de Weber	10
- Nombre de puissance	10
2-2-1 Calcul de la puissance d'agitation	11
2-3 DEBIT DE POMPAGE ET NOMBRE DE POMPAGE	12
- Cas de la turbine de Rushton	12
- Cas d'une hélice	13
2-4 DEBIT DE CIRCULATION	13
2-5 TEMPS DE CIRCULATION	16
2-6 TEMPS DE MELANGE	16



CHAPITRE N°: 3

FORMULATION MATHEMATIQUE

3-1 INTRODUCTION	17
3-2 EQUATIONS	17
- Equation de continuité	17
- Equation de quantité de mouvement suivant r	17
- Equation de quantité de mouvement suivant θ	18
- Equation de quantité de mouvement suivant z	18
- Equation de transfert de matière	18
3-3 HYPOTHESES DU MODEL MATHEMATIQUE	20
3-4 CONDITIONS AUX LIMITES	21
- Conditions aux limites sur un agitateur	22
- Conditions aux limites sur l'axe	22
- Conditions aux limites à la paroi latérale et le fond	23
- Conditions aux limites à la surface libre	24
3-5 CONDITIONS AUX LIMITES POUR LE TRANSFERT DE MATIERE	24
3-6 CONDITIONS INITIALES	25
3-7 DEGRE D'HOMOGENEITE	25
3-8 MISE DES EQUATIONS SOUS FORME ADIMENSIONNELLE	27

CHAPITRE N°: 4

RESOLUTION NUMERIQUE

4-1 INTRODUCTION	29
4-2 MAILLAGE	29
4-3 DISCRIPTION DU PROGRAMME MAILLEUR	32
4-4 MISE EN FORME DES EQUATIONS	33
4-4-1 Transformation des équations	33
4-4-2 Forme générale des équations	34
4-5 DISCRETISATION	36
4-6 FORMULATION GENERALISEE DE LA VARIABLE ϕ	40
- Schéma centré	45
- Schéma décentré amont " Apwind "	47

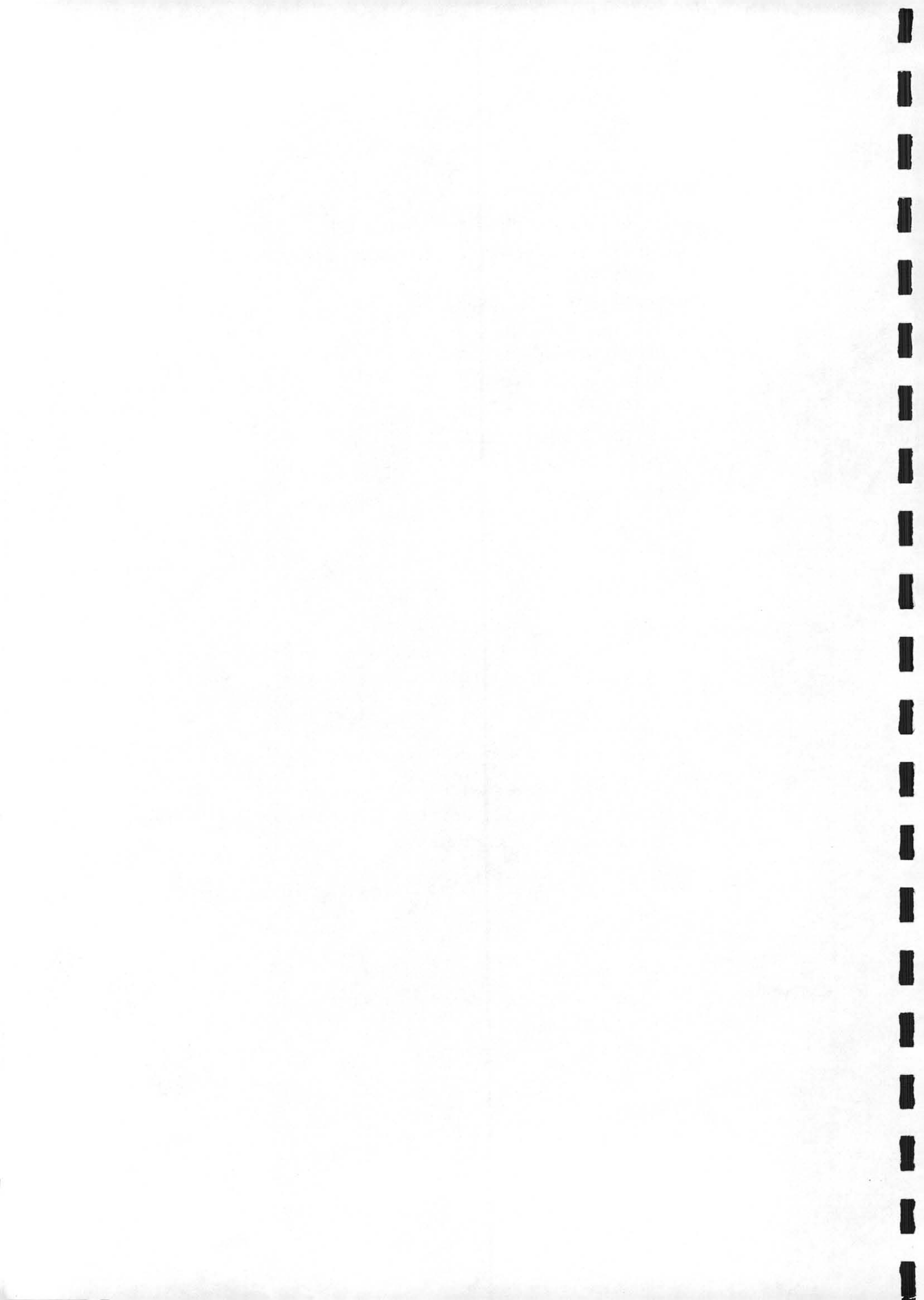


- Schéma hybride	48
- Schéma exponentiel " exacte "	49
- Schéma en loi puissance	51
- Résumé	52
4-7 LA CONVERGENCE	53
4-7-1 Consistance d'un schéma	54
4-7-2 Stabilité d'un schéma	54
4-8 COUPLAGE VITESSE-PRESSION	55
- Algorithme SIMPLER	56
- Equations de correction de vitesse et de pression	57
4-9 RESOLUTION DES SYSTEMES LINEAIRES	59
- Méthodes itératives	60
4-10 ORGANIGRAMME	61

CHAPITRE N°: 5

RESULTATS

5-1 SYSTEMES MONO-ETAGES	62
5-1-1 Cuve équipée d'une turbine de Rushton	62
a) Fond plat	63
b) Fond bombé	69
c) Fond conique	72
d) Cas d'une géométrie particulière	75
- Cuve large et peu profonde à fond plat	75
- Cuve large et peu profonde à fond bombé	79
5-1-2 Cuve équipée d'une hélice à pales minces (HPM)	81
a) Fond plat	82
b) Fond bombé	87
c) Fond conique	87
d) Cas d'une géométrie particulière	91
- Cuve profonde	91



CHAPITRE N°: 3

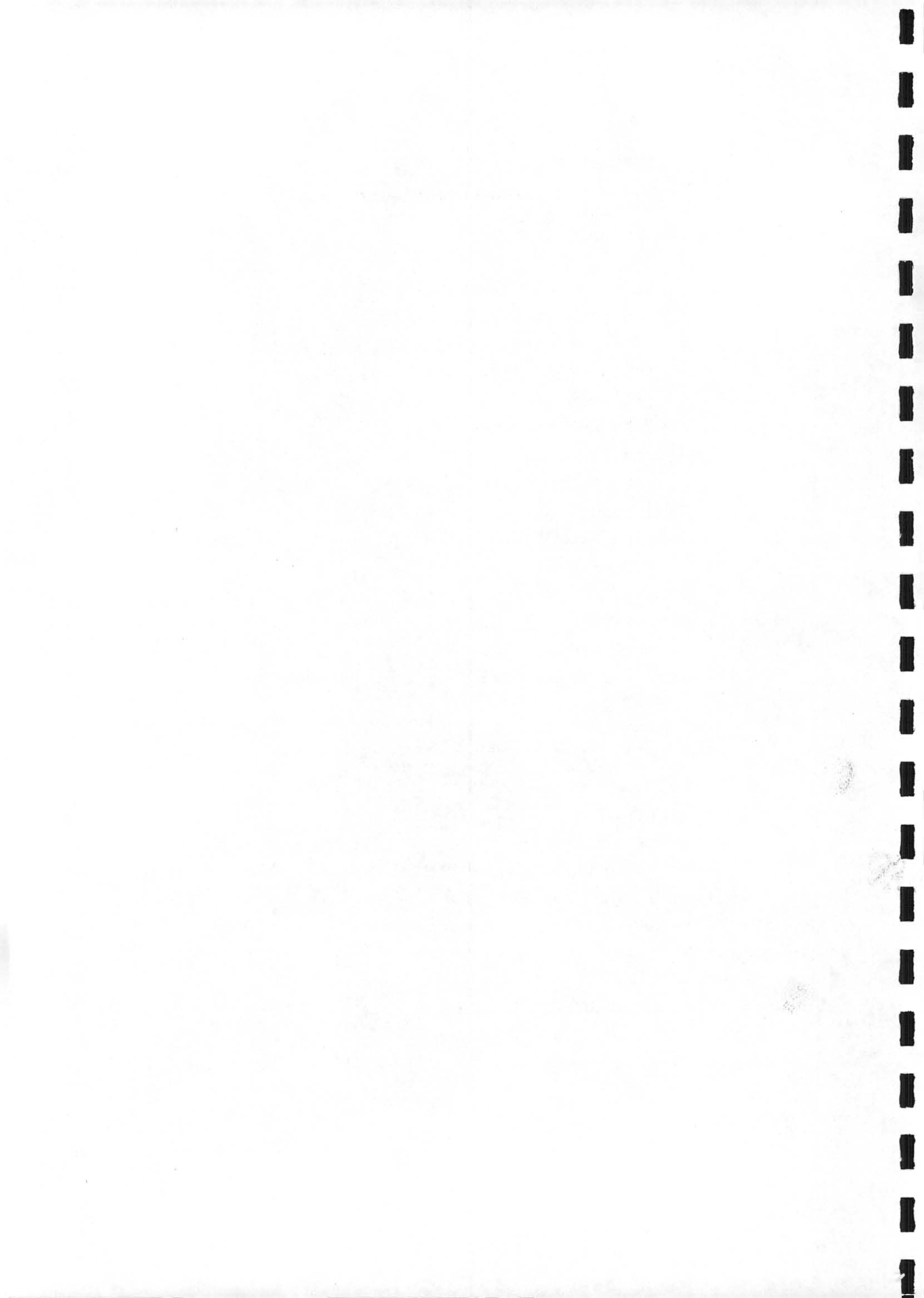
FORMULATION MATHEMATIQUE

3-1 INTRODUCTION	17
3-2 EQUATIONS	17
- Equation de continuité	17
- Equation de quantité de mouvement suivant r	17
- Equation de quantité de mouvement suivant θ	18
- Equation de quantité de mouvement suivant z	18
- Equation de transfert de matière	18
3-3 HYPOTHESES DU MODEL MATHEMATIQUE	20
3-4 CONDITIONS AUX LIMITES	21
- Conditions aux limites sur un agitateur	22
- Conditions aux limites sur l'axe	22
- Conditions aux limites à la paroi latérale et le fond	23
- Conditions aux limites à la surface libre	24
3-5 CONDITIONS AUX LIMITES POUR LE TRANSFERT DE MATIERE	24
3-6 CONDITIONS INITIALES	25
3-7 DEGRE D'HOMOGENEITE	25
3-8 MISE DES EQUATIONS SOUS FORME ADIMENSIONNELLE	27

CHAPITRE N°: 4

RESOLUTION NUMERIQUE

4-1 INTRODUCTION	29
4-2 MAILLAGE	29
4-3 DISCRIPTION DU PROGRAMME MAILLEUR	32
4-4 MISE EN FORME DES EQUATIONS	33
4-4-1 Transformation des équations	33
4-4-2 Forme générale des équations	34
4-5 DISCRETISATION	36
4-6 FORMULATION GENERALISEE DE LA VARIABLE ϕ	40
- Schéma centré	45
- Schéma décentré amont " Apwind "	47



- Schéma hybride	48
- Schéma exponentiel " exacte "	49
- Schéma en loi puissance	51
- Résumé	52
4-7 LA CONVERGENCE	53
4-7-1 Consistance d'un schéma	54
4-7-2 Stabilité d'un schéma	54
4-8 COUPLAGE VITESSE-PRESSION	55
- Algorithme SIMPLER	56
- Equations de correction de vitesse et de pression	57
4-9 RESOLUTION DES SYSTEMES LINEAIRES	59
- Méthodes itératives	60
4-10 ORGANIGRAMME	61

CHAPITRE N°: 5

RESULTATS

5-1 SYSTEMES MONO-ETAGES	62
5-1-1 Cuve équipée d'une turbine de Rushton	62
a) Fond plat	63
b) Fond bombé	69
c) Fond conique	72
d) Cas d'une géométrie particulière	75
- Cuve large et peu profonde à fond plat	75
- Cuve large et peu profonde à fond bombé	79
5-1-2 Cuve équipée d'une hélice à pales minces (HPM)	81
a) Fond plat	82
b) Fond bombé	87
c) Fond conique	87
d) Cas d'une géométrie particulière	91
- Cuve profonde	91

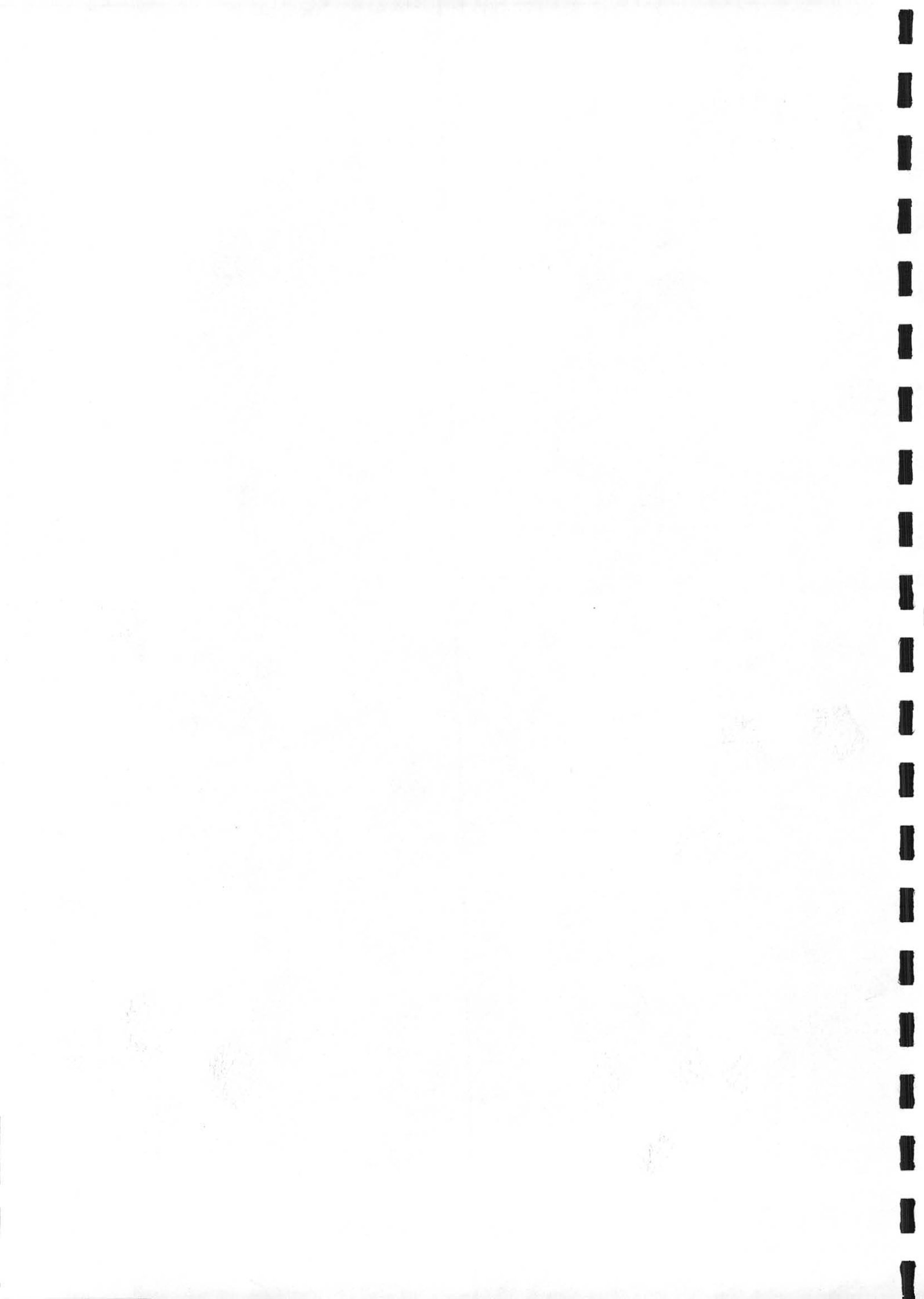
FIGURES

1-1 Géométrie des cuve		3
1-2 Agitateurs du type " turbine "		4
1-3 Agitateurs du type " hélice "		5
1-4 Agitateurs à débit tangentiel		6
2-1 Paramètres géométriques d'agitations		9
2-2 Courbe caractéristique de puissance		12
2-3 Débit de pompage, débit induit et débit de circulation (cas d'une hélice)		14
2-4 Débit de pompage, débit induit et débit de circulation (cas d'une turbine)		15
3-1 Frontière du domaine de calcul		21
4-1 Points de calcul		
4-2 Maillage des cuves		31
4-3 Volume de contrôle		36
4-4 Volume de contrôle relatif à l'équation de continuité		39
4-5 Densité du flux total J entre deux noeuds du maillage		40
4-6 Variation de la fonction $A(P_m)$ pour différents schémas		53
 CUVE EQUIPEE D'UNE TURBINE DE RUSHTON :		
a) Fond plat:		
5-1 Projection des vecteurs vitesse dans un plan vertical		65
5-2 Lignes de courant		66
5-3 Vitesse tangentielle		67
5-4 Lignes d'iso-dissipation visqueuse		68
 b) Fond bombé:		
5-5 Projection des vecteurs vitesse dans un plan vertical		70
5-6 Lignes de courant		71
 c) Fond conique:		
5-7 Projection des vecteurs vitesse dans un plan vertical		73
5-8 Flux tangentiel		74





5-2 SYSTEMES MULTI-ETAGES	94
5-2-1 Systèmes à deux turbines de Rushton	94
a) Ecoulements en configuration classique	94
b) Influence de rapprochement des deux mobiles	97
5-2-2 Systèmes à deux étages:	101
Association turbine/hélice	
- Ecoulements	101
- Influence du nombre de Reynolds	106
5-2-3 Systèmes à trois étages:	108
Association turbine/hélice/hélice	
- Ecoulements	108
- Influence du diamètre des agitateurs	112
5-3 PUISSANCE DISSIPÉE	115
5-4 TEMPS DE MELANGE	116
 CONCLUSIONS ET PERSPECTIVES	 118
 BIBLIOGRAPHIE	
ANNEXE	



d) Cas d'une cuve particulière:

■ cuve large et peu profonde à fond plat

5-9	Projection des vecteurs vitesse dans un plan vertical	76
5-10	Flux tangentiel	77
5-11	Lignes de courant	78

■ cuve large et peu profonde à fond plat

5-12	Projection des vecteurs vitesse dans un plan vertical et les lignes de courant	80
------	---	----

CUVE EQUIPEE D'UNE HELICE HPM :

b) Fond plat:

5-13	Projection des vecteurs vitesse dans un plan vertical	84
5-14	Lignes de courant	85
5-15	Lignes d'iso-dissipation visqueuse	86

b) Fond bombé:

5-16	Projection des vecteurs vitesse dans un plan vertical	88
5-17	Flux tangentiel	89

c) Fond conique:

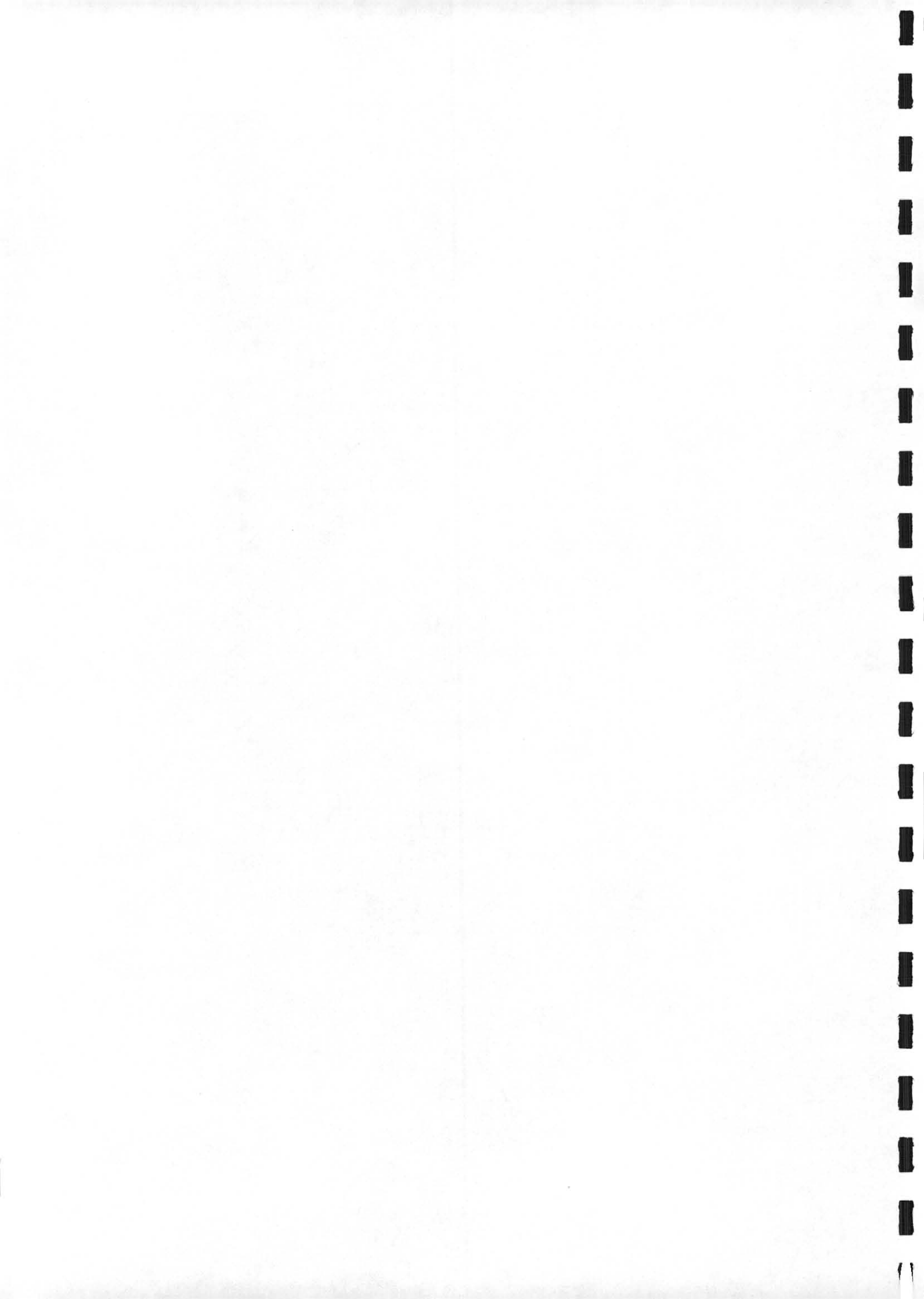
5-18	Projection des vecteurs vitesse dans un plan vertical	90
------	---	----

d) Cas d'une cuve particulière: cuve profonde à fond bombé

5-19	Projection des vecteurs vitesse dans un plan vertical	92
5-20	Lignes de courant	93

SYSTEME A DEUX TURBINES DE RUSHTON (fond plat):

5-21	Projection des vecteurs vitesse dans un plan vertical	95
5-22	Lignes de courant	96
■ Influence de rapprochement des deux mobiles:		
5-23	Projection des vecteurs vitesse dans un plan vertical	98
5-24	Lignes de courant	99
5-25	Lignes d'iso-dissipation visqueuse	100



ASSOCIATION TURBINE/HELICE (fond plat):

5-26	Projection des vecteurs vitesse dans un plan vertical	103
5-27	Lignes de courant	104
5-28	Lignes d'iso-dissipation visqueuse	105

■ Influence du nombre de Reynolds $Re = 1$

5-29	Projection des vecteurs vitesse dans un plan vertical	107
------	---	-----

SYSTEMES A TROIS ETAGES (turbine + hélice + hélice):

5-30	Projection des vecteurs vitesse dans un plan vertical	109
5-31	Lignes de courant	110
5-32	Lignes d'iso-dissipation visqueuse	111

■ Influence du diamètre des agitateurs:

5-33	Projection des vecteurs vitesse dans un plan vertical	113
5-34	Lignes d'iso-dissipation visqueuse	114
5-36	Comparaison des nombres de puissance dans une cuve sans chicanes à fond plat	115
5-37	Turbine - Champ de concentration	118



NOTATIONS

- a_E : Coefficient Est de la discrétisation
 a_N : Coefficient Nord de la discrétisation
 a_P : Coefficient diagonale de la discrétisation
 a_S : Coefficient Sud de la discrétisation
 a_W : Coefficient Ouest de la discrétisation
 C : Concentration
 D : Tenseur taux de déformation
Domaine de calcul
 D_a : Diamètre de l'agitateur
 D_c : Diamètre de la cuve
 D_i : Diamètre de l'agitateur i
 D_m : Diamètre maximum
 dg : Degré d'homogénéité
 dt : Pas dans le temps
 dr : Longueur de la maille
 dz : Hauteur de la maille
 D_f : Coefficient de diffusion
 D_m : Conductances massiques aux interfaces $m = e, w, n$ et s
 E : Point Est
 e : Facette Est
 err : Erreur
 Fr : Nombre de Froude
 F_m : Flux massique aux interfaces $m = e, w, n$ et s
 $f()$: Fonction
 g : Accélération de la pesanteur
 H : Hauteur de remplissage
 h : Hauteur d'implantation
 J : Flux convectif-diffusif
 N : Vitesse de rotation en tours par seconde
Point nord de la discrétisation
 N_i : Vitesse de rotation en tours par seconde de l'agitateur i
 N_m : Vitesse de rotation maximum



NOTATIONS

- a_E : Coefficient Est de la discrétisation
 a_N : Coefficient Nord de la discrétisation
 a_P : Coefficient diagonale de la discrétisation
 a_S : Coefficient Sud de la discrétisation
 a_W : Coefficient Ouest de la discrétisation
C : Concentration
D : Tenseur taux de déformation
 Domaine de calcul
Da : Diamètre de l'agitateur
Dc : Diamètre de la cuve
Di : Diamètre de l'agitateur i
Dm : Diamètre maximum
dg : Degré d'homogénéité
dt : Pas dans le temps
dr : Longueur de la maille
dz : Hauteur de la maille
Df : Coefficient de diffusion
Dm : Conductances massiques aux interfaces $m = e, w, n$ et s
E : Point Est
e : Facette Est
err: Erreur
Fr : Nombre de Froude
Fm : Flux massique aux interfaces $m = e, w, n$ et s
f(): Fonction
g : Accélération de la pesanteur
H : Hauteur de remplissage
h : Hauteur d'implantation
J : Flux convectif-diffusif
N : Vitesse de rotation en tours par seconde
 Point nord de la discrétisation
Ni : Vitesse de rotation en tours par seconde de l'agitateur i
Nm : Vitesse de rotation maximum

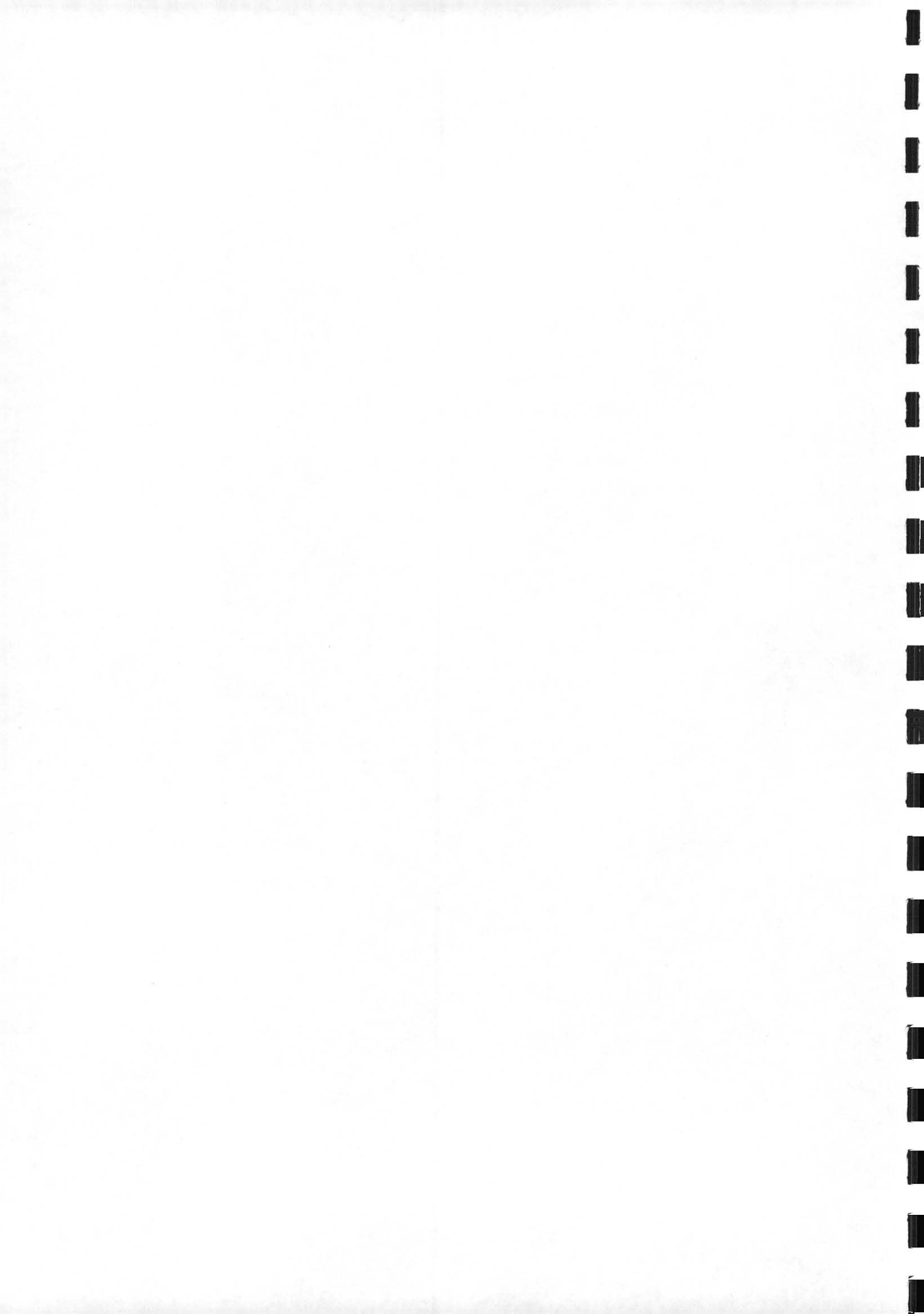


Nc : Nombre de cellules de concentration C
Ne : Nombre de Newton
No : Nombre de cellules de concentration nulle
Nt : Nombre de cellules total
Np : Nombre de puissance
NQp: Nombre de pompage
n : Facette Nord
P : Pression, puissance dissipée, ou point centrale
Pe : Nombre de Peclet
Qc : Débit de circulation
Qi : Débit induit
Qp : Débit de pompage
Qt : Débit tangentiel
R : Rayon de l'agitateur
Rea: Nombre de Reynolds de l'agitateur
Reg: Nombre de Reynolds global de l'écoulement
r : Coordonnée radiale
S : Point Sud de la discrétisation
Sc : Terme source linéarisé
Sp : Terme souce
s : Facette Sud
t : Temps
tc : Temps de circulation
tm : Temps de mélange
Vi : Composante quelconque du champ de vitesse
Vr : Composante radiale du champ de vitesse
V θ : Composante tangentielle du champ de vitesse
Vz : Composante axiale du champ de vitesse
Vo : Volume de la cuve
W : Point Ouest de la discrétisation
w : Facette Ouest
z : Coordonnée axiale
Zf : Fonction du fond de la cuve



Lettres Greques

- α : Coefficient de pondération
 β : Facteur multiplicatif
 ϕ : Propriété transportable
 ρ : Masse volumique
 θ : Coordonnée tangentielle
 μ : Viscosité cinématique
 ν : Viscosité dynamique
 Γ_{ϕ} : Coefficient de diffusivité
 σ : Ecart type
 τ : Tenseur des contraintes de cisaillement
 τ_{ij} : Composante du tenseur des contraintes de cisaillement



INTRODUCTION GENERALE :

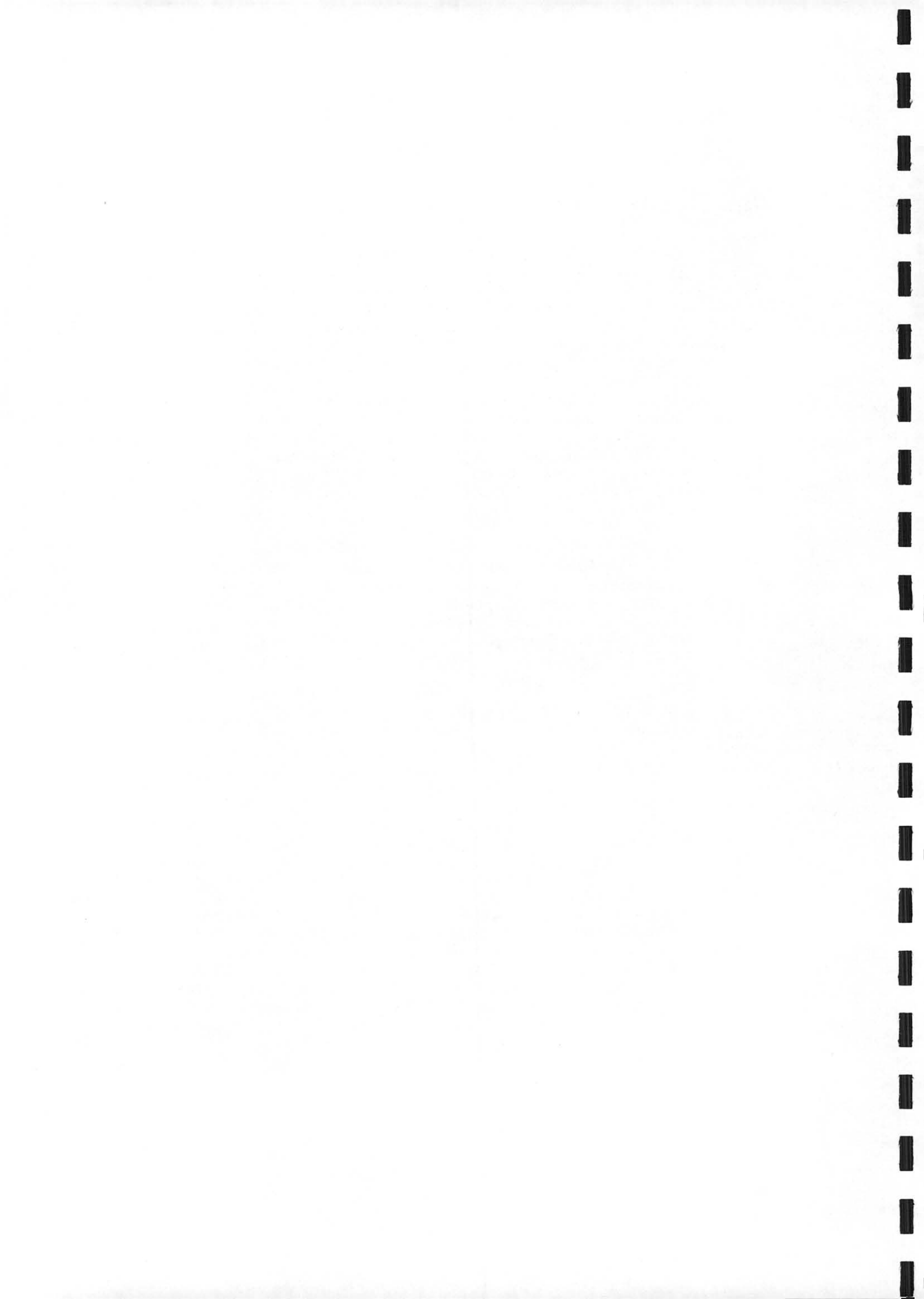
L'étude des structures des écoulements en cuve agitée est un sujet actuellement très important de la recherche. Des approches théoriques se succèdent parallèlement aux études expérimentales de plus en plus sophistiquées.

L'analyse théorique est toujours fondée sur la résolution numérique des équations de NAVIER-STOKES. La complexité de ces équations et des phénomènes physiques mis en jeu est à l'origine d'une limitation naturelle de ce type d'étude, bien que, depuis quelques années, on ait pu constater l'apparition de logiciels commerciaux et le développement de techniques numériques solides.

Dans la pratique, l'étude expérimentale est menée en laboratoire sur des maquettes de taille réduite. L'analyse fine de la structure des écoulements en cuve agitée est aujourd'hui envisageable expérimentalement, grâce à des techniques comme l'Anémométrie Laser Doppler, qui est de plus en plus utilisée, au détriment de techniques intrusives plus anciennes, comme le tube de Pitot, le moulinet, ou l'anémométrie à film chaud.

Parmi ces études d'évolution de l'état macroscopique global du mélange dans la cuve, Bertrand et Couderc [15] ont simulé numériquement les écoulements des fluides visqueux newtoniens autour d'agitateurs plans bipales, ancres ou barrière. La simplification du problème en un problème bidimensionnel permet de s'affranchir des gradients de pression les plus difficiles à formuler en introduisant une formulation dite de Helmholtz. Celle-ci permet le calcul de la fonction de courant et de la fonction rotationnel de l'écoulement.

Ohta et Coll (1985) ont simulé les écoulements secondaires générés dans une cuve agitée par une ancre. Le problème a été rendu bidimensionnel moyennant des hypothèses simplificatrices. Les études tridimensionnelles sont récentes et peu nombreuses ([16], [17]). Bolour et Froushan (1986) ont simulé les écoulements générés par une turbine. Cette dernière est modélisée par un volume générant les mêmes conditions de frontière moyennes que la turbine.



Des tentatives de modélisation de l'écoulement dans le courant de refoulement d'une turbine ont également été effectuées. Bohlar et Coll (1978) ont simulé l'écoulement généré par une turbine en l'assimilant à un jet tournant. Le liquide issu de ce jet possède uniquement la composante tangentielle de vitesse, et il est considéré comme plongé dans un milieu liquide initialement au repos.

Notre travail se situe dans l'exploitation d'un code de calcul assez léger en capacité mémoire pour des géométries différentes de cuves agitées par un ou plusieurs agitateurs de types "Turbine" ou "Hélice".

Dans cet objectif, nous avons utilisé la méthode aux volumes finis pour la résolution des équations de Navier-Stokes et l'équation de transfert de matière. Les résultats obtenus sont commentés et représentés sous formes de lignes de courant et de projection des vecteurs vitesse dans un plan vertical.

Nous présentons les différentes étapes nécessaires pour l'exploitation d'un tel code de calcul (code Simplr); qui a été mis à notre disposition :

Les deux premiers chapitres sont consacrés à une revue bibliographique sur l'agitation mécanique et les mélanges, et les systèmes retenus pour la simulation

Le chapitre trois consiste en la formulation mathématique régissant le phénomène convection-diffusion et le transfert de matière.

Le chapitre quatre concerne la présentation de la méthode des volumes finis et son application aux équations de Navier-Stokes, ainsi que l'équation de transfert de matière, en coordonnées cylindriques.

Dans le chapitre cinq, nous présenterons et discuterons les différents résultats obtenus par la simulation numérique pour différentes géométries (cuves cigares, cuves standards ou cuves camemberts) agitées par un ou plusieurs mobiles d'agitation; la turbine et l'hélice.

Nous terminerons ce travail par une conclusion générale suivie de perspectives concernant la présente étude.

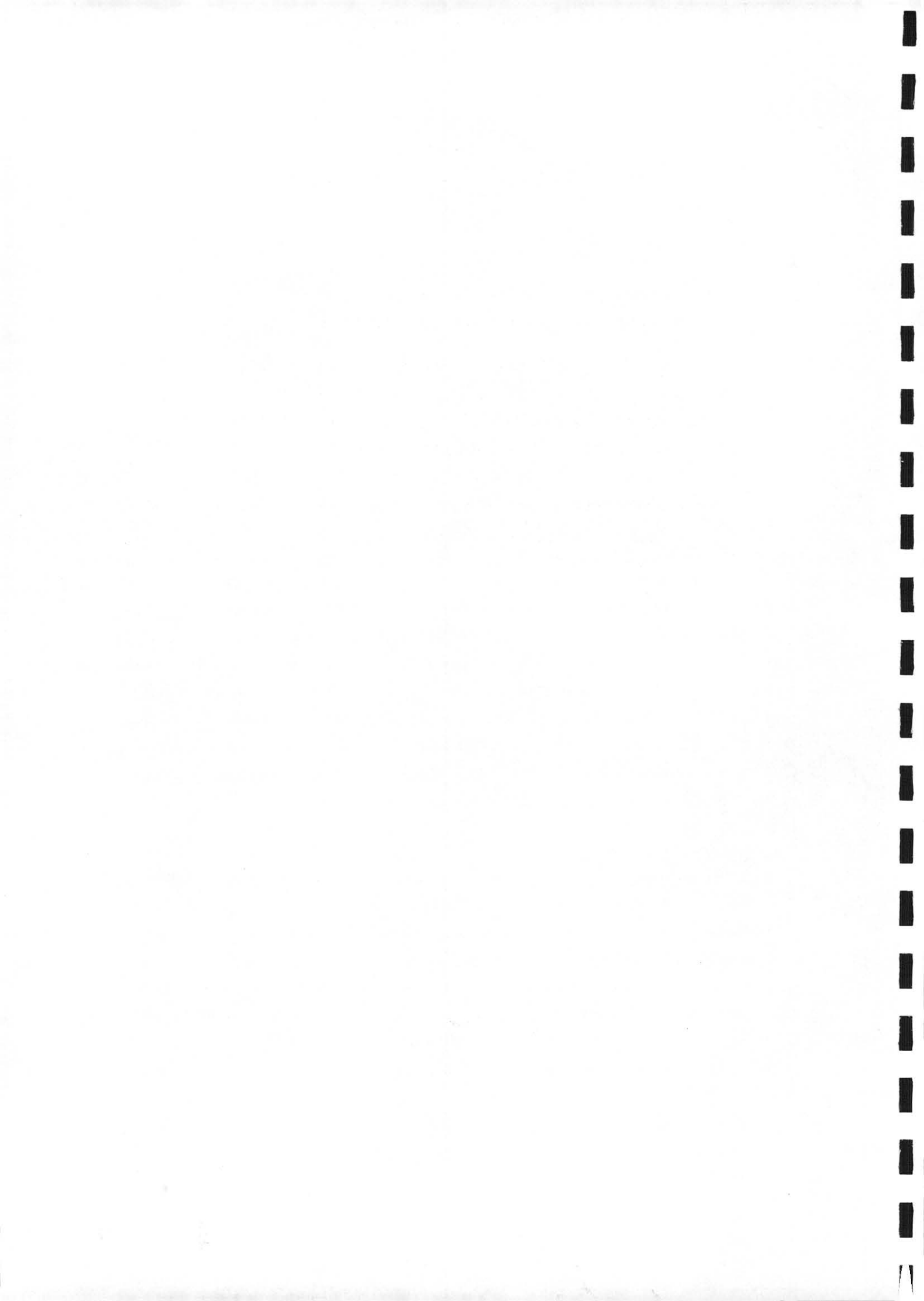


INTRODUCTION AUX PHENOMENES D'AGITATION ET DES MELANGES

1-1) INTRODUCTION :

Les fonctions exigibles pour un agitateur industriel sont diverses; elles peuvent être le mélange de liquides miscibles, la mise en suspension d'un solide dans un liquide, l'accélération du chauffage ou du refroidissement d'un milieu, le mélange de poudres, etc... Les agitateurs industriels remplissent probablement beaucoup d'autres fonctions dans d'autres types de génie des procédés ou de fabrications. Les différentes opérations citées ci-dessus se retrouvent dans un grand nombre de branches industrielles, agroalimentaire, pharmacie et chimie fine, chimie de base, traitement des eaux, plastiques, peintures, papier, pétrole, d'autres encore... Il est donc légitime de penser qu'à un type de fonction, dans un domaine industriel identifié, va correspondre une famille d'agitateurs précis. Il serait même possible de penser qu'il existe des abaques ou des logiciels, permettant le choix des équipements nécessaires. Le choix rationnel d'un équipement, l'optimisation de son mode de fonctionnement sont les gages de bonne mise en oeuvre des procédés. Malheureusement, nous n'en sommes pas encore arrivés à ce point, le choix d'un agitateur se fait souvent par intuition ou analogie.

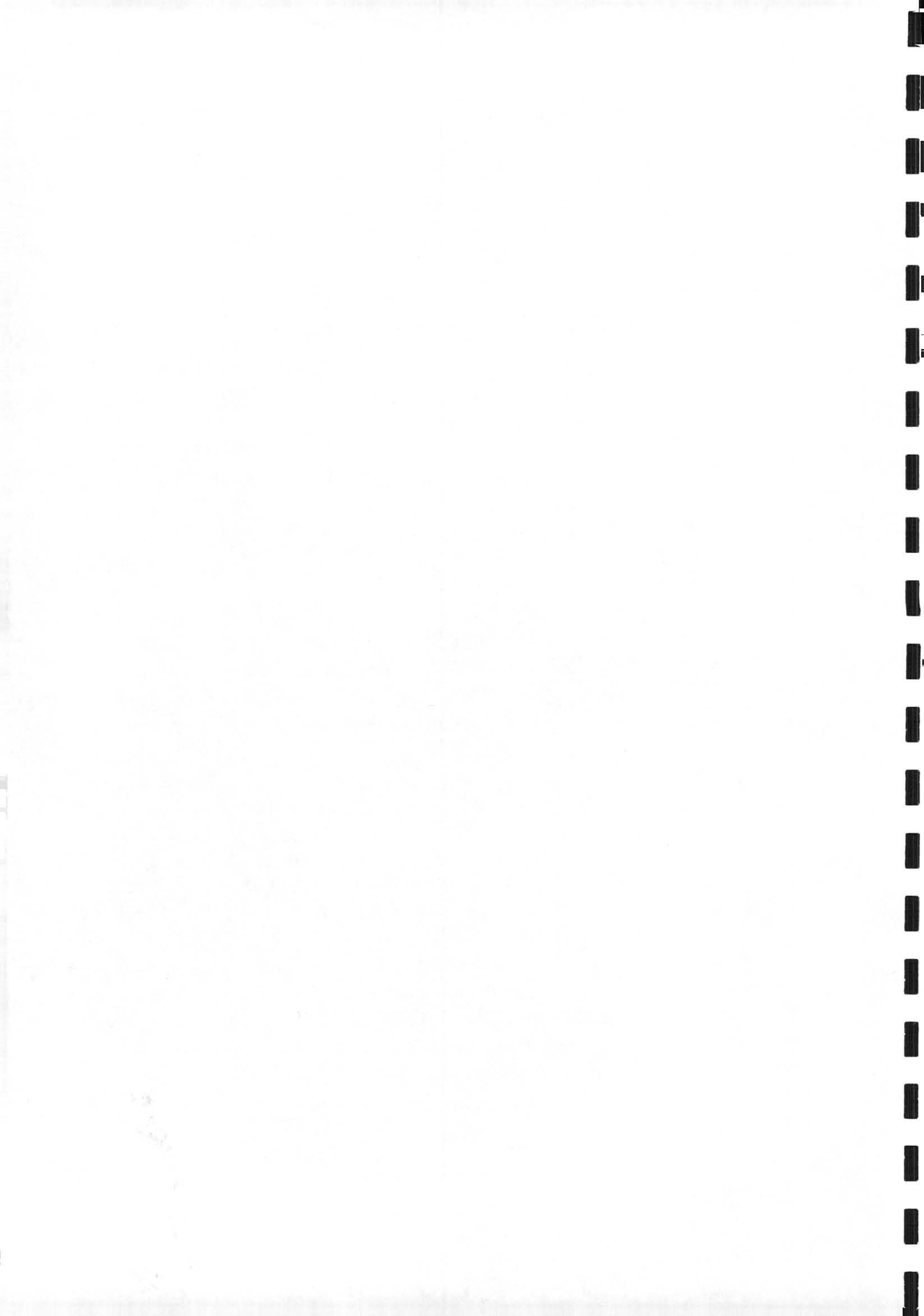
Le premier agitateur industriel est apparu à la fin du dix-neuvième siècle, il s'agissait d'une hélice marine et le métier concerné était l'industrie des engrais, c'est-à-dire la chimie de base. Vraisemblablement, les résultats furent satisfaisants à l'échelle de mesure de l'époque. Nous ne savons pas exactement pourquoi ce type de mobile fut retenu, sûrement à cause d'un ensemble de hasards qui ont mené à ce choix. Par ailleurs, sont également apparus dans des ateliers ou petites unités régionales des outils constitués de barres ou rondins



plus ou moins tordus. En boulangerie, les pétrins ont commencé à avoir des formes spécifiques. Le succès de ces opérations dans des métiers qui s'ignoraient a fait que les améliorations des mobiles mis en oeuvre n'étaient pas nécessaires, qu'aucun besoin de recherche ou d'étude n'est né à ce moment-là.

Le génie chimique moderne est sûrement né en 1915 lorsque Little inventa le concept d'opérations unitaires. Les premiers principes du génie chimique furent élaborés en 1923 par Walker, Lewis et Mac Adams et les opérations unitaires mises à jour furent la distillation, l'absorption, l'adsorption, la filtration, etc...mais pas le mélange. Beaucoup d'exemples vinrent ensuite de l'industrie pétrolière. C'est ainsi qu'en Angleterre et aux Etats-Unis, puis seulement à partir de 1950 en France, fut enseigné le génie chimique, avec beaucoup d'applications dans l'industrie des engrais et l'industrie pétrolière. L'opération agitation-mélange, réputée comme allant de soi, n'apparaît pas dans ces ouvrages techniques. La première publication significative sur un équipement d'agitation est écrite en 1953 par Rushton [1], qui invente une turbine portant maintenant son nom. La nature de la recherche scientifique est telle que beaucoup de chercheurs se sont engouffrés à la suite de Rushton et ont produit une somme considérable de résultats sur cette turbine, délaissant forcément tout autre type d'agitateurs.

Le génie chimique a largement contribué à l'essor de la turbine de Rushton, exportant ses méthodologies propres vers d'autres branches que la chimie ou l'industrie pétrolière. Ainsi est né le génie des procédés. L'agitation-mélange, sous-développé dans sa méthodologie, a encore plus souffert de cette croissance de la discipline de référence. Vers 1980, toutefois, les recherches en agitation, sur d'autres mobiles ont été entreprises, et des produits autres que l'eau furent considérés.



1-2) GEOMETRIE DES SYSTEMES D'AGITATION :

Les écoulements en cuve agitée sont des écoulements complexes. Ils dépendent à la fois de la nature du fluide et des caractéristiques géométriques de l'installation, dont l'organe principal est bien sûr constitué de l'agitateur lui-même.

a) Les cuves :

Les cuves les plus largement utilisées dans l'industrie consistent en des cylindres équipés de fonds qui peuvent être plats, coniques ou bombés, selon les impératifs de vidange, d'agencement ou tout simplement d'usage dans l'entreprise. Ces différentes géométries sont représentées sur la figure(1-1). Leur volumes peut varier de quelques dizaines de centimètres cubes pour certaines applications en chimie fine dans l'industrie pharmaceutique par exemple, à plusieurs centaines de mètres cubes pour certains traitement de minerais ou pour des opérations de stockage.

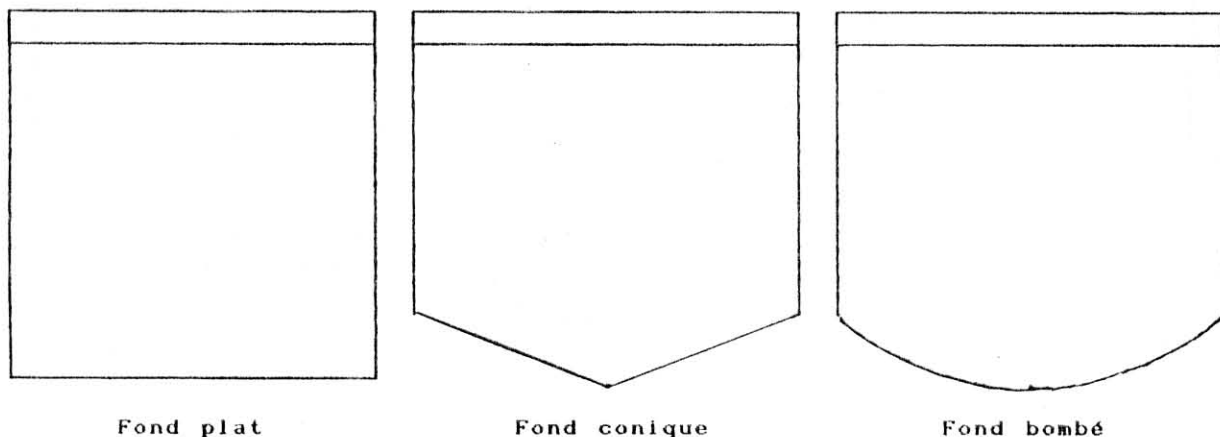


Figure (1-1) : Géométrie des cuves



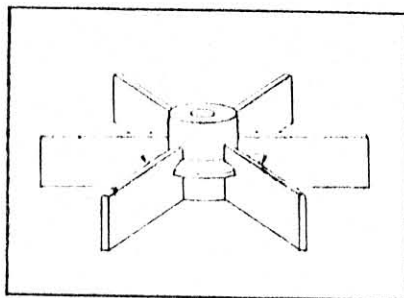
b) Les agitateurs :

Le choix d'un type d'agitation pour une application bien déterminée de Génie des Procédés reste du domaine de la recherche, même si certaines règles générales se dégagent. Il existe deux grandes classes de mobiles d'agitation suivant le mouvement des fluides engendré dans la cuve par rapport à l'axe de rotation du mobile :

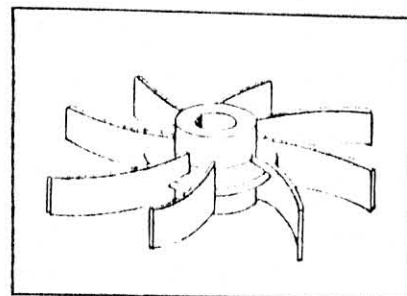
- Mobiles d'agitations à refoulement radial;
- Mobiles d'agitations à refoulement axial.

• Agitateurs à refoulement radial :

Ils sont caractérisés par une aspiration axiale du fluide, généralement par le dessus et par le dessous du mobile, et par un refoulement radial vers les parois de la cuve lorsque l'agitateur est centré sur l'axe de symétrie de l'installation. Le mobile plus répandu dans cette catégorie est la turbine de Rushton. Cette dernière est caractérisée par 6 pales droites fixées à cheval autour d'un plateau horizontal, figure(1-2) d'après la réf [4]. Les turbines créent des effets de cisaillement relativement important, comme par exemple le cas d'un gaz ou d'un liquide dans un autre liquide. Ce sont des organes générateurs de turbulence. Ils sont caractérisés par une consommation énergétique élevée.



a) Turbine à 6 pales plates.

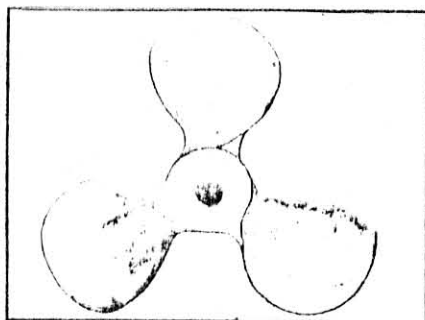


b) Turbine à 8 pales incurvées.

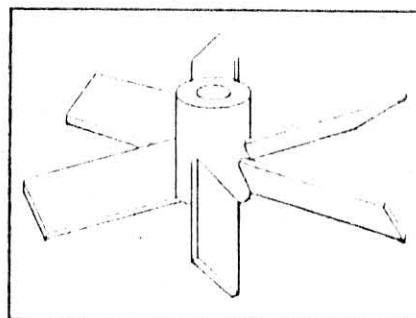
Figure (1-2) : Agitateurs du type " turbine "

• Agitateurs à refoulement axial :

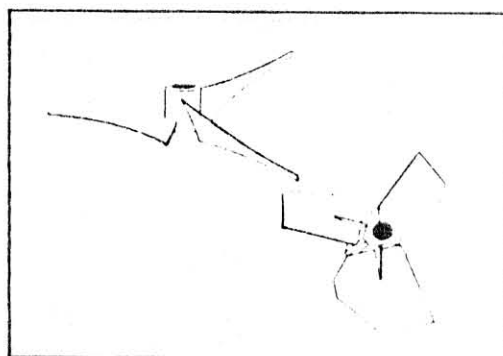
Ce sont principalement les hélices, les vis et les hélicoïdes. Ils créent un mouvement des fluides dans une direction axiale (vers le haut ou vers le bas). Les premières hélices utilisées furent les hélices marines, puis furent remplacées par des hélices plus performantes appelées hélices profilées ou hélices à pales minces (HPM), figure (1-3), réf [4]. Ces agitateurs sont principalement utilisés dans les opérations d'homogénéisation, de mélange de liquides miscibles et dans les opérations de dissolution ou de maintien en suspension d'une phase solide. Les vis et les hélicoïdes concernent les systèmes les plus visqueux.



a) Hélice marine à 3 pales

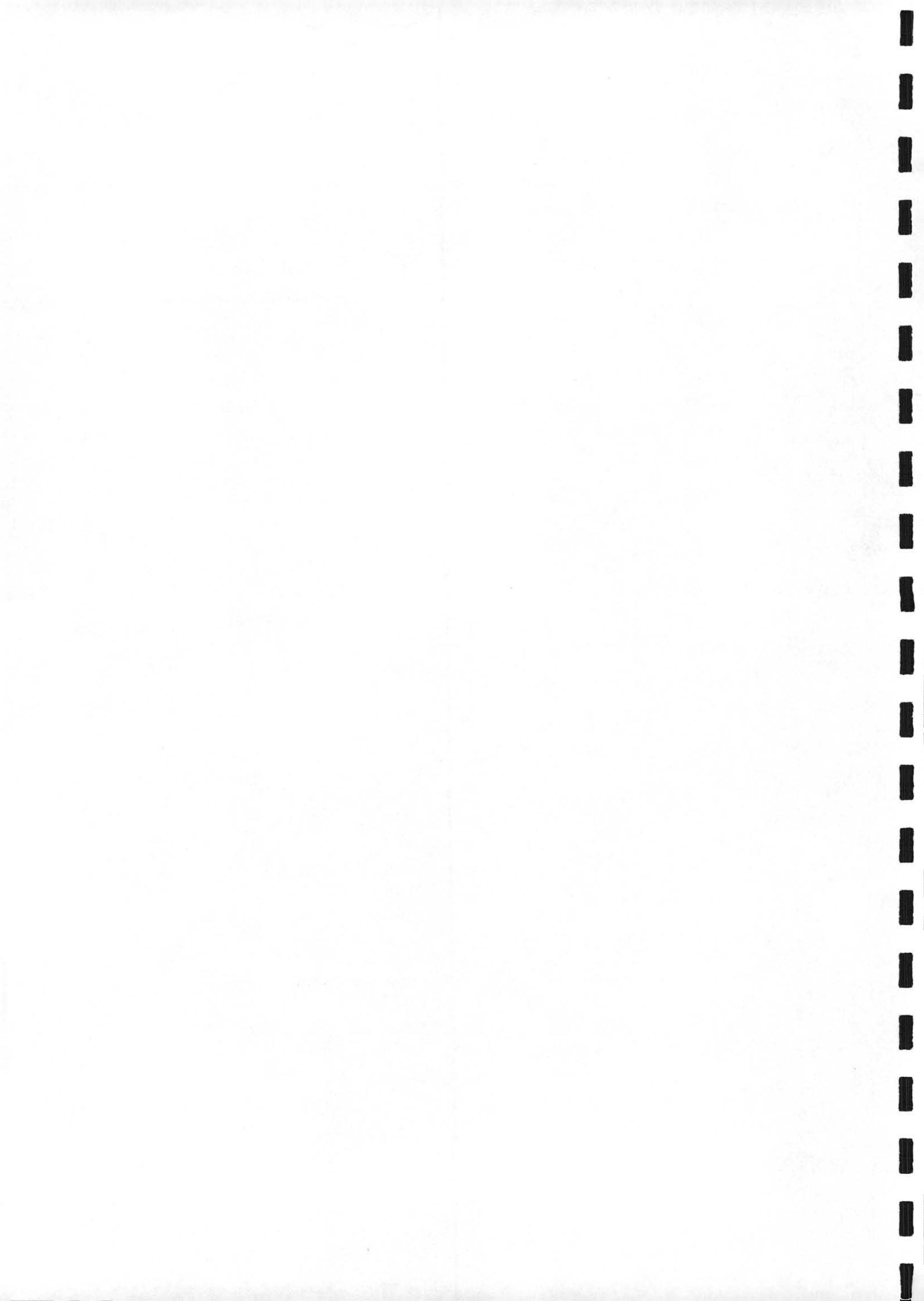


b) Mobile à 6 pales planes inclinées



c) Hélice à 3 pales à profil mince

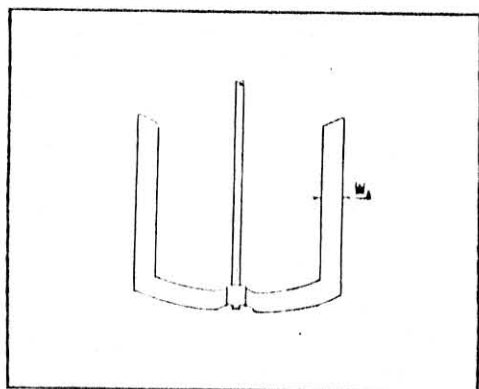
Figure (1-3) : Agitateur du type " Hélice "



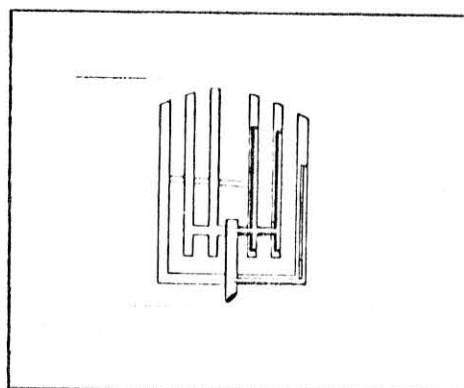
• Systemes à mouvement tangentiel :

Ils est évident que tous les agitateurs rotatifs ont tendance à créer un mouvement tangentiel. Mais souvent, ils développent également comme on vient de le voir des écoulement radiaux et axiaux. Les systèmes appartenant à cette catégorie-ci sont dessinés pour générer uniquement des écoulement tangentiels. On retrouve dans cette catégorie les agitateurs à grand diamètre, comme les agitateurs barrières, les agitateurs cadres et les ancres. La figure(1-4) présente des modèles de ce type, d'après la réf [4].

Cette catégorie d'agitateur est employée avec des fluides hautement visqueux. Les agitateurs barrière se rencontrent dans les industries fromagères et sont utilisés pour l'homogénéisation des pâtes molles et les opérations de décaillage. Les ancres sont souvent utilisées pour assurer le renouvellement du fluide en contact avec les bords de cuve, en particulier pour améliorer le transfert thermique lorsqu'il est assuré par une double enveloppe. Elles sont souvent associées à d'autres agitateurs qui assurent une circulation axiale dans la cuve.



a) Agitateur à ancre



b) Agitateur à barrière

Figure (1-4) : Agitateurs à débit tangentiel



1-3) SYSTEMES RETENUS POUR LA SIMULATION :

Nous venons de préciser les principales géométries de cuves et d'agitateurs que l'on rencontre dans les opérations d'agitation mélange industrielles. Dans le cadre de ce travail, notre choix s'est porté sur la simulation des géométries les plus couramment utilisées, à savoir les cuves cylindriques de toutes proportions (cuves cigare, cuves standard ou cuves camembert).

La forme du fond de cuve est un paramètre limité aux formes concaves décrites par une fonction liant la profondeur de la paroi du fond au rayon. Trois catégories sont étudiées: les fonds plats, les fonds coniques et les fonds bombés.

En ce qui concerne le mobile d'agitation, il a semblé intéressant de pouvoir simuler des cas correspondant à différents types de mobile, appartenant à une des trois catégories décrites ci-dessus. Des turbines, des hélices ou des bipales peuvent donc être pris en compte par le modèle, seuls, ou en association - ce qui permet de combiner plusieurs agitateurs sur le même arbre, de même type ou de type différent-.

Un agitateur est en fait modélisé par une boîte "noire", où on ne connaît les propriétés d'écoulement qu'au niveau des frontières, à partir de mesures expérimentales ou de valeurs issues de la littérature.

Au niveau des entrées de notre code de calcul, il est donc possible de fixer la géométrie de la cuve (hauteur/diamètre), la forme du fond, le nombre d'agitateurs, la taille de chacun, leur positionnement individuel sur l'arbre et la vitesse de rotation.



CARACTERISTIQUES MACROSCOPIQUES DE L'AGITATION MECANIQUE

2 - 1) INTRODUCTION :

A partir de la connaissance locale des phénomènes d'agitations, un certain nombre de grandeurs globales peuvent être calculées. Nous les décrivons dans cette partie.

2 - 2) PUISSANCE D'AGITATION ET NOMBRE DE PUISSANCE :

C'est la puissance consacrée uniquement à la mise en mouvement du fluide dans la cuve. Elle nous permet de choisir le type de moteur à installer et de comparer sur le plan consommation d'énergie les performances de plusieurs mobiles. Elle dépend de la géométrie de la cuve, du système d'agitation des propriétés du milieu agité et des conditions opératoires (figure 2-1), d'après la réf[4]. Ce qui peut s'écrire :

$$f(\rho, \mu, \nu, N, g, P, Da, Dc, H, Y, w, b, l, p, n_p, n_c) = 0 \quad (2-1)$$

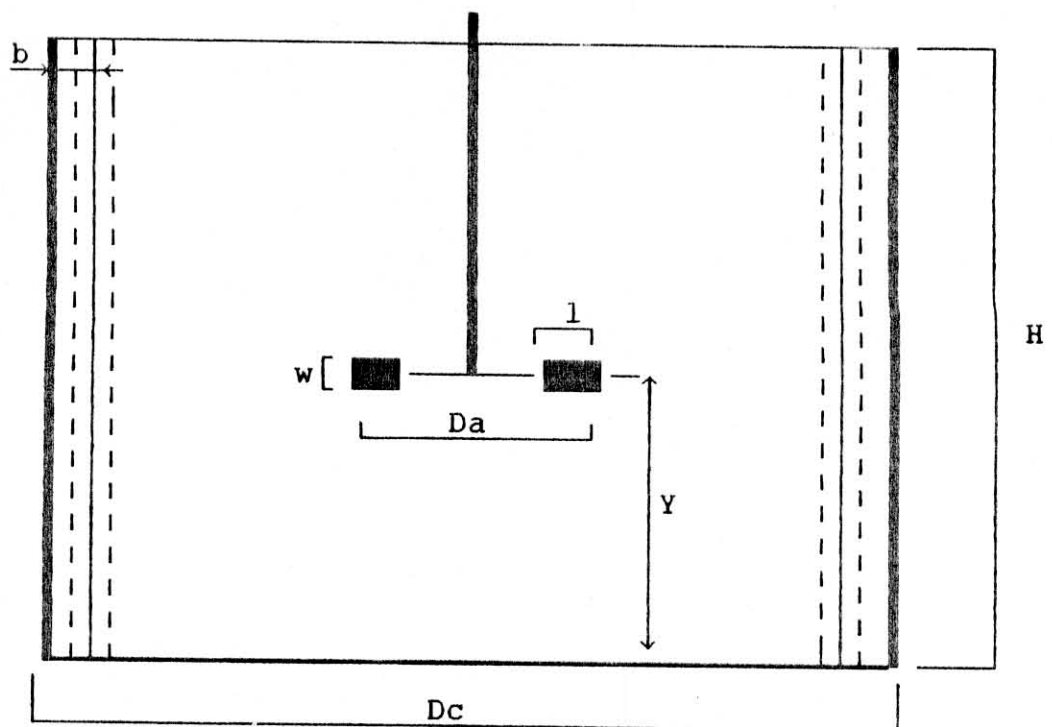
Ces 16 variables peuvent s'exprimer à partir des trois unités fondamentales : masse, longueur et temps. L'application du théorème de Vaschy-Buckingham permet de transformer la relation précédente en une relation comportant $(16 - 3 = 13)$ nombres sans dimensions. Les plus importants sont les nombres suivants :

■ Nombre de Reynolds :

Qui caractérise le rapport entre les forces d'inertie et les forces de viscosité.

