

REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET  
POPULAIRE

Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

Université de BLIDA

Institut de Génie Mécanique

Thèse de Magister

Option: Construction Mécanique

Présentée par: MESLOUB RABAH



**DYNAMIQUE D'UN VEHICULE ROUTIER:-**  
Influence du Moteur et du Profil de la route.  
Théorie et Application

JURY

HARHAD . A	Président	Maître de conférences	Université de Blida
MAGHRAOUI . M	Examineur	Maître de conférences	Université de Blida
KIRATI . T	Examineur	Chargé de cours	I.N.G.M Boumerdes
MEGHATRIA . M	Examineur	Chargé de cours	Université de Blida
OUALI . M	Rapporteur	Maître de conférences	Université de Blida
HADJOUI . A	Invité	Docteur d'état	Université de Tlemcen
BOULANOUAR . L	Invité	Docteur d'état	Université de Annaba



32-530-548-1

REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET  
POPULAIRE

Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

Université de BLIDA  
Institut de Génie Mécanique  
**Thèse de Magister**

Option: Construction Mécanique

Présentée par: MESLOUB RABAH

**DYNAMIQUE D'UN VEHICULE ROUTIER.**

Influence du Moteur et du Profil de la route.

Théorie et Application

JURY

HARHAD . A	Président	Maître de conférences	Université de Blida
MAGHRAOUI . M	Examineur	Maître de conférences	Université de Blida
KIRATI . T	Examineur	Chargé de cours	I.N.G.M Boumerdes
MEGHATRIA . M	Examineur	Chargé de cours	Université de Blida
OUALI . M	Rapporteur	Maître de conférences	Université de Blida
HADJOUI . A	Invité	Docteur d'état	Université de Tlemcen
BOULANOUAR . L	Invité	Docteur d'état	Université de Annaba

# SOMMAIRE

<b>CHAPITRE I</b>	<b>1</b>
<b>INTRODUCTION</b>	<b>1</b>
1.1 Historique :	1
1.2 - Généralités	4
1.2.1 - Intervention au niveau des forces d'excitation	5
1.2.2 - Intervention au niveau de la transmission des efforts	5
1.2.3 - Intervention au niveau de la réponse de la structure .	5
1.3- Les vibrations dans les véhicules.	8
1.3.1 - Le moteur.	9
1.3.2 - Carrosserie - suspension.	9
1.3.3 - Transmission.	9
1.4 - Actualité, but et objectifs de la thèse.	9
<b>CHAPITRE II</b>	<b>13</b>
<b>MODÉLISATION D'UN ENGIN DE TRANSPORT</b>	<b>13</b>
2.1- Introduction	13
2.2- Modélisation des ressorts à boudin	16
2.2.1- Définition	16
2.2.2- Analyse des efforts intérieurs à la barre du ressort dûs au phénomène de traction ou de compression	16
2.2.3- Déplacement longitudinal (axial) de l'extrémité libre du ressort	19
2.2.4- Conclusion	20
2.3- Modélisation des ressorts à lames	20
2.3.1- Définition	20
2.3.2- Application de la théorie de la flexion au calcul des ressorts à lames.	21
Remarque	23
<b>CHAPITRE III.</b>	<b>24</b>
<b>MODÉLISATION DYNAMIQUE DES MOTEURS À COMBUSTION INTERNE</b>	<b>24</b>
3.1- Définition	24
3.2- Analyse de la nature et intensité des efforts appliquées à un bâti - cylindre	26
3.2.1- Forces nées de la compression de l'air et de la combustion des gaz	26

3.2.2- Forces d'inertie provoquées par le déplacement des pièces mobiles	29
3.3- Composition des forces de combustion d'inertie au sein du bâti - cylindre	32
3.4- Equilibrage d'un moteur.	34
3.4.1- Notions générales sur l'équilibrage	35
3.4.2- Equilibrage externe d'un moteur	35
3.5- Conclusion	46

## **CHAPITRE IV** **47**

### **MODÉLISATION D'UNE SURFACE DE CHAUSSÉE IRRÉGULIÈRE** **47**

4.1- Introduction	47
4.2- Eléments d'analyse des signaux	49
4.2.1- Signal sinusoïdal.	50
4.2.2- Fonction périodique (décomposition en série de Fourier)	51
4.2.3- Fonction non périodique.	53
4.2.4- Fonctions aléatoires.	55
4.3- description d'un microprofil d'une chaussée	67
4.3.1- Généralités	67
4.3.2- Caractéristiques probabilistes de la fonction aléatoire.	68

## **CHAPITRE V** **75**

### **ETUDE DYNAMIQUE D'UN VÉHICULE INDUSTRIEL SOU MIS À L'EFFET DU MOTEUR ET DES IRRÉGULARITÉS DE LA ROUTE: APPROCHE SIMPLIFIÉE (DÉTERMINISTE)** **75**

5.1- Introduction	75
5.2- Modèle mathématique de l'engin TB 260 + semi-remorque	77
5.3 Etude théorique du système	79
5.4 - Analyse des efforts produits par le moteur et les irrégularités de l'état de la route	81
5.5 - Analyse des réponses du système	83
5.5.1- Résolution du système libre, non amorti	84
5.5.2- Résolution du système amorti, forcé	85
5.6 - Interprétation des résultats.	96
5.7 - Conclusion	96

<b>CHAPITRE VI</b>	<b>97</b>
<b>ETUDE DYNAMIQUE D'UN ENGIN DE TRANSPORT SOUMIS À L'EFFET DES IRRÉGULARITÉS DE LA ROUTE: APPROCHE PROBABILISTIQUE.</b>	<b>97</b>
6.1- Introduction	97
6.2. Résolution du système homogène (libre)	98
6.3- Résolution du système forcé (non homogène)	105
6.4 Interprétation des résultats.	114
6.5 Résolution du système forcé ( cas d'un système découplé).	138
6.6. CONCLUSION	141
 <b>CONCLUSION GENERALE.</b>	 <b>144</b>

## DEDICACES

*Je dédie cette Thèse, aussi modeste soit elle :*

*A mes très chers parents.*

*A ma grand mère*

*A mes frères et soeurs*

*A mes oncles DJELLOUL et ALI et leurs femmes, mes tantes ACHA,  
ZOIRA, REKIA et SAFIA et leurs maris..*

*A ma famille des 402 logements, mon oncle MOHAMMED, sa femme SALIHA,  
leurs fils et leurs filles.*

*A ma famille de sidi yacoub, mon oncle ABDEL KADER, sa femme WAMMA,  
leurs fils et leurs filles.*

*A tous mes amis Farouk, Cherif, Abdel sami, Mouhcine et abdel azziz, etc....*

MESLOUB RABAH

## Remerciements

Mon grand " MERCI " va à mon promoteur Mr Ouali Mohamed pour sa compréhension, son assistance continue et son dévouement.

Je remercie le Docteur HARHAD A. d'avoir accepté<sup>1</sup> de présider le jury de ma soutenance ainsi que les docteurs MAGHRAOUI M., KIRATI T., MEGHATRIA M. qui ont bien voulu examiner mon travail. Il en est de même pour les docteurs HADJOUI A. et BOULENOUAR L. qui ont accepté d'assister à ma soutenance tout en examinant ma thèse.

Que tous ceux qui m'ont aidé de près ou de loin, que ce soit par leurs amitiés, leurs conseils, trouvent dans ces quelques lignes l'expression de ma profonde gratitude et mes sincères remerciements.

Je suis reconnaissant envers toutes les personnes qui m'ont permis de mener à bien mon projet, grâce à l'ambiance de travail et les moyens qu'elles ont mis à ma disposition tout au long de ma formation.

## NOMENCLATURE

- A : Angle au sommet d'un moteur en V.
- $C_m$  : Couple moteur dû à l'explosion dans les chambres de combustion du moteur.
- $C_{mit}$  : Couple dû à la rotation des masses alternatives.
- $C_y$  : Couple de basculement autour de l'axe de rotation du vilebrequin.
- D : Diamètre du piston.
- $F_c$  : Force centrifuge due aux masse rotatives.
- $F_{ia}$  : Force d'inertie alternative au niveau de la bielle.
- $F_g$  : Force due à l'explosion dans une chambre de combustion au niveau de la bielle.
- $F_{go}$  : Force due à l'explosion d'une chambre de combustion au niveau de l'axe du vilebrequin.
- OZ : Axe vertical du moteur.
- OZd : Axe vertical du côté droit d'un moteur en V.
- OZg : Axe vertical du côté gauche d'un moteur en V.
- l : Longueur de la bielle.
- Malt : somme des masses alternatives au niveau d'une chambre de combustion d'un moteur.
- Mrot : somme des masses rotatives au niveau d'une chambre de combustion d'un moteur.
- P : Pression au niveau d'une chambre de combustion.
- r : Rayon de la manivelle.
- t : temps en seconde.
- Y : Projection des efforts dans des chambres de combustion suivant l'axe horizontal.
- $Y_{ia}$  : Projection de l'effort  $F_{ia}$  suivant l'axe horizontal au niveau de la culasse.
- $Y_g$  : Projection de l'effort  $F_g$  suivant l'axe horizontal au niveau de la culasse.
- $Y_{go}$  : Projection de l'effort  $F_g$  suivant l'axe horizontal au niveau du palier.
- Z : Projection des efforts dans des chambres de combustion suivant l'axe vertical.
- $Z_g$  : Effort produit par la pression au niveau d'une chambre de combustion d'un moteur.
- $\alpha$  : angle que fait l'une des manivelles du vilebrequin et l'axe vertical du moteur
- $\varphi$  : angle que fait l'une des bielles du moteur et l'axe vertical du moteur
- $\omega$  : Vitesse de rotation du moteur

$a$ : entre axe de deux cylindres voisins du moteur  
 $C$ : couple de galop engendré par le moteur  
 $d$ : diamètre de la section droite de la barre du ressort  
 $D$ : diamètre moyen d'une spire du ressort  
 $n$ : nombre de spires formant le ressort  
 $\alpha$ : l'inclinaison du plan portant une spire au plan horizontal  
 $X$ : axe tangent à la ligne moyenne d'une spire  
 $Y$ : axe perpendiculaire aux plan  $xoz$  portant une spire  
 $\sigma_{adm}$  et  $\tau_{adm}$ : respectivement les contraintes admissibles normale et tangentielle du matériau de la barre du ressort  
 $N_x$ : effort de traction au niveau de la section droite la barre du ressort à boudin  
 $Q_y$ : effort tranchant au niveau de la section droite la barre du ressort à boudin  
 $M_t$ : Un moment de torsion autour de l'axe  $X$  produit par l'effort tranchant  $Q_y$   
 $M_y$ : Un moment fléchissant autour de l'axe  $Y$  dû à l'action de l'effort normal  $N_x$   
 $\sigma$ : contrainte normale au niveau de la section droite la barre du ressort à boudin  
 $S$ : l'aire de la surface de la section droite de la barre formant le ressort.  
 $W$ : le module de flexion de la section droite du ressort  
 $W_p$ : rapport entre le moment d'inertie polaire de la section droite et son rayon.  
 $\delta$ : déplacement axial de l'extrémité libre du ressort  
 $E$  et  $G$  respectivement les modules d'élasticité longitudinal et transversal du matériau de la barre formant le ressort.  
 $K$ : coefficient de rigidité (raideur) du ressort.  
 $f$ : la flèche de la poutre  
 $w$ : est le module de flexion =  $I/y_{max}$ .  
 $D$ : énergie de dissipation du système  
 $F_v$ : effort vertical engendré par le moteur  
 $h_1$ : amplitude de l'irrégularité de l'état de la route au niveau de l'essieu avant du tracteur  
 $h_2$ : amplitude de l'irrégularité de l'état de la route au niveau de l'essieu arrière du tracteur  
 $h_3$ : amplitude de l'irrégularité de l'état de la route au niveau de l'essieu avant de la remorque

$h_i$ : amplitude de l'irrégularité de l'état de la route au niveau de l'essieu arrière de la remorque

$H_{max}$ : amplitude maximale de l'irrégularité de l'état de la route

$L$ : longueur d'onde de l'irrégularité de l'état de la route

$l$ : longueur de la bielle du moteur

$M_{alt}$ : masse alternative des pièces mobiles des chambres de combustion du moteur

$M_{rot}$ : masse rotative des pièces mobiles des chambres de combustion du moteur

$q_i (i=1,8)$ : coordonnées généralisées du système

$Q_i (i=1,8)$ : efforts extérieurs généralisés du système

$r$ : rayon de la manivelle du vilebrequin du moteur.

$t$ : abscisse temps

$T$ : énergie cinétique du système

$U_r$ : déplacement modale d'ordre  $r (r=1,8)$ .

$U_{0r}, \dot{U}_{0r}$ : Conditions initiales du  $r^{ème}$  déplacement modal.

$V$ : Vitesse de l'engin.

$X_c$ : déplacement vertical du chauffeur avec son siège.

$X_s$ : déplacement vertical de la base du siège du chauffeur.

$X_t$ : déplacement vertical du centre de masse du tracteur.

$y_1$ : déplacement vertical de l'essieu avant du tracteur.

$y_2$ : déplacement vertical de l'essieu arrière du tracteur.

$y_3$ : déplacement vertical de l'essieu avant de la semi-remorque.

$y_4$ : déplacement vertical de l'essieu arrière de la semi-remorque.

$y_5$ : déplacement vertical de l'élément d'attache entre les essieux de la semi-remorque.

### MATRICE

$[C]$ : matrice amortissement du système.

$[I]$ : matrice identité.

$[K]$ : matrice rigidité du système.

$[M]$ : matrice masse du système.

$[W]$ : matrice spectrale.

$[\Phi]$ : matrice modale.

[Kr]: matrice diagonale dont les composantes sont respectivement 1, 1, 1, 1, Kr1, Kr2, Kr3, Kr4.

[Cr]: matrice diagonale dont les composantes sont respectivement 1, 1, 1, 1, Cr1, Cr2, Cr3, Cr4.

$\{h(t)\}^T = \{0, 0, 0, 0, h_1, h_2, h_3, h_4\}$

$\{\dot{h}(t)\}^T = \{0, 0, 0, 0, \dot{h}_1, \dot{h}_2, \dot{h}_3, \dot{h}_4\}$

$\{X_0\}$  et  $\{\dot{X}_0\}$ : conditions initiales

$\{m_{x_0}\}$   $\{\sigma_{x_0}\}$ : respectivement le vecteur formé par les espérances mathématiques et les variances des conditions initiales du système

$K_{X_i X_j}$ : moments de corrélations entre deux valeurs des conditions initiales

[Φ]: la matrice des vecteurs propres du système

$\{U(t)\}$ : vecteur formé par les modes propres.

[F]: vecteur des forces extérieures au système.

[R]: vecteur des efforts extérieurs modaux du système.

$\{U\}$ : vecteur déplacement modal du système.

$\{U_0\}$ : vecteur déplacement initial modal du système.

$\{\dot{U}_0\}$ : vecteur vitesse initial modal du système.

$\{\dot{U}\}$ : vecteur vitesse modal du système.

$\{\ddot{U}\}$ : vecteur accélération modal du système.

$\{\ddot{X}\}$ ,  $\{\dot{X}\}$ ,  $\{X\}$ : respectivement vecteur accélération, vitesse et déplacement du système.

$\{\dot{X}_0\}$ ,  $\{X_0\}$ : respectivement vecteur, vitesse et déplacement initiaux du système.

### SYMBOLES GREQUES

$\varphi_t$ : déplacement angulaire du tracteur routier

$\varphi_b$ : déplacement angulaire de la semi-remorque

$\varphi_j$ : déplacement angulaire de l'élément d'attache entre les essieux de la remorque

$\Pi$ : énergie potentielle du système

$\omega_r$ : fréquences propres du système ( $r=1,8$ )

$\beta$ : coefficient de proportionnalité entre [C] et [K]

$\gamma$ : coefficient de proportionnalité entre [C] et [M]

$\Delta t$ : incrément du temps

$\xi_r$ : coefficient d'amortissement du mode  $r$

## RESUME

L'étude des problèmes de vibration a acquis une importance de plus en plus grande dans les calculs des pièces de machine.

C'est un fait bien connu, que seule la théorie des vibrations permet de comprendre entièrement de nombreux problèmes dont l'importance pratique est considérable.

Ce n'est qu'en faisant usage de cette théorie que l'on peut dans un projet déterminer aux divers organes les dimensions qui permettent de maintenir des conditions de travail aussi éloignées que possible des conditions critiques dans lesquelles risquent de se produire de fortes vibrations.

L'analyse du comportement d'un véhicule routier est une tâche qui s'avère délicate.

La prise en considération d'un nombre important de facteurs dont le moteur, l'état de la route, la suspension, ... Conduit à des résultats analytiques difficiles à résoudre et à exploiter. Le recours à l'outil informatique s'avère souvent indispensable.

Notre travail est consacré à la modélisation mathématique de la suspension d'un véhicule, à la détermination des efforts engendrés par différents types de moteurs, à la modélisation de l'état de la route. Les modèles étudiés ont été appliqués à un type de véhicule routier d'usage courant.

Une première approche de l'état de la route est faite sous forme de sinusoïde. Les déplacements des différents compartiments du véhicule sont déterminés.

Une approche plus réaliste et plus rigoureuse est donnée quand l'état de la route est considéré comme étant aléatoire. On détermine toutes les caractéristiques probabilistiques (espérance mathématique, variance, fonction de corrélation et d'auto-corrélation, densité spectrale....) des différents déplacements des centres de masses du tracteur routier et de sa remorque.

Grâce à ces derniers résultats, on peut définir ou du moins estimer le système de suspension le plus optimal qui permet de respecter toutes les normes concernant le confort, la tenue de route et l'espace de fonctionnement de la suspension.

Une application est faite sur un modèle de véhicule routier TB260 avec sa remorque soumis à l'effet du moteur et des irrégularités de quatre types de routes.

Les résultats obtenus peuvent trouver un large champ d'application dans le domaine industriel.

# CHAPITRE I

# CHAPITRE I

## Introduction

### 1.1 Historique :

Dans les différentes branches de l'industrie et dans de nombreux projets, la dynamique des machines est présente et d'actualité [ 1,2,3,...].

Les besoins toujours croissants des industries de pointe, les évolutions rapides de l'automatisation et de la robotisation de la production, les progrès énormes effectués dans le domaine de l'informatique..., font que toutes les questions liées à la dynamique et aux techniques de calcul des structures soient à l'origine et à la base de plusieurs travaux de recherche ces dernières décennies [7,8,9,10,...].

L'étude du comportement dynamique des structures mécaniques, des mécanismes et des organes de machines permet l'obtention de résultats dont l'analyse fournit des informations pour l'amélioration et l'augmentation des performances des machines. Pour répondre à ces dernières exigences, l'un des problèmes actuels consiste en l'élaboration d'une théorie à caractère rigoureux qui permet analytiquement et numériquement de trouver et de résoudre les lois de mouvement du système considéré et de porter des analyses adéquates et constructives [ 5,7,8,9,...].

Les problèmes en dynamique des structures sont de plus en plus nombreux et complexes par le nombre d'information à traiter. De ce fait, la maîtrise de l'analyse mathématique, de l'analyse numérique et de l'analyse probabilistique et statistique, en vue d'une meilleure compréhension des phénomènes, est plus que nécessaire [ 11,12 ]. On remarque qu'en mécanique, les équations différentielles, intégrales, aux dérivées partielles,..., jouent un rôle fondamental [ 3, 4, 7, 9, 12 ].

Les méthodes d'étude et de résolutions analytiques ne suivent pas l'essor considérable que connaissent les méthodes numériques. L'aspect analytique offre plusieurs avantages scientifiques et il présente l'une des parties essentielles des développements numériques.

Les études analytiques, " théoriques ", peuvent être considérées comme étant la base de la théorie des structures et de calcul des organes de machines, des mécanismes,... Elles ont , entre autres, pour but de rechercher les meilleures caractéristiques, formes et dimensions à donner aux éléments et organes d'une construction ou d'une machine

Les phénomènes et processus vibratoires occupent une place importante dans les domaines technologiques et scientifiques [ 1,2,7,8,...]. Les vibrations ont diverses origines et leur analyse permet de mieux cerner et comprendre les problèmes qu'elles engendrent.

Les vibrations sont souvent de nature non-linéaire [ 7,9,...]. La théorie des vibrations non linéaires est très vaste [ 7,9,15,32 ] bien qu'elle pose des difficultés pour la résolution de cas pratiques. Les difficultés sont généralement d'ordre mathématique.

Dans la littérature consacrée aux vibrations de véhicules de transport [9,14,16,17,18,19,] souvent plusieurs paramètres sont négligés au détriment d'autres. Les principales sources d'excitation sont nombreuses et on cite les excitations dues aux irrégularités de la route, celles dues au moteur ou au groupe moto-propulseur, les résistances technologiques, le problème des suspensions actives et passives,....

Les conditions évoluent d'une manière accélérée : les moteurs et les dispositifs techniques sont de plus en plus performants, les routes sont plus unies, la carrosserie est de plus en plus allégée,... sans oublier que les passagers sont de plus en plus exigeants en matière de confort et de sécurité. De ce fait, il faut élargir le champ d'application et prendre en considération les vibrations et les divers paramètres et facteurs.

Les vibrations du moteur et son influence sur la voiture particulière sont abordées dans la référence [ 17 ] qui traite successivement les excitations dues à l'état de la route puis celles dues au moteur. Ces deux types d'excitations sont traités indépendamment.

Une étude intéressante concernant les vibrations de torsion du groupe motopropulseur des camions S.N.V.I - SONACOME est réalisée [18]. Elle consiste à établir des modèles dynamiques, les équations de mouvement des groupes motopropulseurs ainsi que des programmes de calcul.

Les auteurs des travaux [ 6,21 ] analysent la dynamique d'un monte charge en tenant compte de l'influence du moteur et l'approche de l'état de la route est faite par une somme de sinusoides. Les équations différentielles du mouvement du monte charge sont non-linéaires et elles sont résolues par la méthode de KRILOV-BOGOLOUBOV. Ainsi, la dynamique des systèmes physiques mène souvent à l'étude de l'influence des perturbations extérieures qui peuvent se présenter comme des phénomènes contrôlables ou aléatoires [ 4,8,16,17,19 ]. Les vibrations dues à l'état de la route, au moteur,... dans le cas d'un véhicule routier sont nuisibles aussi bien pour les passagers que pour le véhicule lui même [ 5,6,16,19 ].

L'auteur des travaux [ 9 ] traite la dynamique des systèmes électromécaniques. Des applications sont faites sur des modèles de véhicules routiers. La caractéristique dynamique du moteur, l'état la route, l'amortissement, les résistances technologiques et diverses perturbations sont prises en considération. Les équations du mouvement des systèmes étudiés sont non-linéaires et une méthodologie de résolution y est proposée. La majeure partie des résultats est analytique.

La vibro-isolation optimale d'un véhicule des effets de la route [ 16 ] est entamée en modélisant le profil de la route, en déterminant les équations différentielles du mouvement, en présentant les différents types de suspension avec une exposition des résultats de la simulation du comportement d'un camion pour lequel les paramètres optimaux sont déterminés pour diverses suspensions ( passive, semi-active, active et active à commande pré-informée ). La suspension active est traitée d'une manière précise dans les travaux [14] et le moyen de contrôle est indiqué.

La suspension ou le système de suspension est une partie essentielle un véhicule routier. Elle forme une interface entre le véhicule et l'environnement [ 5,16,22 ]. Les exigences de confort et de sécurité s'accroissent et la tendance est vers l'utilisation de suspensions actives.

La référence [33] traite la dynamique et la stabilité d'un certain type de véhicules routiers - automobile, tracteur,.... Les modèles sont réalisés et il est tenu compte de l'influence du moteur et diverses résistances. Les équations du mouvement sont obtenues et résolues analytiquement par la méthode de la linéarisation harmonique. Des études aussi bien théoriques qu'expérimentales sont faites. Il n'est pas tenu compte explicitement dans l'étude théorique de l'influence de l'état de la route.

## **1.2 - Généralités**

L'étude des problèmes de vibration a acquis une importance de plus en plus grande dans les calculs des pièces de machine.

C'est un fait bien connu, que la théorie des vibrations permet de comprendre entièrement de nombreux problèmes, dont l'importance pratique est considérable tel que:

- Equilibrage des machines;
- Vibration de torsion des arbres des trains d'engrenage;
- Vibration des disques et des aubes des turbines.

Ce n'est qu'en faisant usage de cette théorie que l'on peut, dans un projet, désigner aux divers organes les dimensions qui permettent de maintenir des conditions de travail aussi éloi-

gnées que possible des conditions critiques dans lesquelles risquent de se produire de fortes vibrations.

Lorsqu'un problème vibratoire se pose au niveau d'une machine mécanique, il est nécessaire, pour lui trouver une solution de bien comprendre le phénomène qui le produit et par conséquent de savoir à quel niveau intervenir pour le résoudre.

Considérons le schéma suivant [1], Figure 0.1:

A l'origine des vibrations, on rencontre:

- Des forces extérieures (sinusoïdales, complexes ou aléatoires), ces forces sont dues à l'environnement où se trouve la machine.

- Des forces intérieures créées par les machines elles-mêmes en fonctionnement, et qui à leur tour dépendent de l'état mécanique de la machine (ex. dissymétrie de masses) et des paramètres de fonctionnement (ex. température, vitesse de rotation... etc.).

Il y a donc une première relation R1 entre l'état de la machine et les forces qu'elle engendre.

Ces forces appliquées au système mécanique qu'est la machine avec son support vont à leur tour produire des vibrations, dont l'amplitude est fonction des caractéristiques mécaniques (masses, inerties, raideurs et amortissement,...etc.)

La relation qui existe entre les forces et les vibrations mécaniques est R2.

Les vibrations sont caractéristiques d'un état de contraintes alternées qui peuvent produire des ruptures des pièces par la fatigue suivant la relation R4 et par conséquent des modifications de l'état mécanique de la machine suivant la relation R5 ou même des forces par R6.

En conclusion [1], il est toujours utile lorsque c'est possible de limiter les efforts à la source en agissant sur R1, mais ce n'est pas toujours la solution du problème qui peut être une amplification excessive de l'effort. Dans ce cas, on a encore un moyen d'action au niveau de la réponse des structures en modifiant les relations entre forces et vibrations (R2). C'est ce qu'on applique dans le domaine des méthodes de lutte contre les vibrations.

Lorsqu'on a pu reconnaître le défaut ou tout au moins apprécier le danger qu'il présente au niveau de la machine, on a deux possibilités d'actions pour réduire les vibrations dans une machine, soit en agissant sur les forces d'excitation, soit en intervenant au niveau de la réponse de la machine [1].

### 1.2.1 - Intervention au niveau des forces d'excitation [1]

A chaque fois que cela est possible, on cherche d'abord à diminuer les forces d'excitation : équilibrage des moteurs, élimination des balourds dans les machines tournantes etc..

Mais il se pourrait que cela soit impossible ( exemple - le moteur ne dispose pas d'un plan de symétrie ou d'équilibrage). Si les vibrations observées ne sont pas dues à des efforts importants, mais plutôt à des comportements anormaux, (ex. phénomène de résonance), dans ce cas on peut encore intervenir à deux niveaux.

### 1.2.2 - Intervention au niveau de la transmission des efforts [1]

Si ce qu'on désire protéger n'est pas la machine elle-même, mais son environnement ( ex. le conducteur d'un véhicule, matériel fragile situé à proximité de la machine, dispositif de sécurité de la machine etc.), on peut alors l'isoler par des suspensions souples, absorbant ainsi l'énergie émise à l'aide de matériaux amortisseurs (amortisseurs visco-élastiques, ressorts etc.).

On peut encore ré-injecter des forces en opposition de phase à l'aide d'amortisseurs dynamiques.

### 1.2.3 - Intervention au niveau de la réponse de la structure [1].

Si les vibrations sont gênantes, soit pour la machine elle même (résonance d'une partie de la machine pouvant entraîner des ruptures par fatigue) soit pour des personnes appelées à travailler avec, ou pour l'environnement, et si de plus elles résultent de l'amplification d'effort par des phénomènes de résonances, on peut modifier les structures pour agir sur certains phénomènes nuisibles..

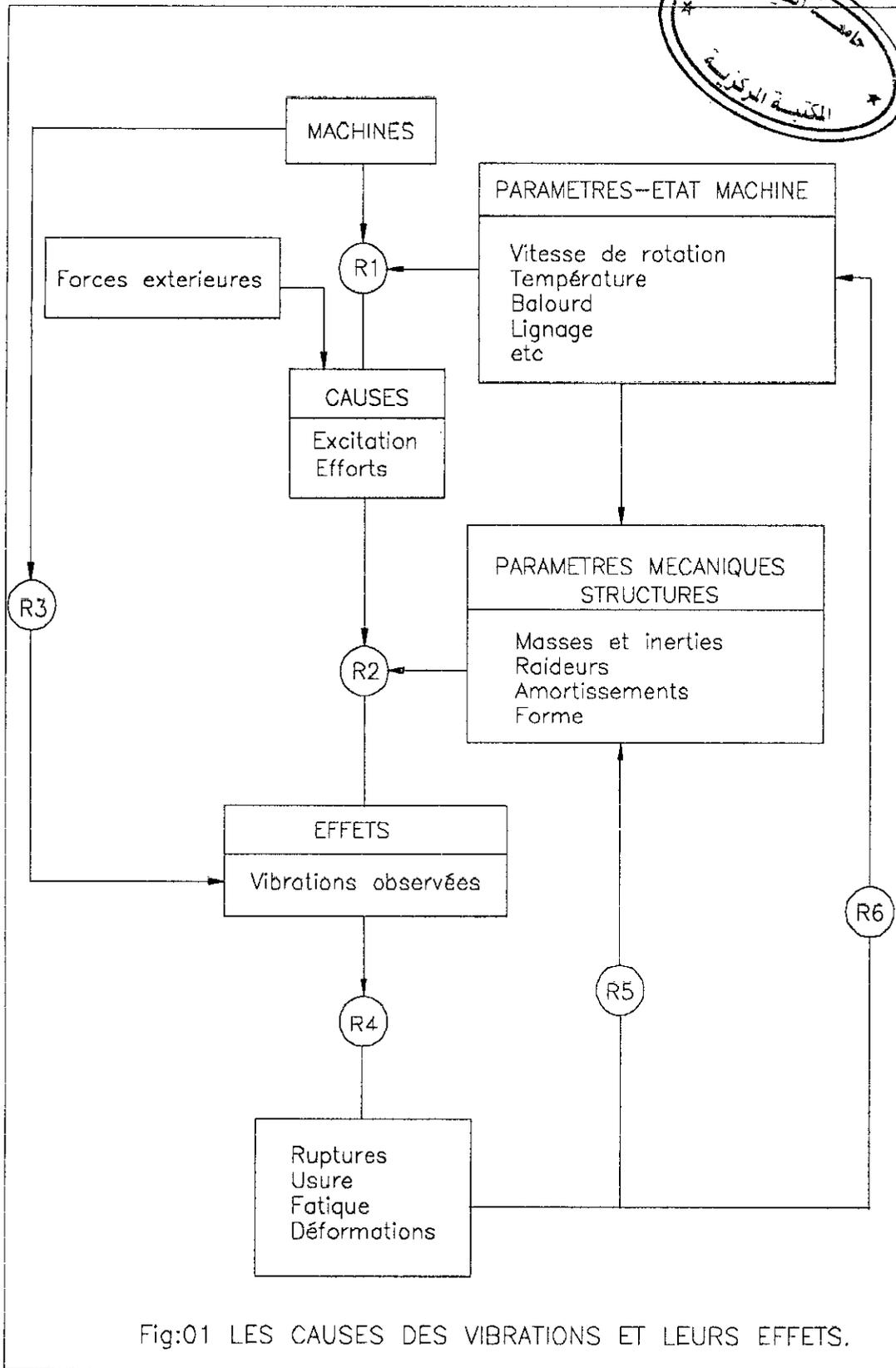


Fig:01 LES CAUSES DES VIBRATIONS ET LEURS EFFETS.

### 1.3-Les vibrations dans les véhicules.

Un véhicule se compose généralement de trois masses essentielles distinctes, à savoir [17,18]:

- Un châssis, comprenant le moteur et la carrosserie;
- Un essieu ou pont avant;
- Un essieu ou pont arrière.

L'ensemble de ces masses est séparé par un certain nombre de ressorts, d'amortisseurs et de pneus, pour donner à l'engin une certaine propriété d'élasticité, diminuant ainsi l'énergie produite par les effets de chocs et de vibrations produites par l'environnement et l'engin lui même.

Les mouvements de cet ensemble vibrant qui se compose généralement ou essentiellement de [17,18]:

- Un mouvement de «Roulis» autour de l'axe longitudinal;
- Un mouvement de «Pilon» ou de rebondissement suivant l'axe vertical au véhicule;
- Un mouvement de tangage autour de l'axe transversal du véhicule;
- Un mouvement de «Tapis» (ou de ballant) suivant l'axe horizontal au véhicule;
- Un mouvement de «Lacet» autour de l'axe vertical du véhicule.

L'ensemble de ces mouvements engendre des vibrations qui agissent de différente façon et à différentes fréquences, selon l'élément générateur.

Les vibrations engendrées au sein du véhicule sont à l'origine de sensation désagréable, de malaise et même de fatigue chez le conducteur. Elles sont aussi signe d'anomalies mécaniques qui finissent par entraîner la détérioration au niveau des paliers, de l'arbre de transmission, et même des fissurations au niveau du châssis quand les excitations deviennent plus importantes.

Les principaux générateurs de vibrations d'un véhicule sont [17,18]:

- Le moteur (couple d'inertie et pression dans les cylindres);
- Les chocs dus aux irrégularités de l'état de surface de la route;
- Le ventilateur de refroidissement;
- L'engrènement dans les boîtes de vitesses;
- Le déséquilibre de l'arbre de transmission;
- Les angles de joint (excitation torsionnelle) etc..

### 1.3.1 - Le moteur.

L'excitation de la structure du moteur est produite d'une part par la variation des forces d'inertie alternatives des pistons et bielles, d'autre part par la variation de la pression dans les chambres de combustion et dans les cylindres au cours des diverses phases du cycle moteur [27].

### 1.3.2 - Carrosserie - suspension.

La suspension a une grande importance dans la construction automobile. Elle est composée généralement d'un ensemble de ressorts à boudin ou à lame et d'amortisseurs hydrauliques.

De ce fait, on rencontre une diversité importante d'articles traitant ce sujet [18]. On trouve différentes méthodes d'analyses théoriques et expérimentales de la suspension.

- Analyse faite à partir d'un filtre de vibration à trois cellules (cellule siège, cellule ressort, cellule pneu) [17,18].
- Analyse séquentielle (la suspension est habituellement soumise à des chocs aléatoires)[18].
- Méthode des chocs [18].
- Calcul des vibrations d'une cabine de véhicule utilitaire en vue d'optimiser la suspension[18].

### 1.3.3 - Transmission.

La transmission dans les véhicules utilitaires est considérée comme source de vibration. Certaines études montrent que les vibrations de la transmission et en particulier de l'arbre moteur sont due au déséquilibre, aux excitations de torsion, aux inerties des masses tournantes et aux effets secondaires du couple moteur [18]. Pour remédier à ces vibrations il existe quelques solutions qui permettent de diminuer au préalable les excitations, parmi elles, on peut citer:

- L'équilibrage du moteur.
- Le montage des éléments par des accouplements élastiques.
- La diminution des masses tournantes.

## 1.4 - Actualité, but et objectifs de la thèse.

La diversité des problèmes de la dynamique et des phénomènes vibratoires a un rôle prépondérant dans les domaines scientifiques et techniques.

Pour étudier, concevoir et réaliser une quelconque machine où mécanisme, il s'avère nécessaire de tenir compte d'un nombre important de caractéristiques et de facteurs, tels que :

- La dissipation d'énergie.
- Les résistances
- Les forces de perturbations extérieures,...

- L'influence du fonctionnement des moteurs.

Ces dernières influent directement sur la dynamique du système étudié [ 2,5,6,9,19,23 ].

Pour répondre aux exigences du monde scientifique et industriel, deux problèmes sont d'actualité : la modélisation des systèmes et l'élaboration d'une théorie rigoureuse qui permet analytiquement de trouver les lois du mouvement des systèmes étudiés.

L'étude analytique et la complexité des phénomènes dynamiques ne permettent pas toujours une approche ou analyse concrète, réaliste et adéquate des systèmes mécaniques et autres, dans ce cas la modélisation et l'outil informatique sont d'un apport considérable.

Le dimensionnement et le choix des éléments d'une machine ou d'un mécanisme donné étaient basés essentiellement sur les phénomènes dynamiques purs, tant que les efforts engendrés dans un élément d'un mécanisme sont inférieurs aux efforts admissibles, ce dernier peut être utilisé, ils ne tenaient pas compte les phénomènes vibratoires au niveau du mécanisme qui peuvent causer à leur tour des efforts de fatigue créant ainsi la rupture des éléments d'une machine.

Dans le cadre de l'originalité de ce problème, une question peut venir à l'esprit, peut-on dimensionner et choisir les éléments d'un mécanisme en se basant sur les phénomènes vibratoires ?

Si on pouvait résoudre les équations du système étudié, que ce soit analytiquement ou numériquement, on peut définir la variation de l'amplitude et la fréquence des vibrations en fonction des caractéristiques du mécanisme, qui pourront minimiser l'amplitude des vibrations et préciser la plage de la fréquence désirée.

On se propose dans cette thèse d'étudier le comportement vibratoire des engins ( camion, voiture, bus...etc. ) soumis à l'effet des différents phénomènes tels que :

- Les irrégularités de la surface d'une route.
- Les efforts des forces motrices.
- Les résistances technologiques.
- La dissipation d'énergie ...etc.

Les résultats de cette étude et leurs analyses permettent la compréhension de certains phénomènes et peuvent ainsi trouver une application dans le domaine de l'industrie.

Nous avons été guidés dans le choix de notre sujet par deux éléments essentiels qu'on résume ci-dessous.

D'une part, disposer d'un premier élément d'outil de modélisation dynamique et de calcul des engins de transport, tout en cherchant à regrouper tous les modèles mathématiques des éléments composant un véhicule (moteur, suspension, éléments de transmission... etc.).

L'étude dynamique d'un engin de transport <sup>est</sup> étant un sujet très vaste, qui demande une équipe de chercheurs, un temps assez important et des moyens matériels considérables, pour être cerné et traité dans son ensemble.

Pour notre part, vu le temps alloué et les moyens matériels assez restreints, on limitera notre sujet à l'étude d'un engin de transport soumis <sup>à</sup> sous l'effet d'un moteur et des irrégularités de la surface de la chaussée.

On se propose de procéder comme suit.

Notre étude propose, dans chacun des chapitres, plusieurs points d'accès qui permettent à l'utilisateur, selon le niveau d'exploitation recherché, d'utiliser les méthodes avec une compréhension globale de la démarche ou d'analyser plus finement les modèles proposés et les éléments théoriques développés.

La thèse débute par un chapitre «**introduction**» dans lequel est faite une étude bibliographique et qui donne un aperçu général sur la notion de vibration au sein d'une machine ou mécanisme, tout en notant quelques moyens de lutte contre les vibrations. En deuxième lieu, on a regroupé les différentes sources de vibrations dans un engin de transport et leurs principaux générateurs.

Le second chapitre traite «**la modélisation d'un engin de transport**» <sup>en développant</sup> qui développe quelques notions générales de modélisation des engins de transport et plus précisément la modélisation des ressorts à boudin, la modélisation des amortisseurs hydrauliques et à la fin la modélisation des pneus. l'intérêt de ce chapitre est d'essayer d'obtenir un modèle mathématique simple pour l'engin de transport et de permettre ainsi de faire théoriquement l'étude dynamique de l'engin en question.

Le chapitre 3 s'intéresse à «**la modélisation d'un moteur à combustion interne**», <sup>On définit</sup> définissant ainsi les différents efforts engendrés par le moteur durant son fonctionnement. Une annexe de ce chapitre traite <sup>de</sup> la thermodynamique des moteurs à combustion interne en déterminant à la fois ces performances en puissance et en rendement en fonction des différents paramètres influant sur le cycle thermodynamique du moteur. La deuxième partie du chapitre traite précisément le comportement dynamique des différents moteurs selon leur nombre de cylindres, le type

de vibration et le type de disposition de ces cylindres ( en ligne ou en V). Le résultat final est de définir les différents efforts engendrés par le fonctionnement du moteur au sein d'un engin de transport et les classés dans des tableaux récapitulatifs suivant le type de moteur.

Le chapitre 4 traite « **la modélisation des irrégularités de la surface des chaussés** ». Les irrégularités de la surface d'une chaussée ne sont pas faciles à modéliser réellement. Elles ont une allure totalement aléatoire. Pour essayer de trouver un modèle adéquat qui reflète au mieux l'allure des irrégularités de la surface d'une chaussée et ainsi définir son influence au niveau d'un engin de transport donné, on utilise, dans ce chapitre, deux types de modélisation: une modélisation simple à approche sinusoïdale où on a supposé les irrégularités, comme étant périodiques à un certain temps, et une modélisation probabilistiques.

Le chapitre 5 propose une «**étude du comportement vibratoire d'un engin de transport TB260 de la S.N.V.I avec sa remorque soumis à l'effet de son moteur et aux irrégularités de la surface de la chaussée (approche simplifiée)**». On détermine dans ce chapitre:

- le modèle mathématique de l'engin TB 260 avec sa remorque.
- l'étude énergétique du modèle ( la détermination des différentes équations différentielles régissant le comportement vibratoire de l'engin en question).
- la détermination des efforts influant au niveau de l'engin (effort du moteur dû aux irrégularités de la surface de la chaussée quand on la considéré comme étant sinusoïdale).
- la résolution numérique des équations différentielles citées ci dessus.
- l'interprétation des résultats trouvés.
- les conclusions.

On se propose dans le chapitre 6 "**l'étude dynamique de l'engin de transport TB 260 avec sa remorque soumis à l'effet des irrégularités de la chaussée: Approche probabilistique**". Pour cela , on procède de la manière suivante:

- définir les caractéristiques probabilistiques des réponses du système d'équations différentielles homogènes régissant le comportement dynamique de l'engin étudié en considérant que les conditions initiales de ce système sont aléatoires et ont des espérances mathématiques et des variances connues.

- résoudre analytiquement et numériquement le système d'équations différentielles non homogènes dans le domaine fréquentiel.

- on définit ainsi les caractéristiques probabilistiques des réponses du système étudié en fonction de ceux du type de route où roule l'engin.

- on termine ce chapitre en définissant les différents coefficients de performance du confort, de stabilité de l'engin et de bon fonctionnement de sa suspension.

On note qu'à la fin de chaque chapitre, on rencontre les conclusions adéquates et les interprétations des différentes courbes et graphes.

A la fin du mémoire, on donne une conclusion regroupant des différents résultats obtenus.

# CHAPITRE II

## CHAPITRE II

### Modélisation d'un engin de transport

#### 2.1- Introduction

L'étude théorique de la dynamique d'une structure mécanique consiste entre autre à déterminer les valeurs propres relatives au modèle mathématique de la structure et à définir ainsi les réponses de ces différents déplacements sous l'effet d'une excitation quelconque.

Les structures mécaniques de grande importance (automobile, aérospatiale...) sont trop complexes pour être analysées par des techniques d'approximation classiques. Afin de remédier aux insuffisances de ces techniques, on utilise aujourd'hui la technique de modélisation des structures,....

Le principe de la méthode consiste à subdiviser la structure en un ensemble de masses ponctuelles reliées entre elles par un ensemble de ressorts et d'amortisseurs; l'ensemble réagit de la même manière que la structure elle même.

A partir des équations du mouvement de chaque masse et des équations relatives aux conditions aux limites entre les masses, on forme un grand ensemble d'équations décrivant les propriétés dynamiques de la structure.

L'avantage de la modélisation est qu'elle peut être implantée sur ordinateur et exploitée par l'intermédiaire de codes de calcul. Sa mise en œuvre repose essentiellement sur trois étapes suivantes.

- Préparation des données.
- Calcul.
- Exploitation et interprétation des résultats.

##### 1- Préparation des données

L'engin de transport est décomposé en un ensemble de masses ponctuelles à savoir le châssis , la carrosserie , les essieux avant et arrière et le siège du conducteur. Cet ensemble est interconnecté en des points remarquables.

Une fois la géométrie du système arrêtée, on procède à la définition des caractéristiques physiques des éléments (rigidité, inertie, amortissement), des conditions aux limites ( liaisons, chargements, sollicitations, etc.), ainsi que le type et les conditions de résolution souhaitée.

## 2- Phase de calcul

Dans le domaine qui nous intéresse à savoir la recherche des fréquences et des modes propres du système vibratoire, le calcul consiste à résoudre le problème aux valeurs propres relatives à un système construit à partir des matrices de rigidité et de masse conformément aux caractéristiques de la structure:

$$[K][\phi] = [M][\phi][\Lambda] \quad (2.1)$$

où  $[K]$  et  $[M]$  : respectivement matrices de rigidité et de masse. Elles sont réelles symétriques.

$[\phi] = [\dots\phi\dots]$  matrice des vecteurs propres ou matrice modale.

$[\Lambda] = [\lambda_i]$  matrice des valeurs propres (diagonale) ou matrice spectrale.

$i = 1, n$ ;  $n$ : nombre de d.d.l. total du système.

Pour un mode de vibration  $i$  quelconque du système l'équation (2.1) s'écrit:

$$([K] - \lambda_i[M])\phi_i = 0 \quad (2.2)$$

avec  $\lambda_i$  et  $\phi_i$  sont respectivement la valeur propre et le vecteur propre correspondant à ce mode.

Selon la taille du système, le besoin en mode et la bande de fréquence utile, le calcul peut être effectué suivant différentes méthodes classées dans les trois catégories suivantes:

- Méthodes d'itérations vectorielles -directe, inverse ou inverse avec translation de spectre- basées sur la résolution directe du problème.

$$[K][\phi] = \lambda[M][\phi] \quad (2.3)$$

Méthodes de transformations matricielles -Jacobi, Lauez, Givens, Householder, Q.R.,...- basées sur les relations d'orthogonalité

$$\begin{aligned} [\phi]^T [M][\phi] &= [I] \\ [\phi]^T [K][\phi] &= [\Lambda] \end{aligned} \quad (2.4)$$

- Méthodes de recherches polynomiales des racines (méthode de recherche du déterminant, méthode de séquence de Stern, méthode d'itération dans un sous espace).

La plupart des algorithmes de résolution actuels combinent les trois groupes de méthodes citées ci dessus. Les facteurs influençant le choix d'une méthode particulière sont:

- La taille du problème.
- Le nombre de solutions propres recherchées et leur position dans le spectre.

- La largeur de bande des matrices  $[K]$  et  $[M]$ .

Une fois le calcul effectué on procède alors à l'exploitation et à l'interprétation des résultats issus de cette phase.

### 3- Avantages et inconvénients de la méthode de modélisation

L'avantage majeur de la méthode de modélisation est sa généralité. Elle peut être utilisée pour déterminer les fréquences de n'importe quelle structure linéaire élastique à travers le modèle correspondant à cette structure. Elle ne présente pas cependant que des avantages en dynamique des structures. Les avantages et les inconvénients les plus courants peuvent être résumés comme suit :

#### **- Avantages**

- Le modèle peut être construit et utilisé indépendamment du prototype, mais selon un plan élaboré sur celui-ci.
- Le modèle peut prédire ou prévoir le comportement des structures dans les conditions réelles.
- Les modifications éventuelles de la structure à travers son modèle sont moins contraignantes, moins coûteuses et se font dans un délai de temps très court par rapport à celles effectuées sur le prototype.

#### **- Inconvénients**

- La modélisation est généralement faite selon l'intuition de l'opérateur.
- Le modèle est relativement incorrect vis à vis de la structure réelle (rigidité plus ou moins grande, non considération de certaines caractéristiques physiques ou conditions aux limites, impossibilité de modélisation de certaines parties de la structure)
- La modélisation est limitée par la précision, celle-ci augmente avec le nombre de masses formant le modèle.

En tenant compte des avantages et des inconvénients, on est souvent conduit à effectuer des essais sur la structure réelle en vue d'ajuster et de valider le modèle et ceci constitue les parties essentielles à savoir le recalage des modèles.

## **2.2- Modélisation des ressorts à boudin**

### **2.2.1- Définition**

Un ressort à boudin est un ressort cylindrique hélicoïdal travaillant à la compression. Il est formé par une barre de forme circulaire autour du cylindre circulaire de rayon constant (figure 2.1). Chaque ressort est caractérisé par les éléments suivants:

- La forme de la section droite de la barre qui le constitue.
- Le diamètre moyen des spires qui forment le ressort.
- Le pas du ressort, qui est déterminé par l'angle d'inclinaison  $\alpha$  du plan portant la spire au plan horizontal.
- Le matériau de la barre qui forme le ressort

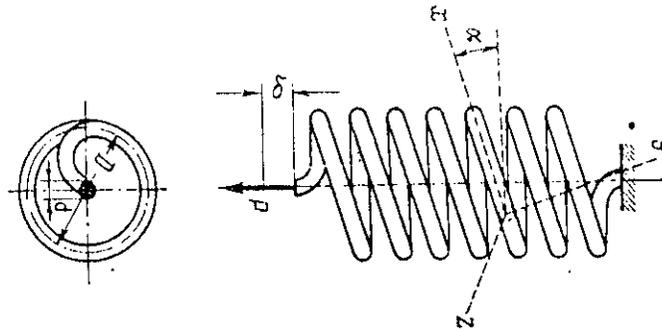


Fig. 2.1 : Description d'un ressort cylindrique hélicoïdal

### 2.2.2- Analyse des efforts intérieurs à la barre du ressort dûs au phénomène de traction ou de compression

Vue la diversité des types de ressorts qui existe dans la pratique, on va s'intéresser à l'étude des ressorts cylindriques hélicoïdaux à section droite circulaire, qui sont d'ailleurs très utilisés dans les éléments de suspensions des véhicules où dans le domaine de l'automobile en général.

Ainsi, soit un ressort cylindrique hélicoïdal à section droite circulaire dont les caractéristiques essentielles sont les suivantes (fig2.2):

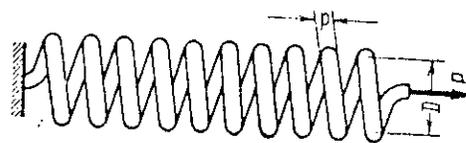


Fig.2.2 : Ressort cylindrique hélicoïdal à section droite circulaire

- d: diamètre de la section droite de la barre du ressort
- D: diamètre moyen d'une spire du ressort
- n: nombre de spire formant le ressort
- $\alpha$ : l'inclinaison du plan portant une spire au plan horizontal
- X: axe tangent à la ligne moyenne d'une spire



Y: axe perpendiculaire aux plan xoz portant une spire

$\sigma_{adm}$  et  $\tau_{adm}$ : respectivement les contraintes admissibles normale et tangentielle du matériau de la barre du ressort

Si les extrémités de la barre sont portées au centre des spires et sont soumises à une force de traction ou de compression P le long de l'axe du ressort. Les efforts intérieurs au niveau de chaque section droite de la barre se réduisent aux éléments suivants [25] (fig.2.3):

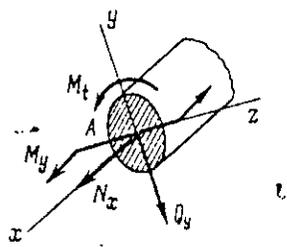


Fig.2.3 : Composition des efforts dans une section droite d'un ressort.

- Un effort de traction  $N_x = P \cdot \sin \alpha$  (2.4)

- Un effort tranchant  $Q_y = P \cdot \cos \alpha$  (2.5)

- Un moment de torsion autour de l'axe X produit par l'effort tranchant  $Q_y$

$$M_t = P \cdot \frac{D}{2} \sin \alpha \quad (2.7)$$

- Un moment fléchissant autour de l'axe Y dû à l'action de l'effort normal  $N_x$

$$M_y = P \cdot \frac{D}{2} \sin \alpha \quad (2.8)$$

Le point le plus sollicité au niveau de chaque section droite de la barre est bien entendu son centre.

Les contraintes intérieures normale et tangentielle au niveau d'une section droite de la barre, suivant la théorie de la résistance des matériaux R.D.M. s'expriment de la manière suivante [25]:

- La contrainte normale est égale à:

$$\sigma = \frac{N_x}{S} + \frac{M_y}{W} \quad (2.9)$$

où:

S: aire de la section droite de la barre formant le ressort.

$$S = \frac{\pi}{4}d^2$$

W: le module de flexion de la section droite du ressort, qui est le rapport entre le moment d'inertie de la section droite du ressort suivant l'axe Y ou Z et son rayon.

$$W = \frac{\pi d^3}{32}$$

En exprimant les différents éléments de la formule (2.9) par leurs expressions, on aura l'expression de  $\sigma$ .

$$\sigma = \frac{16PD}{\pi d^3} \left(1 + \frac{d}{4D}\right) \sin \alpha \quad (2.10)$$

De la même manière qu'on a déterminé la formule définissant la contrainte normale au niveau de la section de la barre formant le ressort, on définit la contrainte tangentielle  $\tau$ .

$$\tau = \frac{Q_y}{S} + \frac{M_t}{W_p} \quad (2.11)$$

où  $W_p$  est le rapport entre le moment d'inertie polaire de la section droite et son rayon.

$$W_p = \frac{\pi d^3}{16}$$

et  $\tau$  sera égale à:

$$\tau = \frac{8PD}{\pi d^3} \left(1 + \frac{d}{2D}\right) \cos \alpha \quad (2.12)$$

La condition de résistance selon la troisième hypothèse de résistance est:

$$\sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2} = \frac{16DP}{\pi d^3} \sqrt{\left(1 + \frac{d}{4D}\right)^2 \sin^2 \alpha + \left(1 + \frac{d}{2D}\right)^2 \cos^2 \alpha} \leq \sigma_{adm} \quad (2.13)$$

**Remarque:** [25]

La formule (2.13) peut subir des simplifications ou corrections selon la plage de grandeur de l'angle  $\alpha$  et du rapport  $\frac{d}{D}$ .

- Si  $\alpha \leq 14^\circ$  et  $\frac{D}{d} > 10$ , on néglige le phénomène de flexion par rapport à la torsion et ain-

si donc la formule (2.13) devient:

$$\frac{8DP}{\pi d^3} \leq \tau_{adm} \quad (2.14)$$

- Quand la courbure de la spire est grande ( $\frac{D}{d} > 10$ ), il est commode de tenir compte de l'effet de la courbure par un coefficient C égale à:

$$C = \frac{\frac{D}{2} - 0.25}{\frac{D}{d} - 1} + \frac{0.615}{\frac{D}{d}} \quad (2.15)$$

qui est inclus dans la condition de résistance (2.14)

$$C = \frac{8DP}{\pi d^3} \leq \tau_{adm} \quad (2.16)$$

### 2.2.3- Déplacement longitudinal (axial) de l'extrémité libre du ressort.

L'application de la théorie de la R.D.M. dans l'étude du comportement dynamique des ressorts cylindriques hélicoïdaux soumis à l'effet de traction ou de compression détermine le déplacement axial  $\delta$  de l'extrémité libre du ressort et est égal à :

$$\delta = \frac{8PD^3n}{d^4 \cos \alpha} \left[ 2 \left( 1 + \frac{d^2}{4D^2} \right) \frac{\sin^2 \alpha}{E} + \left( 1 + \frac{d^2}{2D^2} \right) \frac{\cos^2 \alpha}{G} \right] \quad (2.17)$$

où E et G représentent respectivement les modules d'élasticité longitudinal et transversal du matériau de la barre formant le ressort.

Pour un ressort de faible pas, le déplacement peut être calculé d'une façon assez exacte [25] en tenant seulement compte de la déformation de torsion par la formule.

$$\delta = \frac{8.P.D^3.n}{G.d^4} \quad (2.18)$$

### 2.2.4- Conclusion

Pour qu'un ressort à boudin puisse résister aux efforts extérieurs axiaux au niveau de ces extrémités, il faut que ces caractéristiques vérifient l'inégalité de résistance (2.13), (2.14) où (2.16) selon le cas.

Le coefficient de rigidité (raideur) du ressort est défini par la formule (2.17) où (2.18) selon l'importance des phénomènes de flexion et de torsion au niveau du ressort.

dans le cas général où on tient compte des phénomènes de flexion et de torsion à la fois, on utilise la formule (2.17) et on aura ainsi:.

$$\kappa = \frac{8D^3 n}{d^4 \cos \alpha} \left[ 2 \left( 1 + \frac{d^2}{4D^2} \right) \frac{\sin^2 \alpha}{E} + \left( 1 + \frac{d^2}{4D^2} \right) \frac{\cos^2 \alpha}{G} \right]^{-1} \quad (2.19)$$

Dans le cas où on prend en considération que le phénomène de torsion, le raideur du ressort sera égale à:

$$\delta = \frac{8.D^3.n}{G.d^4} \quad (2.20)$$

## 2.3- Modélisation des ressorts à lames

### 2.3.1- Définition

Les ressorts à lames sont des types de ressorts spéciaux employés surtout dans la suspension des véhicules.

Ils sont formés par un empilement de poutres minces (lames) afin de permettre d'obtenir le phénomène de flexion qui est la base du fonctionnement de ce type de ressort. La première lame, dite maîtresse, elle porte éventuellement un œillet à chaque extrémité pour l'assemblage avec les jumelles des menottes de suspension du châssis du véhicule quand ces menottes existent. Fig.2.4:



Fig. 2.4: Description d'un ressort à lames.

Les autres lames sont disposées en retrait par étagement égaux jusqu'à la bride d'assemblage centrale par laquelle le ressort prend appui sur l'essieu du véhicule.

Les caractéristiques générales des lames formant le ressort sont:

- Tronqués aux extrémités en forme de triangle;
- Les lames ont généralement une même épaisseur;

Les lames possèdent une courbure initiale afin d'augmenter la course de la partie suspendue.

### 2.3.2- Application de la théorie de la flexion au calcul des ressorts à lames.

Avant d'entamer directement l'étude détaillée des ressorts à lames, où l'on tient compte de la courbure des lames et de l'équilibre individuel de chaque lame à part, tout en tenant compte du frottement entre lames, étudions le phénomène de flexion d'une poutre élastique. Elle sera utile pour la simplification des calculs des ressorts à lames.

Soit une poutre console d'égale résistance chargée d'une force concentrée  $P$  à son extrémité libre et ayant une section rectangulaire d'épaisseur  $h$  constante (fig.2.5). Déterminons la loi de la variation de la contrainte normale  $\sigma$  ainsi que la flèche de l'extrémité libre de la poutre.



Fig. 2.5 Schéma d'une poutre triangulaire.

La théorie d'élasticité des poutres fléchies nous permet de déterminer la variation du moment de flexion et de la contrainte normale le long de la poutre à l'aide respectivement des formules suivantes.

$$M(x) = P \cdot x \quad (2.21)$$

$$\sigma(x) = \frac{M(x)}{W(x)} = \frac{6 \cdot P \cdot L}{\frac{1}{2} \cdot B \cdot h^3} \cdot y$$

La déformation de la poutre est donnée par la formule suivante.

$$\frac{d^2 f}{dx^2} = \frac{M(x)}{E \cdot I} \quad (2.22)$$

où

$f$ : déformée de la poutre

$w$ : est le module de flexion =  $I/y_{\max}$ .

$$\frac{d^2 f}{dx^2} = \frac{P \cdot x}{E \cdot \frac{Bx}{L} \cdot \frac{h^3}{12}} = \frac{12 \cdot P \cdot L}{B \cdot h^3 \cdot E} \quad (2.23)$$

Pour déterminer la flèche de l'extrémité libre de la poutre, on doit intégrer l'égalité (2.23) deux fois, et on aura la relation suivante.

$$f = \frac{6.P.L^3}{B.h^3.E} \quad (2.24)$$

Découpons cette poutre en  $2n$  bandes parallèles à son axe, comme l'indique la figure 2.6 et réunissons les bandes symétriques deux à deux de façon à former des lames à extrémités triangulaires; empilons ensuite ces dernières de manière à obtenir l'ensemble représenté sur la figure 2.6

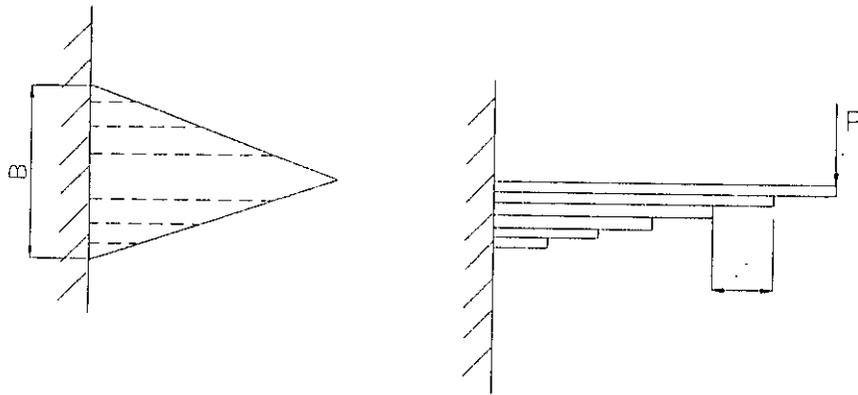


Fig. 2.6 Décomposition d'une poutre triangulaire.

Cet empilement est élastiquement équivalent à la poutre triangulaire initiale [33]. En effet, sous l'action de la charge  $P$  agissant à son extrémité la lame supérieure se courbe et vient prendre appui sur l'extrémité de la seconde, la réaction mutuelle étant  $P$ ; la seconde plie à son tour vient prendre appui sur la troisième, et ainsi de suite. Dans cette déformation, une lame quelconque est fléchie dans sa partie triangulaire qui est d'ailleurs un cercle de rayon  $Eh/2\sigma$  [33], indépendant du numéro d'ordre de la lame. Au delà, la largeur reste constante mais le moment fléchissant également; puisqu'il se réduit au compte  $P.\lambda$  (fig.2.6), de sorte que la même forme circulaire persiste pour l'élastique. La déformation étant terminée, toutes les lames auront donc même courbure, de sorte que le ressort ne baillera pas et la sollicitation du matériau, ainsi que la déformation, seront identiques à celle de la pièce théorique [33].

On pourrait croire que, les lames ayant toutes même forme après déformation, elles se toucheront partout et répartiront les réactions sur toute leur longueur, ce qui modifierait leur sollicitation. C'est une erreur [33]; le rayon de courbure se mesure, en Effet, sur la fibre moyenne de chaque lame, de sorte que le rayon extérieur d'une lame est toujours supérieur au rayon intérieur de la lame située immédiatement au dessus, et que ces lames ne se toucheront qu'à leurs extrémités.[33]

Ceci établi, nous pouvons appliquer les résultats précédents à l'étude du demi ressort, en remplaçant  $B$  par la largeur totale  $nb$  des lames du ressort.

Appelons  $L$  la demi longueur du ressort,  $n$  le nombre de lames,  $b$  et  $h$  la largeur et l'épaisseur d'une lame.

On a  $B = nb$ , donc, en appliquant les formules (2.24), on aura:

$$f = \frac{6L^3P}{nb.h^3E} \quad (2.25)$$

Ainsi donc, la rigidité du ressort à lame sera égale à:

$$K = \frac{nb.h^3E}{6L^3} \quad (2.26)$$

Remarque:[33]

Ces formules donnent des résultats cadrant avec l'expérience, pourvu que pour  $E$  on prenne  $200 \text{ KN/mm}^2$  et non  $210 \text{ KN/mm}^2$ , qui est le chiffre pour des lames isolées. Cette diminution de  $E$  est nécessaire pour compenser les petites erreurs résultant des approximations auxquelles nous avons eu recours ci-dessus.

On a développé une théorie complète des ressorts à lames, où l'on tient compte de la courbure et de l'équilibre individuel de chaque lame, cette étude compliquée est sans grand intérêt, vu qu'on y néglige, comme dans la théorie sommaire, les frottements entre lames qui est en réalité une grande importance.

Vierendeel [33] a conclu de ses recherches expérimentales que la théorie complète cadrerait moins bien l'expérience que la théorie simplifiée ci-dessus.

# CHAPITRE III

## CHAPITRE III.

### Modélisation dynamique des moteurs à combustion interne

#### 3.1- Définition

Un moteur à combustion interne est un moteur thermique transformant l'énergie calorifique (chaleur) en énergie mécanique (travail).

La combustion du carburant dans le cylindre dégage beaucoup de chaleur et libère sous faible volume et forte pression, une grande quantité de gaz qui repousse la paroi mobile (piston) du cylindre (course motrice). Le mouvement rectiligne du piston est transformé en mouvement circulaire continu par le système bielle - manivelle.

L'inertie des organes tournant est suffisante pour ramener le piston en sens inverse [27].

On distingue deux types essentiels de moteurs à combustion interne, que l'on va les identifier par la suite, à savoir le moteur à essence et le moteur Diesel.

Un moteur à combustion interne est composé essentiellement de:

1- Un cylindre dont il est le siège de la combustion. C'est la chemise cylindrique amovible que l'on doit pouvoir

- soit rénover par réalésage

- soit remplacer

2- Un piston, partie active et la plus importante des pièces qui constituent le moteur. Il doit assumer de multiples fonctions tout en souscrivant à des impératifs particulièrement discordantes à savoir [27]:

a - Recevoir et transmettre les successions d'efforts intenses nés de pressions de combustion élevées et brutales sans subir de déformation appréciable de l'ensemble même après plusieurs milliers d'heures.

b- Diffuser les importants flux thermiques qui, transférés par des gaz sous pressions élevées et turbulentes, sont entrés par la tête du piston.

c- Assurer l'étanchéité aux gaz de combustion tout en contrôlant l'accès de l'huile à la chambre de combustion.

d- Etre aussi léger que possible.

3- Une culasse (couvercle de la chemise), elle fournit le point d'application aux efforts par les pressions provoquées par la combustion. Elle est donc soumise à des efforts de fatigue intense

auxquels elle doit faire face sans se déformer afin que l'étanchéité entre elle même et le cylindre reste assurée. Par surcroît [27 ]:

- Elle ne doit pas se fissurer malgré les inéluctables concentrations de contraintes mécaniques et thermiques.

- Elle doit évacuer une partie importante des calories qui, produites par la combustion, ne sont pas transformées en travail.

- Elle doit recevoir les soupapes et conduites assurant l'admission de l'air et l'évacuation des gaz brûlés.

4- Une bielle, essentiellement en forme de poutre - colonne chargée en bout où se logent des coussinets à ses deux extrémités. Elle doit être suffisamment rigide pour résister au flambement et légère autant que possible, car elle constitue une partie importante des masses en mouvement.

5- Un vilebrequin, a pour fonction d'achever la transformation de l'effort moteur alternatif en un mouvement rotatif fournissant un couple utile. C'est un arbre coudé, à succession de manivelles angulairement décalées les unes par rapport aux autres, tournant dans des paliers limitant les déplacements angulaires subis par les axes des tourillons, ces paliers sont confondus avec les appuis de la poutre.

6- Un bâti - cylindre, il a pour mission, complété par la culasse, de fournir des points d'application aux efforts engendrés par les pressions nées de la combustion des gaz. Il a pour mission aussi d'assurer la rigidité de la structure du moteur quelque soient, en force, en sens, en direction et en nature, les contraintes extérieures et intérieures auxquelles il est soumis.

L'ensemble doit être conçu pour que [27]:

- Ces points d'application soient judicieusement placés au point de vue cinématique et pour qu'il résiste aux contraintes mécaniques et thermiques dont ils sont l'objet.

- Evacuer une partie de calories, qui, produites par la combustion, ne sont pas transformées en travail.

- L'absence de déformation du bâti-cylindre afin de conserver les formes géométriques pour permettre le déplacement des pièces mobiles avec précision.

- Les moteurs Diesel devront avoir un bâti-cylindre plus robuste que leur homologue à essence, à cause de la grandeur de la pression dans leur chambre à combustion [27].

En somme, un bâti-cylindre devra conserver une forme géométrique initiale, pour cela, il nécessite l'emploi des bâtis fortement structurés conçus en fonction des contraintes mécaniques et

thermiques, élaborés dans un matériau aussi homogène que possible, possédant un grand module d'élasticité, un faible coefficient de dilatation, une diffusivité thermique élevée et un allongement limite A% aussi important que possible [27].

### 3.2- Analyse de la nature et intensité des efforts appliquées à un bâti - cylindre

Un bâti - cylindre est l'objet de contraintes mécaniques provenant [27]:

- des forces de la compression de l'air et de la combustion des gaz.
- des forces d'inertie nées du déplacement des pièces mobiles.

#### 3.2.1- Forces nées de la compression de l'air et de la combustion des gaz [27]

La pression P régnant dans la masse gazeuse à un instant donné va créer des efforts purement intérieurs au moteur (fig. 3.1).

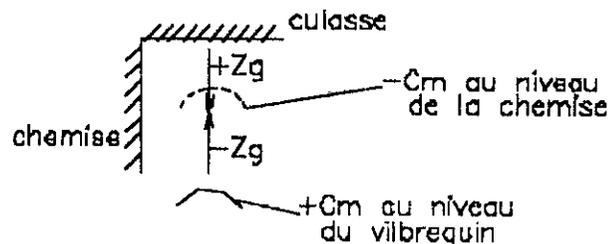
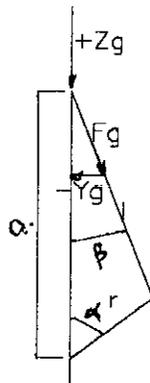


Fig. 3.1 : Description des efforts au niveau d'un moteur.

- Au niveau de la chemise, les pressions radiales s'auto - équilibrent.
- Au niveau du piston, les forces de pression  $Zg$  ( $Zg = P \frac{\pi D^2}{4}$ ) sont:
  - \* de direction et de sens fixés
  - \* de grandeur variable et de périodicité  $4\pi$  (pour des moteurs 4 temps) ou  $2\pi$  (pour des moteurs 2 temps)
  - \* au niveau de la culasse, les forces de pression sont égales et opposées à  $Zg$  ( $-Zg$ )

#### 3.2.1.1- Analyse de l'effort $Zg$ au niveau du piston



$$F_g = \frac{Z_g}{\cos \varphi} = \frac{P \pi \frac{D^2}{4}}{\sqrt{1 - \left(\frac{r}{l}\right)^2 \sin^2 \alpha}} \quad (3.27)$$

$$-Y_g = Z_g \operatorname{tg} \varphi = \frac{P \pi \frac{D^2}{4} \sin \alpha}{\sqrt{1 - \left(\frac{r}{l}\right)^2 \sin^2 \alpha}} \quad (3.28)$$

$$C_Y = -Z_g \cdot a \cdot \operatorname{tg} \varphi \quad (3.29)$$

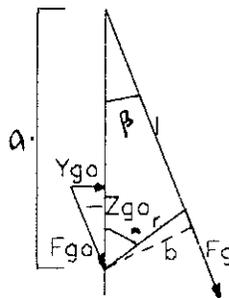
La force  $+Z_g$  ayant agité sur le piston se et se transmet intégralement (aux frottement près) aux coussinets et du palier et soumet de ce fait le bâti - cylindre à une extension.

Elle a 2 composantes [27]:

- une composante  $F_g$  (force motrice) dirigée suivant la bielle se traduisant par une compression dans celui ci.

- une composante  $-Y_g$  (une force d'appui normale à la génératrice du cylindre) située dans le plan d'oscillation de la bielle, créant une poussée latérale sur la chemise et un couple  $C_Y$  autour de O.

### 3.2.1.2- Analyse des forces et des moments au niveau du palier du vilebrequin



$$F_{g_n} = F_g = \frac{P \pi \frac{D^2}{4}}{\sqrt{1 - \left(\frac{r}{l}\right)^2 \sin^2 \alpha}} \quad (3.30)$$

$$C_m = F_g \cdot b = F_g \cdot a \cdot \sin \alpha = F_g \cdot a \cdot \frac{r}{l} \sin \alpha \quad (3.31)$$

$$\text{avec } a = l \sqrt{1 - \left(\frac{r}{l}\right)^2 \sin^2 \alpha} + r \sin \alpha$$

La composante  $F_g$  se transmet intégralement au maneton, elle y est équivalente à une force  $F_{g0}$  appliquée en O et à un couple  $C_m = -F_g \cdot b$  (avec  $b = a \cdot \sin\phi$ )

$F_{g0}$ , elle-même, comprend deux composantes, l'une verticale, notée  $Z_{g0}$  et une horizontale  $Y_{g0}$ .

En faisant le bilan des forces et des moments dans le système mobil on aura:

$$Z_g = Z_{g0} \quad \text{suivant la verticale}$$

$$-Y_g = Y_{g0} \quad \text{suivant l'horizontale}$$

Le moment par rapport à O de l'effort  $-Y_g$  est égal au moment moteur  $C_m = -C_g$

$$\text{où } C_g = -C_m.$$

**3.2.1.3- Les forces transmises aux parties fixes du moteur du fait de la pression des gaz sont [27]:**

- $Z_g$  sur la culasse

- $Y_g$  sur la chemise

+ $Z_g$  sur le coussinet du palier

+ $Y_g$  sur le coussinet du palier

La force résultante extérieure et donc nulle .

$F_g$  est une force ondulée entre O et + $Z_g$  appliquée sur les paliers par conséquent sur le bâti - cylindre.

Les couples appliqués au système sont:

+ $C_m$  au niveau du vilebrequin

- $C_y$  au niveau du bâti.

Deux couples égaux et opposés.

Le couple de renversement  $-C_m$  tend à faire tourner le moteur autour de l'axe OX. Pour y remédier, on lie l'ensemble du bâti - cylindre au socle soit rigidement, soit élastiquement, dans ce dernier cas le moteur va prendre une position inclinée par rapport à la position de repos, dont l'angle avec l'axe OZ varie en amplitude au cours de chaque cycle.

Pour diminuer ces effets on a tendance à multiplier le nombre de cylindre et à jouer sur leur position, sur l'ordre de l'allumage et sur le type du vilebrequin [27].

**3.2.2- Forces d'inertie provoquées par le déplacement des pièces mobiles**

Les masses des pièces mobiles (piston, bielle, manivelle) créent des forces d'inertie de nature divers, telles que des forces d'inertie alternatives et d'inertie rotatives [27].

Vue la complexité de la géométrie de la bielle, on ne peut pas définir aisément les forces d'inertie engendrées par le déplacement de sa masse.

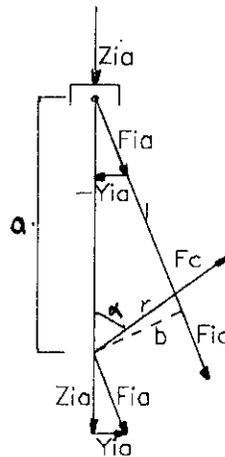
Il est heureusement possible d'assimiler la bielle à deux masses indépendantes concentrées à ces extrémités de telle sorte que:

- la somme des deux masses est égale à la masse de la bielle
- le barycentre des deux masses ponctuelles de la bielle fictive se trouve au centre de gravité de la bielle.

En pratique, on concentre au pied de la bielle  $1/3$  (où  $1/4$  dans le cas de bielle - biellette ou bielle à fourche) de la masse totale de la bielle et à la tête de bielle  $2/3$  (ou  $3/4$ ) de cette masse totale.

### 3.2.2.1- Forces d'inertie alternatives

Le déplacement alternatif du piston + pied de bielle sur l'axe OZ crée une force d'inertie verticale,  $Z_{ia}$ , de forme sinusoïdale de période  $2\pi$ . Elle se transmet de la même manière que  $Z_g$  sur les coussinets du palier et crée ainsi:



$$F_{ia} = \frac{Z_{ia}}{\sqrt{1 - \left(\frac{r}{l}\right)^2 \sin^2 \alpha}} \quad (3.32)$$

$$Y_{ia} = Z_{ia} \cdot \text{tg} \varphi$$

$$F_c = C \cdot m \cdot \omega$$

$$C m_{ia} = Z_{ia} \cdot a \cdot \text{tg} \varphi \quad (3.33)$$

$$-C m_{ia} = Y_{ia} \cdot a$$

a - deux forces alternées par rapport à O  
 - une force verticale sinusoïdale,  $Z_{ia}$ , qui n'équilibre aucune force équivalente agissant sur la culasse.

- une force horizontale sinusoïdale  $Y_{ia} = Z_{ia} \cdot \text{tg} \varphi$

b- Deux couples de grandeur cycliquement variable et de période de  $2\pi$

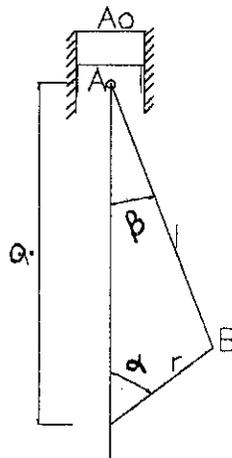
- un couple  $C_{mia}$  venant se composer avec le couple moteur  $C_m$  sur le vilebrequin.

- un couple  $C_{mia}$  qui va s'ajouter avec le couple de basculement  $-C_m$  sur le bâti - cylindre.

L'analyse de la grandeur et la nature de l'effort,  $Z_{ia}$ , se fait comme suit:

Soit,  $M_{alt}$ , la masse du piston + tête de bielle qui va pivoter le long de l'axe OZ. A un instant donnée, elle va se trouver en une position A par rapport au PMH pris comme origine du mouvement ( $A_0$ ).

En projetant le contour ABO successivement sur OX et OY, on obtient:



$$OA = r \cdot \cos \alpha + l \cdot \cos \varphi \quad (3.34)$$

$$r \cdot \sin \alpha = l \cdot \sin \varphi$$

En posant:  $\frac{l}{r} = \lambda$ , on trouve successivement:

a- la distance

$$AA_0 = r(1 - \cos \alpha) + l \left( 1 - \sqrt{1 - \frac{\sin^2 \alpha}{\lambda^2}} \right) \quad (3.35)$$

Etant donnée que la valeur  $\frac{\sin^2 \alpha}{\lambda}$  est très petite devant 1, on va assimiler l'expression

$$\sqrt{1 - \frac{\sin^2 \alpha}{\lambda^2}} = 1 - \frac{\sin^2 \alpha}{2\lambda^2} \quad (3.36)$$

Ainsi l'expression de AA0 devient presque égale à:

$$A_0A = r \left( 1 - \cos \alpha + \frac{\sin^2 \alpha}{2\lambda} \right) \quad \text{avec } \lambda = \frac{l}{r} \quad (3.37)$$

Si la manivelle du vilebrequin tourne à une vitesse de rotation constante  $\omega$ , la position de ce dernier sera définie à tout instant de la manière suivante  $\alpha = \omega.t$ .

La vitesse de l'ensemble piston + tête de bielle sera égale à:

$$\frac{dAA_0}{dt} = r\omega \left( \sin \alpha + \frac{\sin 2\alpha}{2\lambda} \right) \quad (3.38)$$

L'accélération de l'ensemble sera ainsi:

$$\frac{d^2AA_0}{dt^2} = r\omega^2 \left( \cos \alpha + \frac{\cos 2\alpha}{\lambda} \right) \quad (3.39)$$

Une fois l'accélération du système «piston + tête de bielle» définie, on peut définir l'effort d'inertie alternatif provoqué par le déplacement de la masse Malt.

$$Zia = Malt. \frac{d^2AA_0}{dt^2} = Malt.r\omega^2 \left( \cos \alpha + \frac{\cos 2\alpha}{\lambda} \right) \quad (3.40)$$

### 3.2.2.2- Force d'inertie centrifuge

La rotation de la manivelle et le pied de bielle engendrent, en O, une force centrifuge,  $\vec{F}_c$ , pratiquement constante ( $\omega$  constante), égale à  $m.l.\omega^2$ , l étant la distance séparant le centre de la masse de l'ensemble (manivelle +tête de bielle) et le centre O. Cette force  $m.l.\omega^2$  est transmise au coussinet de palier, donc au bâti.

Des contrepoids fixés sur les flasques du vilebrequin permettent de réduire l, et donc d'abaisser l'amplitude de cette force tournante.