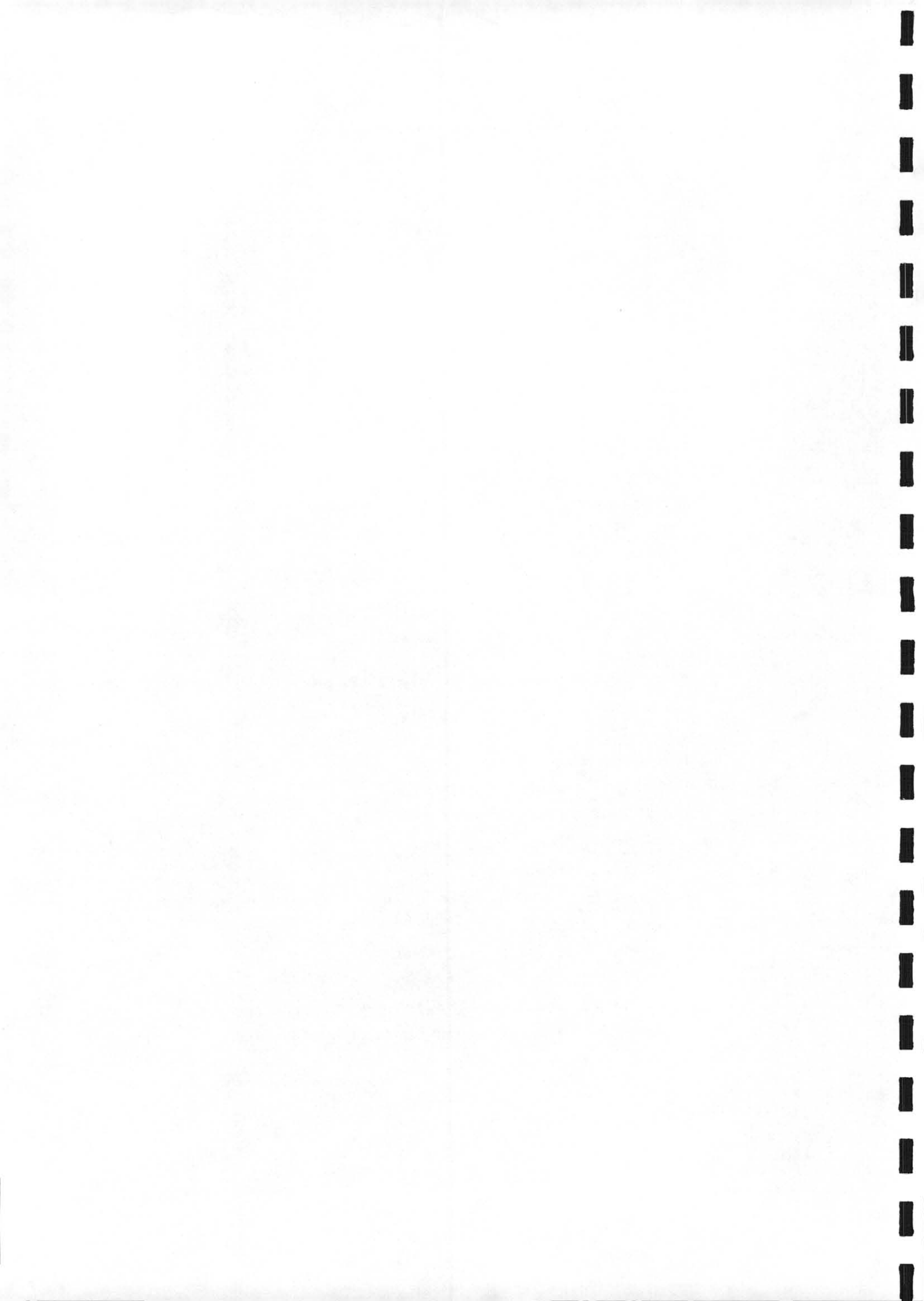
$$Re = \frac{N \cdot Da^2 \cdot \rho}{\mu} \quad (2-2)$$





Figure(2-1): Paramètres géométriques d'agitation

- np : nombre de pales
- nc : nombre de chicanes
- l : longueur des pales
- w : largeur des pales
- b : largeur des chicanes
- Y : Elévation du centre du mobile d'agitation par rapport au fond de la cuve.
- Da : diamètre du mobile d'agitation
- Dc : diamètre de la cuve
- N : vitesse de rotation du mobile d'agitation
- ρ , μ , ν sont les propriétés physiques du fluide



■ Nombre de Froude :

Qui caractérise le rapport entre les forces d'inertie et les forces de gravité.

$$Fr = \frac{N^2 \cdot Da}{g} \quad (2-3)$$

■ Nombre de Weber :

Qui caractérise l'action des forces de tension superficielle.

$$We = \frac{\rho \cdot N^2 \cdot Da^3}{\nu} \quad (2-4)$$

■ Nombre de puissance :

C'est le coefficient de traînée de l'agitateur dans le fluide.

$$Np = \frac{P}{\rho \cdot N^3 \cdot Da^5} \quad (2-5)$$

Cette relation se traduit par une courbe caractéristique d'un mobile d'agitation [4], donnant les variations du nombre de puissance Np en fonction du nombre de Reynolds (Figure :2-2), qui présente trois parties :

□ 1^{ère} zone :

Le régime d'écoulement est laminaire où $Re < 10$ avec :

$$Np \cdot Re = Ne$$

où: Ne représente le nombre de Newton lié à la géométrie de l'équipement.

□ 2^{ème} zone :

C'est une zone intermédiaire où le régime d'écoulement est dit de transition.

□ 3^{ème} zone :

Le régime d'écoulement est turbulent où le nombre de Reynolds est compris entre 100 et 1000, valeur qui dépend de la géométrie du système et le nombre de puissance Np est constant.

$$Np = \text{constant}$$



2 - 2 - 1) Calcul de la puissance d'agitation :

La puissance consommée dans l'ensemble du volume peut s'écrire sous la forme:

$$P = \iiint_D \tau : D \, dV \quad (2-6)$$

Où : D = domaine où la puissance est dissipée

V = volume correspondant à ce domaine

τ = tenseur des contraintes

μ = viscosité dynamique

$\tau : D$ = produit tensoriel

$$\tau = 2 \cdot \mu \cdot D \quad (2-7)$$

D = tenseur des vitesses de déformation

$$D_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) \quad (2-8)$$

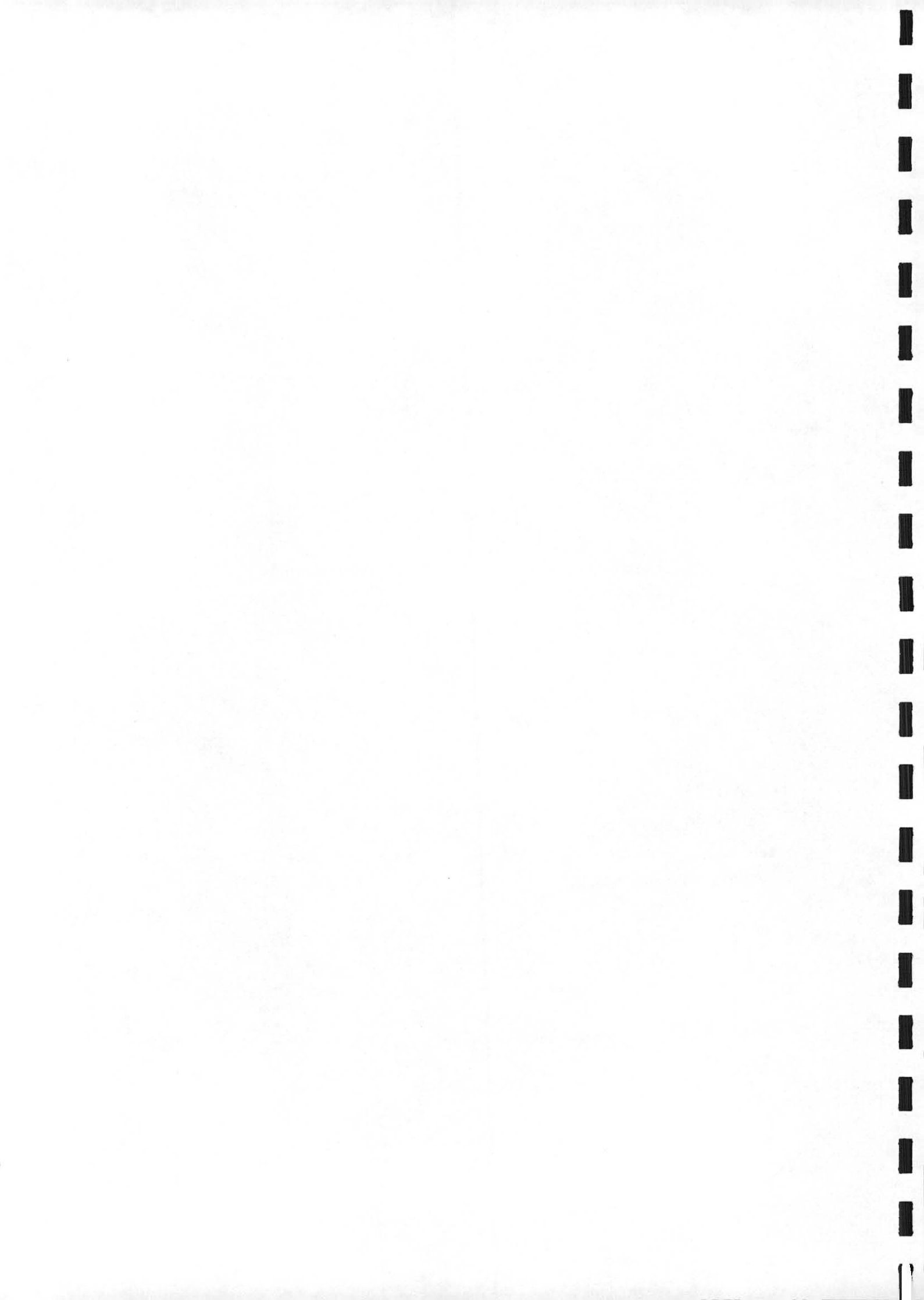
d'où :

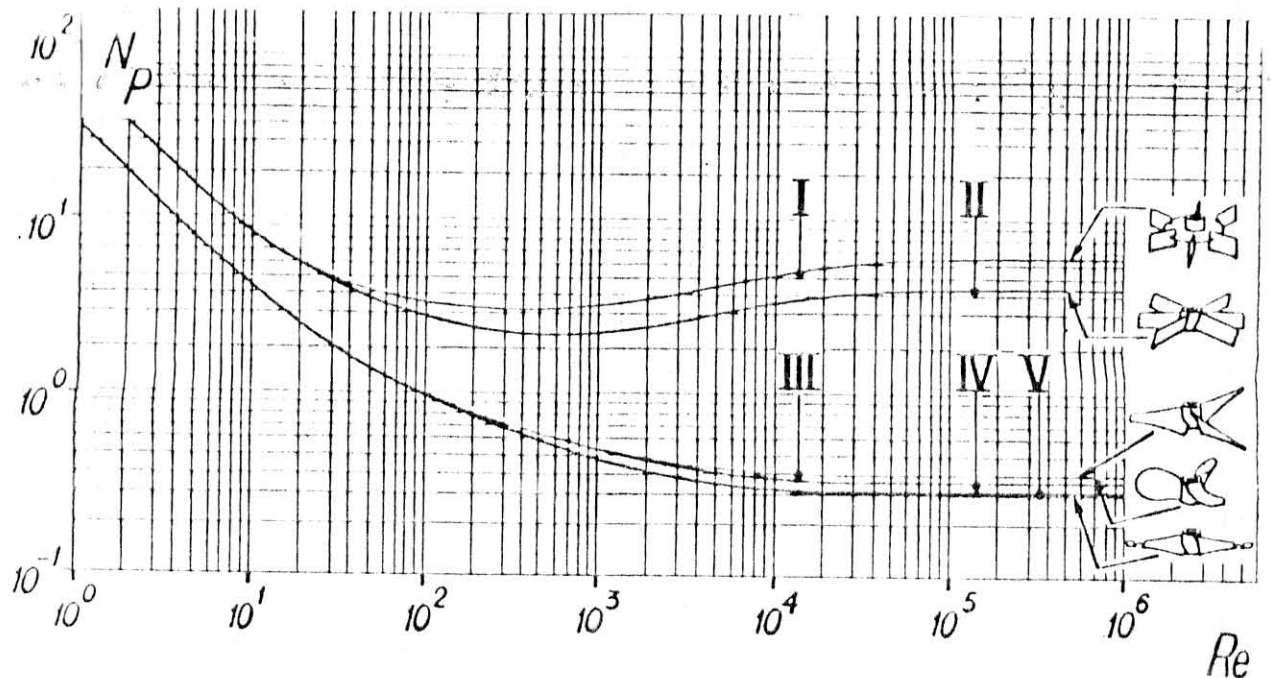
$$P = \iiint_D \frac{1}{2} \mu \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right)^2 dV \quad (2-9)$$

Lors de la discrétisation, l'intégrale est transformée en la somme de toutes les intégrales sur chacun des volumes de calcul (voir annexe 1).

$$P = \sum_i \frac{\mu}{2} \cdot D : D \cdot r_i \, dr \, dz \, d\theta \quad (2-10)$$

où r_i est le rayon du centre de chaque cellule où est calculé μ .





Figure(2-2) : Courbes caractéristiques de puissance

2 - 3) DEBIT DE POMPAGE ET NOMBRE DE POMPAGE :

Le débit de pompage Q_p est le débit de fluide qui passe effectivement dans le mobile d'agitation, pour une vitesse de rotation donnée.

■ Cas de la turbine de Rushton :

Le débit de pompage est dans ce cas le débit qui sort radialement de la surface latérale du volume occupé par l'agitateur. Si cette surface latérale est située entre les côtes z_1 et z_2 , ce débit s'exprime sous la forme :

$$Q_p = 2 \pi R \int_{z_1}^{z_2} V_r dz \quad (2-11)$$



■ Cas d'une hélice :

Le débit de pompage est alors le débit qui sort axialement de la base du volume occupé par le mobile et peut s'écrire sous la forme suivante :

$$Q_p = 2 \pi \int_0^R r V_z dr \quad (2-12)$$


Le nombre de pompage adimensionnel est fonction du type de mobile d'agitation et du régime hydrodynamique. Dans le cas du régime turbulent N_{Qp} est une constante [4] et est définie par :

$$N_{Qp} = \frac{Q_p}{N \cdot Da^3} \quad (2-13)$$

2 - 4) DEBIT DE CIRCULATION :

On appelle débit de circulation la somme du débit de pompage et du débit induit dû à l'action de pompage du mobile par les aspirations secondaires du fluide.

$$Q_c = Q_p + Q_i \quad (2-14)$$

Remarque : suite à des travaux faits par plusieurs auteurs [4], on admet que, quel que soit le type de mobile d'agitation le rapport Q_c/Q_p est à peu près constant et vaut environ 1,8. On pourra définir un nombre de circulation N_{Qc} par :

$$N_{Qc} = 1.8 N_{Qp} \quad (2-15)$$



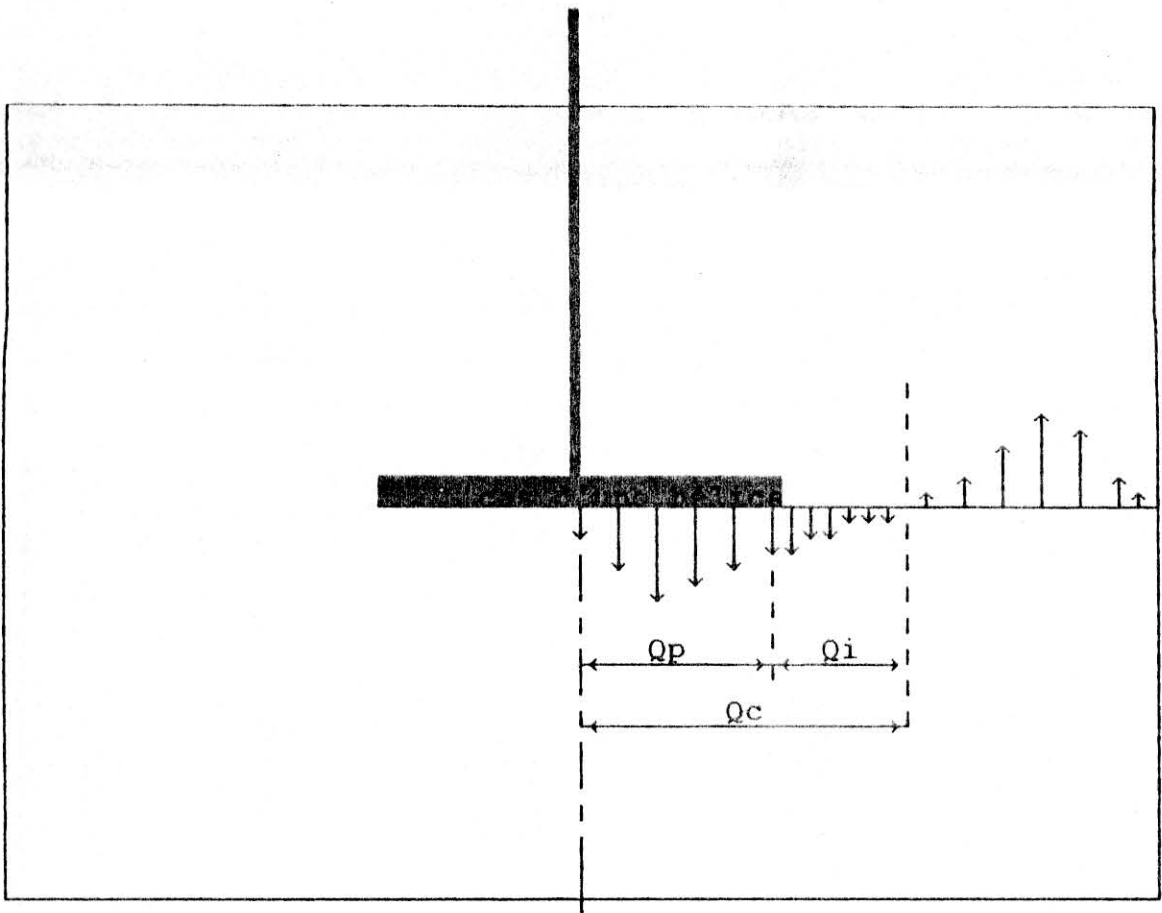


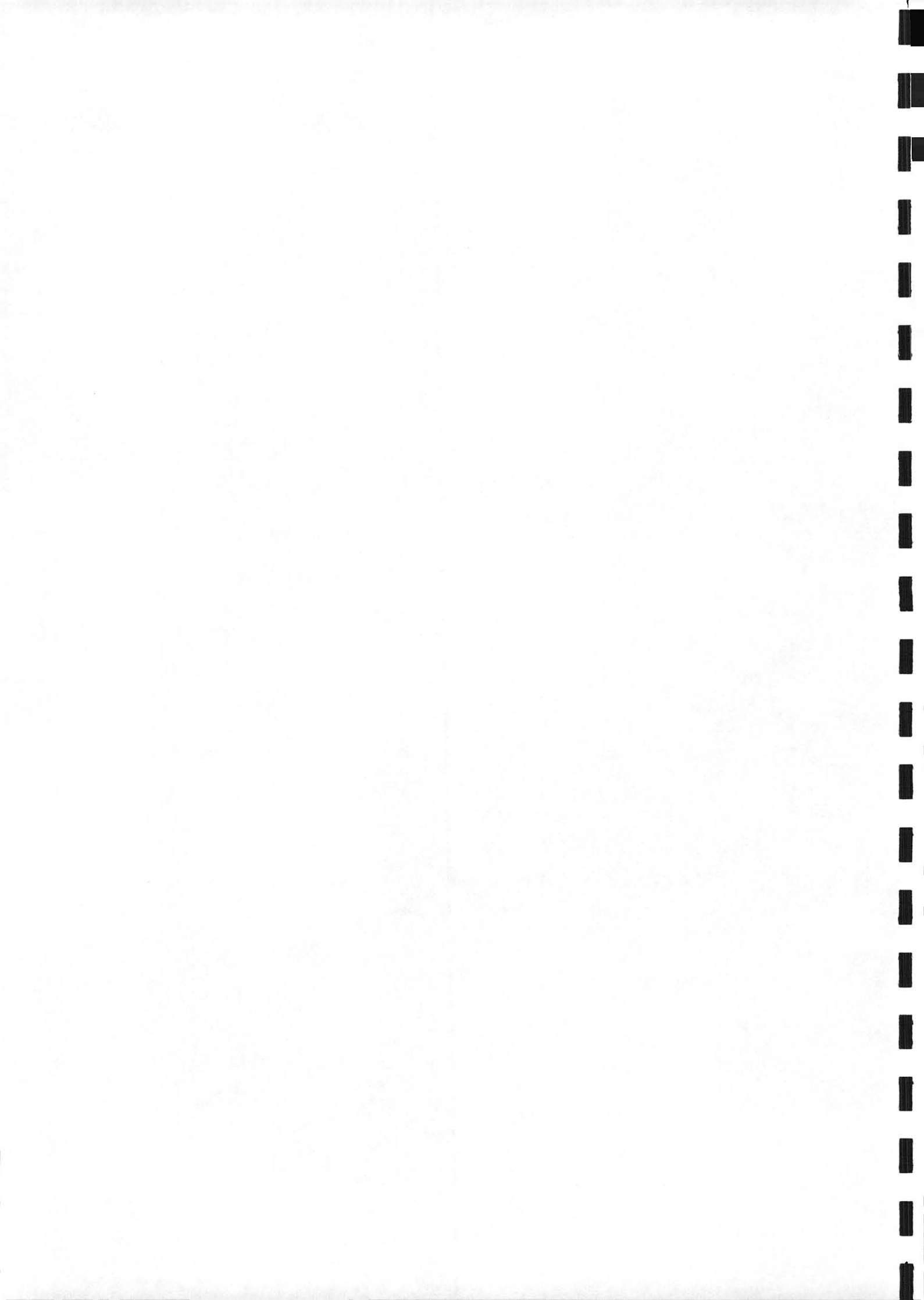
Figure (2-3) : Débit de pompage, débit induit et débit de circulation.
(cas d'une hélice)

■ Cas d'une hélice :

Le débit de circulation est donné par l'expression suivante:

$$Q_c = \int_0^{2\pi} \int_0^{R_0} r \cdot V_z \, dr \, d\theta \quad (2-16)$$

R_0 est le point de changement de sens de la vitesse axiale



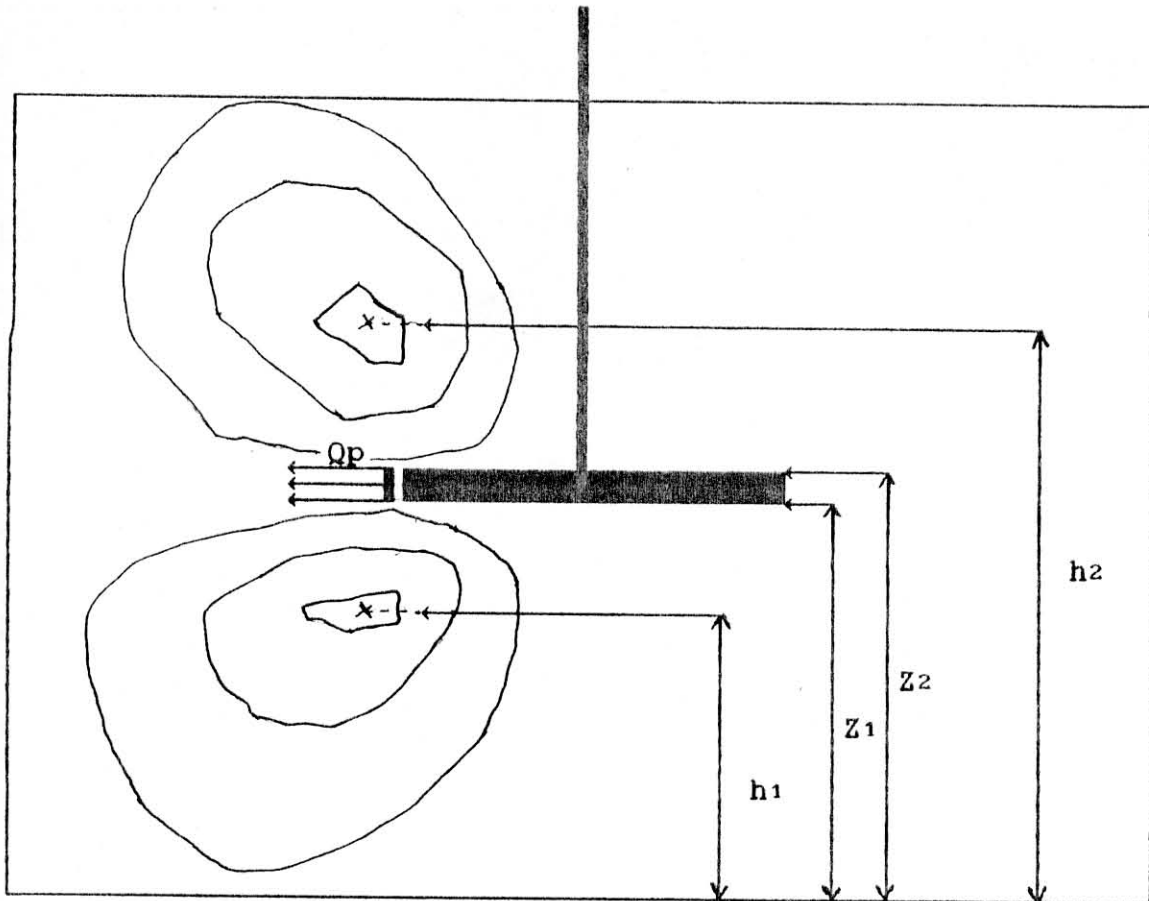


Figure (2-4) : Débit de pompage, débit induit et débit de circulation. (cas d'une turbine)

■ Cas d'une turbine :

Le débit de circulation est donné par l'expression suivante:

$$Q_c = 2\pi R \int_{h_1}^{h_2} V_r dz \quad (2-17)$$

h_1 est le centre de la première boucle de circulation inférieure.
 h_2 est le centre de la première boucle de circulation supérieure.



2 - 5) TEMPS DE CIRCULATION :

On définit le temps de circulation t_c comme le temps moyen mis par une particule fluide pour effectuer une rotation complète dans la cuve et s'écrit sous la forme suivante :

$$t_c = V_0 / Q_c \quad (2-18)$$

où V_0 désigne le volume de liquide contenu dans la cuve.

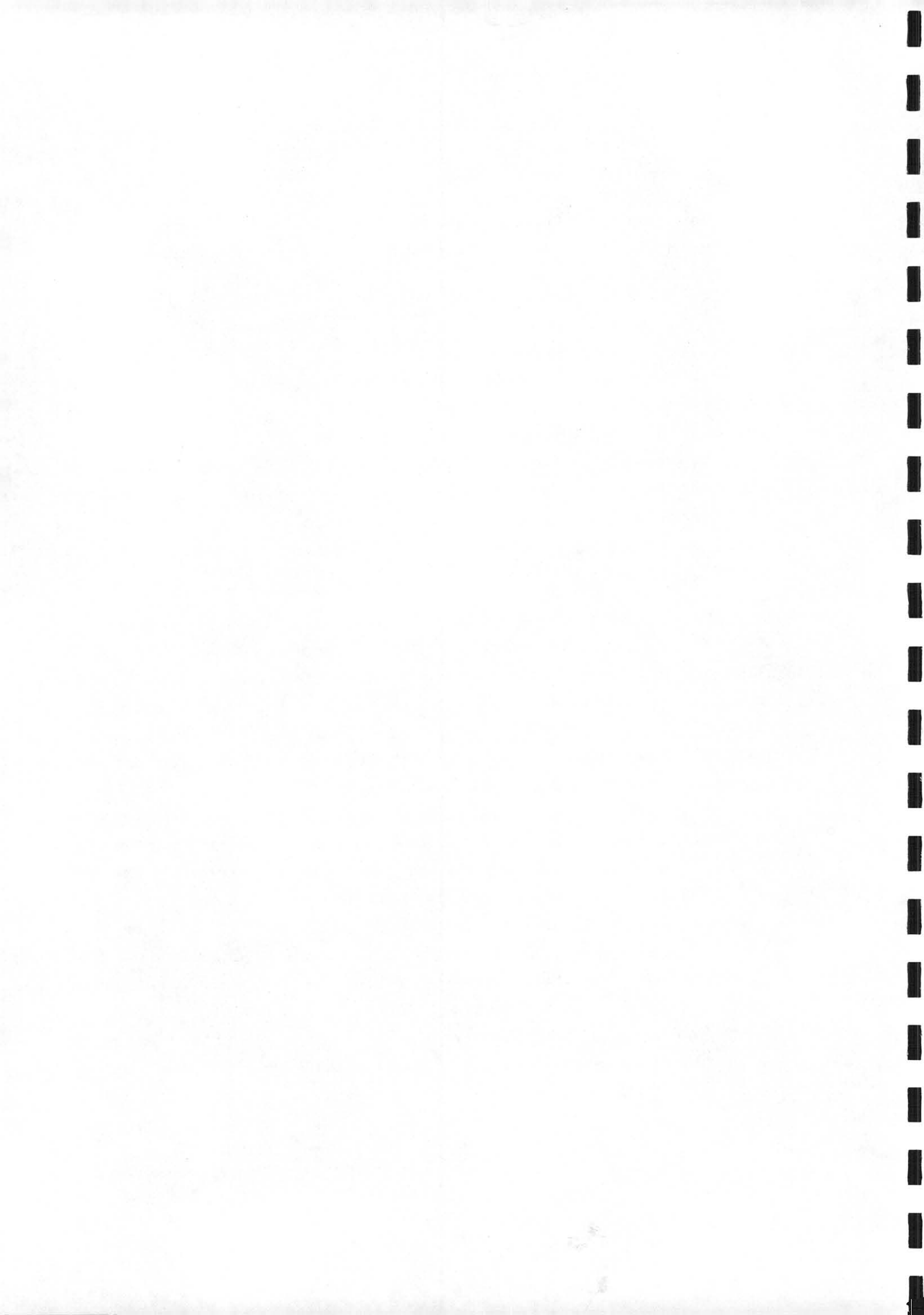
2 - 6) TEMPS DE MELANGE :

Il est défini comme le temps nécessaire pour obtenir une bonne homogénéité dans l'ensemble de la cuve. Cette valeur est fonction des caractéristiques physico-chimiques des fluides à mélanger, des conditions d'agitation et des systèmes cuve-agitation.

En régime d'écoulement turbulent, le temps de mélange mis sous forme adimensionnelle ($N.t_m$, produit appelé temps de mélange) est une constante, fonction de la géométrie du système et des caractéristiques du fluide. En régime d'écoulement laminaire, il est difficile d'obtenir des valeurs fiables, mais on peut dire globalement que le nombre de mélange décroît avec l'augmentation du nombre de Reynolds.

Dans le cas de notre code de calcul, le temps de mélange est défini comme le temps nécessaire pour obtenir un état dans lequel l'écart maximal de concentration d'un traceur entre deux points quelconque de la cuve ne dépasse pas les 10%

La comparaison du temps de mélange et du temps de circulation permet de qualifier l'efficacité de mélange d'une installation. Si d'une part la valeur du temps de mélange est satisfaisante, et d'autre part le rapport (temps de mélange/temps de circulation) est faible, c'est l'assurance que l'installation ne recèle pas de zones mortes ou de cavernes.



FORMULATION MATHÉMATIQUE

3 - 1) INTRODUCTION :

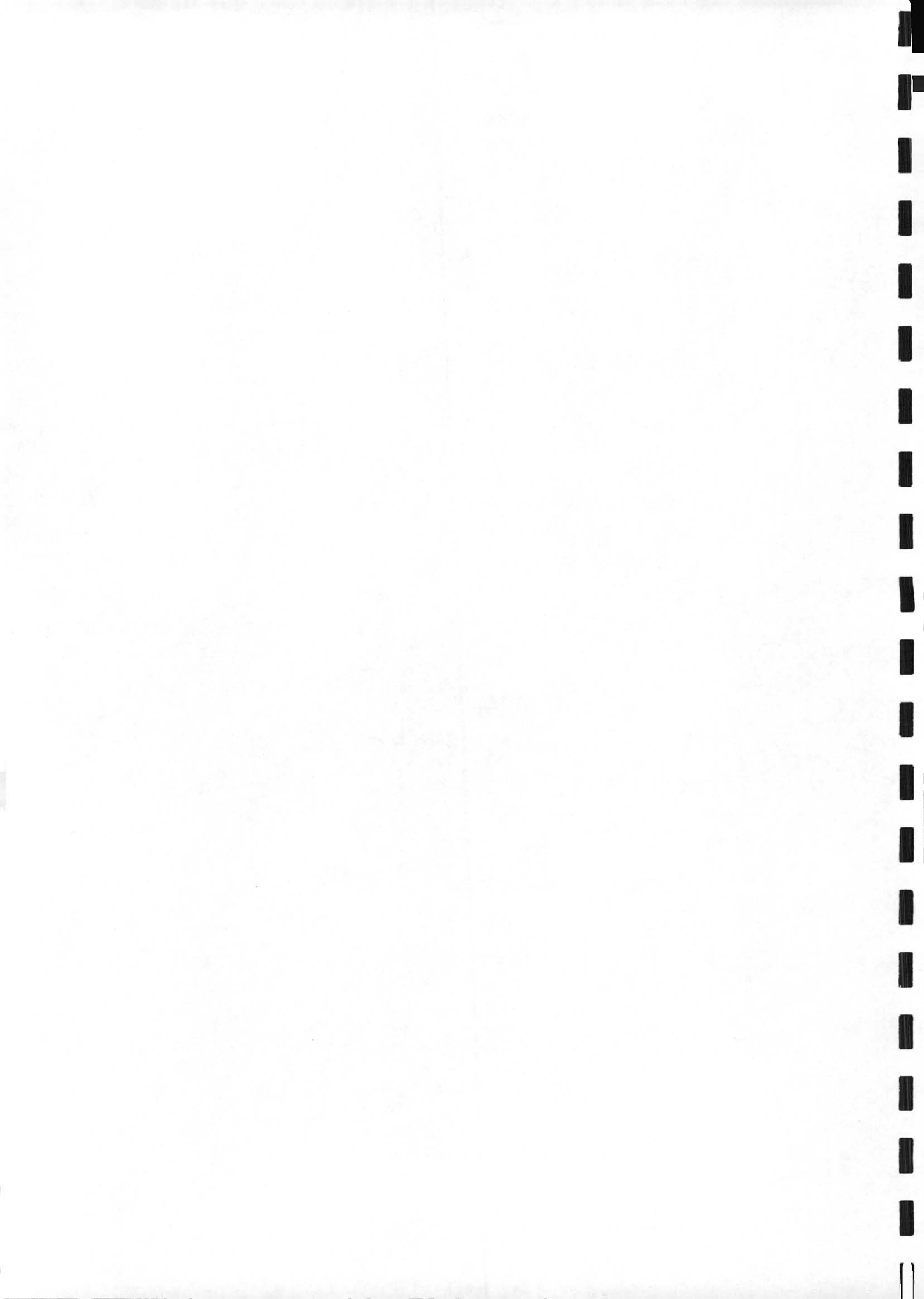
Les équations régissant le phénomène convection-diffusion à l'intérieure des cuves agitées mécaniquement, sont les équations de la mécanique des fluides en coordonnées cylindriques, ainsi que l'équation de transfert de matière. On considère un fluide newtonien et incompressible pris dans un repère orthonormé où l'action de l'écoulement est en déformation continue dans le temps.

3 - 2) EQUATIONS :1°/ Equation de continuité :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r}(\rho r v_r) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta}(\rho v_\theta) + \frac{\partial}{\partial z}(r v_z) = 0 \quad (3-1)$$

2°/ Equation de quantité de mouvement suivant r :

$$\rho \left(\frac{\partial v_r}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r} \frac{\partial v_r}{\partial \theta} + v_z \frac{\partial v_r}{\partial z} - \frac{v_\theta^2}{r} \right) = - \frac{\partial p}{\partial r} + \mu \left(\frac{\partial^2 v_r}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 v_r}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 v_r}{\partial z^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_r}{\partial r} - \frac{2}{r^2} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} - \frac{v_r}{r^2} \right) \quad (3-2)$$



3°/ Equation de quantité de mouvement suivant θ :

$$\rho \left(\frac{\partial v_\theta}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_\theta}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + v_z \frac{\partial v_\theta}{\partial z} + \frac{v_r \cdot v_\theta}{r} \right) = - \frac{1}{r} \frac{\partial p}{\partial \theta} + \mu \left(\frac{\partial^2 v_\theta}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 v_\theta}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 v_\theta}{\partial z^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_\theta}{\partial r} + \frac{2}{r^2} \frac{\partial v_r}{\partial \theta} - \frac{v_\theta}{r^2} \right) \quad (3-3)$$

4°/ Equation de quantité de mouvement suivant z :

$$\rho \left(\frac{\partial v_z}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_z}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r} \frac{\partial v_z}{\partial \theta} + v_z \frac{\partial v_z}{\partial z} \right) = - \frac{\partial p}{\partial z} + \mu \left(\frac{\partial^2 v_z}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 v_z}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 v_z}{\partial z^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_z}{\partial r} \right) \quad (3-4)$$

5°/ Equation de transfert de matière :

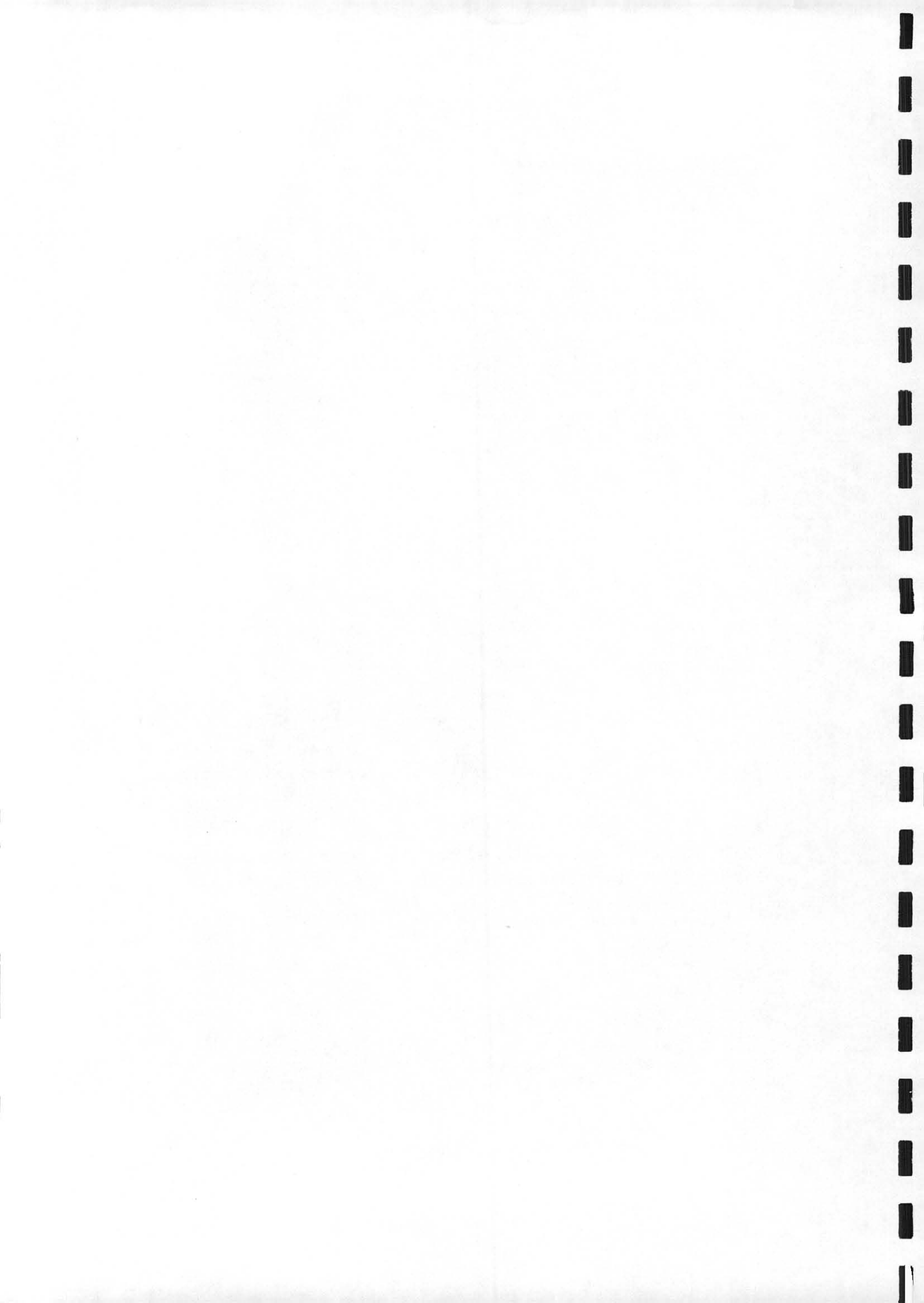
L'équation générale de transport d'une propriété physique quelconque Φ peut s'écrire :

$$\frac{D}{Dt} \iiint_V \rho \Phi dV = - \iint_S \vec{J} \cdot \vec{n} dS + \iiint_V \dot{S} dV \quad (3-5)$$

Dans le cas du transfert de matière, Φ représente la concentration d'une espèce réactive ou non. J est le flux de diffusion surfacique relatif à Φ et S est le terme source pouvant correspondre à la génération ou à la disparition de la matière. Ce terme est nul dans le cadre de ce travail, puisque l'on considère qu'il n'y a pas de réaction chimique.

On peut alors écrire le premier terme de l'équation précédente sous la forme :

$$\frac{D}{Dt} \iiint_V \rho c dV = \iiint_V \left[\frac{\partial}{\partial t} (\rho c) + \text{div}(\rho c \vec{v}) \right] dV \quad (3-5.a)$$



Le second terme s'écrit :

$$- \iint_S \vec{J} \cdot \vec{n} \, dS = - \iiint_V \operatorname{div} \vec{J} \, dV \quad (3-5.b)$$

L'équation de transfert de masse peut être transformée en une équation dite locale, donnée par :

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho C) + \operatorname{div}(\rho C \vec{V}) = - \operatorname{div} \vec{J} \quad (3-5.c)$$

En vertu de l'équation de conservation de la masse, cette équation se met encore sous la forme plus simple :

$$\rho \left\{ \frac{\partial C}{\partial t} + \vec{V} \cdot \operatorname{grad} C \right\} = - \operatorname{div} \vec{J} \quad (3-6)$$

Le flux de diffusion peut s'exprimer en fonction du gradient de concentration par la loi de Fick :

$$\vec{J} = - \lambda \cdot \operatorname{grad} C$$

où $\lambda = (Df \cdot \rho)$ représente une fonction scalaire du coefficient de diffusivité de la concentration en $[g/cm \cdot s]$. La forme finale de l'équation de transfert de la concentration s'écrit :

$$\frac{\partial C}{\partial t} + \vec{V} \cdot \operatorname{grad} C = \operatorname{div} (Df \operatorname{grad} C) \quad (3-7)$$

et Df représente le coefficient de diffusivité $[cm^2/s]$

Remarque :

$$\mu = \text{constante}$$

Ce cas correspond à l'écoulement d'un fluide Newtonien, découplé avec le transfert de matière, c'est à dire que les deux fluides mélangés ont la même viscosité.

3 - 3) HYPOTHESES DU MODELE MATHEMATIQUE :

Le modèle numérique qui sera développé dans la suite de ce travail repose sur une version plus simplifiée des équations ci-dessus, obtenue compte tenu des hypothèses simplificatrices suivantes :

- Le fluide est incompressible ;
- Le nombre de Reynolds est suffisamment faible pour que l'on puisse considérer que le régime d'écoulement est laminaire ;
- Il est intéressant, compte tenu de l'hypothèse précédente, de considérer des réacteurs sans chicanes. Nous supposons alors que l'écoulement est tridimensionnel mais axisymétrique ;
- Le nombre de Froude est suffisamment faible pour que l'on puisse négliger l'action de la gravité. Nous considérons par conséquent que la surface libre reste plane ;

Remarque :

- Le comportement du fluide ne dépend pas de la température .
 - Fluide newtonien;
- Hypothèses de l'axisymétrie de l'écoulement peut se traduire par l'homogénéité de toutes les caractéristiques physiques du fluide dans la direction tangentielle, par conséquent :

$$\frac{\partial}{\partial \theta} () = 0$$

Le système précédent se simplifie en :

$$\rho \left(\frac{\partial v_r}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_r}{\partial r} + v_z \frac{\partial v_r}{\partial z} - \frac{v_\theta^2}{r} \right) = - \frac{\partial p}{\partial r} + \mu \left(\frac{\partial^2 v_r}{\partial r^2} + \frac{\partial^2 v_r}{\partial z^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_r}{\partial r} - \frac{v_r}{r^2} \right)$$

$$\rho \left(\frac{\partial v_\theta}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_\theta}{\partial r} + v_z \frac{\partial v_\theta}{\partial z} + \frac{v_r \cdot v_\theta}{r} \right) = \mu \left(\frac{\partial^2 v_\theta}{\partial r^2} + \frac{\partial^2 v_\theta}{\partial z^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_\theta}{\partial r} - \frac{v_\theta}{r^2} \right)$$



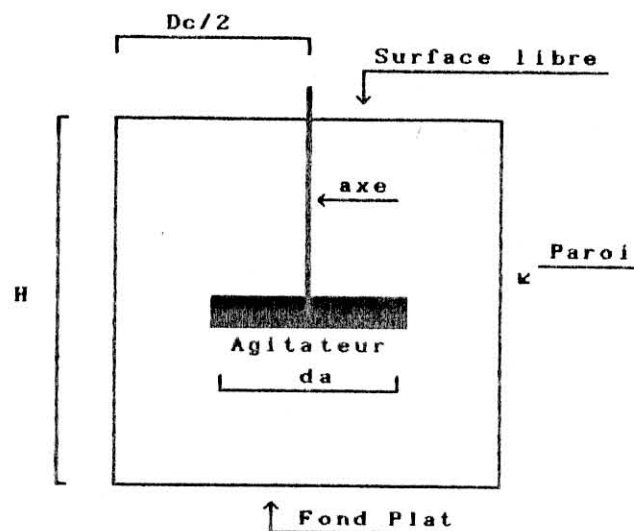
$$\rho \left(\frac{\partial v_z}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_z}{\partial r} + v_z \frac{\partial v_z}{\partial z} \right) = - \frac{\partial p}{\partial z} + \mu \left(\frac{\partial^2 v_z}{\partial r^2} + \frac{\partial^2 v_z}{\partial z^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_z}{\partial r} \right)$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r}(\rho r v_r) + \frac{\partial}{\partial z}(r v_z) = 0$$

$$\frac{\partial C}{\partial t} + v_r \frac{\partial C}{\partial r} + v_z \frac{\partial C}{\partial z} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r D_f \frac{\partial C}{\partial r} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(D_f \frac{\partial C}{\partial z} \right)$$

Ces équations sont formées de termes représentant les deux phénomènes habituels de convection et de diffusion, mais aussi les termes d'accélération centrifuge et de coriolis dues à la mobilité du repère intrinsèque.

3 - 4) CONDITIONS AUX LIMITES :



Figure(3-1) : Frontières du domaine de calcul

Le domaine considéré est le volume limité par les frontières d'une cuve mécaniquement agitée, mono ou multiétagée. Chaque agitateur est modélisé par un volume cylindrique dont les dimensions et la position par rapport au fond de la cuve sont un paramètre du modèle. Compte tenu de l'hypothèse (3) un seul plan vertical est étudié. Ce plan est limité par quatre frontières, à savoir :

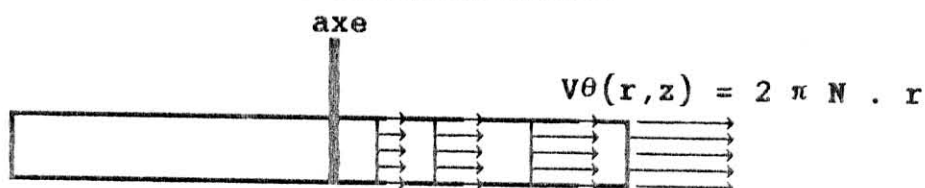


- Le ou les agitateurs;
- L'axe de la cuve, considéré comme axe de symétrie;
- La surface libre ;
- La paroi latérale et le fond.

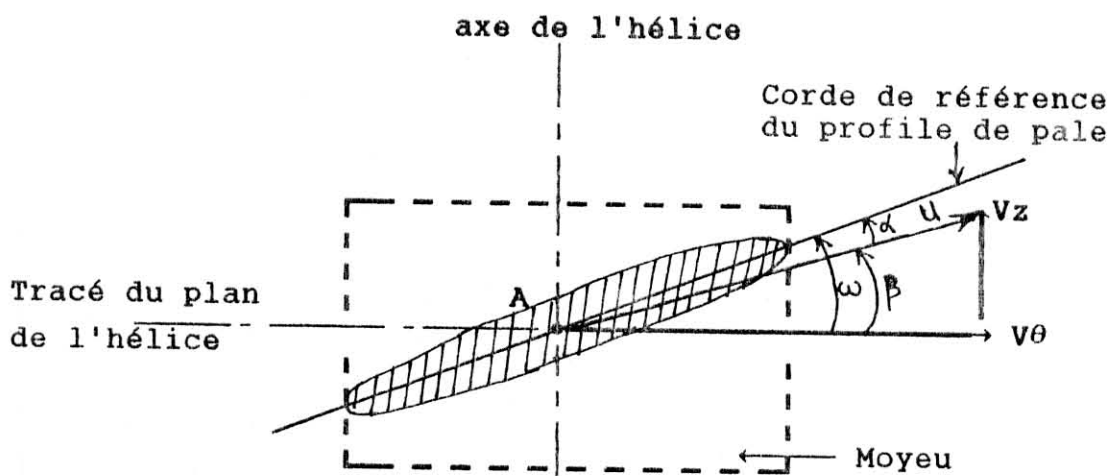
• Conditions aux limites sur un agitateur :

L'établissement des conditions aux limites sur les frontières du volume occupé par l'agitateur est assuré par la voie expérimentale. Les vitesses sont soit obtenues par des mesures par anémométrie Laser Doppler, soit imposés par l'utilisateur. Le champ des vitesses est injecté au modèle numérique comme conditions aux limites associées aux équations.

a) Agitateur de type turbine :

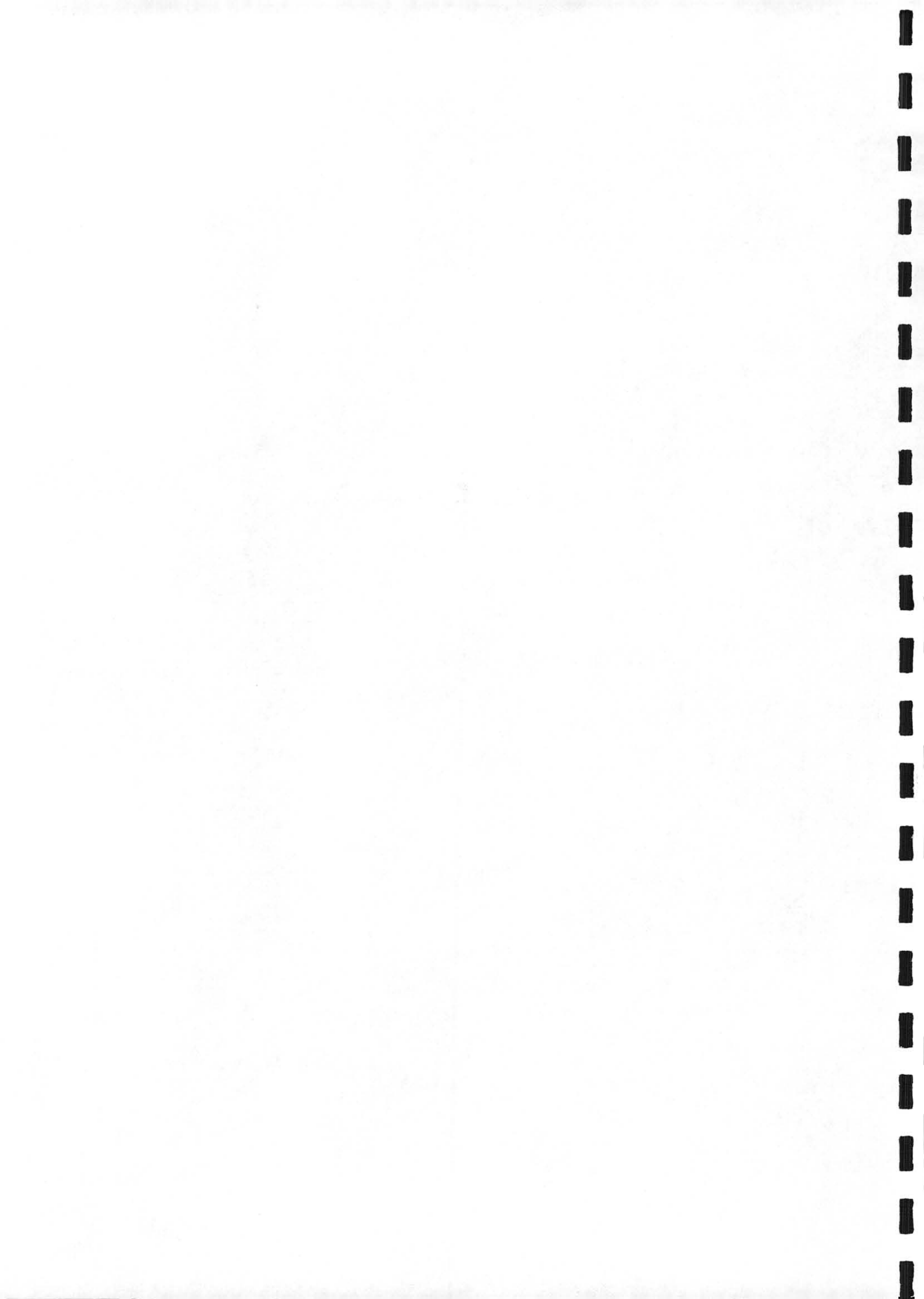


b) Agitateur de type hélice :



Le point A est soumis à un mouvement :

- de rotation autour de l'axe de l'hélice, d'où une vitesse tangentielle v_θ .
- de translation parallèle à l'axe de l'hélice, d'où une vitesse axiale V_z



tel que :

- ω angle de calage
- β angle d'aspiration (ou de refoulement)
- α angle d'incidence
- Le pas géométrique $H = 2 \pi R \operatorname{tg}(\omega)$
- Le pas réel $H' = 2 \pi R \operatorname{tg}(\beta)$

avec :
$$\operatorname{tg}(\beta) = \frac{V_z}{2 \pi R N}$$

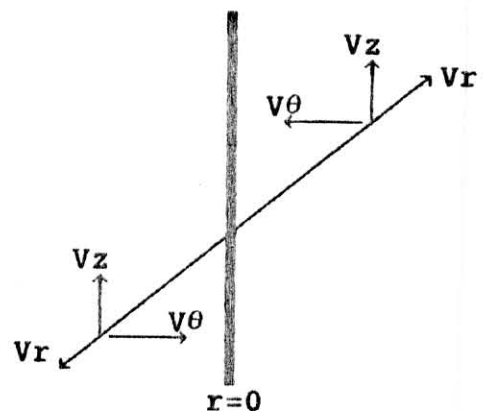
donc :
$$H' = 2 \pi R \frac{V_z}{2 \pi R N} = \frac{V_z}{N} \quad \begin{matrix} [\text{m/s}] \\ [\text{t/s}] \end{matrix}$$

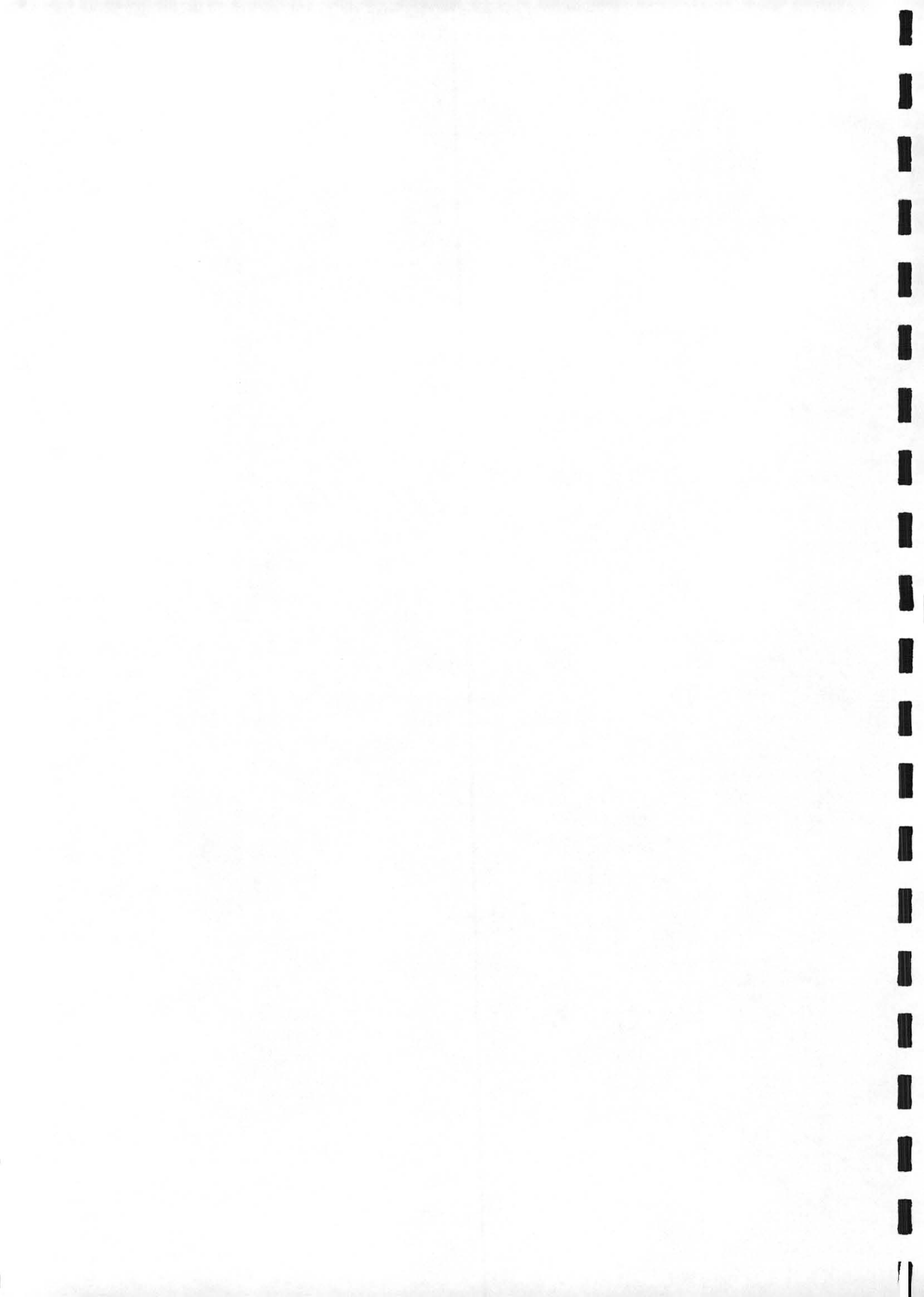
H' s'exprime en mètres par tour.

• Conditions aux limites sur l'axe :

Comme on le voit sur la figure ci-dessous, l'axisymétrie du problème impose à la composante axiale du champ de vitesse d'être une fonction paire du rayon. Par contre, les composantes tangentielle et radiale en sont des fonctions impaires. Les conditions aux limites pour les composantes du champ de vitesse sur l'axe se traduisent donc par :

$$\left\{ \begin{array}{l} V_r(r=0, z, t) = 0 \\ V_\theta(r=0, z, t) = 0 \\ \frac{\partial V_z}{\partial r}(r=0, z, t) = 0 \end{array} \right.$$





• Conditions aux limites à la paroi latérale et le fond :

Ces conditions sont évidentes dans ce cas. Elles traduisent l'adhérence du fluide à la paroi et au fond. Elles s'écrivent :

$$\begin{array}{l}
 \text{Paroi latérale} \\
 \\
 \\
 \\
 \\
 \\
 \\
 \\
 \\
 \\
 \text{Fond}
 \end{array}
 \left\{
 \begin{array}{l}
 v_r \left(r = \frac{Dc}{2}, z, t \right) = 0 \\
 v_\theta \left(r = \frac{Dc}{2}, z, t \right) = 0 \\
 v_z \left(r = \frac{Dc}{2}, z, t \right) = 0 \\
 \\
 v_r \left(r, z = z_f, t \right) = 0 \\
 v_\theta \left(r, z = z_f, t \right) = 0 \\
 v_z \left(r, z = z_f, t \right) = 0
 \end{array}
 \right.$$

z_f est la fonction qui donne la profondeur du fond de la cuve pour un rayon donné. Les expressions de z_f pour les trois cas testés dans le cadre de ce travail sont :

- Fond Plat : $z_f = 0$
- Fond conique : $z_f = \tan(\alpha) \left(r - \frac{Dc}{2} \right)$
- Fond bombé : $z_f = \sqrt{H^2 + r^2} - H$

α étant l'angle que fait la paroi du fond avec la surface $z_f = 0$.

• Conditions aux limites à la surface libre :

Compte tenu de la condition (4) , on a :

$$v_z(r, z = H, t) = 0$$

Les autres conditions aux limites peuvent être mises au point en considérant que les contraintes de cisaillement sont nulles. Cette supposition a été utilisée par Abid [5], Lafond [6] et Baccar [7] avec succès. Cette condition se traduit par :

$$\frac{\partial v_z}{\partial r}(r, z=H, t) + \frac{\partial v_r}{\partial z}(r, z=H, t) = 0$$

$$\frac{\partial v_\theta}{\partial z}(r, z=H, t) + \frac{1}{r} \frac{\partial v_z}{\partial \theta}(r, z=H, t) = 0$$

Or :

$$\frac{\partial v_r}{\partial z}(r, z=H, t) = 0$$

$$\frac{\partial v_z}{\partial \theta}(r, z=H, t) = 0$$

Par conséquent :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial v_z}{\partial r}(r, z=H, t) = 0 \\ \frac{\partial v_\theta}{\partial z}(r, z=H, t) = 0 \\ v_z(r, z = H, t) = 0 \end{array} \right.$$

3 - 5) CONDITIONS AUX LIMITES POUR LE TRANSFERT DE MATIERE :

Elles peuvent se déduire du caractère " imperméable " des frontières en annulant sur celles-ci le flux de matière; qui réside dans le fait que la composante de vitesse normale à chaque frontière est nulle, d'où :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial C}{\partial z} (r, z = H, t) = 0 \\ \frac{\partial C}{\partial z} (r, z = z_f, t) = 0 \\ \frac{\partial C}{\partial r} (r = 0, z, t) = 0 \\ \frac{\partial C}{\partial r} (r = \frac{Dc}{2}, z, t) = 0 \end{array} \right.$$

3 - 6) CONDITIONS INITIALES :

A l'instant initial, on considère que le champ de vitesse est nul en tout point sauf sur chaque agitateur. Cette considération repose sur l'hypothèse stipulant que chaque agitateur atteint son régime permanent au bout d'un temps très petit par rapport au temps au bout duquel l'écoulement global devient permanent.

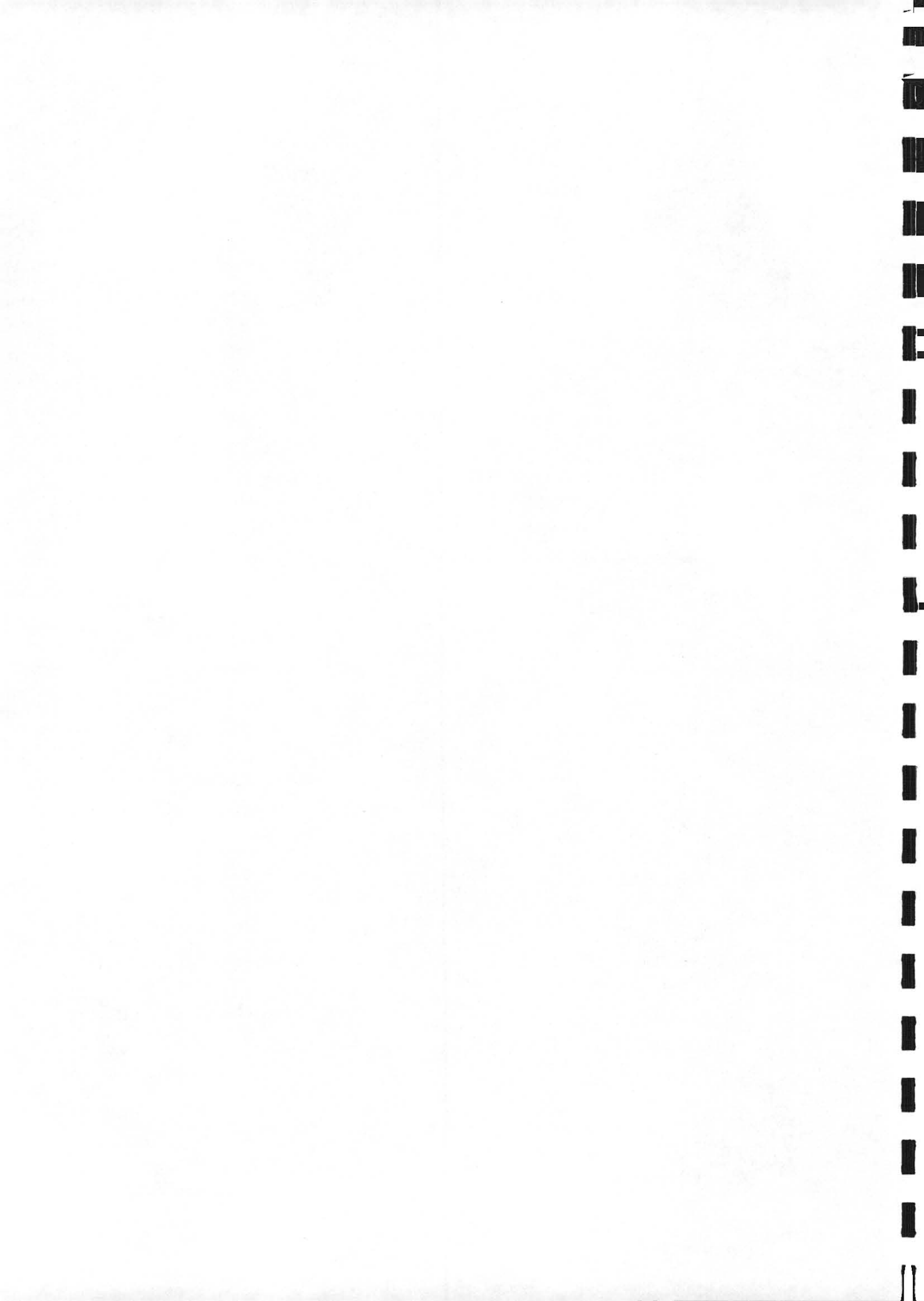
La concentration est calculée pas à pas dans le temps, comme pour l'hydrodynamique, par contre l'arrêt des calculs pour la concentration est basé sur une échelle de non homogénéité du champ de concentration.

$$\left\{ \begin{array}{l} C(r, z=H, t=0) = C_0 \\ C(r, z, t=0) \Big|_{z \neq H} = 0 \end{array} \right.$$

3 - 7) DEGRE D'HOMOGENEITE :

Nous considérons que dans cette échelle le degré maximum de 100 % d'inhomogénéité est obtenu lorsque toutes les cellules de calcul ont une concentration nulle sauf une seule. L'homogénéité totale par contre est telle que toutes les cellules ont la même concentration. Supposons pour construire cette échelle que l'on est en présence de N_t cellules dont N_c à la même concentration C et N_0 cellules à concentration nulle, avec :

$$N_c + N_0 = N_t$$



La concentration moyenne du réacteur est donnée par :

$$\bar{C} = \frac{Nc \cdot C}{Nt} \quad (3-9)$$

L'écart type est donné par :

$$\sigma = \frac{No \cdot \bar{C} + Nc (C - \bar{C})}{Nt} \quad (3-10)$$

qui se met encore sous la forme :

$$\sigma = \frac{2 \ No \cdot \bar{C}}{Nt} \quad (3-11)$$

Dans le cas général, le degré d'homogénéité retenu s'écrit :

$$dg = \frac{50 \ Nt \cdot \sigma}{(Nt - 1) \bar{C}} \quad (3-12)$$

avec :

$$\bar{C} = \frac{\sum C_i}{Nt} \quad (3-13)$$

et :

$$\sigma = \frac{\sum |C_i - \bar{C}|}{Nt} \quad (3-14)$$

L'échelle dg est toujours comprise entre 0 et 100. Ces valeurs extrêmes correspondent respectivement à l'homogénéité totale et à l'inomogénéisation totale définies précédemment. Le temps d'homogénéisation (qui peut être comparé au temps de mélange théorique) est calculé à partir de ce paramètre par :

$$Ntm = N \cdot At \cdot ite$$

N : étant une vitesse de rotation en tours par seconde

At : le pas dans le temps

ite : le nombre d'itérations à effectuer pour obtenir une valeur de dg donnée.

Le temps d'homogénéisation donné par notre programme s'exprime donc en nombre de tours.



3 - 8) MISE DES EQUATIONS SOUS FORME ADIMENSIONNELLE :

Puisque l'influence du nombre de Froude est négligée, tous les écoulements ayant le même nombre de Reynolds et les mêmes paramètres géométriques sans dimensions sont alors équivalents. La liste de ces paramètres est la suivante :

$$\frac{H}{Dc} , \frac{da}{Dc} , \frac{b}{Dc} , \frac{h}{Dc}$$

Les variables adimensionnelles sont les suivantes :

$$r^* = \frac{r}{Dc}$$

$$z^* = \frac{z}{Dc}$$

S'il y'a plusieurs agitateurs sur l'arbre ;

$$Dm = \max (Di)$$

Si ces agitateurs n'ont pas la même vitesse de rotation ;

$$Nm = \max (Ni)$$

d'où la vitesse Vm est :

$$Vm = Nm \cdot Dm$$

On pose : $Vr^* = \frac{Vr}{Vm}$, $V_{\theta}^* = \frac{V_{\theta}}{Vm}$ et $Vz^* = \frac{Vz}{Vm}$

et : $P^* = \frac{P}{\rho \cdot Vm^2}$

$$t^* = \frac{t \cdot Vm}{Dc}$$

Pour ne pas alourdir les notations le signe "*" sera omis et Les équations adimensionnelles se présentent alors comme suit :

$$\frac{\partial V_r}{\partial t} + V_r \frac{\partial V_r}{\partial r} + V_z \frac{\partial V_r}{\partial z} - \frac{V_\theta^2}{r} + \frac{1}{Re} \frac{V_r}{r^2} = - \frac{\partial P}{\partial r} + \frac{1}{Re} \left(\frac{\partial^2 V_r}{\partial r^2} + \frac{\partial^2 V_r}{\partial z^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial V_r}{\partial r} \right)$$

$$\frac{\partial V_\theta}{\partial t} + V_r \frac{\partial V_\theta}{\partial r} + V_z \frac{\partial V_\theta}{\partial z} + \frac{V_r \cdot V_\theta}{r} + \frac{1}{Re} \frac{V_\theta}{r^2} = \frac{1}{Re} \left(\frac{\partial^2 V_\theta}{\partial r^2} + \frac{\partial^2 V_\theta}{\partial z^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial V_\theta}{\partial r} \right)$$

$$\frac{\partial V_z}{\partial t} + V_r \frac{\partial V_z}{\partial r} + V_z \frac{\partial V_z}{\partial z} = - \frac{\partial P}{\partial z} + \frac{1}{Re} \left(\frac{\partial^2 V_z}{\partial r^2} + \frac{\partial^2 V_z}{\partial z^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial V_z}{\partial r} \right)$$

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (\rho r V_r) + \frac{\partial}{\partial z} (r V_z) = 0$$

$$\frac{\partial C}{\partial t} + V_r \frac{\partial C}{\partial r} + V_z \frac{\partial C}{\partial z} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{Df}{Vm \cdot Dc} \frac{\partial C}{\partial r} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{Df}{Vm \cdot Dc} \frac{\partial C}{\partial z} \right)$$

Re est le nombre de Reynolds globale de l'écoulement, son expression dans le cas de fluide newtonien est :

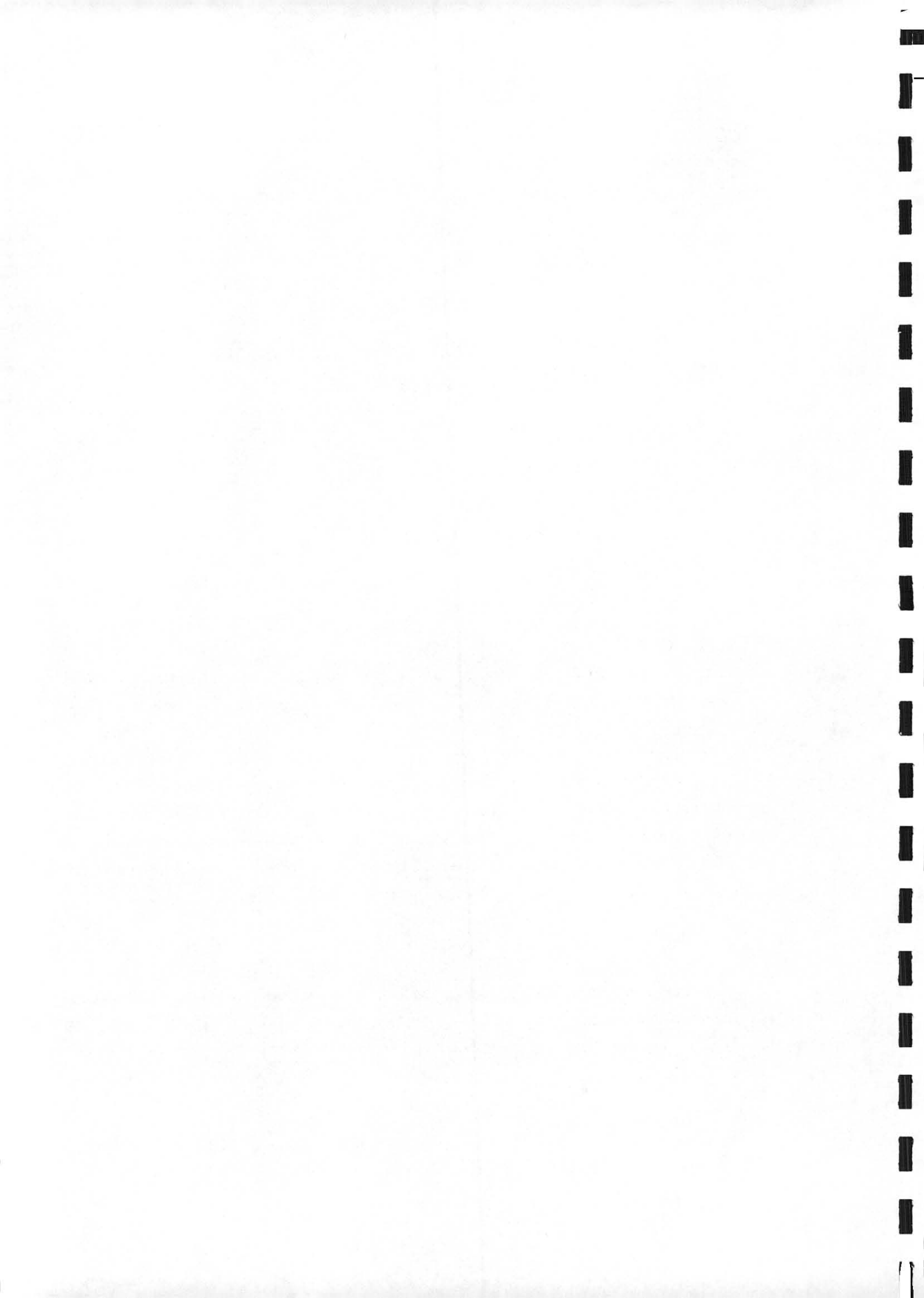
$$Reg = \frac{\rho \cdot Vm \cdot Dc}{\mu} \quad (3-15)$$

Le nombre de Reynolds globale Reg, est écrit ici par rapport au diamètre de la cuve, Dc. En agitation mécanique, le nombre de Reynolds de référence est construit par rapport au diamètre de l'agitateur. L'expression de ce nombre est :

$$Rea = \frac{\rho \cdot N \cdot Da^2}{\mu} \quad (3-16)$$

La relation liant ces deux écritures du nombre de Reynolds s'écrit comme suit :

$$Reg = \left(\frac{Dc}{Da} \right) \cdot Rea \quad (3-17)$$



R E S O L U T I O N N U M E R I Q U E

4-1) INTRODUCTION :

Les équations de conservation régissant le phénomène de convection - diffusion et l'équation de transfert de matière sont des équations différentielles aux dérivées partielles non linéaires et elliptiques. En raison de leur complexité, il consiste à remplacer ce système continu par un autre système algébrique discret exprimant un point P du volume de contrôle en fonction de ces noeuds voisins.

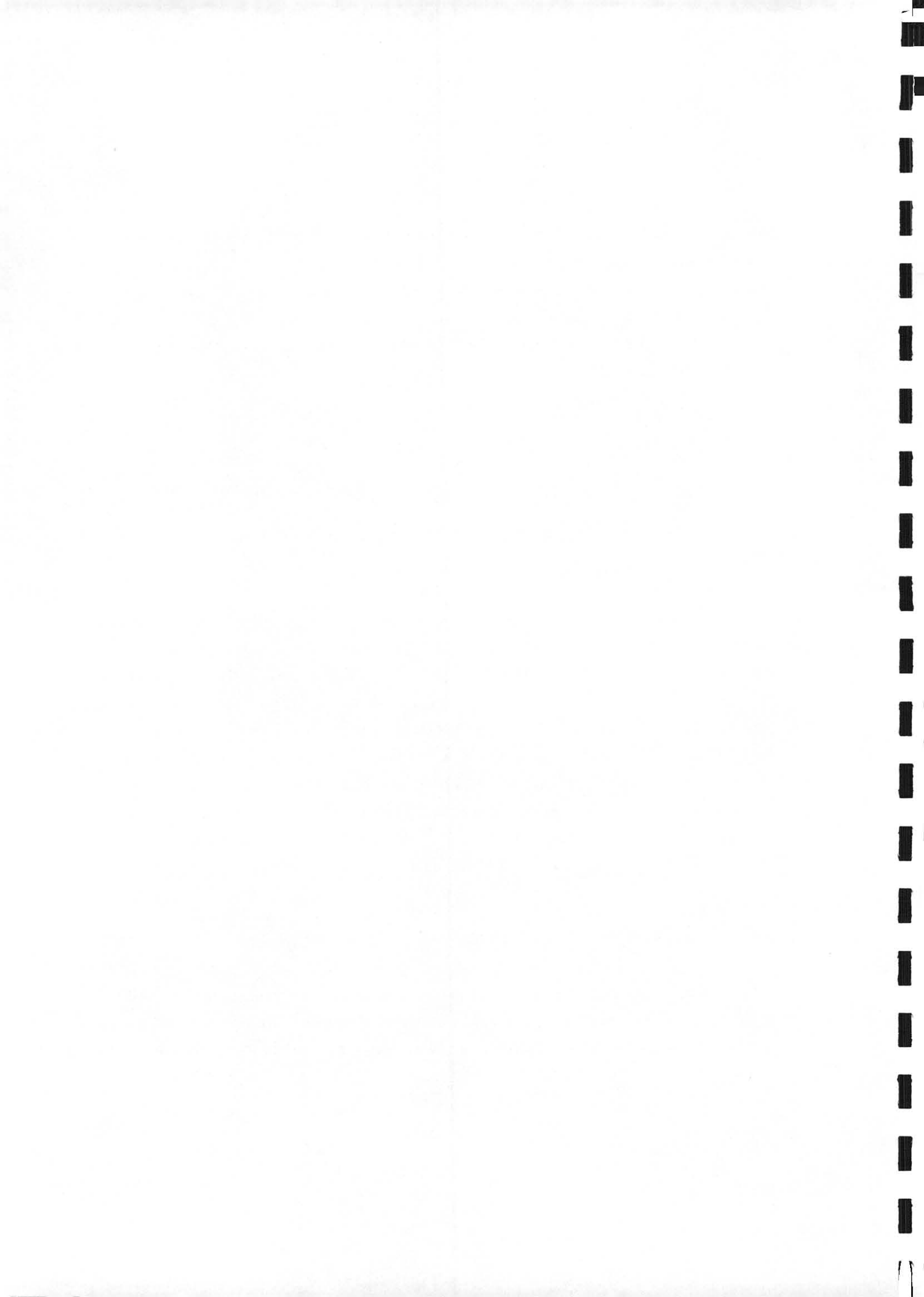
Il existe actuellement trois grandes méthodes de discrétisation:

- La méthode des différences finies,
- La méthode des éléments finis,
- La méthode des volumes finis.

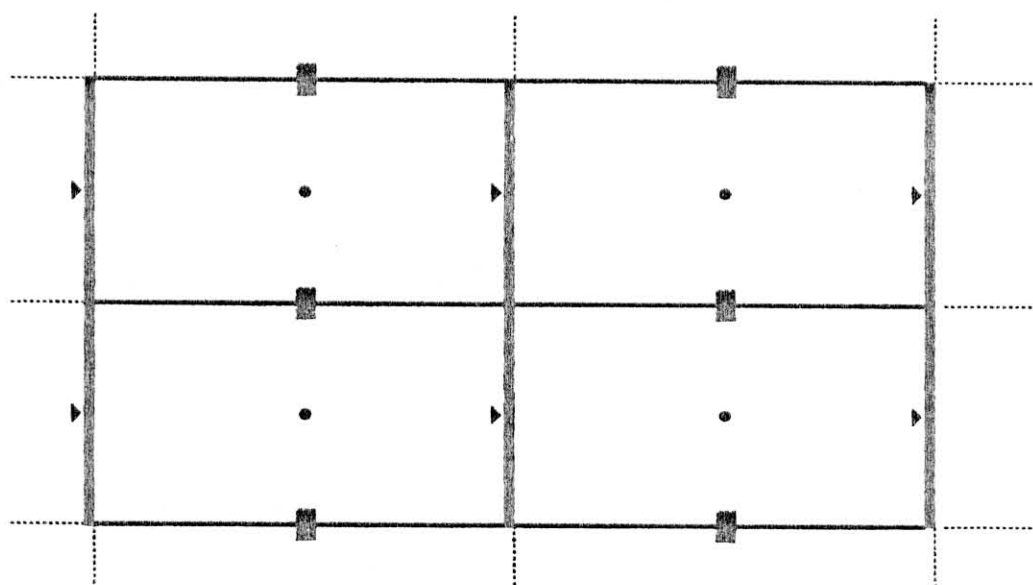
Notre choix s'est porté sur la méthode aux volumes finis développée par PATANKAR (1980-1981). Cette méthode s'adapte bien en général aux équations aux dérivées partielles concernant des transferts impliquant une forme conservative. L'avantage de cette méthode par rapport aux éléments finis, par exemple, est sa grande souplesse de mise en oeuvre et du code de calcul mis à notre disposition. Nous allons dans ce qui suivra détailler les calculs correspondant à l'application de cette méthode dans le cas de notre problème d'écoulement laminaire tridimensionnel axisymétrique.

4-2) MAILLAGE :

Dans le cas de la méthode aux volumes finis, la réalisation d'un maillage consiste à découper le domaine de calcul en volumes élémentaires à face commune deux à deux. Ces volumes ne doivent pas se chevaucher et doivent recouvrir tout le domaine de calcul.

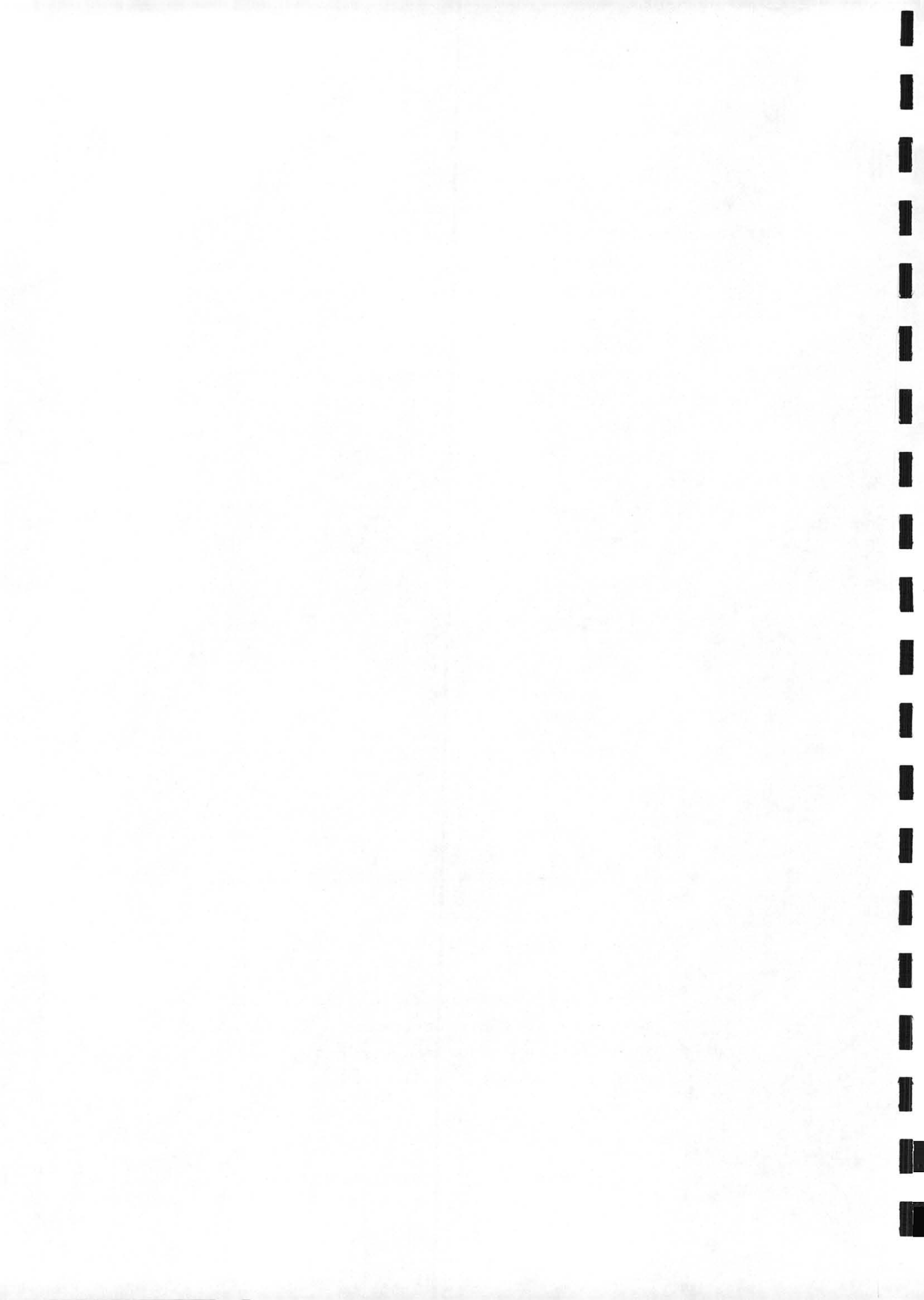


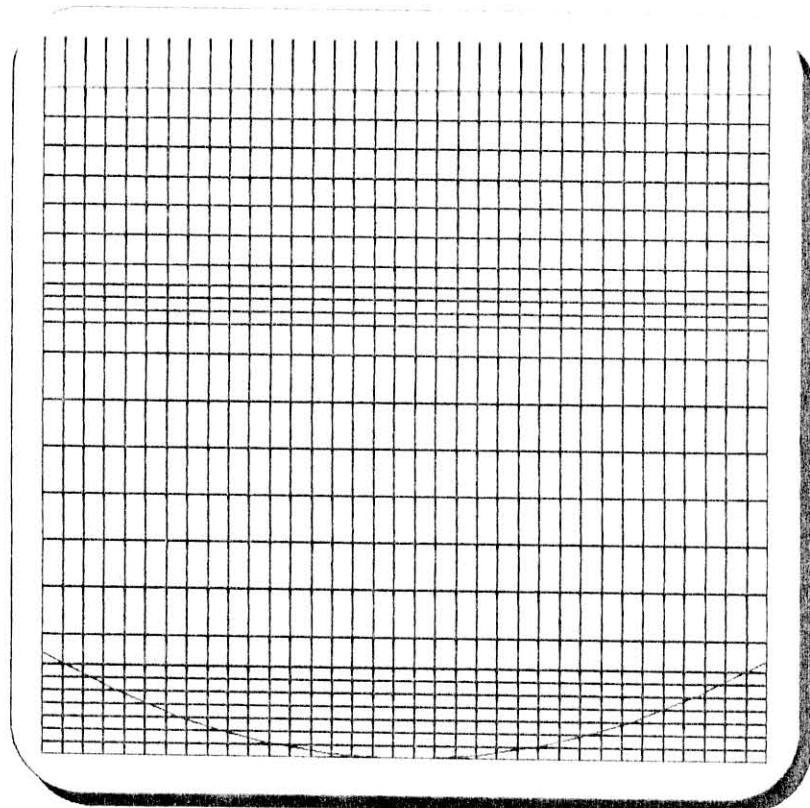
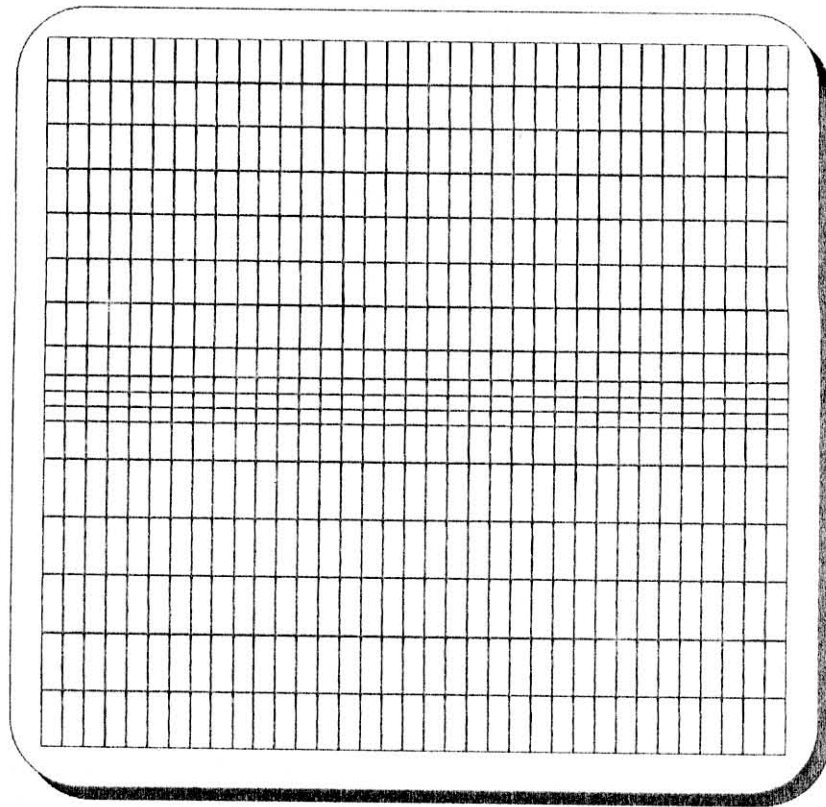
La figure (4-2) représente deux cuves maillées de cette méthode. Les propriétés physiques scalaires inconnues du problèmes sont calculées au milieu du volume de chacune de ces cellules. Les points du maillage correspondant au calcul de chaque composante du champ de vitesse se situent aux milieux des interfaces des volumes élémentaires de base, dont le vecteur normal est parallèle à la direction de la composante considérée. Dans le cas particulier de l'axisymétrie, la composante tangentielle du champ de vitesse est considérée comme une propriété scalaire variable de l'écoulement. Elle est alors calculée au milieu des cellules de calcul du maillage de base comme la pression et la concentration. La figure ci-dessous présente quelques cellules du maillage de base avec les points de calcul correspondant aux autres maillage associés.



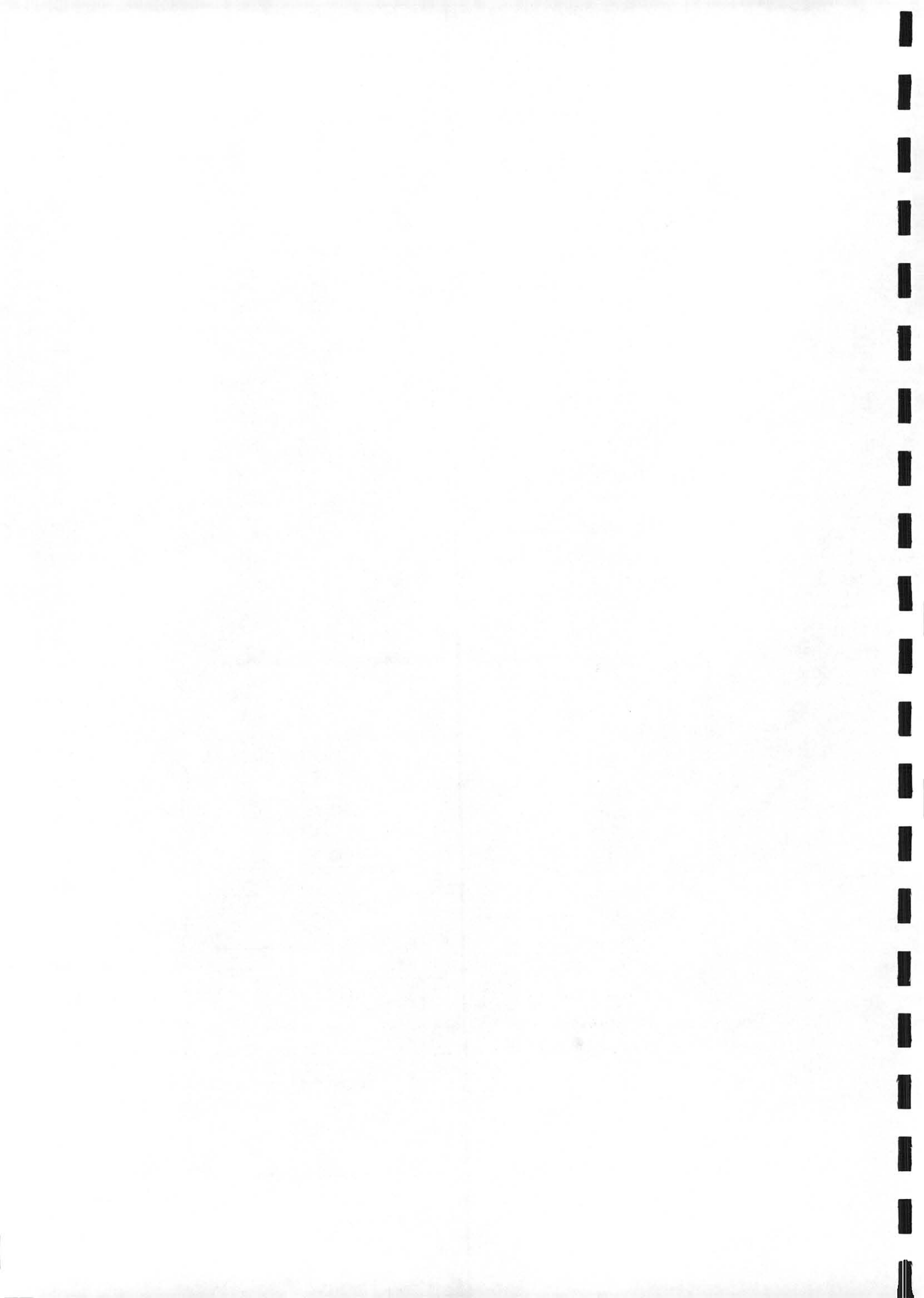
Figure(4-1) : Points de calcul

- ▶ Point de calcul de composante radiale de vitesse.
- Point de calcul de la composante axiale de vitesse.
- Point de calcul de la composante tangentielle de vitesse, de la pression et de la concentration.





Figure(4-1) : Maillage des cuves



4-3) DESCRIPTION DU PROGRAMME MAILLEUR :

Le maillage utilisé dans ce travail est un maillage décalé non régulier à trois régions comme le montre la figure(4-2) :

- La zone de présence de l'agitateur;
- Le fond de cuve;
- Le milieu de la cuve.

■ Les agitateurs :

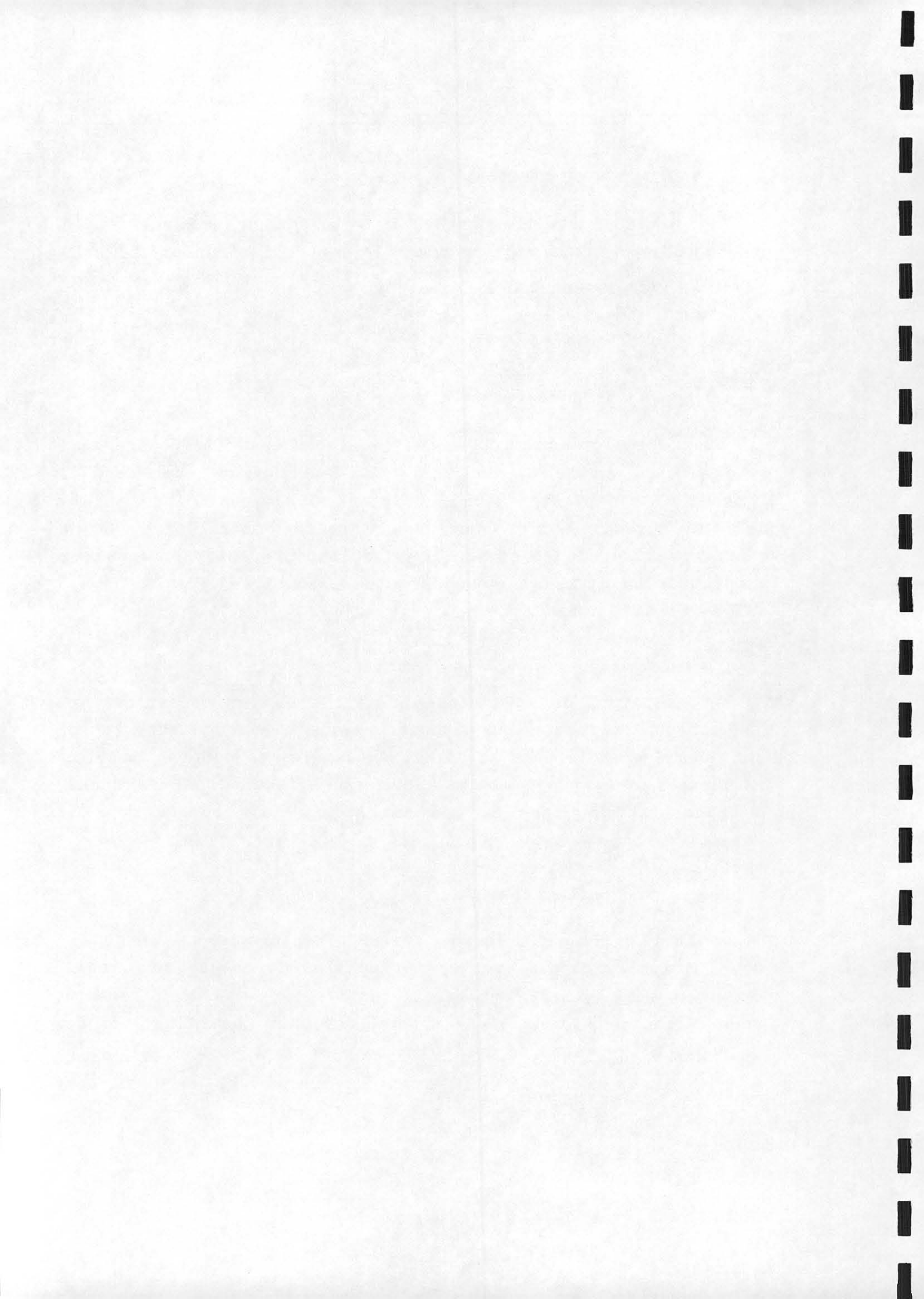
Cette région est maillée aussi émincit qu'on le désire dans la direction axiale. Le programme mailleur charge comme données la hauteur d'implantation, l'épaisseur et le nombre de points dans la direction axiale de chaque agitateur. L'épaisseur de chaque maille de base sur un agitateur est donnée tout simplement en divisant l'épaisseur de l'agitateur par le nombre de points en question.

■ Le fond :

Le maillage du fond n'est travaillé de façon particulière que lorsque le fond n'est pas plat. Le maillage de cette région est aussi contrôlé dans la direction axiale. La génération de ce maillage par le programme mailleur est effectuée par la donnée du paramètre de forme du fond et du maillage commun dans la direction radiale (voir annexe 5).

■ La région centrale :

Cette région est formée de sous régions séparées deux à deux par un agitateur. Toutes les mailles de chaque sous-région ont les mêmes dimensions et le nombre de mailles de chaque sous-région est calculée par le mailleur en fonction des hauteurs d'implantation des agitateurs et de leur épaisseur.



L'opération de maillage en volume finis est en général d'une rapidité incomparable à la même opération en élément finis. Pour une cuve à fond bombé par exemple, et pour un nombre raisonnable de points de calcul pour chaque composante de vitesse, l'opération de maillage en éléments finis nécessite souvent un mailleur commercial, et un temps de calcul de l'ordre d'une semaine sur mini-ordinateur. A titre de comparaison, la même opération en volumes finis nécessiterait un temps maximum de cinq minutes et une capacité mémoire dix fois plus petite.

4-4) MISE EN FORME DES EQUATIONS :

Pour discrétiser en volume finis le système d'équations correspondant à notre problème, il est indispensable de mettre ces équations sous forme conservative.

4-4-1) Transformation des équations :

La partie des équations représentant le phénomène de transport par convection pour une propriété physique notée ϕ , qui peut être l'une des composantes du champ de vitesse, soit la concentration est donnée par :

$$V_r \frac{\partial \phi}{\partial r} + V_z \frac{\partial \phi}{\partial z} = \frac{\partial(\phi \cdot V_r)}{\partial r} + \frac{\partial(\phi \cdot V_z)}{\partial z} - \phi \left(\frac{\partial V_r}{\partial r} + \frac{\partial V_r}{\partial r} \right) \quad (4-1)$$

Ce qui peut s'écrire sous la forme :

$$V_r \frac{\partial \phi}{\partial r} + V_z \frac{\partial \phi}{\partial z} = \frac{\partial(\phi \cdot V_r)}{\partial r} + \frac{\partial(\phi \cdot V_z)}{\partial z} + \frac{\phi \cdot V_r}{r} - \phi \left(\frac{\partial V_r}{\partial r} + \frac{\partial V_r}{\partial r} + \frac{V_r}{r} \right) \quad (4-2)$$

La partie du second membre mise entre parenthèses est l'équation de conservation de la masse, et par conséquent, les termes convectifs sont donnés par :

$$V_r \frac{\partial \phi}{\partial r} + V_z \frac{\partial \phi}{\partial z} = \text{div} \left(\phi \cdot \overrightarrow{V} \right) \quad (4-3)$$

La partie qui représente le phénomène de diffusion est donnée par:

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \cdot \Gamma_\phi \frac{\partial \phi}{\partial r} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\Gamma_\phi \frac{\partial \phi}{\partial z} \right) = \text{div} \left(\Gamma_\phi \overrightarrow{\text{grad}} \phi \right) \quad (4-4)$$

Γ_ϕ étant le coefficient de diffusivité de ϕ .

4-4-2) Forme générale des équations :

Les équations de transfert de la quantité de mouvement d'une part et l'équation de la concentration d'autre part, après ces quelques simples manipulations mathématiques, peuvent prendre la forme générale de l'équation suivante, d'après la réf[3] :

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + \text{div} \left(\phi \cdot \overrightarrow{V} - \Gamma_\phi \overrightarrow{\text{grad}} \phi \right) + S_p \cdot \phi = S_c \quad (4-5)$$



Les expressions des fonctions Γ_ϕ , S_p et S_c sont résumées dans le tableau suivant :

ϕ	Γ_ϕ	S_p	S_c
V_r	$\frac{1}{Re}$	$\frac{1}{r^2 \cdot Re}$	$-\frac{\partial P}{\partial r} + \frac{v_\theta \cdot v_\theta}{r}$
v_θ	$\frac{1}{Re}$	$\frac{1}{r^2 \cdot Re}$	$-\frac{V_r \cdot v_\theta}{r}$
V_z	$\frac{1}{Re}$	0	$-\frac{\partial P}{\partial z}$
C	Df	0	0

Le terme S_p est le terme source linéarisé. Il doit être positif. Ce terme n'existe que dans les deux premières équations du mouvement. Il provient des termes de diffusion et il est lié à la mobilité du repère intrinsèque, et donc il n'existerait pas dans le cas d'un travail en repère cartésien.

Le second membre de la deuxième équation de mouvement peut faire l'objet d'une même analyse. Il est composé du terme d'accélération de Coriolis qui est linéaire par rapport à la composante tangentielle de la vitesse, mais son coefficient de linéarité peut être positif ou négatif. Il est alors nécessaire dans le cadre d'une éventuelle linéarisation de l'effectuer en chaque point de calcul, et à chaque étape de résolution. Le terme source et le terme linéarisé de cette équation peuvent se transformer de la façon suivante :

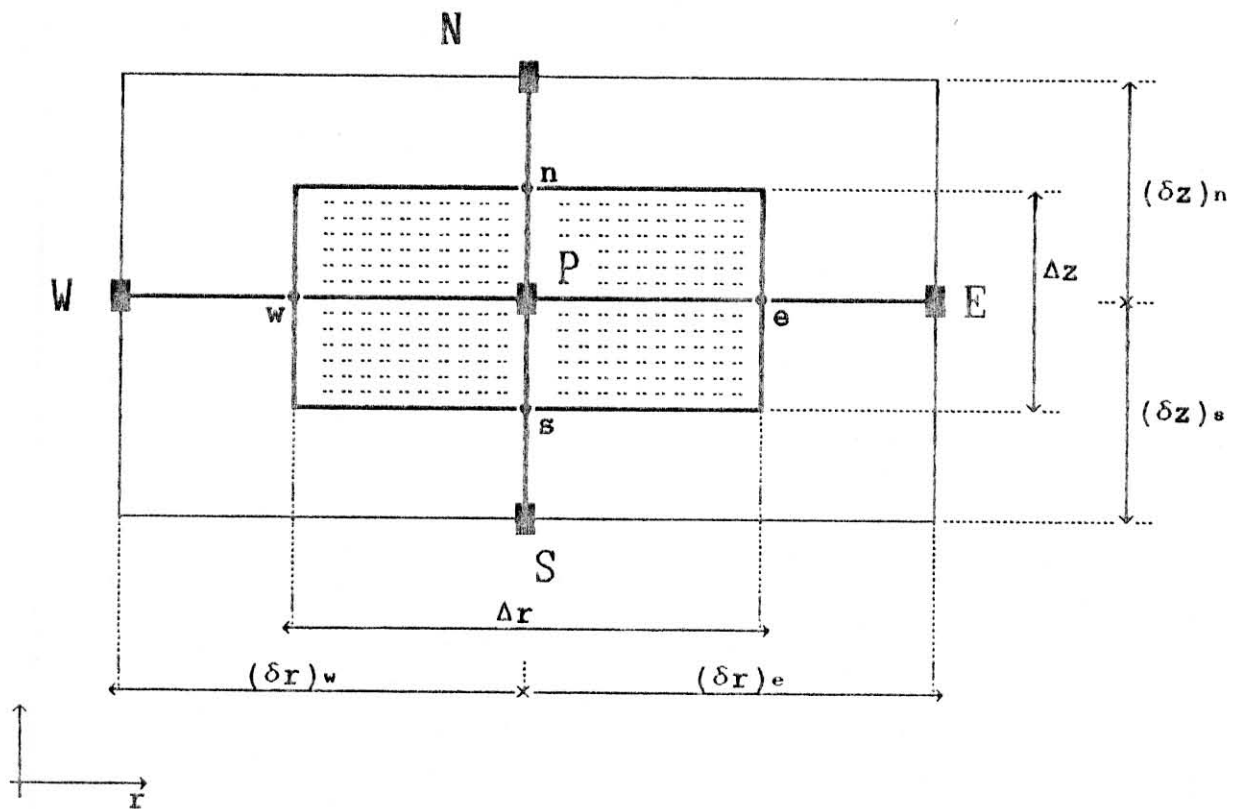
$$S_p = \frac{1}{r^2 \cdot Re} + \max \left(0, \frac{V_r}{r} \right)$$

$$S_c = -v_\theta \cdot \min \left(0, \frac{V_r}{r} \right)$$



4-5) DISCRETISATION :

On considère un point de calcul noté P appartenant à un volume élémentaire sur lequel on va intégrer les équations aux dérivées partielles (voir figure(4-3)). Ce point est à la distance r de l'axe de la cuve, et il est entouré de quatre points voisins notés E,W,N et S. Les surfaces frontières notées e,w,n et s sont situées à mi-distance entre le point P et chacun de ces quatre voisins.



Figure(4-3) : Volume de contrôle

■ Intégration de l'équation générale :

On considérons le cas d'un écoulement tridimensionnel axisymétrique, l'équation(4-5) s'écrit sous la forme suivante :



Soit :

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r \cdot V_r \cdot \phi) + \frac{\partial}{\partial z} (V_z \cdot \phi) = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(\Gamma \cdot r \frac{\partial \phi}{\partial r} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\Gamma \frac{\partial \phi}{\partial z} \right) + S \quad (4-6)$$

On obtient aussi :

$$\frac{\partial}{\partial t} (r \cdot \phi) + \frac{\partial}{\partial r} \left(r \cdot V_r \cdot \phi - \Gamma \cdot r \frac{\partial \phi}{\partial r} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(r \cdot V_z \cdot \phi - \Gamma \cdot r \frac{\partial \phi}{\partial z} \right) = S \cdot r \quad (4-7)$$

ou encore :

$$\frac{\partial}{\partial t} (r \cdot \phi) + \frac{\partial}{\partial r} \left(r \cdot J_r \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(r \cdot J_z \right) = S \cdot r \quad (4-8)$$

avec :

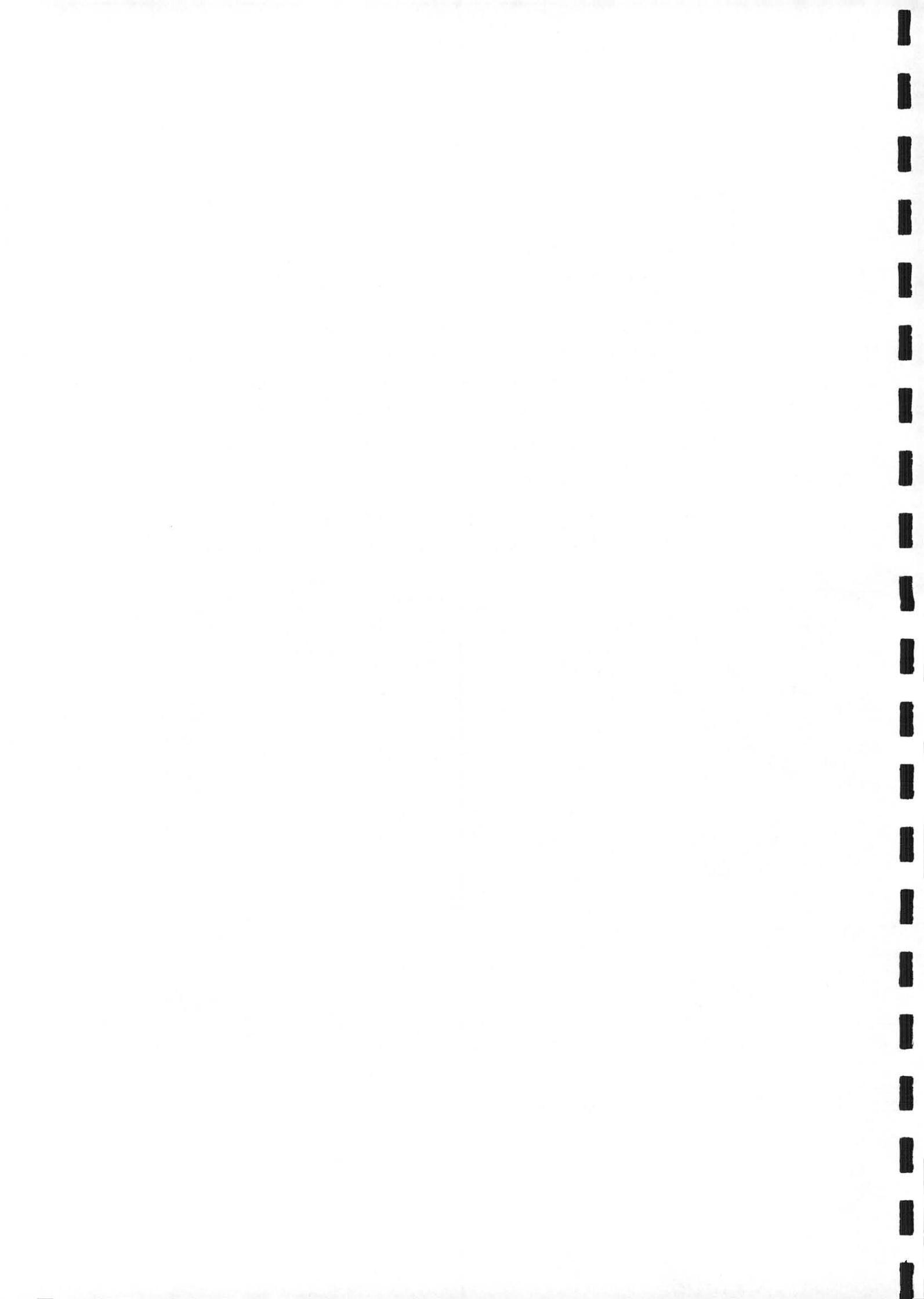
$$J_r = V_r \cdot \phi - \Gamma \frac{\partial \phi}{\partial r}$$

$$J_z = V_z \cdot \phi - \Gamma \frac{\partial \phi}{\partial z}$$

Où J représente la densité de flux convectif-diffusif de ϕ .

Afin de pouvoir intégrer cette équation, on doit tenir compte des suppositions suivantes :

- Les flux totaux J_e , J_w , J_n et J_s calculés aux interfaces e , w , n et s sont uniformes sur leurs interfaces respectives,
- Les vitesses massiques $(\rho \cdot V)_e$, $(\rho \cdot V)_w$, $(\rho \cdot V)_n$ et $(\rho \cdot V)_s$ sont uniformes sur leurs interfaces respectives,
- ϕ_p est uniforme dans le V.C à l'instant considéré,
- Le terme source \bar{S} est aussi uniforme à l'intérieur du V.C,
- On considère un schéma complètement implicite en vue d'assurer une stabilité du schéma de progression dans le temps [3].



Soit :

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r \cdot V_r \cdot \phi) + \frac{\partial}{\partial z} (V_z \cdot \phi) = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(\Gamma \cdot r \frac{\partial \phi}{\partial r} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\Gamma \frac{\partial \phi}{\partial z} \right) + S \quad (4-6)$$

On obtient aussi :

$$\frac{\partial}{\partial t} (r \cdot \phi) + \frac{\partial}{\partial r} \left(r \cdot V_r \cdot \phi - \Gamma \cdot r \frac{\partial \phi}{\partial r} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(r \cdot V_z \cdot \phi - \Gamma \cdot r \frac{\partial \phi}{\partial z} \right) = S \cdot r \quad (4-7)$$

ou encore :

$$\frac{\partial}{\partial t} (r \cdot \phi) + \frac{\partial}{\partial r} \left(r \cdot J_r \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(r \cdot J_z \right) = S \cdot r \quad (4-8)$$

avec :

$$J_r = V_r \cdot \phi - \Gamma \frac{\partial \phi}{\partial r}$$

$$J_z = V_z \cdot \phi - \Gamma \frac{\partial \phi}{\partial z}$$

Où J représente la densité de flux convectif-diffusif de ϕ .

Afin de pouvoir intégrer cette équation, on doit tenir compte des suppositions suivantes :

- Les flux totaux J_e , J_w , J_n et J_s calculés aux interfaces e, w, n et s sont uniformes sur leurs interfaces respectives,
- Les vitesses massiques $(\rho \cdot V)_e$, $(\rho \cdot V)_w$, $(\rho \cdot V)_n$ et $(\rho \cdot V)_s$ sont uniformes sur leurs interfaces respectives,
- ϕ_p est uniforme dans le V.C à l'instant considéré,
- Le terme source \bar{S} est aussi uniforme à l'intérieur du V.C,
- On considère un schéma complètement implicite en vue d'assurer une stabilité du schéma de progression dans le temps [3].



Nous intégrons terme par terme l'équation (4-8) à travers le volume de contrôle décrit sur la figure(4-4) et par rapport au temps t, suivant un schéma implicite.

Soit :

$$\int_s^n \int_w^e \int_{t_1}^{t_2} \frac{\partial}{\partial t} (r \cdot \phi) dt dr dz = (\phi_p - \phi_p^o) \Delta V$$

$$\int_{t_1}^{t_2} \int_s^n \int_w^e \frac{\partial}{\partial r} (r \cdot Jr) dr dz dt = (Ae \cdot Je - Aw \cdot Jw) \Delta t$$

$$\int_{t_1}^{t_2} \int_w^e \int_s^n \frac{\partial}{\partial z} (r \cdot Jz) dz dr dt = (An \cdot Jn - As \cdot Js) \Delta t$$

$$\int_{t_1}^{t_2} \int_s^n \int_w^e S \cdot r dr dz dt = \bar{S} \cdot \Delta V \cdot \Delta t$$

A_w , A_e , A_n et A_s sont respectivement les sections de passage des facettes w , e , n et s , J_w et J_e sont les valeurs de la composante radiale de la densité de flux convectif-diffusif sur les facettes w et e , J_n et J_s sont les valeurs de la composante axiale sur les facettes n et s .

Les expressions des sections de passage sont données par :

$$A_w = r_e \cdot \Delta z$$

$$A_e = r_w \cdot \Delta z$$

$$A_n = z_n \cdot \Delta r$$

$$A_s = z_s \cdot \Delta r$$

Par conséquent :

$$\left(\phi_p - \phi_p^o \right) \frac{\Delta V}{\Delta t} + \left(Ae \cdot Je - Aw \cdot Jw \right) + \left(An \cdot Jn - As \cdot Js \right) = \bar{S} \cdot \Delta V \quad (4-9)$$



avec :

- ΔV : volume entourant le noeud P tel que : $\Delta V = r_m \Delta r \Delta z$
- ϕ_p^o : valeur au temps t,
- ϕ_p : valeur au temps t+ Δt ,
- $r_m = \frac{r_e + r_w}{2}$ (rayon moyen).
- $J_w = \left(v_r \cdot \phi - \Gamma \phi \frac{\partial \phi}{\partial r} \right)_w$ et $J_e = \left(v_r \cdot \phi - \Gamma \phi \frac{\partial \phi}{\partial r} \right)_e$
- $J_n = \left(v_z \cdot \phi - \Gamma \phi \frac{\partial \phi}{\partial z} \right)_z$ et $J_s = \left(v_z \cdot \phi - \Gamma \phi \frac{\partial \phi}{\partial z} \right)_s$

En remplaçant ϕ par 1 et S_ϕ par 0 dans l'équation (4-9), on obtient l'équation de continuité. Son intégration sur le même volume de contrôle donne (voir figure(4-4)) :

$$\left[F_e - F_w \right] + \left[F_n - F_s \right] = 0 \quad (4-10)$$

tel que :

- $F = A \cdot V$, représente le flux massique dans l'interface.

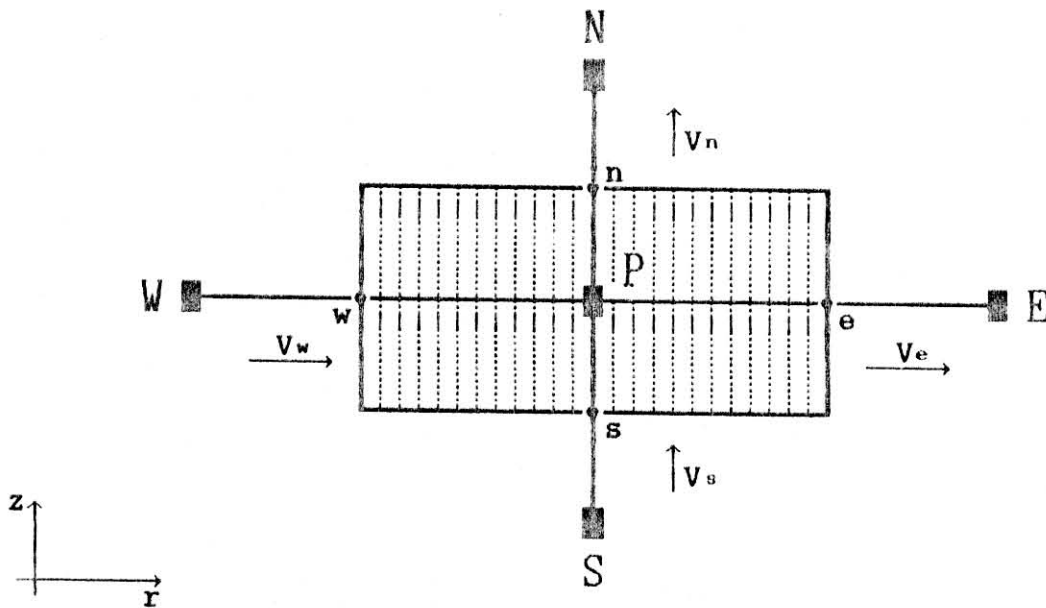


Figure (4-4) : Volume de contrôle relatif à l'équation de continuité.



Multipliée par $(-\phi_p)$ et on l'additionne à l'équation (4-9), elle devient :

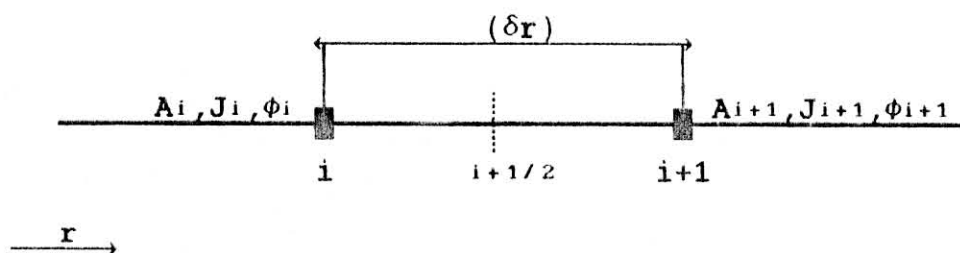
$$\begin{aligned} (\phi_p - \phi_p^0) \frac{\Delta V}{\Delta t} + (Ae.Je - Fe.\phi_p) - (Aw.Jw - Fw.\phi_p) \\ + (An.Jn - Fn.\phi_p) - (As.Js - Fs.\phi_p) = \bar{S} . \Delta V \end{aligned} \quad (4-11)$$

Afin de résoudre ce système d'équations, nous devons linéariser tous les termes liant entre elles les valeurs de la variable physique ϕ entre les points du maillage. Ceci revient à choisir le schéma adéquat exprimant l'évolution de ϕ .

4-6) FORMULATION GENERALISEE DE LA VARIABLE ϕ :

Soit J_r la densité du flux total à travers le milieu séparant les deux noeuds (i) et (i+1) de la figure(4-5) :

$$J_r = \left[v_r . \phi - \Gamma \frac{\partial \phi}{\partial r} \right] \quad (4-12)$$



Figure(4-5) : Densité du flux total J entre deux noeuds du maillage

Si nous multiplions J_r par $\frac{\delta r}{\Gamma_\phi}$, nous aurons :

$$J_r^* = J_r \frac{\delta r}{\Gamma_\phi} = \left[v_r . \phi \frac{\delta r}{\Gamma_\phi} - \frac{\partial \phi}{\partial (r/\delta r)} \right] \quad (4-12.a)$$



$$Jr^* = \left[P \cdot \phi - \frac{\partial \phi}{\partial (r/\delta r)} \right] \quad (4-13)$$

où P désigne le nombre de Peclet relatif au transfert de masse définie par :

$$P = \frac{Vr \cdot \delta r}{\Gamma_{\phi}} \quad (4-14)$$

La valeur de ϕ à l'interface est la moyenne pondérée entre ϕ_1 et ϕ_{1+1} , alors que le gradient $\frac{\partial \phi}{\partial (r/\delta r)}$ sera un multiple de $(\phi_{1+1} - \phi_1)$.

Par conséquent Jr^* s'écrira sous la forme suivante :

$$Jr^* = P \left[\alpha \cdot \phi_1 + (1 - \alpha) \phi_{1+1} \right] - \beta \left[\phi_{1+1} - \phi_1 \right] \quad (4-15)$$

avec :

- α coefficient de pondération,
- β facteur multiplicatif.

L'équation (4-15) peut encore s'écrire :

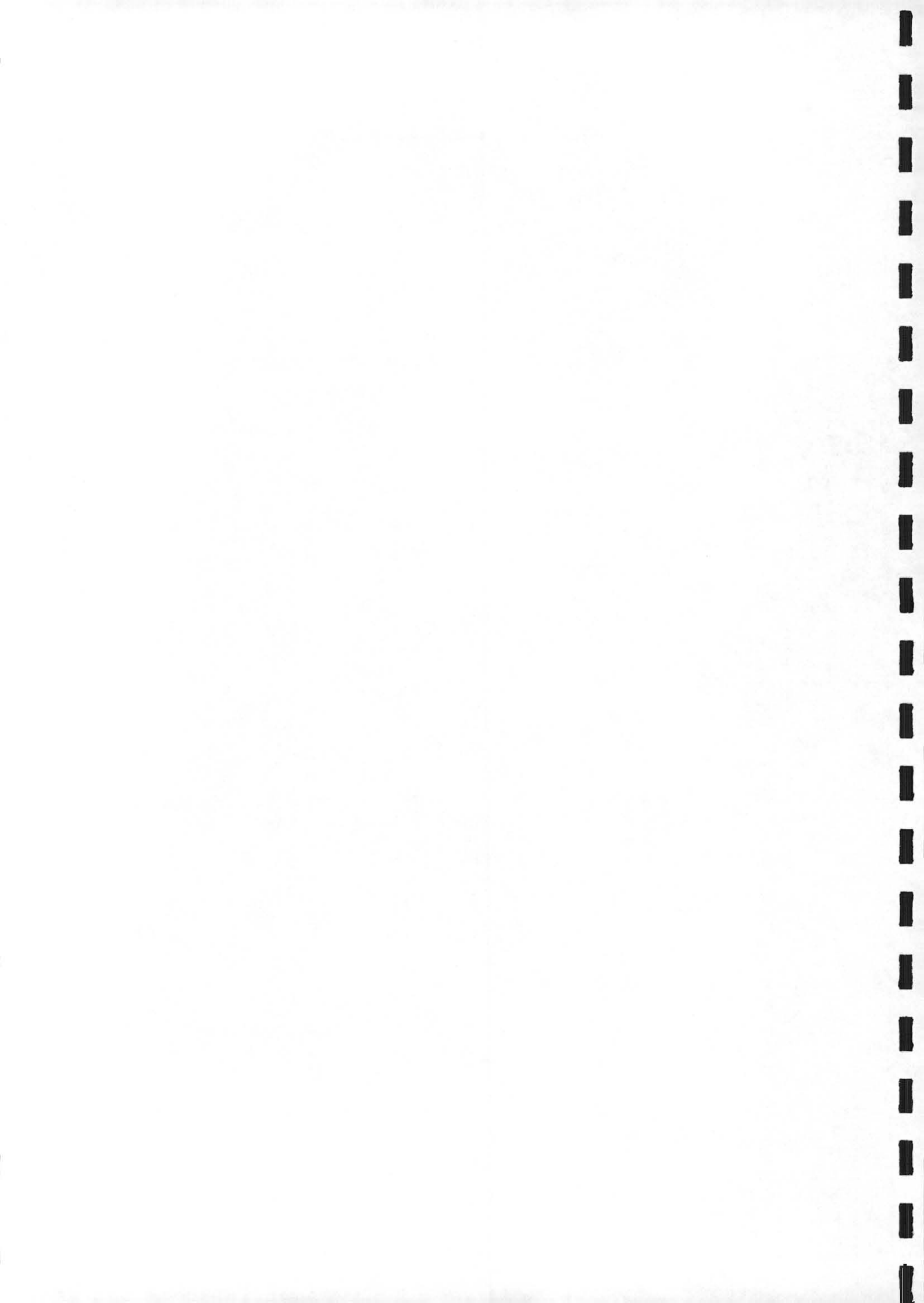
$$Jr^* = B \cdot \phi_1 - A \cdot \phi_{1+1} \quad (4-16)$$

Les coefficients A et B sont respectivement reliés aux variables ϕ_{1+1} et ϕ_1 , tous les deux fonction de Peclet.

$$\text{tel que : } \begin{cases} A = \alpha \cdot P + \beta = A(P) & (4-17.a) \\ B = (\alpha - 1) P + \beta = B(P) & (4-17.b) \end{cases}$$

■ Propriétés de A et B :

Si ϕ_1 est égale à ϕ_{1+1} , le terme de diffusion s'annule, d'où la densité du flux total est fonction seulement de la densité du flux convectif.



Ainsi :
$$J_r^* = P \cdot \phi_i = P \cdot \phi_{i+1} \quad (4-18)$$

En combinant cette dernière équation avec l'équation (4-16), nous aurons :

$$B = A + P \quad (4-19)$$

Un changement de sens de l'axe de coordonnée modifie P en -P et alors que A et B changent mutuellement leur rôle. Nous obtenons donc :

$$\left\{ \begin{array}{l} A(-P) = B(P) \\ \text{ou} \\ B(-P) = A(P) \end{array} \right. \quad (4-20)$$

Pour des valeurs de Peclet négatives, l'équation (4-19) s'écrira sous la forme suivante :

$$\begin{aligned} A(P) &= B(P) - P \\ A(P) &= A(-P) - P \\ A(P) &= A(|P|) - P \end{aligned} \quad (4-21.a)$$

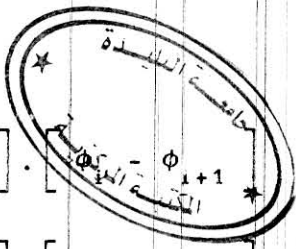
De la même manière :
$$B(P) = A(|P|) + P \quad (4-21.b)$$

Nous désignons par $[[a,b]]$ le maximum de a et b. Les coefficients A(P) et B(P) peuvent s'écrire alors sous la forme compacte suivante :

$$\left\{ \begin{array}{l} A(P) = A(|P|) + [[-P, 0]] \\ B(P) = A(|P|) + [[+P, 0]] \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} (4-22.a) \\ (4-22.b) \end{array}$$



En combinant les équations (4-16), (4-19) et (4-22), nous obtenons:

$$\begin{cases} J_r^* - P \cdot \phi_i = [A(|P|) + [-P, 0]] \cdot [\phi_i - \phi_{i+1}] & (4-23.a) \\ J_r^* - P \cdot \phi_{i+1} = [A(|P|) + [+P, 0]] \cdot [\phi_i - \phi_{i+1}] & (4-23.b) \end{cases}$$


Nous multiplions maintenant les équations précédente par $\frac{\Gamma\phi}{\delta r}$ nous obtenons la forme suivante :

$$\begin{cases} J_r - P \cdot D \cdot \phi_i = D [A(|P|) + [-P, 0]] \cdot [\phi_i - \phi_{i+1}] & (4-24.a) \\ J_r - P \cdot D \cdot \phi_{i+1} = D [A(|P|) + [+P, 0]] \cdot [\phi_i - \phi_{i+1}] & (4-24.b) \end{cases}$$

Ainsi nous déduisons les flux suivant la direction r relatifs à l'équation (4-11).

$$\begin{cases} J_w = D_w [A(|P_w|) + [+P_w, 0]] \cdot [\phi_w - \phi_p] + F_w \cdot \phi_p & (4-25.a) \\ J_e = D_e [A(|P_e|) + [-P_e, 0]] \cdot [\phi_p - \phi_e] + F_e \cdot \phi_p & (4-25.b) \end{cases}$$



De la même manière sont évalués les autres flux suivant la direction z :

$$\left\{ \begin{array}{l} J_s = D_s \left[A(|P_s|) + [[+P_s, 0]] \right] \cdot [\phi_S - \phi_P] + F_s \cdot \phi_P \quad (4-25.a) \\ J_n = D_n \left[A(|P_n|) + [[-P_n, 0]] \right] \cdot [\phi_P - \phi_N] + F_n \cdot \phi_P \quad (4-25.b) \end{array} \right.$$

avec :

$$F_m = P_m \cdot D_m \quad (m = w, e, n \text{ et } s) \quad (4-26)$$

La forme généralisée de l'équation discrétisée sera sous la forme suivante :

$$a_p \phi_p = a_E \phi_E + a_W \phi_W + a_N \phi_N + a_S \phi_S + b \quad (4-27)$$

ou encore :

$$a_p \phi_p = \sum_{nb} a_{nb} \phi_{nb} + b \quad (4-28)$$

Où l'indice nb désigne un noeud voisin.

$$\text{avec : } \left\{ \begin{array}{l} a_E = D_e \cdot A(|P_e|) + [[-F_e, 0]] \quad (4-29.a) \\ a_W = D_w \cdot A(|P_w|) + [[F_w, 0]] \quad (4-29.b) \\ a_N = D_n \cdot A(|P_n|) + [[-F_n, 0]] \quad (4-29.c) \\ a_S = D_s \cdot A(|P_s|) + [[F_s, 0]] \quad (4-29.d) \\ a_p = a_E + a_W + a_N + a_S + a_p^\circ - S_p \cdot \Delta V \quad (4-29.e) \\ a_p^\circ = \frac{\Delta V}{\Delta t} \quad (4-29.f) \\ b = S_c \cdot \Delta V + a_p^\circ \cdot \phi_p^\circ \quad (4-29.g) \end{array} \right.$$



Les flux massique F_m et les conductances D_m relatif aux interfaces w,e,n et s sont donnés par :

$$\left\{ \begin{array}{l} D_w = \frac{A_w \cdot \Gamma \phi_w}{(\delta r)_w} \quad , \quad D_e = \frac{A_e \cdot \Gamma \phi_e}{(\delta r)_e} \end{array} \right. \quad (4-30.a)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} D_n = \frac{A_n \cdot \Gamma \phi_n}{(\delta z)_n} \quad , \quad D_s = \frac{A_s \cdot \Gamma \phi_s}{(\delta z)_s} \end{array} \right. \quad (4-30.b)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} F_w = V_w \cdot \Delta z \cdot r_w \quad , \quad F_e = V_e \cdot \Delta z \cdot r_e \end{array} \right. \quad (4-30.c)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} F_n = V_n \cdot \Delta r \cdot r_m \quad , \quad F_s = V_s \cdot \Delta r \cdot r_m \end{array} \right. \quad (4-30.d)$$

Le rapport de transfert massique par convection au transfert massique par diffusion désigne le nombre de Peclet adimensionnel, donnés comme suit :

$$\left\{ \begin{array}{l} P_w = \frac{F_w}{D_w} \quad , \quad P_e = \frac{F_e}{D_e} \end{array} \right. \quad (4-31.a)$$

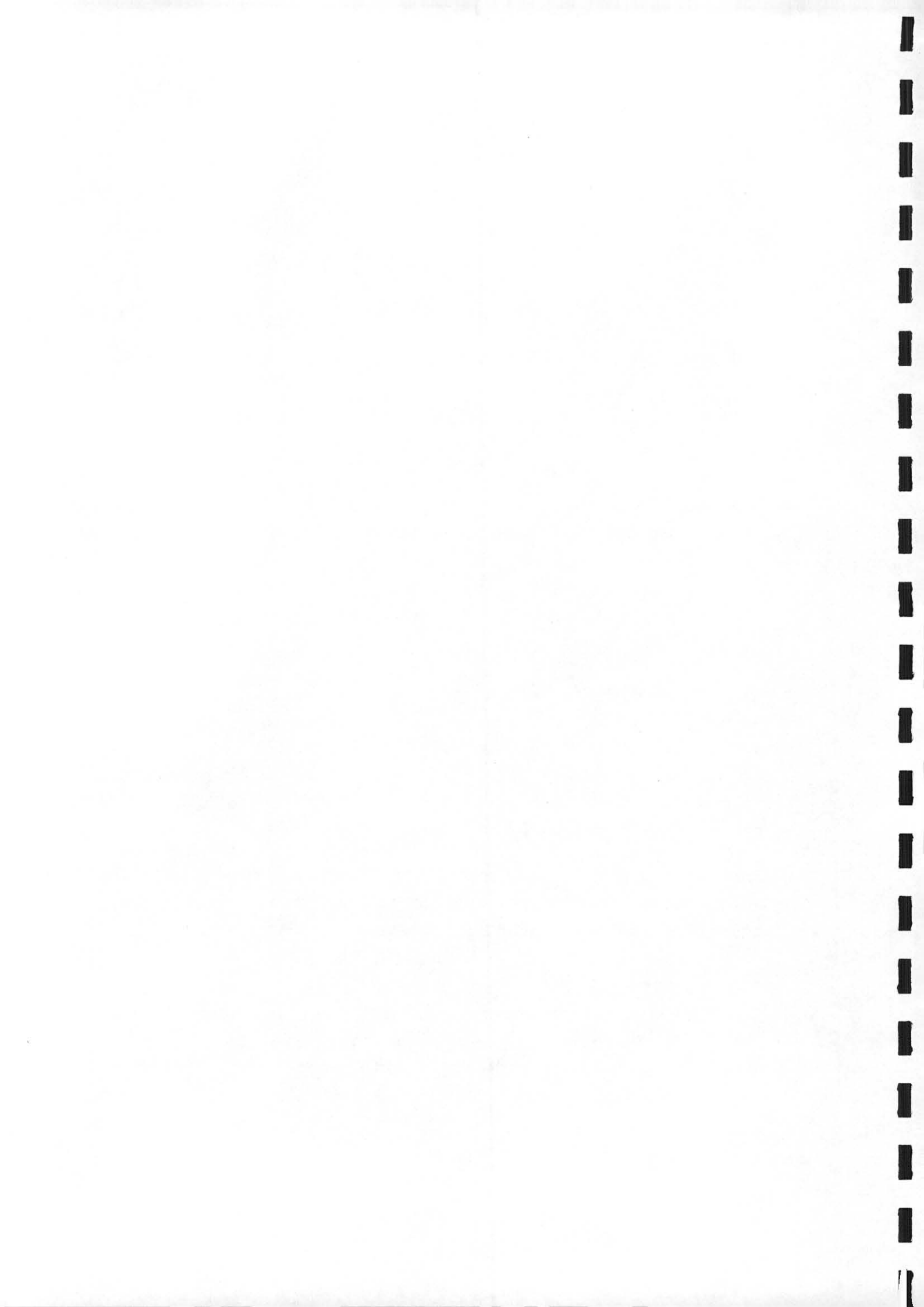
$$\left\{ \begin{array}{l} P_n = \frac{F_n}{D_n} \quad , \quad P_s = \frac{F_s}{D_s} \end{array} \right. \quad (4-31.b)$$

Les coefficients a_m ($M = W, E, N$ et S) représentent l'influence de la convection et de la diffusion aux différentes faces du volume de contrôle, en terme de débit massique F_m et de conductance massique D_m ($m = w, e, n$ et s).

Après avoir donné la formulation généralisée de ϕ , maintenant nous nous intéressons aux divers schémas représentant les densités de flux convectif-diffusif

■ SCHEMA CENTRE :

Ce schéma simple est obtenu en faisant des développement limités autour des valeurs de ϕ aux interfaces. Prenons par exemple la direction radiale et effectuons ces développement limités. On a :



$$\phi_E = \phi_e + \frac{\delta r_e}{2} \left(\frac{\partial \phi}{\partial r} \right) + \frac{1}{2!} \left(\frac{\delta r_e}{2} \right)^2 \left(\frac{\partial^2 \phi}{\partial r^2} \right)_e + \frac{1}{3!} \left(\frac{\delta r_e}{2} \right)^3 \left(\frac{\partial^3 \phi}{\partial r^3} \right)_e + \dots$$

$$\phi_P = \phi_e - \frac{\delta r_e}{2} \left(\frac{\partial \phi}{\partial r} \right) + \frac{1}{2!} \left(\frac{\delta r_e}{2} \right)^2 \left(\frac{\partial^2 \phi}{\partial r^2} \right)_e - \frac{1}{3!} \left(\frac{\delta r_e}{2} \right)^3 \left(\frac{\partial^3 \phi}{\partial r^3} \right)_e + \dots$$

En faisant la somme, puis la différence des deux équations, on obtient au second d'ordre près :

$$\phi_e = \frac{\phi_P + \phi_E}{2} \quad \text{et} \quad \left(\frac{\partial \phi}{\partial r} \right)_e = \frac{\phi_E - \phi_P}{\delta r_e} \quad (4-32)$$

La densité du flux à l'interface e est donnée par :

$$J_e = V \Gamma_e \frac{\phi_P + \phi_E}{2} - \Gamma_e \frac{\phi_E - \phi_P}{\delta r_e} \quad (4-33.a)$$

$$J_e = P_e \cdot D_e \frac{\phi_P + \phi_E}{2} - D_e (\phi_E - \phi_P)$$

$$J_e = D_e \cdot (1 - 0.5 P_e) (\phi_P - \phi_E) + F_e \cdot \phi_P$$

$$J_e = D_e \left[A(|P_e|) + [[-P_e, 0]] \right] [\phi_P - \phi_E] + F_e \cdot \phi_P$$

De la même manière, nous déterminerons sur les autres interfaces les densités de flux. On a alors :

$$\left\{ \begin{array}{l} J_w = D_w \left[A(|P_w|) + [[+P_w, 0]] \right] [\phi_w - \phi_P] + F_w \cdot \phi_P \end{array} \right. \quad (4-33.b)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} J_n = D_n \left[A(|P_n|) + [[-P_n, 0]] \right] [\phi_P - \phi_N] + F_n \cdot \phi_P \end{array} \right. \quad (4-33.c)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} J_s = D_s \left[A(|P_s|) + [[+P_s, 0]] \right] [\phi_S - \phi_P] + F_s \cdot \phi_P \end{array} \right. \quad (4-33.d)$$

Tel que :

$$A(|P|) = 1 - 0.5 |P| \quad (4-34)$$



En remplaçant les différentes densités de flux dans l'équation (4-11), nous obtenons les coefficients a_M ($M = E, W, N, S$) suivant :

$$\left\{ \begin{array}{l} a_E = D_e \cdot (1 - 0.5|P_e|) + [-F_e, 0] \quad (4-35.a) \\ a_W = D_w \cdot (1 - 0.5|P_w|) + [F_w, 0] \quad (4-35.b) \\ a_N = D_n \cdot (1 - 0.5|P_n|) + [-F_n, 0] \quad (4-35.c) \\ a_S = D_s \cdot (1 - 0.5|P_s|) + [F_s, 0] \quad (4-35.d) \end{array} \right.$$

Sachant que les coefficients a_M peuvent être négatifs, il est indispensable de vérifier les conditions de stabilité du schéma de façon qu'ils soient positifs ou nul [3]; c'est à dire :

$$\left| \frac{F_m}{D_m} \right| < 2$$

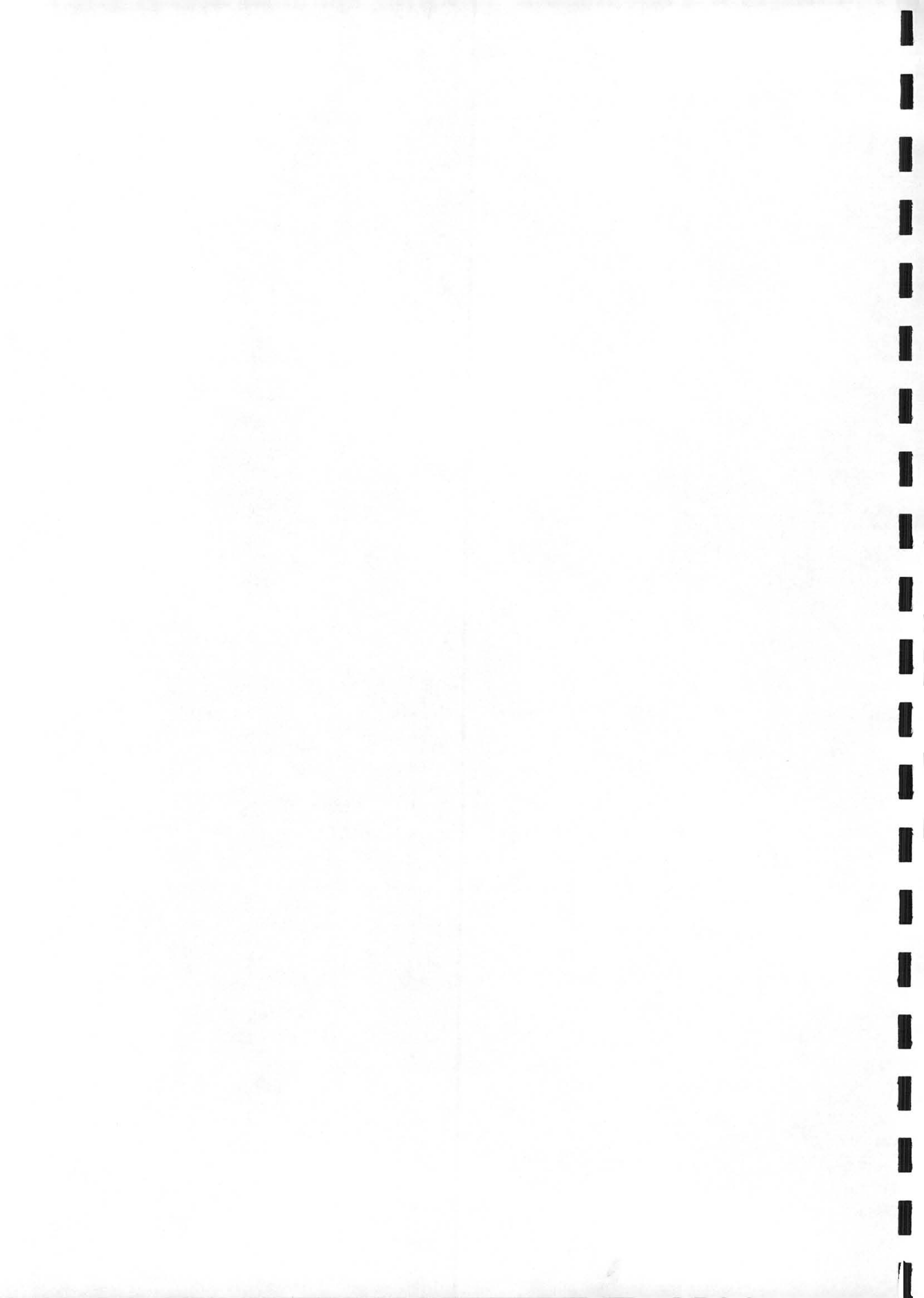
D'après la même référence, le schéma centré n'est possible que pour des valeurs de Reynolds faible ou modérés et pour lesquelles les problèmes de stabilité ne sont pas critiques.