### 3.2.2.3- Conclusion

Les forces d'inertie alternatives dues au déplacement du piston et la tête de bielle et centrifuge dues à la rotation de la manivelle du vilebrequin et le pied de bielle, engendrent [27]:

a - Des efforts

Zia alternative et verticale sur le coussinet du palier

Yia alternative et horizontale

-Yia alternative et horizontale sur la chemise

Fc (éventuellement) force tournante d'amplitude constante sur les coussinets de palier.

b- Des couples de périodicité  $2\pi$

Cmia se composant avec le couple moteur sur le vilebrequin.

- $C_{mia}$  se composant avec le couple de basculement sur le bâti.

### 3.3- Composition des forces de combustion d'inertie au sein du bâti - cylindre

Les forces et les couples ( $Z_g, -Z_g, Y_g, -Y_g, Z_{ia}, Y_{ia}, -Y_{ia}, +m.l.\omega^2, -C_m, -C_{min}$ ) engendrées dans un mono-cylindre se composent dans un poly-cylindre pour soumettre l'ensemble du bâti à des sollicitations cycliques, dont la nature et l'amplitude dépendent de certains facteurs tel que [27]:

- Le nombre et la disposition des cylindres et des manivelles
- L'ordre d'allumage des cylindres
- La conception de l'ossature du bâti
- Le mode de fixation du moteur sur le châssis

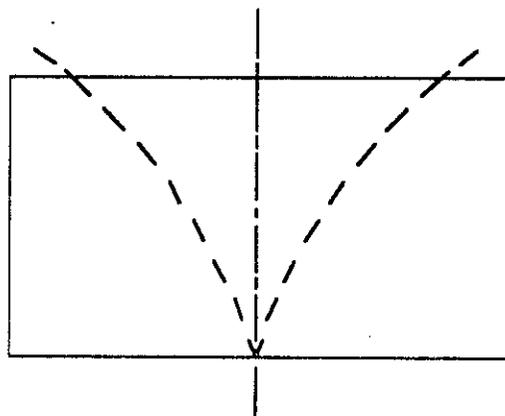
Vue la périodicité des sollicitations citées ci dessus, ces dernières vont se manifester tout d'abord par d'importants efforts de cisaillement entre cylindre et peuvent provoquer aussi des vibrations de résonances dans certaines parties constitutives du bâti.

Les principales forces appliquées au bâti cylindre sont celle dues à la combustion et à la composition des couples,  $C_m$ , unitaires en moments de flexion transversaux [27].

En deuxième ordre viennent les moments de flexion internes provoqués par le produit de forces tournantes et alternatives d'inertie existant dans le plan de chaque manivelle par la distance de chaque manivelle au centre du moteur [27].

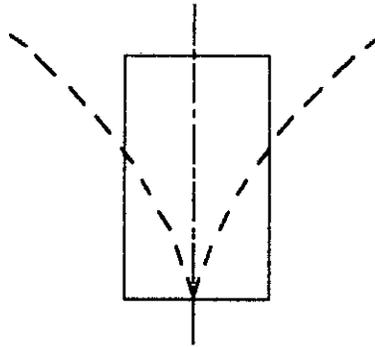
Ainsi les différents efforts cycliques provoqués dans le bâti - poly - cylindre vont se manifester par diverses oscillations telles que:

- Des oscillations de flexion dans le plan vertical longitudinal médian, dues à ( $+Z_g, -Z_g$  et  $Z_{ia}$ ).



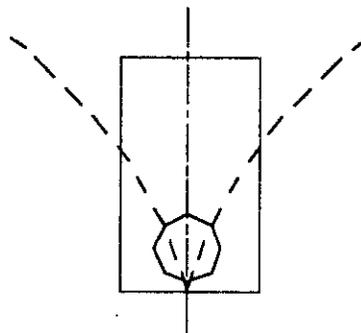
Oscillation de flexion longitudinales

- Des oscillations de flexion dans le plan horizontal du vilebrequin due à  $(+Y_g$  et  $Y_{ia})$



Oscillations de flexion horizontales

Des oscillations transversales perpendiculaires à l'axe du vilebrequin dues à  $(Y_g$  et  $-Y_{ia})$  se combinant à des oscillations de torsion dues à  $(-C_m$  et  $-C_{min})$ .



Oscillations de flexion transversales

Ces flexions résultant des forces de grandeurs variables tournant avec le vilebrequin et dont les points d'application sont aux coussinets de palier, peuvent, du fait qu'elles sont périodiques, faire naître des vibrations de résonances à des harmoniques divers [27].

### 3.4- Equilibrage d'un moteur.

Vue l'importance des efforts et des couples nés de la combustion, et de l'inertie des parties mobiles dans le bâti-cylindre, on a tendance à vouloir à tout prix faire l'équilibrage interne du moteur et l'équilibrage externe entre le moteur et son environnement.

L'équilibrage externe a pour objet d'éviter que telle ou telle structure de l'environnement ne rentre en résonance avec l'un des termes des sollicitations cycliques.

L'équilibrage interne, c'est limité, autant que possible, les valeurs des efforts, que, à tout instant, le vilebrequin exerce sur ses paliers du fait des contraintes cycliques auxquelles sa structure est soumise.

La solution rigoureuse pour équilibrer à première vue une partie des efforts intérieurs au bâti - cylindre consiste à équiper chaque flasque de manivelle avec des généreux contrepoids

d'équilibrage ainsi les contraintes engendrées par les forces d'inertie au sein de la structure du vilebrequin, de ses paliers et du bâti - cylindre seront maîtrisées (à une valeur connue) [27]. Mais cette solution est lourde, alors on a parfois tendance à faciliter la solution, en adoptant quatre contrepoids pour l'ensemble d'un vilebrequin (2 au centre, 1 à chaque extrémité) judicieusement décalés angulairement, on améliore, ainsi l'équilibrage global du moteur par rapport à l'environnement.

Soulignons sans plus tarder que, dans les deux types d'équilibrage on ne peut compenser qu'une partie seulement des effets des forces d'inertie rotatives,  $F_c = m.l. \omega^2$ . Il est par contre généralement impossible de compenser les effets des forces d'inertie alternatives, lesquelles sont fonction du produit de  $\omega^2$  par une série de termes en  $\cos \omega t$ .

En conséquence, une solution d'équilibrage, quelle qu'elle soit, est forcément imparfaite. En fait, on s'évertue à déterminer une qui soit acceptable, ce faisant, il ne faut pas perdre de vue qu'une solution acceptable à une vitesse de rotation considérée peut ne pas le rester à une vitesse de rotation différente, en particulier en ce qui concerne l'équilibrage externe [27].

#### 3.4.1- Notions générales sur l'équilibrage

Au total, le centre de gravité d'un moteur en rotation est soumis à un système de:

- Trois forces dirigées suivant les trois directions OX, Oy et OZ.
- Trois moments situées dans les trois plans xoy, xoz et yoz.

Le lieu décrit par le centre de gravité est fonction [27]:

- Du nombre de cylindre et de leur disposition
- De la forme du vilebrequin
- De l'ordre d'allumage des cylindres
- De la vitesse de rotation

Equilibrer un moteur, c'est conformément au principe d'Alembert «Sur un point matériel en mouvement, la force d'inertie et la résultante des forces agissantes sont, à chaque instant, en équilibre» agir sur les forces d'inertie et les forces actives en vue de:

- Rendre constant le sens, direction et grandeur du vecteur «position du centre de gravité par rapport à O du moteur au repos».
- S'évertuer à réduire au minimum la grandeur du vecteur.

#### 3.4.2- Equilibrage externe d'un moteur

##### 3.4.2.1- Cas d'un moteur monocylindrique

Soit un moteur monocylindrique, dont les caractéristiques sont:

$r$ : le rayon de la manivelle

$l$ : l'entre axe de la bielle

$\omega t$ : l'angle que fait le bras de la manivelle, à l'instant  $t$ , avec la verticale ascendante passant par O.

$m_p$ : masse du piston

$m_b$ : masse de la bielle

- Les forces extérieures c'est à dire le poids du moteur, le couple  $-C_m$  et les réactions aux appuis.

- Les forces d'inertie.

#### a - Nature des forces d'inertie

Il faut distinguer les forces d'inertie.

1- Alternative, produite par la masse  $M_{alt}$ , dont le point d'application est O, dirigée suivant l'axe OZ et dont la grandeur est:

$$M_{alt} r \omega^2 \left( \cos \omega t + \frac{r}{l} \cos 2\omega t \right) \quad (3.41)$$

Le premier terme est de période  $2\pi$

Le second terme, de période  $\pi$ , possède une amplitude qui est fonction de  $\frac{r}{l}$ .

2- Centrifuge, produite par la masse rotative (vecteur de grandeur constante, tournant autour de O) et qui se décompose en:

$$\begin{array}{ll} M_{rot} r \omega^2 \cos \omega t & \text{suivant la verticale} \\ M_{rot} r \omega^2 \sin \omega t & \text{suivant l'horizontale} \end{array} \quad (3.42)$$

#### b- Composition des forces d'inertie

Au total, les forces d'inertie peuvent être considérées comme étant les compositions de deux forces.

1- Une force d'inertie verticale

$$(M_{alt} + M_{rot}) r \omega^2 \cos \omega t + M_{alt} \frac{r}{4l} r (2\omega)^2 \cos 2\omega t \quad (3.43)$$

Le premier terme est la projection sur OZ d'un vecteur tournant autour de O à la vitesse  $\omega$

Le deuxième terme, effort alternatif du deuxième ordre effectivement porté par OZ, peut être assimilé à la projection sur OZ d'un vecteur fictif tournant autour de O à la vitesse  $2\omega$ .

2- Une force d'inertie horizontale

Mrot.r.  $\omega 2\sin \omega t$

Projection sur OY d'un vecteur tournant autour de O à la vitesse  $\omega$ .

A ces forces d'inertie viennent s'ajouter, au point de vue équilibrage.

3- Le couple  $-C_m$  de période  $4\pi$  (moteur 4 temps) ou  $2\pi$  (moteur à 2 temps) et dont sa grandeur est:

$$-C_m = -P(\omega) \frac{\pi D^2}{4} l \left( \left(\frac{r}{l}\right) \sin \omega t + \left(\frac{r}{l}\right)^2 \frac{1}{2} \frac{\sin 2\omega t}{\sqrt{1 - \left(\frac{r}{l}\right)^2 \sin^2 \omega t}} \right) \quad (3.44)$$

4- Le couple:  $C_{mia}$  de période  $2\pi$

$$-C_{mia} = -Malt.r\omega^2 \left( \cos \omega t + \frac{r}{l} \cos 2\omega t \right) l \left( \left(\frac{r}{l}\right) \sin \omega t + \left(\frac{r}{l}\right)^2 \frac{1}{2} \frac{\sin 2\omega t}{\sqrt{1 - \left(\frac{r}{l}\right)^2 \sin^2 \omega t}} \right) \quad (3.45)$$

Dans le cas des moteurs mono-cylindriques, le couple  $-C_m$  est particulièrement irrégulier, en conséquence, on se trouve fréquemment contraint de limiter tant leur vitesse de rotation que leur couple.

#### 3.4.2.2- Cas d'un moteur poly-cylindrique

Les forces et les couples, analysés à l'occasion d'un moteur mono-cylindrique, se composent entre eux et donnent les résultats suivants:

1- Un couple ( $-C_m - C_{mia}$ ) d'axe OX, généralement appelé couple de «basculement» donnant un mouvement de Roulis de part et d'autre d'une position moyenne inclinée par rapport à OZ (Roulis ondulés).

Plus grand est  $\left\{ \begin{array}{l} \text{Le nombre } n \text{ de cylindre} \\ \text{La régularité des allumages} \end{array} \right\}$  plus faible en est l'irrégularité cyclique.

2- Les forces verticales se composant en

- Une force oscillante selon OZ, créant un mouvement de pilon (où de rebondissement)
- Un couple de galope (où tangage) d'axe OY si le vilebrequin n'est pas symétrique par rapport à YOZ.

3- Les forces horizontales (si elles ne sont pas équilibrés) se composant en:

- Une force oscillante selon OY, créant un mouvement de tamis (ou de ballon).

- Un couple de lacet d'axe OZ, si le vilebrequin n'est pas symétrique par rapport à YOZ.

**Remarque [27]:**

La présence de plusieurs cylindres facilite les conditions d'équilibrage du fait que:

- Le couple moteur est plus régulier.
- La composition des efforts élémentaires peut conduire à une résultante d'amplitude inférieure à la somme des amplitudes, voir même à une résultante nulle.

**3.4.2.2.1- Cas d'un moteur en ligne**

La composition des forces et des moments engendrés au sein d'un moteur poly-cylindrique dépendent essentiellement [27].

- Du nombre de cylindres  $n$ .
- Du calage des manivelles du vilebrequin.
- De l'ordre d'allumage des chambres de combustion.

Le tableau T1 qui va suivre englobe tous les efforts et les moments produits durant le fonctionnement d'un moteur poly-cylindrique en ligne, tant en prenant en compte le calage adéquat entre cylindre ainsi que l'ordre d'allumage qui permettent mieux le fonctionnement normal du moteur.

Nombre de cylindres	Type de vilebrequin	Effets des forces d'inertie verticales												
		Effets des forces d'inerties horizontales					Pillon					Galop		
		Tamis	Lacet	1 <sup>er</sup> ordre	2 <sup>em</sup> ordre	4 <sup>em</sup> ordre	6 <sup>em</sup> ordre	1 <sup>er</sup> ordre	2 <sup>em</sup> ordre					
		$M_{rot} \cdot r \cdot \omega^2$	$a \cdot M_{rot} \cdot r \cdot \omega^2$	$(M_{rot} \cdot M_{cst}) \cdot r \cdot \omega^2$	$M_{rot} \cdot r \cdot \omega^2$	$M_{rot} \cdot r \cdot \omega^2$	$M_{rot} \cdot r \cdot \omega^2$	$a \cdot (M_{rot} + M_{cst}) \cdot r \cdot \omega^2$						
1		$\sin(\omega t)$	0	$\cos(\omega t)$	$\frac{1}{l} \cos(2\omega t)$	0	0	0	0	0	0	0	0	0
2		0	$\sin(\omega t)$	0	$2 \frac{r}{l} \cos(2\omega t)$	0	0	$\cos(\omega t)$	0	0	0	0	0	0
3		0	$-\sqrt{3} \cos(\omega t + \frac{2\pi}{3})$	0	0	0	0	$-\sqrt{3} \sin(\omega t + \frac{2\pi}{3})$	0	0	0	0	0	0
4	4temps	0	0	0	$4 \frac{r}{l} \sin(2\omega t)$	0	0	0	0	0	0	0	0	0
	2temps	0	$\sqrt{2} \sin(\omega t + \frac{\pi}{4})$	0	0	0	0	$\sqrt{2} \cos(\omega t + \frac{\pi}{4})$	0	0	0	0	0	0
6	4temps	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
	2temps	0	0	0	0	0	0	0	$\frac{2r}{3l} \cos(6\omega t)$	0	0	0	0	0
8	4temps	0	0	0	0	$2 \frac{r}{l} \cos(4\omega t)$	0	0	0	0	0	0	0	0
	2temps	0	0	0	0	$2 \frac{r}{15} \cos(4\omega t)$	0	0	0	0	0	0	0	0

T1 : Tableau des efforts au niveau des moteurs en ligne

### 3.4.2.2.2- Cas d'un moteur en V

Un moteur en V n'est rien d'autre, au point de vue équilibrage, qu'un ensemble de deux moteurs en ligne décalés l'un par rapport à l'autre d'un angle A égal à l'angle au sommet du V.

Chacun des deux moteurs en ligne, élémentaires, possède son propre spectre d'efforts et moments (qui sont d'ailleurs les mêmes) et les deux spectres d'efforts d'inertie vont se composer pour donner le spectre des efforts d'inertie correspondant au moteur en V.

On remarque après ce qui a été dit que l'angle A du V a un rôle déterminant dans l'analyse qui va suivre [27].

L'analyse de l'angle A se fait sentir :

a - sur la régularité du couple moteur, donc sur celle du couple de basculement. Leur régularité est d'autant plus grande que les allumages sont plus régulièrement répartis, ce qui conduit à choisir de préférence un angle [27].

$$A = \frac{4 \cdot \pi}{n}$$

dans le cas des moteurs 4 temps, soit

45° pour un 16 cylindres.

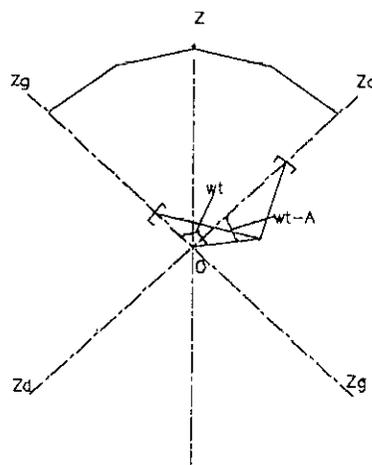
60° pour un 12 cylindres.

90° pour un 8 cylindres.

120° pour un 6 cylindres.

b- Sur la composition des forces d'inertie alternative

Pour illustrer l'influence de l'angle A du V sur la composition des forces d'inertie alternatives, considérons un moteur 2 cylindres en V, (fig. 3.2), équipé de bielles à fourche, ceci afin d'être symétrique par rapport au plan ZOY et par rapport au plan ZOX bissecteur de V



3.2 Analyse des forces alternatives

On a vu, à l'occasion de l'analyse des forces d'inertie, que les forces d'inertie alternatives verticales, soit  $(Malt + Mrot)r \cdot \omega^2 \cdot \cos \omega t$  et  $Malt \cdot r \cdot \omega^2 \cdot \frac{r}{l} \cos 2\omega t$ , pouvaient être considérées comme les projections  $OI(1)$  et  $OI(2)$  sur l'axe  $OZ$  de vecteurs de longueur constante, respectivement  $(Malt + Mrot) r \omega^2$  et  $Malt \cdot \frac{r^2 \omega^2}{l}$  tournent autour de  $O$  à une vitesse angulaire respectivement égale à  $\omega$  et  $2\omega$ .

Dans le cas d'un moteur en  $V$ , les projections  $OI(1)g$  et  $OI(2)d$  de vecteurs en question différent aux lignes droites ou gauches de cylindre vont se trouver portées sur des deux axes  $OZg$  et  $OZd$  symétriques de part et d'autre de  $OZ$  tel que  $Zg\hat{O}Zd = \hat{A}$ .

1- Analyse des efforts verticaux du premier ordre:

l'effort vertical d'inertie produit par les deux pistons suivant les axes  $OZg$  et  $OZd$ .

$$\begin{aligned} OI(1).g &= (Malt + Mrot)r \cdot \omega^2 \cdot \cos \omega t \\ OI(1).d &= (Malt + Mrot)r \cdot \omega^2 \cdot \cos(\omega t - A) \end{aligned} \quad (3.46)$$

Les résultantes suivants les axes  $OZ$  et  $OY$  des projections  $OI(1)g$  et  $OI(1)d$  sont suivant l'axe  $OZ$ .

$$\begin{aligned} Z &= (Malt + Mrot)r \cdot \omega^2 \cdot \cos \frac{A}{2} (\cos(\omega t - A) + \cos \omega t) \\ &= 2(Malt + Mrot)r \cdot \omega^2 \cdot \cos^2 \frac{A}{2} \cdot \cos(\omega t - A/2) \end{aligned} \quad (3.47)$$

Suivant l'axe  $OY$

$$Y = 2(Malt + Mrot)r \cdot \omega^2 \cdot \sin^2 \frac{A}{2} \cdot \sin(\omega t - A/2) \quad (3.48)$$

L'extrémité du vecteur tournant résultant  $OI$  décrit donc une ellipse dont les axes sont  $OZ$  et  $OY$ .

$$\begin{aligned} \frac{Z^2}{Z_{\max}^2} + \frac{Y^2}{Y_{\max}^2} &= 1 \\ Z_{\max} &= 2(Malt + Mrot)r \cdot \omega^2 \cos^2 \frac{A}{2} \\ Y_{\max} &= 2(Malt + Mrot)r \cdot \omega^2 \sin^2 \frac{A}{2} \end{aligned} \quad (3.49)$$

L'axe  $OZ$  est le grand axe si  $A$  est inférieur à  $90^\circ$  et  $OY$  dans le cas contraire.

Lorsque cette ellipse est un cercle, les forces d'inertie considérées peuvent être entièrement équilibrées par des masses tournantes. Pour qu'il en soit ainsi, il faut que:

$$\cos^2 \frac{A}{2} = \sin^2 \frac{A}{2} \quad (3.50)$$

Soit  $A = 90^\circ$

remarquons en passant que:

si  $A = 0$   $Y = 0$  l'ellipse se réduit bien à une verticale selon OZ.

si  $A = 180$   $Z = 0$  l'ellipse se réduit bien à une horizontale selon OY.

### 2- Analyse des efforts verticaux du deuxième ordre [27].

Le raisonnement précédant peut être renouvelé sur les forces d'inertie alternatives du deuxième ordre.

Dans ce cas, on aura:

$$\begin{aligned} Z &= 2.Malt. \frac{r}{l} . r . \omega^2 . \cos A . \cos \frac{A}{2} . \cos(\omega t - A/2) \\ Y &= 2.Malt. \frac{r}{l} . r . \omega^2 . \sin A . \sin \frac{A}{2} . \sin(\omega t - A/2) \end{aligned} \quad (3.51)$$

L'ellipse du deuxième ordre sera une circonférence (et la force d'inertie correspondante pourra être équilibrée par un contrepoids tournant à  $2\omega$ ) si

$$\begin{aligned} \text{Où} \quad \cos A . \cos \frac{A}{2} &= \sin A . \sin \frac{A}{2} \\ \cos \frac{3A}{2} &= 0 \end{aligned} \quad (3.52)$$

$$\text{soit } A = 2(K+1) . \frac{\pi}{3} \quad \Rightarrow \quad A = 60^\circ \text{ où } 180^\circ.$$

Par ailleurs, l'ellipse du deuxième ordre se réduit à une verticale selon OZ, si:

$$\sin A . \sin \frac{A}{2} = 0 \quad \text{soit } A = 0 \text{ où } A = 180^\circ \quad (3.53)$$

Elle se réduit à une horizontale selon OY, si:

$$\cos A . \cos \frac{A}{2} = 0 \quad \text{soit } A = 90^\circ \text{ où } A = 180^\circ \quad (3.54)$$

Donc si  $A = 180^\circ$  (moteur plat) les forces d'inertie alternatives du deuxième ordre sont nulles.

### 3- Analyse des forces alternatives horizontales [27].

L'effort alternatif horizontal produit par le déplacement des pièces mobiles dans un moteur monocylindrique est égal à :

$$M_{rot}.r\omega^2.\sin\omega t \quad (3.55)$$

C'est la projection horizontale d'un vecteur tournant de grandeur constante  $r.\omega^2.M_{rot}$ , autour de O.

Dans le cas d'un moteur bi-cylindrique en V, les résultantes, des efforts horizontaux produites par chaque vecteur tournant, suivant les deux directions verticales et horizontales sont :

$$\begin{aligned} Z &= M_{rot}.r\omega^2 \cos\left(\frac{\pi}{2} - \frac{A}{2}\right)(\sin\omega t - \sin(\omega t - A)) \\ Z &= M_{rot}.r\omega^2 \sin^2 \frac{A}{2} \cos\left(\omega t - \frac{A}{2}\right) \\ Y &= M_{rot}.r\omega^2 \cos^2 \frac{A}{2} \sin\left(\omega t - \frac{A}{2}\right) \end{aligned} \quad (3.56)$$

L'extrémité I du vecteur résultant des deux efforts horizontaux décrit une ellipse d'équation :

$$\frac{Z^2}{\left(M_{rot}.r\omega^2 \sin^2 \frac{A}{2}\right)} + \frac{Y^2}{\left(M_{rot}.r\omega^2 \cos^2 \frac{A}{2}\right)} = 1 \quad (3.57)$$

L'ellipse se réduit à un cercle sauf si  $\cos^2 \frac{A}{2} = \sin^2 \frac{A}{2} \Rightarrow A = 90^\circ$

La composante verticale s'annule sauf si  $\sin^2 \frac{A}{2} = 0 \Rightarrow A = 0$

La composante verticale s'annule sauf si  $\cos^2 \frac{A}{2} = 0 \Rightarrow \frac{A}{2} = (2K+1)\frac{\pi}{2} \Rightarrow A = 180^\circ$

donc aucune valeur de A qui annule la résultante des efforts horizontaux.

#### 4- Analyse des couples de Galop

La composition dans un moteur en V des couples de galop élémentaire s'opère comme pour les forces alternatives verticales. La seule différence réside dans la position du plan contenant les forces; lesquelles ne sont plus alors dans le plan YOZ, mais dans deux plans qui lui sont symétriquement parallèle.

Considérons l'un de ces plans passant par le point C, situé sur l'axe OX (fig.3.3). Les vecteurs Cgd et Cgg donnent sur les axes vertical et horizontal passant par C des projections se composant en un vecteur Cg dont l'extrémité décrit une ellipse. Les couples de galop élémentaires se composent donc comme le feraient juste un couple de galop et un couple de lacet complémentaire

intéressant l'ensemble, il s'ensuit, pour le moteur un mouvement d'ensemble convoyant autour du point O.

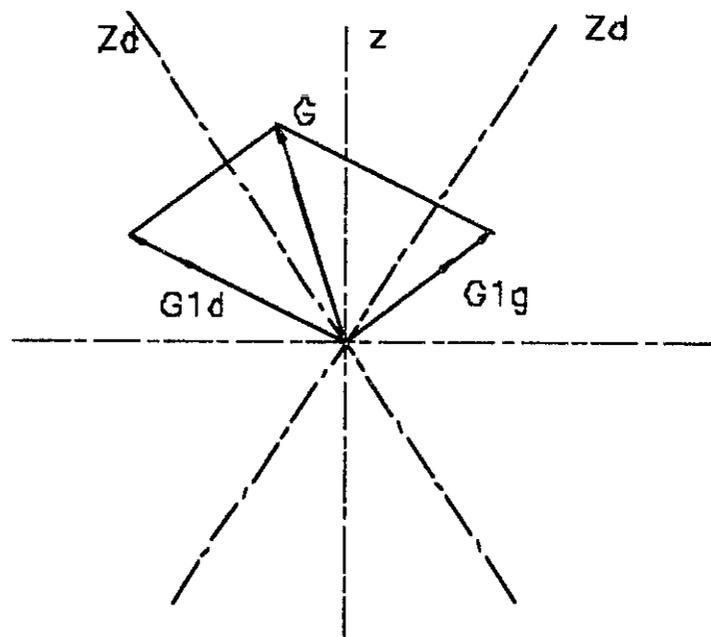


Fig. 3.3 : Analyse des couples de Galop.

Le tableau T2 qui va suivre regroupe tous les efforts et moments engendrés au sein d'un moteur en V [27].

Nombre de cylindre	Ellipse des efforts d'origine dans le plan vertical				Ellipse des efforts d'origine alternative dans le plan vertical du 1 <sup>er</sup> ordre				Ellipse des efforts d'origine alternatif dans le plan vertical du 2 <sup>em</sup> ordre			
	Force		Couple		Force		Couple		Force		Couple	
	$M_{tot}, f, \omega^2$		$a_1 M_{tot}, f, \omega^2$		$(M_{act} + M_{red}), f, \omega^2$		$a_1 (M_{an} + M_{red}), f, \omega^2$		$M_{act}, f, \omega^2/l$		$a_1 M_{act}, f, \omega^2/l$	
	verticale	horizontale	lacet	galop	Verticale	Horizontale	Lacet	Galop	Verticale	Horizontale	Lacet	Galop
2x3 moteur 6 cylindres	0	0	$2\sqrt{3} \cos^2(A/2) \cos(\omega t + 2\pi/3 - A/2)$	$2\sqrt{3} \sin^2(A/2) \sin(\omega t + 2\pi/3 - A/2)$	0	0	$2\sqrt{3} \sin^2(A/2) \cos(\omega t + 2\pi/3 - A/2)$	$2\sqrt{3} \cos^2(A/2) \sin(\omega t + 2\pi/3 - A/2)$	0	0	$2\sqrt{3} \sin(A) \sin(A/2) \cos(2(\omega t + 2\pi/3 - A/2))$	$2\sqrt{3} \sin(A) \cos(A/2) \cos(2(\omega t + 2\pi/3 - A/2))$
2x4 moteur 8 cylindres à vilebrequin a manetons plats	0	0	0	0	0	0	0	0	$8 \cos(A) \cos(A/2) \cos(2\omega t - A)$	$8 \sin(A) \sin(A/2) \sin(2\omega t - A)$	0	0
2x4 moteur à vilebrequin à manetons en croix	0	0	$2\sqrt{2} \cos^2(A/2) \sin(\omega t + \pi/4 - A/2)$	$2\sqrt{2} \sin^2(A/2) \cos(\omega t + \pi/4 - A/2)$	0	0	$2\sqrt{2} \sin^2(A/2) \cos(\omega t + \pi/4 - A/2)$	$2\sqrt{2} \cos^2(A/2) \sin(\omega t + \pi/4 - A/2)$	0	0	$8 \sin(A) \sin(A/2) \sin(2\omega t - A)$	$8 \cos(A) \cos(A/2) \cos(2\omega t - A)$
2x4 moteur à vilebrequin à manetons en quadrature	0	0	$\cos^2(A/2) \sin(\omega t - A/2) + \cos(\omega t - A/2) \cos(\omega t + A/2)$	$\sin^2(A/2) \cos(\omega t - A/2) - \cos(\omega t - A/2) \sin(\omega t + A/2)$	0	0	0	0	0	0	0	0
2x6 moteur 12 cylindres	Efforts d'origine alternativés dans le plan vertical Du 6 <sup>em</sup> ordre											
	Force verticale											
	$-\frac{27}{64} \frac{r^6}{l^5} \omega^2 Malt2 \cos(6\omega t - 3A) \cos(3A) \cos(A/2)$											
2x8 moteur 16 cylindres	Efforts d'origine alternatif dans le plan vertical Du 4 <sup>em</sup> ordre											
	Force verticale											
	$4 \frac{r^4}{l^3} \omega^2 Malt2 \cos(4\omega t - 2A) \cos(2A) \cos(A/2)$											
	Force horizontale											
	$-\frac{27}{64} \frac{r^6}{l^5} \omega^2 Malt2 \sin(6\omega t - 3A) \cos(3A) \cos(A/2)$											
	Force horizontale											
	$4 \frac{r^4}{l^3} \omega^2 Malt2 \sin(4\omega t - 2A) \cos(2A) \cos(A/2)$											

T2 : Tableau des efforts au niveau des moteurs en V

### 3.5- Conclusion

Les forces et les couples nés de la combustion et de l'inertie des pièces mobiles provoquent au sein du moteur des contraintes mécaniques et thermiques élevées, mais des déformations globales faibles [27].

Les sollicitations qui sont cycliques provoquent des vibrations se traduisant par des manifestations tangibles et nuisibles.

Le couple moteur (variable sur un cycle) , les forces et couples d'inertie provoquent dans l'assise (et l'environnement) du moteur des sollicitations cycliques variant selon le mode de fixation du moteur sur l'assise.

pour que ces vibrations n'atteignent pas une amplitude nocive, il faut:

- soit diminuer l'amplitude de la force d'excitation, c'est à dire parfaire l'équilibrage des masses rotatives du moteur.

- soit modifier la fréquence de la force d'excitation, ce qui conduit:

- \* à changer le type de vilebrequin

- \* à choisir un autre type de moteur

- soit limiter la somme d'énergie franchissant les supports en absorbant dans ceux ci une partie de l'énergie. En effet le mode de fixation du moteur sur son assise joue un rôle prépondérant sur la transmission des efforts et couples produits par le moteur aux supports. Il va de soit que la fixation du moteur sur son support ne doit pas introduire des contraintes venant se superposer aux contraintes propres au bâti. Il faudra donc prévoir des points de fixation aussi peu nombreux que possible (deux vers l'arrière, dans le plan du noeud de vibration naturelle et deux vers l'avant), les réaliser de telle sorte qu'ils empêchent le bâti des éventuelles déformations du support, ne pas introduire de contraintes du fait du serrage sur les appuis et permettre la libre dilatation du bâti - cylindre lors de sa montée en température.

Lorsque le moteur est fixé rigidement sur son assise, la totalité des efforts et couples nés à la combustion et de l'inertie des pièces mobiles vont être transmis à l'assise. Si le moteur équipe des ensembles susceptibles d'être excités en vibration, il peut s'ensuivre des déplacements alternés, intolérables pour l'occupant et dangereux par les structures environnantes.

Par contre la fixation élastique du moteur sur son assise permet le déplacement du bloc cylindre par rapport à son assise. Les liaisons élastiques vont absorber une plus ou moins grande partie de l'énergie dégagée par les sollicitations cycliques.

Le bloc cylindre à suspension élastique exécute des mouvements de sens contraires à la résultante des parties internes du moteur qui se déplacent. Il faut calculer:

- Les amplitudes des mouvements de l'ensemble suspendu élastiquement.
- Le rapport de la force transmise à la fondation de l'ensemble par la force excitatrice.

Ces deux valeurs ont une importance décisive pour l'appréciation de la qualité d'une suspension élastique. Elles dépendent évidemment, du rapport de la fréquence excitatrice à la fréquence propre de l'ensemble du moteur. Lorsque ces deux fréquences sont égales, les amplitudes des déplacements de ces vibrations sont élevées. On n'obtient une isolation satisfaisante que si la fréquence du moteur est supérieure au produit des fréquences propres par la racine carré de 2 ( $f_{\text{moteur}} > \sqrt{2} \cdot f_{\text{propre du moteur}}$ ).

L'amplitude des mouvements ne doit pas dépasser, en égard aux liaisons existant avec l'extérieur et aux organes fixes sur le moteur, des limites bien déterminées si l'on veut:

- 1- éviter les déplacements de l'ensemble qui conduira à des accélérations supérieures à la pesanteur.
- 2- Permettre des liaisons de tuyauterie acceptables.

# CHAPITRE IV

## CHAPITRE IV

### Modélisation d'une surface de chaussée irrégulière

#### 4.1- Introduction

Dans nos études précédentes de vibration, il été possible de distinguer entre trois types de fonctions d'excitation. Seulement, harmonique, périodique et non périodique; où ces dernières sont connues comme étant transitoires [4]. Le caractère commun de ces fonctions est que leurs valeurs peuvent être déterminées à l'avance à tout instant. Ces fonctions sont appelées déterministiques, et comme exemple typique voir la figure 4.1.

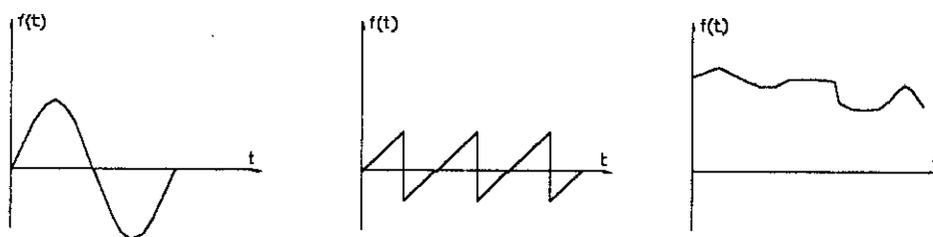


fig: 4.1 Principaux types de fonction déterministique.

La réponse d'un système soumis à une excitation déterministique est alors déterministique [4].

Pour des systèmes linéaires, il n'y a pas de difficulté à exprimer la réponse d'un système soumis à une quelconque fonction d'excitation déterministique sous sa forme close où par utilisation de l'intégrale de convolution où même parfois par des méthodes de résolution numériques.

Mais, il existe beaucoup de phénomènes physiques, qu'on ne peut décrire explicitement au cours du temps; comme exemple typique de ces phénomènes, on a les irrégularités de la surface d'une chaussée, le bruit d'un engin, l'intensité d'un tremblement de terre, l'intensité de l'effet du vent etc.... Cela implique que la valeur de la variable décrivant ce phénomène ne peut être prédite dans le temps futur. Si on désire par exemple mesurer l'intensité d'un tremblement de terre comme fonction du temps durant plusieurs enregistrements, il se pourrait qu'un des enregistrements peut ne pas être le même qu'un autre. Les raisons de cette différence sont plusieurs et variées qu'on les a pas pris en compte au cours de l'enregistrement.

Les phénomènes dont la sortie ne peut être prédite au cours du temps sont appelés des phénomènes non-déterministes, et ils sont classifiés comme étant aléatoires [4]. Fig.4.2.

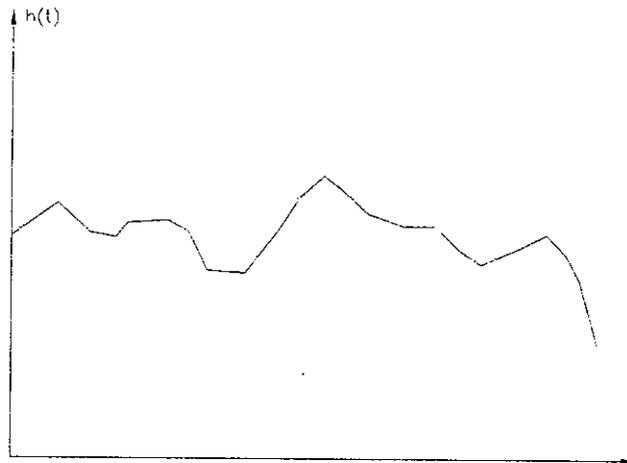


Fig. 4.2 Type de fonction aléatoire

La réponse d'un système soumis à une excitation aléatoire est alors un phénomène aléatoire, parce que vue la complexité de sa résolution, la description d'une fonction aléatoire en terme de temps n'apparaît pas comme étant une tâche facile et son approche n'est particulièrement pas facile à déterminer; ce qui implique à introduire une nouvelle méthode d'analyse, appelée approche probabilistique [4,22].

Beaucoup de phénomènes aléatoires admettent une certaine loi, dans le sens où ces derniers peuvent être décrites en terme de certaines paramètres. Les paramètres de ces phénomènes aléatoires sont appelés régularités statiques [22]. Dans ces cas, il est plus faisable de décrire l'excitation et la réponse du système en terme de probabilité que d'essayer de les décrire d'une manière déterministique.

L'objet de ce chapitre est de montrer l'influence des irrégularités de la surface de la route sur la dynamique des engins de transports. Vue la complexité du phénomène, on va définir deux types d'approches mathématiques des irrégularités de la surface de la chaussée, une approche simple où on va considérer les irrégularités sinusoïdales (à la rigueur périodique) et une approche aléatoire. Les deux approches seront ensuite appliquées au modèle mathématique d'un engin de transport, les résultats des deux approches seront comparés avec ceux de cas réels.

#### 4.2- Eléments d'analyse des signaux

Il n'est évidemment pas question de faire une étude exhaustive des possibilités offertes par les techniques modernes de traitement des signaux.

Nous cherchons seulement à répondre à la question:

Comment extraire du signal l'information souhaitée?

Le traitement nécessaire dépendra en général de l'organisation du signal comme on peut le voir sur la figure 4.3

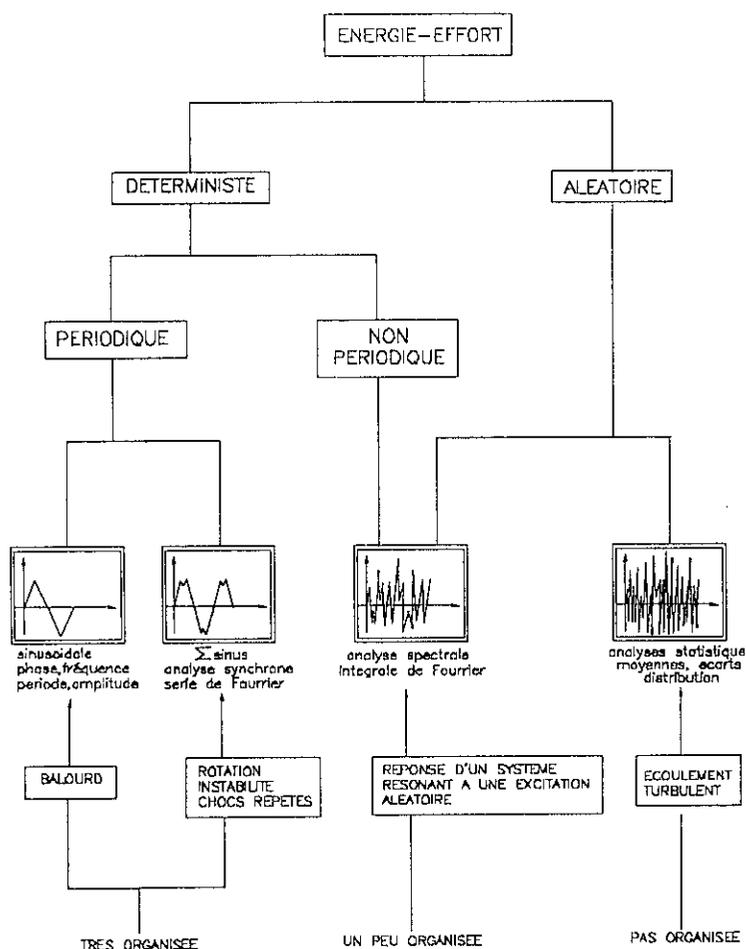


Fig. 4.3 Principaux types d'organisation de signal.