■ Schéma décentré amont (" Upwind ") :

Ce schéma a été développé par Courant, Issacson et Rees [3]. Il consiste à changer seulement les termes convectifs. Suivant la direction $E \rightarrow W$, la valeur de ϕ à l'interface s'écrit comme suit :

$$\blacksquare \underline{F_e > 0 (U_e > 0)} : \phi_e = \phi_p \text{ et } \phi_w = \phi_w \quad (4-36.a)$$

$$\blacksquare \underline{F_e < 0 (U_e < 0)} : \phi_e = \phi_E \text{ et } \phi_w = \phi_p \quad (4-36.a)$$



Ces expressions peuvent encore se mettre sous une forme compacte

$$\Phi_e = \frac{\Phi_p \left[+ F_e , 0 \right] - \Phi_e \left[- F_e , 0 \right]}{F_e} \quad (4-36.b)$$

$$\Phi_w = \frac{\Phi_w \left[+ F_w , 0 \right] - \Phi_p \left[- F_w , 0 \right]}{F_w}$$

De la même manière sont définies les valeurs de Φ_n et Φ_s .
En suivant la même procédure que précédemment, nous aboutirons à l'équation (4-27) où les coefficients a_m sont donnés par :

$$\left\{ \begin{array}{l} a_E = D_e \cdot A(|P_e|) + \left[- F_e , 0 \right] \quad (4-37.a) \\ a_w = D_w \cdot A(|P_w|) + \left[F_w , 0 \right] \quad (4-37.b) \\ a_N = D_n \cdot A(|P_n|) + \left[- F_n , 0 \right] \quad (4-37.c) \\ a_S = D_s \cdot A(|P_s|) + \left[F_s , 0 \right] \quad (4-37.d) \end{array} \right.$$

où la fonction $A(|P_m|)$ ($m = e, w, n, s$) est exprimé comme suit :

$$A(|P_m|) = 1 \quad (4-38)$$

■ Schéma hybride :

Ce schéma a été développé par Spalding [3]. C'est la combinaison des deux schémas précédents; il se réduit à l'approximation centrée lorsque $|P_m| < 2$, mais il devient identique au schéma "Upwind" lorsque $|P_m| > 2$.



Les coefficients a_M sont donnés par :

$$\begin{aligned} a_E &= D_e \cdot \left[(0.1 - 0.5|P_e|) + \llbracket -P_e, 0 \rrbracket \right] & (4-39.a) \\ &= D_e \cdot A(|P_e|) + \llbracket -F_e, 0 \rrbracket \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a_w &= D_w \cdot \left[(0.1 - 0.5|P_w|) + \llbracket P_w, 0 \rrbracket \right] & (4-39.b) \\ &= D_w \cdot A(|P_w|) + \llbracket F_w, 0 \rrbracket \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a_N &= D_n \cdot \left[(0.1 - 0.5|P_n|) + \llbracket -P_n, 0 \rrbracket \right] & (4-39.c) \\ &= D_n \cdot A(|P_n|) + \llbracket -F_n, 0 \rrbracket \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a_S &= D_s \cdot \left[(0.1 - 0.5|P_s|) + \llbracket P_s, 0 \rrbracket \right] & (4-39.d) \\ &= D_s \cdot A(|P_s|) + \llbracket F_s, 0 \rrbracket \end{aligned}$$

$$\text{tel que :} \quad A(|P_m|) = 0.1 - 0.5|P_m| \quad (4-40)$$

■ Schéma exponentiel (exact) :

Dans ce schéma, nous supposons que les composantes du vecteur densité de flux convectif-diffusif entre deux cellules voisines ne dépendent pas de leur propre direction, et que la vitesse et le coefficient de diffusivité intervenant dans l'expression de ces composantes sont constants [3]. Cela se traduit par :

$$J_{re}(t, z) = \left[V_{re} \cdot \phi - \Gamma_e \frac{\partial \phi}{\partial r} \right] \quad r \in [0, \delta_{re}] \quad (4-41)$$

En dérivant l'expression précédente, on obtient :

$$\frac{P_e}{\delta_{re}} \frac{\partial \phi}{\partial r} - \frac{\partial^2 \phi}{\partial r^2} = 0 \quad r \in [0, \delta_{re}] \quad (4-42)$$

$$\text{avec :} \quad \begin{aligned} r = 0 & \quad \phi = \phi_p \\ r = \delta_{re} & \quad \phi = \phi_E \end{aligned}$$

La solution de ϕ entre deux cellules d'intégration est donnée par:

$$\phi = A + B \exp\left(Pe \frac{r}{\delta_{re}}\right) \quad (4-43)$$

$$\text{avec : } \begin{cases} \phi_P = A + B & (4-44.a) \\ \phi_E = A + B \exp(Pe) & (4-44.b) \end{cases}$$

$$\text{d'où : } \begin{cases} B = \frac{\phi_P - \phi_E}{1 - \exp(Pe)} & (4-45.a) \\ A = \phi_P - B & (4-45.b) \end{cases}$$

De la même manière, on détermine les autres densités de flux aux interfaces w,n et s. En utilisant cette solution comme profil exprimant l'évolution de ϕ entre deux cellules voisines fig(4-4), les coefficients a_M de l'équation discrétisée (4-11) sont alors exprimés comme suit :

$$\left\{ \begin{aligned} a_E &= \frac{F_e}{\exp(F_e/D_e) - 1} = D_e A(|P_e|) + \llbracket - F_e, 0 \rrbracket & (4-46.a) \\ a_w &= \frac{F_w \exp(F_w/D_w)}{\exp(F_w/D_w) - 1} = D_w A(|P_w|) + \llbracket + F_w, 0 \rrbracket & (4-46.b) \\ a_n &= \frac{F_n}{\exp(F_n/D_n) - 1} = D_n A(|P_n|) + \llbracket - F_n, 0 \rrbracket & (4-46.c) \\ a_s &= \frac{F_s \exp(F_s/D_s)}{\exp(F_s/D_s) - 1} = D_s A(|P_s|) + \llbracket + F_s, 0 \rrbracket & (4-46.d) \end{aligned} \right.$$

La fonction $A(|P_m|)$ ($m = w, e, n, s$) a pour expression :

$$A(|P_m|) = \frac{|P_m|}{\exp(|P_m|)} \quad (4-47)$$

Ce schéma s'adapte mieux pour un écoulement monodimensionnel. Par contre, son utilisation pour des écoulements bi et tridimensionnel n'est pas souhaitable, à cause du temps de calcul élevé dû à la présence du terme exponentiel [3].

■ Schéma en loi puissance :

Pour pallier aux difficultés cités précédemment, on utilise le schéma d'approximation de la loi puissance qui semble être beaucoup plus consistant. Ce schéma s'avère très efficace puisqu'il approche beaucoup mieux la solution exacte et il est largement utilisé dans la littérature.

Il se définit comme suit

- Pour $Pe < -10$:

$$\frac{a_E}{D_e} = -Pe \quad (4-48.a)$$

- Pour $-10 < Pe < 0$:

$$\frac{a_E}{D_e} = (1 + 0.1 Pe)^5 - Pe \quad (4-48.b)$$

- Pour $0 \leq Pe \leq +10$:

$$\frac{a_E}{D_e} = (1 - 0.1 Pe)^5 \quad (4-48.c)$$

- Pour $Pe \geq +10$:

$$\frac{a_E}{D_e} = 0 \quad (4-48.d)$$

Ces expressions conditionnelles peuvent être écrites sous la forme compacte suivante :

$$a_E = D_e \left[0, \left(1 - \frac{0.1 |Fe|}{De} \right) \right] + [0, -Fe] \quad (4-49)$$



Comme pour les paragraphes précédents, les coefficients a_M sont donnés par :

$$\left\{ \begin{array}{l} a_E = D_e \cdot A(|P_e|) + \llbracket -F_e, 0 \rrbracket \quad (4-50.a) \\ a_W = D_w \cdot A(|P_w|) + \llbracket F_w, 0 \rrbracket \quad (4-50.b) \\ a_N = D_n \cdot A(|P_n|) + \llbracket -F_n, 0 \rrbracket \quad (4-50.c) \\ a_S = D_s \cdot A(|P_s|) + \llbracket F_s, 0 \rrbracket \quad (4-50.d) \end{array} \right.$$

avec : $A(|P_s|) = \llbracket 0, (1 - 0.1 |P_e|)^5 \rrbracket \quad (4-51)$

■ Résumé :

Dans le tableau (4.1), nous avons regroupé les expressions de la fonction $A(|P_e|)$ relatives aux différents schémas d'approximations.

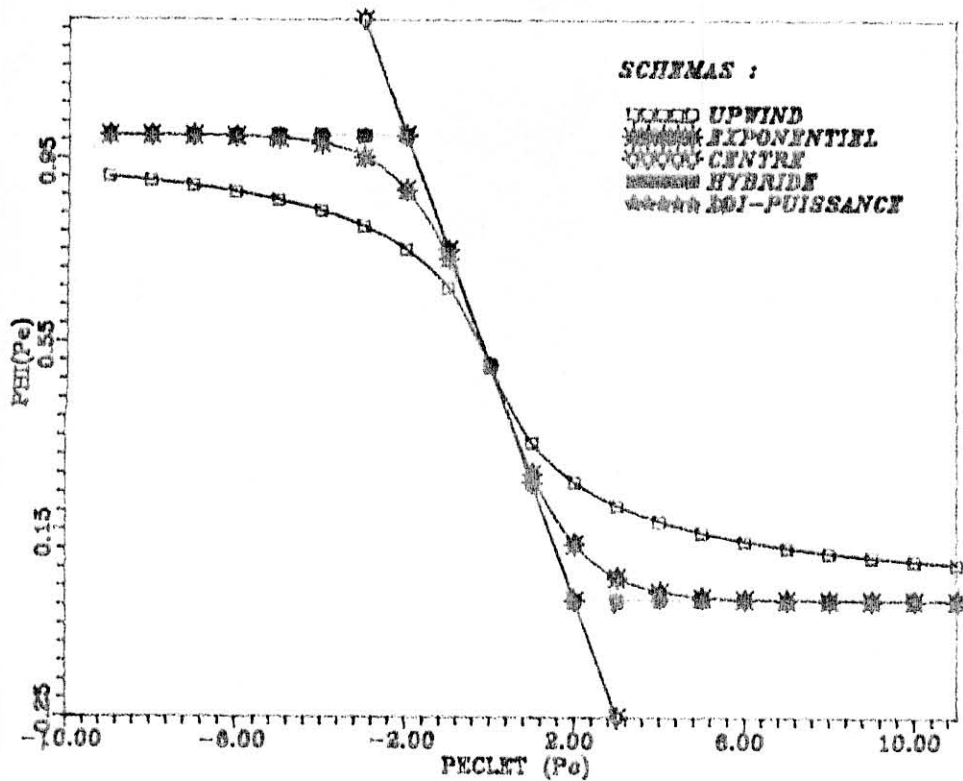
En examinant les variations, données sur la figure (4-5), de la dite fonction, on remarque que tous les schémas, à l'exception des différences centrées, donnent des solutions physiques acceptables. Cependant il est possible de raffiner le maillage de sorte que P_m devienne assez petit (< 2) pour le schéma centré, ce qui permet d'obtenir des solutions raisonnables.

Dans la présente étude nous allons utiliser le schéma de la loi puissance car il approche beaucoup mieux la solution exacte.

Tableau (4-1) : Expressions de la fonction $A(|P_m|)$ pour différents schémas.

Schéma	Expression de $A(P_m)$
Différences centrées	$1 - 0.5 P_m $
Upwind	1
Hybride	$\llbracket 0, 1 - 0.5 P_m \rrbracket$
Loi puissance	$\llbracket 0, (1 - 0.1 P_m)^5 \rrbracket$
Exponentiel (exact)	$ P_m / [\exp(P_m) - 1]$





Figure(4-5): Variation de la fonction $A(|P_m|)$ pour différents schémas

4-7) LA CONVERGENCE :

Le caractère inaccessible des solutions exactes de nos équations aux dérivées partielles nous a conduit à élaborer des schémas de discrétisation. Un schéma numérique est en fait une équation approchée de l'équation aux dérivées partielles du départ. Le problème à ce stade reste entier puisque les solutions exactes des équations approchées sont également inaccessibles. En réalité, le problème qui se pose dans une étude numérique est celui de la détermination d'une solution approchée des équations approchées. C'est ce que l'on appelle la solution numérique.

Ce raisonnement a conduit les numériciens à se demander si les solutions numériques approchent les solutions des équations aux dérivées partielles; si tel est le cas on dit que le schéma converge, sinon, on dit qu'il diverge.



L'étude de la convergence d'un schéma est une étape nécessaire avant la recherche des solutions numériques. A défaut de cette étude, le problème devient une aventure pouvant déboucher sur des solutions physiquement non acceptables.

L'étude de la convergence peut être basée sur le théorème de Lax énonçant qu'un schéma est convergent lorsqu'il est stable et consistant. Nous allons dans ce qui suit préciser ces deux dernières notions.

4-7-1) Consistance d'un schéma :

Un schéma numérique est dit consistant lorsque son erreur de troncature devient nulle lorsque les pas de discrétisation tendent vers zéro. Nous signalons que cette erreur de troncature est obtenue par soustraction du schéma de discrétisation aux dérivées partielles traitées par des développements limités. Dans le cas des différents schémas cités dans l'annexe, nous savons que l'erreur de troncature est du second d'ordre en espace et du premier ordre en temps, sauf pour le schéma ADI dans lequel cette erreur est également du second ordre. Tous ces schémas sont donc consistants.

4-7-2) Stabilité d'un schéma :

En vue d'assurer la stabilité, on doit respecter des quatre règles de base suivantes :

1°/ Règle : Compatibilité aux frontières des volumes de contrôle. Lorsqu'une face est commune à deux volumes de contrôle adjacents, le flux qui les traverse doit être représenté par la même expression dans les équations discrétisées pour chacun des deux volumes de contrôle.

2°/ Règle : Coefficients positifs.

La valeur de la variable ϕ en un point donné est influencée par les valeurs de ϕ aux noeuds voisins. Dans les mêmes conditions l'augmentation de la valeur de ϕ en un point doit provoquer une augmentation de ϕ aux noeuds voisins. Pour cela, les coefficients a_M et a_p doivent tous avoir le même signe (positif ou négatif).

3°/ Règle : Linéarisation des termes sources.

Dans l'équation (4-29.e), les coefficients a_p peuvent devenir négatifs à travers les termes S_p entraînant ainsi des instabilités numériques. Pour cette raison, les termes S_p doivent être négatifs ou nuls.

4°/ Règle : Somme des coefficients voisins.

Les équations différentielles gouvernantes contiennent uniquement les dérivées de la variable dépendante ϕ . Si C est une constante arbitraire, la fonction $\phi + C$ vérifie aussi les équations différentielles. Cette propriété est aussi valable pour les équations discrétisées. Ceci conduit à :

$$a_p = \sum_{nb} a_{nb} \quad (4-52)$$

4-8) COUPLAGE VITESSE-PRESSION :

Plusieurs algorithmes de couplage vitesse-pression ont été mis au point pour résoudre les équations de mouvements. Ils aboutissent tous à un système linéaire à résoudre à chaque étape, et portant sur les valeurs de la pression aux noeuds de son maillage. Nous signalons que dans le cas des problèmes à conditions aux limites portant uniquement sur le champ de vitesse, toute tentative de résolution du système linéaire de la pression par une méthode directe aboutirait à l'échec.



■ Algorithme SIMPLER :

Cet algorithme a été développé par Patankar(1980) pour résoudre les équations de mouvement couplées et améliorer la convergence du système. Nous donnons les étapes nécessaires à sa mise en oeuvre.

Le champ de vitesse au départ est donné par les conditions initiales. Les équations de conservation de la quantité de mouvement dans la direction radiale et axiale peuvent s'écrire de la manière suivante :

$$\left\{ \begin{array}{l} a_e U_e = \sum_{nb} a_{nb} U_{e_{nb}} + b + (P_p - P_E) A_e \quad (4-53.a) \\ a_n V_n = \sum_{nb} a_{nb} V_{n_{nb}} + b + (P_p - P_N) A_n \quad (4-53.b) \end{array} \right.$$

On pose :

$$\left\{ \begin{array}{l} \hat{U}_e = \frac{\sum_{nb} a_{nb} U_{e_{nb}} + b}{a_e} \quad (4-54.a) \\ \hat{V}_n = \frac{\sum_{nb} a_{nb} V_{n_{nb}} + b}{a_n} \quad (4-54.b) \end{array} \right.$$

Ces expressions sont celles de ce que l'on nomme pseudo-vitesse. Les expressions des composantes du champs de vitesse sont alors données par :

$$\left\{ \begin{array}{l} U_e = \hat{U}_e + \frac{(P_p - P_E) A_e}{a_e} \quad (4-55.a) \\ V_n = \hat{V}_n + \frac{(P_p - P_N) A_n}{a_n} \quad (4-55.b) \end{array} \right.$$



Il est à noter que le même raisonnement sera suivi pour les vitesses U_w et V_s .

En introduisant, ces expressions dans l'équations de conservation de la masse, on obtient :

$$a_p P_p = a_E P_E + a_w P_w + a_N P_N + a_S P_S + b \quad (4-56)$$

Le champs de pression est donné par la résolution de ce système algébrique. Notons que dans cette algorithme, on peut ne corriger que le champs de vitesse. La correction de la pression n'est pas nécessaire parce que cette variable est calculée à chaque étape, mais sa correction peut améliorer le temps de convergence de la résolution itérative de son système linéaire.

□ Equations de correction de vitesse et de pression :

Le champ de pression P^* étant calculé au départ, on peut calculer les seconds membres des équations de mouvements, et calculer les composantes du champ de vitesse. Mais cette solution du champ de vitesse n'est pas satisfaisante puisque calculée à partir d'un champ de pression P^* . On se propose alors de corriger les deux champs par l'équation de conservation de la masse comme suit :

$$\left\{ \begin{array}{l} P = P^* + P' \\ U = U^* + u' \\ V = V^* + v' \end{array} \right. \quad (4-57)$$

Les champs surindicés d'une étoile sont solutions des équations de mouvement, et il en est de même pour les champs corrigés. Par soustraction des équations écrites pour les deux solutions, on obtient :



$$\left\{ \begin{array}{l} a_e u'_e = \sum_{nb} a_{nb} u'_{e_{nb}} + (P'_P - P'_E) A_e \quad (4-58.a) \\ a_n v'_n = \sum_{nb} a_{nb} v'_{n_{nb}} + (P'_P - P'_N) A_n \quad (4-58.b) \end{array} \right.$$

La convergence est obtenue lorsque les champs de correction sont nuls. Nous pouvons alors approximer les expressions précédentes par :

$$\left\{ \begin{array}{l} u'_e = \frac{(P'_P - P'_E) A_e}{a_e} \quad (4-59.a) \\ v'_n = \frac{(P'_P - P'_N) A_n}{a_n} \quad (4-59.b) \end{array} \right.$$

En injectant ces expressions dans l'équation de conservation de la masse écrite pour le champ de vitesse corrigé, on obtient une équation sur la correction de pression comme suit :

$$a_P P'_P = a_E P'_E + a_W P'_W + a_N P'_N + a_S P'_S + b' \quad (4-60)$$

avec :

$$\left\{ \begin{array}{l} a_E = \rho_e \cdot \left(\frac{A_e}{a_e} \right) \Delta r \ r_e \quad (4-61.a) \\ a_W = \rho_w \cdot \left(\frac{A_w}{a_w} \right) \Delta r \ r_w \quad (4-61.b) \\ a_N = \rho_n \cdot \left(\frac{A_n}{a_n} \right) \Delta z \ r_m \quad (4-61.c) \\ a_S = \rho_s \cdot \left(\frac{A_s}{a_s} \right) \Delta z \ r_m \quad (4-61.d) \end{array} \right.$$

et :

$$b' = \left[A_w \cdot (\rho \cdot U^*)_w - A_e \cdot (\rho \cdot U^*)_e \right] + \left[A_s \cdot (\rho \cdot V^*)_s - A_n \cdot (\rho \cdot V^*)_n \right] \quad (4-62)$$

En général, les conditions aux limites pour un problème de mécanique des fluides peuvent porter soit sur la vitesse soit sur la pression. Lorsque la pression est donnée comme condition de frontière, la correction de pression est donc aussi donnée et ne peut être que nulle. Mais lorsque c'est la vitesse qui est donnée comme dans le cas de toutes les frontières de notre problème c'est la correction de vitesse qui est nulle. Dans ce cas, le gradient de correction de pression est nul.

4-9) RESOLUTION DES SYSTEMES LINEAIRES :

La discrétisation des équations aux dérivées partielles aboutit à cinq systèmes algébriques linéaires pour l'hydrodynamique. La solution du champ de vitesse est obtenue en résolvant ces systèmes. Pour résoudre de tels systèmes, il existe deux familles de méthodes :

- 1- Les méthodes directes : ce sont des méthodes qui procurent la solution exacte du système en un nombre fini d'opération (en supposant qu'il n'y a pas d'erreurs d'arrondi !).
- 2- Les méthodes itératives : la solution X du système est la limite à l'infini d'une suite X_k de solution approchées. La génération de cette suite est arrêtée au bout d'un certain nombre p d'itérations. On commet ainsi l'erreur de troncature suivante :

$$\text{err} = | X - X_k |$$

Bien que la définition de la première famille de méthode soit séduisante, notre choix s'est porté sur la deuxième famille de méthodes. Nous allons dans ce qui suit citer seulement quelques méthodes itératives.



■ Méthodes itératives :

La matrice A dans ce cas est décomposée sous la forme de " Splitting " :

$$A = E - F + D - \dots + \dots$$

où E est une matrice régulière facile à inverser. Le système à résoudre peut prendre la forme itérative suivante :

$$EX^{k+1} = (F - D + \dots - \dots) X^k + B$$

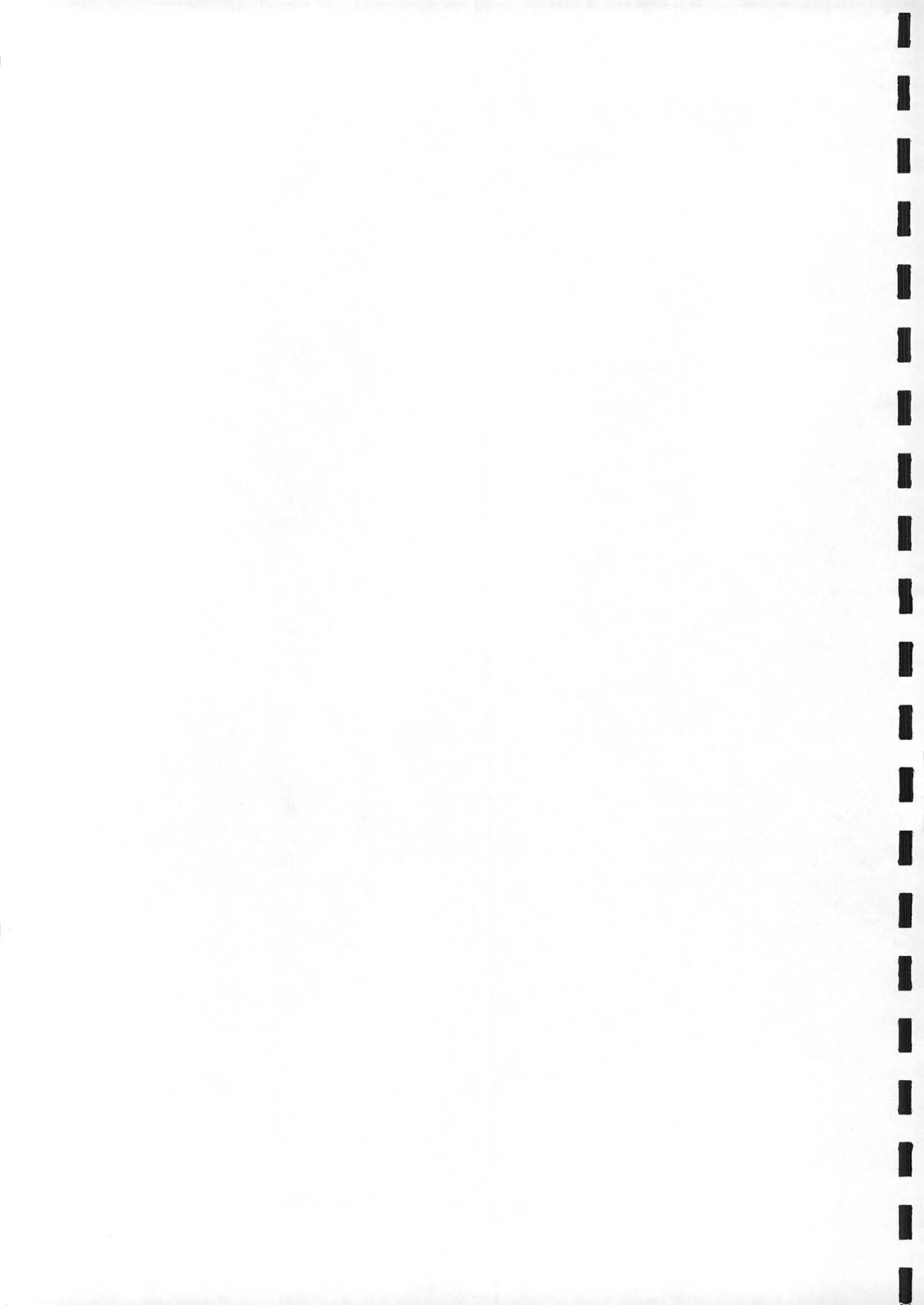
ou encore :

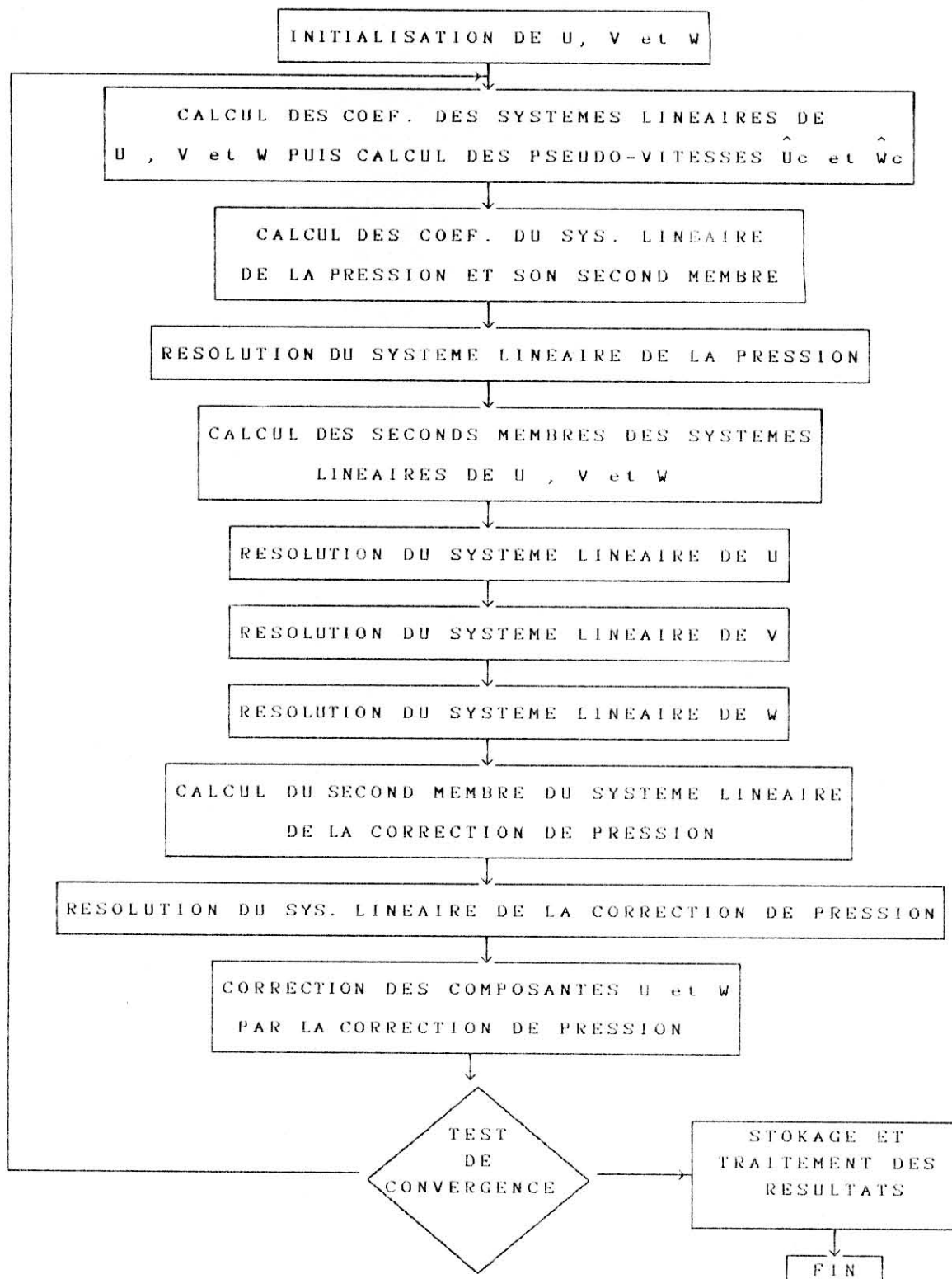
$$X^{k+1} = G . X^k + C$$

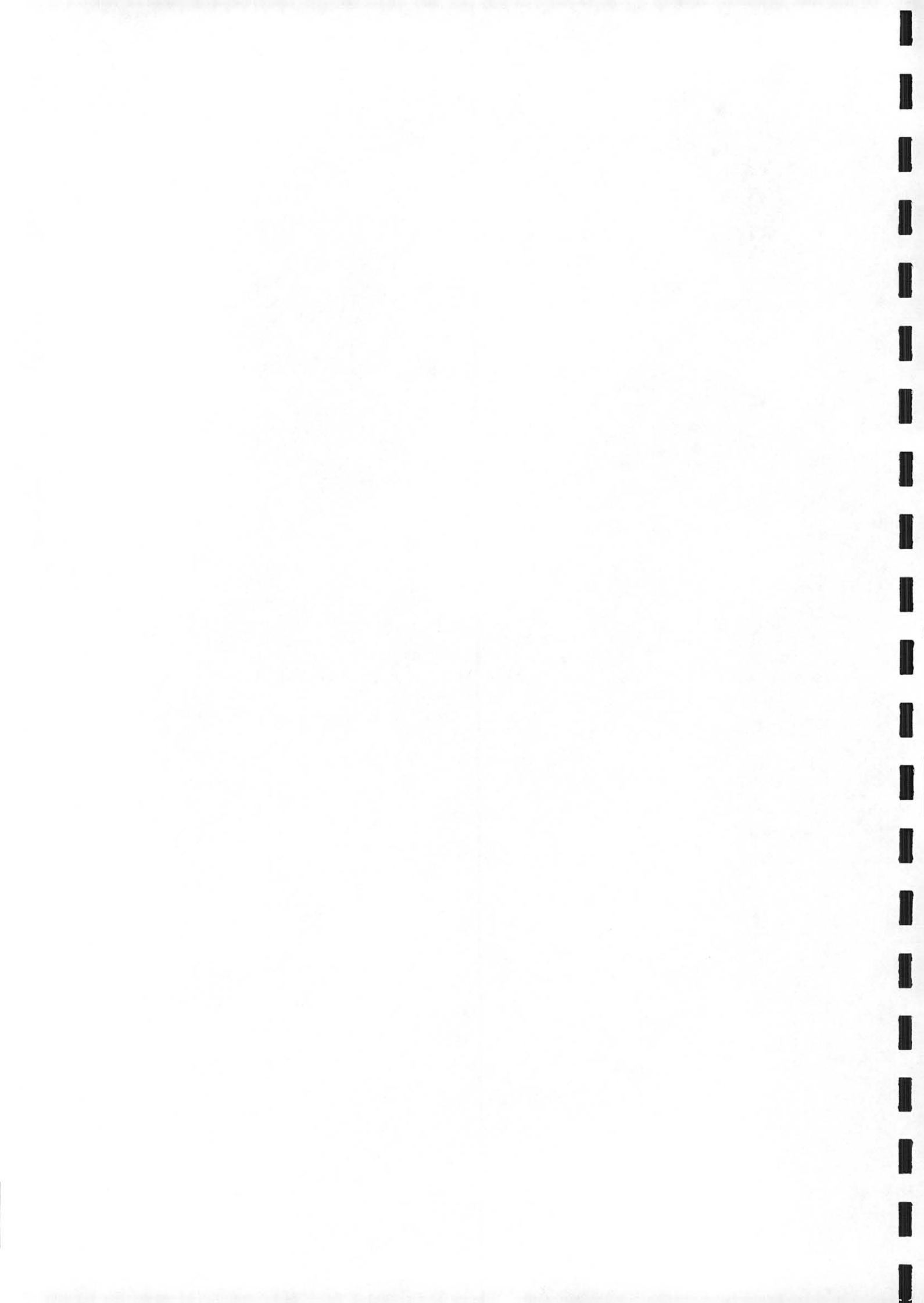
La condition nécessaire et suffisante de convergence de cette forme itérative vers la solution du système est que le rayon spectral de G soit inférieur à l'unité. Il existe dans cette famille plusieurs méthodes parmi lesquelles nous pouvons citer :

- La méthode de Jacobi;
- La méthode de Gauss-Seidel;
- La méthode de relaxation;
- La méthode ADI.

Toutes ces méthodes sont basées sur la décomposition ci-dessus. La méthode ADI [8] est la méthode choisie dans le cadre de ce travail. Elle a l'avantage d'être facile à comprendre dans son fondement et elle a un gain considérable en portabilité par rapport à l'utilisation des méthodes directes.



4-10) ORGANIGRAMME : Organigramme général de résolution



RESULTS

Ce chapitre est consacré à la présentation de quelques résultats obtenus à partir de notre code de calcul. Les exemples présentés traitent du cas d'une cuve non chicanée fonctionnant en régime laminaire, et remplie avec un liquide newtonien. Nous avons choisi de présenter dans un premier temps les caractéristiques des écoulements pour des systèmes mono-étagés. Le cas des systèmes multi-étagés est traité dans une deuxième partie.

5-1 / SYSTEMES MONO-ETAGES :

5-1-1/ Cuve équipée d'une turbine de Rushton :

Les caractéristiques géométriques standards qui ont été retenues sont :

- $d_a/D_c = 1/3$
- $H/D_c = 1$
- $h/H = 0.5$

Sauf spécification contraire dans les exemples traités, le nombre de Reynolds est toujours égale à 10.



a / Fond plat :

Les écoulements dans un plan vertical sont représentés sur la figure (5-1). On note très distinctement l'existence de quatre larges boucles de circulation qui se développent de façon presque parfaitement symétrique au dessus et au-dessous de l'agitateur ; le fluide est refoulé vers la paroi, puis se divise en deux flux, l'un remontant et l'autre descendant le long de la paroi, avant de venir alimenter axialement la turbine. Le caractère de symétrie indique que le fait que la surface du fluide soit libre n'a quasiment pas d'influence sur les écoulements pour cette valeur du nombre de Reynolds. On note enfin qu'une grande partie de la cuve est concernée par des écoulements très faibles.

La figure (5-2) représente les lignes de courant. Les quatre boucles de circulation apparaissent clairement. Les zones centrales où les lignes de courant sont le plus rapprochées correspondent aux zones où le cisaillement est le plus important. On peut considérer que dans cette zone, le fluide subit une accélération importante: en effet, entre deux boucles de circulation, nous avons toujours un débit de fluide identique. Cette partie correspond essentiellement à la zone de présence de l'agitateur. Les valeurs élevées sont liées en particulier au fait qu'il y a un changement à angle droit de direction des vitesses du fluide. Globalement, on note la symétrie presque parfaite des écoulements dans les parties inférieure et supérieure de la cuve, l'influence de la surface libre ne se faisant que très faiblement sentir.

Sur La figure (5-3), nous avons reporté la vitesse tangentielle du fluide. Le maximum est enregistré au niveau de l'extrémité



RESULTS

Ce chapitre est consacré à la présentation de quelques résultats obtenus à partir de notre code de calcul. Les exemples présentés traitent du cas d'une cuve non chicanée fonctionnant en régime laminaire, et remplie avec un liquide newtonien. Nous avons choisi de présenter dans un premier temps les caractéristiques des écoulements pour des systèmes mono-étagés. Le cas des systèmes multi-étagés est traité dans une deuxième partie.

5-1 / SYSTEMES MONO-ETAGES :

5-1-1/ Cuve équipée d'un turbine de Rushton :

Les caractéristiques géométriques standards qui ont été retenues sont :

- $d_a/D_c = 1/3$
- $H/D_c = 1$
- $h/H = 0.5$

Sauf spécification contraire dans les exemples traités, le nombre de Reynolds est toujours égale à 10.

a / Fond plat :

Les écoulements dans un plan vertical sont représentés sur la figure (5-1). On note très distinctement l'existence de quatre larges boucles de circulation qui se développent de façon presque parfaitement symétrique au dessus et au-dessous de l'agitateur ; le fluide est refoulé vers la paroi, puis se divise en deux flux, l'un remontant et l'autre descendant le long de la paroi, avant de venir alimenter axialement la turbine. Le caractère de symétrie indique que le fait que la surface du fluide soit libre n'a quasiment pas d'influence sur les écoulements pour cette valeur du nombre de Reynolds. On note enfin qu'une grande partie de la cuve est concernée par des écoulements très faibles.

La figure (5-2) représente les lignes de courant. Les quatre boucles de circulation apparaissent clairement. Les zones centrales où les lignes de courant sont le plus rapprochées correspondent aux zones où le cisaillement est le plus important. On peut considérer que dans cette zone, le fluide subit une accélération importante: en effet, entre deux boucles de circulation, nous avons toujours un débit de fluide identique. Cette partie correspond essentiellement à la zone de présence de l'agitateur. Les valeurs élevées sont liées en particulier au fait qu'il y a un changement à angle droit de direction des vitesses du fluide. Globalement, on note la symétrie presque parfaite des écoulements dans les parties inférieure et supérieure de la cuve, l'influence de la surface libre ne se faisant que très faiblement sentir.

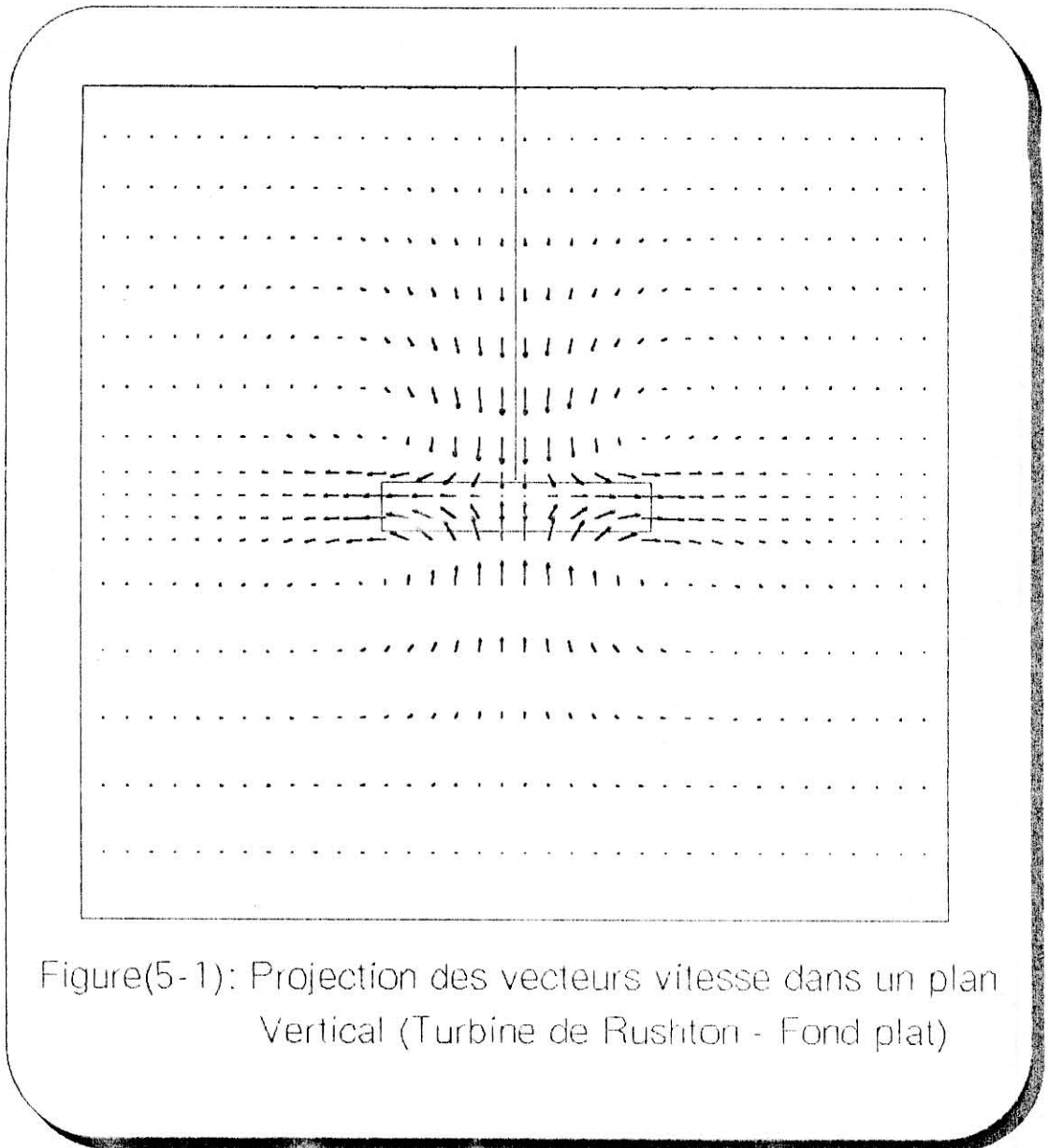
Sur La figure (5-3), nous avons reporté la vitesse tangentielle du fluide. Le maximum est enregistré au niveau de l'extrémité



des pales de l'agitateur. A nouveau, la symétrie entre les parties inférieure et supérieure de la cuve est nette. Près de la surface et du fond de la cuve, le fluide est presque stagnant. Les zones les moins concernées par ce mouvement tangentiel sont les angles (inférieur et supérieur).

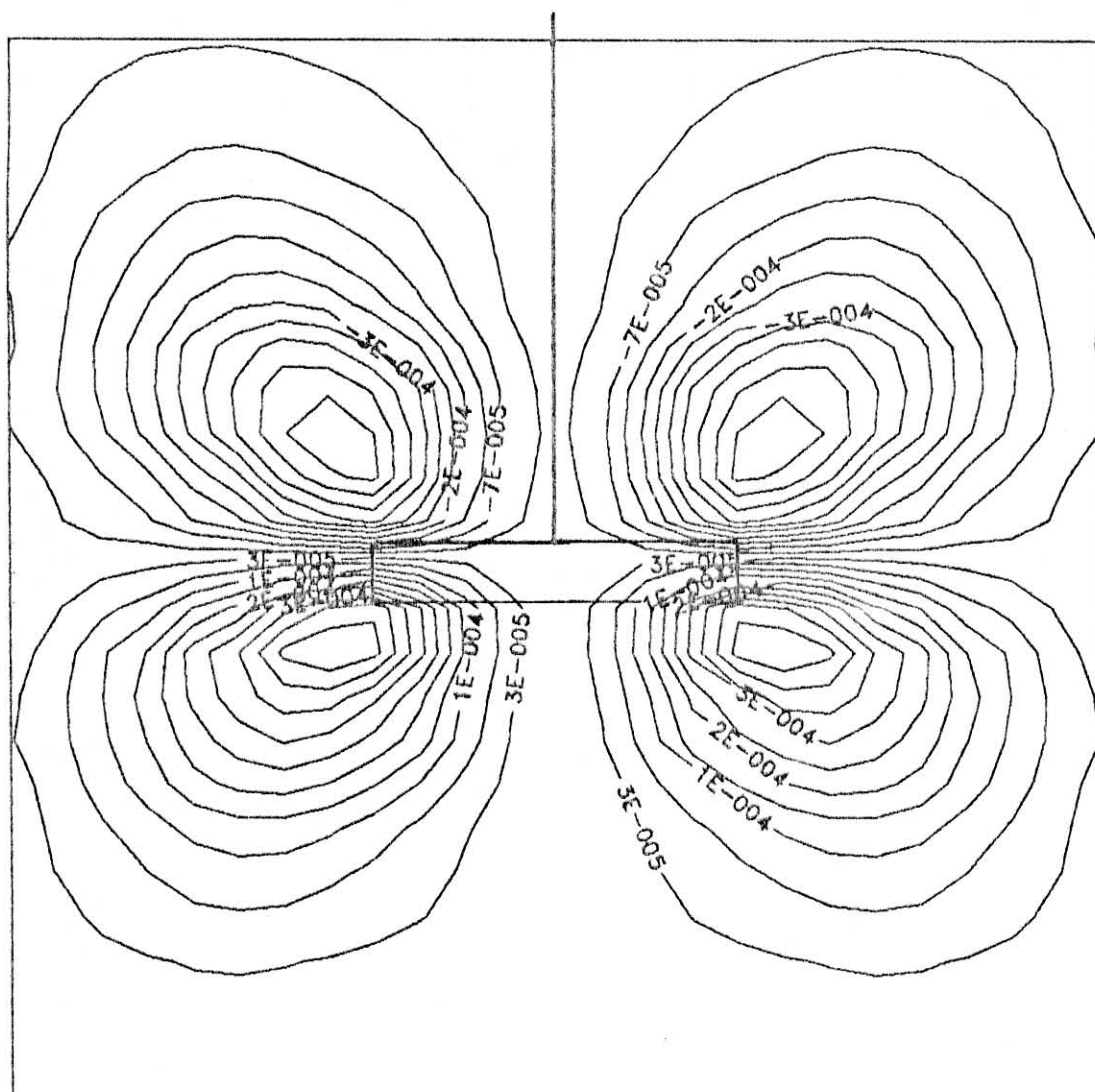
La figure (5-4) représente les lignes d'iso-dissipation visqueuse. On note très clairement que la quasi totalité de la puissance est dissipée au niveau de l'agitateur, avec un maximum autour des extrémités inférieure et supérieure du volume occupé par la turbine. La turbine étant un agitateur très cisailant, il est normal de retrouver une dissipation de la puissance largement prépondérante au niveau d'implantation de l'agitateur.





Figure(5-1): Projection des vecteurs vitesse dans un plan Vertical (Turbine de Rushton - Fond plat)

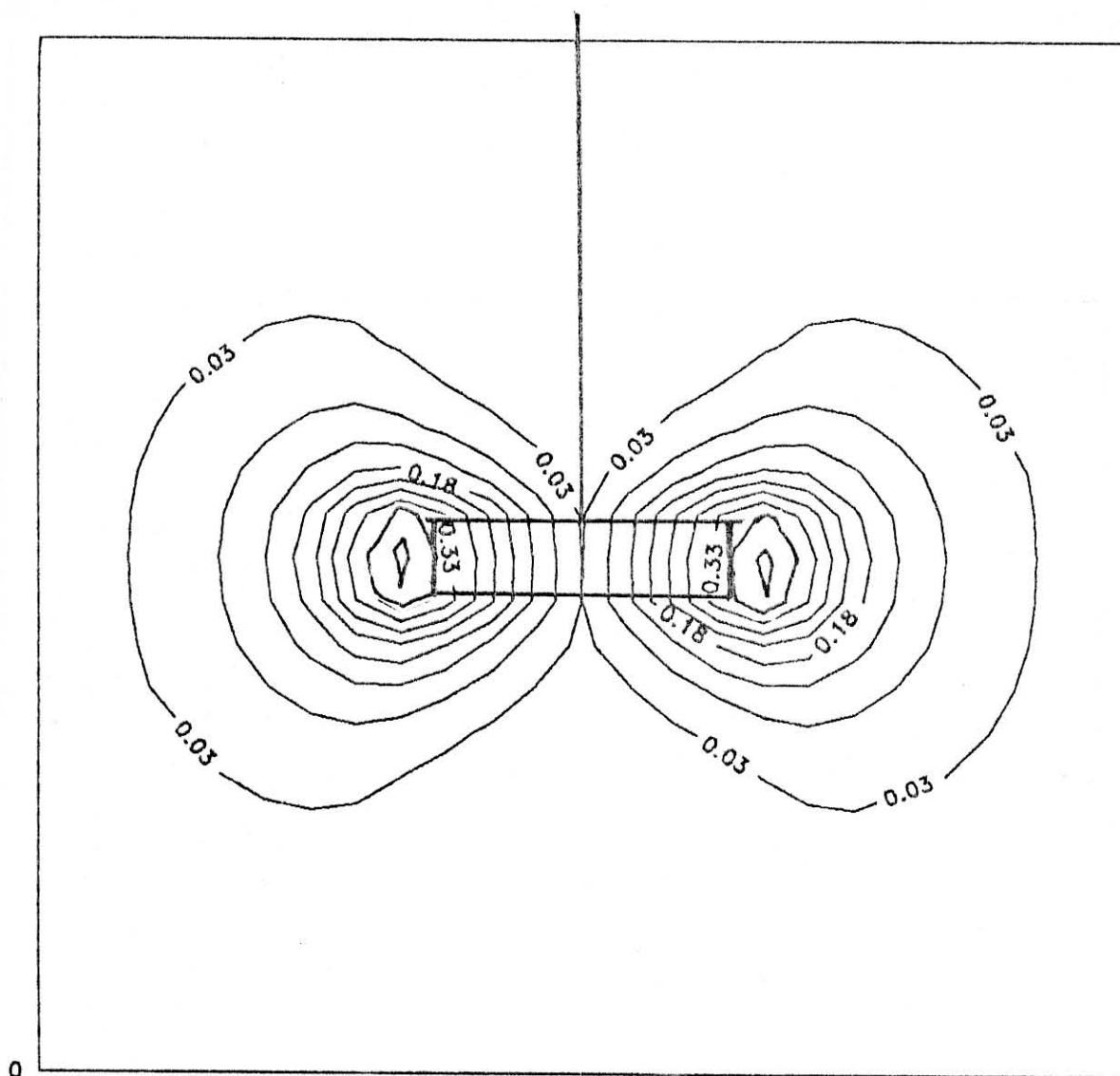




Figure(5-2): LIGNES DE COURANT
TURBINE DE RUSHTON (FOND PLAT)

(Les iso-valeurs correspondent à la fonction de courant ψ)

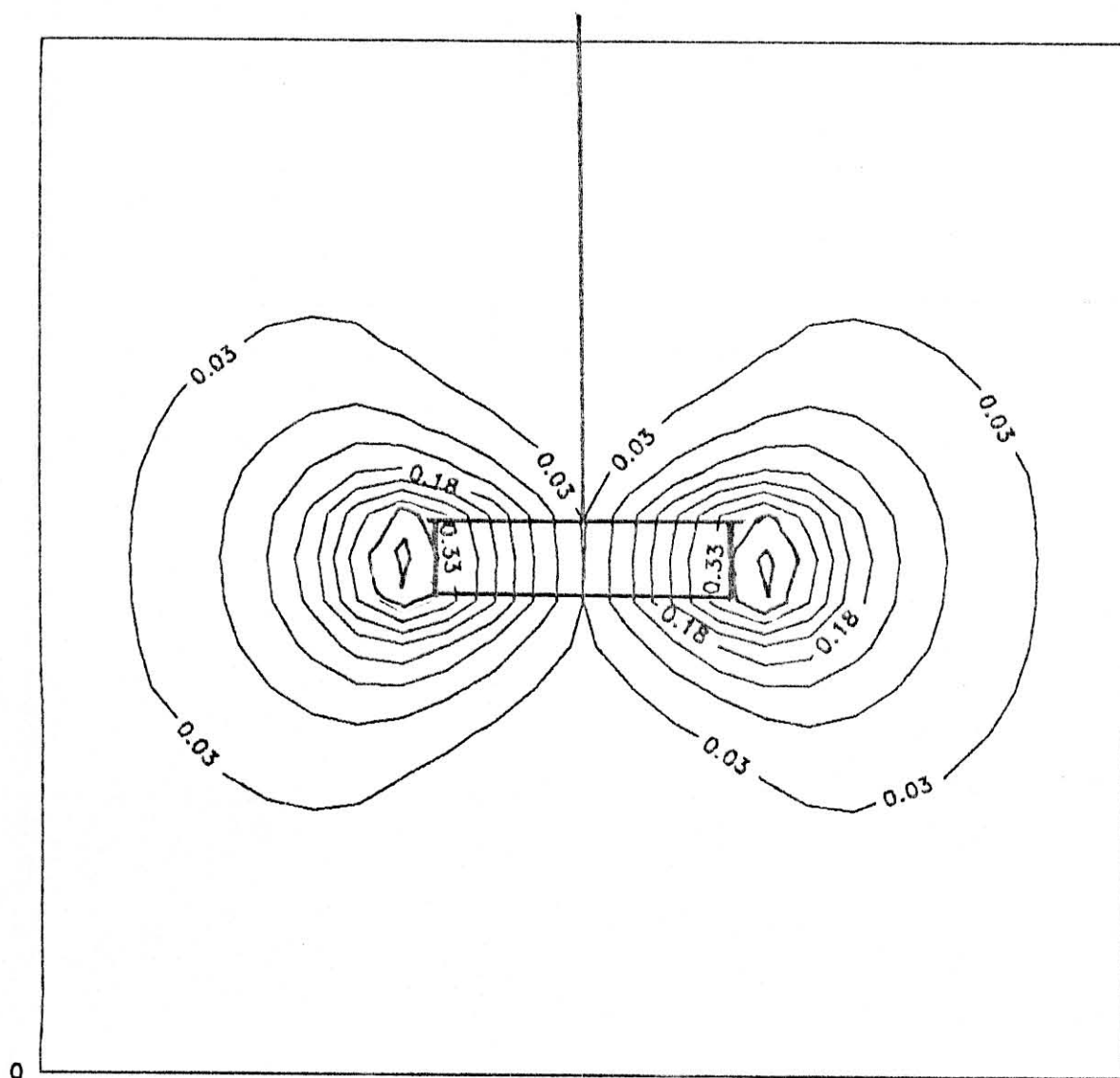




Figure(5-3): LIGNES D'ISO-VITESSE TANGENTIELLE
TURBINE DE RUSHTON (FOND PLAT)

($\frac{v\theta}{V_m}$: valeurs de vitesse adimensionnelles)

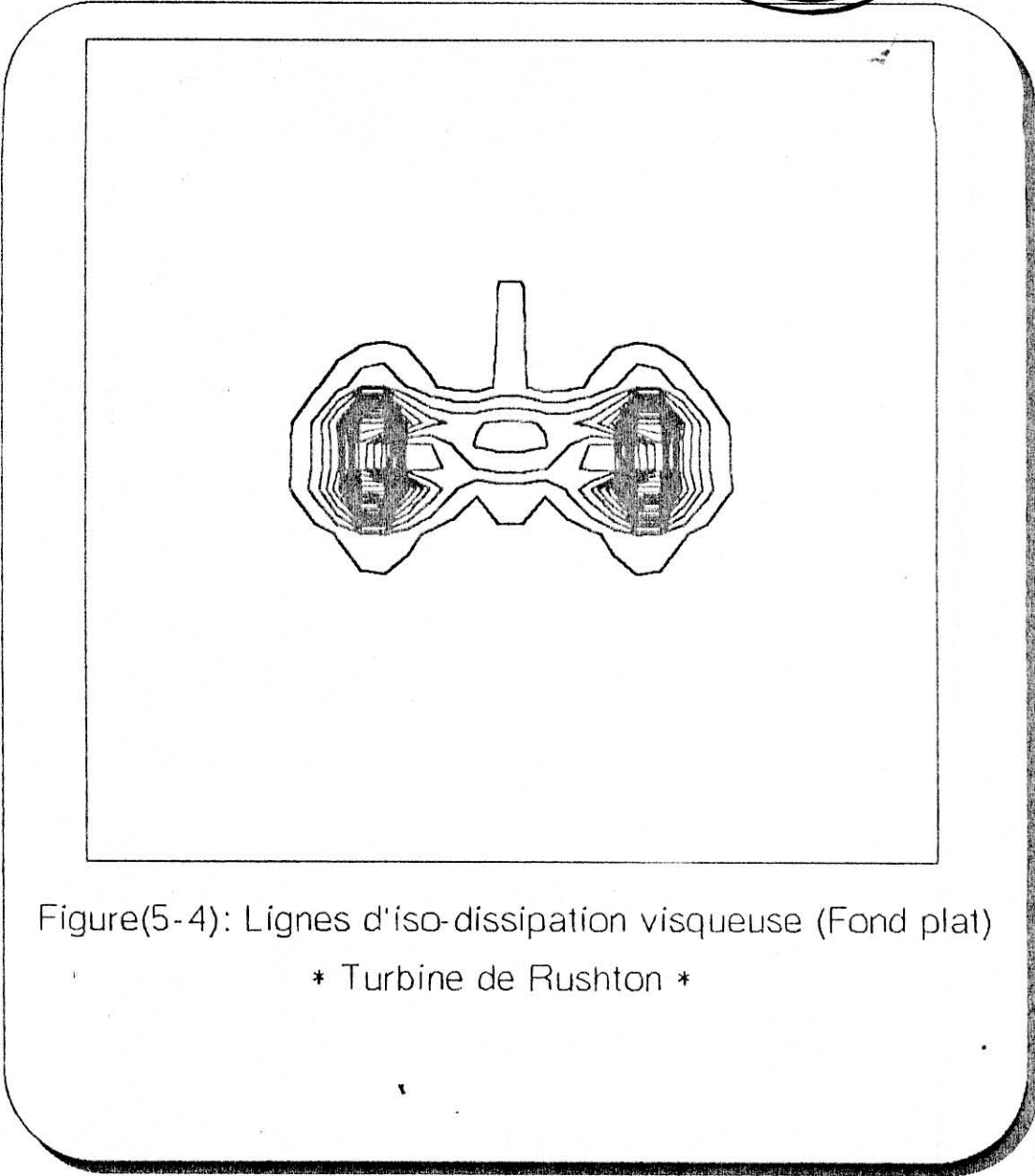




Figure(5-3): LIGNES D'ISO-VITESSE TANGENTIELLE
TURBINE DE RUSHTON (FOND PLAT)

($\frac{V\theta}{V_m}$: valeurs de vitesse adimensionnelles)





Figure(5-4): Lignes d'iso-dissipation visqueuse (Fond plat)

* Turbine de Rushton *

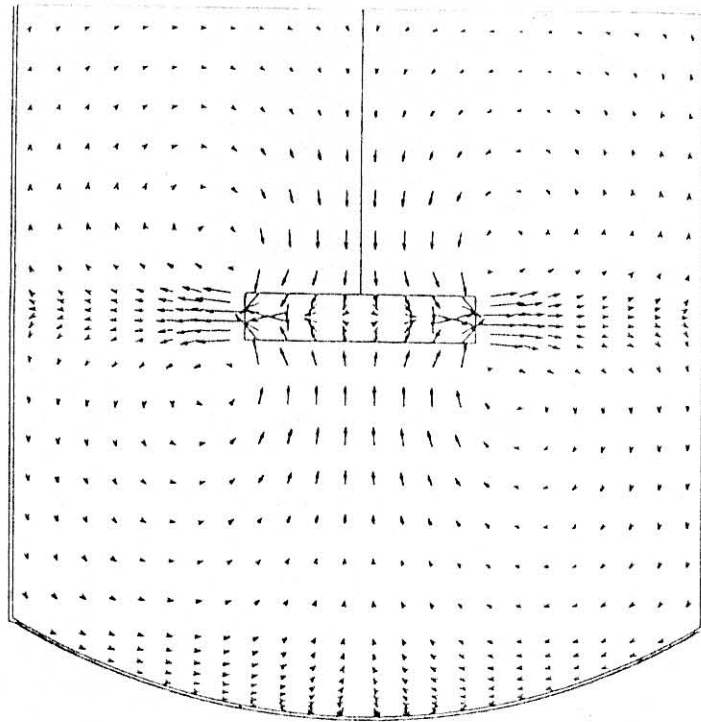
b / Fond bombé :

Les conditions opératoires sont les mêmes que dans le cas précédent, seule la forme du fond de la cuve a été modifiée.

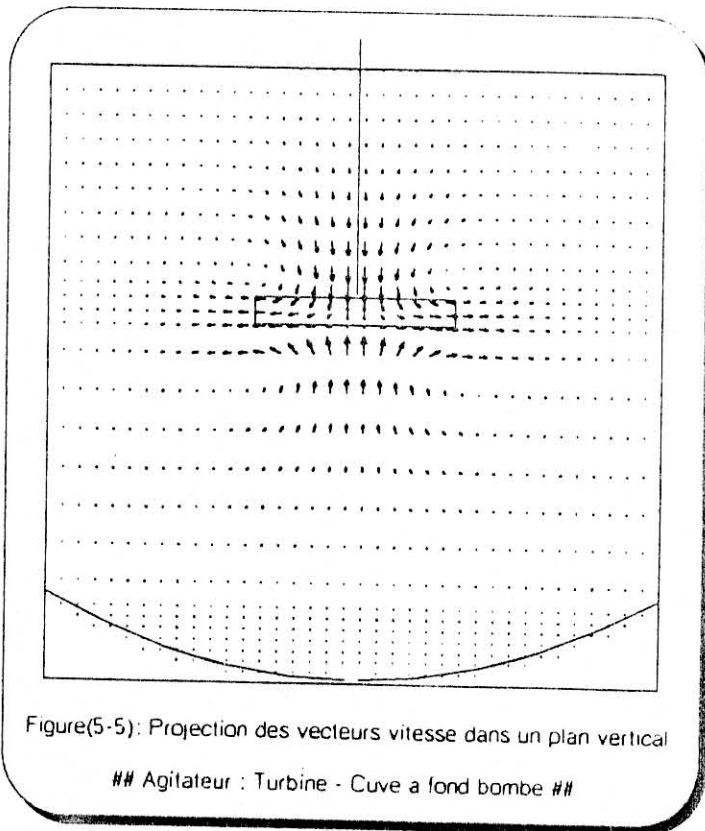
La figure (5-5.a) représente les vecteurs vitesse dans un plan vertical de la cuve. On note une très grande similitude qualitative avec la figure(5-5.b) de la référence [6], ainsi que les écoulements observés dans le cas de la cuve à fond plat. Il faut remarquer que la forme en creux du fond de la cuve ne génère pas de zone particulièrement morte, ni de zone de recirculation. On remarque le ressèment du maillage dans la partie bombée, nécessaire à la représentation de cette géométrie particulière.

La figure (5-6.a) qui représente les lignes de courant dans le même plan confirme l'élargissement des schémas de circulation jusque dans la partie bombée de la cuve et se compare favorablement avec la figure (5-6.b) de la référence [6]. On peut ainsi en partie améliorer le problème de la présence marquée des zones mortes dans les coins inférieurs de l'installation.

La forme du fond n'a aucune influence sur le mode de dissipation de l'énergie, qui se situe toujours essentiellement dans l'environnement de l'extrémité des pales de la turbine.

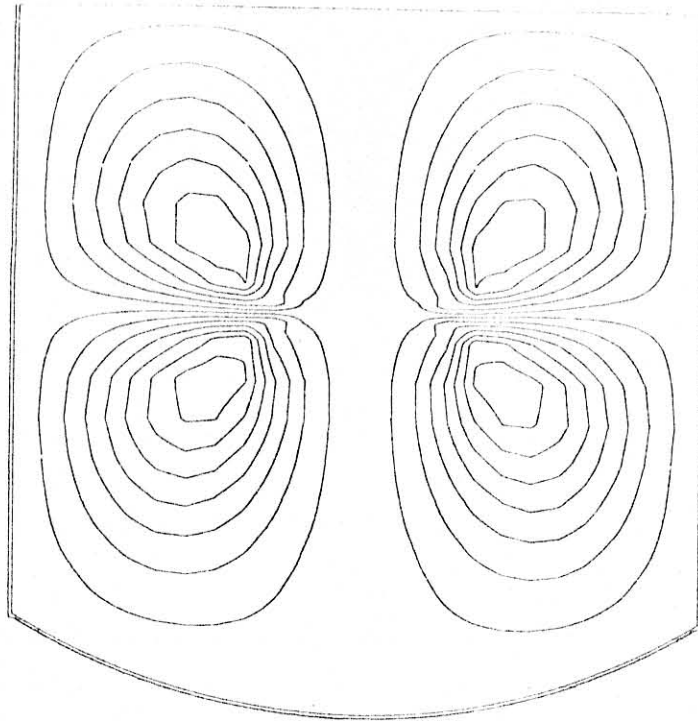


a) **Figure 5. Turbine - Fond bombé -**
Projection des vecteurs vitesse dans un plan vertical [6]

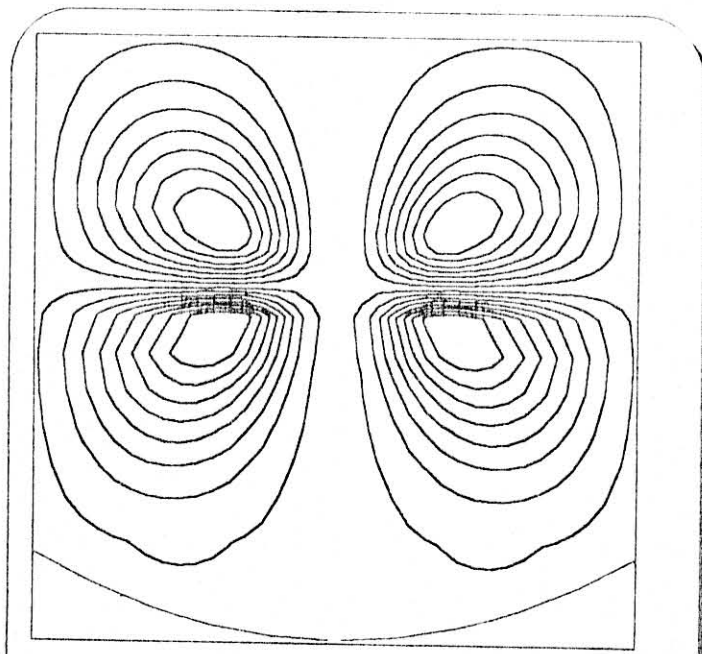


b) **Figure(5-5):** Projection des vecteurs vitesse dans un plan vertical

Agitateur : Turbine - Cuve a fond bombe



a) **Figure 6. Turbine - Fond bombe**
Lignes de courant [6]



b) **Figure(5-6) Lignes de courant dans une cuve a fond bombe**

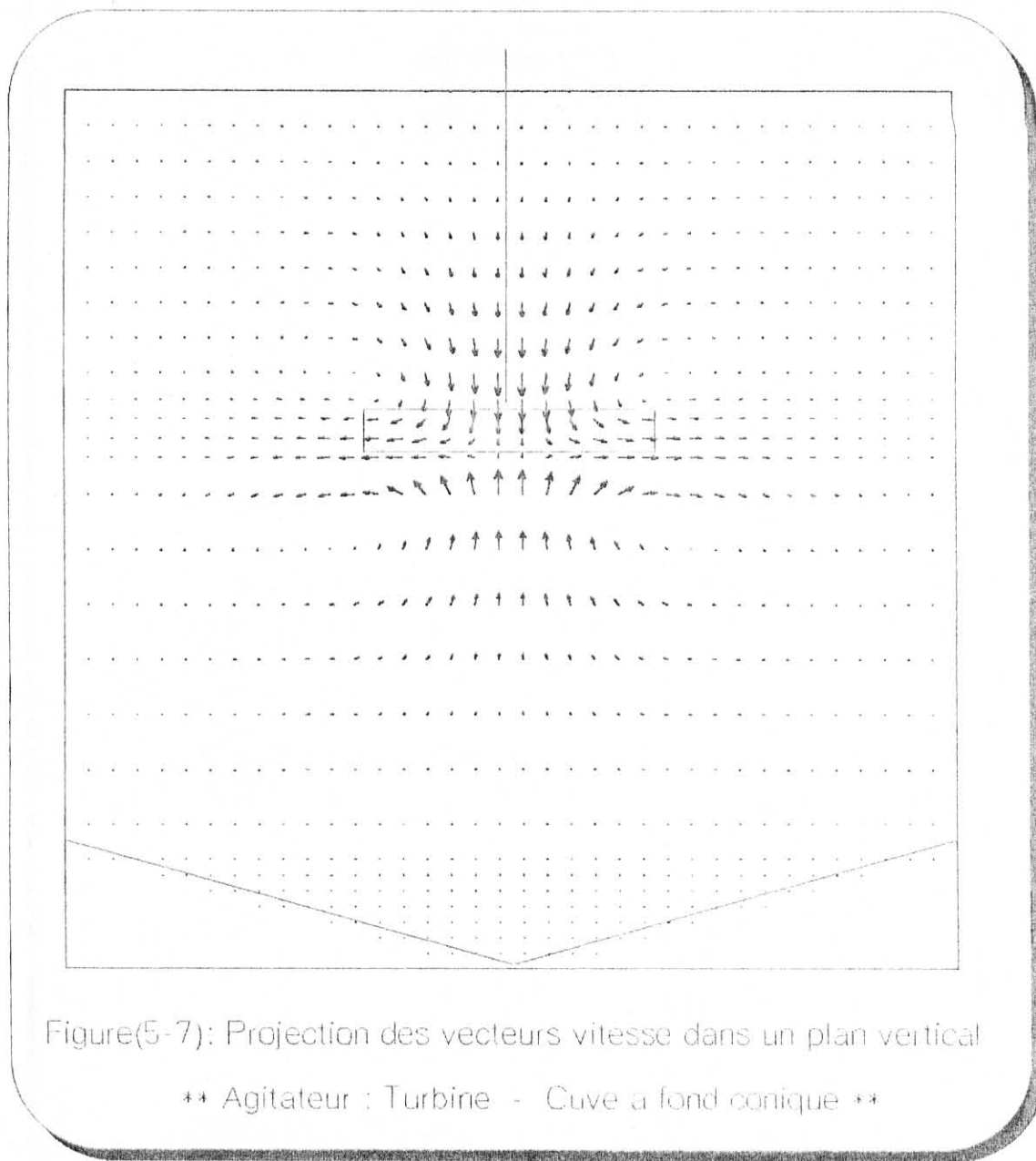
•• Agitateur : Turbine de Rushton ••

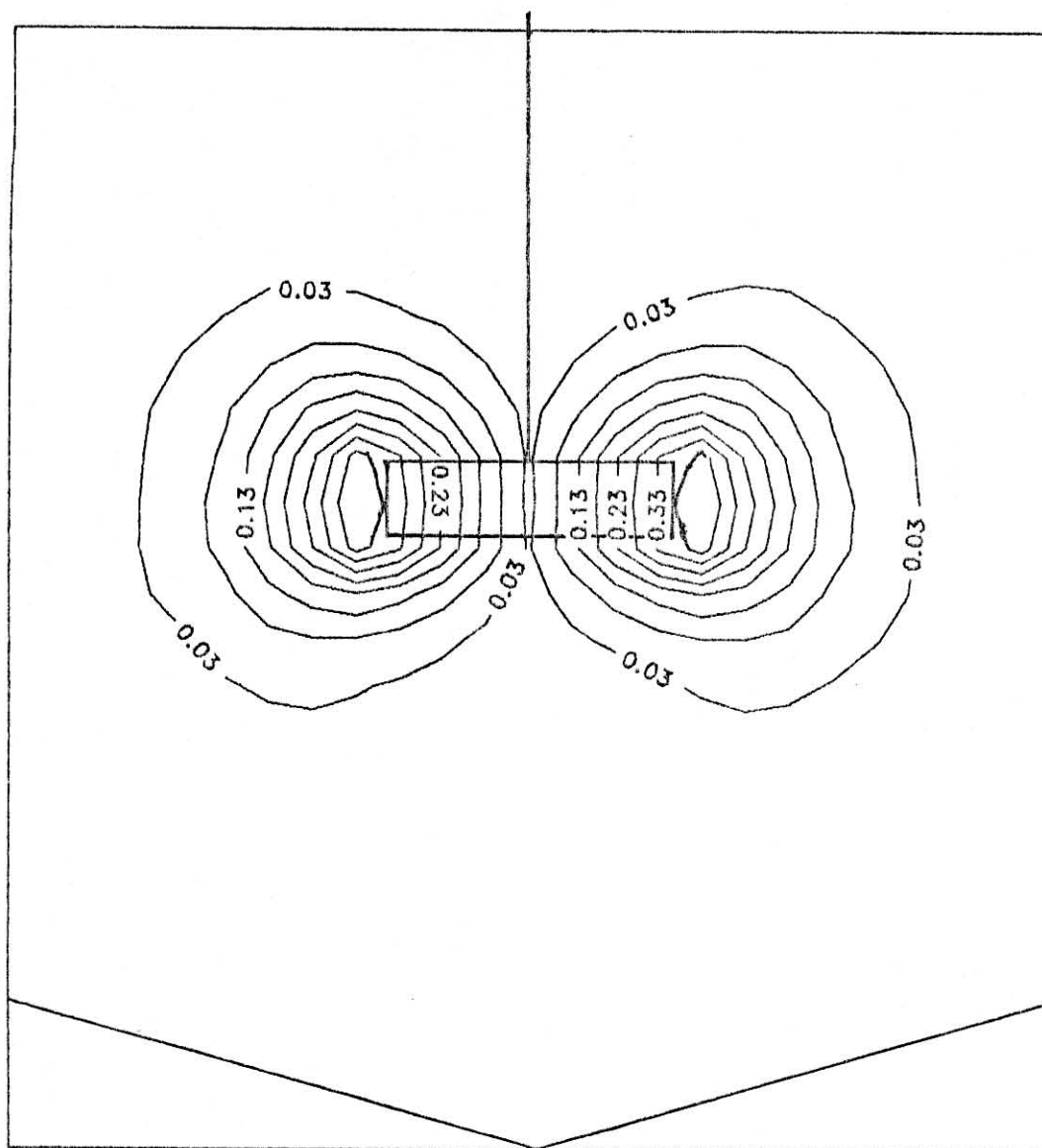
c / Fond conique :

Les conditions opératoires sont les mêmes que dans le cas précédent, seule la forme du fond de la cuve a été modifiée.

La figure (5-7) confirme le fait que dans les conditions opératoires retenues, la forme du fond n'a pas d'influence majeure sur les écoulements. De façon classique, la forme conique n'est jamais recommandable pour assurer des circulations du liquide dans des conditions optimales, le fond de la cuve étant toujours difficile à mettre en mouvement. Néanmoins, si des contraintes extérieures imposaient ce type de géométrie, la seule différence notable au niveau de la mise en mouvement du fluide est réduite à la proximité du sommet du cône.

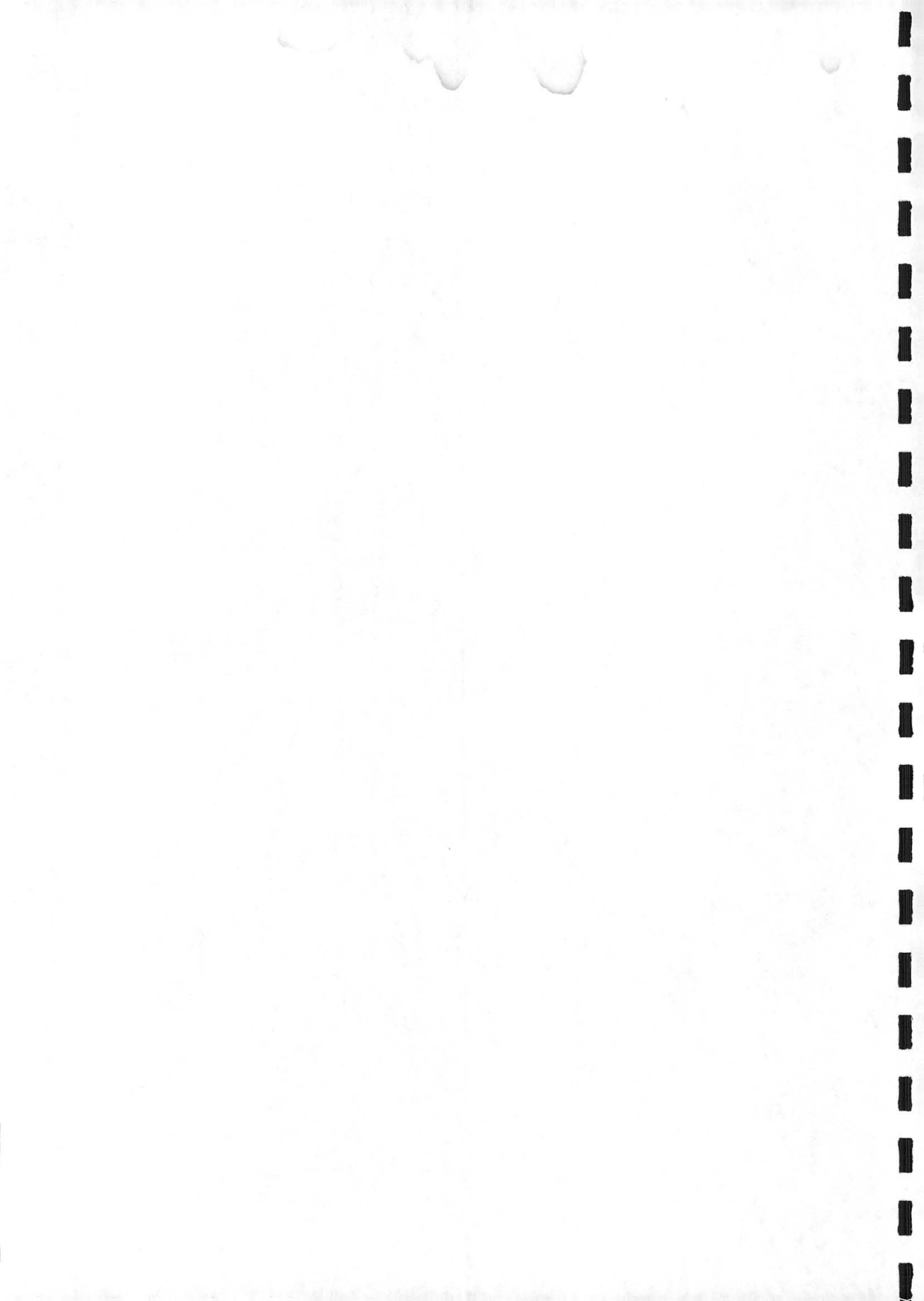
La vitesse tangentielle, représentée schématiquement sur la figure (5-8), montre que le volume de fluide dans la partie inférieure conique est quasiment au repos.





Figure(5-8): LIGNES D'ISO-VITESSE TANGENTIELLE
TURBINE DE RUSHTON (FOND CONIQUE)

($\frac{v\theta}{V_m}$: valeurs de vitesse adimensionnelles)



d / Cas d'une géométrie particulier :

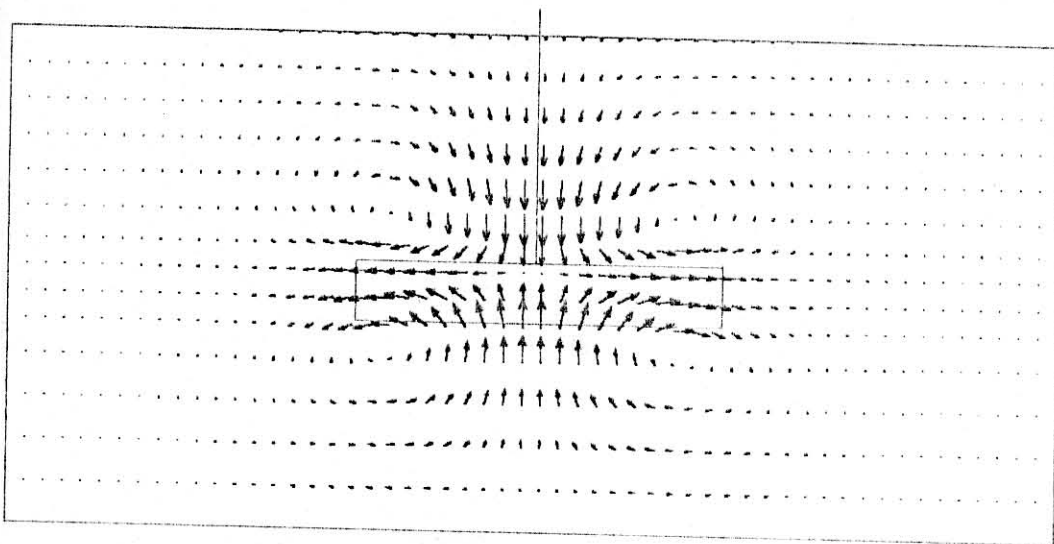
■ Cuve large et peu profonde à fond plat ($Re = 10$)

La figure (5-9) représente les écoulements dans un plan vertical générés par une turbine dans une cuve dont le diamètre est égal à deux fois la hauteur utile. Les quatre boucles de circulation se développent clairement. On note dans ce cas une différence importante des écoulements entre la partie supérieure et la partie inférieure de la cuve. En effet, les vitesses du fluide sont plus élevées au niveau de la zone d'aspiration supérieure de la turbine : la proximité relative du fond, comparée au cas précédents, constitue un obstacle au développement des écoulements dans la partie inférieure, et engendre la dissymétrie observée. Le même caractère dissymétrique s'observe au niveau des parois latérales de la cuve, à hauteur du mobile d'agitation : le liquide a plutôt une légère tendance à remonter près de la parois vers la surface. On note également que les nœuds de circulations se développent sensiblement à la même position relative par rapport à l'extrémité des pales.

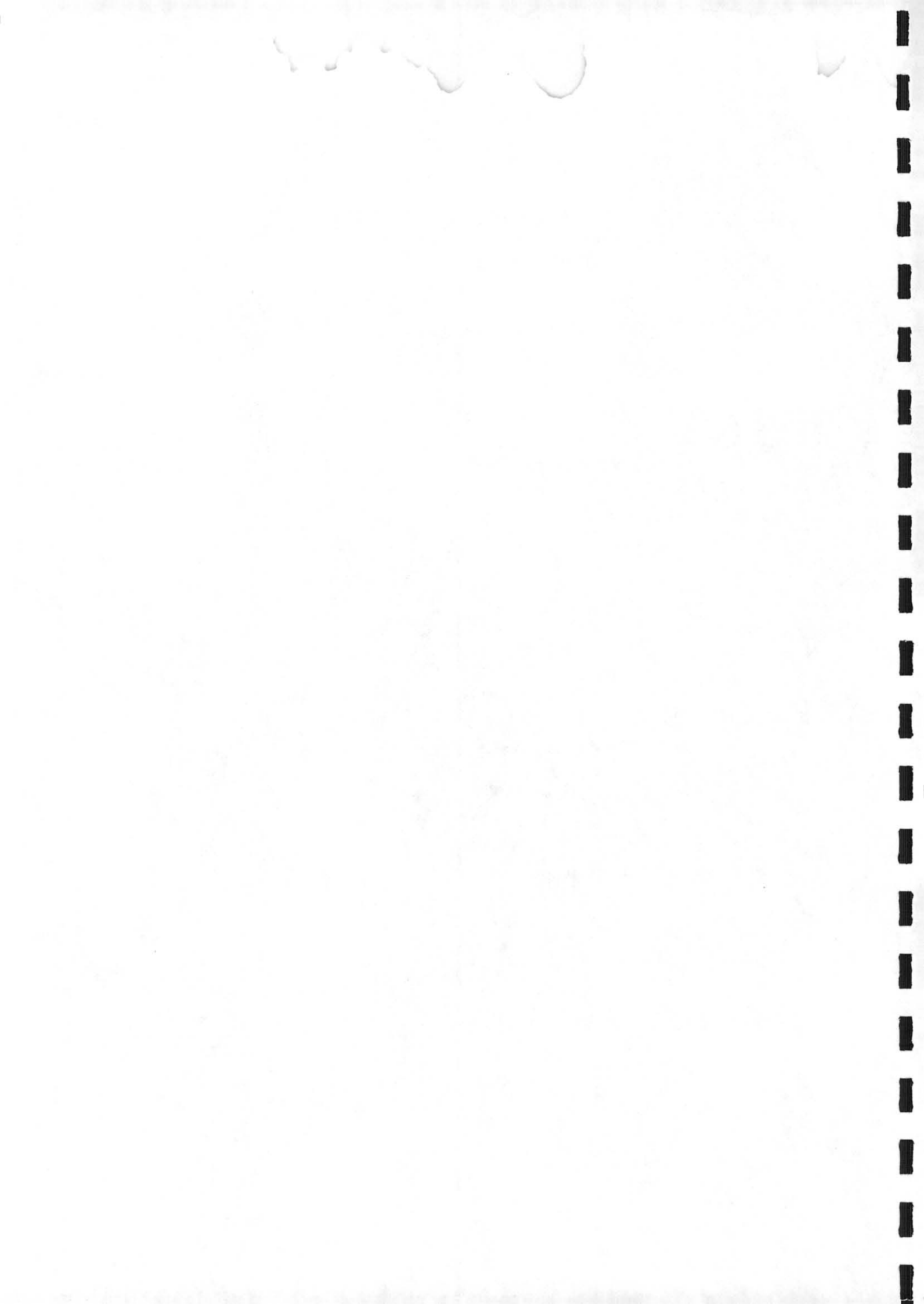
La figure(5-10) représente le flux tangentiel. Les observations mènent aux mêmes conclusions que précédemment concernant l'influence accrue de la proximité du fond de la cuve et de la surface libre : le flux tangentiel près de la surface est plus important que près du fond de la cuve, qui demeure la zone la moins agitée.

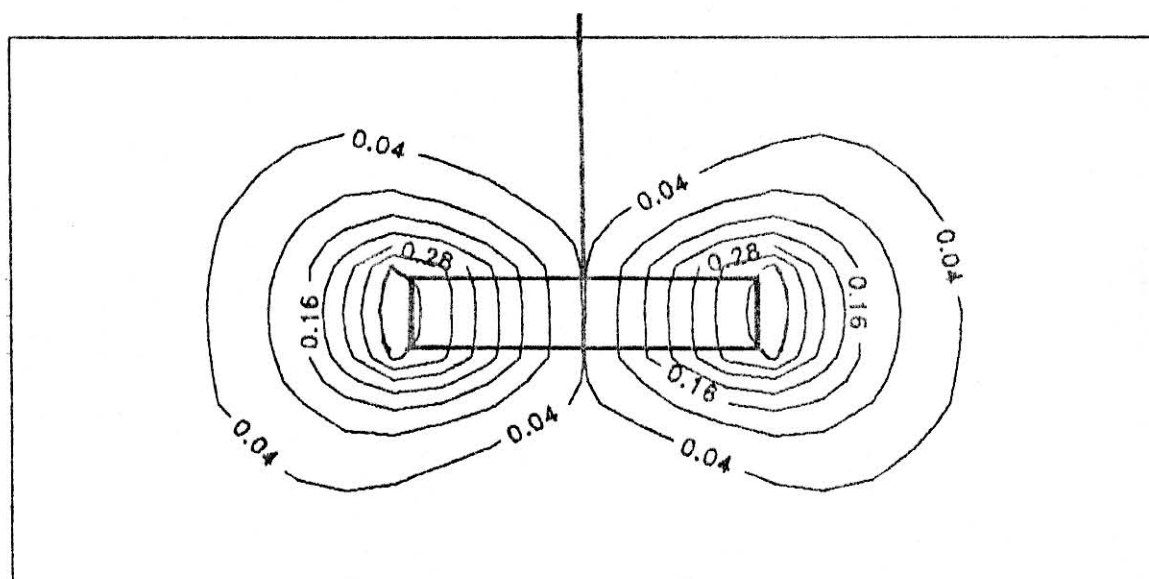
Les lignes de courant sont représentées sur la figure (5-11). La forme assez carrée des lignes de courant dans la partie supérieure de la cuve traduit que les particules fluides ont tendance à bien épouser les frontières physiques du système (les parois latérales et la surface libre), limitant ainsi les volumes morts. La forme plus ronde des lignes de courant dans la partie inférieure met au contraire en évidence au développement de zones plus mal agitées.





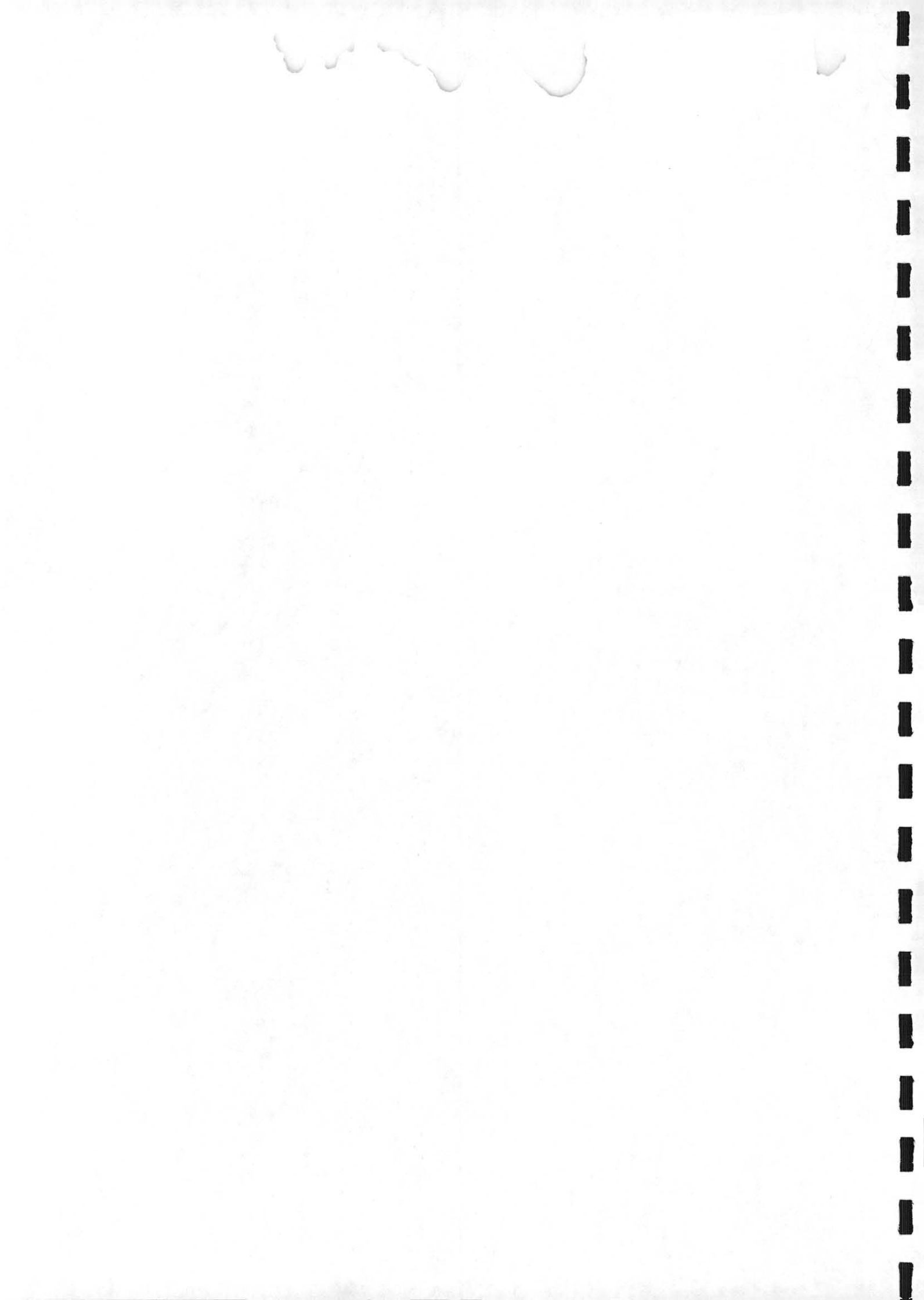
Figure(5-9): Turbine - Cuve large et peu profonde a fond plat
Projection des vecteurs vitesse dans un plan vertical

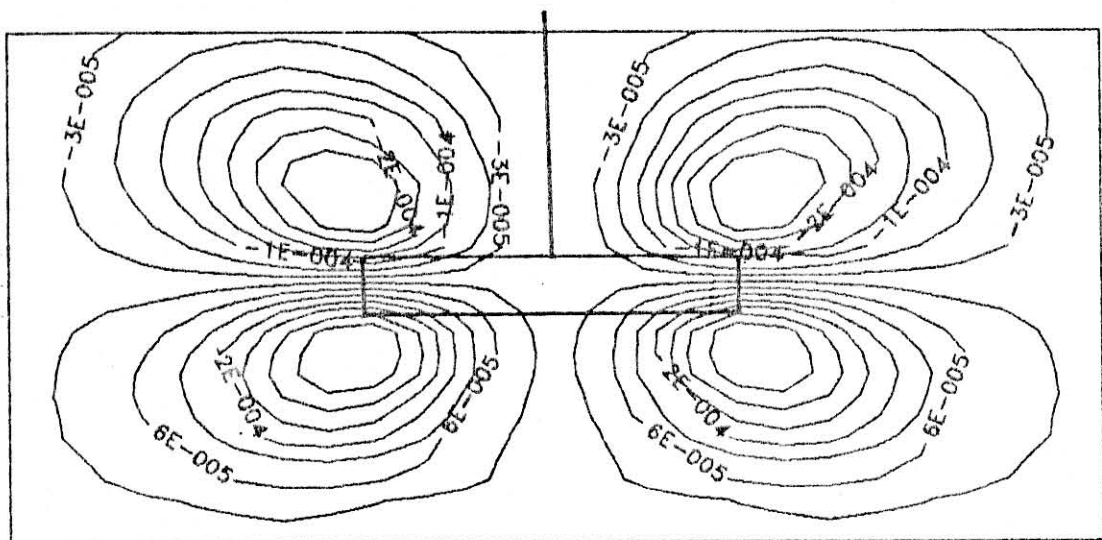




Figure(5-10): LIGNES D'ISO-VITESSE TANGENTIELLE
CUVE LARGE ET PEU PROFONDE
TURBINE DE RUSHTON

($\frac{v\theta}{v_m}$: valeurs de vitesse adimensionnelles)





Figure(5-11):

LIGNES DE COURANT
CUVE LARGE ET PEU PROFONDE
TURBINE DE RUSHTON

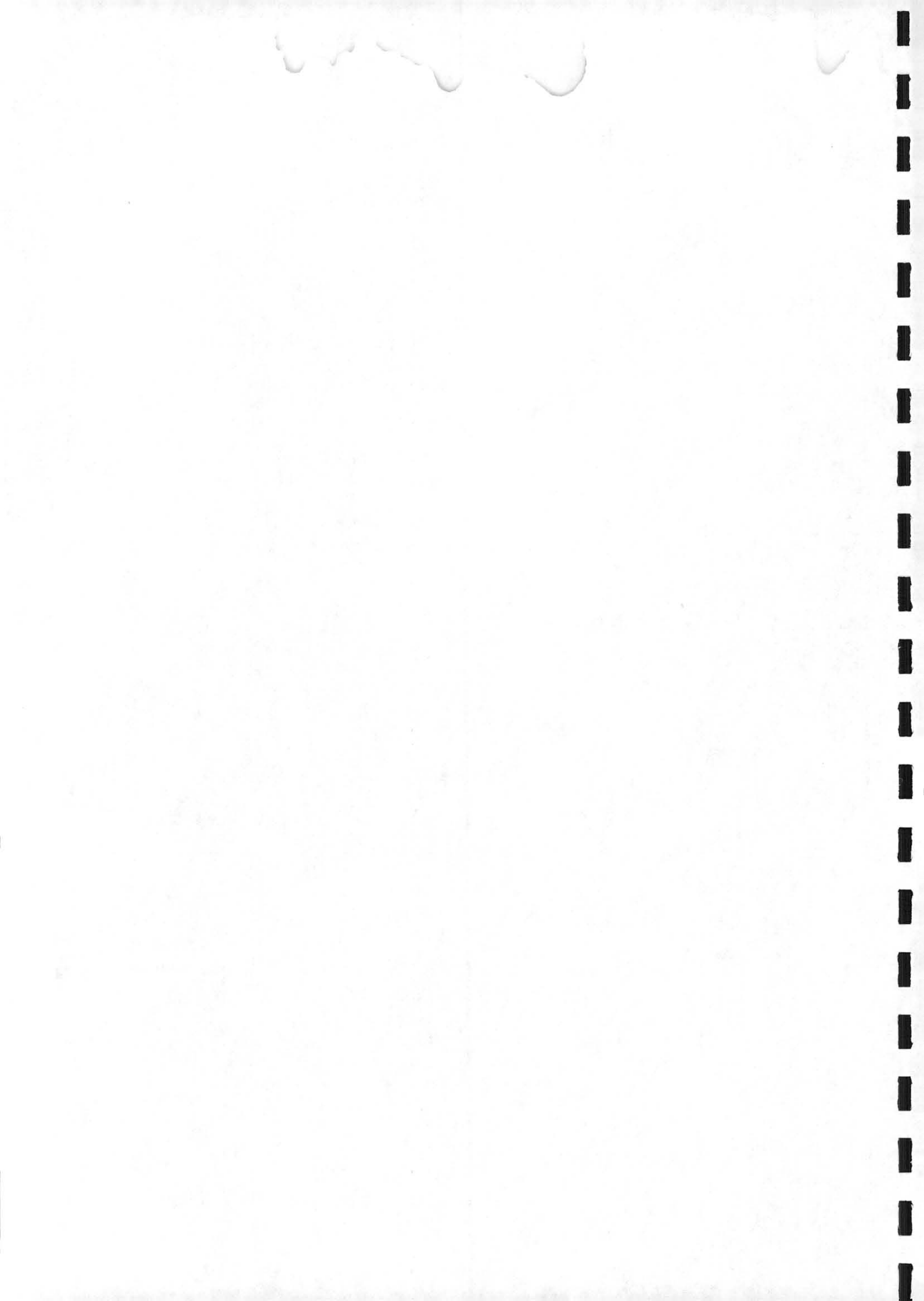
(Les iso-valeurs correspondent à la fonction de courant ψ)

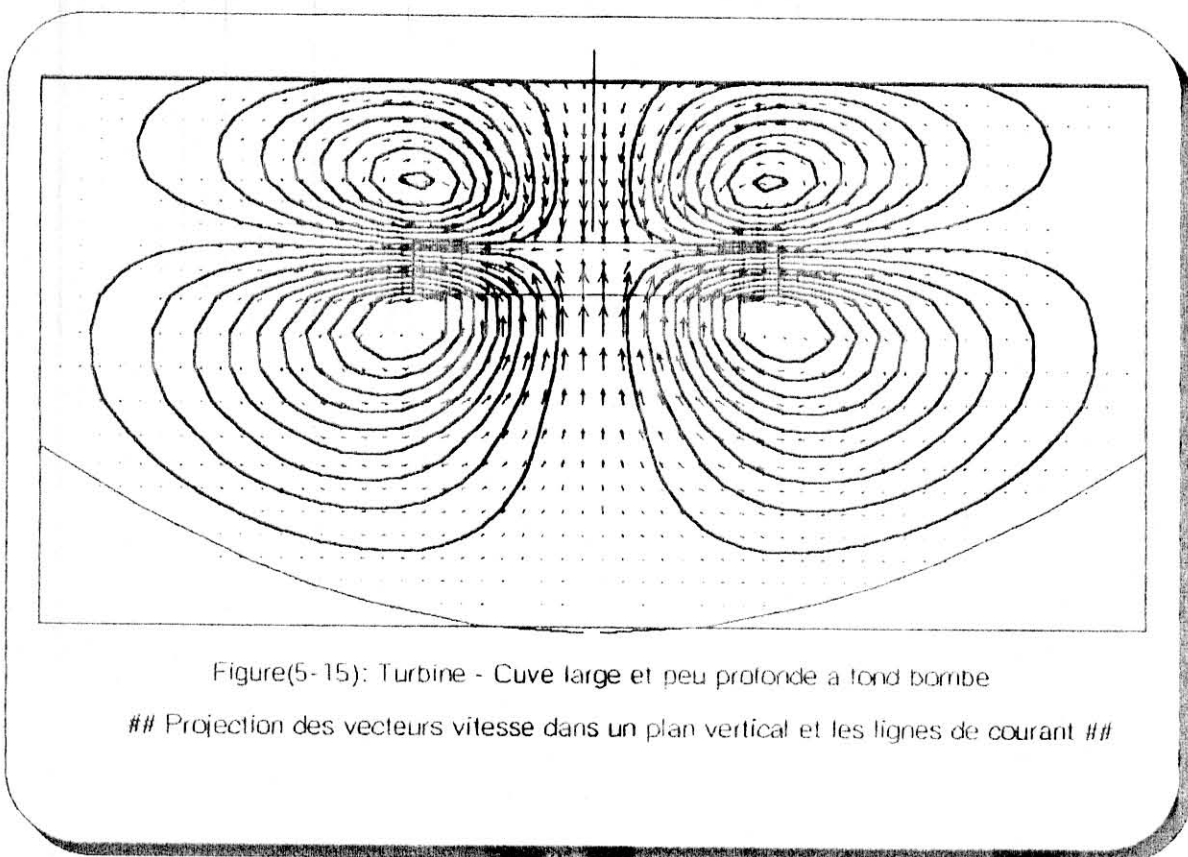


■ Cuve large et peu profonde à fond bombé ($Re = 10$) :

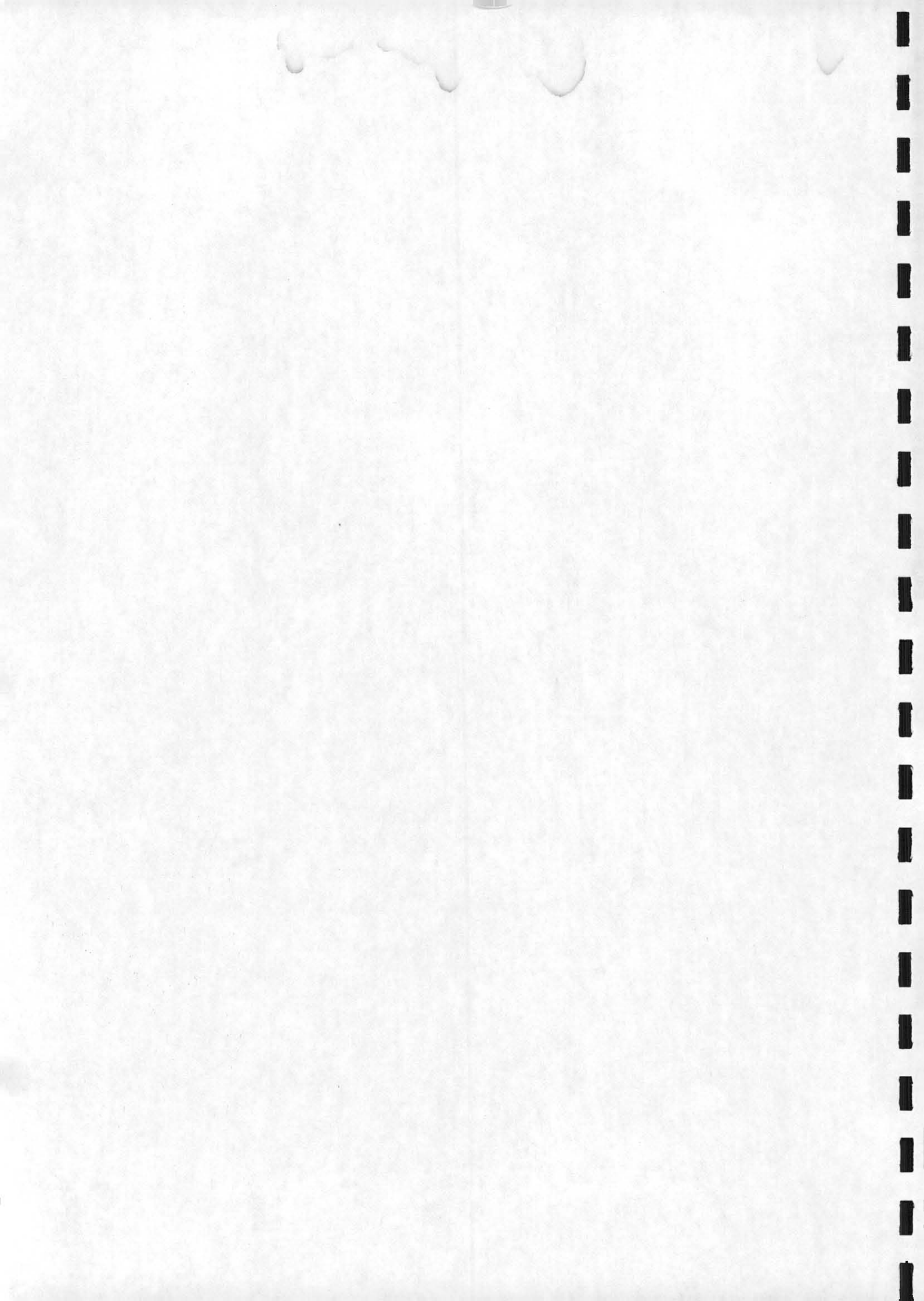
La figure (5-12) représente les lignes de courant superposées au champ des vitesses dans un plan vertical dans la cuve spéciale étudiée précédemment dont on a modifié le fond. L'agitateur a été recentré par rapport à la hauteur de la cuve. On note que l'éloignement relatif du fond et de la surface par rapport à l'agitateur engendre le rétablissement d'une plus grande ressemblance de la valeur des vitesses entre les parties supérieure et inférieure de la cuve. Une très légère zone de recirculation au centre et au fond de la cuve est amorcée. On peut remarquer également que les écoulements se développent de façon générale avec plus de facilité, ce qui se traduit par un éloignement des noeuds de circulation relativement à l'extrémité des pales de l'agitateur.

De façon globale, les écoulements semblent plus satisfaisants que ceux obtenus dans le cas de la géométrie précédente : le fait de gommer les angles droits dans le fond de la cuve se confirme être un choix judicieux pour diminuer l'importance des zones mortes en partie inférieure et près des soutirages éventuels.





Figure(5-15): Turbine - Cuve large et peu profonde a fond bombe
Projection des vecteurs vitesse dans un plan vertical et les lignes de courant



5-1-2 / Cuve équipée d'une hélice à pales minces (HPM) :

Les caractéristiques géométriques standards qui ont été retenues sont :

- $D_a/D_c = 0.5$
- $H/D_c = 1$
- $h/H = 0.5$

Sauf spécification contraire, le nombre de Reynolds est égale à 10.

L'hélice représentée est une hélice dont le pas p est estimé à 0.5 à partir des conditions aux limites.



a / Fond plat :

Les écoulements dans un plan vertical engendrés par une hélice dans une position standard sont représentés sur la figure (5-13.b). Le caractère nettement axial des écoulements est évident. Il se forme donc une large boucle de circulation, le fluide étant repoussé vers le bas par l'hélice, puis remontant le long des parois latérales jusque vers la surface libre, pour revenir alimenter ensuite l'agitateur par sa partie supérieure autour de l'axe de symétrie de la cuve. Les mêmes constatations quantitatives peuvent être déduites de la figures (5-13.a) de la référence [6].

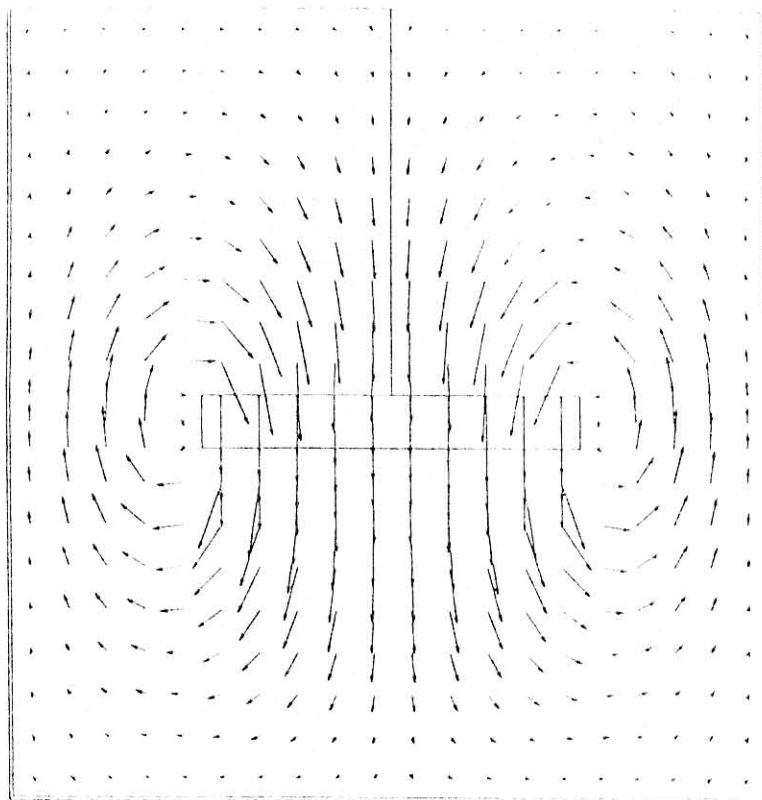
On note l'existence d'un noeud de circulation sur le plan de l'agitateur, un peu au delà de l'extrémité des pales. Celui-ci apparaît plus distinctement sur la figure (5-14.b) qui représente les lignes de courant dans un plan vertical. On peut comparer la valeur des vecteurs vitesses projetés dans le plan vertical avec celle correspondant au cas de la turbine vu précédemment : avec une hélice, les écoulements dits "secondaires" (écoulements radial et axial, l'écoulement "primaire" étant naturellement l'écoulement tangentiel) sont beaucoup plus importants. L'influence de la surface libre est faiblement marqué, il se remarque sur la figure (5-14.b) à travers la légère augmentation de l'écartement des lignes de courant dans la partie supérieure de la cuve. Ces observations, se comparent parfaitement à ceux de la figure (5-14.a) de la référence [6].

La figure (5-15) représente les lignes d'iso-dissipation de puissance par unité de volume dans un plan vertical de la cuve. L'essentiel de la puissance est dissipée dans la zone de présence de l'agitateur, et surtout au niveau de l'extrémité des pales. Les zones d'aspiration et de refoulement de l'agitateur sont également le siège d'une dissipation de puissance importante. On note une assez forte symétrie entre



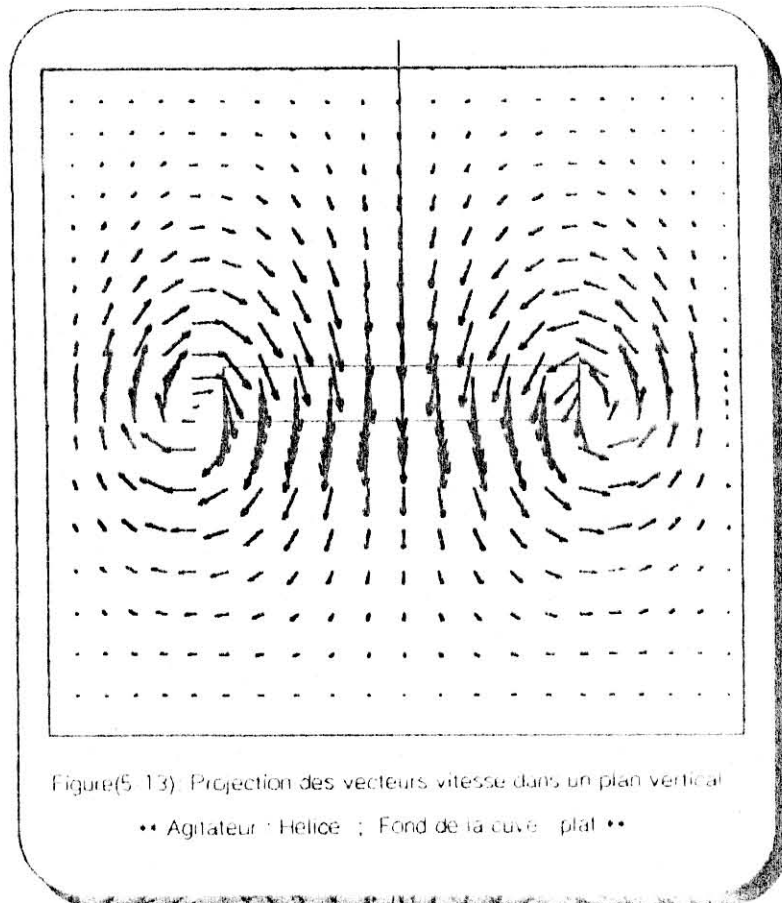
les parties inférieure et supérieure de la cuve, due essentiellement à l'absence d'interactions fortes entre le fond de la cuve et l'agitateur, l'espace libre laissé pour que l'écoulement se développe de façon satisfaisante étant suffisant. On note par contre une légère dissipation près de la paroi latérale au niveau de l'agitateur, à cause d'un cisaillement radial un peu plus élevé à ce niveau.





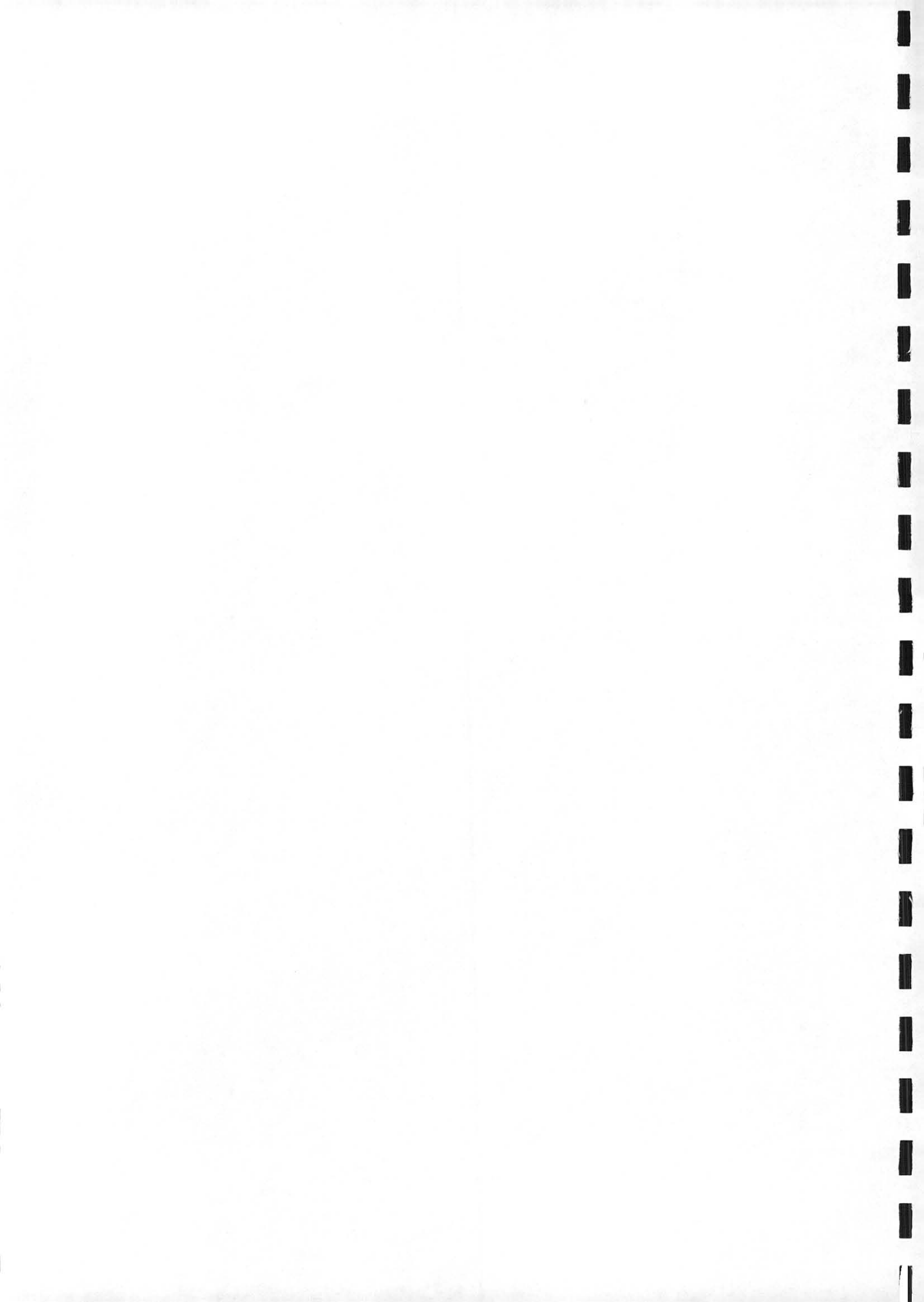
a)

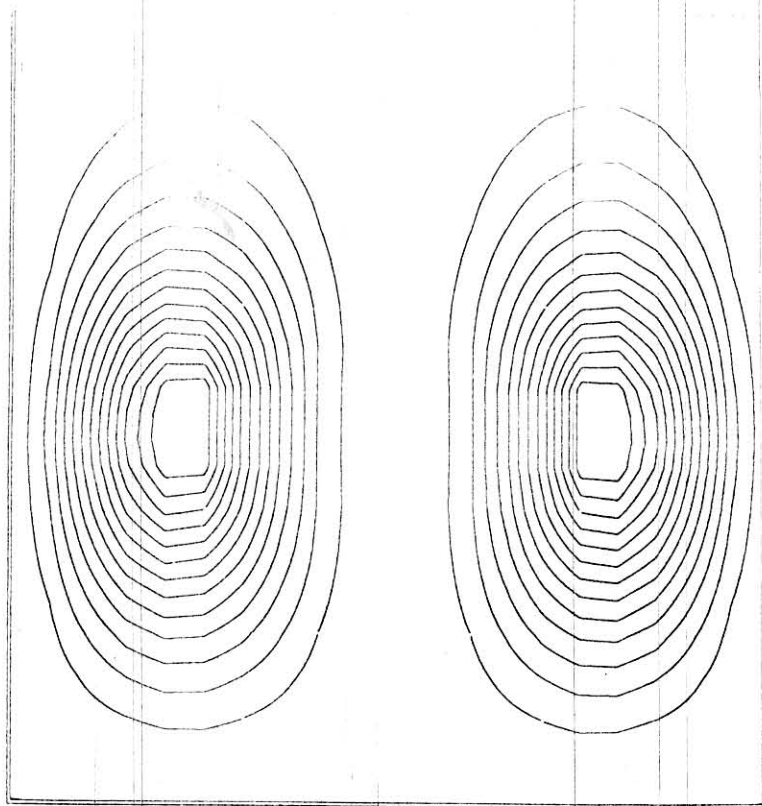
Figure 13. Hélice - Fond plat
Projection des vecteurs vitesse dans un plan vertical [6]



Figure(5-13): Projection des vecteurs vitesse dans un plan vertical

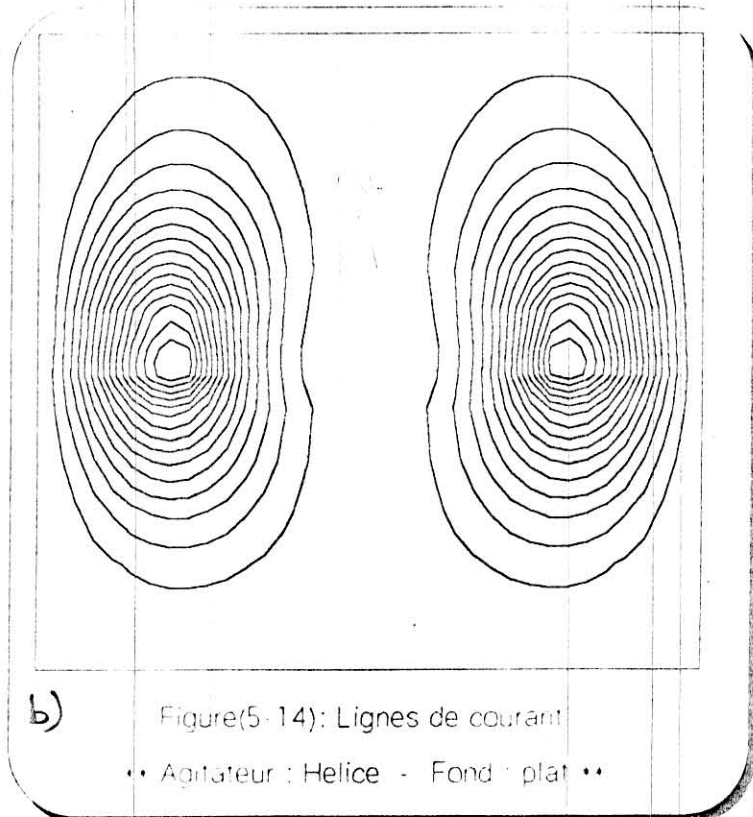
•• Agitateur : Hélice ; Fond de la cuve : plat ••





a)

Figure 14. Hélice - Fond plat
Lignes de courant [6]

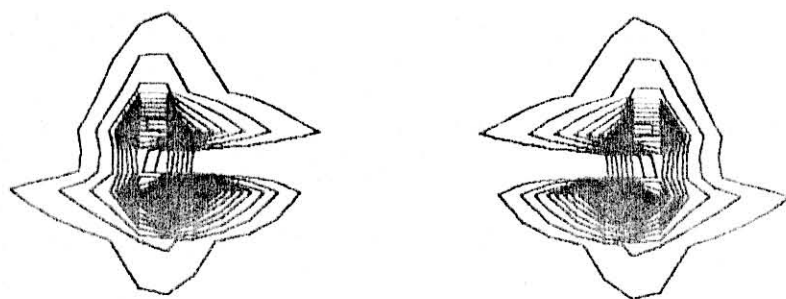


b)

Figure(5-14): Lignes de courant

•• Agitateur : Hélice - Fond : plat ••





Figure(5-15): Helice - Fond plat

Lignes d'iso-dissipation viqueuse



b / Fond bombé :

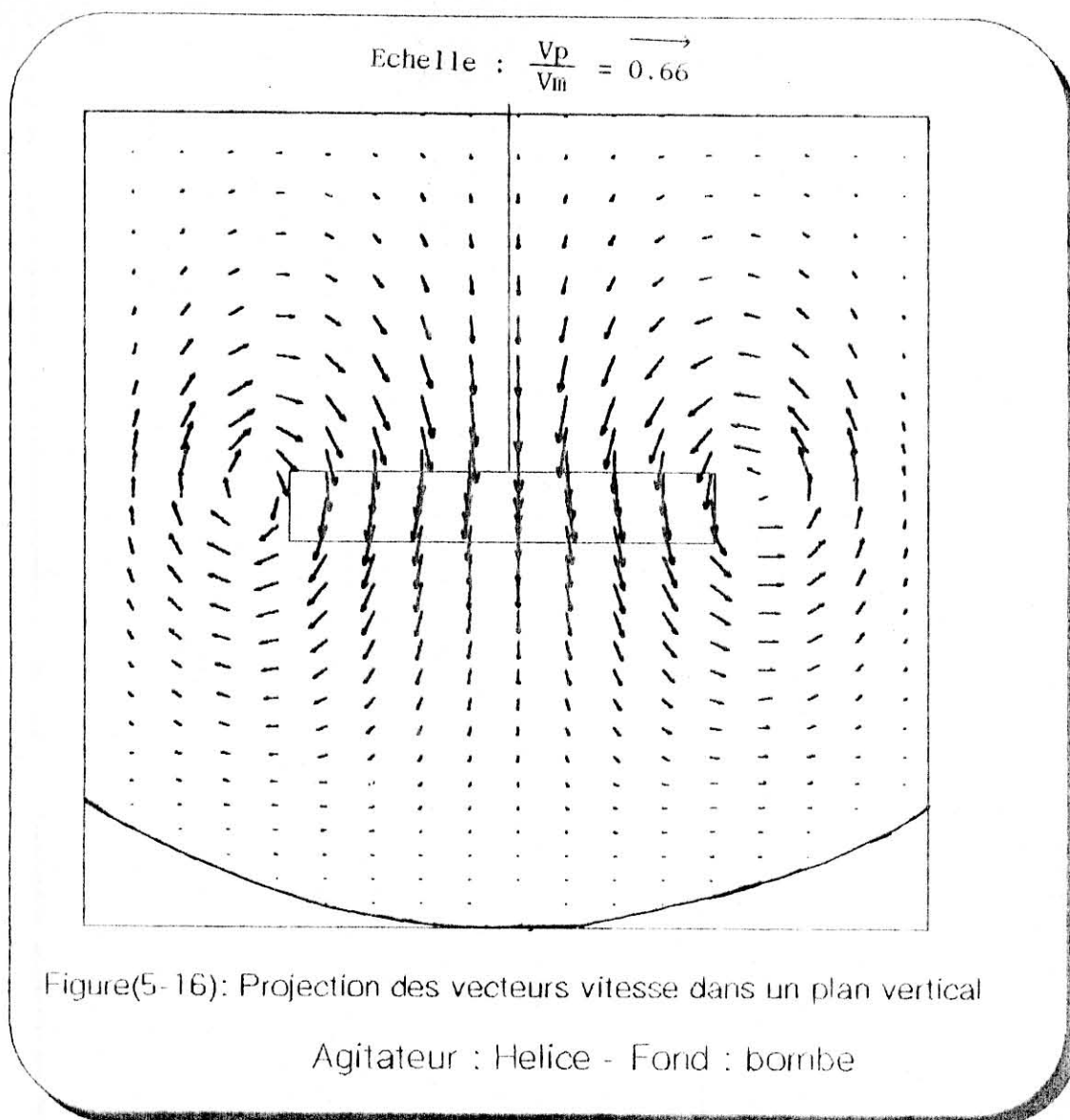
Les écoulements dans un plan vertical sont représentés sur la figure (5-16). La similitude avec le cas de la cuve à fond plat est très importante, ceci étant dû aux interactions faibles entre le fond et l'agitateur que nous avons déjà relevées précédemment. Les écoulements dans la partie bombée de la cuve épousent bien la géométrie des parois, et il n'apparaît pas de zone de recirculation. Néanmoins, les valeurs relativement faibles des vitesses dans cette partie de l'installation suggèrent que la géométrie du système pourrait être améliorée en rapprochant l'hélice du fond pour pallier les écoulements de fuite radiaux qui apparaissent très nettement dans le courant de refoulement de l'hélice.

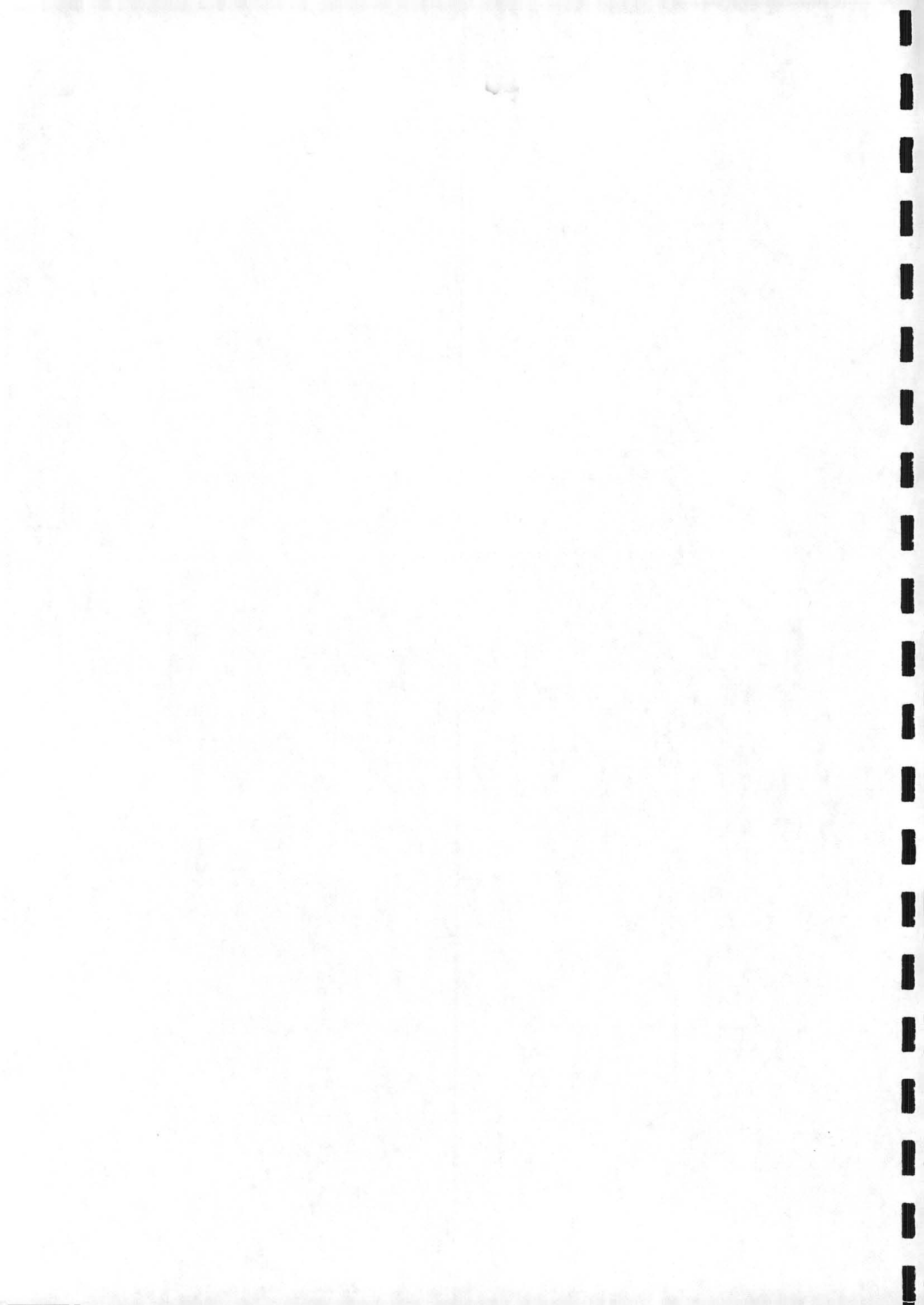
La vitesse tangentielle est représentée sur la figure (5-17). On note que l'écoulement primaire est similaire à celui que l'on observe dans le cas de l'agitateur de type turbine, pour un même nombre de Reynolds. C'est donc la transformation du mouvement naturel de rotation en circulation dans un plan vertical qui est essentiellement modifié.

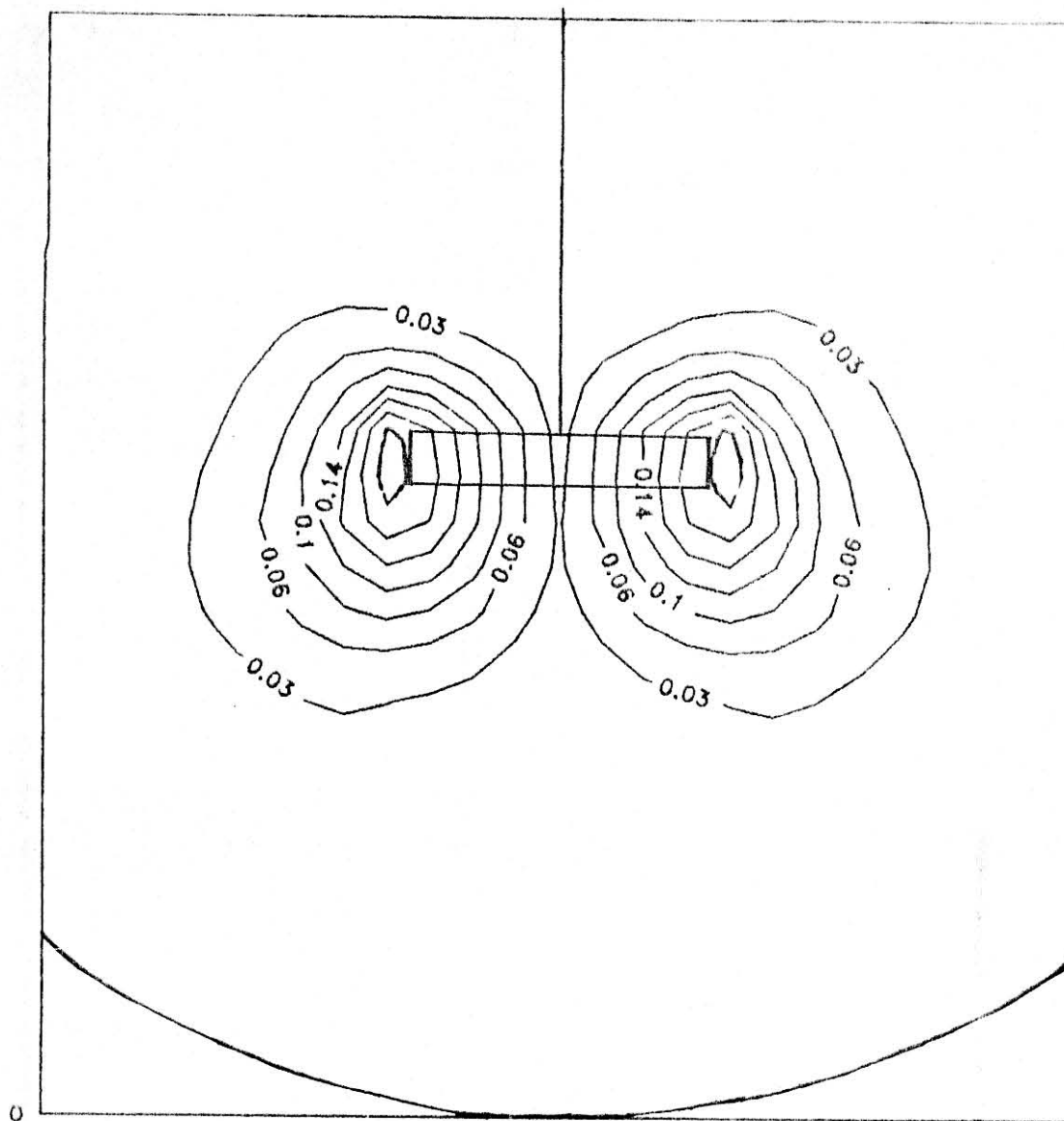
c / Fond conique :

La figure (5-18) qui représente la projection des vecteurs vitesse dans un plan vertical met également en évidence l'influence très faible de la forme du fond dans ce cas de figure. Il semble clair cependant que c'est dans le cas de l'utilisation de ce type de cuve que le choix du positionnement de l'hélice par rapport au fond peut apporter les améliorations les plus sensibles au niveau des écoulements.