#### 4.2.1- Signal sinusoïdal.

Rappelons quelques notions indispensables concernant les fonctions sinusoïdales. On dira qu'un signal  $S$ , fonction du temps  $t$ , est sinusoïdal s'il peut s'écrire sous la forme:

$$S(t) = S_0 \cdot \cos(\omega_0 t + \varphi) \quad (4.1)$$

où:

$\omega_0$ : est la pulsation du signal

$S_0$ : est l'amplitude crête du signal

$\varphi$ : est la phase à l'origine des temps

Ce signal est périodique, c'est à dire qu'il se répète identiquement à lui même au bout d'un temps fixe, appelé période et noté  $T_0$ .

quelque soit t 
$$S(t+T_0) = S(t)$$

La fréquence du signal est 
$$f_0 = \frac{1}{T} = \frac{\omega_0}{2\pi}$$

On introduit la notion d'amplitude efficace  $\sigma_0$  du signal  $s(t)$  (ou encore valeur quadratique moyenne) [1].

$$\sigma_0^2 = \frac{1}{T_0} \int_0^{T_0} S^2(t) dt \tag{4.2}$$

dans le cas présent:

$$S(t) = S_0 \cos(\omega_0 t + \varphi); \quad \sigma_0 = \frac{\sqrt{2}}{2} S_0 \tag{4.3}$$

Pour illustrer la phase à l'origine  $\varphi$ , on peut adopter la représentation graphique suivante:

On pose:  $\phi(t) = \omega_0 t + \varphi$

On constate (voir fig.4.4 ) que le signal  $S(t)$  n'est rien d'autre que la projection sur un axe fixe du vecteur  $\vec{S}$  tournant à la vitesse  $\omega_0$ . Le vecteur  $\vec{S}$  est parfaitement défini par son amplitude  $S_0$  (rayon du cercle) et sa phase  $\phi(t)$ .

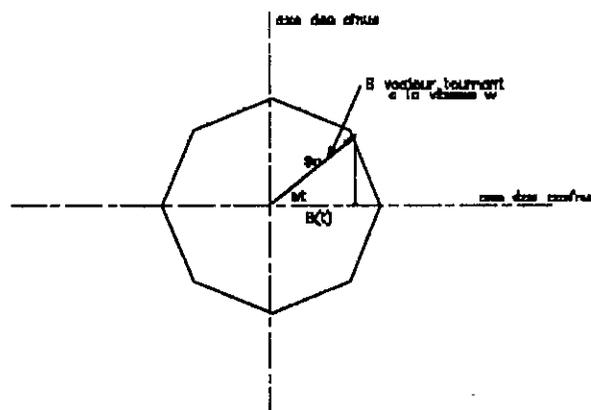


Fig. 4.4 représentation de Fresnel d'un signal sinusoïdal

#### 4.2.2- Fonction périodique (décomposition en série de Fourier)

De façon générale, on considère un signal  $x(t)$  périodique de période  $T$ :  $\forall t; x(t+T)=x(t)$

On peut montrer que ce signal peut s'écrire comme une somme de fonctions sinusoïdales de

pulsation  $\omega, 2\omega, \dots, n\omega \dots$  etc où  $\omega = \frac{2\pi}{T}$  il vient:

$$x(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos n\omega t + b_n \sin n\omega t) \quad (4.4)$$

$$\text{avec } \omega = \frac{2\pi}{T}$$

$$a_n = \frac{2}{T} \int_0^T x(t) \cos n\omega t \, dt \quad (4.5)$$

$$b_n = \frac{2}{T} \int_0^T x(t) \sin n\omega t \, dt \quad (4.6)$$

Cette expression peut également se mettre sous une forme mettant en évidence l'amplitude et la phase harmonique fondamentale [1,28]:

$$x(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos(n\omega t + \varphi_n) \quad (4.7)$$

Le signal peut se décomposer en une somme de fonctions sinusoidales de fréquence dis-

crète  $f_n = \frac{n}{T}$  d'amplitude  $A_n$  et de phase  $\varphi_n$ , si on calcule la valeur quadratique moyenne  $\sigma$  [1]:

$$\sigma^2 = \frac{1}{T} \int_0^T x^2(t) \, dt$$

$$\sigma^2 = \frac{1}{T} \int_0^T (a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos(n\omega t + \varphi_n))^2 \, dt = a_0^2 + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} A_n^2$$

d'où:

$$\sigma = \sqrt{a_0^2 + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} A_n^2} \quad (4.8)$$

Cette expression met en évidence que la puissance du signal  $x(t)$  est la somme des puissances propres à chaque fréquence. En utilisant le résultat obtenu en 2.1 et en notant  $\sigma_n$  la valeur efficace de la composante de fréquence  $f_n$ , il vient:

$$\sigma = \sqrt{a_0^2 + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \sigma_n^2} \quad (4.9)$$

Soit un exemple de fonction périodique de période  $2l$  définie sur le segment  $[-l, l]$  par l'égalité  $f(t) = |t|$  (fig.4.5).

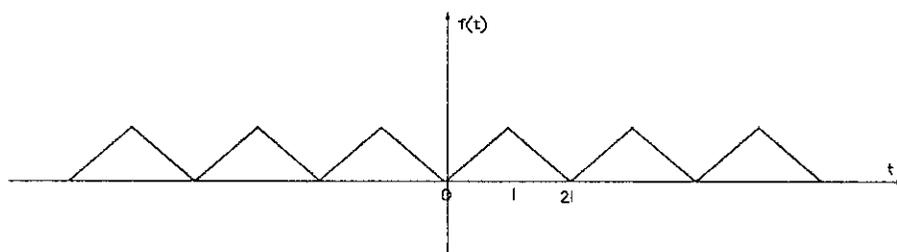


fig. 4.5 Représentation d'un signal périodique triangulaire.

Pour le développement en série de Fourier de cette fonction est comme suite [28], comme la fonction considérée est paire, on a:

$$b_k = 0 \quad a_0 = \frac{2}{1} \int_0^1 t dt = 1$$

$$a_k = \frac{2}{1} \int_0^1 t \cos \frac{k\pi t}{1} dt = \frac{2l}{\pi} \int_0^{\pi} t \cos kt dt = \begin{cases} 0 & \text{pour } k \text{ paire} \\ -\frac{4l}{\pi^2 k^2} & \text{pour } k \text{ impaire} \end{cases} \quad (4.10)$$

par conséquent, le développement s'écrit [28]:

$$f(t) = |t| = \frac{1}{2} - \frac{4l}{\pi^2} \left[ \frac{\cos \frac{\pi}{1} t}{1} + \frac{\cos \frac{3\pi}{1} t}{3^2} + \dots + \frac{\cos \frac{(2p+1)\pi}{1} t}{(2p+1)^2} + \dots \right] \quad (4.11)$$

et la valeur quadratique moyenne  $\sigma$ , de cette fonction est:

$$\sigma^2 = \frac{l^2}{4} + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{16l^2}{\pi^4 (2k+1)^4} \quad (4.12)$$

**Remarque:**

La série de Fourier cité ci dessus peut se présente sous la forme complexe suivante [28]:

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} C_n e^{i2\pi n \frac{t}{T}} \quad (4.13)$$

où:

$$C_n = \frac{1}{2} (a_n - ib_n); \quad \omega_n = \frac{2\pi n}{T} \quad (4.14)$$

l'amplitude complexe  $C_n$  est:

$$C_n = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) e^{-i2\pi n \frac{t}{T}} dt \quad (4.15)$$

#### 4.2.3- Fonction non périodique.

On généralise les résultats trouvés pour les fonctions périodiques au cas des fonctions non périodiques en introduisant l'intégrale de Fourier, et en considérant qu'une fonction non périodique est une fonction périodique de période infini [1,28].

En effet, la série de Fourier sous sa forme complexe d'une fonction périodique s'écrit comme suit:

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} C_n e^{i2\pi n \frac{t}{T}} \quad (4.16)$$

où:

$$\omega_n = \frac{2\pi n}{T}$$

et

$$C_n = \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) e^{-i2\pi n \frac{t}{T}} dt \quad (4.17)$$

L'ensemble des fréquences  $\omega_n$  est appelé spectre de la fonction  $f(t)$ . Dans le cas envisagé le spectre est discret. Le développement en série de Fourier d'une fonction périodique peut s'étendre au cas d'une fonction non périodique. Une méthode approchée de développement d'une fonction non périodique en série de Fourier consiste à effectuer le passage à la limite  $T \rightarrow \infty$  [28]. En effet, une fonction périodique peut être considérée comme fonction périodique dont la période serait non bornée supérieurement [28].

Après avoir substitué l'expression de  $C_k$  dans la formule (4.16) nous obtenons:

$$F(t) = \frac{1}{2} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} e^{i2\pi n \frac{t}{T}} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) e^{-i2\pi n \frac{t}{T}} dt \quad (4.18)$$

Passons à la limite en faisant tendre  $T$  vers l'infini et en posant  $\Delta\omega_1 = \frac{2\pi}{T}$ . La fréquence

$\Delta\omega_1$  est l'intervalle des fréquences entre les harmoniques voisines de fréquences égales à  $\frac{2\pi n}{T}$  et

$\frac{2\pi(n+1)}{T}$ . Lors du passage à la limite, nous posons:  $T \rightarrow \infty$ ,  $\Delta\omega_1 \rightarrow d\omega$  et  $\frac{2\pi n}{T} = \omega$ , où  $\omega$  est

la variable fréquence courante qui évolue de façon continue. La somme dans l'équation (4.18) se change en intégrale de telle sorte que [28]:

$$F(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\omega t} d\omega \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-i\omega t} dt \quad (4.19)$$

soit

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} S(\omega) e^{i\omega t} d\omega \quad (4.20)$$

avec

$$S(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-i\omega t} dt \quad (4.21)$$

La fonction  $f(t)$  écrite sous la forme (4.19) possède un spectre continu [1,22,28] tandis qu'une série de Fourier permet de représenter une fonction périodique sous la forme d'une somme d'un nombre infini de sinusoides ayant des fréquences égales à des valeurs discrètes. Une intégrale de Fourier telle que (4.20) permet de représenter une fonction non périodique sous la forme d'une somme de sinusoides ayant une suite continue de fréquences [28]. Le spectre d'une fonction périodique peut être représenté graphiquement (fig.4.6). A chaque valeur discrète de la fréquence (fréquence  $\omega^n$  des harmoniques de la série de Fourier) il correspond une valeur déterminée  $C_n$  du coefficient de la série. Le spectre représenté sur la fig:4.6 est dit spectre discret en bâtons.

Considérons maintenant le spectre d'une fonction non périodique. Lors du passage à la limite de la série vers l'intégrale de Fourier, les intervalles entre les lignes spectrales séparées se réduisent de plus en plus, les lignes verticales se rapprochent de plus en plus et à la limite le spectre devient une suite continue de points (courbe continue) (fig.4.7).

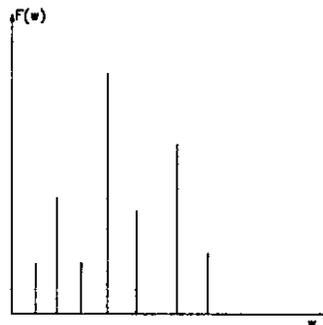


Fig.4.6: densité spectrale d'une fonction périodique

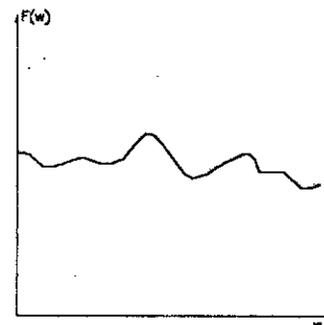


Fig. 4.7 densité spectrale d'une fonction non périodique

#### 4.2.4- Fonctions aléatoires.

Les exemples traités jusqu'ici sont des signaux dont les amplitudes peuvent être déterminées à tout instant. Ce sont des signaux déterministes. Ils sont parfaitement définis à partir de certains paramètres caractéristiques indépendants du temps: amplitude, phase, fréquence,...etc.

A l'inverse, on rencontre des signaux dont on ne peut prévoir la valeur à tout instant: ce sont des signaux aléatoires.

L'indétermination du déroulement futur de la fonction; c'est à dire le fait qu'on ne puisse jamais prédire le caractère de la fonction pour le futur, même si ce caractère est connu pour le passé, constitue la propriété fondamentale des fonctions aléatoires. Si on a une nombreuse série de réalisation d'un processus, on peut alors faire la moyenne des enregistrements obtenus pour ces fonctions pour ainsi déterminer les caractéristiques non aléatoires de cette fonction [22].

Dans de nombreux problèmes appliqués, les évaluations de la moyenne et de la moyenne quadratique donnent une information indispensable sur la dispersion probable des trajectoires de la fonction étudiée. A l'heure actuelle, les méthodes et l'outil mathématique de la théorie des processus aléatoires sont largement utilisés[22].

On appelle «fonction aléatoire» une fonction pour laquelle, à chaque valeur donnée de l'argument, il correspond une variable aléatoire, par exemple, la traction d'un moteur, c'est une fonction du temps qui à chaque instant est une grandeur aléatoire. Les valeurs concrètes des fonctions aléatoires résultant d'une expérience sont appelées réalisation de la fonction aléatoire. Sur la figure 4.8 on a représenté une série de réalisation  $x_i(t)$  de la fonction aléatoire  $X(t)$ .

Les caractéristiques probabilistes des fonctions aléatoires peuvent être construites de manière analogue à celles des variables aléatoires, à savoir l'espérance mathématique, la variance, la moyenne quadratique et la densité de répartition. Les caractéristiques des fonctions aléatoires s'opposent à celles des variables aléatoires en ce qu'elles se présentent, non pas comme des nombres fixes, mais en général comme des fonctions non aléatoires.

Il convient de souligner que dans la méthode d'étude statistique des fonctions aléatoires on étudie, non pas les propriétés de chacune des fonctions  $x_i(t)$  caractérisant le processus, mais les propriétés de l'ensemble complet de fonctions [22]. Cela permet dans l'analyse du mouvement d'un système mécanique soumis à des perturbations aléatoires d'étudier son comportement, non par

rapport à l'une quelconque des influences perturbatrices mais par rapport à l'ensemble complet des influences aléatoires possibles [22].

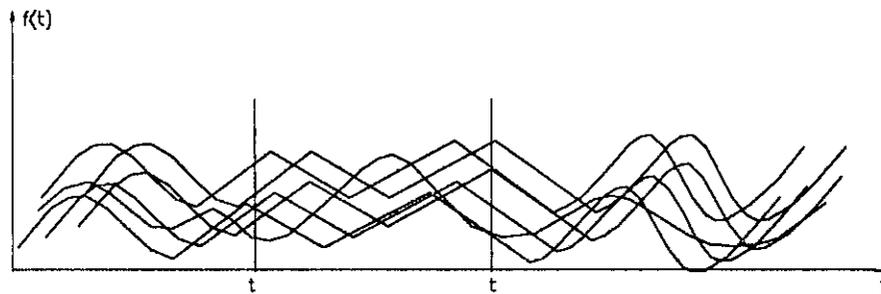


Fig. 4.8 Représentation d'une fonction aléatoire non stationnaire

Pour décrire les propriétés fondamentales d'un processus aléatoire, on utilise cinq fonctions non aléatoires caractérisant ce processus [22]:

- 1- L'espérance mathématique de la fonction aléatoire.
- 2- L'espérance mathématique du carré de la fonction aléatoire (dispersion).
- 3- La densité de répartition en fonction du temps
- 4- La fonction de corrélation.
- 5- La densité spectrale.

#### 4.2.4.1- Espérance mathématique d'une fonction aléatoire.

Considérons que la fonction aléatoire décrite sur la figure précédente est composée par  $n$  fonctions élémentaires  $x_i(t)$  ( $i=1,n$ ). La valeur moyenne d'une fonction aléatoire à un instant donnée  $t=t_1$  est obtenue par une simple sommation des valeurs correspondantes à l'instant  $t_1$  de toutes les fonctions aléatoires individuelles formant l'ensemble divisée par le nombre  $n$  [22].

$$M[X(t_1)] = m_x(t_1) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i(t_1) \quad (4.22)$$

Elle caractérise le comportement moyen de la fonction aléatoire en fonction du temps.

Par conséquent on peut définir les propriétés suivantes [22]:

- 1- L'espérance mathématique d'une fonction non aléatoire est égale à cette grandeur, soit:

$$M[C(t)] = C(t) \quad (4.23)$$

- 2- Un facteur constant peut être sorti du symbole espérance mathématique.

$$M[CX(t)] = CM[X(t)] = C.m_x(t) \quad (4.24)$$

- 3- L'espérance mathématique de la somme de deux variables aléatoires est égale à la somme de leurs espérances mathématiques.

$$M[X(t) + Y(t)] = M[X(t)] + M[Y(t)] \quad (4.25)$$

4- L'espérance mathématique de la dérivée d'une fonction aléatoire est égale à la dérivée de son espérance mathématique.

$$M\left(\frac{dX(t)}{dt}\right) = \frac{d}{dt}M(X(t)) = \frac{dm_x(t)}{dt} \quad (4.26)$$

5- L'espérance mathématique de l'intégrale d'une fonction aléatoire est égale à l'intégrale de son espérance mathématique.

$$M\left[\int_0^t X(\tau)d\tau\right] = \int_0^t M[X(t)] = \int_0^t m_x(t) \quad (4.27)$$

6- L'espérance mathématique d'une fonction formée par le produit d'une fonction aléatoire et une fonction non aléatoire est égale au produit de l'espérance mathématique de la fonction aléatoire et de la fonction non aléatoire.

Soit:

$$Y(t) = C(t).x(t) \quad (4.28)$$

où

C(t): fonction non aléatoire

x(t): fonction aléatoire

$$M[Y(t)] = M[C(t).x(t)] = C(t).M[x(t)] = C(t).m_x(t) \quad (4.29)$$

#### 4.2.4.2- Variance et écart type d'une fonction aléatoire

De la même manière qu'on définit l'espérance mathématique (valeur moyenne) d'une fonction aléatoire, on définit la variance d'une fonction aléatoire  $\sigma_X(t)$ . C'est l'espérance mathématique du carré de la fonction aléatoire centrée [22].

$$\sigma_X(t) = M((X(t) - m_x(t))^2) \quad (4.30)$$

Écart type d'une fonction aléatoire X(t) est la racine carrée de la variance.

$$D_X(t) = \sqrt{\sigma_X(t)} \quad (4.31)$$

#### 4.2.4.3- Fonction d'autocorrélation d'une fonction aléatoire ( temporelle)

Pour caractériser plus complètement une fonction aléatoire on introduit une fonction non aléatoire qui permet d'établir le degré de dépendance entre deux valeurs d'une fonction aléatoire (correspondant par exemple sur la fig. 4.8 aux instants t et t'). Cette caractéristique est appelée fonction de corrélation (ou fonction d'autocorrélation) et elle est définie par la formule [22]:

$$K_x(t, t') = M[(X(t) - m_x(t)) \cdot (X(t') - m_x(t'))] \quad (4.32)$$

De la définition d'une fonction de corrélation, il résulte que

$$K_x(t, t') = K_x(t', t) \quad (4.33)$$

puisque

$$\sigma_X(t) = M[(X(t) - m_x(t))^2] \quad (4.34)$$

Il résulte de (4.32) que pour  $t=t'$

$$K_x(t, t) = \sigma_X(t) \quad (4.35)$$

Les caractéristiques probabilistes des fonctions aléatoires liées linéairement vérifient les relations suivantes [22].

1- Si une fonction aléatoire  $Y(t)$ , est égale au produit de deux fonctions, une aléatoire  $X(t)$  et l'autre non aléatoire  $C(t)$ , alors sa fonction de corrélation ainsi que sa valeur moyenne quadratique sont égales à:

$$K_y(t, t') = C(t) \cdot C(t') \cdot K_x(t, t') \quad (4.36)$$

$$\sigma_y(t) = C^2(t) \sigma_X(t) \quad (4.37)$$

2- Les caractéristiques probabilistes  $\sigma_y(t)$  et  $K_y(t, t')$  de la fonction aléatoire,

$Y(t) = \int_0^t X(\varepsilon) d\varepsilon$ , lorsque sont connues  $m_x(t)$  et  $K_x(t, t')$ , sont égales à:

$$K_y(t, t') = \int_0^t \int_0^{t'} K_x(\varepsilon, \varepsilon') d\varepsilon d\varepsilon' \quad (4.38)$$

3- Considérons la dérivée de la fonction aléatoire  $X(t)$

$$Y(t) = \frac{dX(t)}{dt}$$

La relation qui lie les fonctions de corrélation  $K_y(t, t')$  et  $K_x(t, t')$  est:

$$K_y(t, t') = \frac{\partial^2 K_x(t, t')}{\partial t \partial t'} \quad (4.39)$$

4- La fonction de corrélation de la dérivée seconde d'une fonction aléatoire  $X(t)$  est égale à:

$$Y(t) = \frac{d^2 X}{dt^2} \Rightarrow K_y(t, t') = \frac{\partial^4 K_x(t, t')}{\partial t^2 \partial t'^2} \quad (4.40)$$

5- Les caractéristiques probabilistes de la fonction aléatoire

$$Y = a(t).C + \int_0^t k(t, \tau).X(\tau).d\tau$$

où  $a(t)$ ,  $k(t, \tau)$  sont des fonctions non aléatoires, c'est une variable aléatoire pour laquelle  $m_c$  et  $\sigma_c$  sont connues;  $X(\tau)$  est une fonction aléatoire pour laquelle  $m_x$  et  $K_x$  sont connues.

Sont:

$$K_Y(t, t') = a(t).a(t')m_c^2 + \int_0^t \int_0^{t'} k(t, \tau).k(t', \tau')K_X(\tau, \tau')d\tau.d\tau' \quad (4.41)$$

$$m_Y(t) = a(t).m_c + \int_0^t k(t, \tau).m_x.d\tau \quad (4.42)$$

#### 4.2.4.4- Fonctions aléatoires stationnaires

Les fonctions aléatoires qui se déroulent toujours approximativement de la même façon dans le temps et qui présentent l'aspect de vibration aléatoire continu relativement à une certaine valeur moyenne, avec des caractéristiques probabilistes ne variant pas sensiblement avec le temps ont obtenu une très large diffusion [22]. De telles fonctions aléatoires sont dites "stationnaires". On peut considérer une fonction stationnaire comme une fonction qui se déroulerait sur une durée infiniment longue. En ce sens, une fonction stationnaire est analogue au régime vibratoire permanent lorsque les paramètres des vibrations établies ne dépendent plus de l'origine des temps [22], c'est pourquoi on peut choisir un instant quelconque pour étudier un processus stationnaire.

Une fonction aléatoire  $X(t)$  est dite stationnaire si toutes ses caractéristiques probabilistes ne dépendent pas du temps [22]. C'est à dire si

$$\begin{aligned} m_x(t) &= cst^e \\ \sigma_x(t) &= cst^e \end{aligned} \quad (4.43)$$

Considérons la fonction de corrélation qui reste invariable pour une seule et même translation de valeur  $t_2$  des instants  $t$ ,  $t'$

$$K_x(t, t') = K_x(t+t_2, t'+t_2) = cste$$

En posant  $t_2 = -t'$  nous obtenons

$$K_x(t, t') = K_x(t-t', 0)$$

La fonction de corrélation d'une fonction aléatoire stationnaire dépend de la différence entre  $t$  et  $t'$ .

Introduisant la notation  $\tau = t - t'$ , alors

$$K_x(t-t',0) = K_x(\tau) \quad (4.44)$$

Ainsi, la fonction de corrélation d'une fonction aléatoire stationnaire est fonction non de deux mais d'un seul argument  $\tau$ .

Comme la fonction de corrélation est symétrique, il en résulte pour une fonction aléatoire stationnaire

$$K_x(t-t') = K_x(t'-t) \\ \text{soit: } K_x(\tau) = K_x(-\tau) \quad (4.45)$$

Puisque la variance est

$$\sigma_x(t) = K(t,t)$$

Alors pour une fonction aléatoire stationnaire elle s'écrit

$$\sigma_x = K_x(0) \quad (4.46)$$

En utilisant les relations (4.39) et (4.40) pour la dérivée première et seconde d'une fonction aléatoire stationnaire en passant par la nouvelle variable  $\tau = t-t'$ , nous obtenons ainsi

$$K_{\ddot{x}}(t,t') = -\frac{d^2 K_x(\tau)}{d\tau^2} \quad (4.47)$$

$$K_{\overset{\cdot\cdot}{x}}(t,t') = \frac{d^4 K_x(\tau)}{d\tau^4} \quad (4.48)$$

Pour obtenir les caractéristiques d'une fonction aléatoire stationnaire  $X(t)$  (espérance mathématique  $m_x$  et fonction de corrélation  $K_x(\tau)$ ), il faut en connaître un certain nombre de réalisations. Grâce aux enregistrements de ces réalisations, on peut trouver les valeurs approximatives de  $m_x$  et  $K_x(\tau)$  [22].

Une question se pose : peut-on obtenir ces caractéristiques à partir d'une seule réalisation de la fonction aléatoire  $X(t)$ ? Etant donnée que la fonction aléatoire est stationnaire et se déroule de façon homogène dans le temps (l'espérance mathématique ne dépend pas de l'origine des temps), il est naturel qu'elle n'admette qu'une seule réalisation.

Cette possibilité d'obtenir les caractéristiques d'une fonction aléatoire stationnaire à l'aide d'une seule de ses réalisations présente un grand intérêt pratique, cela permet de réduire le coût matériel [22].

Les fonctions stationnaires, pour lesquelles on peut déduire les caractéristiques probabilistes à partir d'une seule réalisation sont appelées "fonction aléatoires stationnaires ergodiques". la

propriété d'ergodicité consiste en ce que chaque réalisation particulière de la fonction aléatoire permet d'estimer les propriétés statistiques de l'ensemble entier des réalisations particulières [22].

Si la fonction aléatoire  $X(t)$  jouit de la propriété d'ergodicité alors sa valeur moyenne par rapport au temps ( sur un intervalle d'observation suffisamment grand) est approximativement égale à la valeur moyenne de l'ensemble des réalisations, c'est à dire que [22]:

$$m_x = \frac{1}{T} \int_0^T X(t).dt \quad (4.49)$$

où  $m_x$  est la valeur moyenne de l'ensemble des réalisations.

Il convient d'éclaircir dans quelles conditions au juste la relation (4.49) peut être utilisée.

Pour qu'une fonction aléatoire stationnaire  $X(t)$  jouisse de la propriété d'ergodicité, il est nécessaire et suffisant que sa fonction de corrélation remplisse la condition [22]

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T (1 - \frac{\tau}{T}) K_x(\tau).d\tau = 0 \quad (4.50)$$

Une condition suffisante d'ergodicité d'une fonction aléatoire stationnaire est la condition de décroissance rapide de sa fonction de corrélation  $K_x(\tau)$  par rapport au module de  $\tau$  lorsque  $|\tau| \rightarrow \infty$ .

Ainsi donc, la fonction de corrélation  $K_x(\tau)$  d'une fonction aléatoire stationnaire peut être présentée sous forme:

$$K_x(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T (X(t) - m_x)(X(t + \tau) - m_x).dt \quad (4.51)$$

#### 4.2.4.5- Densité de spectre d'une fonction aléatoire

Comme la fonction d'autocorrélation donne des informations concernant les propriétés d'une fonction aléatoire dans le domaine temporel, la densité de spectre d'une fonction aléatoire donne des informations similaires dans le domaine fréquentiel [22]. Dans certaines applications, une forme est plus utile que l'autre.

De la formule (4.20) définissant la transformation de Fourier d'une fonction non périodique, on peut définir la densité de spectre de cette fonction à savoir [22,28] :

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} S(\omega).e^{i\omega t}.d\omega \quad (4.52)$$

où

$$S(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \cdot e^{-i\omega t} \cdot d\omega \quad (4.53)$$

Dans le cas particulier où on prend la fonction de corrélation  $K_x(\tau)$  à titre de fonction  $f(t)$ , on obtient

$$K_x(\tau) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} S_x(\omega) \cdot e^{i\omega\tau} \cdot d\omega \quad (4.54)$$

et

$$S_x(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} K_x(\tau) \cdot e^{-i\omega\tau} \cdot d\tau \quad (4.55)$$

Etant donnée que la fonction de corrélation est une fonction paire de  $\tau$ . C'est à dire :

$$K_x(\tau) = K_x(-\tau).$$

Nous déduisons alors des formules (4.54) et (4.55) dites de WIENER-KHINCHINE [4,22]

$$K_x(\tau) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} S_x(\omega) \cdot \cos(\omega\tau) \cdot d\omega \quad (4.56)$$

$$S_x(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} K_x(\tau) \cos \omega\tau \cdot d\tau \quad (4.57)$$

La variance d'une fonction aléatoire stationnaire étant égale à  $K_x(0)$  nous déduisons de la relation précédente [22]:

$$K_x(0) = \sigma_x = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} S_x(\omega) \cdot d\omega \quad (4.58)$$

C'est à dire que la variance d'une fonction aléatoire stationnaire est égale à la somme des termes élémentaires  $\frac{1}{2\pi} S_x(\omega) d\omega$ , dont chacun représente une variance élémentaire de  $d\sigma_x$ . [22].

$$\Delta\sigma_{x_j} = \frac{1}{2\pi} S_x(\omega_j) \cdot \Delta\omega_j$$

Où  $\Delta\sigma_{x_j}$  est la variance élémentaire de l'aptitude de l'harmonique correspondant à l'intervalle de fréquence  $[\omega_j, \omega_j + \Delta\omega_j]$ .

En utilisant les formules (4.47) et (4.48), on définit la densité spectrale de la première et de la deuxième dérivée de la fonction d'autocorrélation [22]

$$S_{\dot{x}}(\omega) = \omega^2 \cdot S_x(\omega) \quad (4.59)$$

$$S_{\ddot{x}}(\omega) = \omega^4 S_x(\omega) \quad (4.60)$$

Connaissant les densités spectrales des deux premières dérivées de la fonction aléatoire stationnaire, on peut définir les différentes variances des deux premières dérivées grâce aux formules (4.59) et (4.60) [22].

$$\sigma_{\dot{X}} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} S_{\dot{X}}(\omega) d\omega \quad (4.61)$$

$$\sigma_{\ddot{X}} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \omega^2 S_{\ddot{X}}(\omega) d\omega \quad (4.62)$$

$$\sigma_{\ddot{\ddot{X}}} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \omega^4 S_{\ddot{\ddot{X}}}(\omega) d\omega \quad (4.63)$$

#### 4.2.4.6- Fonction de répartition du fonction aléatoire ergodique

Une fonction aléatoire ergodique sera complètement déterminée du point de vue probabilistique lorsque sera connue la probabilité de chacune de ses valeurs réalisables. Une telle correspondance appelée " loi de répartition de la fonction aléatoire ergodique" [22].

Pour définir le concept, considérons que la fonction aléatoire ergodique  $X(t)$  soit définie par la fig. 4.9 en fonction du temps.

Soit  $\Delta t_1, \Delta t_2, \Delta t_3, \dots, \Delta t_{n-1}, \Delta t_n$  des intervalles de temps durant lesquels  $X(t)$  est plus petite qu'une valeur  $X$  donnée.

On entend par probabilité d'événement, la probabilité de l'événement  $X(t) < X$ , où  $X$  désigne une certaine valeur donnée.

Pour un large intervalle de temps  $T$ , on peut estimer la probabilité désirée par la formule suivante.

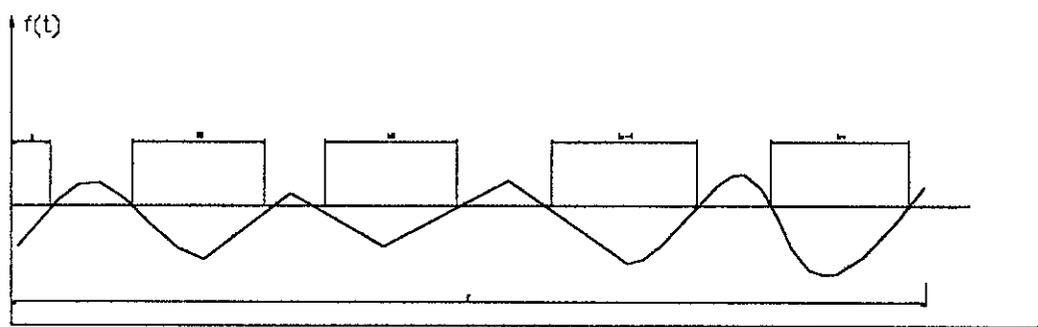


Fig. 4.9 Représentation d'une fonction aléatoire au cours du temps

$$F(x) = P(X(t) < x) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \sum_{i=1}^n \Delta t_i \quad (4.64)$$

Il est évident que la probabilité (4.64) admet les propriétés suivantes [4,22,28]:

$$F(-\infty) = P(X(t) < -\infty) = 0$$

$$F(+\infty) = P(X(t) < \infty) = 1$$

$$0 < P(X(t)) < 1$$

#### 4.2.4.7- Densité de probabilité

La conséquence du fait que la fonction de répartition soit continue et que la probabilité de chaque valeur isolée de la variable aléatoire soit égale à zéro, dans ce cas la variable aléatoire ne peut donc être caractérisée par la probabilité de ses valeurs. La question se pose de savoir comment le nombre  $X$  des valeurs possibles de la variable aléatoire étant donné, on peut déterminer la probabilité pour que cette variable soit inférieure (ou supérieure) à une valeur  $X$ . Considérons pour répondre à cette question, les points de l'axe numérique correspondant à un petit intervalle  $\Delta X$ . Alors la probabilité que la valeur aléatoire  $X$  prenne une valeur située dans l'intervalle  $(X, X + \Delta X)$  est la mesure de la probabilité d'apparition de la valeur  $x$  donné [22]. Si on repartit cette probabilité sur  $OX$  et si on fait tendre  $\Delta X$  vers zéro, on aboutit à une nouvelle caractéristique probabiliste relative aux variables aléatoires continues (fonction): la densité de probabilité.

Par définition la densité de probabilité est [22,28]:

$$f(x) = \lim_{\Delta X \rightarrow 0} \frac{P(X < X(t) < X + \Delta X)}{\Delta X} \quad (4.67)$$

De l'expression (4.67) il découle que la fonction  $f(x)$  est non négative.

si la densité de la probabilité de la variable aléatoire  $X$  est distincte de zéro au point  $X$ , alors  $X$  est une valeur possible de la variable.

En combinant les formules (4.67) et (4.66) on obtient l'expression suivante.

$$f(x) = \frac{dF(x)}{dx} \quad (4.68)$$

Ainsi, la probabilité pour que la variable aléatoire se trouve alors dans l'intervalle  $(X_1, X_2)$  est égale à [22,28]

$$P(X_1 < X(t) < X_2) = \int_{X_1}^{X_2} f(x).dx \quad (4.69)$$

L'allure quantitative de la fonction de densité de probabilité est représenté sur la fig.4.10. La probabilité  $P(X_1 < X(t) < X_2)$  est égale numériquement à l'aire hachuré sur la fig.4.10. La fonc-

tion de répartition de la variable aléatoire et sa densité de probabilité constituent des formes différentes de la même loi de répartition d'une variable aléatoire.

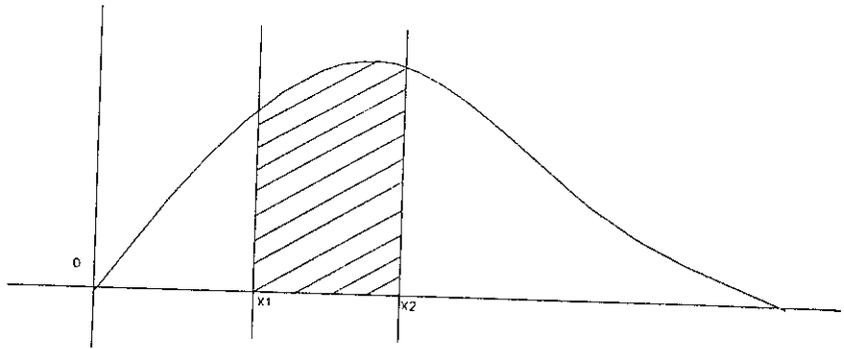


Fig. 4.10 Représentation qualitative d'une fonction de densité d'une fonction aléatoire

Parmi les lois de répartition d'une densité de probabilité les plus usuelles et utilisables, on peut citer [22,28]:

1- répartition de la densité de probabilité suivant la loi delta

$$f(x) = \delta(X - a) \quad (4.70)$$

2- Loi de répartition normale (loi de Gauss)

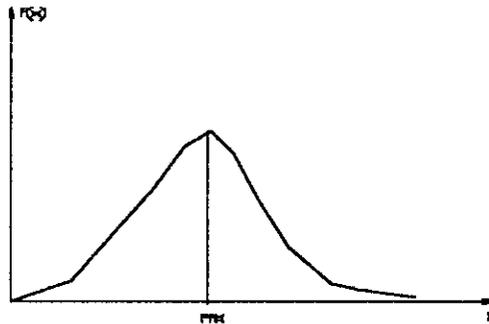


Fig.4.11 représentation d'une loi de répartition normale

$$f(x) = \frac{1}{D_x \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-m_x)^2}{2D_x^2}} \quad (4.71)$$

où  $m_x$ : espérance mathématique de la variable aléatoire

$D_x$ : écart type statistique de la variable aléatoire

### 3-La densité de répartition de RAYLEIGH

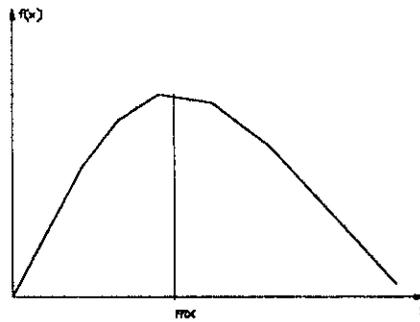


Fig. 4.12 représentation d'une loi de répartition de Rayleigh

$$f(x) = \begin{cases} \frac{X}{D_x^2} e^{-\frac{x^2}{2D_x^2}} & X \geq 0 \\ 0 & X < 0 \end{cases} \quad (4.72)$$

$$m_x = D_x \sqrt{\frac{\pi}{2}}$$

## 4.3- description d'un microprofil d'une chaussée

### 4.3.1- Généralités

Pour résoudre le déplacement d'un véhicule sur une route comportant des irrégularités aléatoires, il faut connaître quelle influence exerce la chaussée sur le véhicule aux divers vitesses de mouvement, c'est à dire qu'il faut connaître le spectre de perturbation se rapportant à cette chaussée, spectre qui dépend du microprofil de la chaussée et de la vitesse du mouvement [22].

Sur la Fig.4.13 est représentée une portion de chaussée (microprofil de la portion de route) comportant des irrégularités aléatoires. Chaque portion de route comporte des irrégularités d'étendue et de formes différentes, La succession des saillies et des creux est tout à fait aléatoire, aussi la grandeur et la durée de l'action des forces d'impulsion agissant sur la mouvement de la roue sont aléatoires en raison de ces irrégularités.

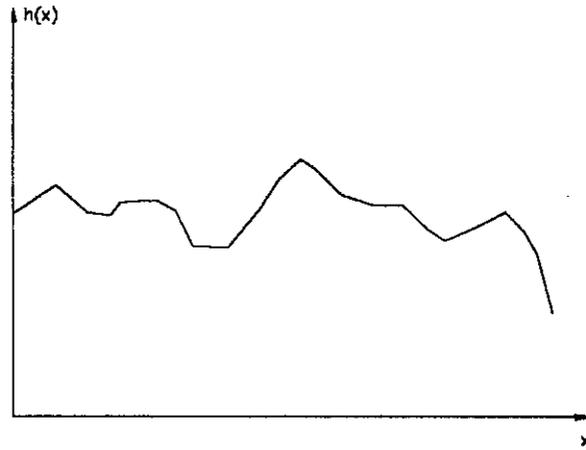


Fig.4.13 représentation schématique d'un microprofil de route.

Pour étudier les oscillations aléatoires d'un corps se déplaçant sur une route comportant des irrégularités aléatoires, il faut connaître la dépendance entre  $h$  et le temps  $t$ . Pour cela, il suffit de diviser l'abscisse de la fig.4.13 par la vitesse  $V$  du déplacement, le résultat obtenu consiste à idéaliser la fonction aléatoire  $h$  de par rapport au temps [22].

La valeur de la fonction  $h(x)$  représentant le microprofil de la route coïncide alors avec les valeurs de la fonction d'influence  $h(t)$ .

L'influence sur la véhicule de la portion de la route considérée est unique et reste la même à tout autre moment, c'est à dire qu'elle constitue un processus stationnaire [22].

Les conditions remplies par cette fonction aléatoire stationnaire sont:

- 1- La fonction aléatoire est stationnaire et ergodique: c'est à dire qu'à partir d'une réalisation on peut estimer les caractéristiques probabilistes.
- 2- Les longueurs des irrégularités sont limitées de haut et de bas suivant la hauteur quadratique moyenne des irrégularités.
- 3- Les ordonnées du microprofil sont distribuées suivant une loi normale.

#### 4.3.2- Caractéristiques probabilistes de la fonction aléatoire $h(t)$ .

Le traitement statistique des résultats des mesures des microprofil de la chaussée permet d'obtenir les caractéristiques probabilistes de la fonction aléatoire stationnaire ergodique  $h(t)$  à savoir l'espérance mathématique,  $m_h$ , la fonction d'autocorrélation  $K_h(\tau)$ , la densité spectrale,  $S_h(\omega)$  et la variance  $\sigma_h$ .

On ne peut obtenir de telles caractéristiques valables pour tous les types de chaussée; aussi les obtient-on en prenant la précaution de diviser les chaussées en série de classes suivant la hauteur quadratique moyenne des irrégularités [22].

Il existe deux types d'approches pour définir les caractéristiques probabilistes des irrégularités d'une chaussée, à savoir:

- Approche basée sur la fonction d'autocorrélation  $K_h(\tau)$  [22]
- Approche basée sur la densité spectrale  $S_h(\omega)$  [16]

#### 4.3.2.1- Approche basé sur la fonction d'autocorrélation $K_h(\tau)$

Les fonctions d'autocorrélations  $K_h(\tau)$  des irrégularités des routes sur les corps peuvent être approchées avec un degré de précision suffisant par des fonctions de la forme [22]

$$K_h(\tau) = \sigma_h \cdot e^{-\alpha|\tau|} \cdot \cos \beta\tau \quad (4.73)$$

où  $\sigma_h$  est la variance de la fonction aléatoire décrivant les irrégularités de la chaussée.

$\alpha$  et  $\beta$  sont des paramètres dépendant du type de route et de la vitesse du mouvement.

On peut présenter les paramètres  $\alpha$  et  $\beta$  sous forme de fonctions dépendant de manière explicite de la vitesse  $V$  du mouvement.

$$\alpha = \alpha_1 \cdot V \quad \beta = \beta_1 \cdot V$$

où  $\alpha_1$  et  $\beta_1$  sont les valeurs des paramètres pour une vitesse égale à l'unité et caractérisent le type de la route.

Ainsi, la densité spectrale de l'influence de la route sur le corps est obtenue par utilisation de la formule (4.57) [22].

$$S_h(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} K_h(\tau) \cdot \cos \omega\tau \cdot d\tau = \frac{2\sigma_h \cdot \alpha(\alpha^2 + \beta^2 + \omega^2)}{(\alpha^2 + \beta^2) + 2(\alpha^2 - \beta^2)\omega^2 + \omega^4} \quad (4.74)$$

Soit en tenant compte de la dépendance des coefficients  $\alpha$  et  $\beta$  vis à vis de la vitesse  $V$  du corps [22].

$$S_h(\omega) = \frac{2 \cdot \sigma_h \cdot \alpha_1 (V^2 \gamma_1 + \omega^2)}{V^2 \gamma_1 + 2V^2 \gamma_2 \omega^2 + \omega^4} \quad (4.75)$$

$$\gamma_1 = \alpha_1^2 + \beta_1^2 \quad \gamma_2 = \alpha_1^2 - \beta_1^2$$

Ainsi, à chaque type de route correspond une fonction de corrélation et donc une densité spectrale.

Dans certains ouvrages, les fonctions de corrélation sont en fonction d'une variable  $X_s$ , dans ce cas, on effectue le changement de variable qui est:  $X_s = V \cdot \tau$  pour revenir aux formules (4.73) et (4.75).

Vue l'indisponibilité des ouvrages spécialisés, définissant les caractéristiques probabilistes de tous les types de chaussées, néanmoins on a pu dresser un tableau décrivant la fonction d'auto-corrélation et de densité spectrale de quelques types de route [22]

Type de route    Fonction d'autocorrélation    Densité spectrale

Type de route	Fonction d'auto-corrélation	Densité spectrale
Route béton	$e^{-0.15V \tau }$	$\frac{0.05V}{\omega^2 + 0.0225}$
Route asphaltée	$0.85e^{-0.2V \tau } + 0.15e^{-0.05V \tau } \cos 16V\tau$	$\frac{0.054V}{\omega^2 + 0.04V^2} + \frac{0.0024V(\omega^2 + 0.36V^2)}{(\omega^2 - 0.36V^2) + 0.0036V^4}$
Route assez régulière	$e^{-0.45V \tau }$	$\frac{0.143V}{\omega^2 + 0.2V^2}$
Route pavée	$0.85e^{-0.5V \tau } + 0.15e^{-0.25V \tau } \cos 2V\tau$	$\frac{0.635V}{\omega^2 + 0.25V^2} + \frac{0.01V(\omega^2 + 4.310^{-2}V^2)}{(\omega^2 - 4V^2)^2 + 0.64V^4}$
Route herbeuse	$96.4e^{-0.0627V \tau } \cos(0.196V\tau)$	$12.2V \frac{\omega^2 + 4.310^{-2}V^2}{\omega^2 - 710^{-2}V^2\omega^2 + 18.410^{-4}V^4}$
Route bruit blanc	$\frac{S_0}{2\pi} \delta(\tau) = 15.9$	7.056

7.056

En pratique, très souvent la densité spectrale n'est connue que par sa représentation graphique. ainsi, pour trouver l'expression analytique qui lui correspond, il faut avoir recours aux méthodes d'approximations d'une courbe par une fonction analytique.

D'autre part, généralement la densité spectrale se présente sous forme d'une fonction rationnelle à coefficient constant.

Parmi les méthodes qu'on retrouve pour résoudre le problème sont [22]:

- 1- Méthode d'approximation basé sur l'expansion en série de Fourier.
- 2- Méthode d'interpolation.

Cette méthode suppose la connaissance de courbe de la densité spectrale  $S(\omega)$  et l'approximer par une fonction rationnelle [22] telle que

$$S(\omega) = \frac{b_0 + b_1\omega^2 + b_2\omega^4 + \dots + b_m\omega^{2m}}{a_0 + a_1\omega^2 + a_2\omega^4 + \dots + a_n\omega^{2n}}; \quad n > m \quad (4.76)$$

Pour définir l'expression (4.76), on procède de la façon suivante:

L'égalité (4.76) peut s'écrire de la façon suivante:

$$b_0 + b_1\omega^2 + b_2\omega^4 + \dots + b_m\omega^{2m} - S(\omega)(a_0 + a_1\omega^2 + a_2\omega^4 + \dots + a_n\omega^{2n}) = 0 \quad (4.77)$$

Le problème consiste à définir les constantes  $a_i$  et  $b_j$  ( $i=1, n; j=1, m$ ) pour cela on choisit  $(n+nm+2)$  points parmi ceux qui ont servi à tracer la courbe originale  $S(\omega)$ .

On remplace dans (4.77), on obtient alors un système d'équations linéaires de la forme:

$$\begin{cases} b_0 + b_1\omega_1^2 + \dots + b_m\omega_1^{2m} - S(\omega_1)(a_0 + a_1\omega_1^2 + \dots + a_n\omega_1^{2n}) = 0 \\ b_0 + b_1\omega_2^2 + \dots + b_m\omega_2^{2m} - S(\omega_2)(a_0 + a_1\omega_2^2 + \dots + a_n\omega_2^{2n}) = 0 \\ \vdots \\ b_0 + b_1\omega_{n+m+2}^2 + \dots + b_m\omega_{n+m+2}^{2m} - S(\omega_{n+m+2})(a_0 + a_1\omega_{n+m+2}^2 + \dots + a_n\omega_{n+m+2}^{2n}) = 0 \end{cases} \quad (4.78)$$

On peut écrire le système d'équations (4.78) sous forme matricielle suivante:

Soit à résoudre le système d'équation  $[A]\{X\}=0$

$$\text{où } \begin{cases} X_i = b_i & i = 0, m \\ X_i = a_i & i = m+1; n+m \end{cases} \quad (4.79)$$

#### 4.3.2.2- Approche basée sur la densité spectrale $Sh(\omega)$

Le développement d'instruments précis de mesure du profil de la route et la disponibilité de l'ordinateur assez puissants, permettant la simulation des moindres détails du modèle du véhicule, ont permis des analyses plus poussées du comportement aléatoire des véhicules sur des profils réels de route.

Actuellement, il existe de nombreux moyens de mesure du profil de la route telle que l'analyseur dynamique de profil en long (APL) [16].

L'ALP, traîné par un véhicule, transmet les amplitudes verticales des irrégularités de la route par l'intermédiaire d'une masse vibrante à un appareil d'enregistrement.

Une fois le profil mesuré, il peut être classé par ces composantes fréquentielles au moyen de la densité spectrale de puissance (DSP). A condition que le profil de la route soit décrit par une fonction aléatoire stationnaire ergodique [16].

De nombreux chercheurs trouvent que ces profils peuvent être représentés dans le domaine fréquentiel par une densité spectrale de puissance de la forme suivante [16]:

$$S(\Omega) = C \cdot \Omega^{-N} \quad (4.81)$$

où  $\Omega$  est la fréquence spatiale en cycle/m

C et N sont des constantes spécifiques pour chaque type de profil de route. Ils augmentent lorsque la régularité de la route augmente.

Par exemple

Pour une autoroute lisse  $N=2.1$  et  $C=1.2 \cdot 10^{-4}$

Pour une autoroute granuleuse  $N=2.1$  et  $C=4.4 \cdot 10^{-6}$

Pour un profil lunaire  $N=2.0$  et  $C=3.6 \cdot 10^{-4}$

On voit bien que l'équation (4.81) définissant la densité spectrale du profil de la route est décrite comme fonction de la fréquence spatiale

(cycle/m), qui est indépendante de la vitesse de déplacement du véhicule. Pour l'analyse des comportements du véhicule, il est souvent intéressant de faire l'étude du véhicule dans le domaine de la fréquence temporelle (cycle/sec). Pour y arriver il suffit d'exprimer le déplacement  $x$  par  $vt$ .

Ce qui donne

$$w = \Omega \cdot V \quad (4.82)$$

Et ainsi, la densité spectrale du profil de la route exprimée en fonction de la fréquence  $\omega$ , est:

$$S(\omega) = C \cdot \left(\frac{\omega}{V}\right)^{-N} \quad (4.83)$$

**Remarque:**

La densité spectrale de l'équation (4.83) qui modélise le profil de la route d'amplitude Gaussienne n'est pas valable pour les faibles fréquences [16]. Pour y remédier à cet inconvénient l'équation (4.81) a subi une modification, pour des fréquences petites, de façon à ce que la densité spectrale  $S(w)$  reste constante pour des fréquences  $\omega$  inférieures à une certaine valeur  $\omega_0$ . Ainsi elle prendra la forme suivante:

$$S(\omega) = \frac{C}{\alpha^2 + \left(\frac{\omega}{V}\right)^2} \quad (4.84)$$

où  $C$  est une constante qui permet de donner des valeurs finies à la densité spectrale pour de faibles valeurs de la fréquence spatiale.

Il existe des ouvrages [16] qui exprime la densité spectrale du profil de la route dans le domaine fréquentiel temporel par l'équation suivante:

$$S(\omega) = \frac{aV\sigma^2}{\pi} \frac{1}{a^2V^2 + \omega^2} \quad (4.85)$$

où  $\omega$ : est la fréquence temporelle (cycle/sec)

$V$ : vitesse de déplacement du véhicule en (m/sec)

$\sigma^2$  et  $a$  (respectivement en  $\text{mm}^2$  et  $\text{m}^{-1}$ ) des constantes spécifiques pour chaque type de profil de route.

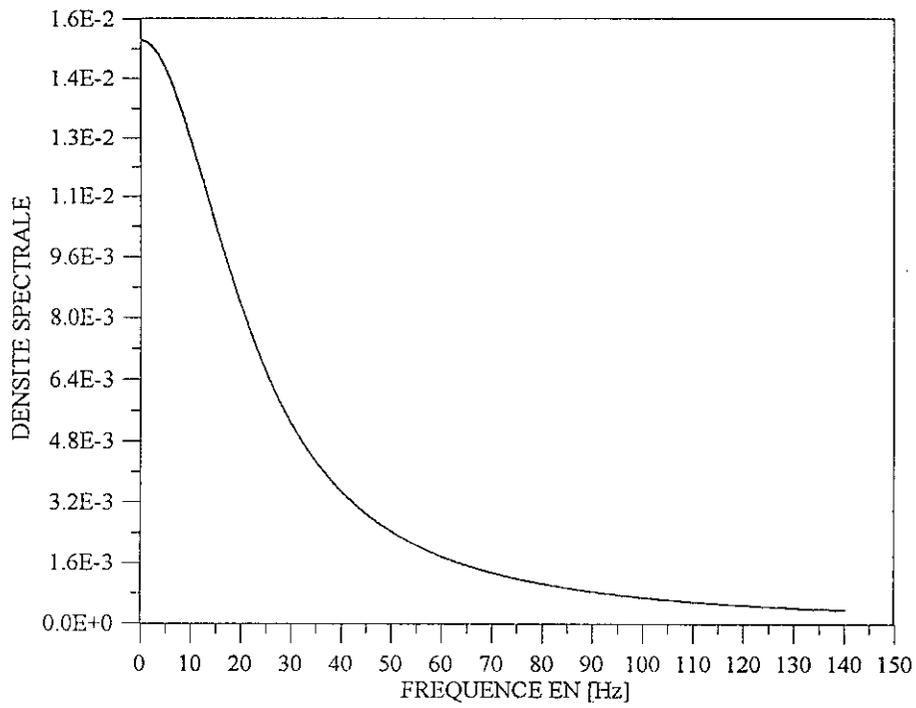


Fig.4.13 Densité spectrale d'une chaussée béton  
Pour une vitesse de 40 Km/h

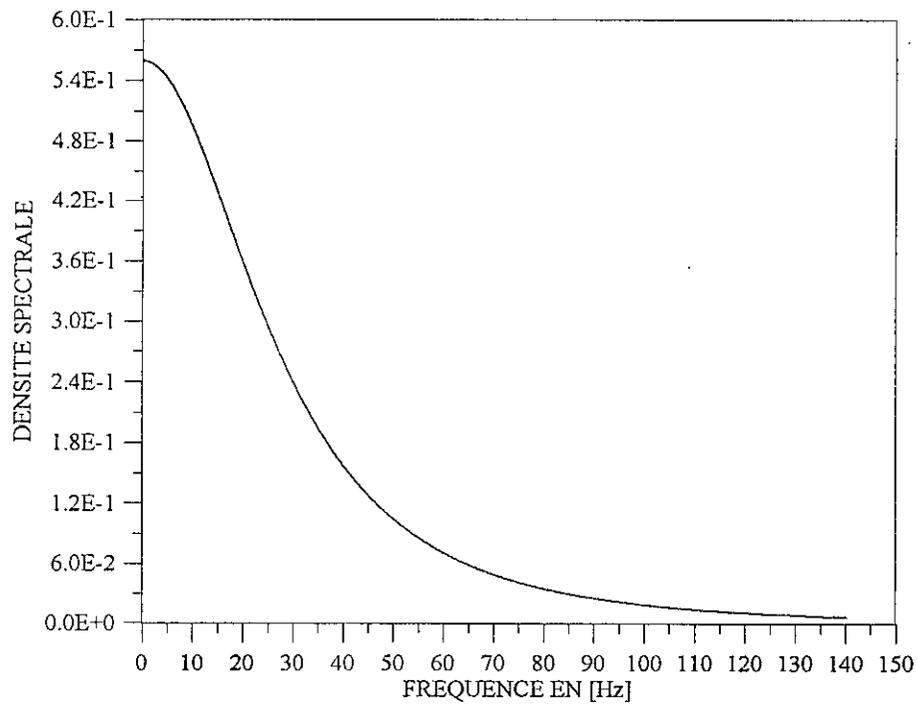


Fig.4.14 Densité spectrale d'une chaussée asphaltée  
Pour une vitesse de 40 Km/h

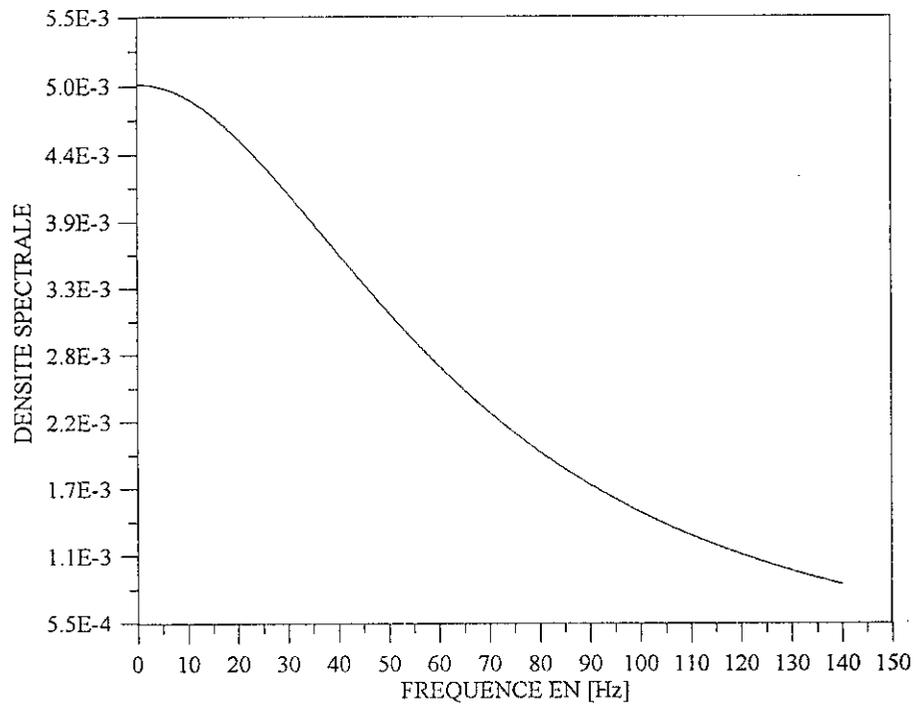


Fig.4.15 Densité spectrale d'une chaussée pavée assez régulière  
Pour une vitesse de 40 Km/h

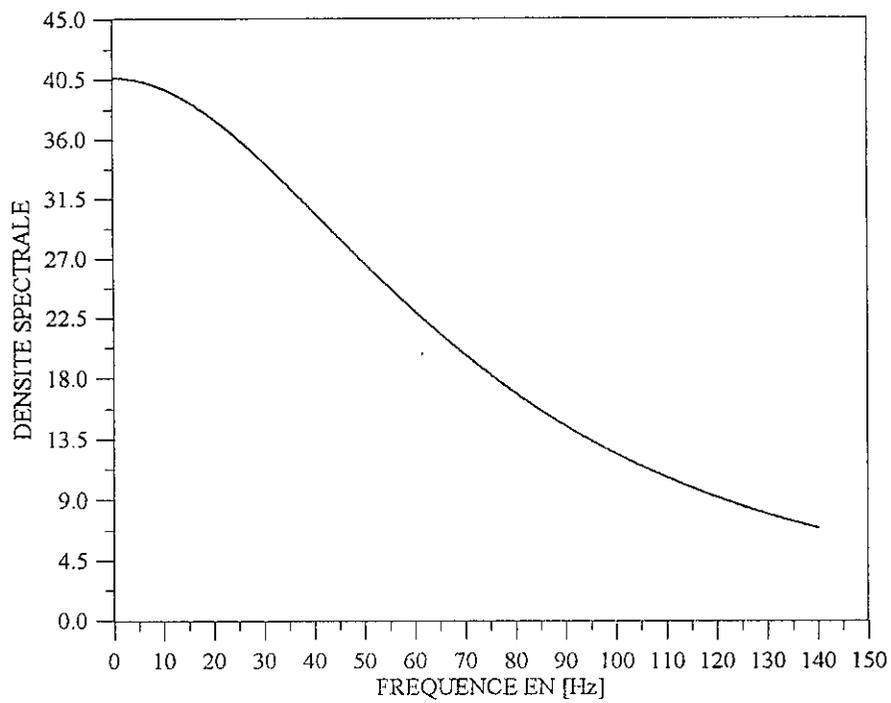


Fig.4.16 Densité spectrale d'une chaussée pavée  
Pour une vitesse de 40 Km/h

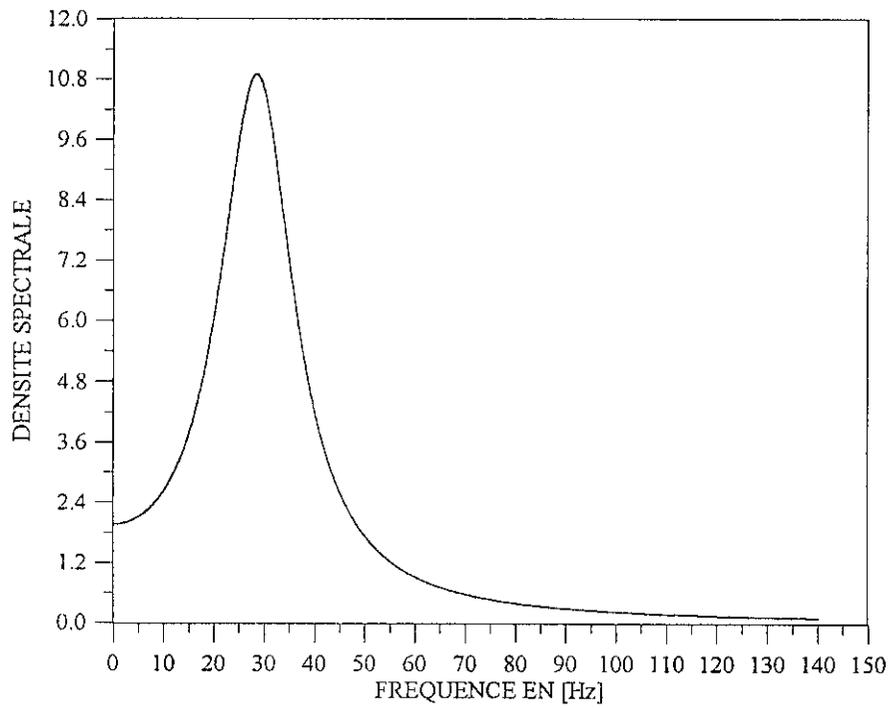


Fig.4.17 Densité spectrale d'une chaussée herbeuse  
Pour une vitesse de 40 Km/h

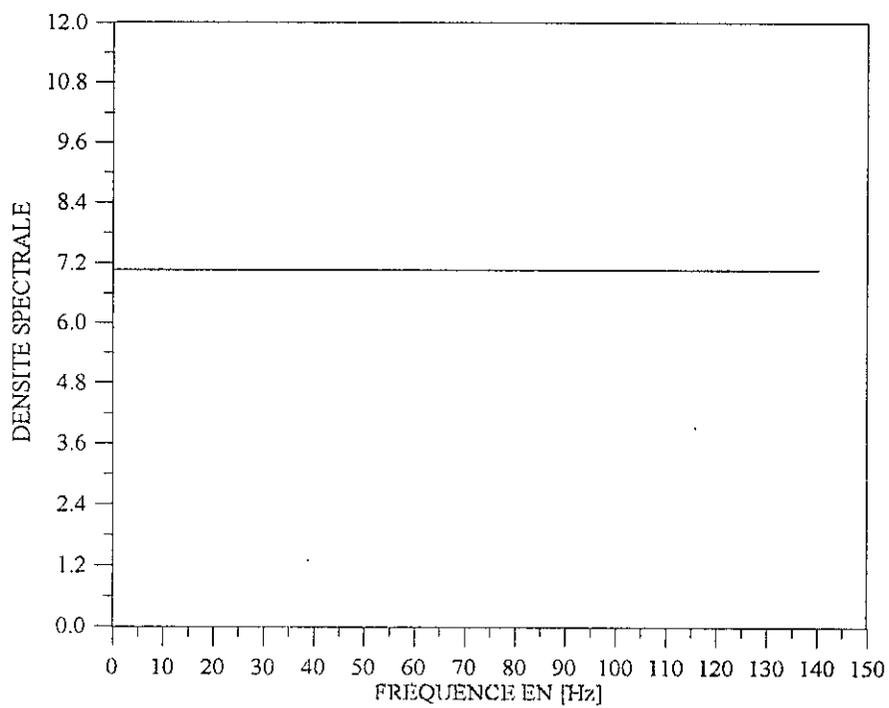


Fig.4.17 Densité spectrale d'une chaussée bruit blanc  
Pour une vitesse de 40 Km/h



# CHAPITRE V

## CHAPITRE V

### Etude dynamique d'un véhicule industriel soumis à l'effet du moteur et des irrégularités de la route: Approche simplifiée (Déterministe)

#### 5.1- Introduction

L'étude théorique de la dynamique d'une structure mécanique consiste entre autres à déterminer les valeurs propres et les vecteurs propres relatifs au modèle mathématique de la structure et à définir ainsi les réponses de la structure sous l'effet d'une excitation quelconque.

Les structures de grandes importances (Automobile, Aérospatiale...etc.) sont trop complexes pour être analysées par des techniques d'approximation classique. Afin de remédier aux insuffisances de ces techniques, on utilise aujourd'hui la technique de modélisation des structures,....

Le principe de la méthode consiste à subdiviser la structure en un ensemble de masses ponctuelles reliées entre elles par un ensemble de ressorts et d'amortisseurs; l'ensemble réagit de la même manière que la structure elle même [24].

A partir des équations du mouvement de chaque masse et des équations relatives aux conditions aux limites entre les masses, on forme un grand ensemble d'équations décrivant les propriétés dynamiques de la structure.

La mise en œuvre de cette technique repose essentiellement sur trois étapes essentielles [24] :

La préparation des données

L'étude théorique et le calcul

Exploitation et interprétation des résultats

Dans ce travail, on donne un bref aperçu sur la technique de modélisation, son application dans le domaine de l'automobile et des interprétations et analyses des résultats trouvés.

On s'intéresse à l'étude du véhicule industriel, TB260 avec sa remorque. Ce sont deux engins fabriqués par la S.N.V.I (ROUIBA) dont les caractéristiques sont représentées sur la Fig.5.1'.

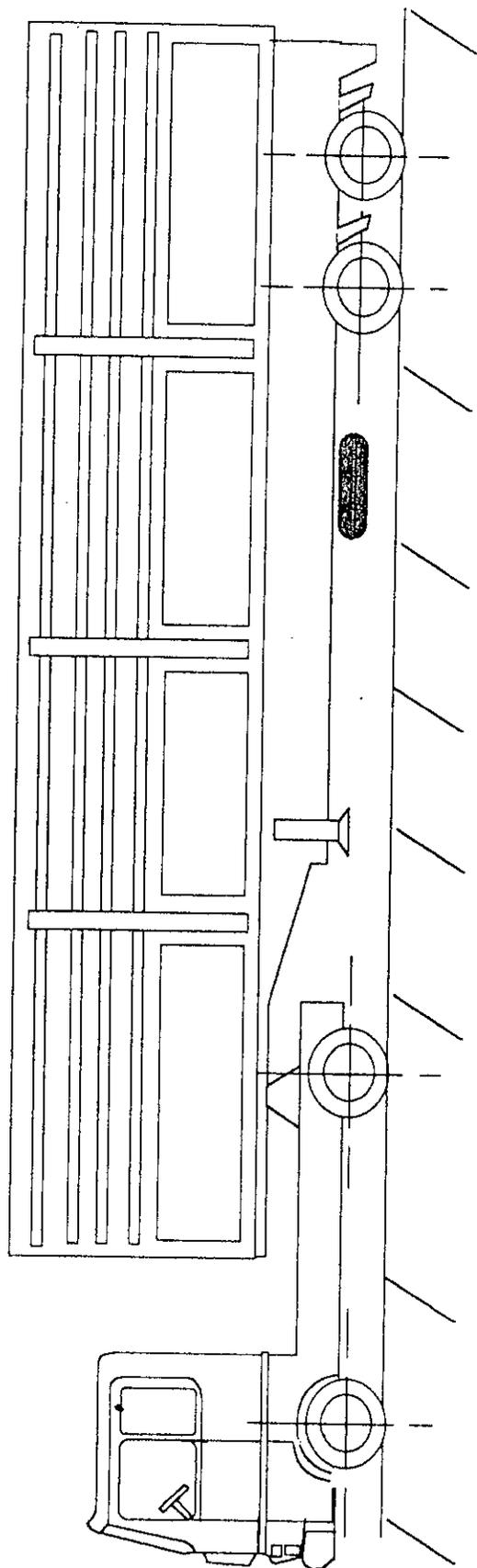
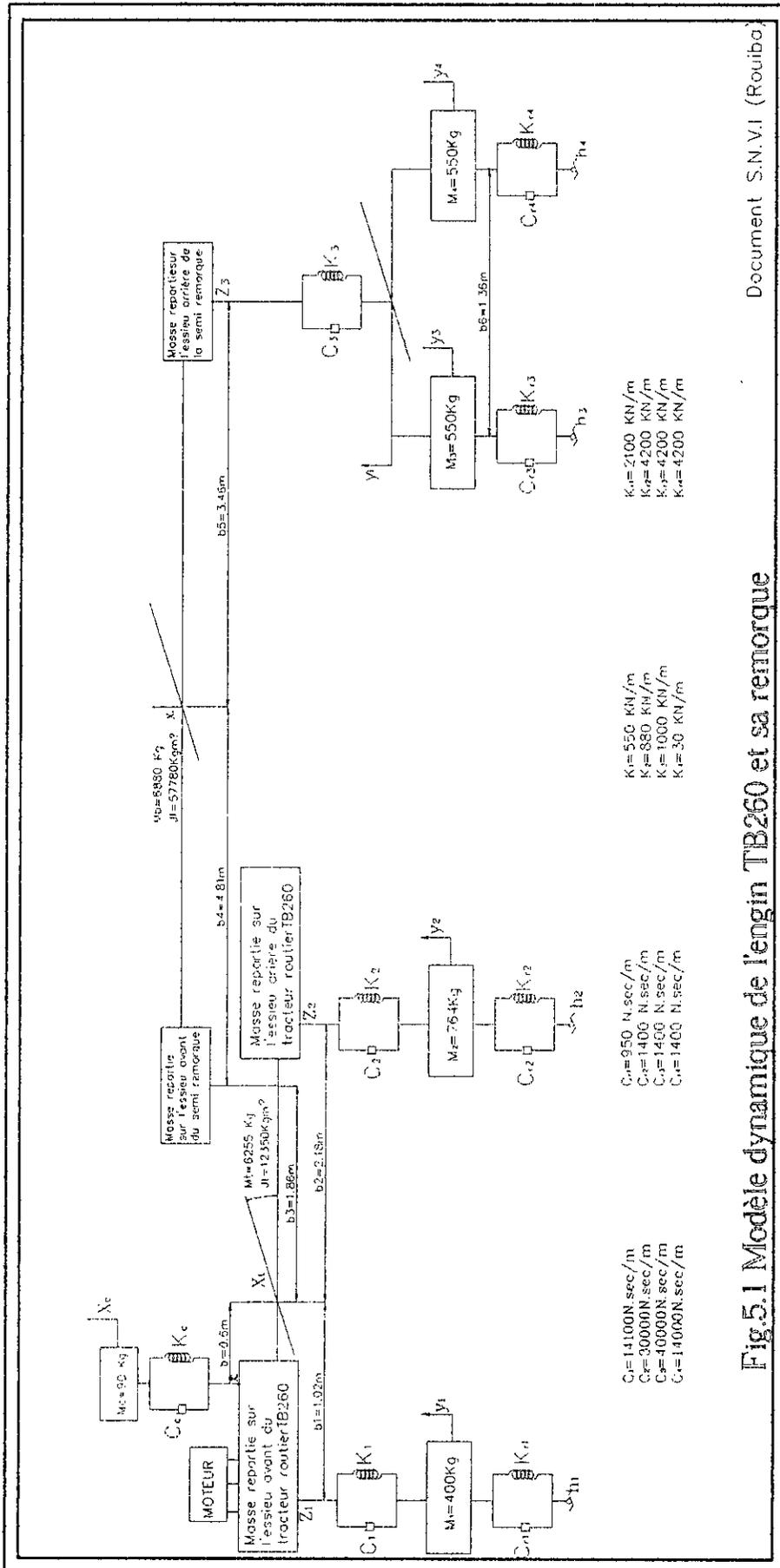


Fig5.1' Tracteur Routier et Semi - Remorque



Document S.N.V.I (Rouiba)

Fig.5.1 Modèle dynamique de l'engin TB260 et sa remorque

Le modèle est composé de 8 principales masses vibrantes

M1: masse de l'essieu avant du tracteur routier

M2: masse de l'essieu arrière du tracteur routier

M3: masse de l'essieu arrière de la semi-remorque

Mt: masse du tracteur routier. Elle est répartie en deux masses, une à l'avant et l'autre à l'arrière du tracteur routier

Mb: masse totale de la remorque, répartie en deux masses, une à l'avant et l'autre à l'arrière

Mc: masse du chauffeur et de son siège

Le tracteur routier et la semi-remorque sont supposés articulés autour de la sellette.

Le chauffeur et son siège sont modélisés par une masse à un degré de liberté attaché au châssis du tracteur

Suite à ces considérations, le modèle est défini par 8 degrés de liberté

Translation verticale et rotation du centre de gravité du tracteur routier

Rotation du centre de gravité de la semi-remorque

Translation verticale de chaque essieu (quatre essieux).

Translation verticale du corps du chauffeur et de son siège.

De la figure 5.1, on peut définir les relations suivantes:

$$Z_1 = X_t - b_1 \varphi_t$$

$$Z_2 = X_t - b_2 \varphi_t \quad (5.1)$$

$$Z_s = X_t - b_7 \varphi_t$$

au niveau de la sellette, on a les relations suivantes

$$\begin{aligned} X_b + b_4 \varphi_1 &= X_t + b_3 \varphi_b; & X_b &= X_t + b_3 \varphi_t + b_4 \varphi_b \\ Z_3 &= X_b - b_5 \varphi_b; & Z_3 &= X_t + b_3 \varphi_t - (b_4 + b_5) \varphi_b \end{aligned} \quad (5.2)$$

au niveau de l'essieu arrière de la remorque

$$\begin{aligned} Y_3 &= Y_i - (b_6/2) \varphi_i; & Y_i &= (Y_3 + Y_4)/2 \\ Y_4 &= Y_i + (b_6/2) \varphi_i; & i &= (Y_4 - Y_3)/b_6 \end{aligned} \quad (5.3)$$

Une fois le modèle obtenu, on peut faire l'analyse énergétique du système de la figure 5.1.

### 5.3 Etude théorique du système

En utilisant les équations de Lagrange de la deuxième espèce, on peut définir les équations d'équilibre du système à partir de

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} \right) + \frac{\partial \pi}{\partial q_i} + \frac{\partial D}{\partial \dot{q}_i} = Q_i \quad (5.4)$$

T: l'énergie cinétique du système.

$\pi$ : l'énergie potentielle du système.

D: l'énergie dissipée par le système.

$Q_i$ : l'effort généralisé correspondant à la  $i$ ème coordonnée généralisée.

$q_i$ : coordonnée généralisée ( $X_c, X_t, \varphi_t, \varphi_b, y_1, y_2, y_3, y_4$ ).

L'énergie cinétique est produite par les mouvements de translation et de rotation des différentes masses du système et elle correspond à:

$$T = \frac{1}{2} M_c \dot{x}_c^2 + \frac{1}{2} M_t \dot{x}_t^2 + \frac{1}{2} M_1 \dot{y}_1^2 + \frac{1}{2} M_b (\dot{x}_c + b_3 \dot{\varphi}_t + b_4 \dot{\varphi}_b)^2 + \frac{1}{2} M_2 \dot{y}_2^2 + \frac{1}{2} M_3 \dot{y}_3^2 + \frac{1}{2} M_4 \dot{y}_4^2 + \frac{1}{2} J_t \dot{\varphi}_t^2 + \frac{1}{2} J_b \dot{\varphi}_b^2 \quad (5.5)$$

l'énergie emmagasinée dans les ressorts du système est

$$\begin{aligned} \Pi = & \frac{1}{2} K_c (x_c - x_t + b_7 \varphi_t)^2 + \frac{1}{2} K_1 (y_1 - x_t + b_1 \varphi_t)^2 + \frac{1}{2} K_{r1} (y_1 - h_1)^2 + \frac{1}{2} K_2 (y_2 - x_t + b_2 \varphi_t)^2 \\ & + \frac{1}{2} K_{r2} (y_2 - h_2)^2 + \frac{1}{2} K_{r3} \left( \frac{y_3 + y_4}{2} - x_t - b_3 \varphi_t + (b_4 + b_5) \varphi_b \right)^2 + \frac{1}{2} K_{r3} (y_3 - h_3)^2 \\ & + \frac{1}{2} K_{r4} (y_4 - h_4)^2 \end{aligned} \quad (5.6)$$

L'énergie de dissipation est dissipée par les différents amortisseurs du système

$$\begin{aligned} D = & \frac{1}{2} C_c (\dot{x}_c - \dot{x}_t + b_7 \dot{\varphi}_t)^2 + \frac{1}{2} C_1 (\dot{y}_1 - \dot{x}_t + b_1 \dot{\varphi}_t)^2 + \frac{1}{2} C_{\alpha 1} (\dot{y}_1 - \dot{h}_1)^2 + \frac{1}{2} C_2 (\dot{y}_2 - \dot{x}_t - b_2 \dot{\varphi}_t)^2 \\ & + \frac{1}{2} C_{\alpha 2} (\dot{y}_2 - \dot{h}_2)^2 + \frac{1}{2} C_{\alpha 3} \left( \frac{\dot{y}_3 + \dot{y}_4}{2} - \dot{x}_t - b_3 \dot{\varphi}_t + (b_4 + b_5) \dot{\varphi}_b \right)^2 + \frac{1}{2} C_{\alpha 3} (\dot{y}_3 - \dot{h}_3)^2 \\ & + \frac{1}{2} C_{\alpha 4} (\dot{y}_4 - \dot{h}_4)^2 \end{aligned} \quad (5.7)$$

Les efforts généralisés sont dus essentiellement à l'excitation du moteur et aux irrégularités de l'état de la route.

Seules les masses  $M_t, M_1, M_2, M_3$  et  $M_4$  sont sollicitées par des efforts extérieurs au système.