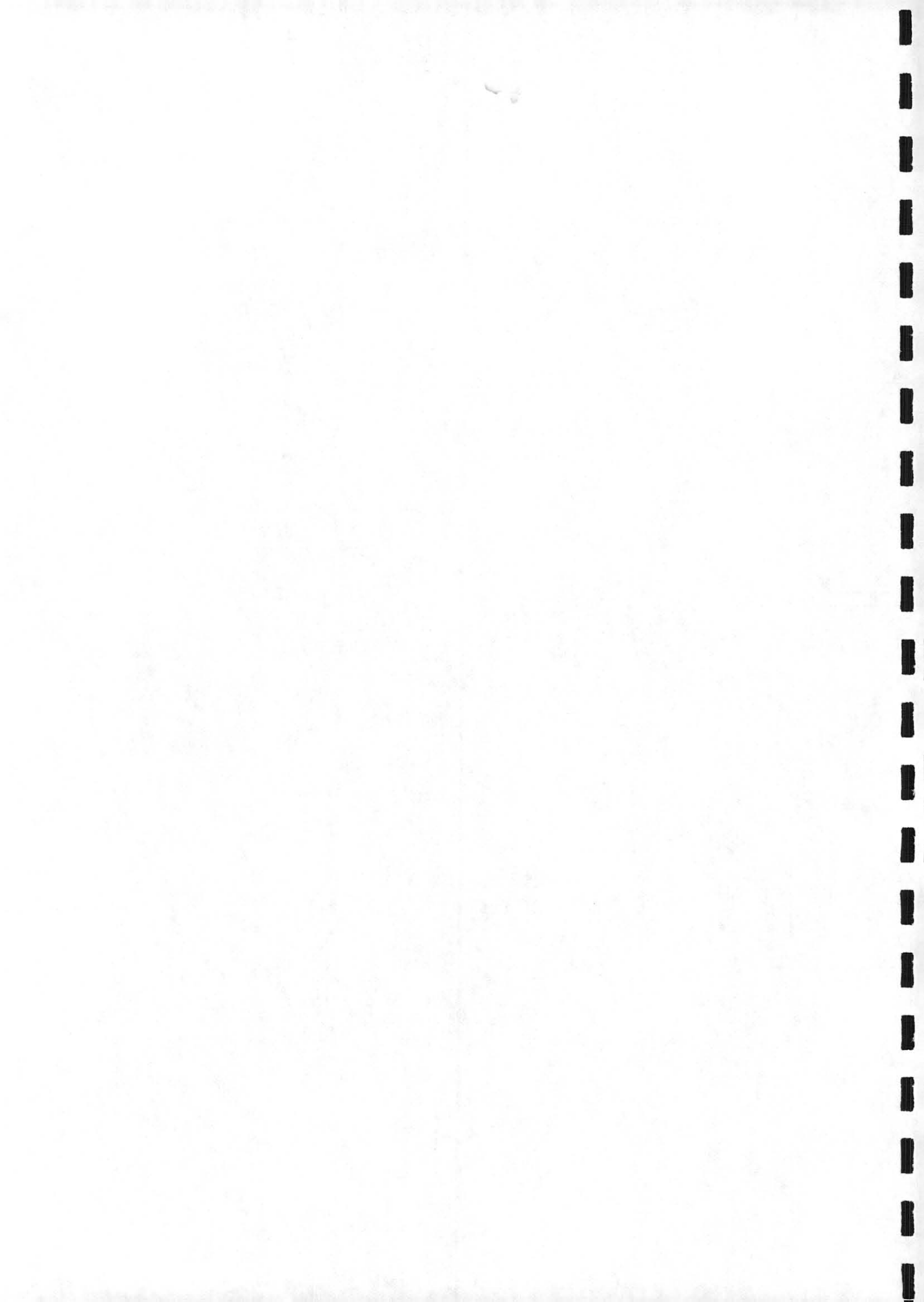


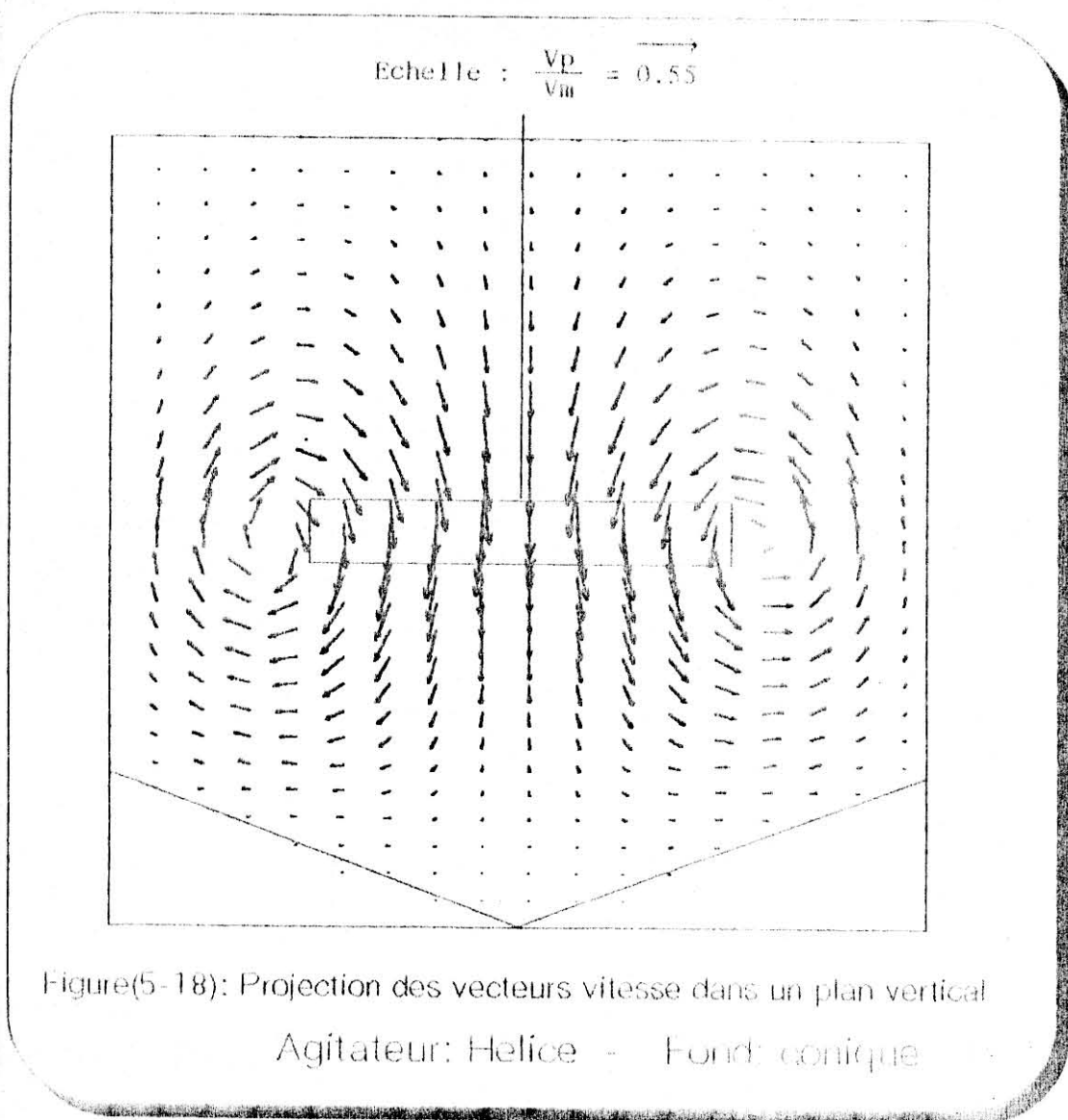


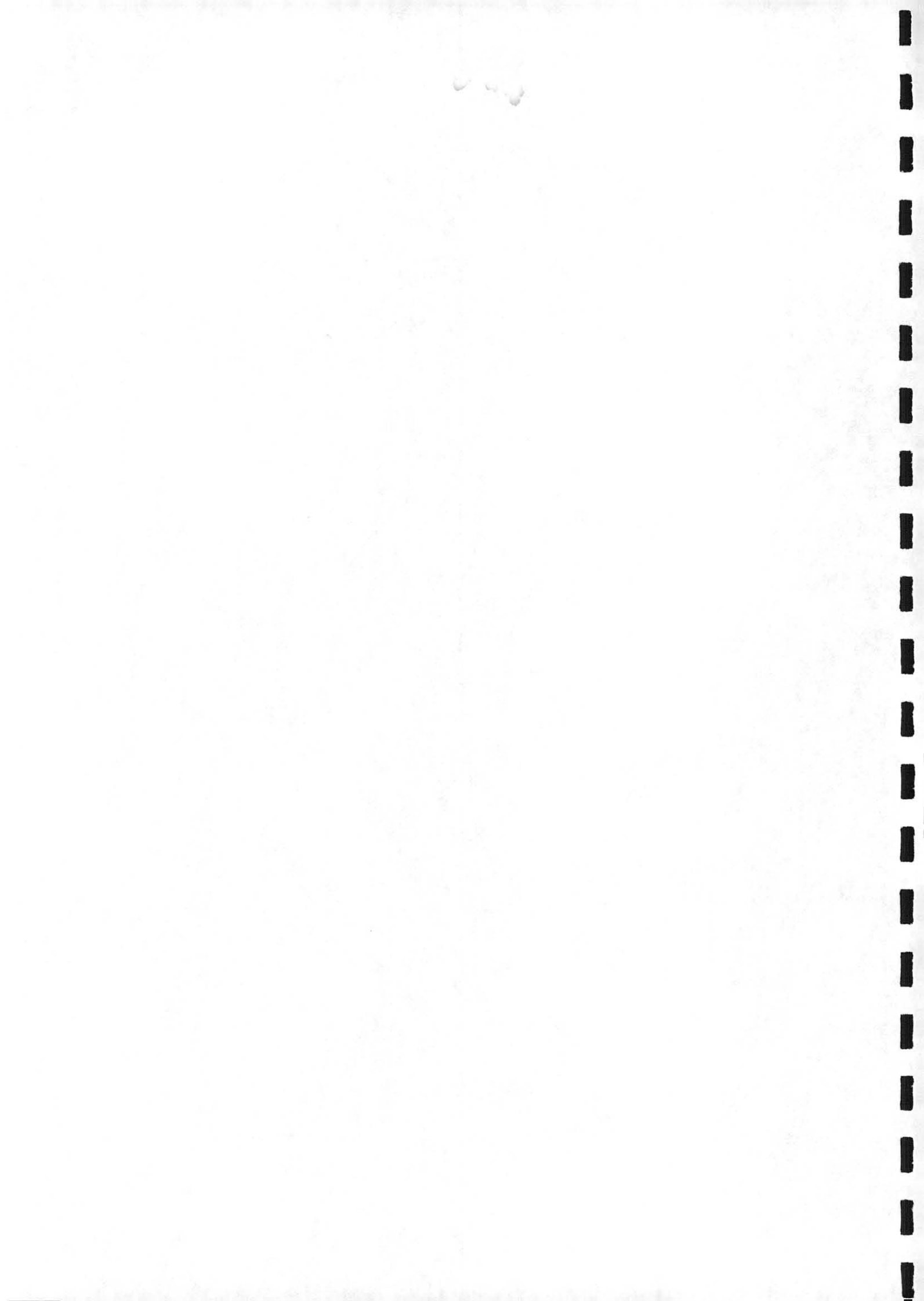


Figure(5-17): LIGNES D'ISO-VITESSE TANGENTIELLE
AGITATEUR DE TYPE HELICE (FOND BOMBE)

($\frac{V\theta}{V_m}$: valeurs de vitesse adimensionnelles)







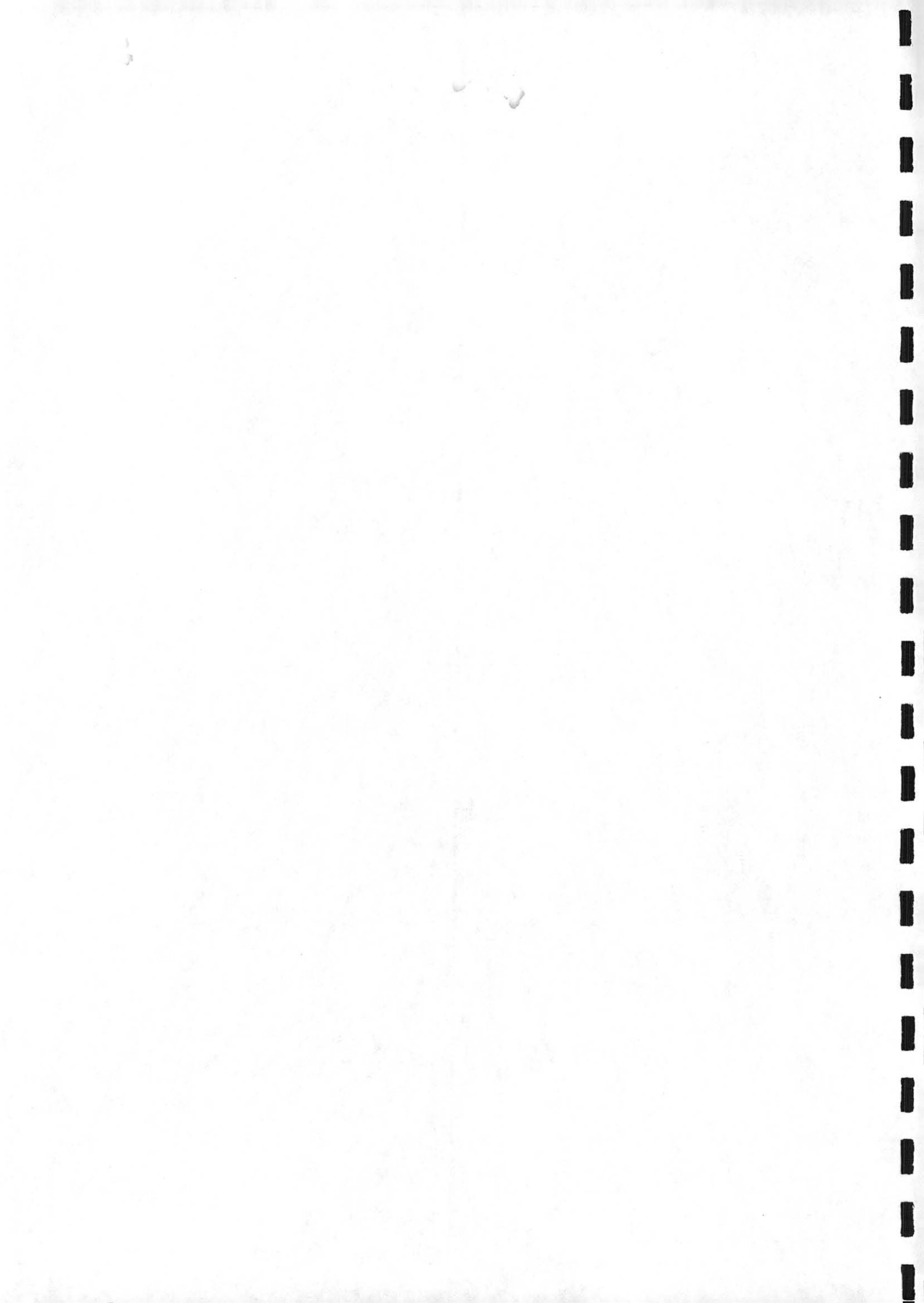
d / Cas d'une géométrie particulière :

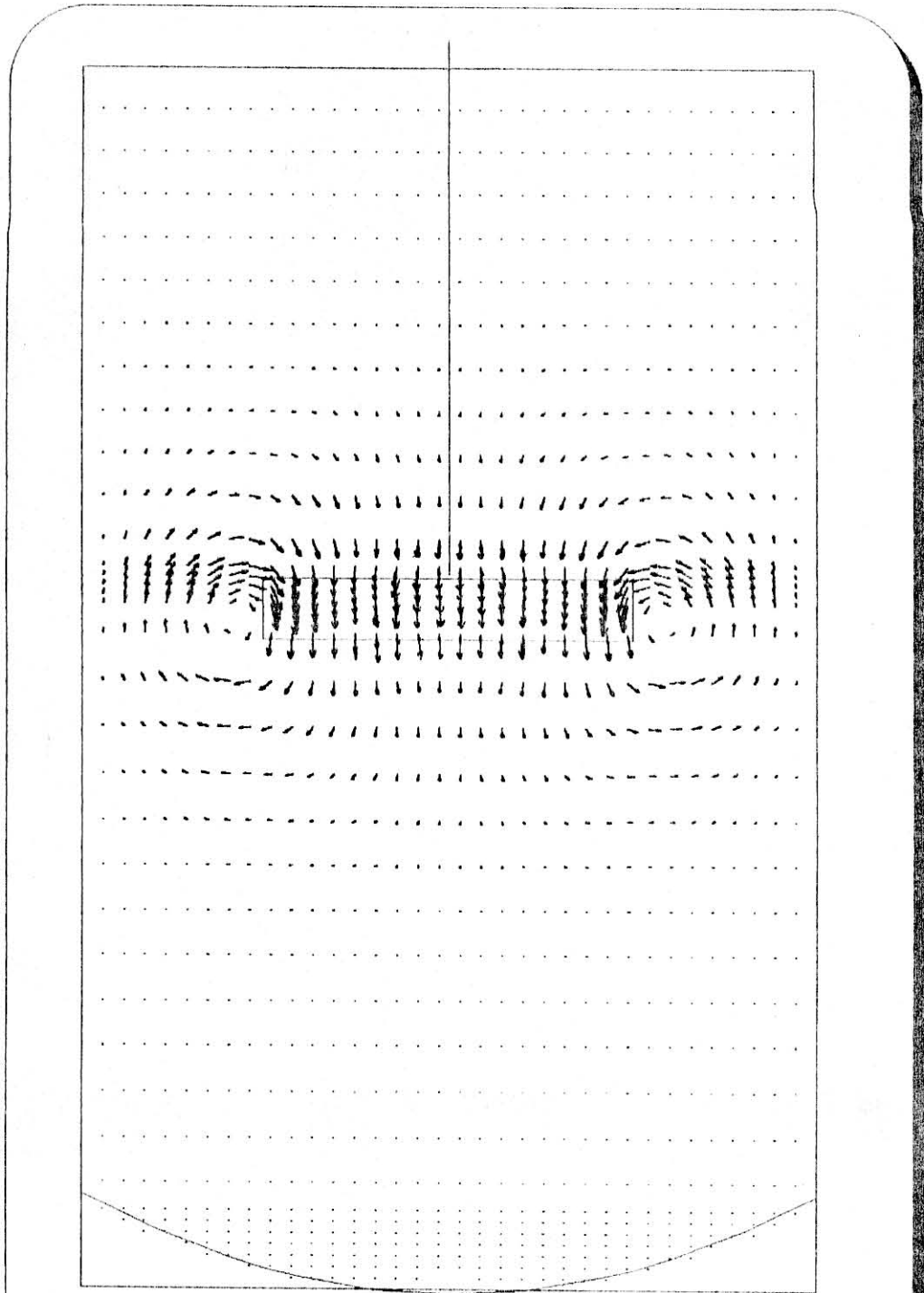
■ Cuve profonde (Re = 10) :

L'agitateur étant un agitateur de type axial, elle se prête à être parfois implantée dans des cuves plutôt profondes, et on les rencontre dans des installations industrielles dont les caractéristiques géométriques se situent parfois au-delà des préconisations d'usage. Dans l'exemple développé ici, la hauteur de liquide est égale à deux fois le diamètre de la cuve et le fond est bombé.

La figure (5-19) représente la projection des vecteurs vitesse dans un plan vertical, et la figure (5-20) les lignes de courant correspondantes. On remarque que le volume concerné par un mouvement significatif du fluide est centré sur l'agitateur et ne correspond pas à la totalité de la cuve : loin de la surface ou du fond, le fluide est déjà quasiment stagnant. D'ailleurs, on note l'apparition de zones de recirculation fermées au niveau d'une couronne supérieure près de la paroi.

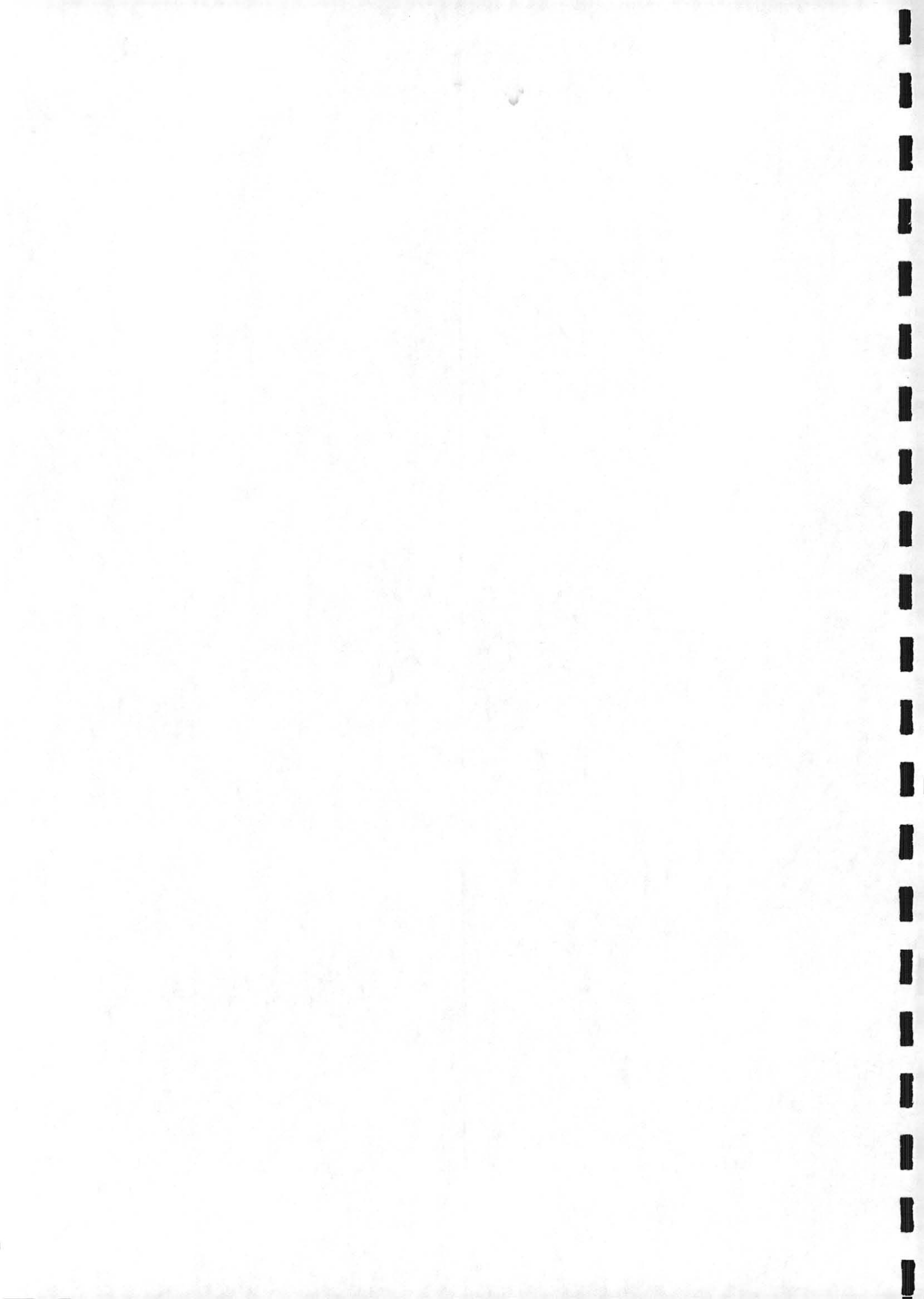
Il apparaît clairement que cette géométrie de cuve demanderait l'implantation de plusieurs agitateurs de type hélice superposés pour assurer des circulations satisfaisantes du liquide dans l'ensemble du volume. Selon les applications, deux ou même trois hélices seront traditionnellement implantées dans cette géométrie.

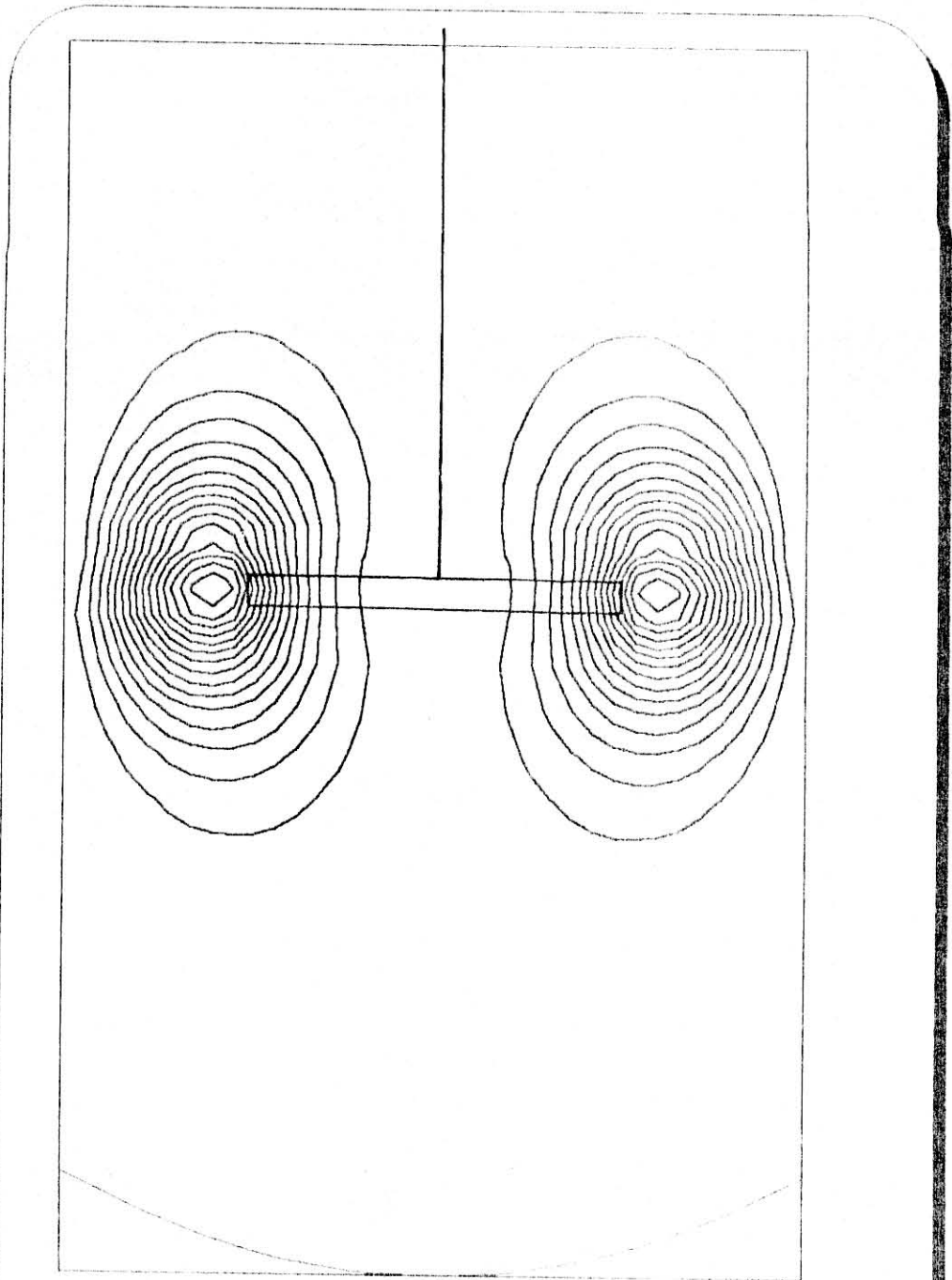




Figure(5-19): Helice - Cuve particuliere a fond bombe

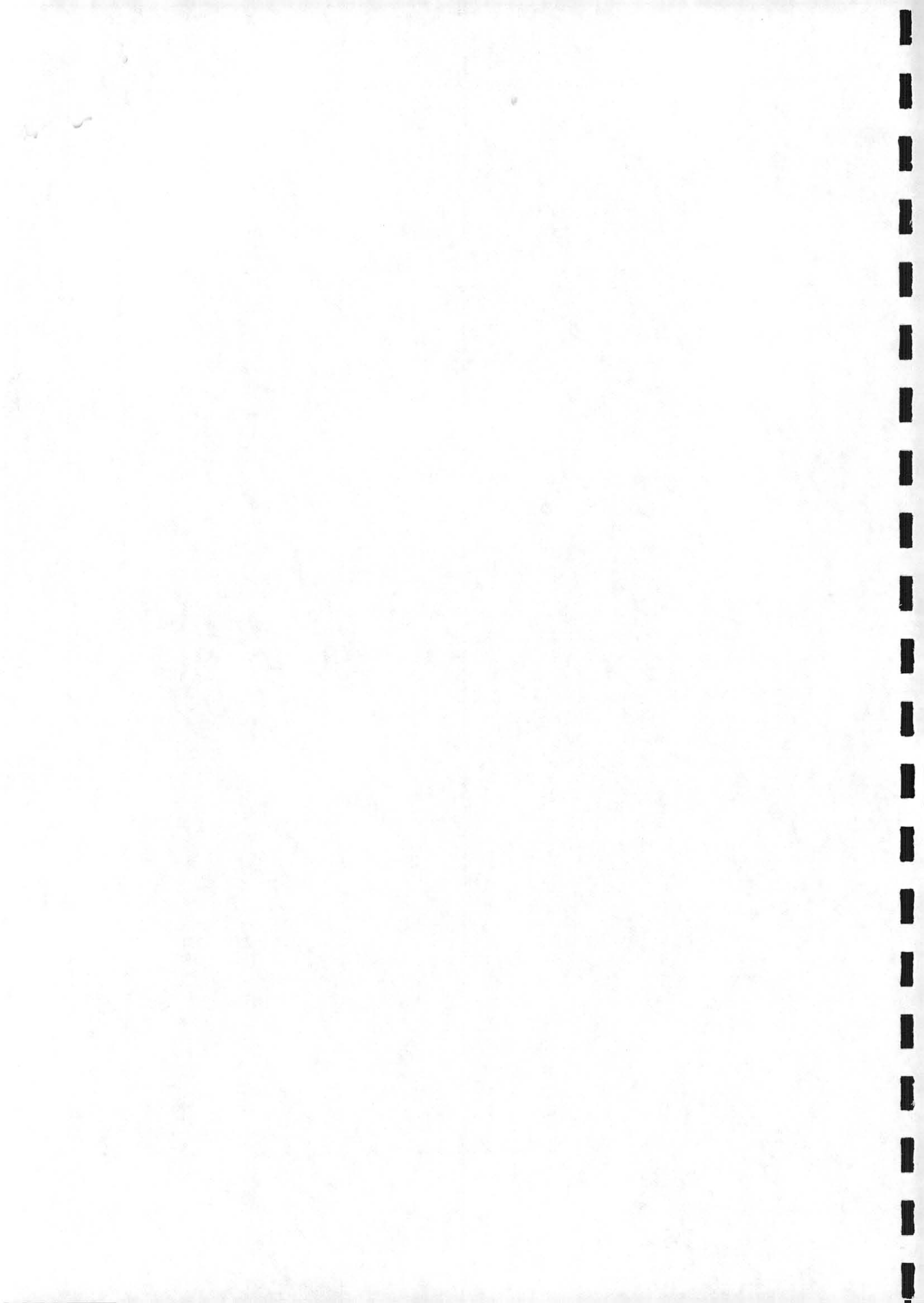
Projection des vecteurs vitesse dans un plan vertical





Figure(5-20): Helice - Fond bombe

Lignes de courant



5-2 / SYSTEMES MULTI-ETAGES :

Les systèmes multi-étagés, c'est à dire comportant plusieurs agitateurs superposés, sont très souvent utilisés dans le cadre de l'utilisation de fluides très visqueux, dans des cuves de géométrie pour laquelle la hauteur est plus importante que le diamètre de la cuve. Ces systèmes sont également quasiment incontournables lorsqu'il s'agit de disperser du gaz dans le liquide visqueux.

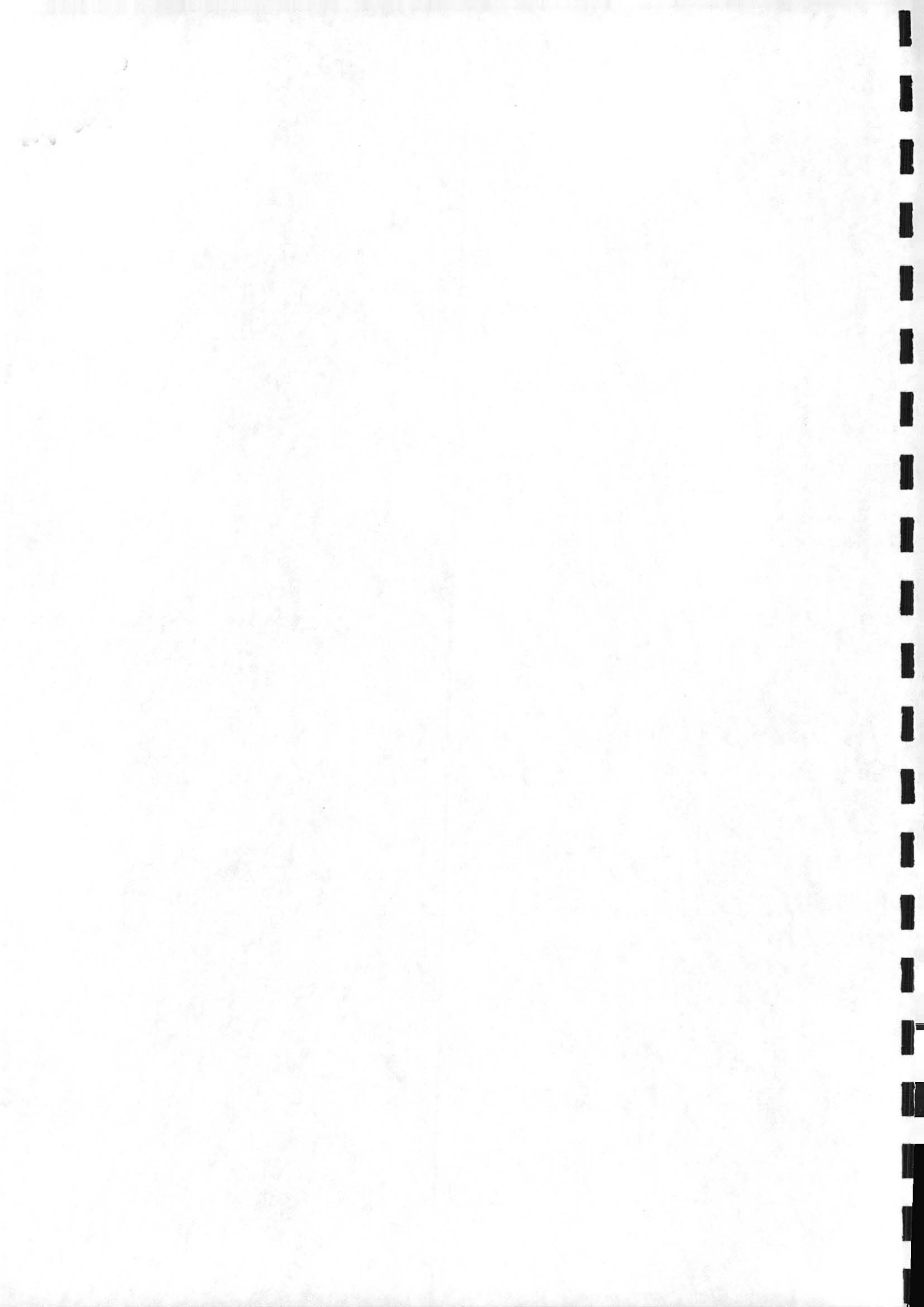
Les associations d'agitateurs peuvent être de plusieurs types : soit le même mobile est disposé plusieurs fois sur l'axe, soit l'on combine des mobiles de classes différentes, par exemple turbine et hélice, afin d'utiliser selon des zones de la cuve les qualités différentes de chacun. Dans tous les cas, la juxtaposition des agitateurs doit être conçue de telle sorte qu'ils ne constituent pas une entrave aux écoulements générés par les autres.

5-2-1/ Systèmes à deux turbines de Rushton :

Ces systèmes sont utilisés afin de créer des zones de cisaillement dans la totalité du volume de la cuve.

a / Ecoulements en configuration classique :

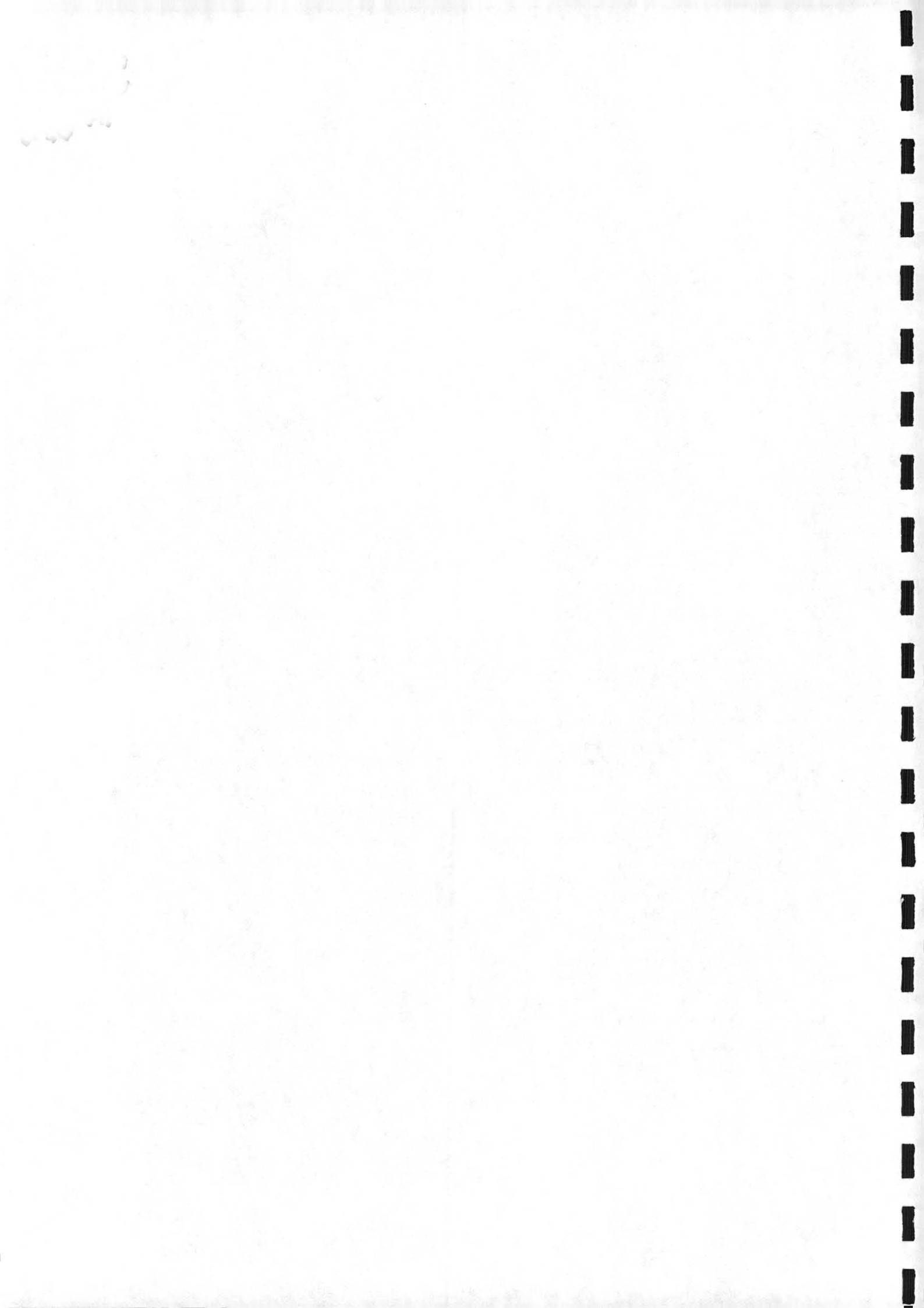
La projection des vecteurs vitesse dans un plan vertical est présentée sur la figure (5-21) et les lignes de courant correspondantes sur la figure (5-22), pour une cuve dont la hauteur est égale à deux fois le diamètre de la cuve. Les deux turbines sont identiques, régulièrement espacées sur l'axe, et leur diamètre est égale au tiers du diamètre de la cuve.

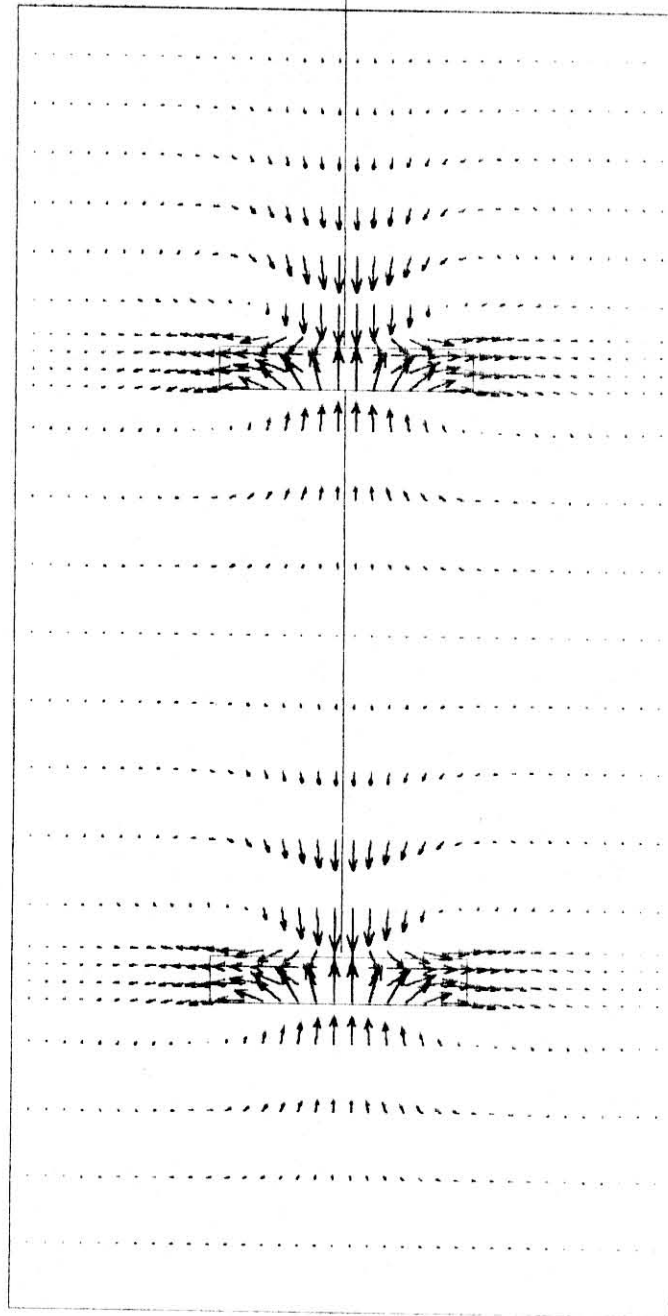


On remarque la présence d'un plan de séparation des flux situé exactement à mi-distance entre les deux turbines. La juxtaposition de plusieurs turbines revient donc à multiplier le nombre de boucles de circulation, ce qui engendre une difficulté importante à maintenir homogène l'ensemble de l'installation, le transfert de masse entre ces zones s'effectuant essentiellement par diffusion. On note que la zone comprise entre les deux turbines est le siège de cisaillements relativement importants, ce qui est traduit par le rapprochement des lignes de courant entre elles. Ceci signifie que les deux agitateurs sont suffisamment proches l'un de l'autre pour s'influencer mutuellement.

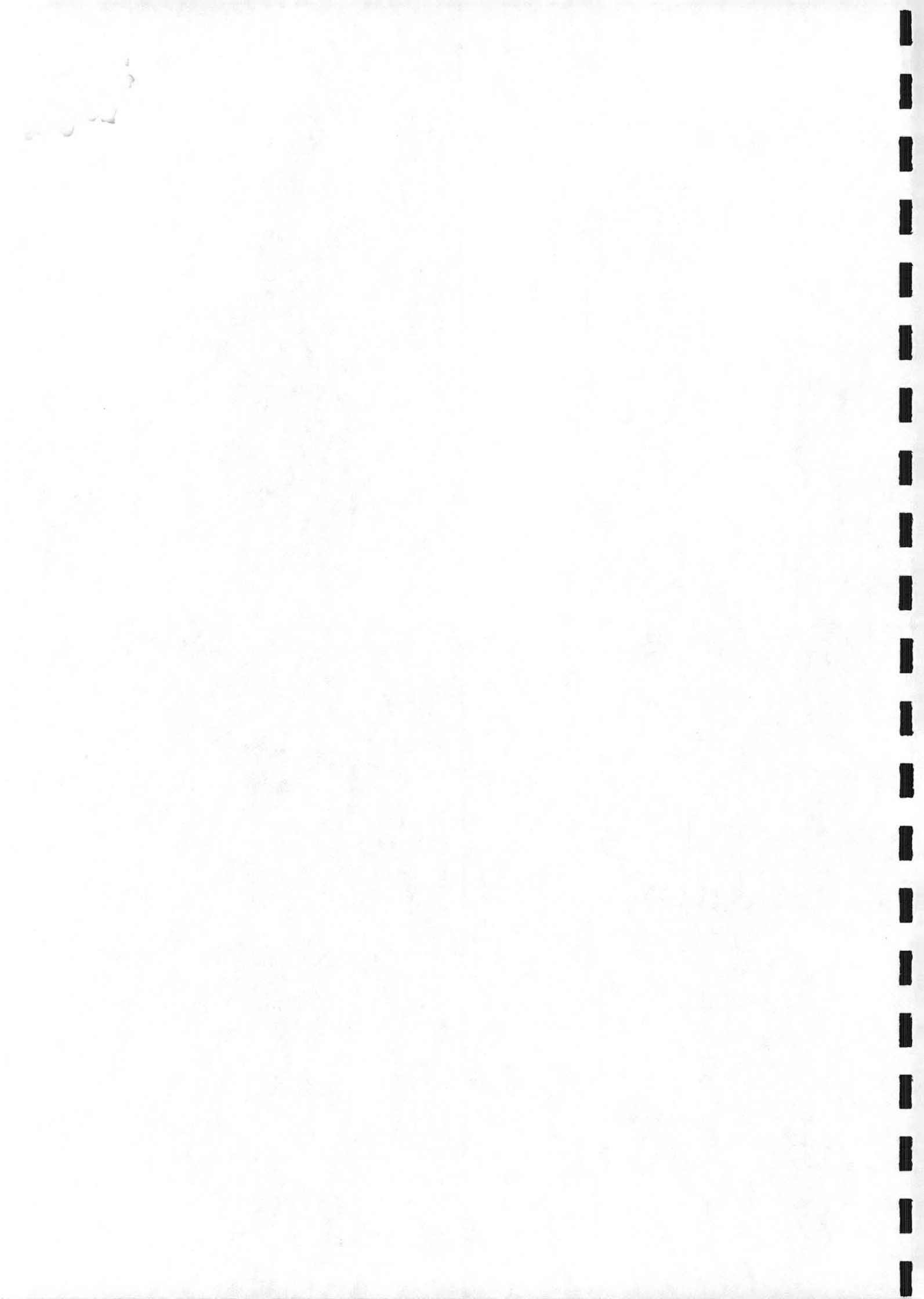
b / Influence de rapprochement des deux mobiles :

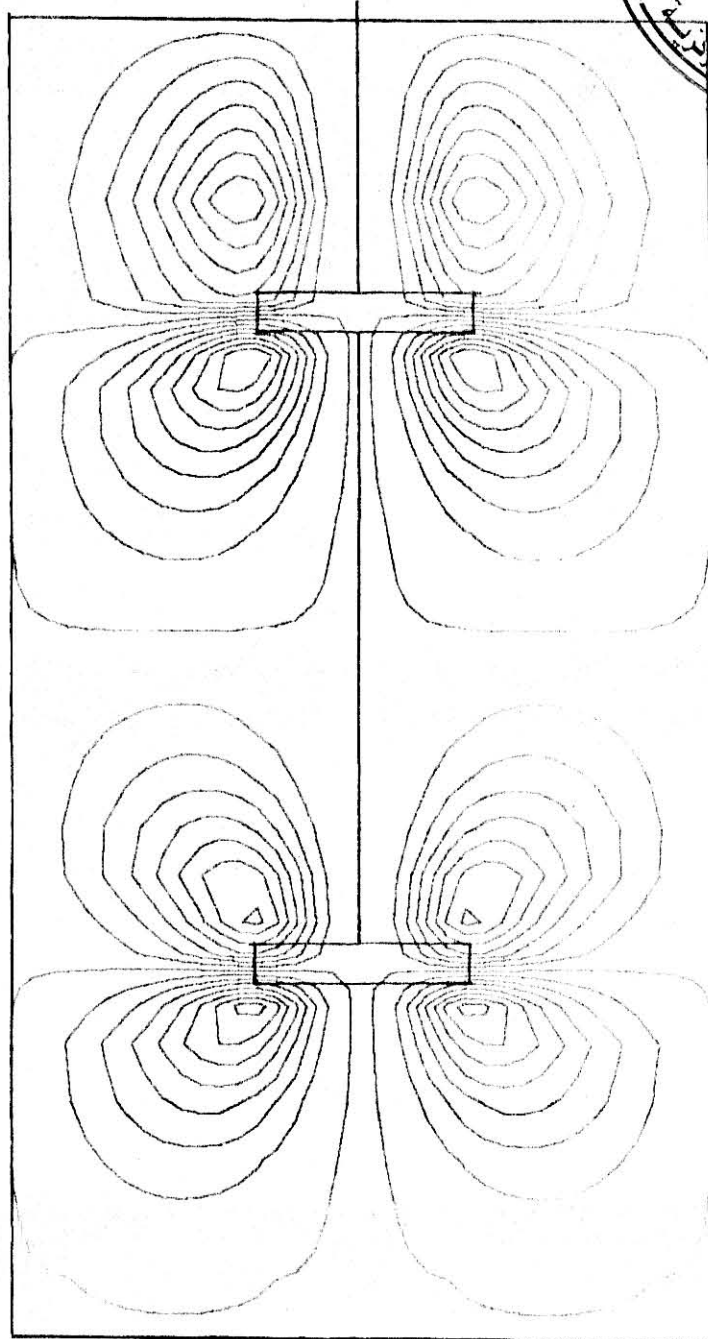
Les figures (5-23), (5-24) et (5-26) sont relatives au cas de deux turbines distantes d'une hauteur égale à leur rayon. Ici, la hauteur de l'installation n'est bien sûr pas un paramètre prépondérant, dans la mesure où l'espace laissé entre la turbine du bas et le fond de la cuve est plus important que la zone d'influence de la turbine. La structure des écoulements n'est pas fondamentalement modifiée par le rapprochement très important des deux mobiles. Les cisaillements dans la zone comprise entre les deux agitateurs sont accrus par rapport au cas précédent, puisque les variations de vitesse sont beaucoup plus rapides dans cet espace confiné. Ceci est lié à une consommation de puissance importante qui apparaît nettement sur la figure (5-26).





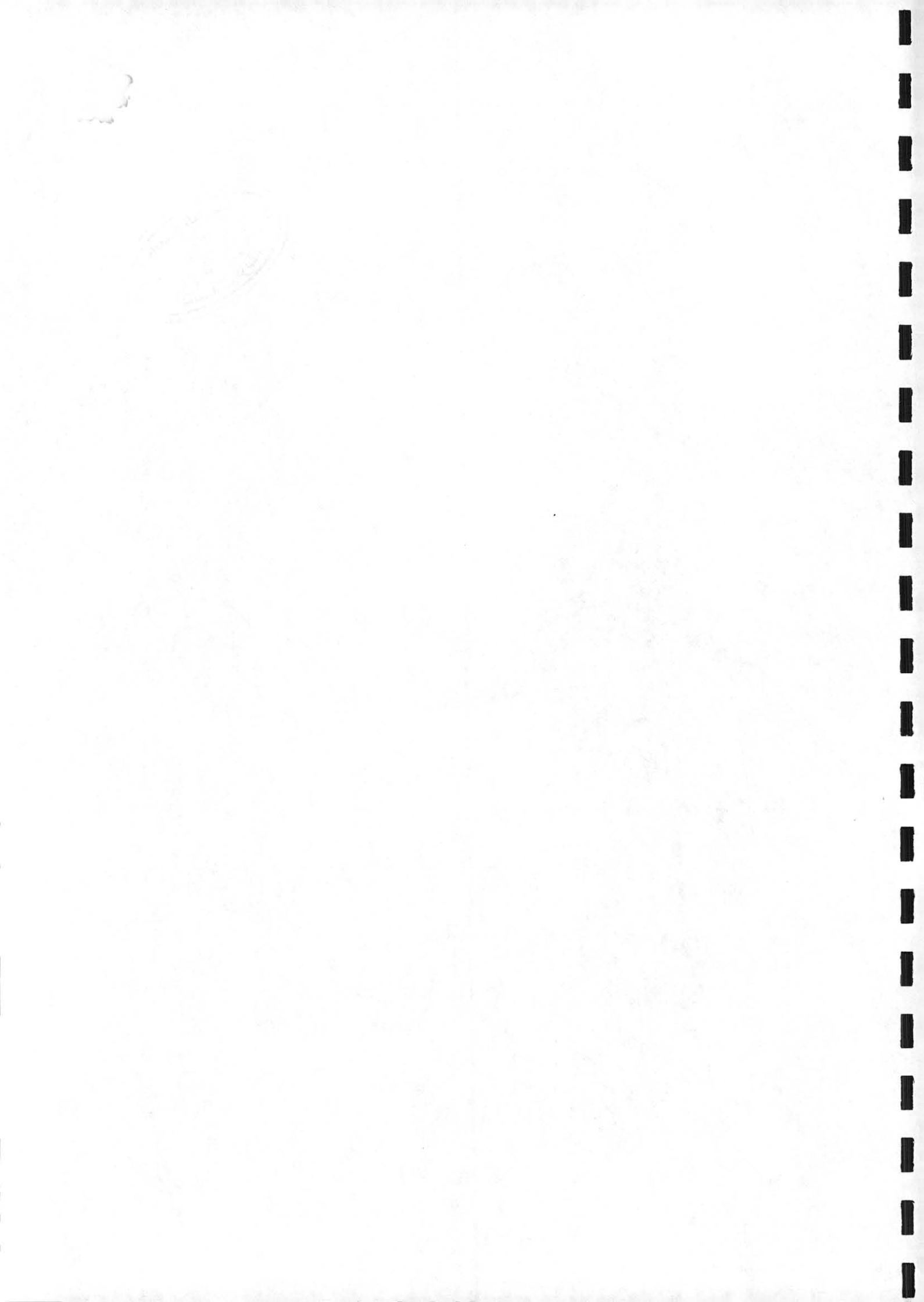
Figure(5-21): Turbine + turbine ** Cuve à fond plat
Projection des vecteurs vitesse dans un plan vertical

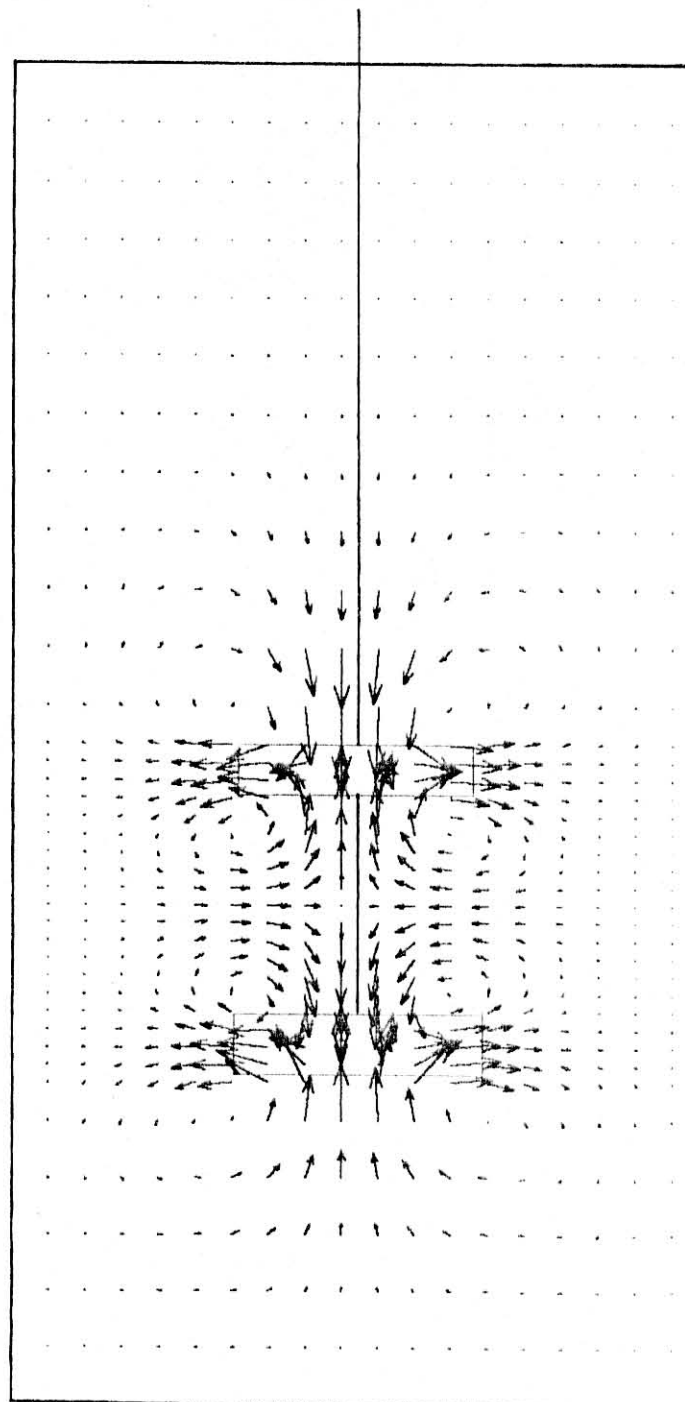




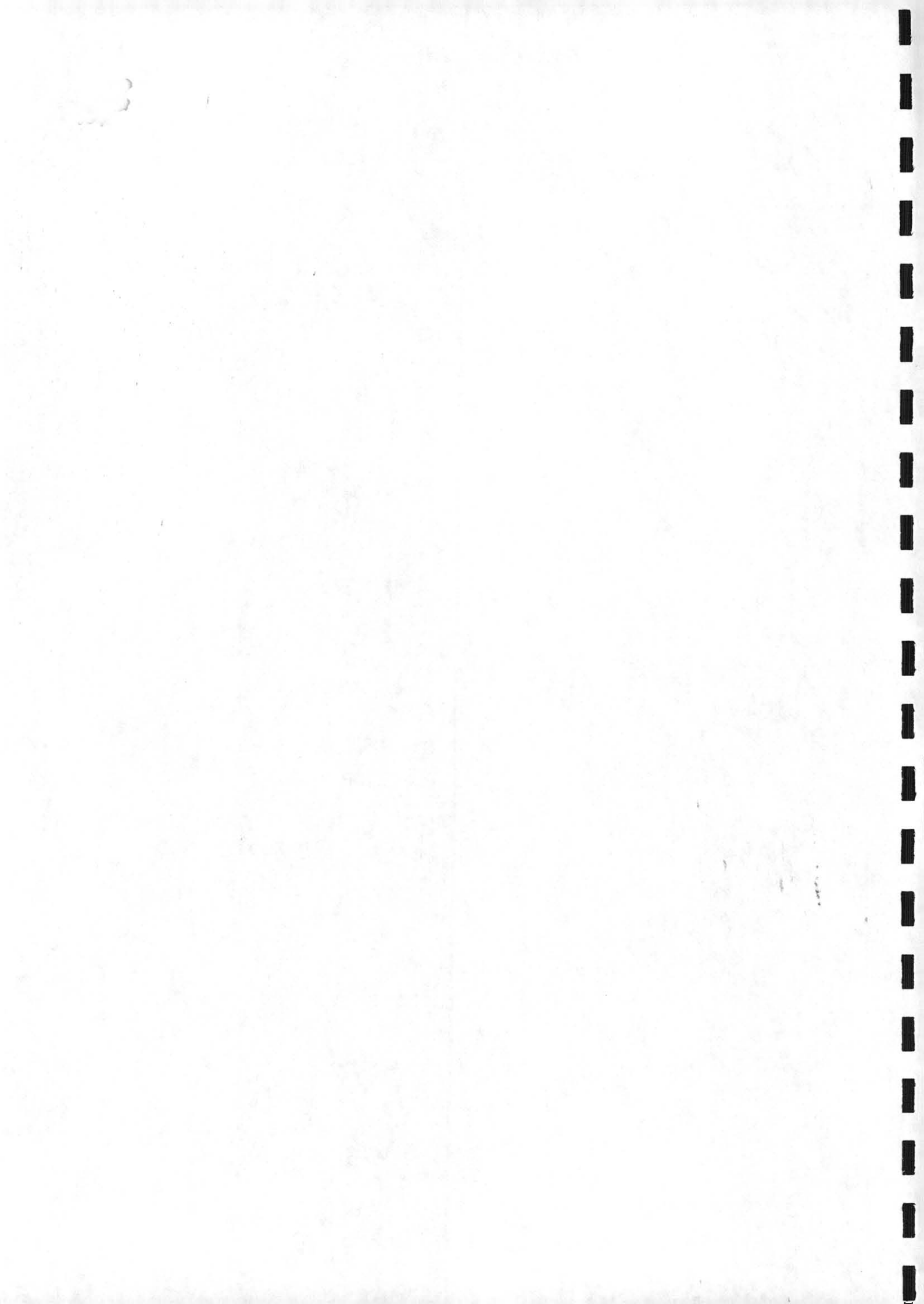
Figure(5-22): Turbine + Turbine l'ond phr

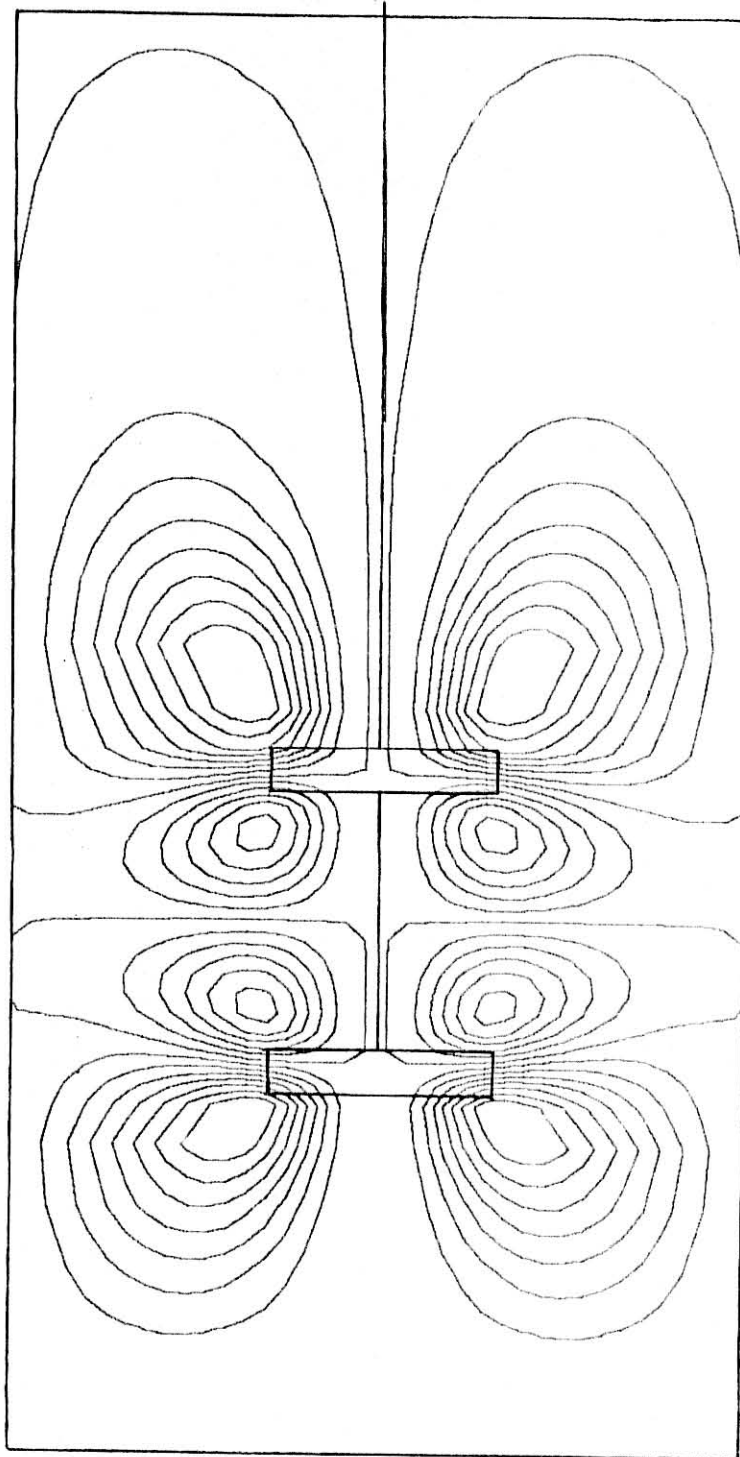
Lignes de courant



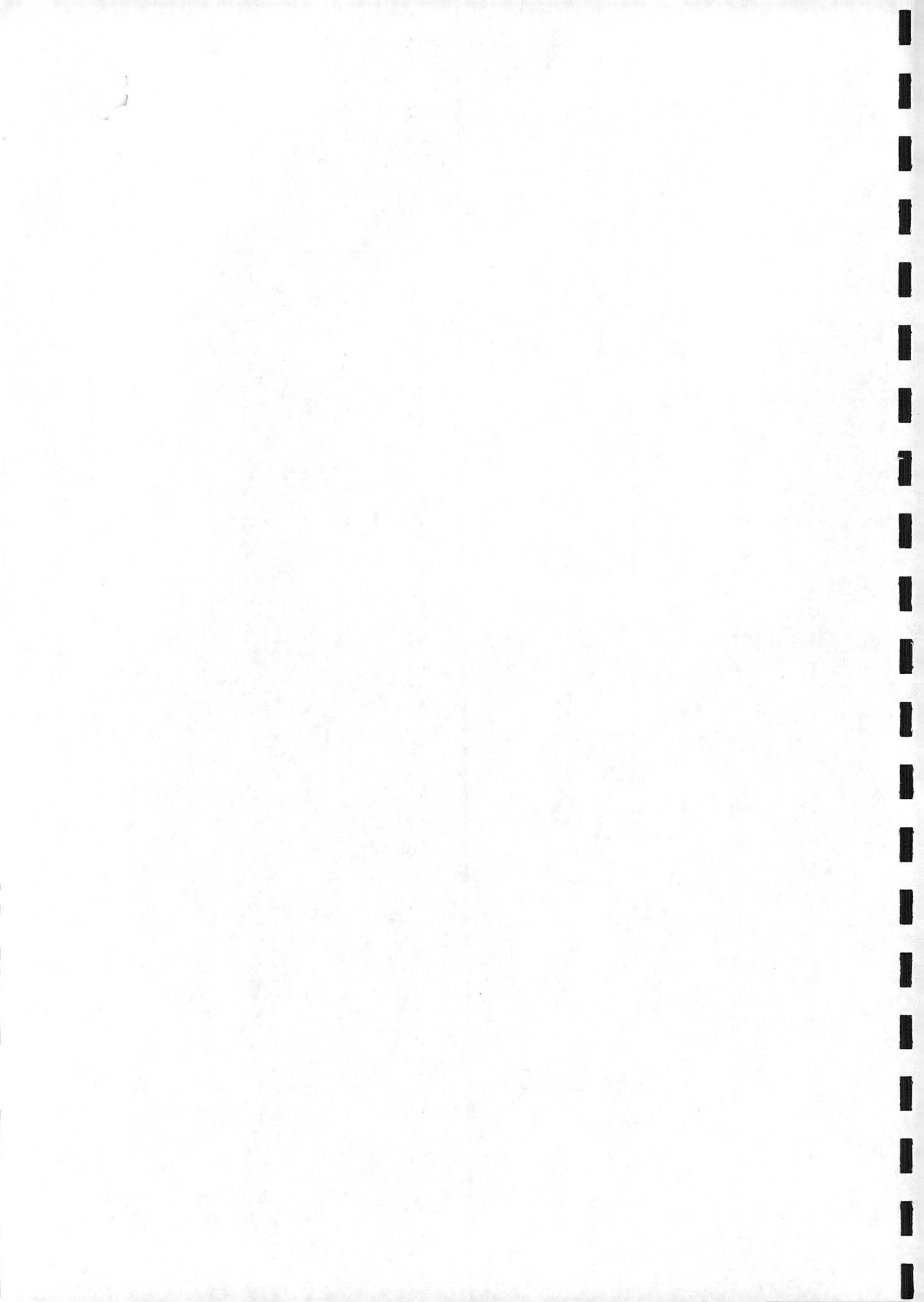


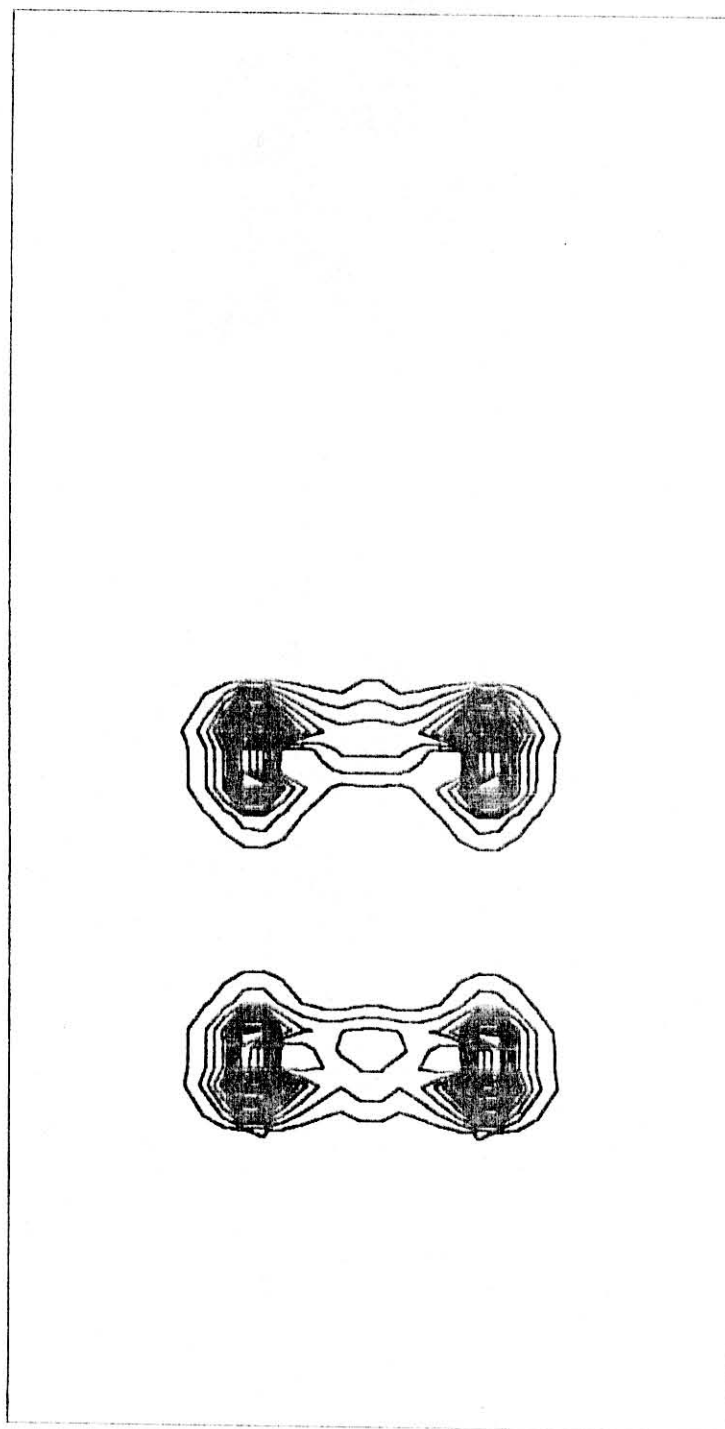
Figure(5-23): Turbine + Turbine + Fond plat
Projection des vecteurs vitesse dans un plan vertical





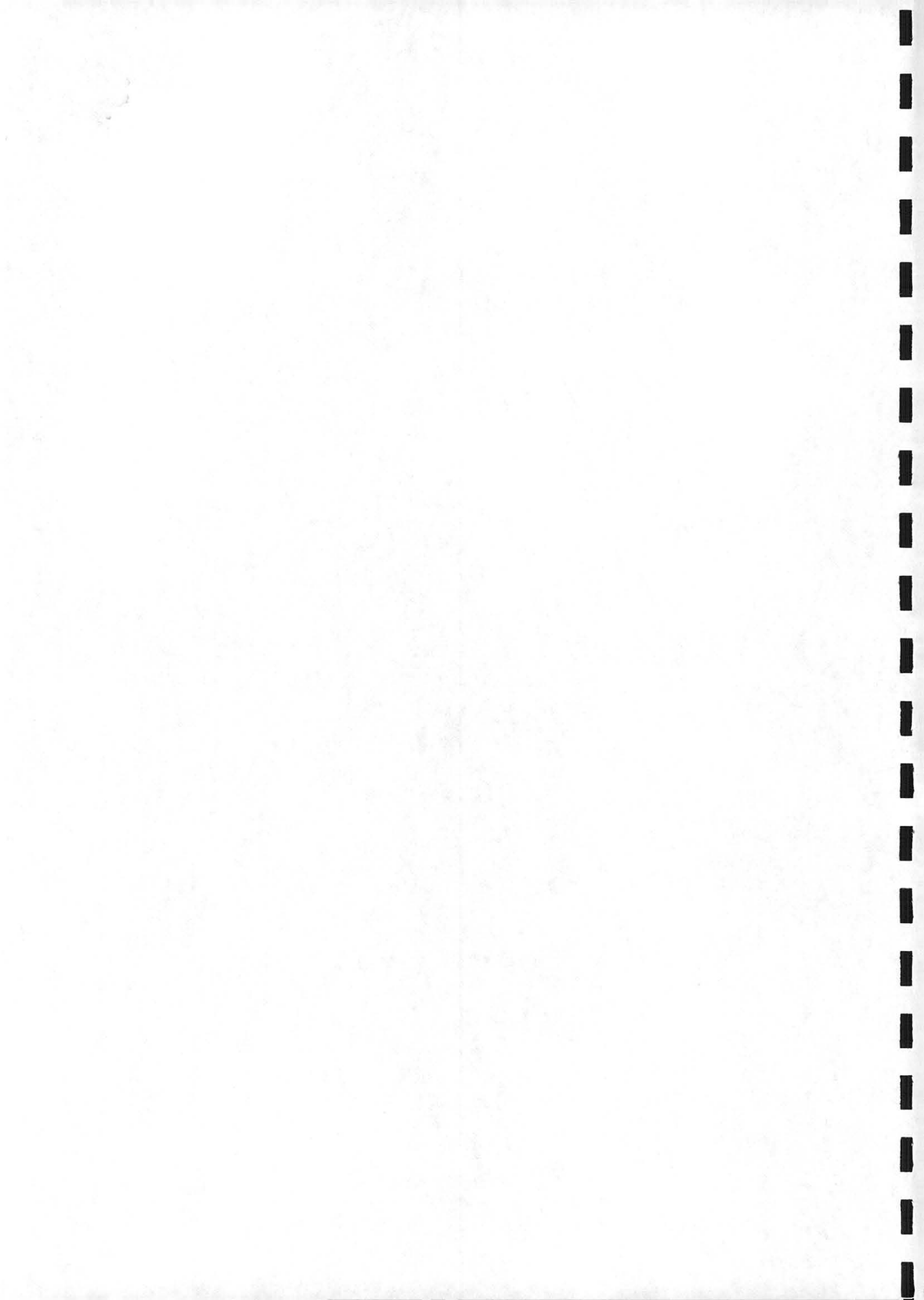
Figure(5-24): Turbine à roue fine et fond plat
Lignes de courant pour deux vitesses de régime





Figure(5-25): Deux turbines rapprocher dans une cuve a fond plat

Lignes d'iso-dissipation visqueuse



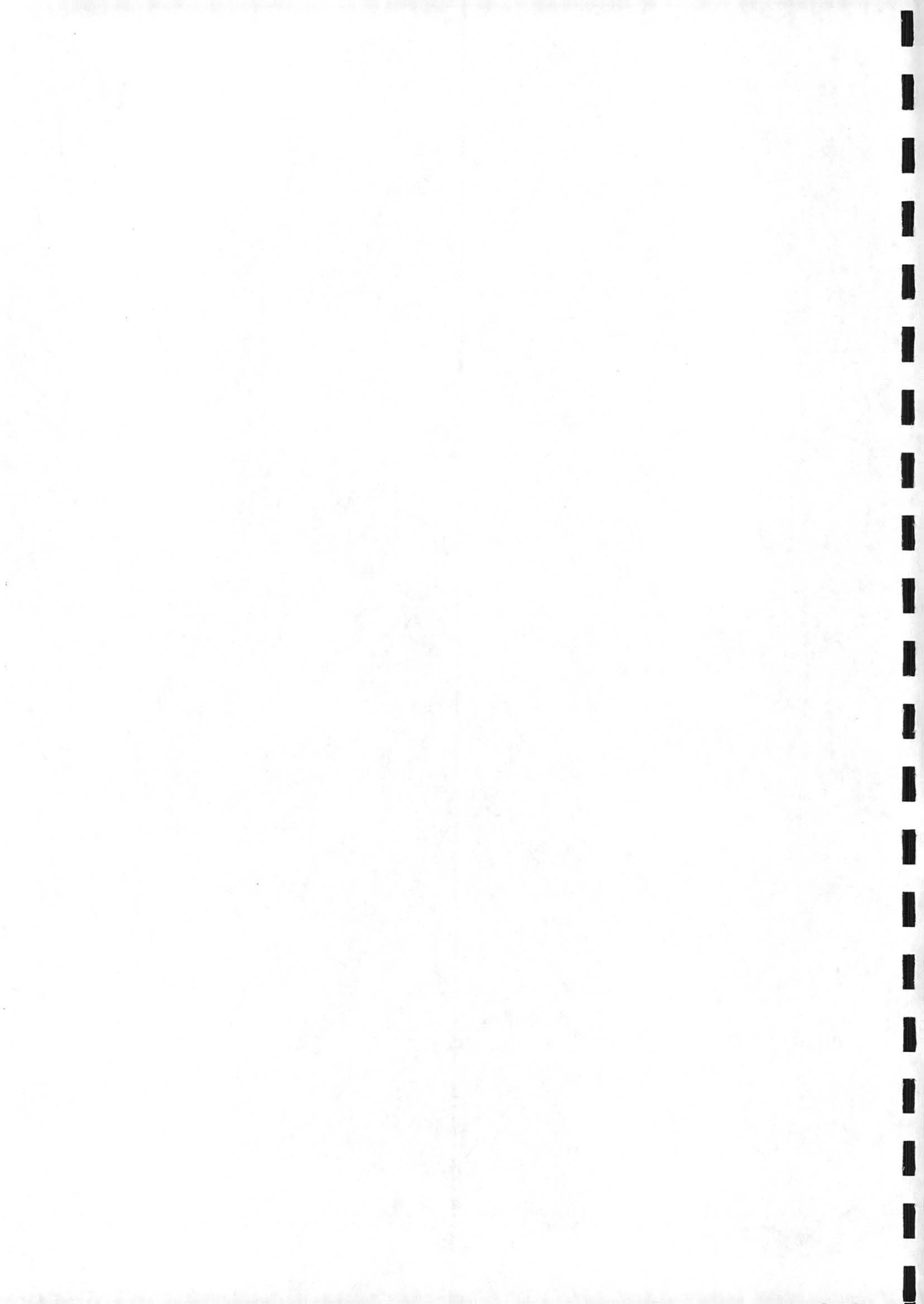
5-2-2/ Système à deux étages: association turbine/hélice

Les combinaisons d'agitateurs de type turbine en partie inférieure de la cuve et hélice au dessus sont retenues afin de créer des circulations importantes dans l'ensemble du volume de la cuve pour maintenir une bonne qualité en terme d'homogénéité tout en assurant du cisaillement dans la zone occupée par la turbine. Ces associations limitent également la consommation de puissance qui devient rapidement prohibitive lorsque l'on a plusieurs turbine (on peut rappeler qu'une turbine de Rushton est caractérisée par un nombre de puissance 5 à 10 fois plus élevé qu'une hélice tripale à pales minces).