Pour la masse  $M_t$ , l'effort vertical  $F_v$  provoqué par le moteur tend à déplacer  $M_t$  verticalement; ce même effort, multiplié par la distance séparant le centre de gravité du moteur au centre de

gravité du tracteur routier, plus le couple de galop produit par le moteur, va créer la rotation du tracteur routier.

Pour les masses M1, M2, M3 et M4, les efforts extérieurs sont créés par les forces de rappel et d'amortissement engendrées par les irrégularités de l'état de la route

$$Q_i = \begin{bmatrix} 0 \\ F_v \\ F_v(b_7 + b_8) + C \\ 0 \\ K_{r1}h_1 + C_{r1}\dot{h}_1 \\ K_{r2}h_2 + C_{r2}\dot{h}_2 \\ K_{r3}h_3 + C_{r3}\dot{h}_3 \\ K_{r4}h_4 + C_{r4}\dot{h}_4 \end{bmatrix} \quad (5.8)$$

En appliquant les équations de Lagrange de deuxième espèce, on obtient un système matriciel décrivant le comportement dynamique du système (tracteur routier + semi-remorque).

$$[M]\{\ddot{X}\} + [C]\{\dot{X}\} + [K]\{X\} = \{F\} \quad (5.9)$$

ou

[M]: la matrice masse du système.

[C]: la matrice amortissement du système.

[K]: la matrice rigidité du système.

{X}, {X} et {X}: représentent respectivement le vecteur accélération, vitesse et déplacement du système  $\{X\} = (X_c, X_t, t, b, Y_1, Y_2, Y_3, Y_4)$

{F}: le vecteur des forces généralisées {Qi}

## 5.4 - Analyse des efforts produits par le moteur et les irrégularités de l'état de la route

### a- Effet du moteur

A partir de la cinématique de l'entraînement du vilebrequin d'un moteur 8 cylindres en V, dont les manetons sont en croix, on a.

L'effort vertical  $F_v$  est égal à zéro [27].

Le couple de galop  $C$  est égal à  $arw^2\sqrt{2}(2M_{rot} + M_{alt})\cos(wt)$  [27]

a: l'entre - axe entre deux cylindres voisins

r: le rayon de la manivelle

l: longueur de la bielle

Malt: masse alternative (masse du piston + pied de bielle)

Mort: masse rotative (masse du maneton + tête de bielle)

$\omega$ : vitesse de rotation du moteur

**Remarque:** dans le cas où les manetons du vilebrequin sont plats ou en quadrature, l'effort et le couple de galop sont respectivement égaux à [27]:

quadratures

$$F_v = 0$$

$$C = \frac{1}{2} a M_{rot} r \omega^2 (3 \cos \omega t - \sin(\omega t - \frac{\pi}{4}))$$

Manetons plats

$$F_v = 0 \quad \text{et} \quad C = 0$$

#### b- effet de l'état de la route

Les effets engendrés par l'état de la route dépendent directement de l'importance et du type de ces irrégularités.

Considérant l'irrégularité de la route comme étant une sinusoïde de période  $L$ .

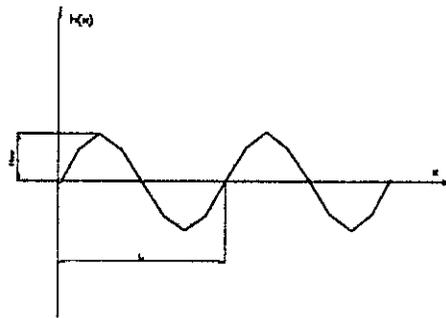


Fig. 5.2 Profile simplifié des irrégularités d'une chaussée.

La variation de l'irrégularité de la route en fonction de la position horizontale du véhicule s'écrit comme suit

$$h(x) = H_{max} \sin\left(\frac{2\pi}{L}(X - X_0)\right) \quad (5.10)$$

ou

$H_{max}$  : l'amplitude de l'irrégularité

$v/L$  : la fréquence de l'irrégularité

$X_0$  : La position initiale du véhicule

Si le véhicule à une vitesse constante,  $v$ , l'expression de la position du véhicule, en fonction du temps, est :

$$X(t)=vt+X_0 \quad (5.11)$$

L'équation (5.10) ainsi que sa dérivé seront égales

$$h(t) = H_{\max} \sin\left(\frac{2\pi}{L} vt + \frac{2\pi}{L} x_0\right) \quad (5.12)$$

$$\dot{h}(t) = \frac{2\pi v}{L} H_{\max} \cos\left(\frac{2\pi}{L} vt + \frac{2\pi}{L} x_0\right) \quad (5.13)$$

Si on prend la position de référence du véhicule confondue avec la position de l'essieu avant du tracteur routier, les positions respectives de l'essieu arrière du tracteur et des essieux avant et arrière de la semi-remorque seront retardées respectivement par des distances  $b_1+b_2$ ,  $b_1+b_3+b_4+b_5-b_6/2$  et  $b_1+b_3+b_4+b_5+b_6/2$  et ainsi les retards temporels des différents essieux seront donc  $t_2=(b_1+b_2)/v$ ,  $t_3=(b_1+b_3+b_4+b_5-b_6/2)/v$  et  $t_4=(b_1+b_3+b_4+b_5+b_6/2)/v$ .

Les irrégularités au niveau de chaque essieu sont égales à:

$$h_1(t) = H_{\max} \sin\left(\frac{2\pi}{L} vt + x_0\right) \quad \dot{h}_1(t) = H_{\max} \frac{2\pi v}{L} \cos\left(\frac{2\pi}{L} vt + x_0\right) \quad (5.14)$$

$$h_2(t) = H_{\max} \sin\left(\frac{2\pi}{L} v(t-t_2) + x_0\right) \quad \dot{h}_2(t) = H_{\max} \frac{2\pi v}{L} \cos\left(\frac{2\pi}{L} v(t-t_2) + x_0\right)$$

$$h_3(t) = H_{\max} \sin\left(\frac{2\pi}{L} (v(t-t_3) + x_0)\right) \quad \dot{h}_3(t) = H_{\max} \frac{2\pi v}{L} \cos\left(\frac{2\pi}{L} (v(t-t_3) + x_0)\right)$$

$$h_4(t) = H_{\max} \sin\left(\frac{2\pi}{L} (v(t-t_4) + x_0)\right) \quad \dot{h}_4(t) = H_{\max} \frac{2\pi v}{L} \cos\left(\frac{2\pi}{L} (v(t-t_4) + x_0)\right)$$

## 5.5 - Analyse des réponses du système

Une fois les matrices  $[M]$ ,  $[C]$  et  $[K]$  définies, ainsi que le vecteur des forces extérieures,  $\{F\}$ , on peut écrire le système des équations différentielles régissant le comportement dynamique du modèle de la figure 5.1 sous la forme matricielle suivante.

$$[M]\{\ddot{X}\} + [C]\{\dot{X}\} + [K]\{X\} = \{F\} \quad (5.15)$$

avec les conditions suivantes

$$\text{à } t=0; \quad \{\dot{X}_0\} \text{ et } \{X_0\} \quad (5.16)$$

La détermination des réponses des déplacements des différentes parties du modèle mathématique de l'engin et sa remorque n'est possible que si on peut résoudre le système (5.15) avec ces conditions initiales (5.16). Pour résoudre le système (5.15), on procède de la manière suivante.

### 5.5.1- Résolution du système libre, non amorti

$$[M]\{\ddot{X}\} + [K]\{X\} = \{0\} \quad (5.17)$$

Cette étape consiste en la recherche des fréquences et des modes propres du système vibrant. Le calcul consiste à résoudre le problème aux valeurs propres relatives au système obtenu à partir des matrices de rigidité et de masse du système conformément aux caractéristiques physiques de la structure.

$$[K][\phi] = [M][\phi][w]$$

où

$[\phi] = [\dots \phi_i \dots]$  matrice des vecteurs propres ou matrice modale.

$[w] = [w_i^2]$  matrice des valeurs propres diagonales ou matrice spectrale.

Selon la taille du système, le calcul peut être effectué selon différentes méthodes [24]. On peut citer les méthodes des transformations matricielles (Jacobi, Givens, Laucz, Housholder, Q.R, etc.), basées sur les relations d'orthogonalités.

$$[\phi]^T[M][\phi] = [I]$$

$$[\phi]^T[K][\phi] = [w] \quad (5.18)$$

Une fois les matrices  $[\Phi]$  et  $[W]$  déterminées, les vecteurs des réponses du système  $\{X\}$  seront une combinaison linéaire des réponses modales.

$$\{X\} = [\Phi]\{U\} \quad (5.19)$$

où

$\{U\}$  vecteur des réponses modales, à déterminer.

En ce qui concerne les conditions initiales des réponses modales, on peut les définir comme suit:

à  $t=0$ , on note  $\{U_0\}$   $\{\dot{U}_0\}$  respectivement vecteur déplacement et vitesse initiaux modaux.

on a d'après (5.19).

$$\{X_0\} = [\phi]\{U_0\}$$

$$\{\dot{X}_0\} = [\phi]\{\dot{U}_0\} \quad (5.20)$$

pré multipliant de part et d'autre par  $[\phi]^T[M]$  les équations (5.20), on a ainsi.

$$[\phi]^T[M]\{X_0\} = [\phi]^T[M][\phi]\{U_0\}$$

$$[\phi]^T[M]\{\dot{X}_0\} = [\phi]^T[M][\phi]\{\dot{U}_0\}$$

or, d'après (5.18), on a  $[\phi]^T[M][\phi] = [I]$ , ainsi donc.

$$\begin{aligned} \{U_0\} &= [\phi]^T [M] \{X_0\} \\ \{\dot{U}_0\} &= [\phi]^T [M] \{\dot{X}_0\} \end{aligned} \quad (5.21)$$

Connaissant les conditions initiales (5.16) du système, on peut définir les conditions initiales de chaque mode du système (5.15).

#### 5.5.2- Résolution du système amorti, forcé (5.15)

Cette étape consiste à définir le vecteur des réponses modales,  $\{U\}$ , et ainsi le vecteur des réponses du système (5.15).

En remplaçant les vecteurs  $\{X\}$ ,  $\{\dot{X}\}$  et  $\{\ddot{X}\}$  par les expressions (5.20) et en prémultipliant les différents termes de (5.15) par la matrice  $[\phi]^T$ , on aura

$$[\phi]^T [M] [\phi] \{\dot{U}\} + [\phi]^T [C] [\phi] \{\dot{U}\} + [\phi]^T [K] [\phi] \{U\} = [\phi]^T \{F\}$$

ou bien encore

$$[I] \{\dot{U}\} + [\tilde{C}] \{\dot{U}\} + [W] \{U\} = \{R\} \quad (5.22)$$

$[C]$  est une matrice symétrique, généralement non diagonale. En générale, les équations du système (5.22) sont dépendant entre elles (couplées). pour procéder aux choix de la méthode de résolution du système (5.22), on doit donner quelques conditions sur la matrice  $[C]$  (puisque les matrices  $[I]$  et  $[W]$  ne posent pas de problème).

Pour pouvoir utiliser la méthode de superposition des modes, il faut que les équations formant le système (5.22) soient découplées, ainsi donc il faut que  $[C]$  soit.

Diagonale (cas où la matrice d'amortissement est proportionnelle à la matrice masse, à la matrice rigidité ou aux deux à la fois).

Aproximer à une matrice diagonale (cas où l'amortissement est très petit, ainsi, on peut transposer les termes hors de la diagonale de  $[\tilde{C}]$  de l'autre coté de l'équation (5.22) et en négligeant devant ceux de  $\{R\}$ , on peut avoir une bonne approximation des résultats).

Dans le cas où  $[\tilde{C}]$  est non diagonale, l'utilisation de la méthode de superposition des modes ne donne pratiquement pas de résultat, il faut penser donc à d'autres méthodes, telles que les méthodes d'intégration directes ou la méthode de transformation de DUNKAN [24].

##### 5.5.2.1- Cas d'amortissement proportionnel

On peut exprimer la proportionnalité entre la matrice d'amortissement et le matrice de rigidité ou la matrice masse ou même les deux à la fois par la relation suivante:

$$[\tilde{C}] = \alpha[M] + \beta[K] \quad (5.23)$$

cas où  $\alpha=0$ , on a une proportionnalité entre  $[C]$  et  $[M]$ .

cas où  $\beta=0$ , on a une proportionnalité entre  $[C]$  et  $[K]$ .

Ainsi, la matrice  $[C]$  est égale à

$$[\tilde{C}] = [I] + [W] \quad (5.24)$$

Etant donnée que  $[I]$  et  $[W]$  sont toutes les deux diagonales, la matrice  $[C]$  l'est aussi et le système (5.22) sera formé par des équations différentielles découplées.

La  $i$ ème équation du système (5.22) peut s'écrire de la manière suivante.

$$\ddot{U}_r + \tilde{C}_r \dot{U}_r + W_r^2 U_r = R_r \quad (5.25)$$

$$\text{ou } \tilde{C}_r = \gamma + \beta W_r^2$$

L'équation différentielle (5.25) peut s'écrire aussi de la manière suivante

$$\ddot{U}_r + 2\xi_r W_r \dot{U}_r + W_r^2 U_r = R_r \quad (5.26)$$

où  $r$ : coefficient d'amortissement du mode  $r$ .

$$\xi_r = \frac{\gamma}{2W_r} + \beta \frac{W_r}{2} \quad (5.27)$$

La solution transitoire de l'équation différentielle (5.26) dépend directement de la valeur de  $r$  [4,24].

si  $r=1$

$$U_r^{(1)}(t) = (U_{0r}(1 + W_r t) + \dot{U}_{0r} t) e^{-W_r t}$$

si  $r < 1$

$$U_r^{(1)}(t) = e^{-\xi_r W_r t} \left( \frac{\dot{U}_{0r} + U_{0r} \xi_r}{W_D} \sin(W_D t) + U_{0r} \cos(W_D t) \right) \quad (5.28)$$

$$W_D = W_r \sqrt{1 - \xi_r^2}$$

si  $r > 1$

$$U_r^{(1)}(t) = e^{-\xi_r W_r t} \left( \frac{\dot{U}_{0r} + U_{0r} \xi_r}{W_S} \sinh(W_S t) + U_{0r} \cosh(W_S t) \right)$$

$$W_S = W_r \sqrt{\xi_r^2 - 1}$$

La solution permanente de l'équation différentielle (5.26) est définie par l'intégrale de Duhamel. [4,24]

$$U_r^{(p)}(t) = A_r(t)\sin(W_D t) - B_r(t)\cos(W_D t)$$

ou

$$W_D = W_r \sqrt{1 - \xi_r^2} \quad (5.29)$$

$$A_r(t) = \frac{1}{W_D} \int_0^t R_r(\tau) e^{\xi_r W_r (\tau-t)} \cos(W_D \tau) d\tau$$

$$B_r(t) = \frac{1}{W_D} \int_0^t R_r(\tau) e^{\xi_r W_r (\tau-t)} \sin(W_D \tau) d\tau$$

La solution générale du r-ème mode est.

$$U_r(t) = U_r^{(i)}(t) + U_r^{(p)}(t) \quad (5.30)$$

De la même manière, on peut définir les différentes réponses modales du système (5.22), ainsi donc le vecteur modal,  $\{U\}$ , et par conséquent le vecteur des réponses,  $\{X\}$ , par combinaison linéaire des différents modes (5.20).

### 5.5.2.2- Cas d'amortissement quelconque

La détermination du vecteur réponse modale,  $\{U\}$ , du système (5.22), en fonction du temps, est pratiquement impossible dans ce cas ci, pour y remédier, on va utiliser l'une des méthodes d'intégration direct.

Ces méthodes sont des procédures numériques dites pas à pas, qui peuvent définir, sans passer par d'autres transformations mathématiques les solutions d'un système d'équations différentielles [30].

Leur principe consiste à.

Subdiviser l'abscisse temps,  $t$ , en des instants discrets  $t, 2t, \dots, n\Delta t$ .

Exprimer les vecteurs vitesse,  $\{\dot{U}\}$ , et accélération,  $\{\ddot{U}\}$ , du système, à l'instant  $t$ , en fonction des vecteurs déplacements aux instants  $t+\Delta t, t$  et  $t-\Delta t$ .

Déterminer le vecteur,  $\{U\}$ , à l'instant  $t+\Delta t$ , en fonction des vecteurs  $\{U\}$ , aux instants  $t$  et  $t-t$ . Parmi les méthodes d'intégration directe, on va utiliser la méthode de différence centrale, les vecteurs  $\{\ddot{U}\}$  et  $\{\dot{U}\}$ , à l'instant  $t$ , s'expriment, respectivement, de la manière suivante:

$$\{\ddot{U}(t)\} = \frac{1}{\Delta t^2} (\{U(t-\Delta t)\} - 2\{U(t)\} + \{U(t+\Delta t)\}) \quad (5.31)$$

$$\{\dot{U}(t)\} = \frac{1}{2\Delta t} (-\{U(t-\Delta t)\} + \{U(t+\Delta t)\}) \quad (5.32)$$

Le vecteur  $\{U\}$ , à l'instant  $t+\Delta t$ , est obtenu par considération de l'équilibre du système (5.22) à l'instant  $t$ . En effectuant après substitution des vecteurs  $\{\dot{U}\}$  et  $\{\ddot{U}\}$  par leur expression (5.31) et (5.32) dans le système (5.22), on aura le système suivant:

$$\left(\frac{1}{\Delta t^2}[I] + \frac{1}{2\Delta t}[\tilde{C}]\right)\{U(t+\Delta t)\} = \{R(t)\} - \left([W] - \frac{2}{\Delta t^2}[I]\right)\{U(t)\} - \left(\frac{1}{\Delta t^2}[I] - \frac{1}{2\Delta t}[\tilde{C}]\right)\{U(t-\Delta t)\} \quad (5.33)$$

Du système (5.33) connaissant le vecteur  $\{U\}$ , aux instants  $t$  et  $t-\Delta t$ , on peut définir le vecteur  $\{U\}$  à l'instant  $t+\Delta t$ . C'est pour cette raison qu'on appelle cette procédure «méthode d'intégration explicite».

Cependant, pour définir le vecteur  $\{U\}$ , à l'instant  $\Delta t$ , il faut connaître les vecteurs  $\{U(0)\}$ ,  $\{\dot{U}(0)\}$  et  $\{\ddot{U}(0)\}$ , ainsi que le vecteur  $\{U\}$  à l'instant  $-\Delta t$ . En effet, si on connaît les vecteurs  $\{U(0)\}$ ,  $\{\dot{U}(0)\}$  et  $\{\ddot{U}(0)\}$ , on peut définir le vecteur  $\{U\}$  à l'instant  $-\Delta t$ , par combinaison des relations (5.31) et (5.32) à l'instant  $t=0$ .

$$\{U(-\Delta t)\} = \{U(0)\} - \Delta t\{\dot{U}(0)\} + \frac{\Delta t^2}{2}\{\ddot{U}(0)\} \quad (5.34)$$

L'algorithme de la méthode s'écrit donc:

#### A- Calcul initial

- Définir la matrice  $[I]$ ,  $[W]$  et  $[\tilde{C}]$
- Définir les vecteurs initiaux  $\{U(0)\}$ ,  $\{\dot{U}(0)\}$  et  $\{\ddot{U}(0)\}$
- Définir l'incrément du temps  $\Delta t \leq \Delta t_{cr} = \frac{T_n}{\pi}$ ;  $T_n$  la plus petite période propre du système

[30].

$$a_0 = \frac{1}{\Delta t^2}, a_1 = \frac{1}{\Delta t}, a_2 = 2a_0, a_3 = \frac{1}{a_2}$$

- Calculer le vecteur  $\{U\}$  à l'instant  $-\Delta t$   
 $\{U(-\Delta t)\} = \{U(0)\} - \Delta t\{\dot{U}(0)\} + a_3\{\ddot{U}(0)\}$
- Définir la matrice effective  $[\overline{M}] = a_0[I] + a_1[\tilde{C}]$

Triangulariser la matrice  $[\overline{M}] = [\text{Inf} \mid \text{Sup}]$

#### B- A chaque instant $\Delta t$

- Calculer le vecteur charge effective à l'instant  $t$

$$\{\bar{R}(t)\} = \{R(t)\} - ([W] - a_2[I])\{U(t)\} - (a_0[I] - a_1[\tilde{C}])\{U(t - \Delta t)\}$$

- Définir le vecteur  $\{U\}$  à l'instant  $t + \Delta t$  par résolution du système

$$[M]\{U(t + \Delta t)\} = \{\bar{R}(t)\}$$

- Dédire les vecteurs

$$\{\ddot{U}(t)\} = a_0(\{U(t - \Delta t)\} - 2\{U(t)\} + \{U(t + \Delta t)\})$$

$$\{\dot{U}(t)\} = a_1(-\{U(t - \Delta t)\} + \{U(t + \Delta t)\})$$

Dédire le vecteur solution  $\{X(t)\}$  et son vecteur dérivé  $\{\dot{X}(t)\}$  de la relation suivante:

$$\{X(t)\} = [\phi]\{U(t)\}$$

$$\{\dot{X}(t)\} = [\dot{\phi}]\{U(t)\}$$

# ORGANIGRAMME DE LA METHODE DE DIFFERENCE CENTREE

## ETAPE A CALCUL INITIAL

Définir les matrices  
 $[I]$ ,  $[W]$ ,  $[\tilde{C}]$

Définir les vecteurs initiaux  
 $\{U_0\}$ ,  $\{\dot{U}_0\}$ ,  $\{\ddot{U}_0\}$

Définir l'incrément du temps  
 $\Delta t = T_n / \pi$

Noté  
 $a_0 = 1/\Delta t^2$ ,  $a_1 = 1/\Delta t$ ,  $a_2 = 2a_0$ ,  $a_3 = 1/a_2$

Calculer le vecteur  $\{U\}$  à l'instant  $-\Delta t$   
 $\{U(-\Delta t)\} = \{U(0)\} - \Delta t \{\dot{U}(0)\} + a_3 \{\ddot{U}(0)\}$

Définir la matrice effective  
 $[\bar{M}] = a_0 [I] + a_1 [\tilde{C}]$

Triangulariser la matrice effective  $[\bar{m}]$   
 $[\bar{M}] = [\text{Inf}][\text{Sup}]$

ETAPE B  
A CHAQUE INSTANT  $\Delta t$

Calculer le vecteur charge effective à l'instant t  
 $\{\bar{R}\} = \{R\} - ([W] - a_2[I])\{U(t)\} - (a_0[I] - a_1[C])\{U(t-\Delta t)\}$

Définir le vecteur  $\{U(t+\Delta t)\}$  par résolution du système  
 $[M]\{U(t+\Delta t)\} = \{\bar{R}(t)\}$

Définir les vecteurs modales  $\{U(t)\}$  et  $\{\dot{U}(t)\}$   
 $\{U(t)\} = a_0(\{U(t-\Delta t)\} - 2\{U(t)\} + \{U(t+\Delta t)\})$   
 $\{\dot{U}(t)\} = a_1(-\{U(t-\Delta t)\} + \{U(t+\Delta t)\})$

déduire les vecteurs solutions  $\{X(t)\}$  et  $\{\dot{X}(t)\}$  des relations

$$\{X(t)\} = [\Phi]\{U(t)\}$$

$$\{\dot{X}(t)\} = [\Phi]\{\dot{U}(t)\}$$

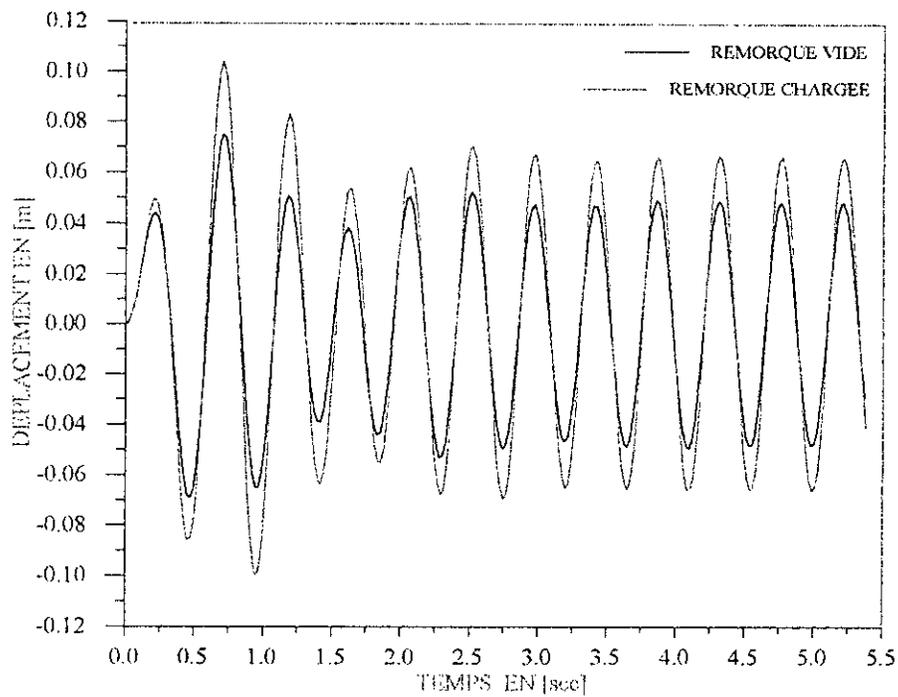


Fig.5.3 Déplacement linéaire  $X_c$

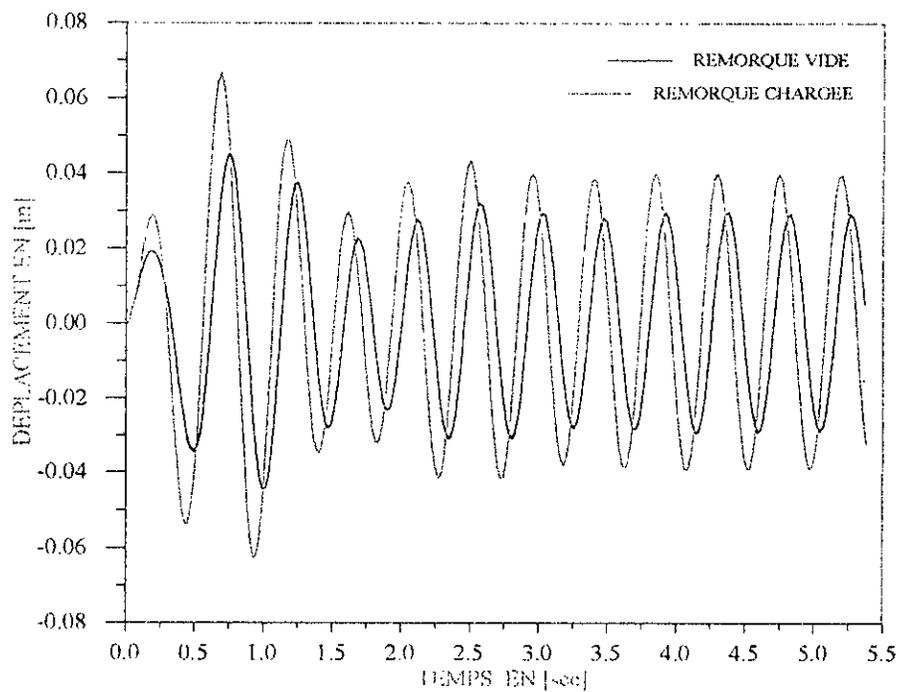


Fig.5.4 Déplacement linéaire  $X_i$

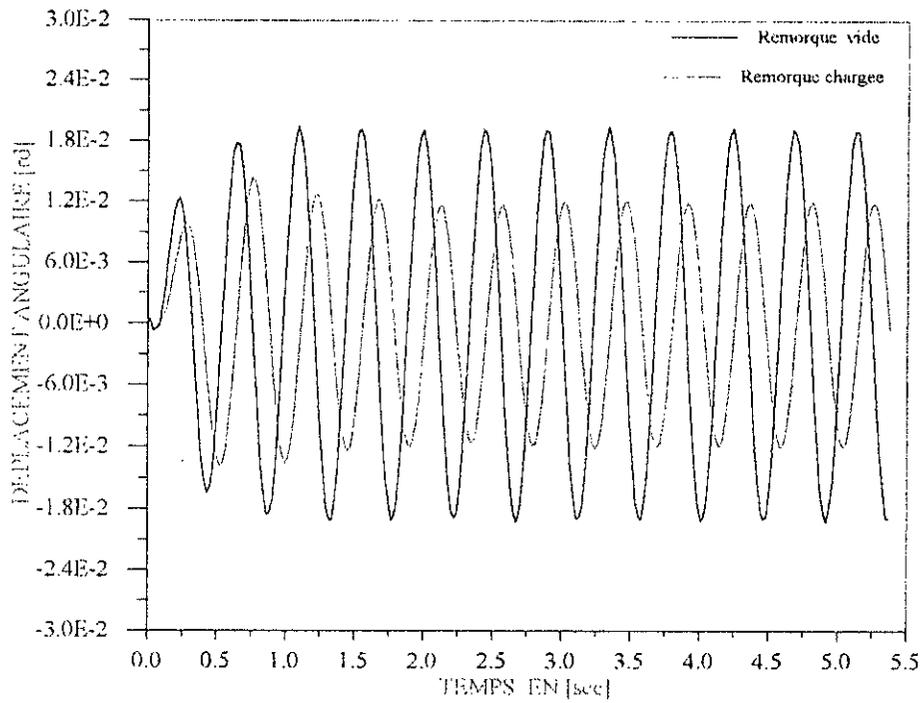


Fig.5.5 Déplacement angulaire  $\phi_1$

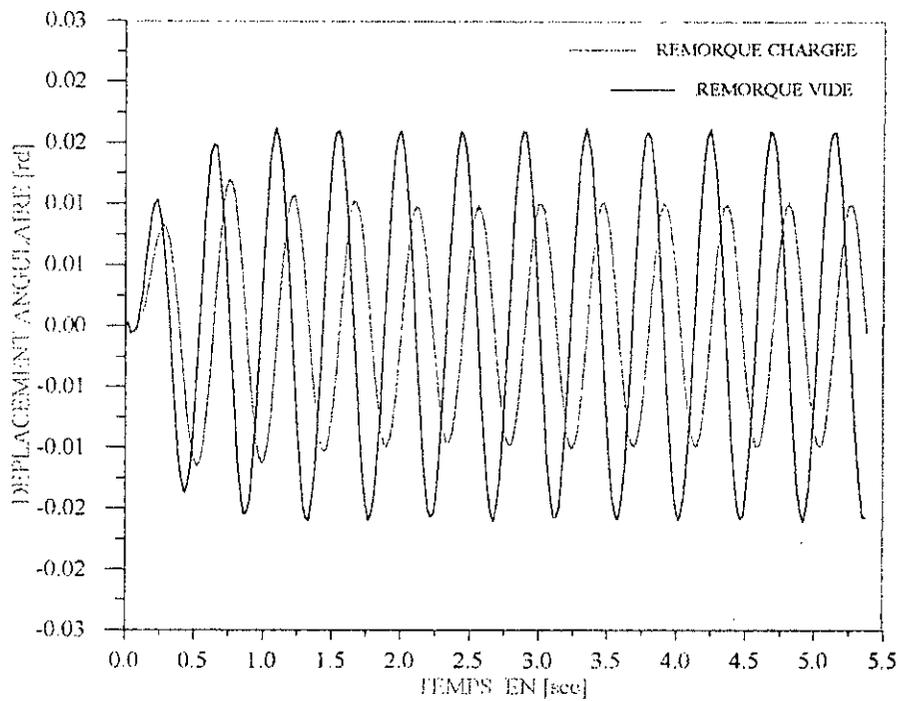


Fig.5.6 Déplacement angulaire  $\phi_2$

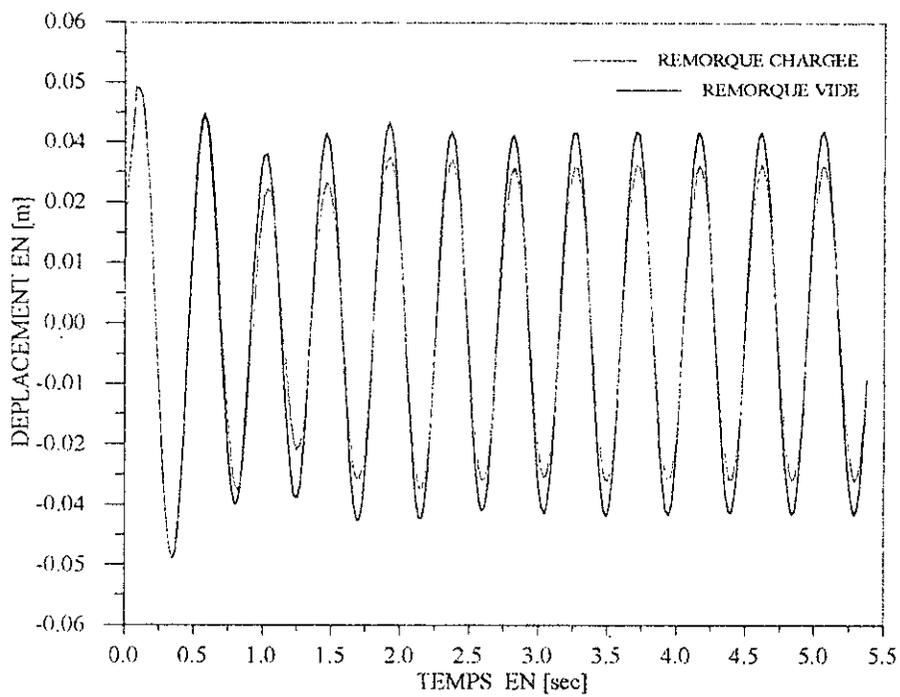


Fig.5.7 Déplacement linéaire  $Y_1$

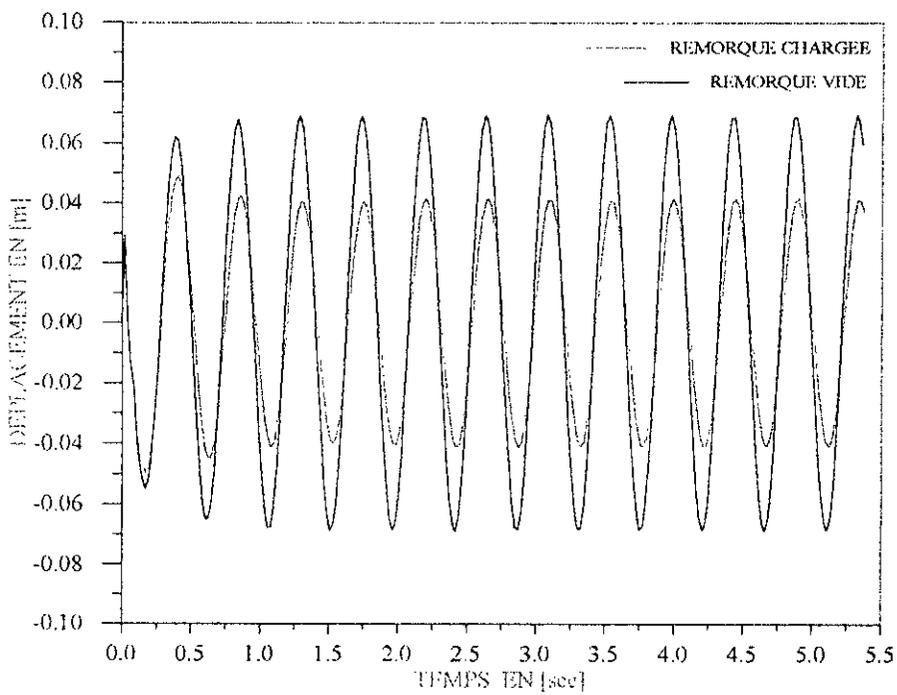


Fig.5.8 Déplacement linéaire  $Y_2$

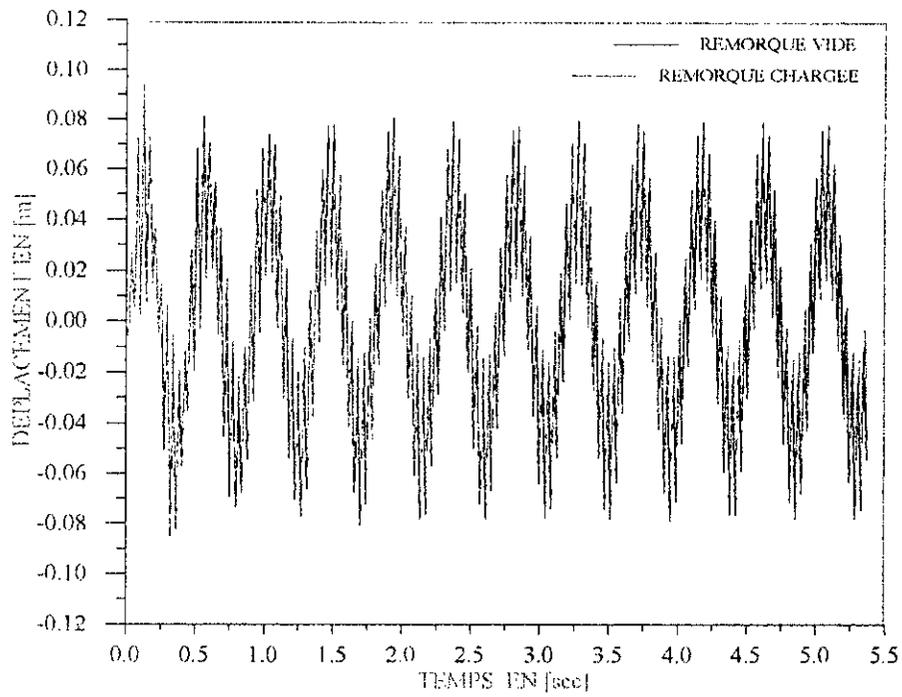


Fig.5.9 Déplacement linéaire  $Y_3$

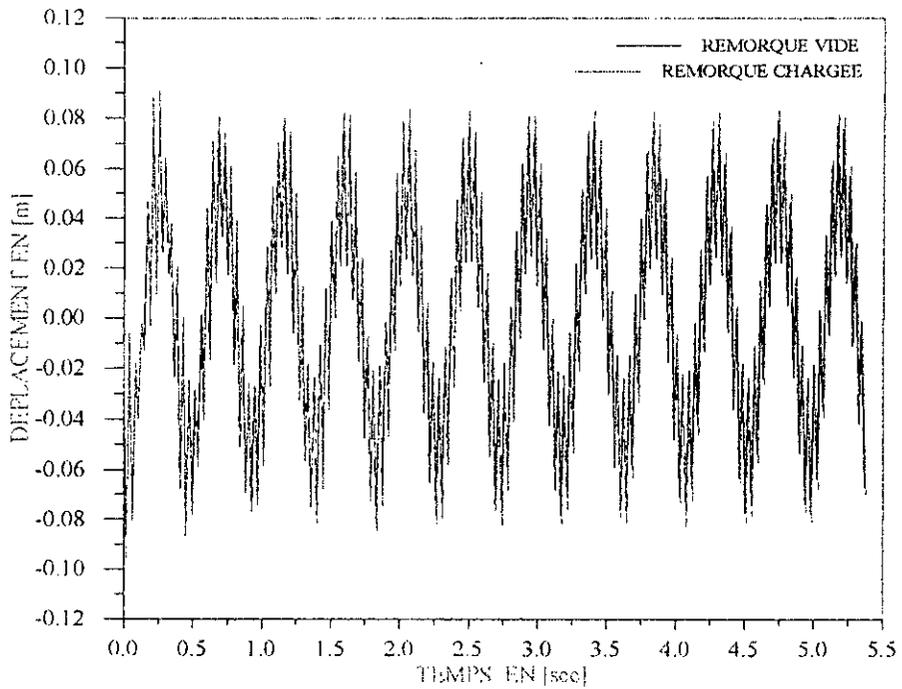


Fig.5.10 Déplacement linéaire  $Y_4$

## 5.6 - Interprétation des résultats.

Nous avons simulé le comportement de l'engin roulant à 40K.m/h sur une route ayant des irrégularités sinusoïdales de 5 m de longueur d'onde et une amplitude maximale de 5 cm. (la vitesse de rotation du moteur étant de 1500tr/mn).

Les fréquences propre du modèle mathématique de l'engin et sa remorque sont les suivantes :

10.087, 13.802, 18.030, 18.480, 81.566, 81.836, 87.386, 92.639

Nous avons déterminé les déplacements vibratoires des différents compartiments et parties de l'engin dans le cas où la semi-remorque est à vide et en plein charge.

Les résultats obtenus sont présentés sous forme de graphes.

Sur les Fig.5.3. et Fig.5.4, on remarque les vibrations du siège du chauffeur et du tracteur routier sont plus importantes dans le cas où la remorque est en pleine charge que dans le cas où elle est à vide.

Par contre, l'amplitude de vibration des autres parties (remorque ,essieux) est moins importante dans le cas où la semi-remorque est en plein charge Fig5.5 à Fig5.10.

Au cours du temps le comportement dynamique des différents compartiments et parties de l'engin comprend deux phases:

- Une phase transitoire ne dépassant pas les 4 s Fig.5.3 à Fig.5.10.
- Une phase stationnaire dont l'amplitude ne dépasse pas:
  - 8 cm pour les déplacements verticaux Fig.5.3, Fig.5.4 , Fig.5.7 et Fig.5.8.
  - 0.02 rad pour les déplacements angulaires Fig.5.5 et Fig.5.6.

avec une fréquence de vibration égale à celle de l'excitation ( $V/L$ ).

Pour les essieux de la semi-remorque les vibrations présentent des perturbations provenant de la liaison permanente entre les essieux (voir Fig. 5.1 ).

## 5.7 - Conclusion

Dans cette étude, nous avons analysé le comportement dynamique de l'engin TB260 avec sa semi-remorque.

on a trouvé que les différentes parties de l'engin passent par une phase transitoire relativement courte suivie d'une phase stationnaire dont les caractéristiques sont similaires à celles de l'excitation due à l'état de la route.

Aussi, nous avons remarqué d'après les graphes que nous avons obtenus, une différence de comportement du tracteur et de sa semi-remorque dans les cas où celle-ci est à vide ou à plein charge.

Quand aux essieux de la semi-remorque, ils subissent des vibrations principales de même allure que celles des essieux du tracteur routier enveloppées par des vibrations secondaires de grandes fréquences.

Sur les Fig 5.3 et Fig 5.4, on remarque que les vibrations du siège du chauffeur et du tracteur routier sont plus importantes dans le cas où la remorque est en plein charge que dans le cas où elle est vide.

Par contre, l'amplitude de vibration des autres compartiments (remorque, essieux) est moins importante dans le cas où la semi-remorque est en plein charge Fig.5.5 et Fig.5.10.

Au cours du temps le comportement dynamique des différents compartiments et parties de l'engin passent par deux phases:

- Une phases transitoire ne dépassant pas les 4 secondes Fig.5.3 à Fig.5.10.
- Une phase stationnaire dont l'amplitude ne dépasse pas:
  - 8 cm pour les déplacements verticaux Fig.5.3, Fig.5.4, Fig.5.7 et Fig.5.8.
  - 0.02 rad pour les déplacements angulaires Fig.5.5 et Fig.5.6.

# CHAPITRE VI

## CHAPITRE VI

### Etude dynamique d'un engin de transport soumis à l'effet des irrégularités de la route: Approche probabilistique.

#### 6.1- Introduction

Le système d'équations régissant le comportement dynamique du modèle mathématique de l'engin TB260 et sa remorque soumis sous l'effet des irrégularités aléatoires de la surface de la route est:

$$[M]\{\ddot{X}\} + [C]\{\dot{X}\} + [K]\{X\} = [C_r]\{\dot{h}(t)\} + [K_r]\{h(t)\} \quad (6.1)$$

où  $[M]$ ,  $[C]$  et  $[K]$  sont respectivement la matrice masse, amortissement et rigidité du modèle mathématique de l'engin et sa remorque.

$\{\ddot{X}\}$ ,  $\{\dot{X}\}$  et  $\{X\}$  respectivement les vecteurs accélération, vitesse et déplacement de ce même modèle.

$[K_r]$  est une matrice diagonale dont les composantes sont respectivement 1, 1, 1, 1,  $Kr_1$ ,  $Kr_2$ ,  $Kr_3$ ,  $Kr_4$ .

$[C_r]$  est une matrice diagonale dont les composantes sont respectivement 1, 1, 1, 1,  $Cr_1$ ,  $Cr_2$ ,  $Cr_3$ ,  $Cr_4$ .

$$\{h(t)\}^T = \{0, 0, 0, 0, h_1, h_2, h_3, h_4\}$$

$$\{\dot{h}(t)\}^T = \{0, 0, 0, 0, \dot{h}_1, \dot{h}_2, \dot{h}_3, \dot{h}_4\}$$

Le système (6.1) possède deux types de solutions, une solution transitoire et une autre permanente qui correspondent respectivement au système libre (homogène) et au système forcé (non homogène).

#### 6.2. Résolution du système homogène (libre)

$$[M]\{\ddot{X}\} + [C]\{\dot{X}\} + [K]\{X\} = \{0\} \quad (6.2)$$

Considérons que pour  $t=0$ , les conditions initiales  $\{X_0\}$  et  $\{\dot{X}_0\}$  du système (6.2) sont des vecteurs dont les composantes sont des grandeurs aléatoires de caractéristiques probabilistes

connues. C'est à dire que leurs espérances mathématiques  $\{m_{x_0}\}$  et leurs variances  $\{\sigma_{x_0}\}$  sont connues.

Dans le cas le plus général, lorsqu'à l'instant initial les composantes des vecteurs  $\{X_0\}$  et  $\{\dot{X}_0\}$  sont corrélées, les moments de corrélation  $K_{x_i x_j}$  sont alors supposés connus.

La méthode de résolution du système (6.2) dépend essentiellement de la nature des relations liant la matrice d'amortissement  $[C]$  avec les matrices  $[M]$  et  $[K]$  (la propriété de découplage des modes propres du système (6.1)).

Dans le cas où la matrice  $[C]$  est proportionnelle à la matrice  $[M]$ , ou la matrice  $[K]$ , ou les deux à la fois, la solution  $\{X(t)\}$  du système (6.2) se présente comme une combinaison linéaire des réponses des différents modes propres du système lui même. Sous forme mathématique la solution  $\{X(t)\}$  du système (6.2) s'écrit de la manière suivante

$$\{X(t)\} = [\phi]\{U(t)\} \quad (6.3)$$

où:

$[\phi]$ : est la matrice des vecteurs propres du système (6.2)

$\{U(t)\}$  est un vecteur formé par les solutions des différents modes propres.

Précisons que l'expression des éléments du vecteur  $\{U(t)\}$  prennent différentes formes selon la valeur du coefficient d'amortissement  $\xi_r$  du mode correspondant [4,24].

Notons par  $U_r(t)$  la r-ième composante du vecteur  $\{U(t)\}$  et par  $\xi_r$  le coefficient d'amortissement du mode  $r$ .

Si  $\xi_r = 1$

$$U_r(t) = U_{0r}(1 + \omega_r t)e^{-\omega_r t} + \dot{U}_{0r}t.e^{-\omega_r t}$$

Si  $\xi_r < 1$

$$U_r(t) = U_{0r} \left( \frac{\xi_r}{\omega_D} \sin(\omega_D t) + \cos(\omega_D t) \right) e^{-\xi_r \omega_r t} + \dot{U}_{0r} \frac{\sin \omega_D t}{\omega_D} e^{-\xi_r \omega_r t}$$

$$\text{où: } \omega_D = \omega_r \sqrt{1 - \xi_r^2}$$

Si  $\xi_r > 1$

$$U_r(t) = U_{0r} \left( \frac{\xi_r}{\omega_D} \sinh(\omega_D t) + \cosh(\omega_D t) \right) e^{-\xi_r \omega_r t} + \dot{U}_{0r} \frac{\sinh \omega_D t}{\omega_D} e^{-\xi_r \omega_r t}$$

$$\text{où: } \omega_D = \omega_r \sqrt{1 - \xi_r^2}$$

$U_{0r}$  et  $\dot{U}_{0r}$  sont des constantes initiales du mode  $r$ .

Notons par  $\{U_0\}$  et  $\{\dot{U}_0\}$  respectivement les vecteurs formés par les constantes initiales de déplacement et de vitesse des différents modes du système (6.1).

Suite à cette analyse, on peut écrire le vecteur  $\{U(t)\}$  en fonction des vecteurs  $\{U_0\}$  et  $\{\dot{U}_0\}$ . Par conséquent on aura :

$$\{U(t)\} = [H_1(t)]\{U_0\} + [H_2(t)]\{\dot{U}_0\} \quad (6.4)$$

où

$[H_1(t)]$  est une matrice diagonale regroupant les expressions liées au vecteur  $\{U_0\}$ .

$[H_2(t)]$  est une matrice diagonale regroupant les expressions liées au vecteur  $\{\dot{U}_0\}$ .

De l'expression (5.8) du chapitre V, on définit les expressions du vecteur  $\{U_0\}$  et  $\{\dot{U}_0\}$  en fonction des conditions initiales du système global (6.2) :  $\{X_0\}$  et  $\{\dot{X}_0\}$ .

$$\{U_0\} = [\phi]^T [M] \{X_0\}$$

$$\{\dot{U}_0\} = [\phi]^T [M] \{\dot{X}_0\} \quad (6.5)$$

En utilisant les équations (6.3), (6.4) et (6.5) on peut définir définitivement l'expression du vecteur  $\{X(t)\}$  à savoir:

$$\{X(t)\} = \begin{bmatrix} [\phi][H_1(t)][\phi]^T [M] & [\phi][H_2(t)][\phi]^T [M] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{X_0\} \\ \{\dot{X}_0\} \end{Bmatrix} \quad (6.6)$$

En notant par  $[H(t)]$  la matrice ci-dessus et par  $\{C_0\}$  le vecteur  $\{\{X_0\}, \{\dot{X}_0\}\}^T$ , on peut écrire l'expression du vecteur  $\{X(t)\}$  sous forme abrégée.

$$\{X(t)\} = [H(t)]\{C_0\} \quad (6.7)$$

Ainsi, en utilisant les propriétés pour la détermination des espérances mathématiques des différentes composantes du vecteur solution  $\{X(t)\}$ , citées au chapitre IV, on peut définir le vecteur regroupant ces différentes espérances mathématiques. En effet :

$$M[\{X(t)\}] = \{mX(t)\} = [H(t)]\{mC_0\} \quad (6.8)$$

où  $\{mX(t)\}$  est le vecteur dont les composantes sont les espérances mathématiques des composantes du vecteur  $\{X(t)\}$  et  $\{mCo\}$  est le vecteur dont les composantes sont les espérances mathématiques des conditions initiales  $\{X_0\}$  et  $\{\dot{X}_0\}$  du système (6.2).

Sous forme scalaire, il vient

$$m_{x_i(t)} = \sum_{j=1}^{2n} H_{ij}(t) \cdot m_{c_{oj}} \quad (n = 8) \quad (6.9)$$

Déterminons maintenant les fonctions de corrélations et d'inter-corrélations  $K_{X_i X_j}(t, t')$  des composantes du vecteur solution. Pour ce but écrivons la solution  $\{X(t)\}$  précédente sous forme scalaire.

$$X_i(t) = \sum_{j=1}^{2n} H_{ij}(t) \cdot C_{oj} \quad (6.10)$$

Connaissant les espérances mathématiques  $m_{x_i}(t)$ , on peut obtenir les expressions des composantes aléatoires centrées du vecteur solution  $\{X(t)\}$ .

$$\overset{o}{X}_i(t) = X_i(t) - m_{x_i}(t) = \sum_{j=1}^{2n} H_{ij}(t) (C_{oj} - m_{c_{oj}})$$

ou encore

$$\overset{o}{X}_i(t) = \sum_{j=1}^{2n} H_{ij}(t) \cdot \overset{o}{C}_{oj} \quad (6.11)$$

limitons nous au cas particulier, où les fonctions de corrélation entre les composantes du vecteur  $\{C_{oj}\}$  sont nulles; c'est à dire  $K_{C_{oi} C_{oj}} = 0$ . Les fonctions d'inter-corrélation s'écrivent donc:

$$K_{X_i X_k}(t, t') = M \left[ \overset{o}{X}_i(t) \cdot \overset{o}{X}_k(t') \right] = M \left[ \left[ \sum_{j=1}^{2n} H_{ij}(t) \overset{o}{C}_{oj} \right] \left[ \sum_{v=1}^{2n} H_{kv}(t') \overset{o}{C}_{ov} \right] \right] \quad (6.12)$$

Soit après transformation :

$$K_{X_i X_k}(t, t') = \sum_{v=1}^{2n} H_{iv}(t) \cdot H_{kv}(t') \sigma_{C_{ov}} \quad (6.13)$$

$$K_{X_i X_i}(t, t') = \sum_{v=1}^{2n} H_{iv}(t) \cdot H_{iv}(t') \cdot \sigma_{C_{ov}} \quad (6.14)$$

$$\sigma_{x_i, x_i}(t, t) = \sum_{v=1}^{2n} H_{iv}^2(t) \cdot \sigma_{c_{ov}} \quad (6.15)$$

Dans le cas où la matrice [C] est quelconque, ne dépendant pas linéairement des matrices [M] et [K], les modes propres du système d'équations (6.2) ne seront plus découplés et le raisonnement cité ci-dessus ne sera plus applicable, il faut donc avoir recours à d'autres méthodes pour la détermination de la solution {X(t)} du système (6.2) ainsi que les espérances mathématiques et les variances des différentes composantes du vecteur solution {X(t)}. Parmi elles, on peut utiliser la méthode dite de DUNKAN.

En utilisant le système (6.2) et l'équation identité  $[M]\{\ddot{X}\} - [M]\{\dot{X}\} = \{0\}$ , on définit le nouveau système suivant:

$$\begin{bmatrix} [0] & [M] \\ [M] & [C] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{\ddot{X}\} \\ \{\dot{X}\} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} -[M] & [0] \\ [0] & [K] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{\dot{X}\} \\ \{X\} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \{0\} \\ \{0\} \end{Bmatrix} \quad (6.16)$$

ou encore:

$$\begin{aligned} [A]\{\dot{y}\} + [B]\{y\} &= \{0\} \\ \{y\} &= \begin{Bmatrix} \{\dot{X}\} \\ \{X\} \end{Bmatrix} \end{aligned} \quad (6.17)$$

Considérons la solution du système (6.17) écrite de la manière suivante:

$$\{y(t)\} = \{y\}e^{st} \quad \text{et} \quad \{\dot{y}(t)\} = s\{y\}e^{st} \quad (6.18)$$

En remplaçant les vecteurs {y(t)} et {\dot{y}(t)} par leurs expressions (6.18) dans le système (6.17), on aura:

$$[[B] + s[A]]\{y\} = \{0\} \quad (6.19)$$

Cet ensemble d'équations a une solution non triviale si le déterminant de la matrice des coefficients est nul.

$$\text{Det} ([B] + s[A]) = 0 \quad (6.20)$$

Cela conduit à un ensemble de 2n racines ou valeurs propres s1, s2...s2n qui satisfont à l'équation (6.20).

A chaque valeur propre sr (r= 1 à 2n), il existe un vecteur propre  $\{\psi_r\}$  ayant 2n composantes et satisfont à l'équation:

$$[[B] + sr[A]]\{\psi_r\} = \{0\} \quad (6.21)$$

Il est évident que les vecteurs  $\{\psi_r\}$  ( $r = 1$  à  $2n$ ) vérifient les relations d'orthogonalités des modes propres, à savoir :

$$\begin{aligned} [\psi]^T [A] [\psi] &= [I] \\ [\psi]^T [B] [\psi] &= [S_r] \end{aligned} \quad (6.22)$$

où  $[\psi]$  est la matrice formée par les vecteurs propres du système (6.17)

$[S_r]$  est la matrice diagonale formée par les valeurs propres du système (6.17)

la solution  $\{y(t)\}$  sera une combinaison linéaire des réponses modales de ce même système (6.17) [4,24].

$$\begin{aligned} \{y(t)\} &= [\psi] \{p(t)\} & \dot{\{y(t)\}} &= [\psi] \{\dot{p}(t)\} \end{aligned} \quad (6.23)$$

où  $\{p(t)\}$  est un vecteur dont les composantes sont les réponses des différents modes propres du système (6.17). Donc pour définir définitivement le vecteur réponse  $\{y(t)\}$ , il faut auparavant définir les composantes du vecteur  $\{p(t)\}$ . Pour cela remplaçons les vecteurs  $\{y(t)\}$  et  $\{\dot{y}(t)\}$  par leurs expressions (6.23) dans (6.17) et prémultiplions les différents termes du système trouvé par la matrice  $[\psi]^T$  et on aura alors :

$$\begin{aligned} [\psi]^T [A] [\psi] \{p(t)\} + [\psi]^T [B] [\psi] \{\dot{p}(t)\} &= \{0\} \\ [I] \{\dot{p}(t)\} + [S_r] \{p(t)\} &= \{0\} \end{aligned} \quad (6.24)$$

Etant donnée que les matrices  $[I]$  et  $[S_r]$  sont diagonales, les différentes équations du système (6.24) sont découplées et chaque équation de (6.24) nous permet de définir l'une des composantes du vecteur  $\{p(t)\}$ .

La rière équation du système (6.24) peut s'écrire de la manière suivante:

$$\dot{p}_r(t) + s_r p_r(t) = 0 \quad (6.25)$$

La solution de cette équation s'écrit sous la forme suivante:

$$p_r(t) = b_r \cdot e^{-s_r t} \quad (6.26)$$

Une fois définies toutes les composantes du vecteur  $\{p(t)\}$ , on peut définir ceux du vecteur  $\{y(t)\}$ , soit :

$$\{y(t)\} = [\psi]\{p(t)\} = [\psi] \left\{ \begin{array}{l} b_1 e^{-s_1 t} \\ \vdots \\ b_{2n} e^{-s_{2n} t} \end{array} \right\} = [\psi] \begin{bmatrix} e^{-s_1 t} & & & \\ & e^{-s_2 t} & & \\ & & \ddots & \\ & & & e^{-s_{2n} t} \end{bmatrix} \left\{ \begin{array}{l} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_r \\ b_{2n} \end{array} \right\} \quad (n=8) \quad (6.27)$$

**Remarque:**

Dans le cas où les valeurs propres sont complexes et apparaissent en paires conjuguées, les vecteurs propres correspondant apparaîtront aussi en paires conjuguées [24].

En ce qui concerne les conditions initiales des réponses modales  $\{B_0\}$ , on peut les définir comme suit:

à  $t = 0$ ; on note  $\{B_0\}$  le vecteur des déplacements initiaux modaux, on peut dire que:

$$\{y_0\} = [\psi]\{B_0\} \quad (6.28)$$

Pré-multiplications de part et d'autre les termes de l'équation (6.28) par  $[\psi]^T[A]$ , on aura:

$$[\psi]^T[A]\{y_0\} = [\psi]^T[A][\psi]\{B_0\}$$

d'où:

$$\{B_0\} = [\psi]^T[A]\{y_0\} \quad (6.29)$$

où:

$$\{y_0\} = \left\{ \begin{array}{l} \{\dot{X}_0\} \\ \{X_0\} \end{array} \right\}$$

et ainsi donc:

$$\{y(t)\} = \left\{ \begin{array}{l} \{\dot{X}(t)\} \\ \{X(t)\} \end{array} \right\} = [\psi] \begin{bmatrix} e^{-s_1 t} & & & \\ & e^{-s_2 t} & & \\ & & \ddots & \\ & & & e^{-s_{2n} t} \end{bmatrix} [\psi]^T[A] \left\{ \begin{array}{l} \{\dot{X}_0\} \\ \{X_0\} \end{array} \right\} \quad (6.30)$$

En résumé, le vecteur réponse du système (6.17) s'écrit de la même forme que celui du système découplé, à savoir:

$$\{y(t)\} = [H(t)] \begin{Bmatrix} \{X_0\} \\ \{\dot{X}_0\} \end{Bmatrix} = [H(t)]\{C_0\} \quad (6.31)$$

Ainsi donc, les expressions des composantes du vecteur formé par les espérances mathématiques du vecteur  $\{y(t)\}$ , ainsi que ceux du vecteur variance et la matrice formée par les fonctions de corrélations ont la même forme que ceux trouvés dans le cas où les modes propres du système sont découplés à savoir:

$$\begin{aligned} \{my(t)\} &= [H(t)]\{m_{C_0}\} \\ K_{y_i y_k} &= \sum_{v=1}^{2 \times 8} H_{iv}(t) H_{kv}(t') \sigma_{C_{ov}} \\ K_{y_i \dot{y}_i} &= \sum_{v=1}^{2 \times 8} H_{iv}(t) H_{iv}(t') \sigma_{C_{ov}} \\ \sigma_{y_i y_i}(t) &= \sum_{v=1}^{2 \times 8} H_{iv}^2(t) \sigma_{C_{ov}} \end{aligned} \quad (6.32)$$

En conclusion, dans les deux cas étudiés ci-dessus, on a pu définir la réponse transitoire du système (6.2), ainsi que les vecteurs regroupant les espérances mathématiques des réponses et les variances des différents mouvements du système étudié. Ils s'écrivent toujours de la manière suivante:

Le vecteur des espérances mathématiques des différentes réponses du système (6.2):

$$\{mX(t)\} = [H(t)] \cdot \{mC_0\} \quad (6.33)$$

Les fonctions de corrélation et d'inter-corrélation des réponses du système (6.2) :

$$\begin{aligned} K_{X_i X_i}(t, t') &= \sum_{v=1}^{2n} H_{iv}(t) H_{kv}(t') \sigma_{C_{ov}} \\ K_{X_i X_i}(t, t') &= \sum_{v=1}^{2n} H_{iv}(t) H_{iv}(t') \sigma_{C_{ov}} \\ \sigma_{X_i X_i}(t, t) &= \sum_{v=1}^{2n} H_{iv}^2 \sigma_{C_{ov}} \end{aligned} \quad (6.34)$$

### 6.3- Résolution du système forcé (non homogène)

Le système non homogène régissant le comportement dynamique du système de la fig. 5.1 du chapitre V s'écrit comme suit:

$$[M]\{\ddot{X}\} + [C]\{\dot{X}\} + [K]\{X\} = \{C_r\}\{h\} + [K_r]\{h\} \quad (6.35)$$

Etant donné que les irrégularités de la surface de la route sont aléatoires, les réponses du système (6.35) seront elles aussi aléatoires. Elles possèdent des espérances mathématiques, des variances, des fonctions de corrélation ainsi que des densités spectrales.

Pour simplifier les calculs par la suite, on va déterminer les solutions du système (6.35) non pas par rapport à l'origine des déplacements mais par rapport à leurs espérances mathématiques. C'est ce qu'on appelle les réponses centrales du système (6.35) et le vecteur solution sera noté  $\{\overset{\circ}{X}(t)\} = \{X(t)\} - \{m_{X(t)}\}$ .

Où

$\{X(t)\}$  est le vecteur solution s du système (6.35) et  $\{m_{X(t)}\}$  le vecteur formé par les espérances mathématiques des différentes composantes du vecteur solution.

Le système centré régissant le comportement dynamique de l'engin TB260 et sa remorque est égal à :

$$[M]\{\overset{\circ}{\ddot{X}}\} + [C]\{\overset{\circ}{\dot{X}}\} + [K]\{\overset{\circ}{X}\} = [C_r]\{\overset{\circ}{h}\} + [K_r]\{\overset{\circ}{h}\} \quad (6.35')$$

Supposons que les caractéristiques probabilistes des composantes du vecteur  $\{h(t)\}$  sont connues, en particulier les espérances mathématiques  $m_{hi}$ , les variances  $\sigma_{hi}$ , les fonctions de corrélations  $K_{hij}$  et les densités spectrales  $S_{h_i}(\omega)$ .

dans le cas le plus général où les composantes  $h_i(t)$  sont corrélées, les densités spectrales croisées  $S_{h_i h_j}(\omega)$  doivent également être connues.

Commençons par examiner de manière détaillée les excitations aléatoires centrées  $\overset{\circ}{h}_i(t)$ , plus précisément déterminons les expressions des fonctions aléatoires stationnaires centrées sous la forme d'une intégrale de Fourier.

$$\overset{\circ}{h}_i(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_i(\omega) e^{i\omega t} d\omega \quad (6.36)$$

soit sous forme vectorielle

$$\left\{ \overset{\circ}{h}(t) \right\} = \int_{-\infty}^{+\infty} \{f(\omega)\} e^{i\omega t} d\omega \quad (6.37)$$

Si on prend la position de référence du véhicule confondue avec la position de l'essieu avant du tracteur routier, les positions respectives de l'essieu arrière du tracteur routier et les essieux avant et arrière de la semi-remorque seront retardées respectivement par des distances

$b_1+b_2$ ,  $b_1+b_2+b_3+b_4+b_5 - \frac{b_6}{2}$  et  $b_1+b_2+b_3+b_4+b_5 + \frac{b_6}{2}$  et ainsi les retards temporels des diffé-

rents essieux seront donc  $t_2=(b_1+b_2)/V$ ,  $t_3 = \frac{b_1 + b_3 + b_4 + b_5 - \frac{b_6}{2}}{V}$ ,  $t_4 = \frac{b_1 + b_3 + b_4 + b_5 + \frac{b_6}{2}}{V}$ , où

$V$  étant la vitesse de déplacement du véhicule.

Les expressions des irrégularités centrées  $\overset{\circ}{h}_i(t)$  ( $i = 1$  à  $4$ ), au niveau de chaque essieu, dans le domaine fréquentiel, seront égales à:

$$\begin{aligned} \overset{\circ}{h}_1(t) &= \int_{-\infty}^{+\infty} f_1(\omega) \cdot e^{i\omega t} d\omega & \overset{\circ}{\dot{h}}_1(t) &= i \int_{-\infty}^{+\infty} \omega f_1(\omega) \cdot e^{i\omega t} d\omega \\ \overset{\circ}{h}_2(t) &= \int_{-\infty}^{+\infty} f_1(\omega) \cdot e^{-i\omega t_2} \cdot e^{i\omega t} d\omega & \overset{\circ}{\dot{h}}_2(t) &= i \int_{-\infty}^{+\infty} \omega f_1(\omega) \cdot e^{-i\omega t_2} \cdot e^{i\omega t} d\omega \\ \overset{\circ}{h}_3(t) &= \int_{-\infty}^{+\infty} f_1(\omega) \cdot e^{-i\omega t_3} \cdot e^{i\omega t} d\omega & \overset{\circ}{\dot{h}}_3(t) &= i \int_{-\infty}^{+\infty} \omega f_1(\omega) \cdot e^{-i\omega t_3} \cdot e^{i\omega t} d\omega \\ \overset{\circ}{h}_4(t) &= \int_{-\infty}^{+\infty} f_1(\omega) \cdot e^{-i\omega t_4} \cdot e^{i\omega t} d\omega & \overset{\circ}{\dot{h}}_4(t) &= i \int_{-\infty}^{+\infty} \omega f_1(\omega) \cdot e^{-i\omega t_4} \cdot e^{i\omega t} d\omega \end{aligned} \quad (6.38)$$

Sous forme vectorielle, les vecteurs  $\left\{ \overset{\circ}{h}(t) \right\}$  et  $\left\{ \overset{\circ}{\dot{h}}(t) \right\}$  s'écrivent dans le domaine fréquentiel, comme suit:

$$\left\{ \begin{matrix} \overset{\circ}{h}(t) \end{matrix} \right\}^T = \int_{-\infty}^{+\infty} \left\{ \begin{matrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ f_1(\omega) \\ f_1(\omega).e^{-i\omega t_2} \\ f_1(\omega).e^{-i\omega t_3} \\ f_1(\omega).e^{-i\omega t_4} \end{matrix} \right\} e^{i\omega t} d\omega \quad \overset{\circ}{h}(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \left\{ \begin{matrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ f_1(\omega) \\ f_1(\omega).e^{-i\omega t_2} \\ f_1(\omega).e^{-i\omega t_3} \\ f_1(\omega).e^{-i\omega t_4} \end{matrix} \right\} i\omega e^{i\omega t} d\omega \quad (6.39)$$

Une fois les vecteurs  $\left\{ \overset{\circ}{h}(t) \right\}$  et  $\left\{ \overset{\circ}{\dot{h}}(t) \right\}$  définis, on peut exprimer définitivement l'expression  $[K_r] \left\{ \overset{\circ}{h}(t) \right\} + [C_r] \left\{ \overset{\circ}{\dot{h}}(t) \right\}$  dans le domaine fréquentiel en fonction de  $f_1(\omega)$ .

en effet:

$$[K_r] \left\{ \overset{\circ}{h}(t) \right\} + [C_r] \left\{ \overset{\circ}{\dot{h}}(t) \right\} = \int_{-\infty}^{+\infty} \left\{ [K_r] + i\omega [C_r] [L] \right\} f_1(\omega) e^{i\omega t} d\omega \quad (6.40)$$

où  $[L]$  est une matrice diagonale dont les composantes sont respectivement 1, 1, 1, 1, 1,  $e^{-i\omega t_2}$ ,  $e^{-i\omega t_3}$ ,  $e^{-i\omega t_4}$ .

$$\left\{ f_1(\omega) \right\}^T = \{0, 0, 0, 0, f_1(\omega), f_1(\omega), f_1(\omega), f_1(\omega)\}$$

où encore

$$[K_r] \left\{ \overset{\circ}{h}(t) \right\} + [C_r] \left\{ \overset{\circ}{\dot{h}}(t) \right\} = \int_{-\infty}^{+\infty} [D] f_1(\omega) e^{i\omega t} d\omega \quad (6.41)$$

où

$$[D] = [K_r] + i\omega [C_r] [L]$$

Cherchons la solution de l'équation (6.35'), dans le domaine fréquentiel, sous la forme suivante:

$$\begin{aligned} \left\{ \overset{\circ}{X}(t) \right\} &= \int_{-\infty}^{+\infty} \{Z(\omega)\} e^{i\omega t} d\omega. \\ \left\{ \overset{\cdot}{X}(t) \right\} &= \int_{-\infty}^{+\infty} i\omega \{Z(\omega)\} e^{i\omega t} d\omega. \\ \left\{ \overset{\ddot{\cdot}}{X}(t) \right\} &= \int_{-\infty}^{+\infty} -\omega^2 \{Z(\omega)\} e^{i\omega t} d\omega. \end{aligned} \quad (6.42)$$

En remplaçant les expressions des vecteurs  $\left\{ \overset{\circ}{X}(t) \right\}$ ,  $\left\{ \overset{\cdot}{X}(t) \right\}$  et  $\left\{ \overset{\ddot{\cdot}}{X}(t) \right\}$  ainsi que celles de

$[Kr] \left\{ \overset{\circ}{h}(t) \right\} + [Cr] \left\{ \overset{\cdot}{h}(t) \right\}$  par leurs expressions respectives (6.42) et (6.41), on obtient le système

suivant.

$$[-\omega^2 [M] + [K] + i\omega [C]] \{Z(\omega)\} = [D] \{f(\omega)\} \quad (6.43)$$

De l'équation (6.43) on obtient le vecteur  $\{Z(\omega)\}$ .

$$\{Z(\omega)\} = [W(\omega)] \{f(\omega)\} \quad (6.44)$$

où

$$[W(\omega)] = [-\omega^2 [M] + [K] + i\omega [C]]^{-1} [D]$$

Soit sous forme scalaire, les expressions des différentes composantes du vecteur  $\{Z(\omega)\}$  en fonction de celles de  $\{f(\omega)\}$  s'écrivent comme suit.

$$Z_k(\omega) = \sum_{j=1}^8 W_{kj}(\omega) f_j(\omega) \quad (k = 1, 8) \quad (6.45)$$

Donc, l'expression analytique des différentes composantes du vecteur solution centré

$\left\{ \overset{\circ}{X}(t) \right\}$  s'écrit.

$$\overset{\circ}{X}_k(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} Z_k(\omega) e^{i\omega t} d\omega \quad (6.46)$$

De l'équation (6.45), on remarque que pour définir complètement les caractéristiques probalistiques du vecteur réponse  $\{X(t)\}$ , il faut connaître a priori celles du vecteur  $\{h(t)\}$ .

Ainsi que cela est connu, la fonction de corrélation d'une fonction aléatoire stationnaire dépend obligatoirement de la différence des instants envisagés, aussi envisageons une fonction de corrélation égale à [22].

$$K_{h_k}(t, t') = M\left[h_k^\circ(t) \cdot h_k^\circ(t')\right] = M\left[\left(\int_{-\infty}^{+\infty} f_k(\omega) e^{i\omega t} d\omega\right) \left(\int_{-\infty}^{+\infty} f_k(\omega') e^{i\omega' t'} d\omega'\right)\right] \quad (6.47)$$

soit à  $\omega' = -\omega$ .

$$K_{h_k}(t, t') = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\omega(t-t')} M[f_k(\omega) \cdot f_k(-\omega)] d\omega d(-\omega). \quad (6.48)$$

L'expression sous le signe somme de l'équation (6.48) dépend de la seule différence des instants  $t$  et  $t'$  si l'expression  $M[f_k(\omega) \cdot f_k(-\omega)]$  satisfait à la condition [22].

$$M[f_k(\omega) \cdot f_k(-\omega)] = S_{h_k}(\omega) \quad (6.49)$$

Dans ce cas après intégration par rapport à  $\omega$ , nous déduisons de (6.49)

$$K_{h_k}(t, t') = \int_{-\infty}^{+\infty} S_{h_k}(\omega) e^{i\omega(t-t')} d\omega \quad \tau = t - t' \quad (6.50)$$

L'expression des fonctions d'inter-corrélation est obtenue de la même manière que celle définie ci-dessus.

$$K_{h_k h_v}(t, t') = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\omega(t-t')} M[f_k(\omega) \cdot f_v(-\omega)] d\omega d(-\omega). \quad (6.51)$$

De la relation (6.51), il découle que l'expression de la fonction d'inter-corrélation  $K_{h_k h_v}(t, t')$  dépend seulement de la différence des instants  $t$  et  $t'$  sauf si l'expression  $M[f_k(\omega) \cdot f_v(-\omega)]$  vérifie l'expression suivante.

$$M[f_k(\omega) \cdot f_v(-\omega)] = S_{h_k h_v}(\omega) = S_{h_v}(\omega) \cdot e^{i\omega(t_k - t_v)} \quad (6.52)$$

et ainsi

$$K_{h_k h_v}(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} S_{h_k h_v}(\omega) e^{i\omega\tau} d\omega \quad (6.53)$$

où  $S_{h_k h_v}(\omega)$  est la densité spectrale croisée.

La matrice  $[S_h(\omega)]$  formée par les densités spectrales et les densités spectrales croisées du vecteur  $\left\{ \overset{\circ}{h}(t) \right\}$  s'écrit après transformation comme suite;

$$[Sh(\omega)] = Sh(\omega)[Exp] \quad (6.54)$$

où:

$S_h(\omega)$  : est la densité spectrale du type de route où roule l'engin et  $[Exp]$  une matrice dont les composantes sont:

$$[Exp] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & e^{-i\omega t_2} & e^{-i\omega t_3} & e^{-i\omega t_4} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & e^{i\omega t_2} & 1 & e^{i\omega(t_2-t_3)} & e^{i\omega(t_2-t_4)} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & e^{i\omega t_3} & e^{i\omega(t_3-t_2)} & 1 & e^{i\omega(t_3-t_4)} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & e^{i\omega t_4} & e^{i\omega(t_4-t_2)} & e^{i\omega(t_4-t_3)} & 1 \end{bmatrix}$$

Une fois qu'on définit les expressions des fonctions de corrélation entre les composantes du vecteur  $\{h(t)\}$ , on peut définir celles du vecteur solution  $\{X(t)\}$ . En effet:

en substituant l'expression de  $Z_k(\omega)$  définie par l'équation (6.45) dans (6.46) on obtient.

$$\overset{\circ}{X}_k(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \sum_{j=1}^8 W_{kj}(\omega) f_j(\omega) e^{i\omega t} d\omega \quad (k = 1 \text{ à } 8) \quad (6.55)$$

Les fonctions d'inter-corrélation des solutions (6.55) s'écrivent

$$\begin{aligned} K_{X_k, X_p}(t, t') &= M \left[ \overset{\circ}{X}_k(t) \cdot \overset{\circ}{X}_p^*(t') \right] = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} M \left[ Z_k(\omega) \cdot Z_p^*(\omega') \right] e^{i(\omega t + \omega' t')} d\omega \cdot d\omega' \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \sum_{j=1}^8 \sum_{u=1}^8 W_{kj}(\omega) W_{pu}^*(\omega') M[f_k(\omega) \cdot f_u^*(\omega')] e^{i(\omega t + \omega' t')} d\omega \cdot d\omega' \end{aligned}$$

pour  $\omega' = -\omega$ .

$$K_{X_k, X_p}(t, t') = \int_{-\infty}^{+\infty} \sum_{j=1}^8 \sum_{u=1}^8 W_{kj}(\omega) W_{pu}(-\omega) S_{h_j, h_u} e^{i\omega t} d\omega \quad (6.56)$$

De la relation (6.56) résulte la condition de stationnarité de la solution (c'est à dire que chaque composante du vecteur  $\{X(t)\}$  sera une fonction stationnaire). à savoir

$$M[Z_k(\omega).Z_p(-\omega)] = S_{X_k X_p}(\omega) \quad (6.57)$$

où  $S_{X_k X_p}(\omega)$  est la densité spectrale croisée entre la kième composante et la pième composante du vecteur  $\{X(t)\}$ .

En substituant (6.57) dans (6.56) nous obtenons.

$$\int_{-\infty}^{+\infty} S_{X_k X_p}(\omega).e^{i\omega\tau} d\omega = \int_{-\infty}^{+\infty} \sum_{j=1}^8 \sum_{v=1}^8 W_{kj}(\omega)W_{pv}(-\omega)S_{h_j h_v}(\omega).e^{i\omega\tau} d\omega \quad (6.58)$$

soit

$$S_{X_k X_p}(\omega) = \sum_{j=1}^8 \sum_{v=1}^8 W_{kj}(\omega)W_{pv}(-\omega)S_{h_j h_v}(\omega) \quad (6.59)$$

De la même manière, on peut obtenir les expressions des densités spectrales  $S_{X_k}$  à savoir,

$$S_{X_k X_k}(\omega) = S_{X_k}(\omega) = \sum_{j=1}^8 W_{kj}(\omega)W_{kj}(-\omega)S_{h_j}(\omega) \quad (6.60)$$

A partir des expressions (6.60) et (6.59) définissant les densités spectrales et les densités spectrales croisées des différentes composantes du vecteur solution  $\{X(t)\}$ , on peut exprimer ou définir la matrice formée par ces différentes densités spectrales en fonction de ceux formées par les densités spectrales et densités spectrales croisées des composantes du vecteur  $\{h(t)\}$ . En effet.

$$[SX(\omega)] = [W(-\omega)][Sh(\omega)][W(+\omega)] \quad (6.61)$$

où

$[S_X(\omega)]$ : La matrice regroupant les densités spectrales et les densités spectrales croisées des composantes du vecteur solution  $\{X(t)\}$ .

$[S_h(\omega)]$ : La matrice regroupant les densités spectrales et densités spectrales croisées des composantes du vecteur  $\{h(t)\}$ .