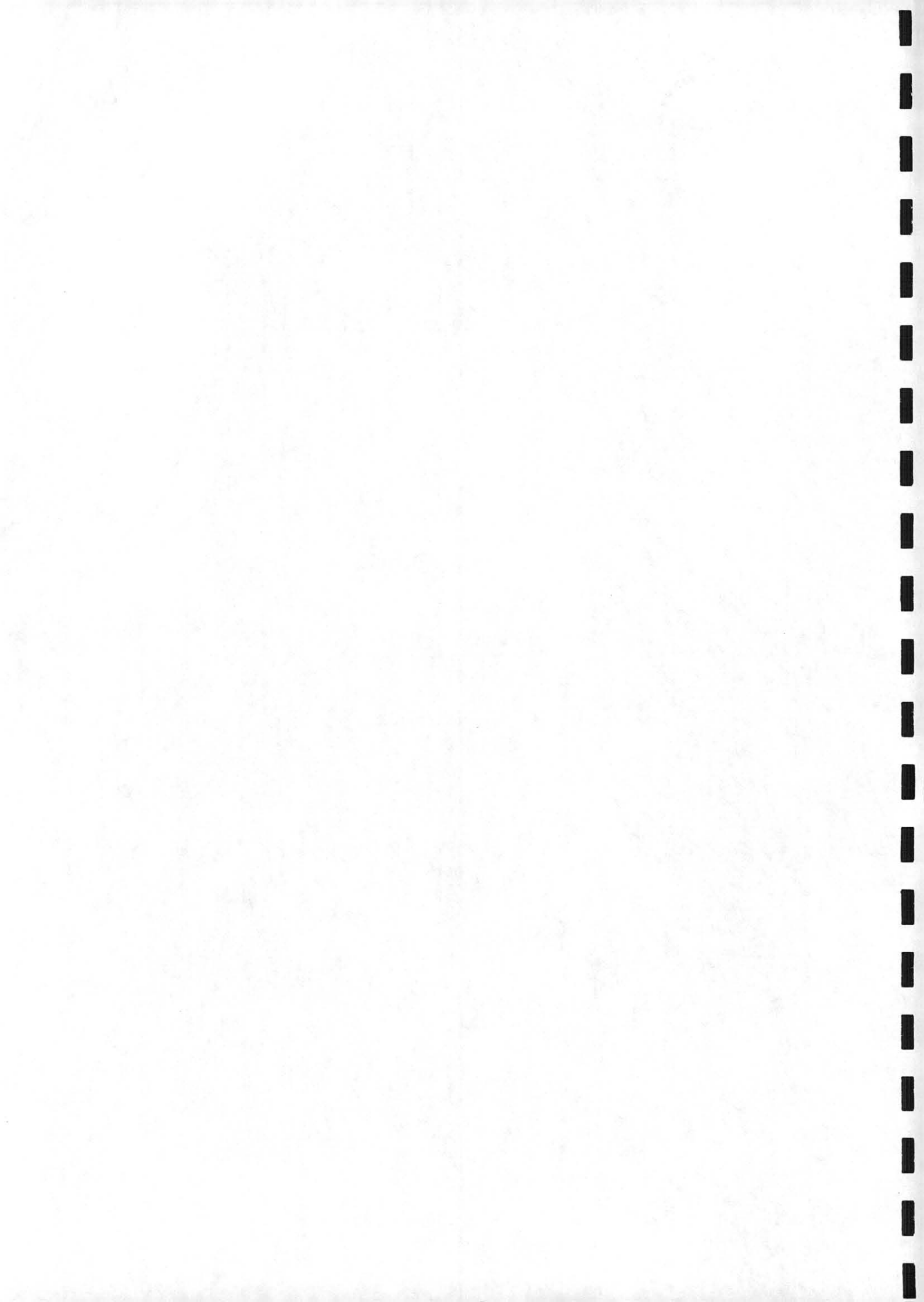
■ Ecoulement :

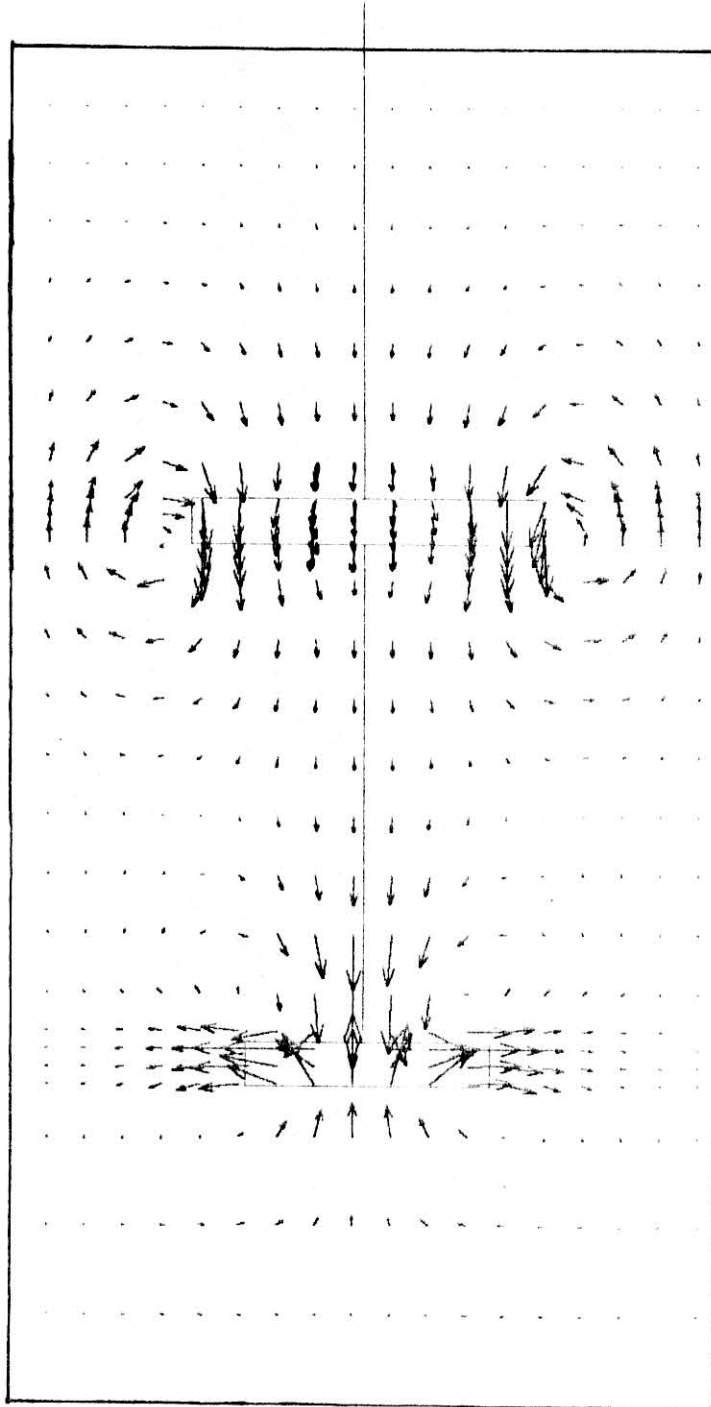
La turbine et l'hélice ont la même vitesse de rotation, et des diamètres différents, selon les normes classiques retenues pour chacun de ces agitateurs ($D_a/D_c = 1/3$ pour la turbine et $1/2$ pour l'hélice). Les deux agitateurs sont régulièrement espacés dans la cuve.

Les écoulements sont représentés dans un plan vertical sur la figure (5-27). Les lignes de courant qui leur sont associées sont reportées sur la figure (5-28). On note qu'une part importante du fluide pris en charge par l'hélice n'est pas reprise par la turbine (lignes fermées sur elle mêmes autour de l'hélice), ce qui signifie que les capacités d'admission de la turbine ne sont pas suffisantes par rapport à celles de refoulement de l'hélice, et que l'espacement entre les mobiles est certainement trop important pour que ce type d'agencement soit efficace et corresponde aux attendus. On pourrait préconiser dans ce cas de choisir une hélice ayant un pas moins important (capacités de pompage réduites) et d'en installer deux au dessus de la turbine dont on baisserait la hauteur d'implantation par exemple.



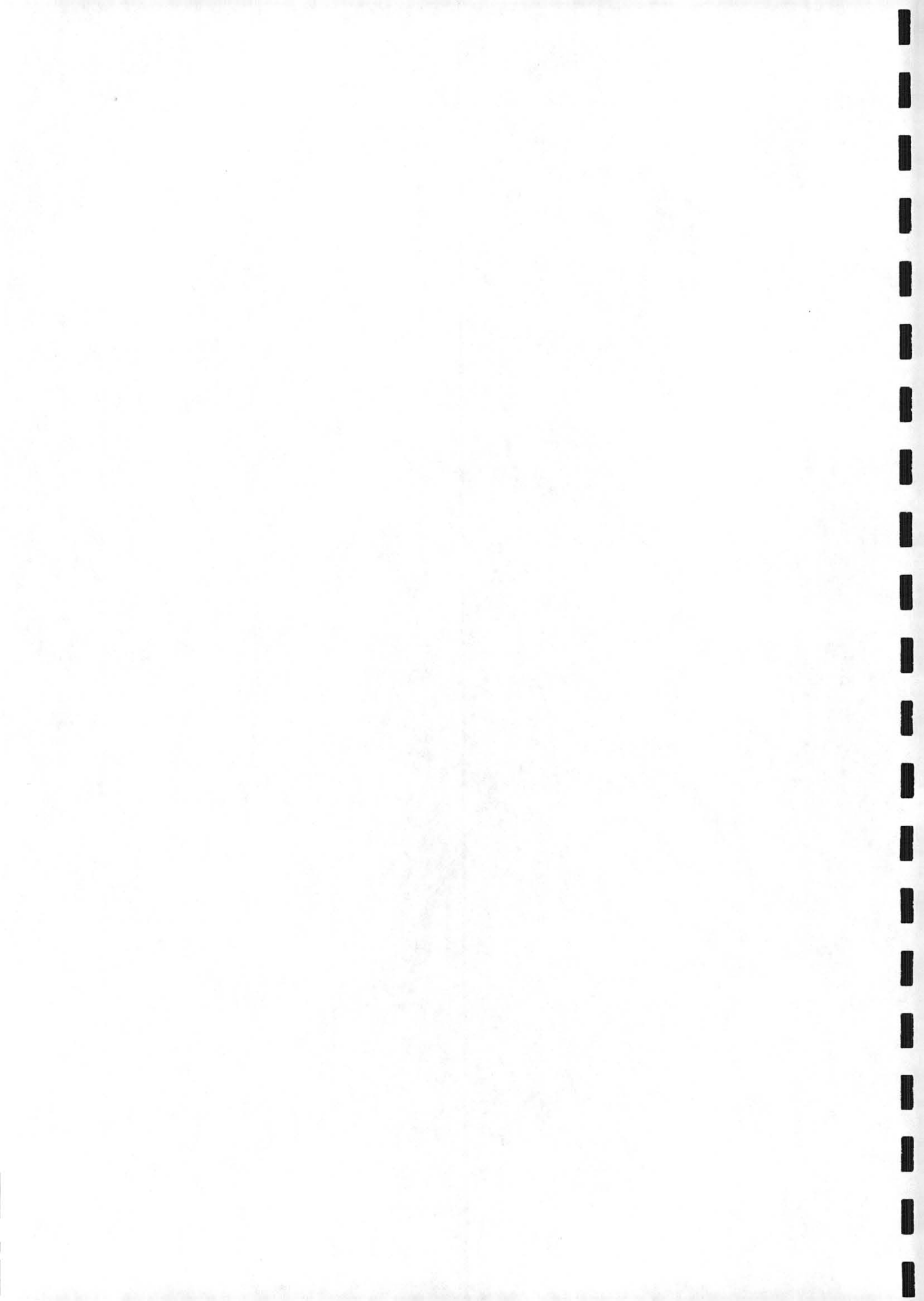
Comme l'on peut s'y attendre, la dissipation de puissance par unité de volume, représentée sur la figure (5-29), se situe pour la plus grande partie dans la zone proche des deux agitateurs, et essentiellement au niveau de la turbine.

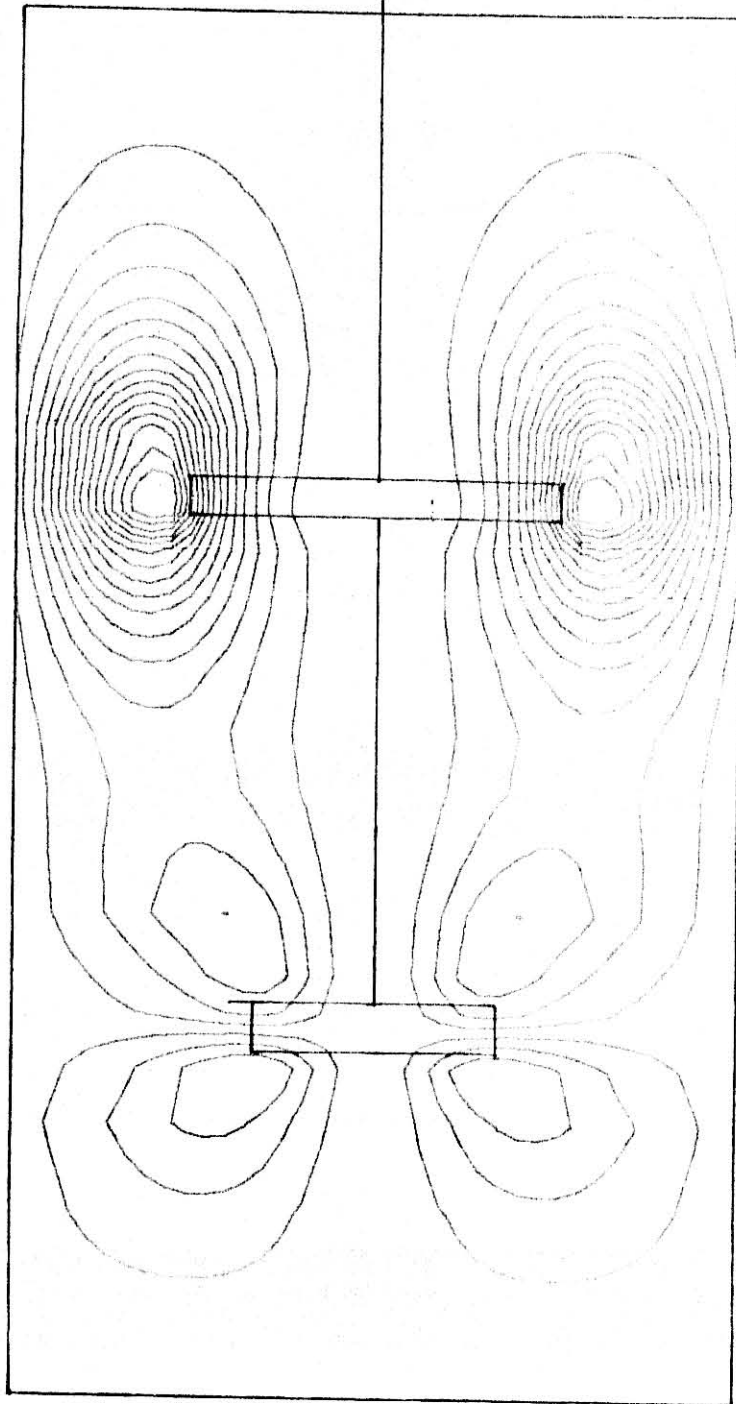




Figure(5-26): Turbine à Hélice sur Fond plat

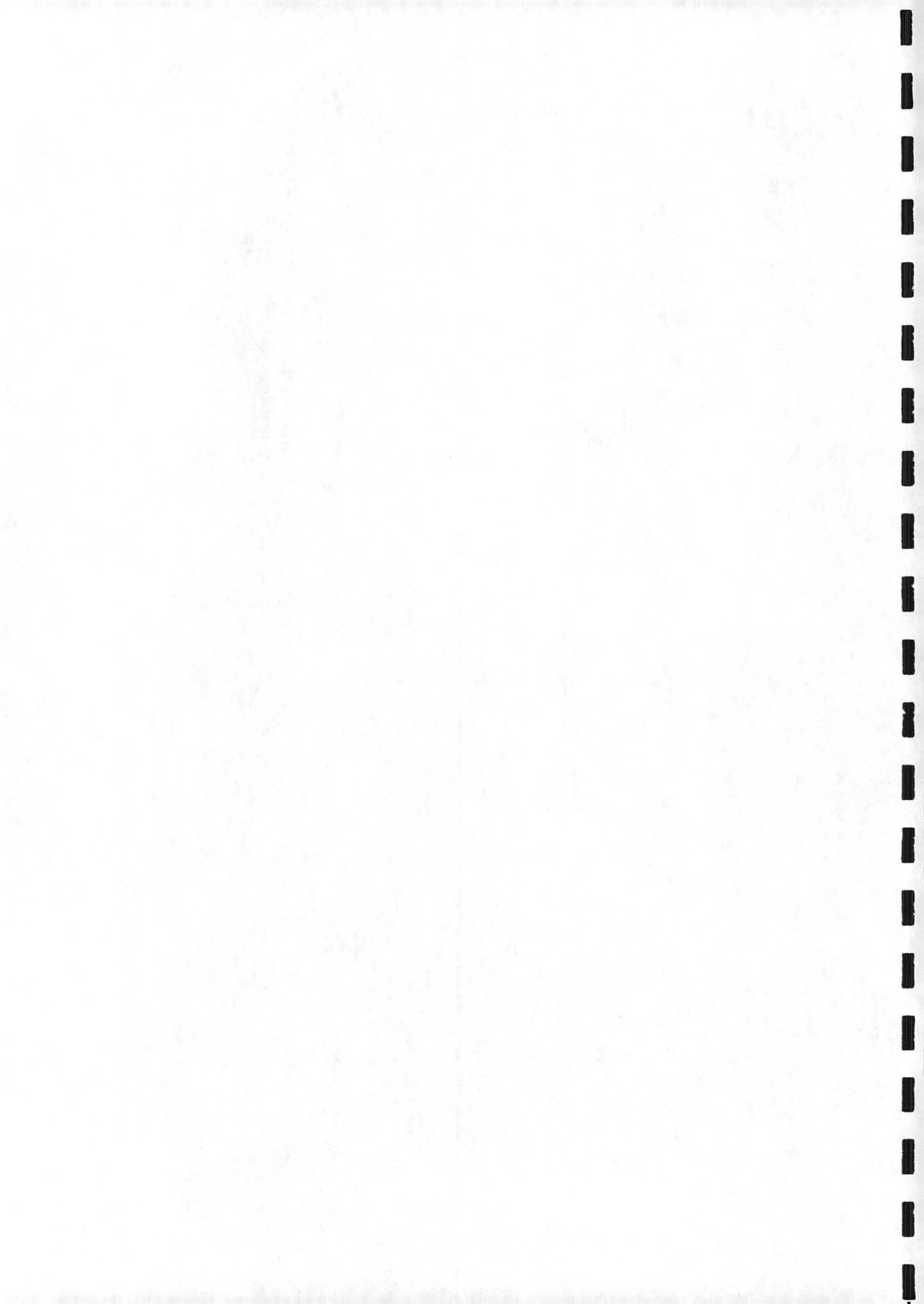
Projection des vecteurs vitesse dans un plan vertical

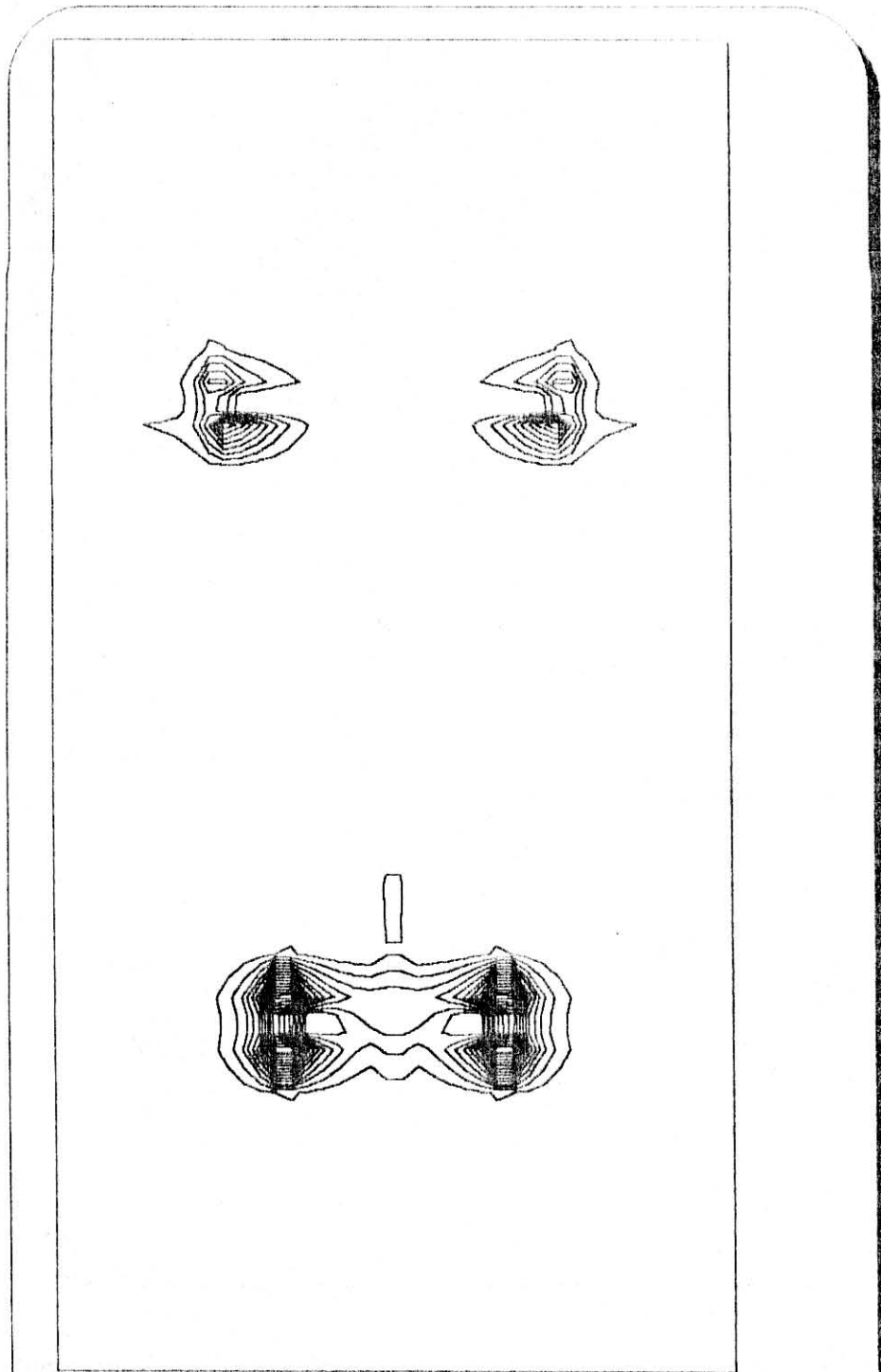




Figure(5-27): Turbine + Holice + Fond plat

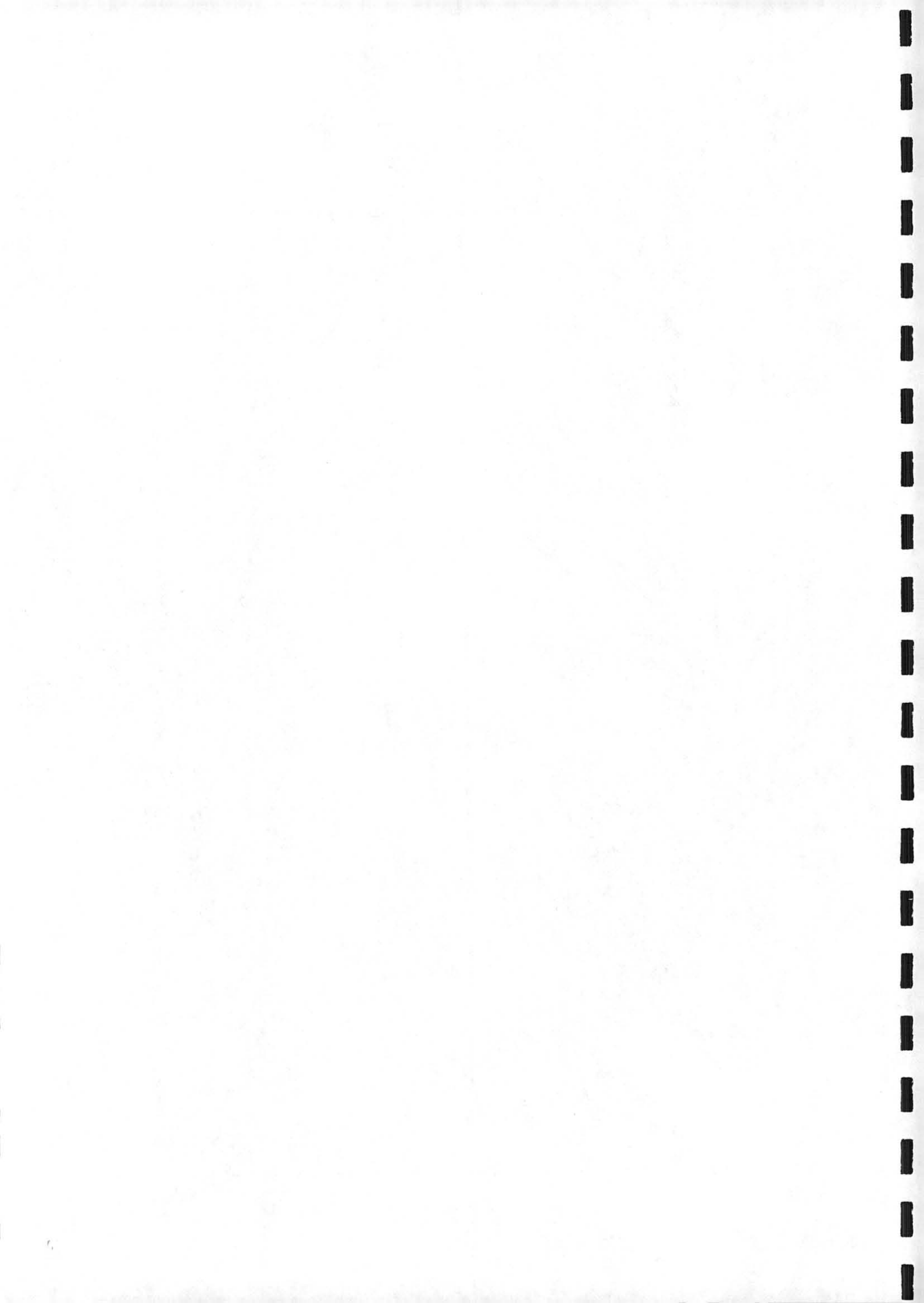
Lignes de courant





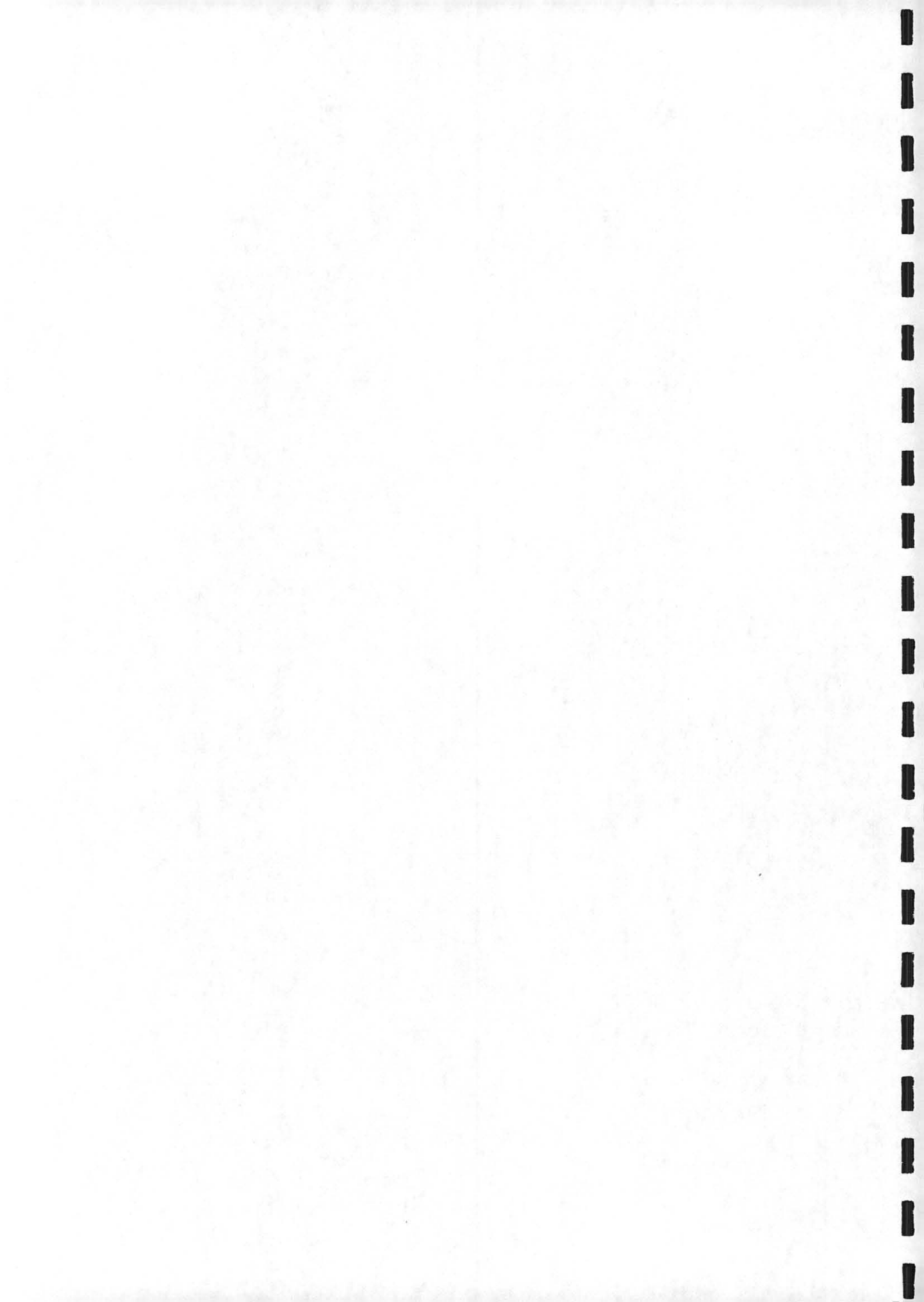
Figure(5-28): Turbine + Helice + Fond plat

Lignes d'iso-dissipation visqueuse



■ Influence du nombre de Reynolds :

Sur la figure (5-30), on visualise les écoulements (sous forme adimensionnelle, rappelons-le) correspondant à un nombre de Reynolds divisé par un facteur 10 par rapport au cas précédent ($Re = 1$). On note pas de différence décelable en première approche entre ces deux conditions de fonctionnement ce qui permettrait de déduire que les grandeurs de mélange macroscopiques, comme le temps de circulation ou le temps de mélange, sont proportionnelles à la vitesse de rotation des mobiles, comme en régime turbulent.



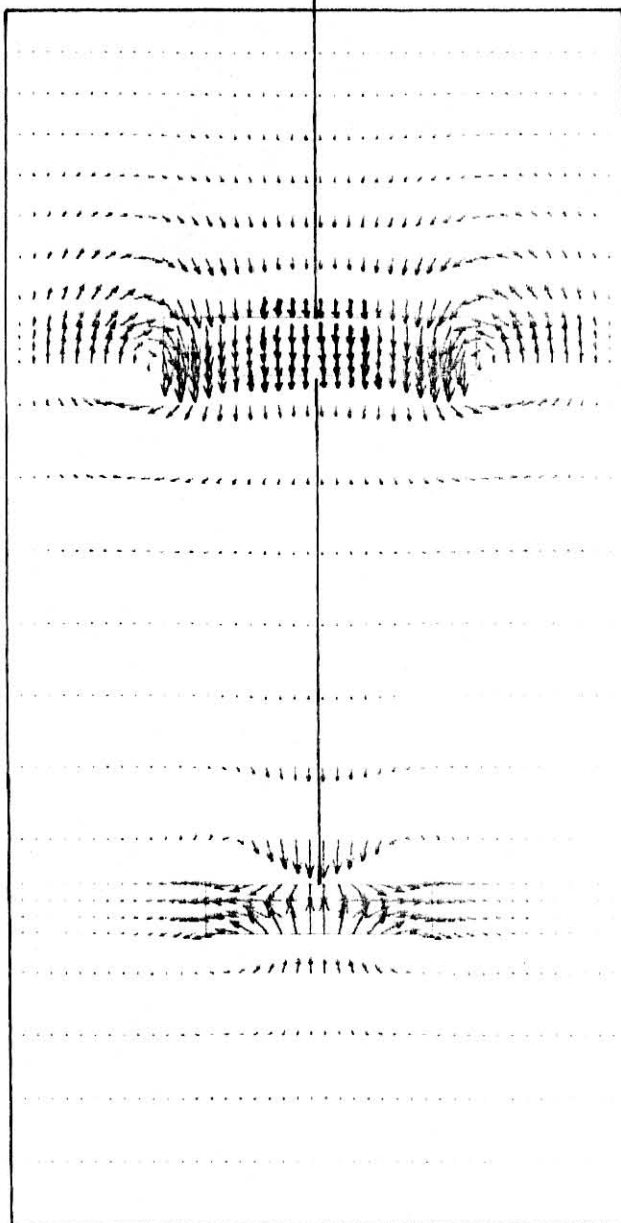
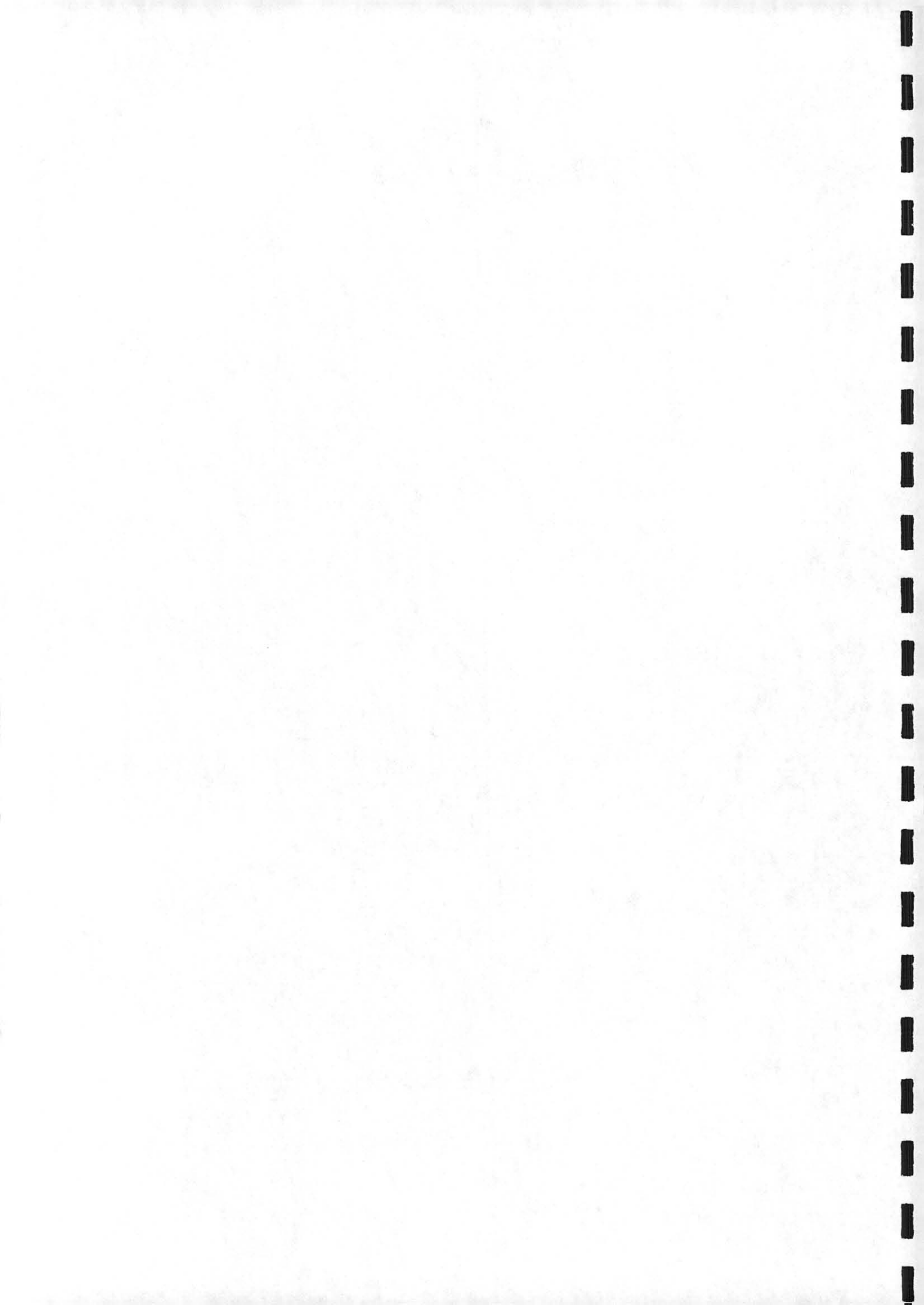


Figure 29: Influence du nombre de pales (F) sur la projection des vecteurs vitesse autour d'une pale verticale.



5-2-3/ Systèmes à trois étages :

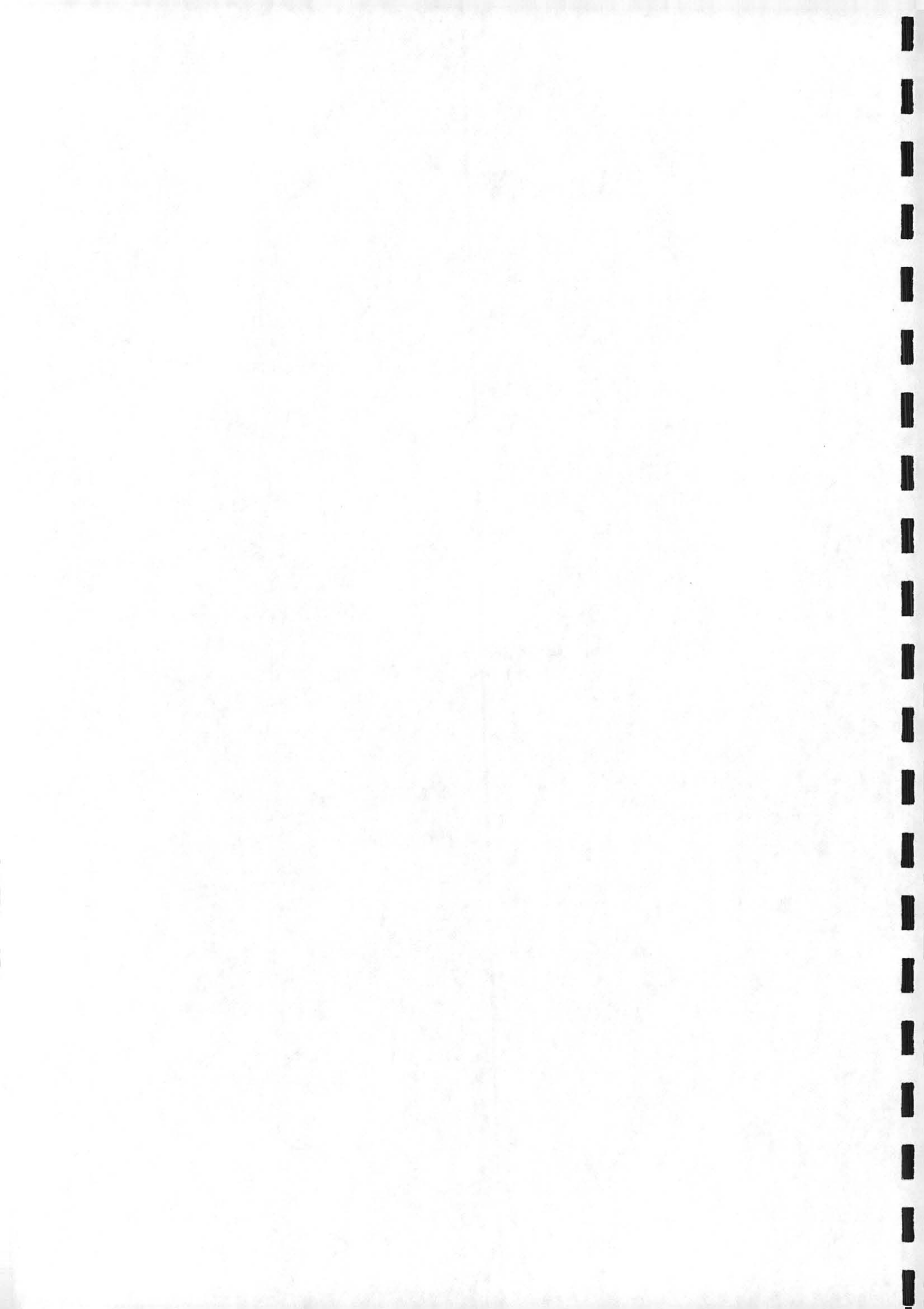
association turbine/hélice/hélice

L'on pourrait bien sûr multiplier à l'infini les associations d'agitateurs dans des géométries de cuve très différentes. Nous nous arrêterons néanmoins au cas d'une turbine surmontée de deux hélices, implantée dans une cuve dont la hauteur est égale à trois fois le diamètre, ce qui correspond à des géométries industrielles assez souvent rencontrées ; cela nous permettra également de visualiser les phénomènes engendrés par la juxtaposition de deux hélices, que nous n'avions pas encore envisagée.

■ Ecoulements :

Les figures (5-31) et (5-32) représentent respectivement les écoulements et les lignes de courant dans un plan vertical. Dans la partie inférieure de la cuve, les phénomènes sont comparables à ceux que l'on a observés dans le cas précédent (association turbine/hélice). En ce qui concerne la juxtaposition des deux hélices, on note qu'elles ont tendance à s'autoalimenter, ce qui signifie qu'une part importante du fluide ne passe pas à travers les deux hélices consécutivement. Ce phénomène est lié au fait que le flux descendant engendré par les hélices n'est pas assez focalisé vers le pas, et que les "fuites" radiales se produisent très près du mobile. Pour limiter cela, il conviendrait par exemple de rapprocher les mobiles l'un de l'autre.

La figure (5-33) représente la dissipation de puissance par unité de volume. On note que les deux hélices ont une contribution identique quant à la consommation énergétique, et que la turbine engendre la dissipation la plus importante.



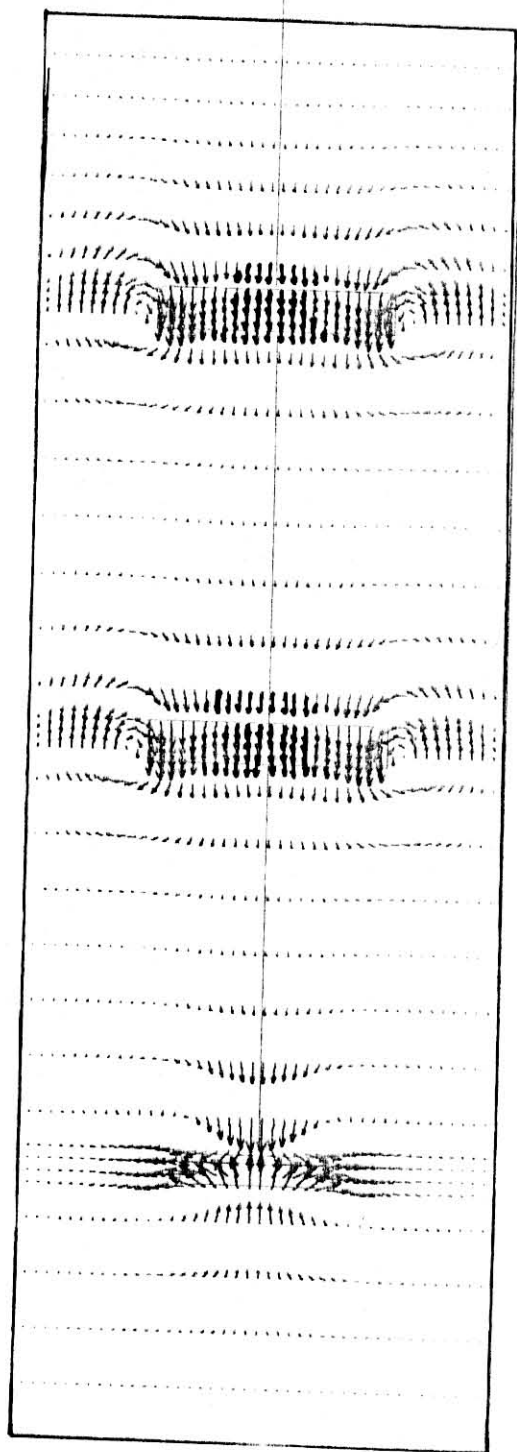
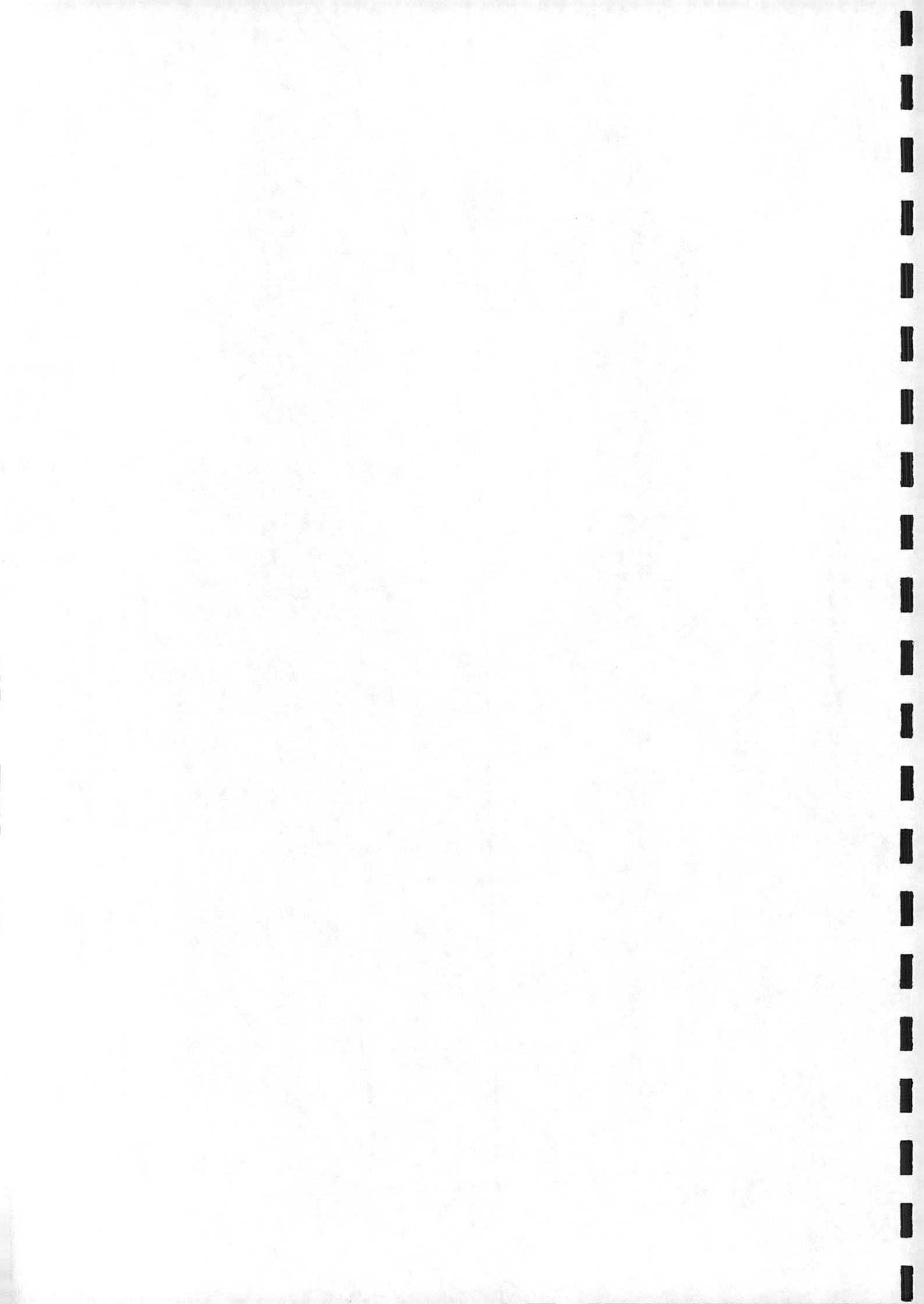
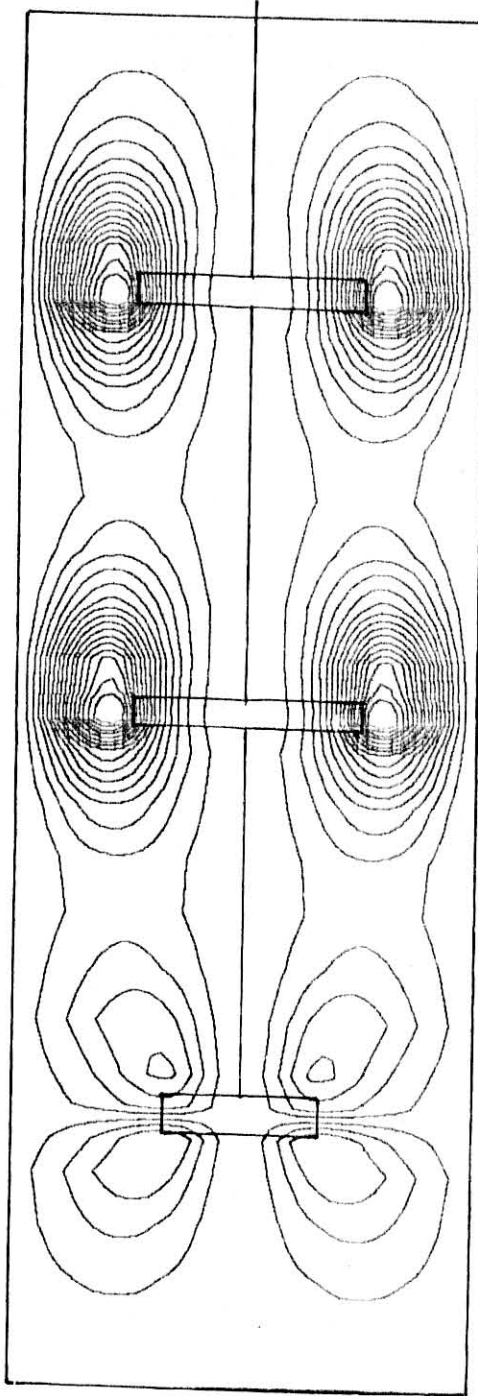


Figure (h 50): Turbome + deux hélices en E and p-h

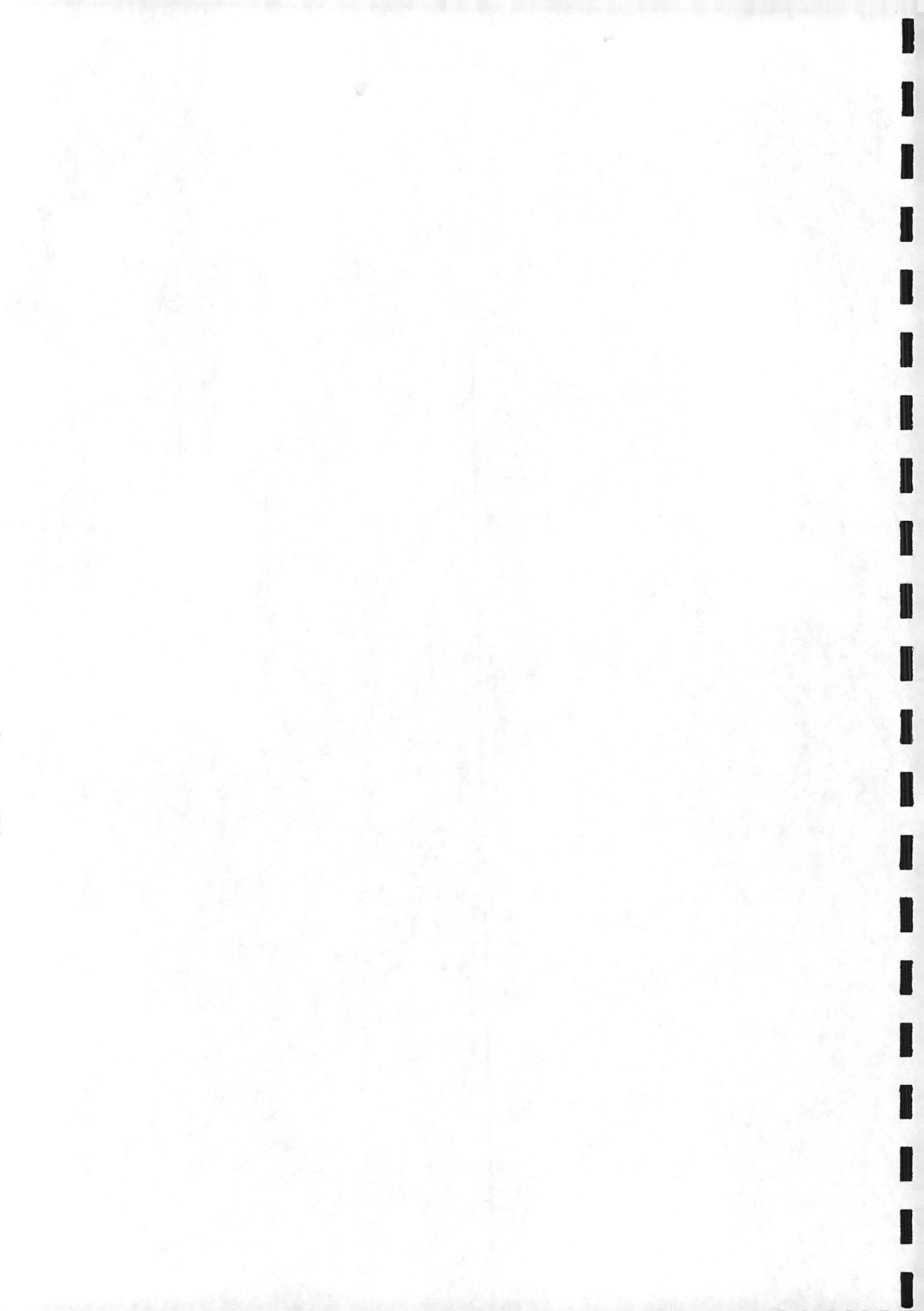
Projection des vecteurs vitesse dans un plan vertical

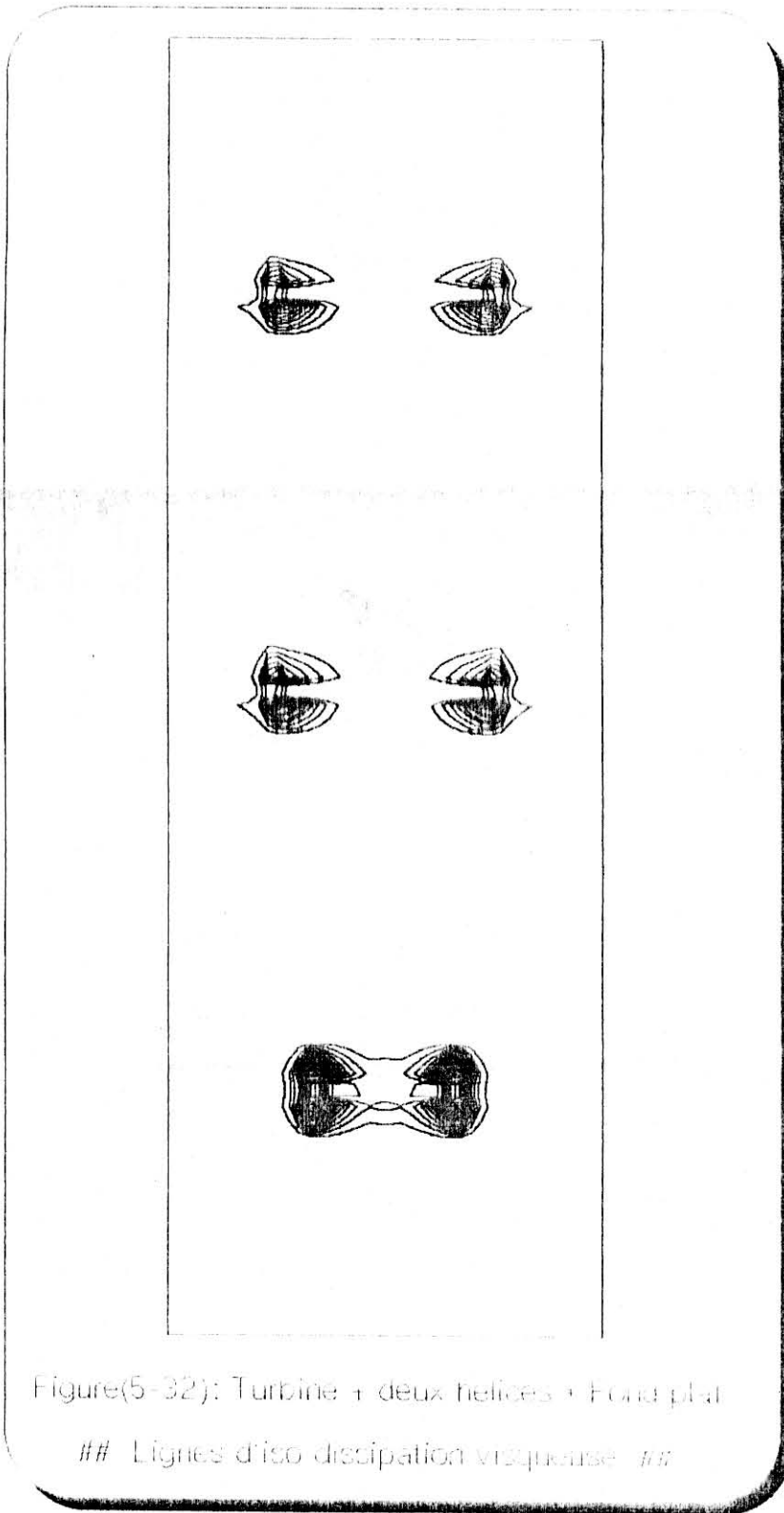


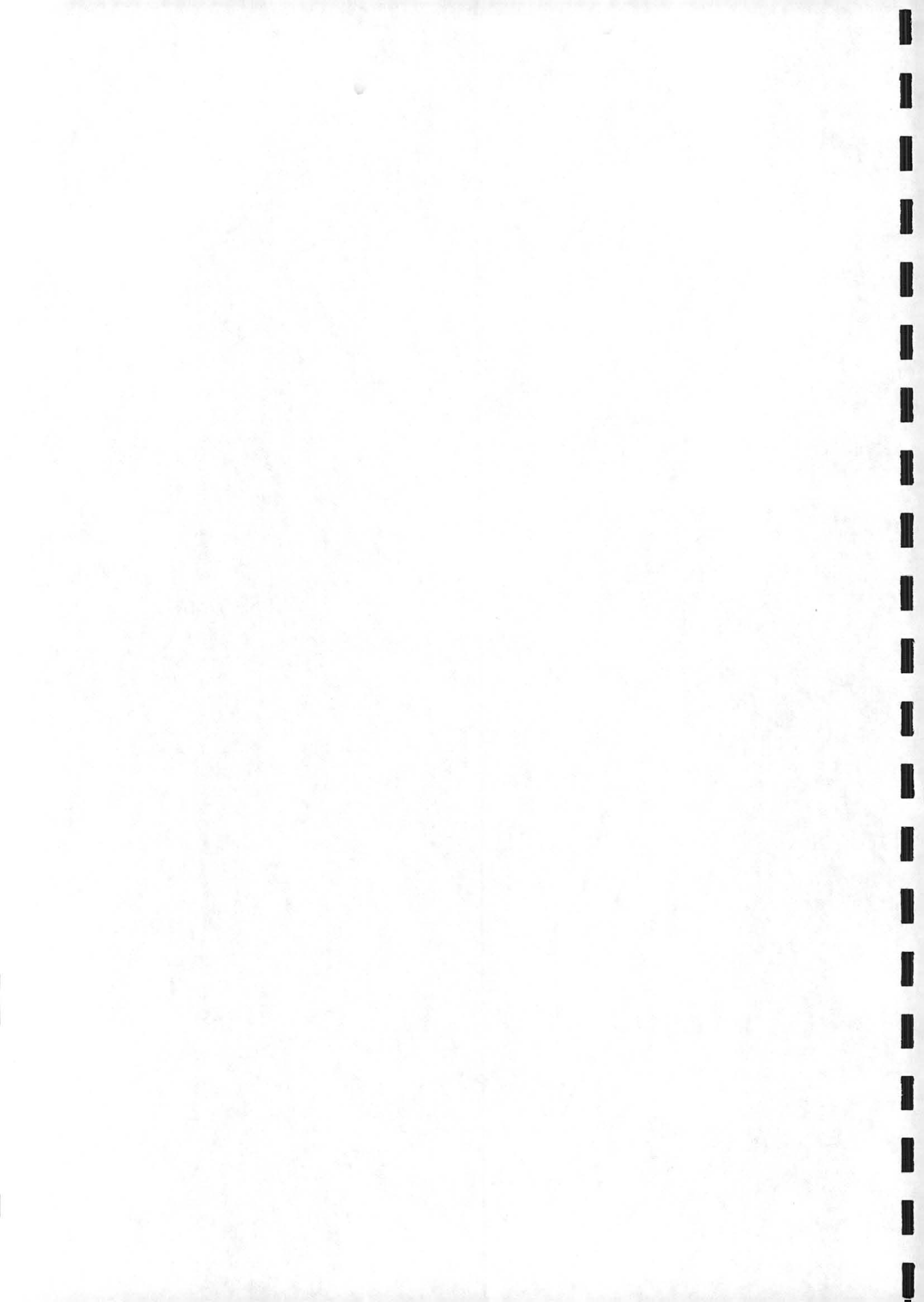


Figure(5-31): Turbine à hélice à réaction sur un plan plat

Lignes de courant





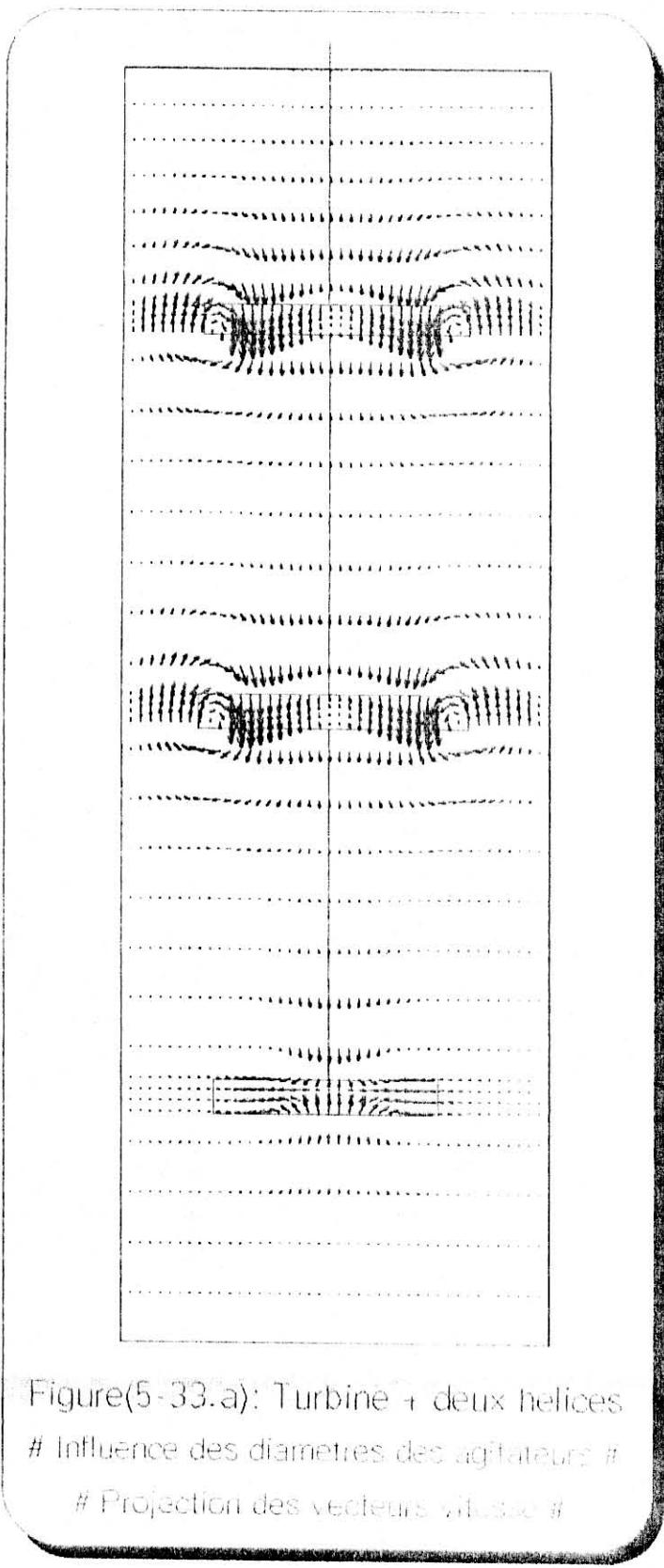


■ Influence du diamètre des agitateurs :

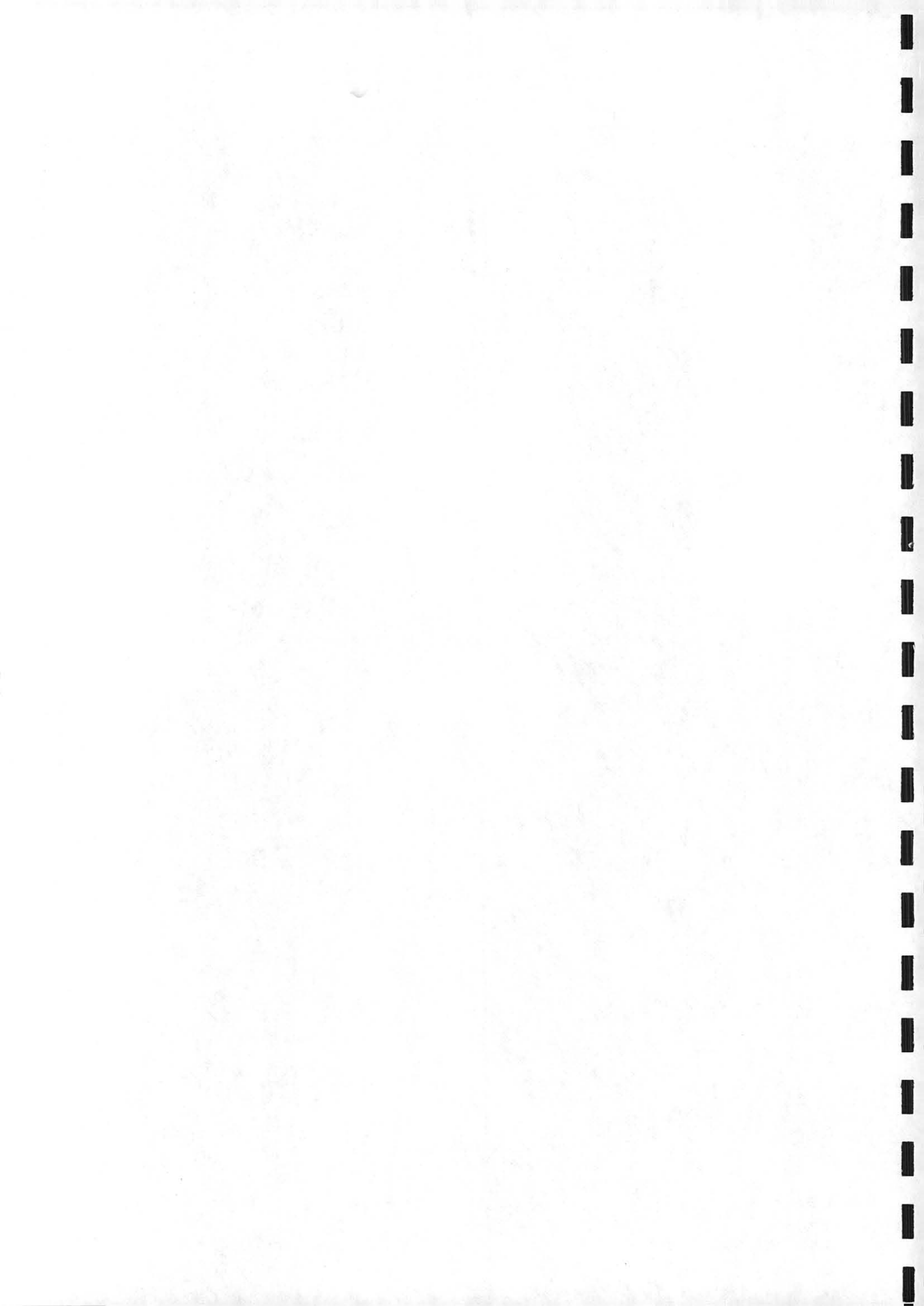
Il arrive fréquemment que les utilisateurs choisissent d'augmenter les diamètres des mobiles d'agitation pour améliorer les performances de mélange de leurs installations. Nous avons donc envisagé le cas d'une cuve de même géométrie que précédemment, mais équipée d'une turbine telle que $D_a/D_c = 1/2$, surmontée de deux hélices pour lesquelles $D_a/D_c = 0.7$, caractérisées par un débit de pompage du même ordre que celui engendré par les hélices de plus petite dimension. Le nombre de Reynolds reste égale à 10.

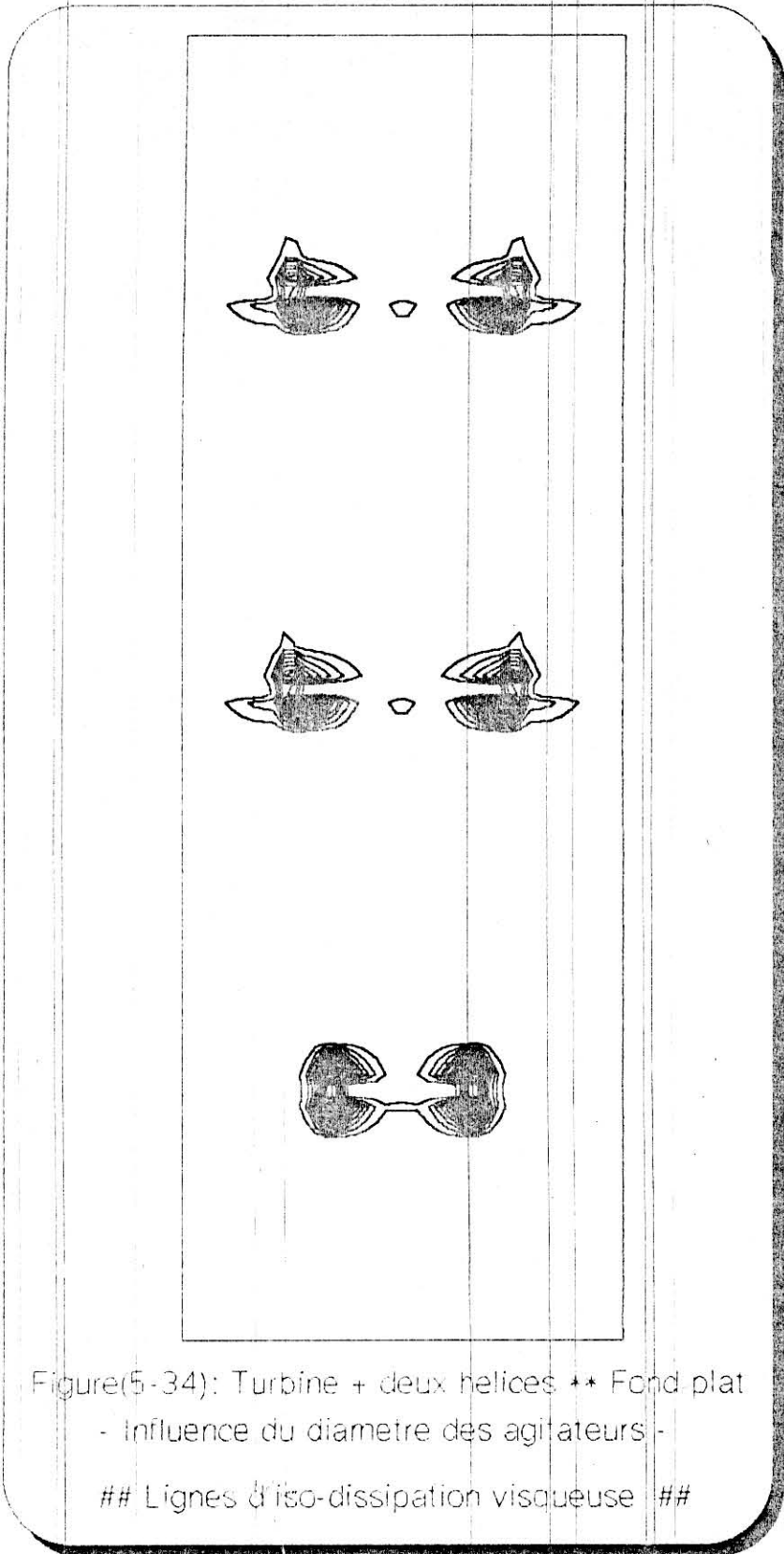
La figure (5-34) représente la projection des vecteurs vitesse dans un plan vertical. On note qu'il n'y pas de modification importante du type des écoulements ; en particulier, l'auto-alimentation des hélices n'a pas été supprimée. On note toutefois sur la figure (5-35) l'augmentation de la dissipation de puissance près des parois au niveau d'implantation des deux hélices, due à la faible section de passage laissée au fluide pour remonter vers la surface.

La zone de la cuve la moins concernée par le mélange demeure la partie supérieure, près de la surface libre.

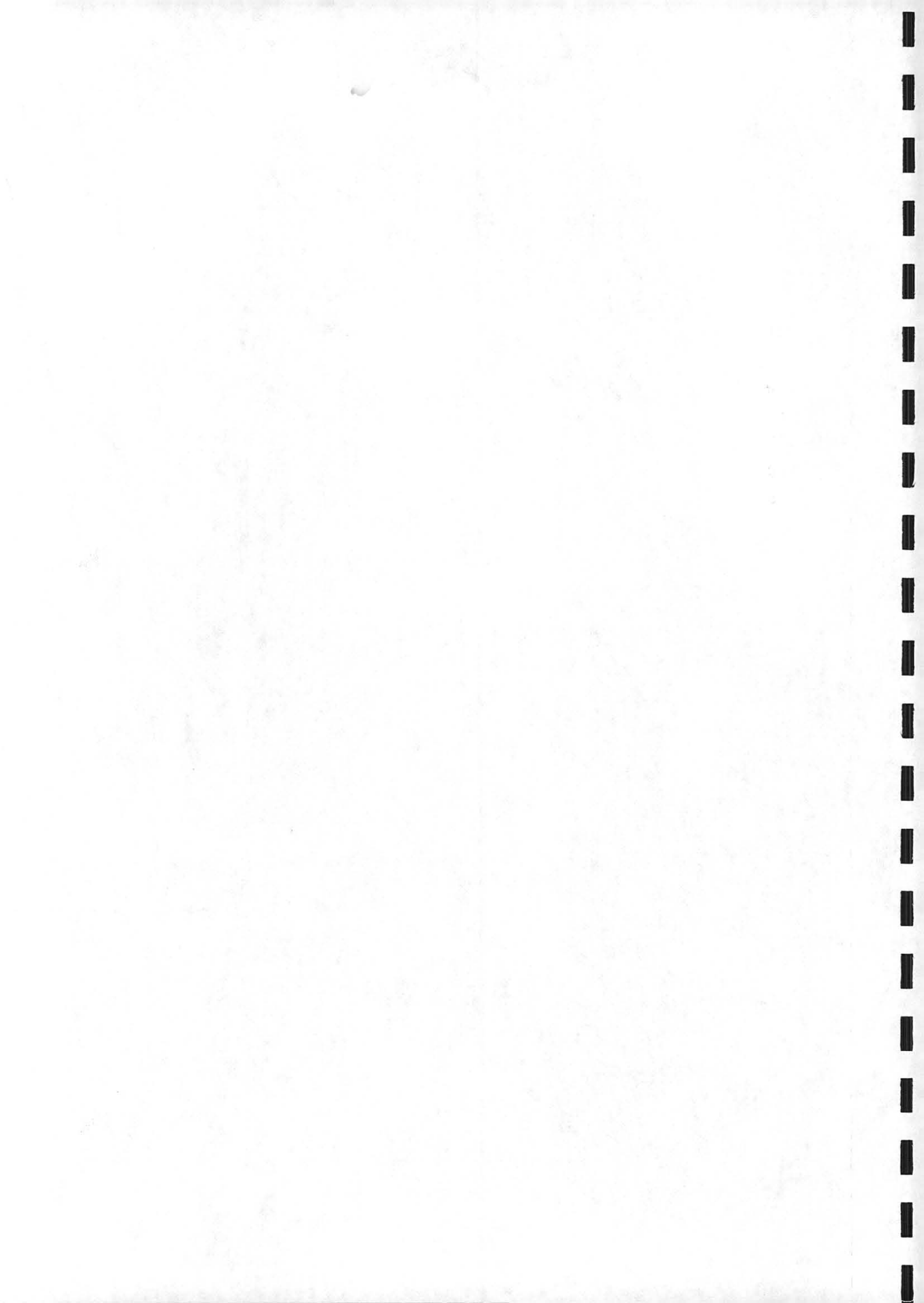


Figure(5-33.a): Turbine + deux helices
Influence des diametres des agitateurs #
Projection des vecteurs vitesse





Figure(5-34): Turbine + deux hélices ** Fond plat
- Influence du diamètre des agitateurs -
Lignes d'iso-dissipation visqueuse



5-3/ PUISSANCE DISSIPEE :

La puissance nécessaire au fonctionnement de l'agitateur dans une cuve de dimensions données peut être calculée à partir des champs de vitesse comme nous l'avons déjà développé dans un chapitre précédent.

Nous présentons sur la figure (5-36) une comparaison du nombre de puissance obtenu expérimentalement [7] et numériquement pour une hélice à pales minces. Ses caractéristiques correspondent à une cuve de 200 litres équipée d'un fond conique. La taille de l'hélice est définie par le rapport $D_a/D_c = 0,5$. Elle est implantée à mi-hauteur dans la cuve. Le pas de l'hélice est égale à 0,5.

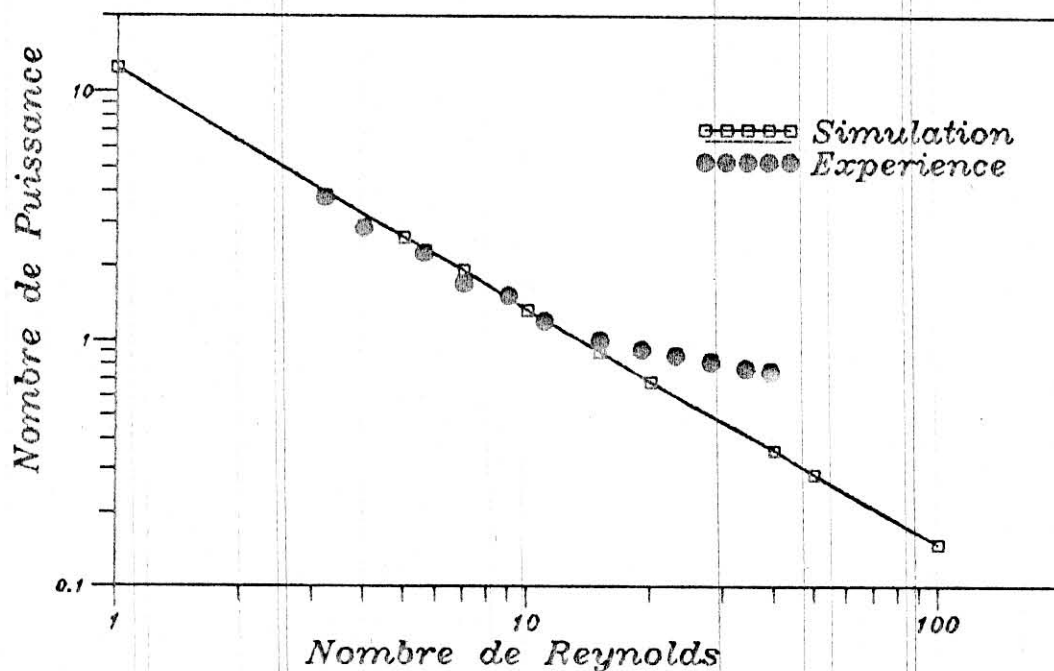


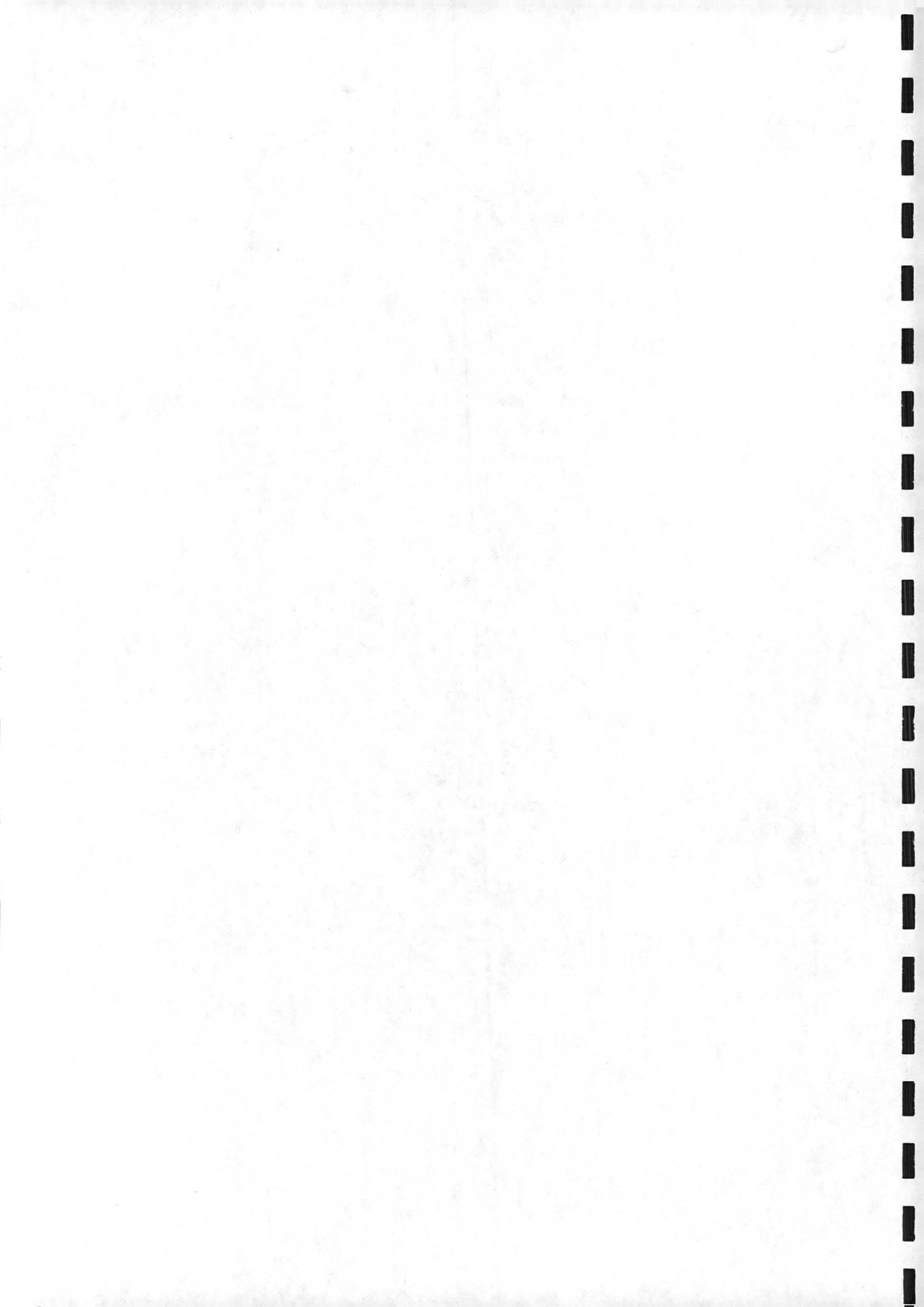
Figure (5-36) : Comparaison des nombres de puissance dans une cuve sans chicanes à fond conique (Hélice)

La cuve, non chicanée pour l'occasion, est remplie d'une solution newtonienne de glucose dilué, de telle façon que la gamme du nombre de Reynolds étudiée corresponde bien au régime pleinement laminaire ; on note d'ailleurs expérimentalement qu'au delà d'une valeur du nombre de Reynolds égale à 20, il y a apparition du régime transitoire.

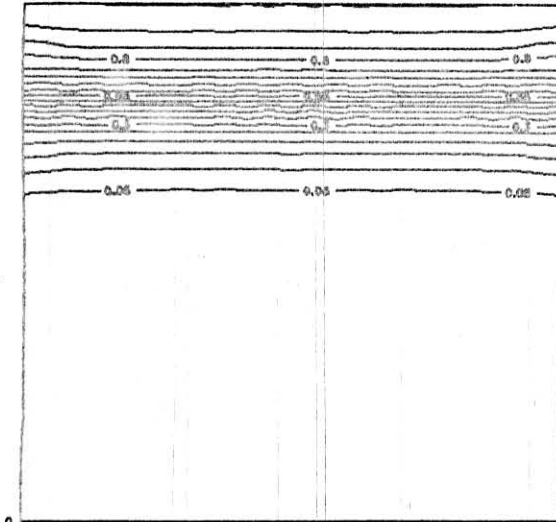
De façon globale, l'accord entre les résultats issue de notre modélisation et ceux issus de l'expérience est satisfaisant. Une adéquation encore meilleure pourrait certainement être obtenue en affinant le calcul au niveau des mailles frontières.

5-4 / TEMPS DE MELANGE :

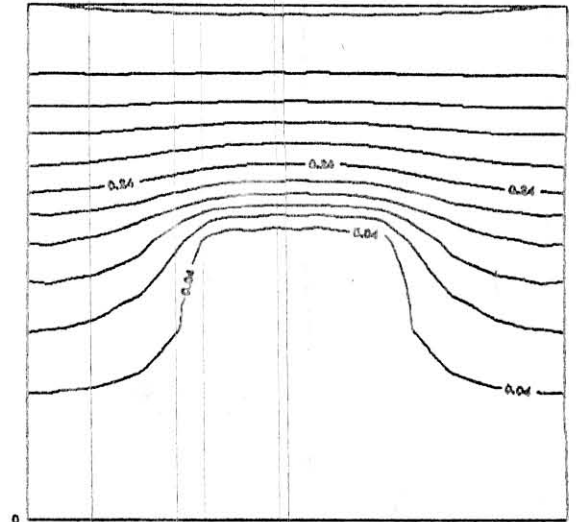
L'évaluation du temps de mélange s'effectue de la manière suivante : les mailles de surface sont initialisées de tel façon que la concentration est égale à 1 alors qu'elle est nulle sur tous les autres points du maillage. L'état de la cuve à cet instant initial est représenté sur la figure (5-38.a). Quelques tours d'agitateur plus tard (ici la cuve est équipée d'une turbine), la concentration dans la cuve correspond à ce qui apparait sur la figure (5-38.b). On note un fort déséquilibre entre les zones supérieure et inférieure de la cuve, dû au caractère radial de l'écoulement, qui engendre comme nous l'avons vu des boucles de circulation au dessus et au dessous de la turbine, la correspondance entre ces zones ne se faisant quasiment que par diffusion. Sur la figure (5-38.c..f), on tend vers une concentration homogène du traceur dans la cuve, avec simplement de légers résidus plus concentrés dans une couronne supérieure près de la parois et en surface qui correspond à la zone la moins agitée du réacteur, comme nous l'avons vu. Le temps de mélange correspond au moment où l'écart type calculé sur l'ensemble du maillage par rapport à la variable



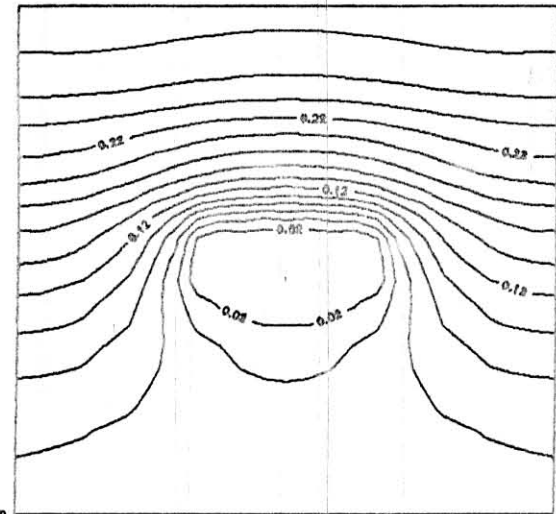
la variable concentration atteint une valeur fixée préalablement. Ce résultat vient encore conforter le fait que les turbines sont essentiellement des agents de cisaillement tandis que les hélices sont des agents de circulation et donc d'homogénéisation.



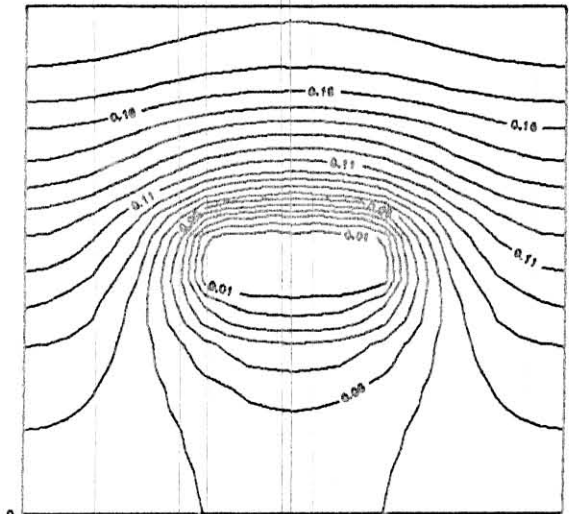
Figure(5-37.a): Champ de concentration a l'instant $t^* = 5$ (cas de la turbine)



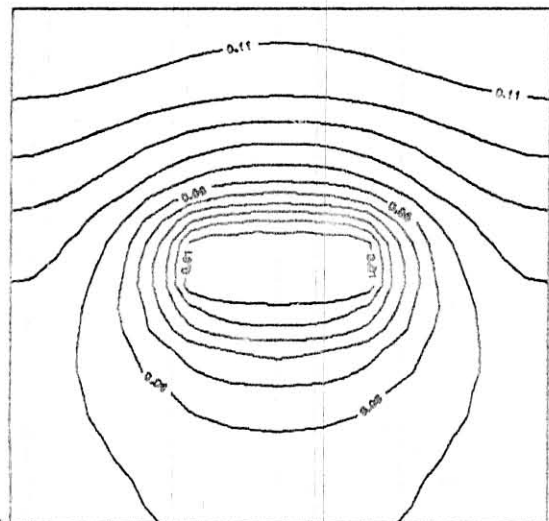
Figure(5-37.b): Champ de concentration a l'instant $t^* = 60$ (cas de la turbine)



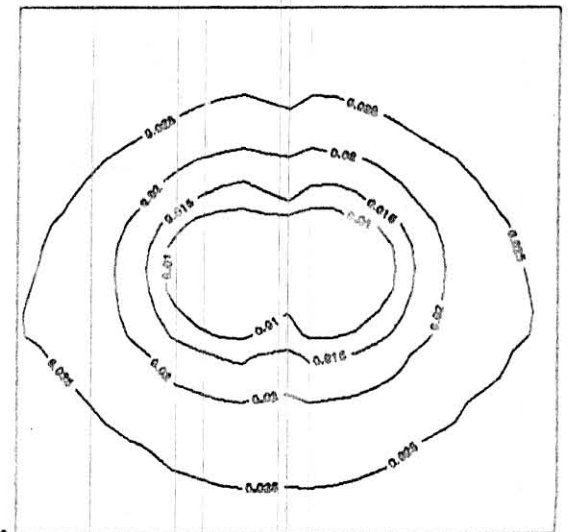
Figure(5-37.c): Champ de concentration a l'instant $t^* = 120$ (cas de la turbine)



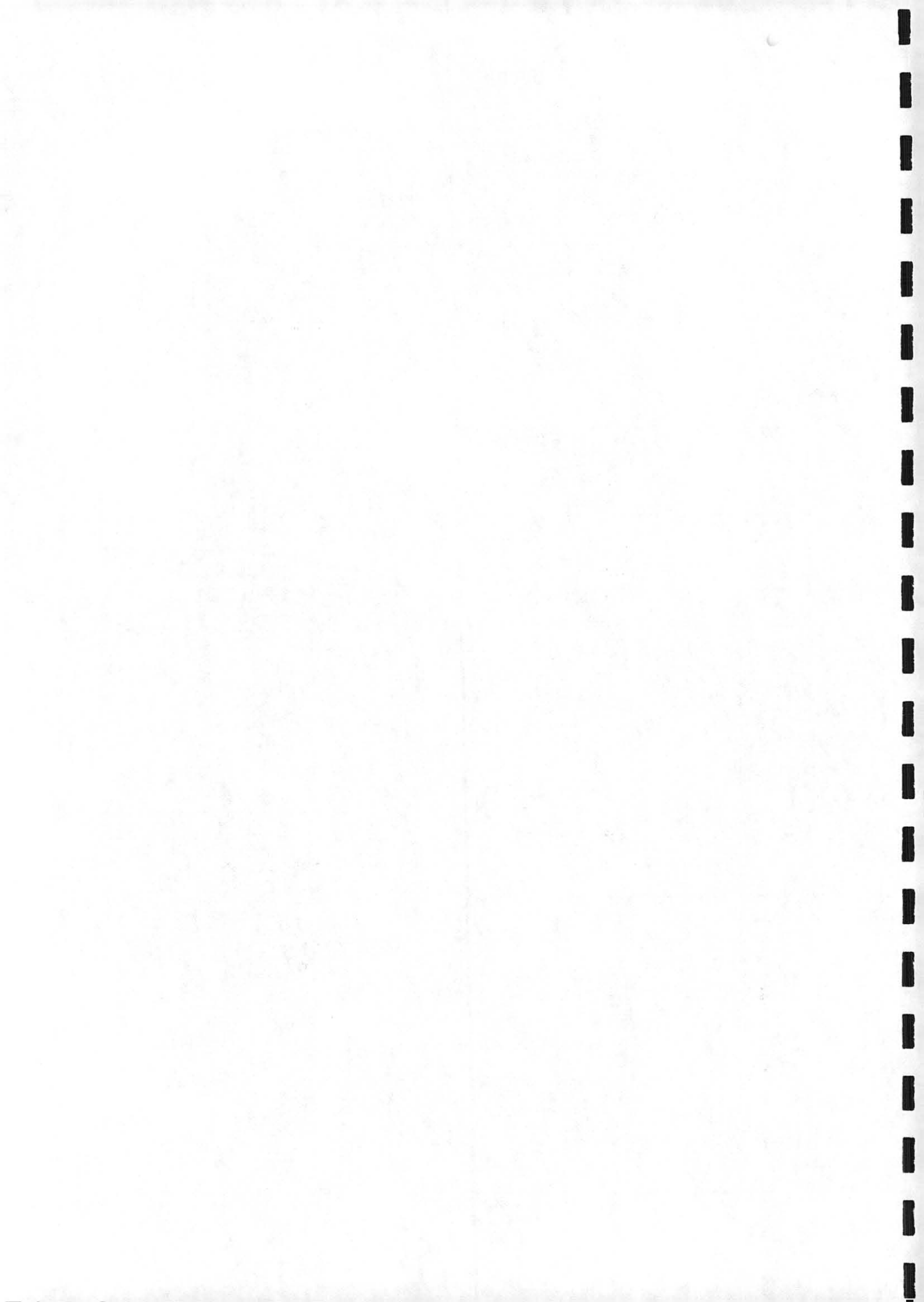
Figure(5-37.d): Champ de concentration a l'instant $t^* = 200$ (cas de la turbine)



Figure(5-37.e): Champ de concentration a l'instant $t^* = 300$ (cas de la turbine)



Figure(5-37.f): Champ de concentration final $t^* = 300$ (cas de la turbine)



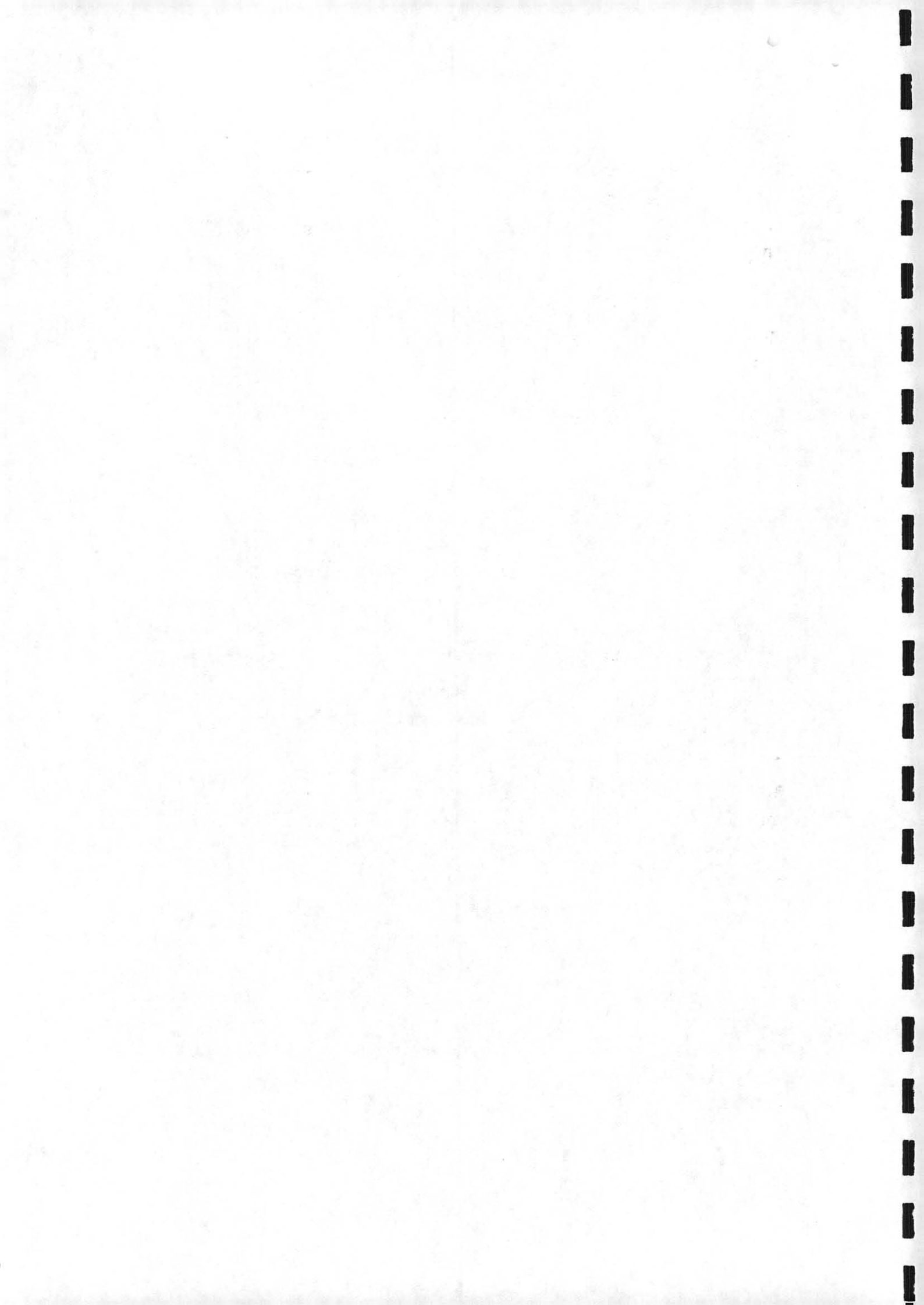
CONCLUSIONS ET PERSPECTIVES :

Nous venons de présenter la procédure de développement d'un code de simulation permettant d'étudier l'hydrodynamique de cuves équipées d'agitateurs de type turbine ou hélice pour des fluides newtoniens.

Le code a été mis en oeuvre sur un micro-ordinateur de type PC. IL repose sur la résolution des équations de Navier-Stokes dans le cas du régime laminaire en 2,5D (pas de variation des variables en fonction de la position tangentielle). L'algorithme de résolution choisi est SIMPLER, lié à une méthode de résolution de type T.D.M.A. Des résultats représentant les écoulements dans des cuves équipées de systèmes d'agitation simples ou multiples (association turbines et hélices) ont été présentés et ont permis de mettre en évidence certaines difficultés liées au choix de l'implantation des agitateurs et à la forme du fond de cuve. Nous avons également mis en évidence les changements au niveau des écoulements liés aux agitateurs, et donc au niveau des caractéristiques d'homogénéité.

Les résultats qui viennent d'être commentés représentent une illustration de ce qu'il est possible d'obtenir à partir de notre programme de simulation. Une limitation importante réside dans le fait qu'il est difficile d'obtenir des comparaisons expérimentales, car les expériences réalisées avec des fluides assez visqueux pour que le régime de fonctionnement soit laminaire sont rares car les méthodes d'investigation sont alors limitées.

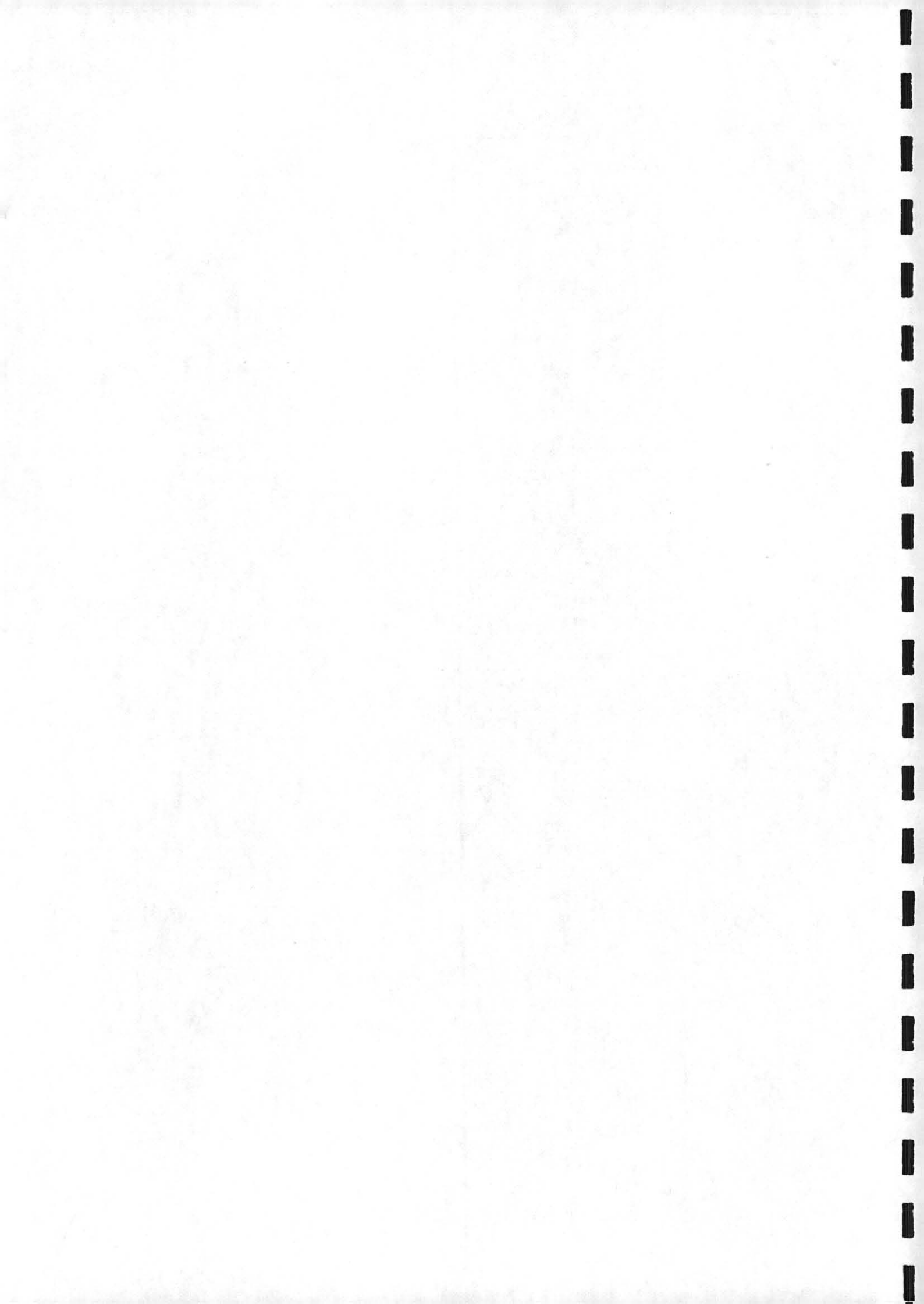
Nous aurions pu nous livrer à une exploitation beaucoup plus systématique de ce programme afin par exemple de définir la géométrie optimale pour traiter un fluide de caractéristiques connues ; ceci est en effet un des intérêts majeurs de ce code mais nous avons préféré parcourir un certain nombre d'exemples variés.



Notre programme est conçue de telle façon qu'il pourra être enrichi de nouveaux modules qui permettront de mettre en bibliothèque d'autre types d'agitateurs qui pourront être associés à ceux qui existent déjà.

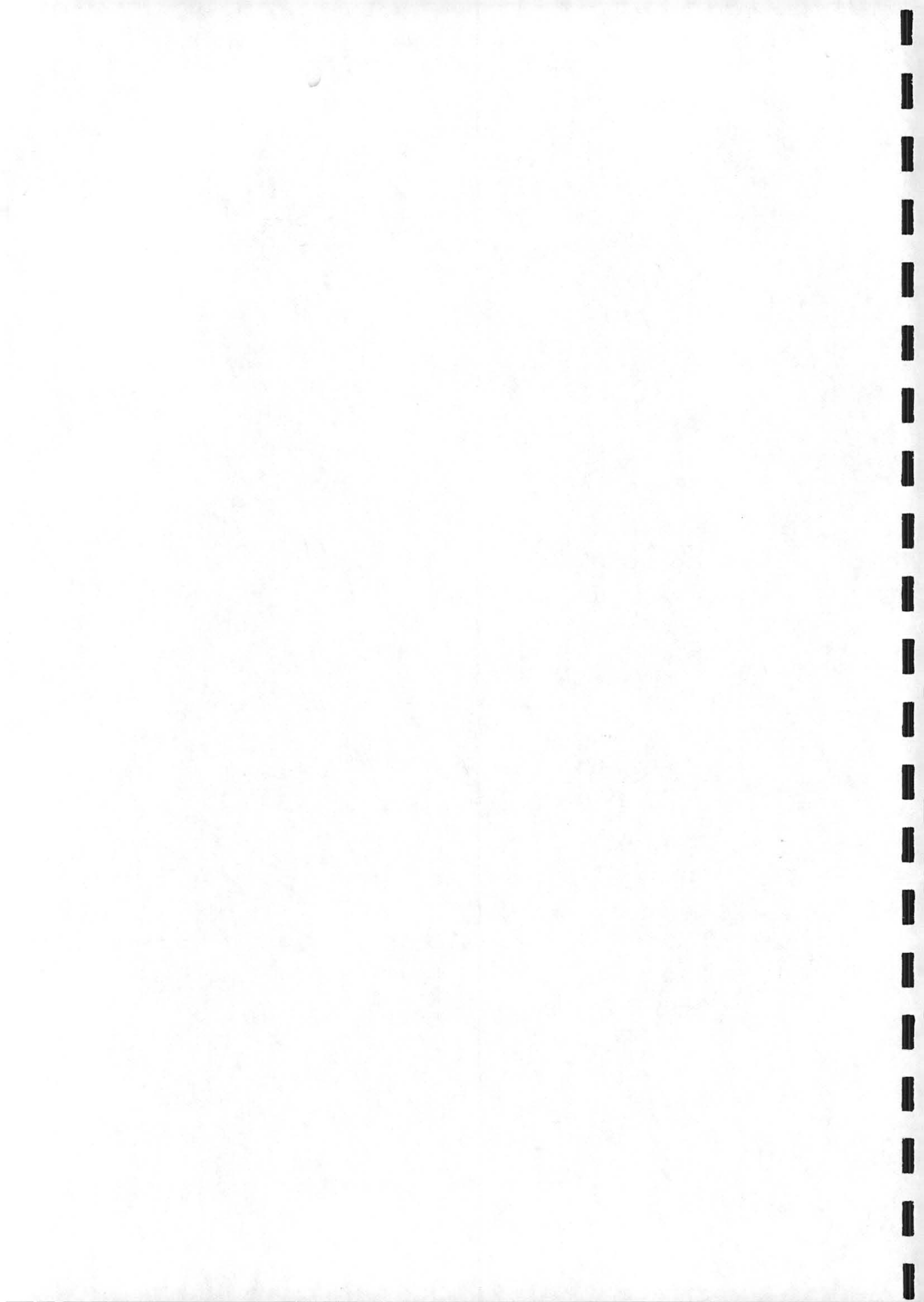
En particulier, il faudrait ajouter à ce code un module qui permettrait de prendre en considération le mélange de fluide qui se produit lorsque celui-ci traverse le volume balayé par l'agitateur, afin de tenir compte de la structure très complexe des écoulements dans cette zone, et que l'on ne peut prendre en considération dans un programme qu'en résolvant les équations dans un repère tournant lié à l'agitateur.

Il serait intéressant de pouvoir améliorer la connaissance des conditions aux limites au niveau des agitateurs, mais il faudrait pour cela disposer de résultats expérimentaux qui sont encore trop rares. Des études qui sont actuellement en cours dans les laboratoires français visent à appliquer la technologie de l'Anémométrie Laser à effet Doppler à des fluides visqueux. Espérons qu'il sera possible à partir de ces travaux de constituer une sorte de " banque de données " sur les conditions limites correspondant à divers types d'agitateurs. Par la suite l'implantation d'un module d'acquisition conditionnelle sur le Laser permettra également d'obtenir les conditions limites autour d'une pale, ce qui sera particulièrement utile pour la mise en oeuvre d'un programme tridimensionnel en repère tournant.

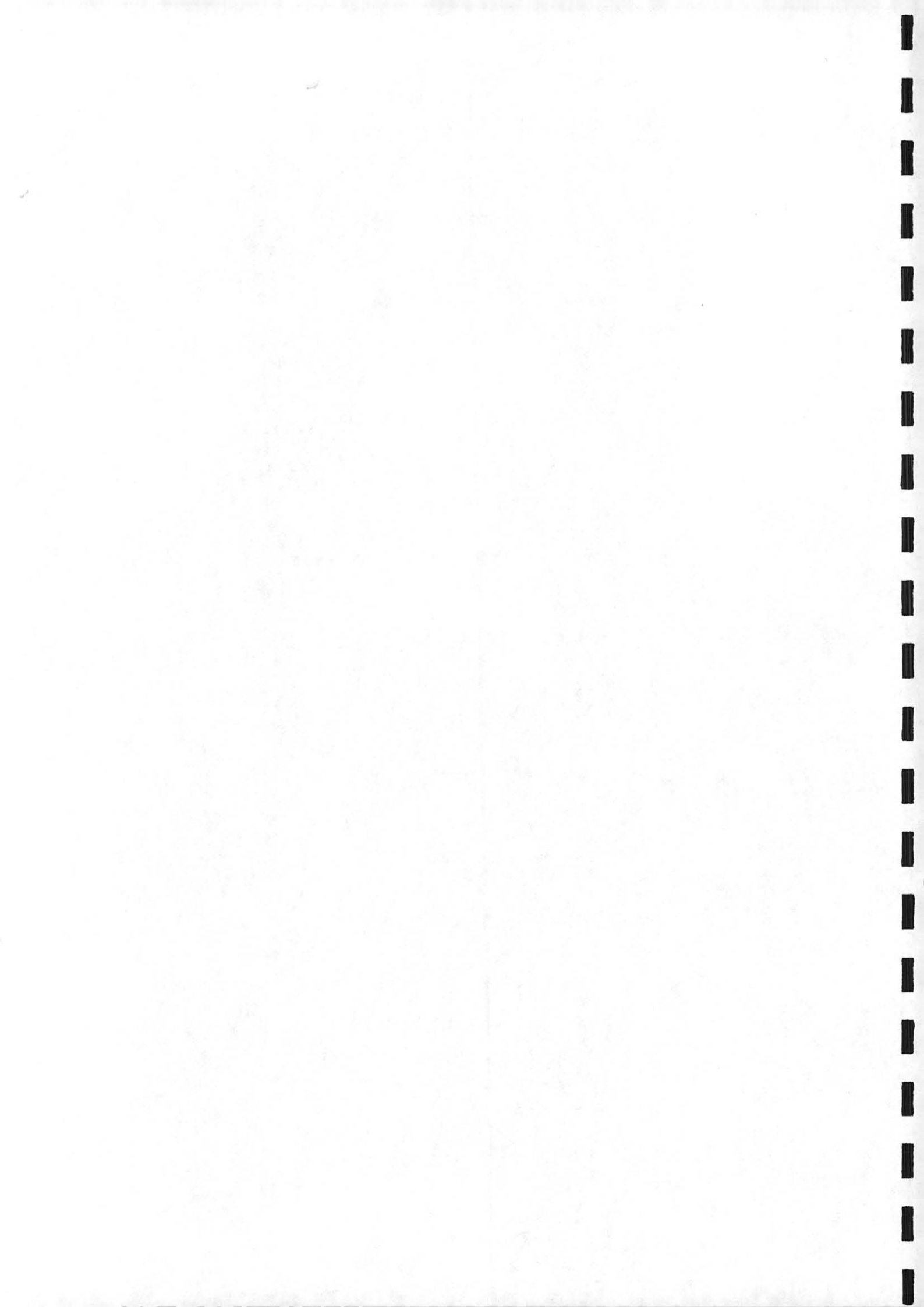


BIBLIOGRAPHIE

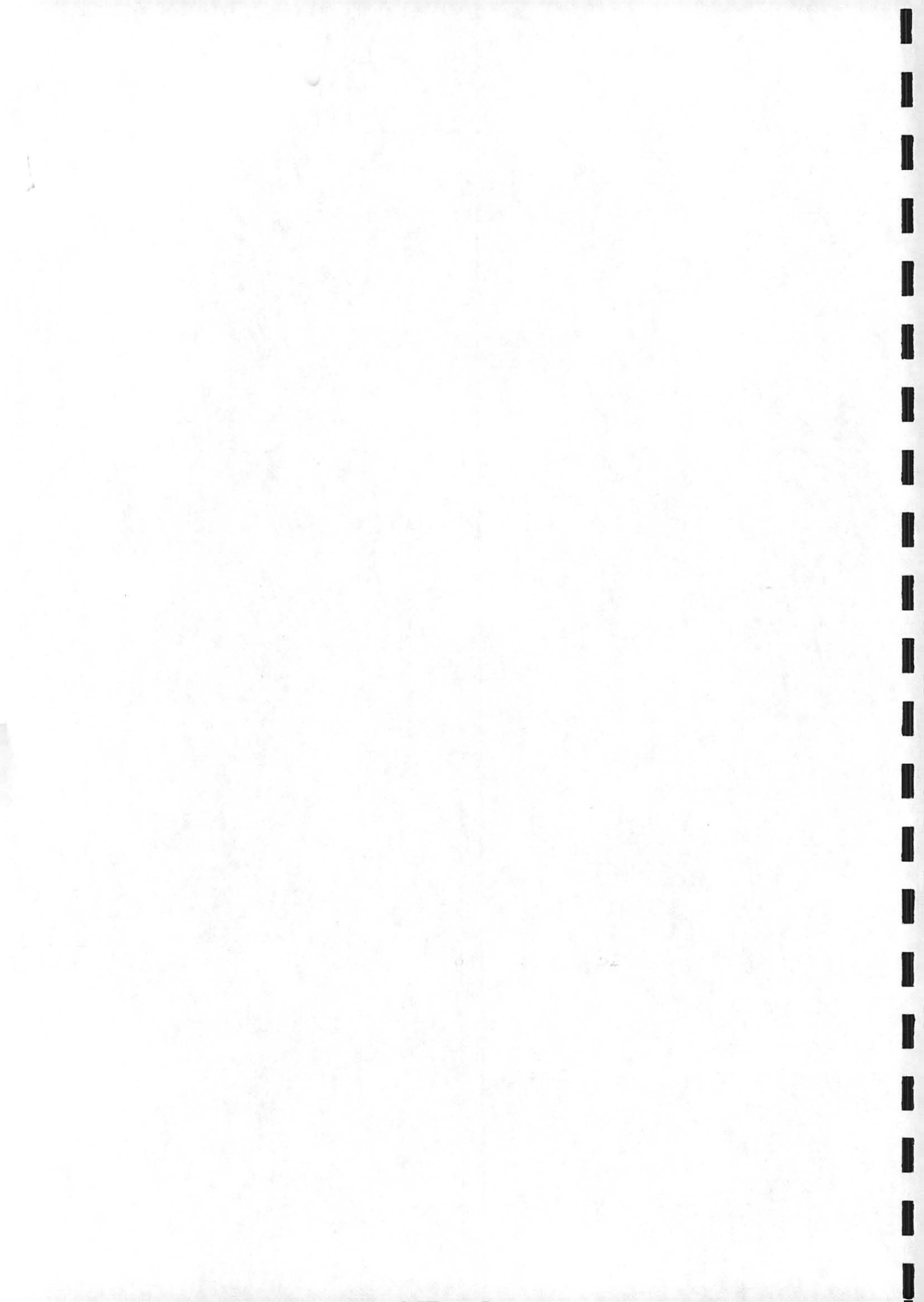
- [1] M. ROUSTON
" Power consumed by Rushton turbines in non standart vessels under gassed conditions", 5th. Europ. Conf. on mixing, 127, Wurzburg, West Germany, 10-12 June 1985
- [2] P. WUTHIER
" Raffinage, pétrole et génie chimique", 2ème édition Pris: Ed. Technip, - 2 Vol., pp 1368 - 1378 (1972)
- [3] S. V. PATANKAR
" Numerical Heat Transfer and Fluid Flow", Hémisphère, Washington, D. C., U.S.A (1980)
- [4] M. ROUSTON, J. C. PHARAMOND
" Agitation et Mélange ", Technique de l'Ingénieur, A 5900 p. 1 - 19
- [5] Abid M.S., Xuereb C. et Bertrand J.
"Modeling of the 3-D hydrodynamics of 2-blade impellers in stirred tanks filled with a highly viscous fluid".
Can. J. Chem. Eng., parution juin 1994
- [6] Baccar M. (1990)
" Modélisation numérique tridimensionnelle du comportement hydrodynamique et thermique en cuve agitée"
Thèse de Doctorat, INP Toulouse



- [7] Lafond P. (1989)
"Mélange laminaire de fluides miscibles en cuve agitée. Approche numérique". Thèse de Doctorat, INP Toulouse
- [8] Joel BERTRAND, Jacques BORDET, J. P. CONDERC, ...
" Génie des procédés ", Préf. de : G. GAILLARD, - Paris : Tec. et Doc., 1993. - 256 p., ISBN / 2-85206-894-X
- [9] J. J. LAVERGNE, PMS (France)
" Couple hélice - turbine ", Informations chimie, No. 237, Mai 1983 - 153
- [10] V. ABRARDI et G. ROVERO
" Sparged vessels agitated by multiple turbines", 6th. Europ. Conf. on mixing, 329, Pavia, Italy, 24-26 May 1988
- [11] R. COMOLET
" Mécanique expérimentale des fluides", Tome 2, Ed. Masson France, (1982)
- [12] M. BOUMARRAT et A. GOURDIN
" Méthodes numériques appliquées", Office des Publication Universitaires, Algérie (1983)
- [13] F. CHIAMPO et M. GUGLIELMETTI
" Gaz-liquide mixing in a multiple impellers stirred vessel", 7th. Europ. Conf. on mixing, 333, Brugge, Belgium, 18-20 September 1991
- [14] S. NAGATA
" Mixing : principles and applications", Halstead Press, Japan 1975



-
- [15] Bertrand J. et Couderc J.P. (1981)
" Agitation of viscous fluids by paddles of different widths" , Int. Chem. Symp. Series 64, Fluid Mixing.
- [16] Harlow F.H et Welch J.E. (1965)
"Numerical calculation of time dependant viscous incompressible flow of fluids with free surface", The Physics of Fluids, 8, 12, 2182
- [17] Murakami Y.K., Fujimoto T., Shimada A., Yamada L. et Asano K (1972)
" Evaluation of performance of mixing apparatus for highly viscosity fluids", J. Chem. Eng. Japan, 18, 1, 84.



PUISSANCE DE DISSIPATION :

Lors de la discrétisation, l'intégrale est transformée en la somme de toutes les intégrales sur chaque volume de calcul.

$$P = \sum \phi \cdot \Delta V$$

Où ϕ représente la fonction de dissipation donnée par l'expression suivante :

$$\phi' = \left\{ 2 \left[\left(\frac{\partial u}{\partial r} \right)^2 + \left(\frac{u}{r} \right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial z} \right)^2 \right] + \left(\frac{\partial v}{\partial z} \right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial r} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial r} - \frac{v}{r} \right)^2 \right\}$$

tel que : $\phi = \mu \cdot \phi'$

Mise sous forme addimensionnelle :

$$P = \sum \mu \cdot (\phi')^+ \cdot \left(\frac{V_m}{D_c} \right)^2 \cdot (D_c^3 \cdot \Delta V^+)$$

Sachant que : $V_m = N \cdot D_c$

d'où : $P = \mu \sum (\phi')^+ \cdot N^2 \cdot D_c^3 \cdot \Delta V^+$

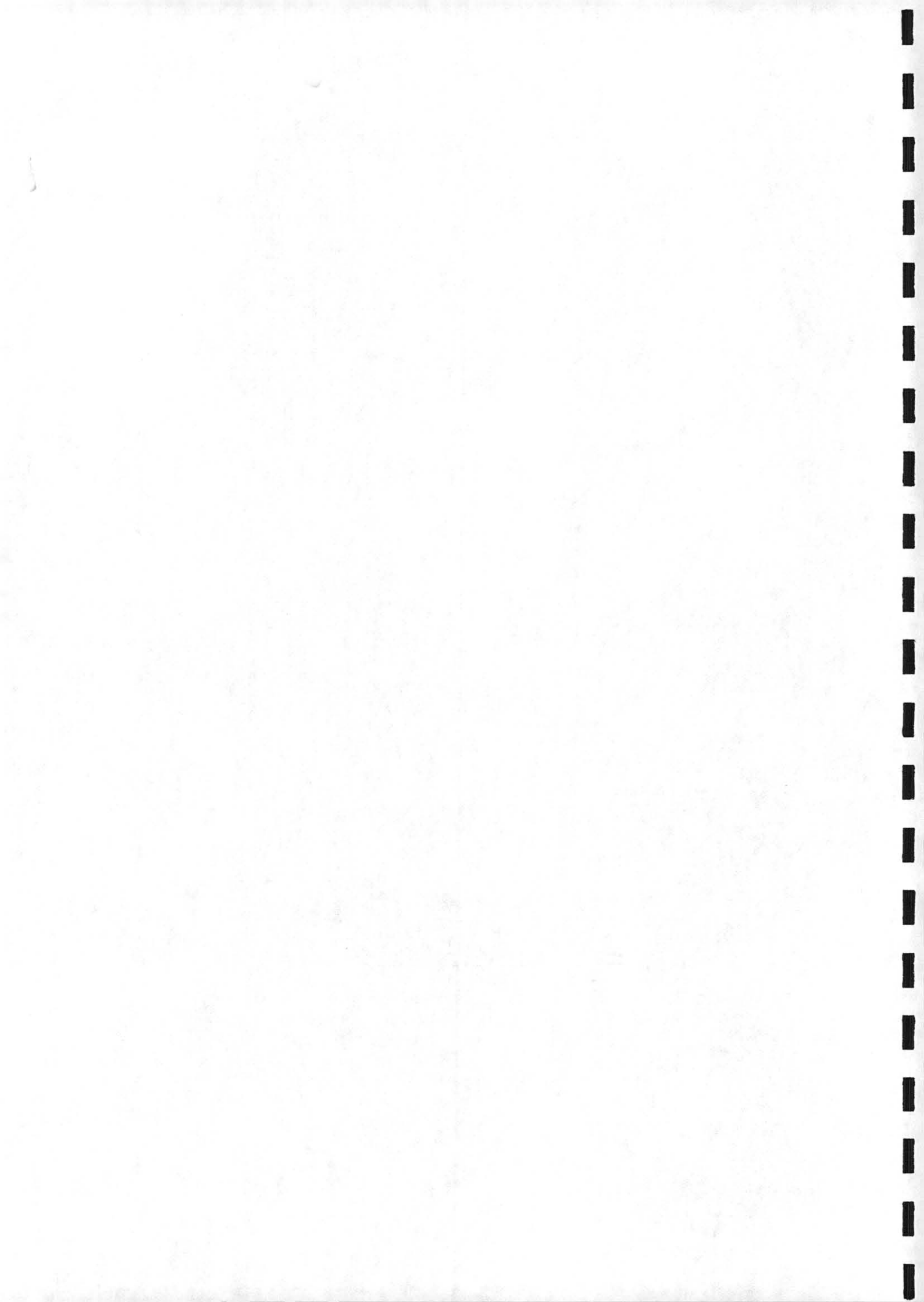
$$\frac{P}{D_a^3 \cdot N^2 \cdot \mu} = \left(\frac{D_c}{D_a} \right)^3 \sum (\phi')^+ \cdot \Delta V^+$$

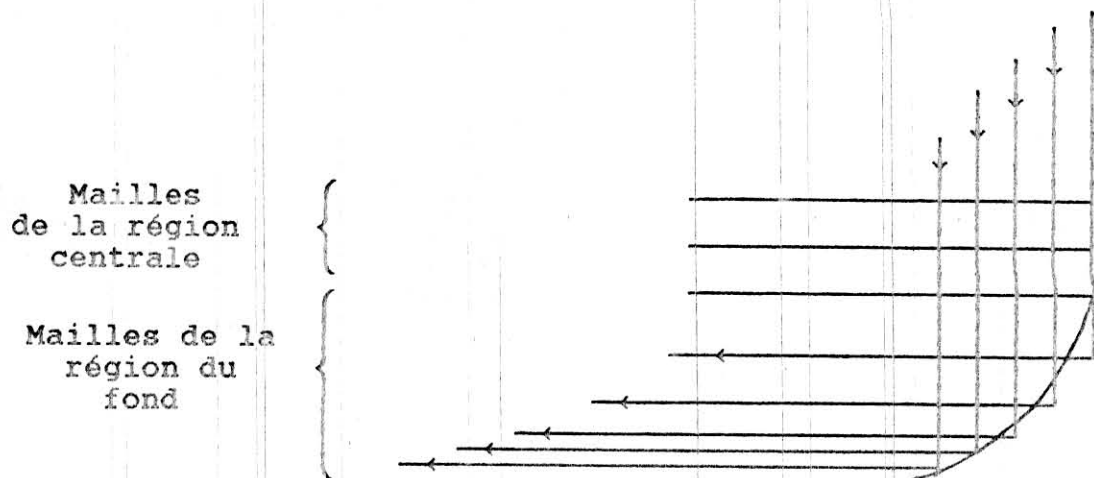
$$Ne = \left(\frac{D_c}{D_a} \right)^3 \sum (\phi')^+ \cdot \Delta V^+$$

d'autre part, le nombre de Newton Ne est égal à :

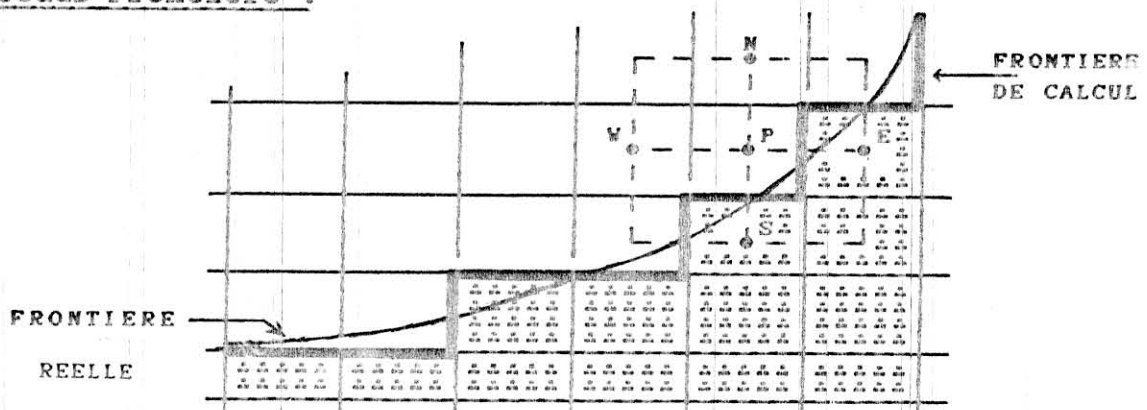
$$Ne = N_p \cdot Re$$

Par conséquent : $N_p = \left(\frac{D_c}{D_a} \right)^3 \cdot \frac{1}{Re} \sum (\phi')^+ \cdot \Delta V^+$

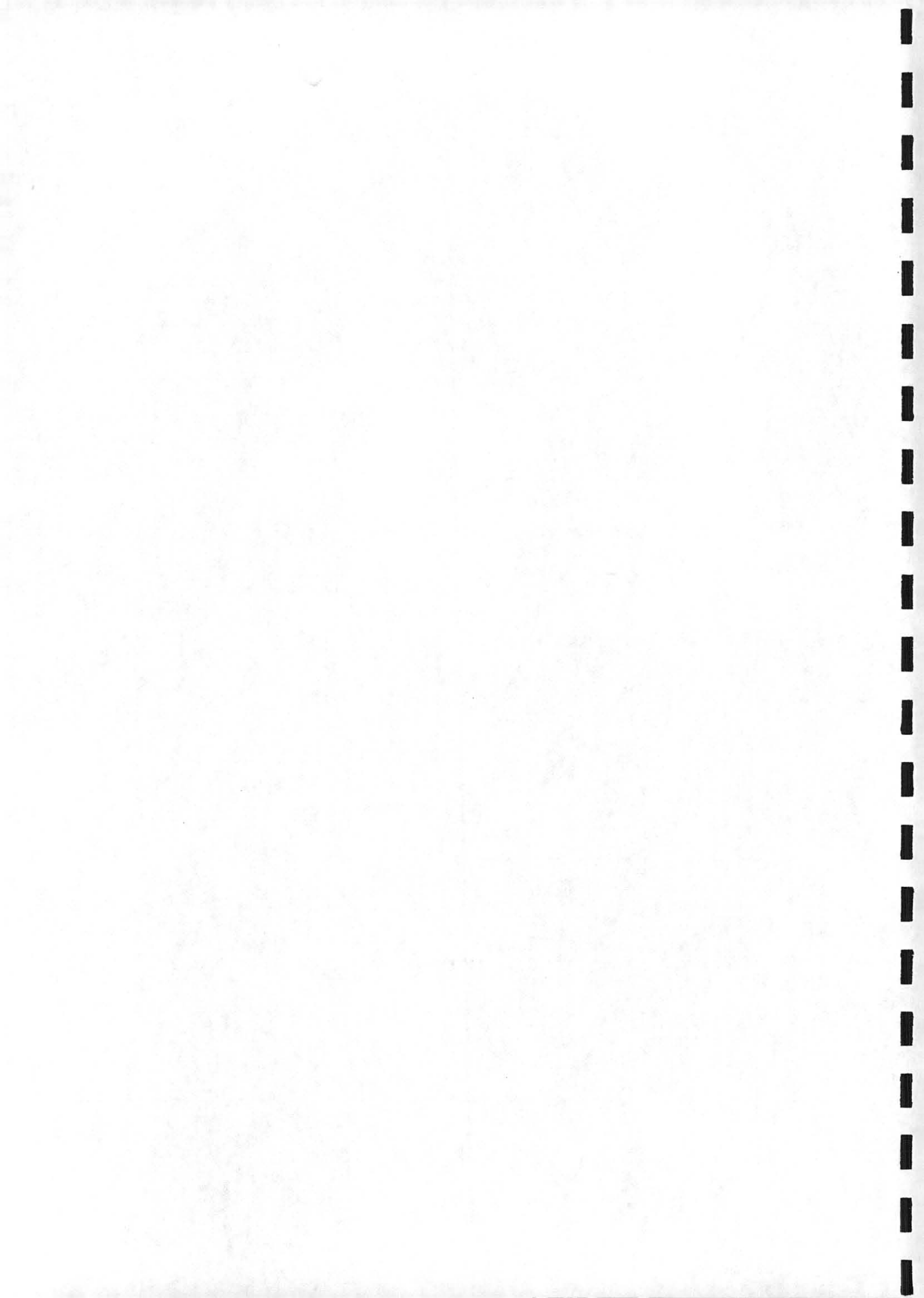


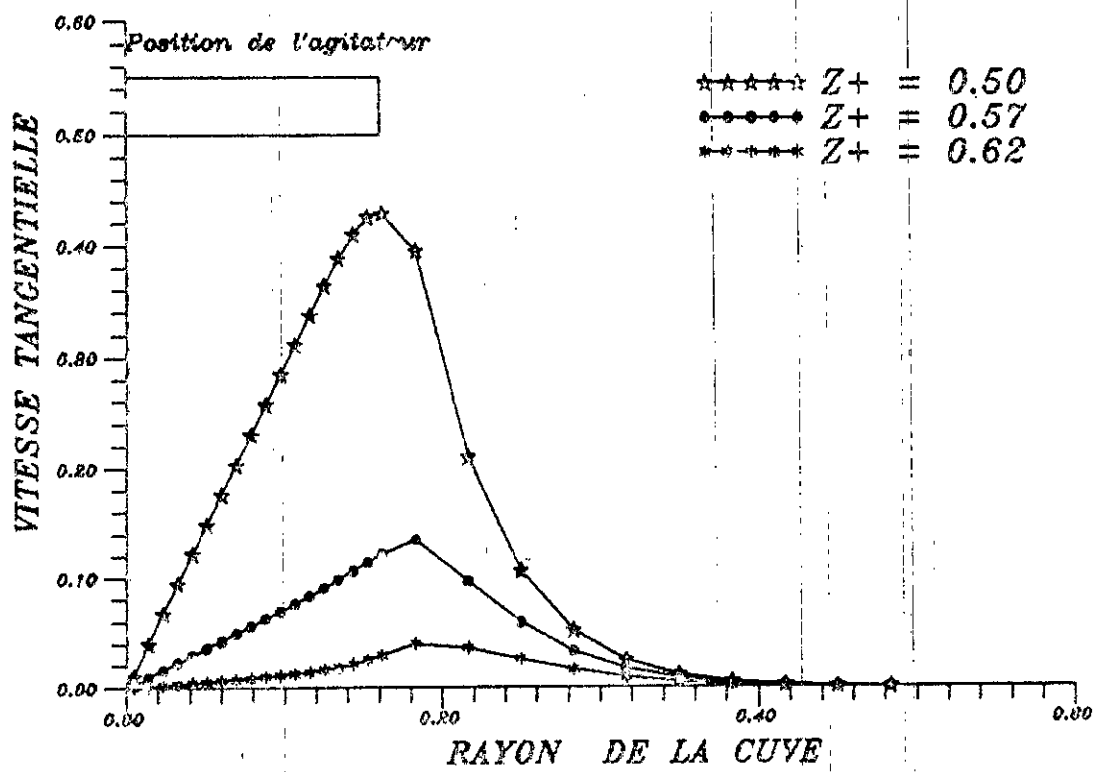
MAILLAGE DU FOND :

La forme de la paroi du fond prise en compte pour l'opération du maillage est de la forme en escalier la plus proche possible de la paroi réelle, comme le montre la figure précédente. Une erreur de discrétisation est ainsi commise, mais les résultats sur le champ de vitesse montrent bien que ce dernier suit parfaitement la paroi du fond: l'erreur de discrétisation n'est donc pas significative.

Noeuds Frontière :

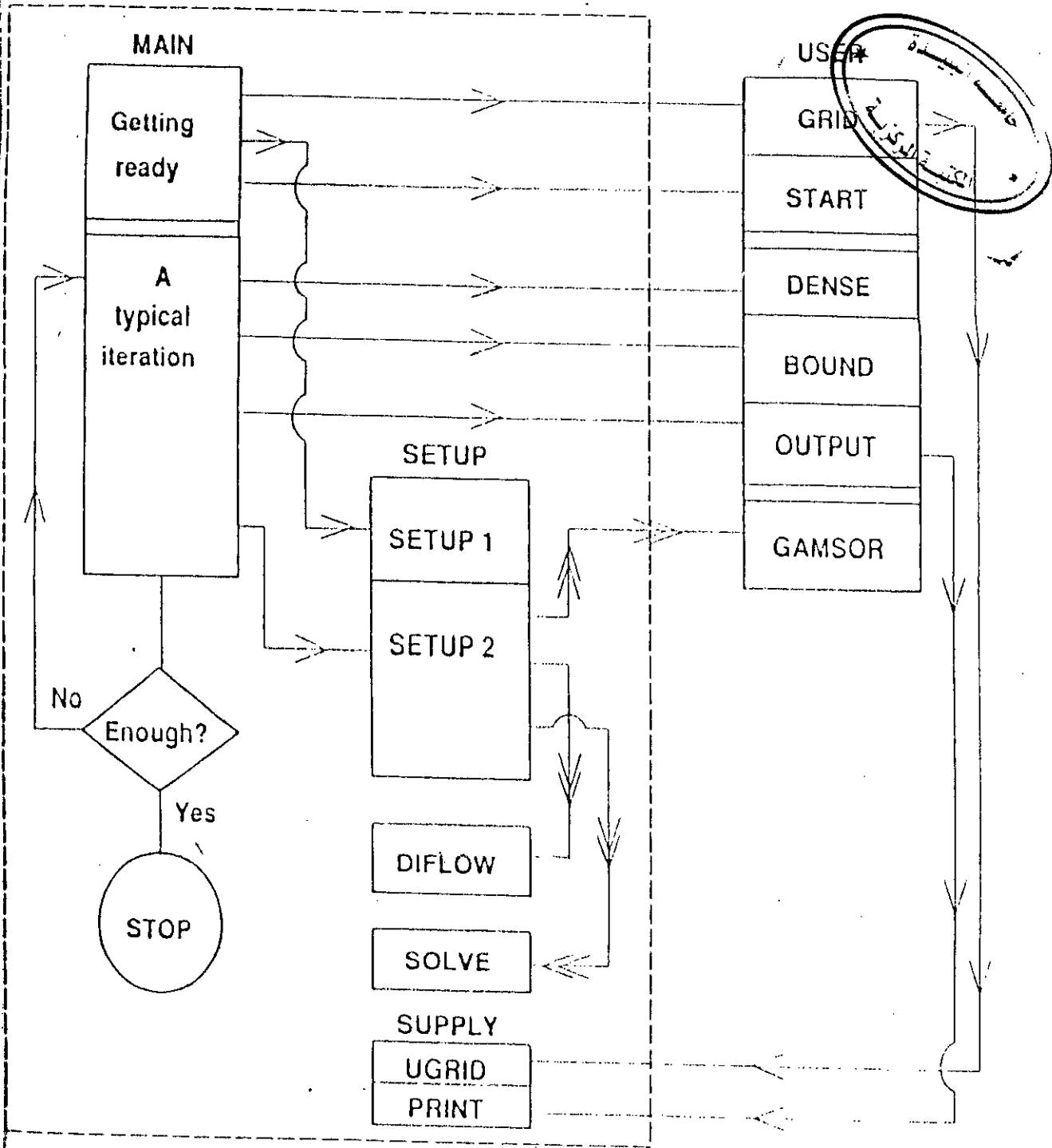
Dans cette zone sombre $\Gamma \rightarrow \infty$ pour le traitement du champ d'écoulement, et les vitesses axiale et radiale aux noeuds sont nulles [3].





Figure(5-3P): Vitesse tangentielle pour differente station Z+

Organigramme du code "SIMPLER"



Flow diagram of the computer program