En remplaçant les expressions de la matrice  $[W(\omega)]$  et  $[W(-\omega)]$  par leurs expressions définies par l'équation (6.44), et en définissant la matrice  $[S_h(\omega)]$  par les expressions des densités spectrales et des densités spectrales croisées, on obtient les expressions des densités spectrales et les densités spectrales croisées des composantes du vecteurs réponses  $\{X(t)\}$ . En effet.

$$\begin{aligned} [W(\omega)] &= [[K] - \omega^2[M] + i\omega[C]] [[Kr] + i\omega[Cr]] [L] \\ [W(-\omega)] &= [[K] - \omega^2[M] - i\omega[C]] [[Kr] - i\omega[Cr]] [L'] \end{aligned}$$

où

[L]: Matrice diagonale de composantes respectives 1, 1, 1, 1, 1,  $e^{-i\omega t_2}$ ,  $e^{-i\omega t_3}$ ,  $e^{-i\omega t_4}$ .

et [L'] est la matrice diagonale composante 1, 1, 1, 1,  $e^{i\omega t_2}$ ,  $e^{i\omega t_3}$ ,  $e^{i\omega t_4}$ .

$$[SX(\omega)] = [W(-\omega)][Exp][W(\omega)]Sh(\omega) \quad (6.62)$$

Dans le cas particulier où les composantes du vecteur  $\{h(t)\}$  sont non corrélées; c'est à dire que les densités spectrales croisées sont nulles,  $S_{h_j h_v}(\omega) = 0$ .

$$S_{h_j h_v}(\omega) = \begin{cases} 0 & j \neq v \\ S_{h_j} & j = v \end{cases} \quad (6.63)$$

Les expressions (6.60) et 6.59) prennent la forme suivante.

$$\begin{aligned} S_{X_k}(\omega) &= \sum_{j=1}^8 |W_{kj}(\omega)|^2 S_{h_j}(\omega) \\ S_{X_k X_l} &= \sum_{j=1}^8 W_{kj} W_{lj}(-\omega) S_{h_j}(\omega) \end{aligned} \quad (6.64)$$

Les variances des composantes  $X_k(t)$  du vecteur solution  $\{X(t)\}$  valent

$$\sigma_{X_k}^2(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} S_{X_k}(\omega) d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \sum_{j=1}^8 \sum_{v=1}^8 W_{kj}(\omega) W_{kv}(-\omega) S_{h_j h_v}(\omega) d\omega \quad (6.65)$$

Dans le cas particulier où

$$\begin{aligned} S_{h_j h_v}(\omega) &= \begin{cases} 0 & j \neq v \\ S_{h_j} & j = v \end{cases} \\ \sigma_{X_k}^2 &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \left[ \sum_{j=1}^8 |W_{kj}(\omega)|^2 S_{h_j}(\omega) \right] d\omega \end{aligned} \quad (6.66)$$

De la même manière qu'on a trouvé les densités spectrales croisées  $S_{X_i X_j}(\omega)$  entre les composantes du système (6.35), on peut définir les densités spectrales croisées  $S_{h_i X_j}(\omega)$  entre les composantes du vecteur  $\{h(t)\}$  et  $\{X(t)\}$ .

En effet, l'expression de la fonction de corrélation entre les composantes  $h_i(t)$  du vecteur  $\{h(t)\}$  à l'instant  $t$  et la composante  $x_i(t')$  du vecteur  $\{x(t)\}$  à l'instant  $t'$  s'écrit comme suite.

$$K_{h_i x_j}(t, t') = M \left[ \int_{-\infty}^{+\infty} f_i(w) e^{iwt} dw \int_{-\infty}^{+\infty} \sum_{k=1}^8 w_{jk}(w') f_k(w') e^{i w' t'} dw' \right] \quad (6.67)$$

Si on prend  $\omega' = -\omega$   $K_{h_i x_j}(t, t')$  devient:

$$K_{h_i x_j}(t, t') = \int_{-\infty}^{+\infty} \sum_{k=1}^8 w_{jk}(-w) M[f_i(w) f_k(-w)] e^{i w(t-t')} dw \quad (6.68)$$

$$\text{or } K_{h_i x_j}(t, t') = \int_{-\infty}^{+\infty} S_{h_i x_j}(w) e^{i w(t-t')} dw \quad (6.69)$$

En comparant (6.68) avec (6.69), on obtient l'expression de la densité spectrale croisée entre  $h_i(t)$  et  $x_j(t)$

$$S_{h_i x_j}(w) = \sum_{k=1}^8 W_{jk}(-w) M[f_i(w) f_k(-w)] \quad (6.70)$$

Or d'après (6.52) on a

$$M[f_i(w) f_k(-w)] = S_{h_i h_k}(w) = S_{h_i h_k}(w) e^{-i w(t_i - t_k)} \quad (6.71)$$

Où pour  $i=k=1$  à  $4$   $t_i=t_k=0$  et  $S_h(\omega)=0$

Pour  $i=k=5$   $t_i=t_k=0$   
 $i=k=6$   $t_i=t_k=t_2$   
 $i=k=7$   $t_i=t_k=t_3$   
 $i=k=8$   $t_i=t_k=t_4$

Soit sous forme matricielle, la matrice  $[S_{hx}]$  regroupant les densités spectrales croisées reliant les composantes du vecteur  $\{h(t)\}$  à celles de  $\{x(t)\}$  s'écrit

$$[S_{hx}(\omega)] = [W(-\omega)] [S_h(\omega)] = [W(-\omega)] S_h(\omega) [Exp] \quad (6.72)$$

#### 6.4 Interprétation des résultats.

Les figures 6.1 à 6.32 représentent les densités spectrales pour différents déplacements du véhicule routier et sa remorque.

Ces densités spectrales sont réalisées pour quatre différents types de routes à savoir une route bétonnée, herbeuse, pavée et type bruit blanc ( avec densité spectrale constante en fonction de la fréquence ).

Pour les figures indiquées l'amortissement est considéré comme négligeable. Ce dernier est pris en considération dans les figures 6.33 à 6.40.

Les pics des courbes 6.1 à 6.32 correspondent aux fréquences propres des systèmes étudiés. L'influence des fréquences propres varient d'un compartiment à un autre. Elle concerne le déplacement verticale du chauffeur , les déplacements vertical et angulaire du tracteur routier, le déplacement angulaire de la remorque et les déplacements verticaux des différents essieux.

Les basses fréquences propres influent sur le chauffeur ( 10Hz et 18 Hz ), le tracteur routier ( 10 Hz, 13 Hz, 18 Hz ) et la remorque ( 18 Hz ) ( voir fig.6.1 à fig.6.4, fig.6.9 à fig.6.12, fig.6.17 à fig.6.20, fig.6.25 à fig.6.28 ) et ceci pour des systèmes sans amortissements.

Les essieux sont influés essentiellement par les hautes fréquences ( voir fig.6.5 à fig.6.8, fig.6.13 à fig.6.16, fig.6.21 à fig.24, fig.6.29 à fig.6.32 ).

Pour les système avec amortissement pour différents types de route, les pics correspondent aux fréquences propres et l'amplitude des déplacements des différents compartiments sont inférieurs que pour le cas des systèmes non amortis.

Pour ne pas trop s'étaler sur l'interprétation des différentes courbes, on considère la figure 6.36. Cette dernière représente la densité spectrale du système amorti pour le déplacement angulaire de la remorque. Les pics coïncident avec les fréquences propres pour des chaussée bétonnée, pavée, bruit blanc. Dans le cas d'une route herbeuse, il y apparition d'une autre fréquences correspondant à la fréquence où la densité spectrale de ce type de route est maximale ( voir fig.4.17).

Avec certaines réserves, on peut dire que les courbes 6.33 à 6.40 sont la superposition de deux courbes qui sont celle de la densité spectrale du type de route et celle donnant les pics ( au niveau des fréquences propres ).

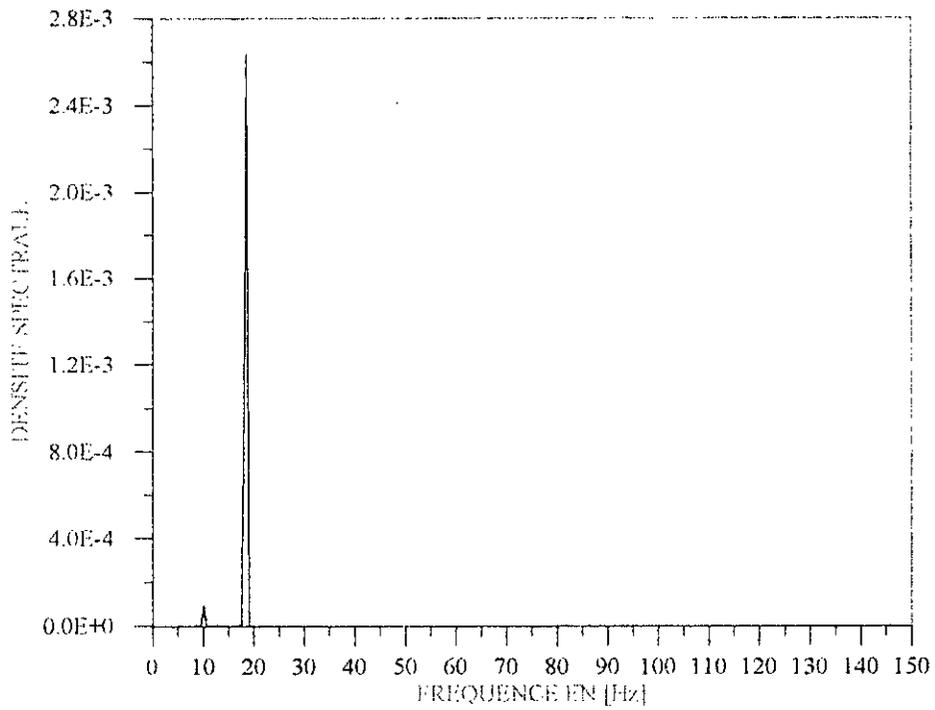


Fig. 6.1 Densité spectrale  $S_{xc}(\omega)$  du système non amorti pour une chaussée béton

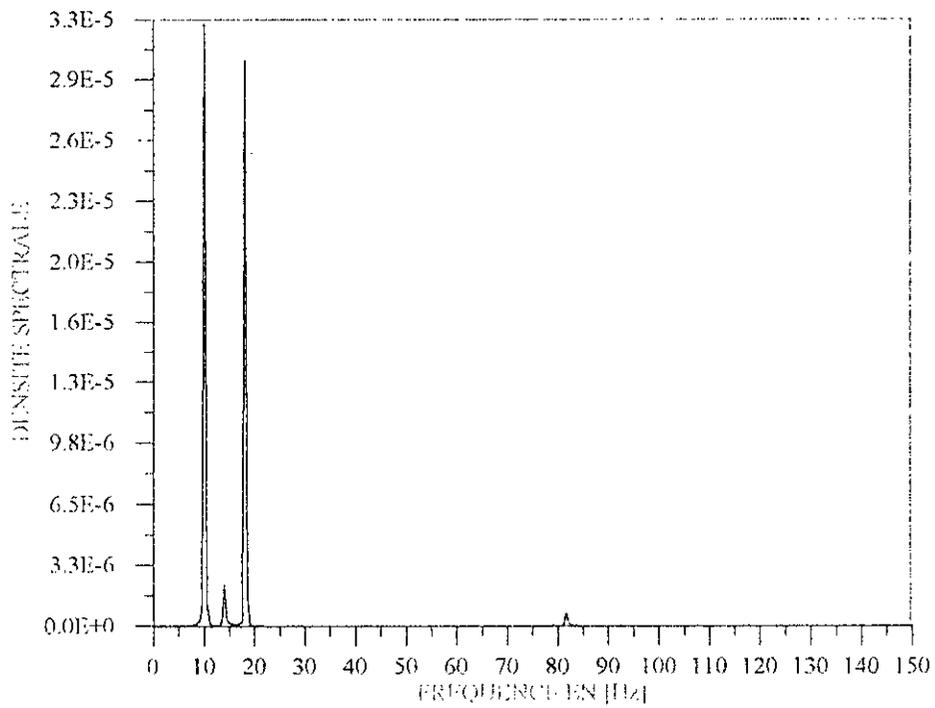


Fig. 6.2 Densité spectrale  $S_{xi}(\omega)$  du système non amorti pour une chaussée béton

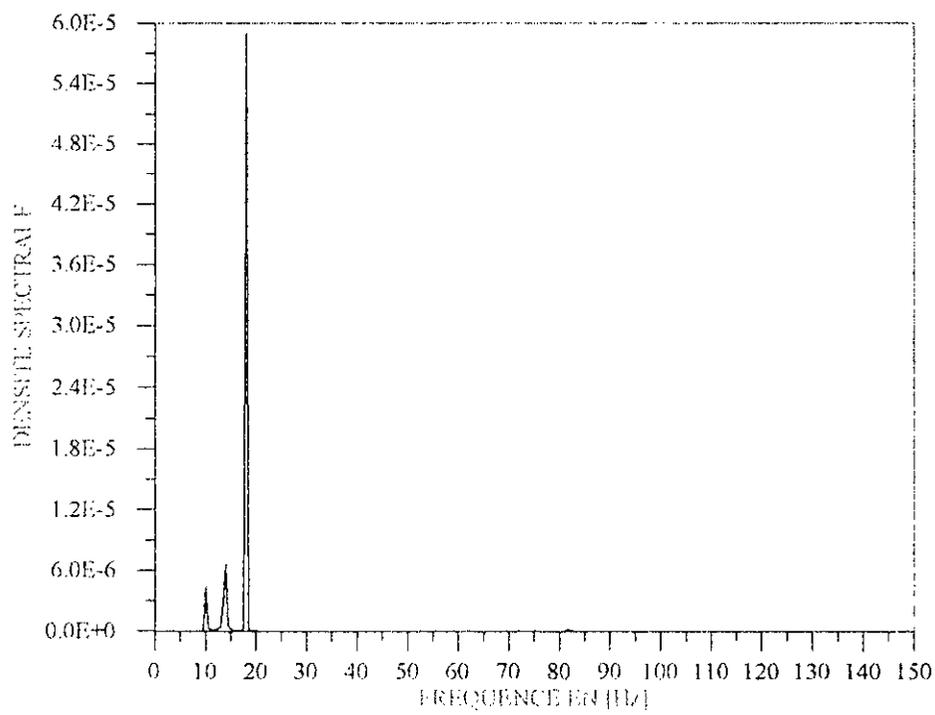


Fig. 6.3 Densité spectrale  $S_{qt}(\omega)$  du système non amorti pour une chaussée béton

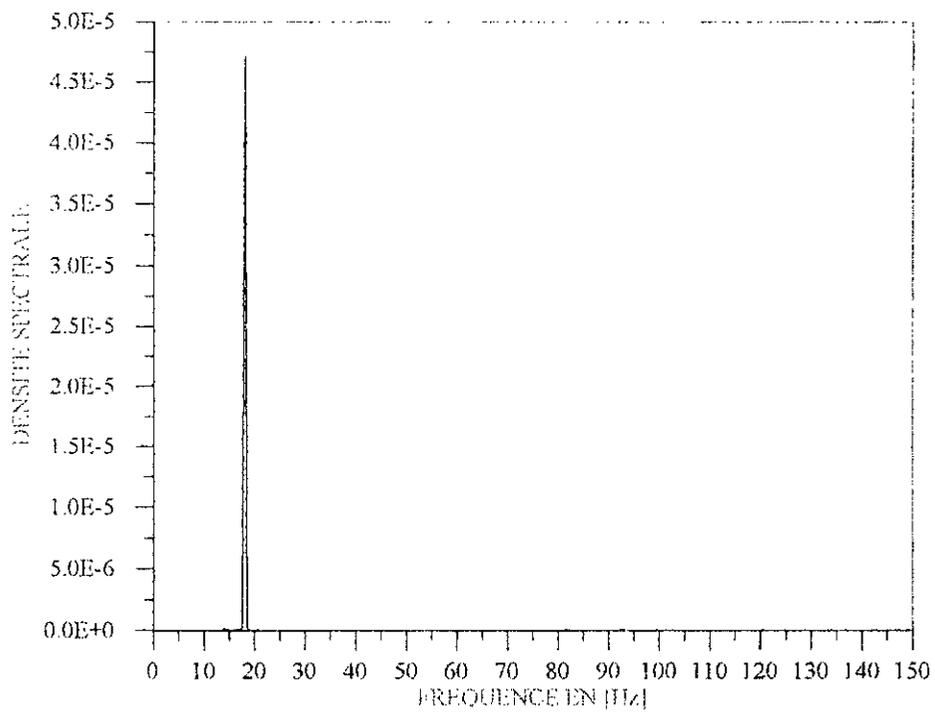


Fig. 6.4 Densité spectrale  $S_{pb}(\omega)$  du système non amorti pour une chaussée béton

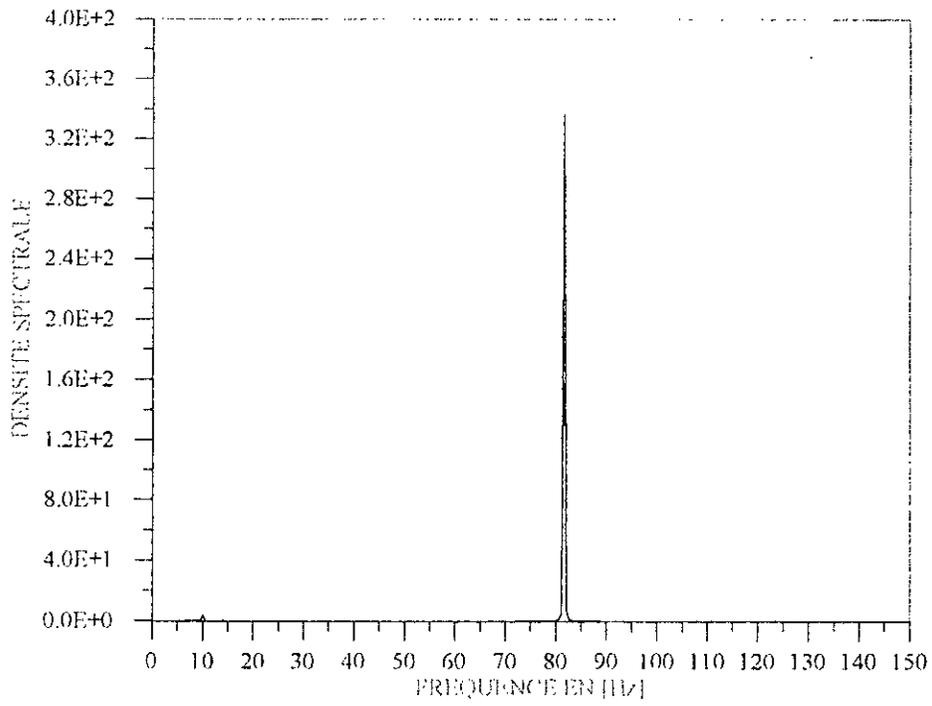


Fig. 6.5 Densité spectrale  $S_{y1}(\omega)$  du système non amorti pour une chaussée béton

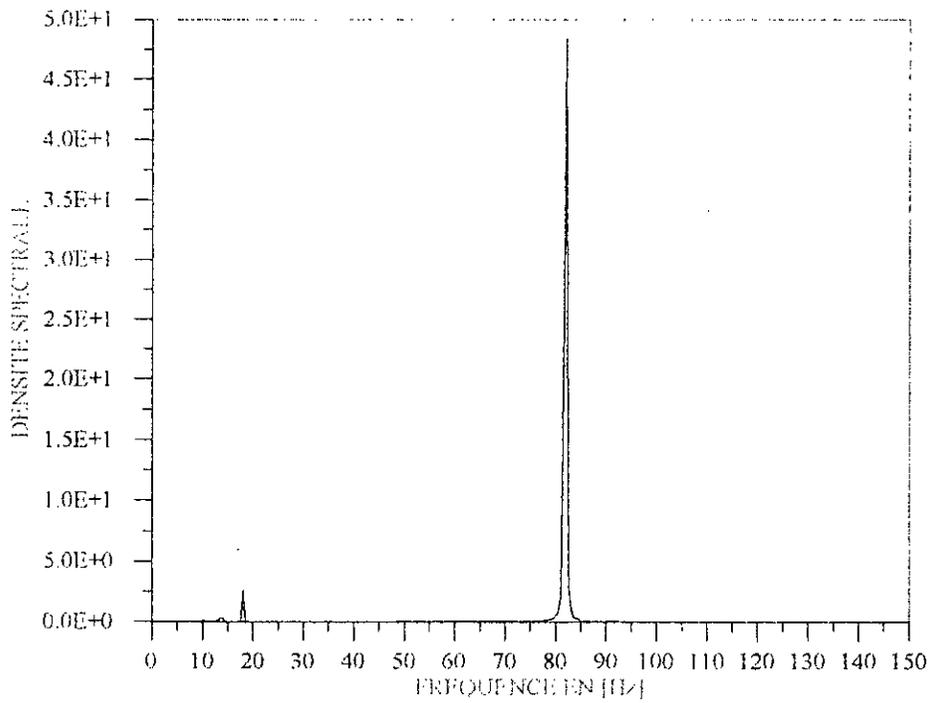


Fig. 6.6 Densité spectrale  $S_{y2}(\omega)$  du système non amorti pour une chaussée béton

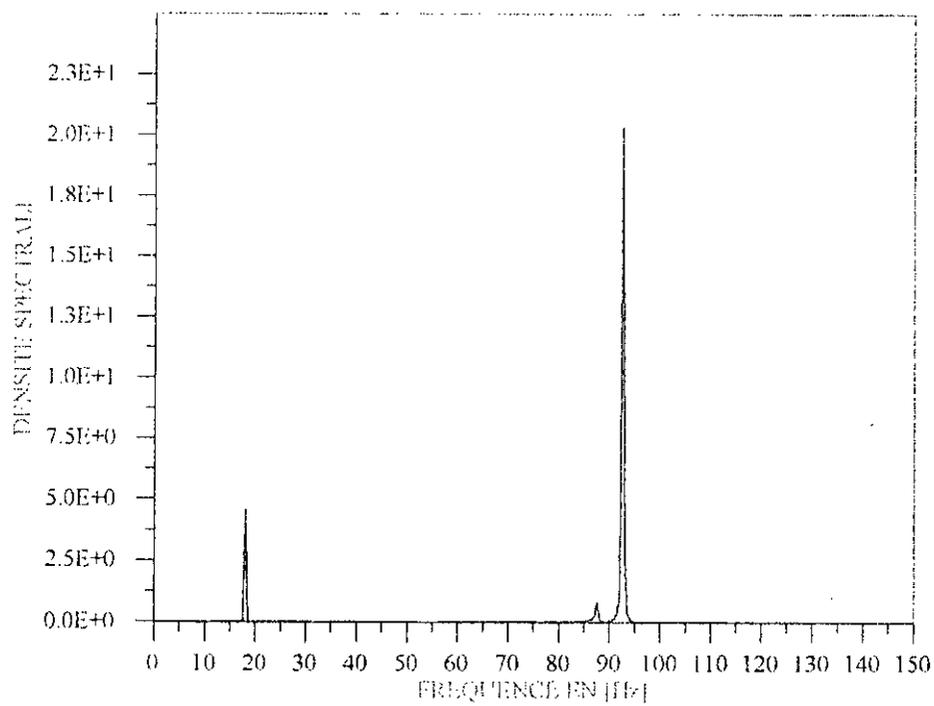


Fig. 6.7 Densité spectrale  $S_{y3}(\omega)$  du système non amorti pour une chaussée béton

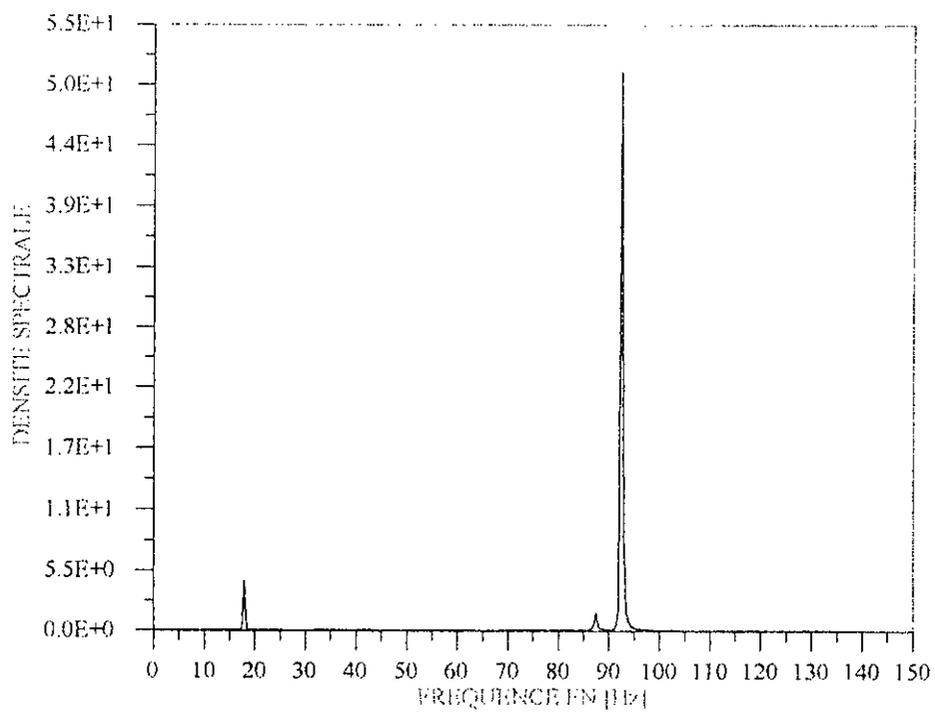


Fig. 6.8 Densité spectrale  $S_{y4}(\omega)$  du système non amorti pour une chaussée béton

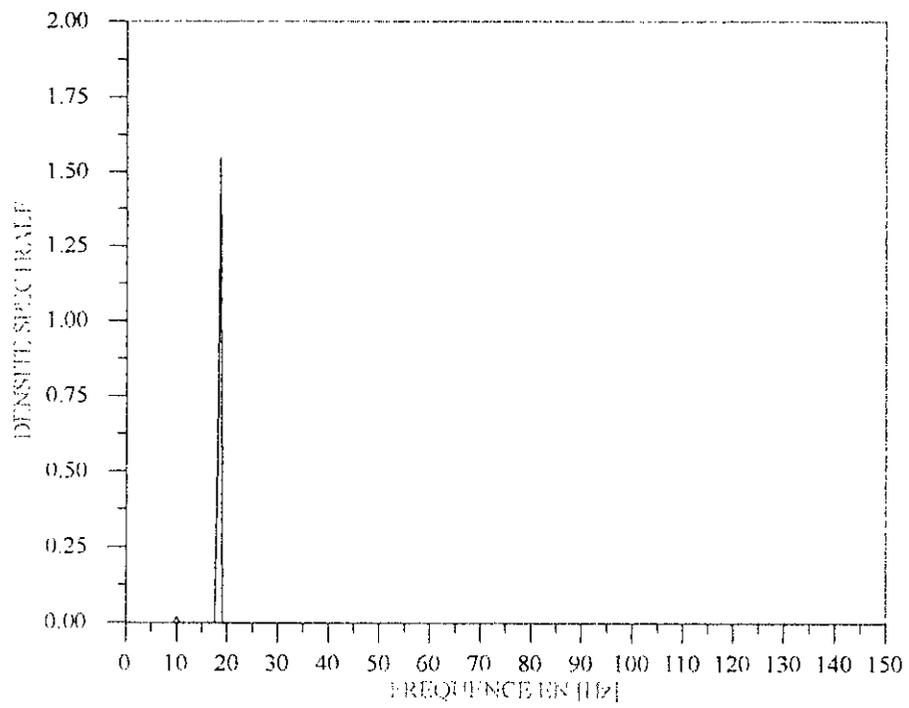


Fig. 6.9 Densité spectrale  $S_{sc}(\omega)$  du système non amorti pour une chaussée herbeuse

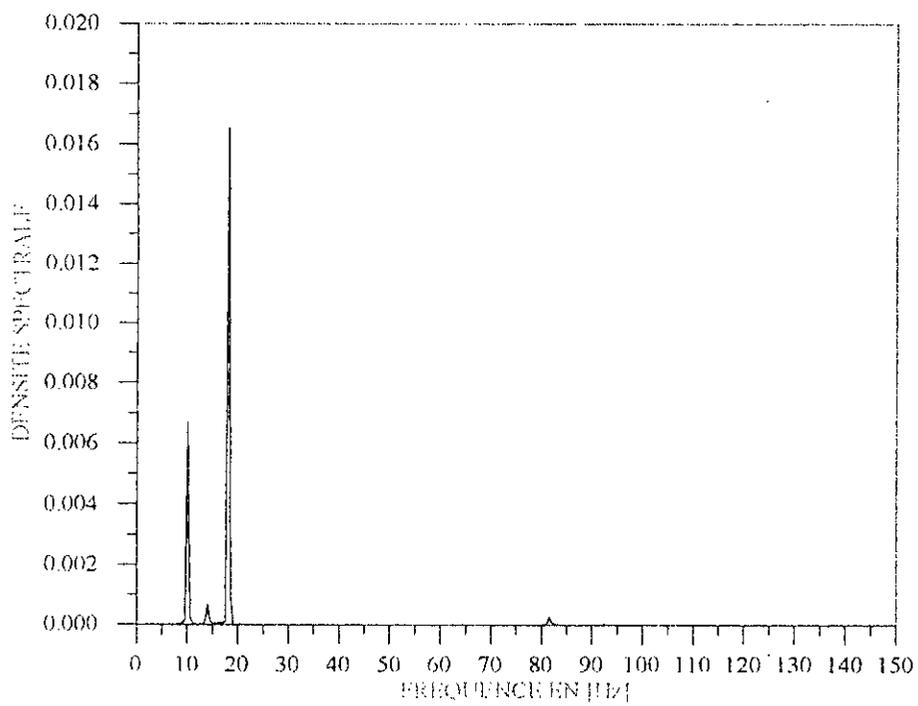


Fig. 6.10 Densité spectrale  $S_{Mt}(\omega)$  du système non amorti pour une chaussée herbeuse

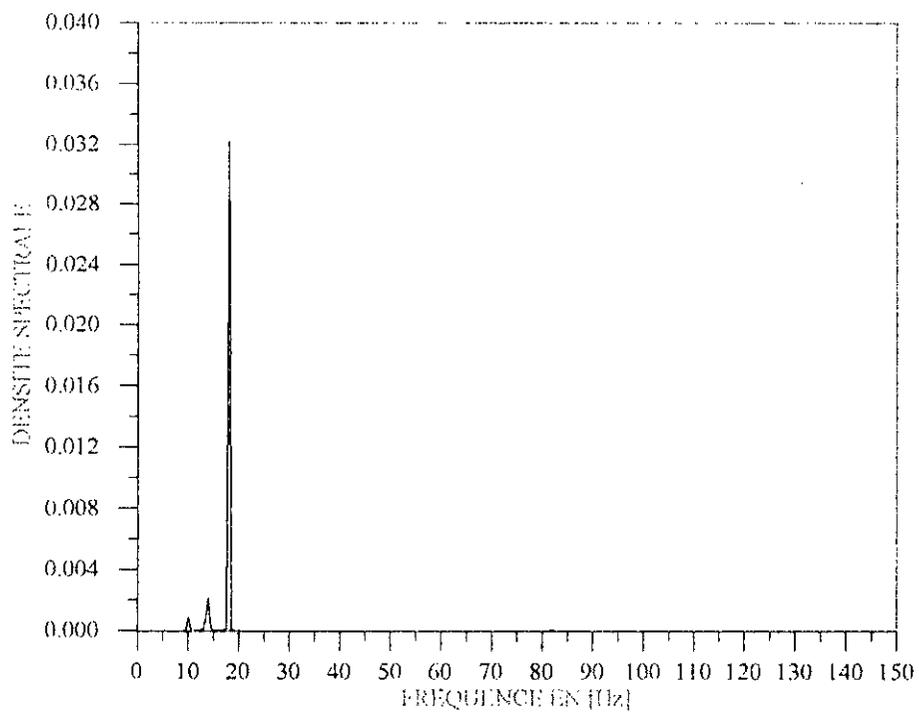


Fig. 6.11 Densité spectrale  $S_{\eta}(\omega)$  du système non amorti pour une chaussée herbeuse

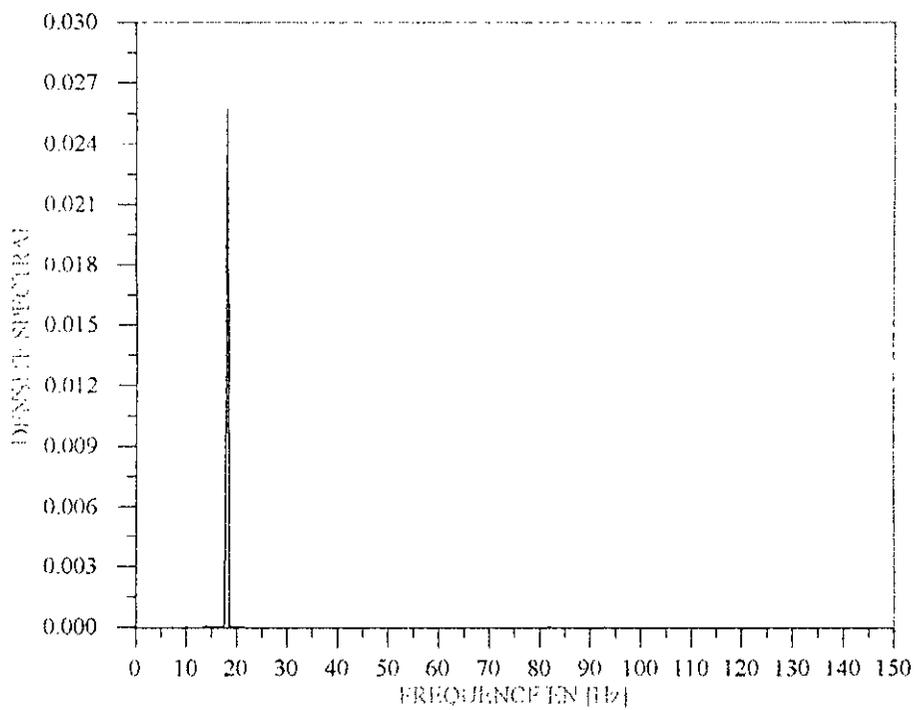


Fig. 6.12 Densité spectrale  $S_{\phi_b}(\omega)$  du système non amorti pour une chaussée herbeuse

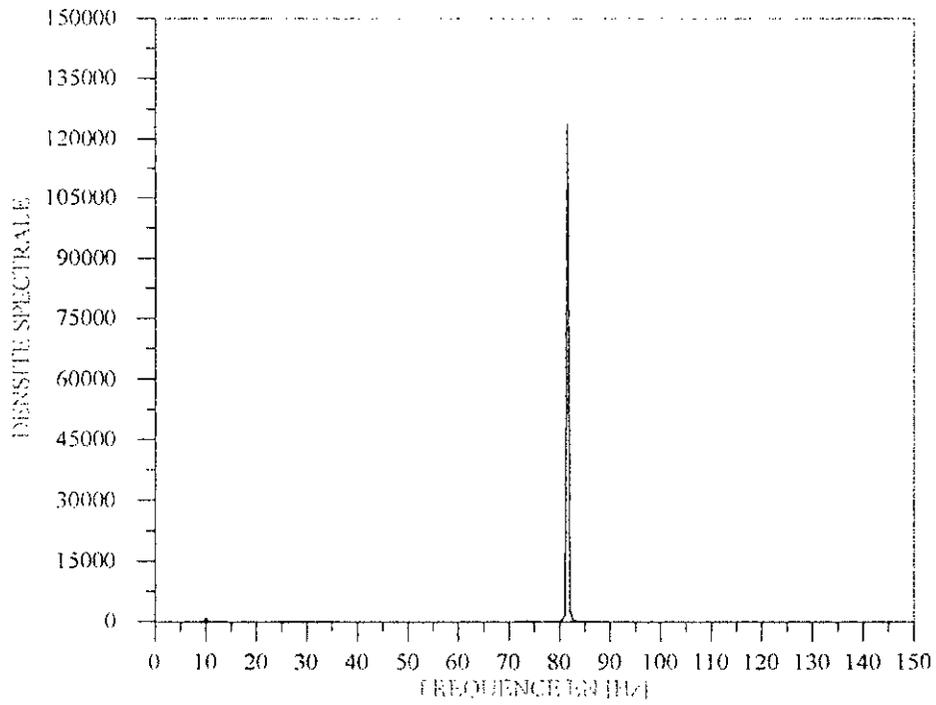


Fig. 6.13 Densité spectrale  $S_{y_1}(\omega)$  du système non amorti pour une chaussée herbeuse

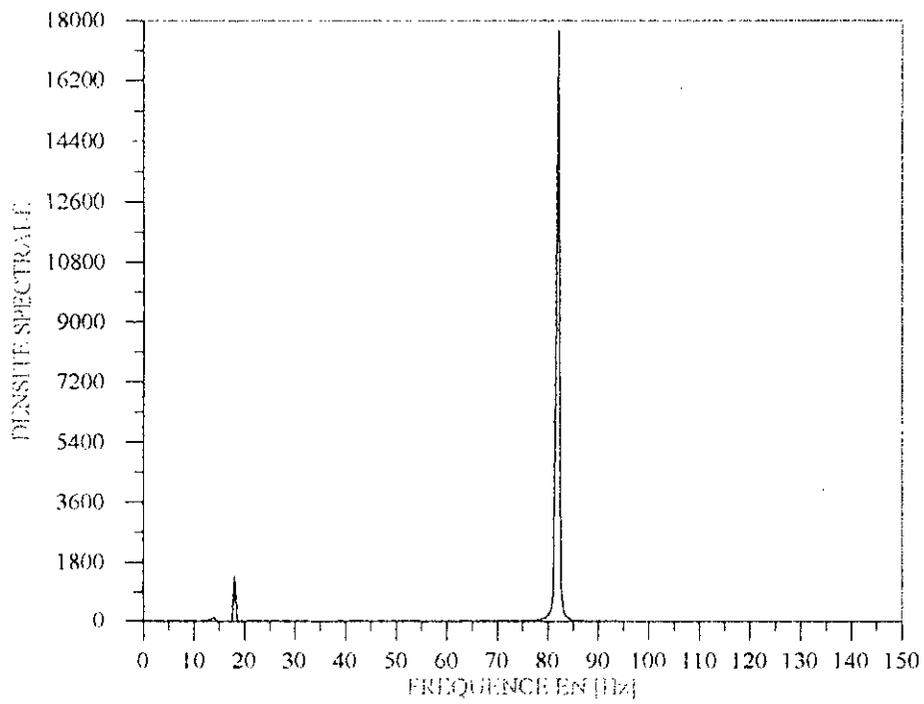


Fig. 6.14 Densité spectrale  $S_{y_2}(\omega)$  du système non amorti pour une chaussée herbeuse

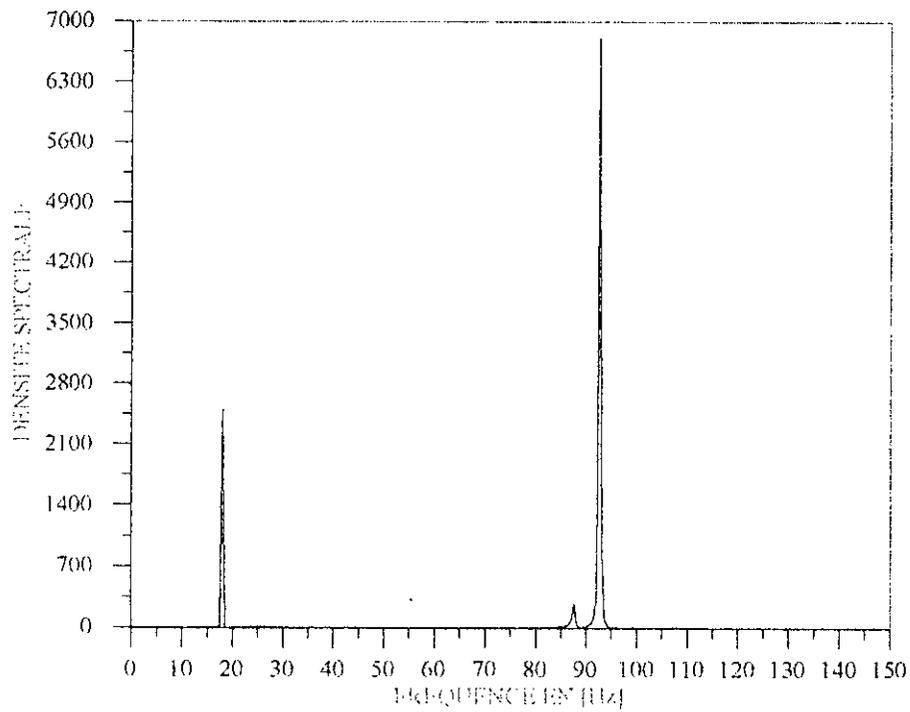


Fig. 6.15 Densité spectrale  $S_{y_3}(\omega)$  du système non amorti pour une chaussée herbeuse

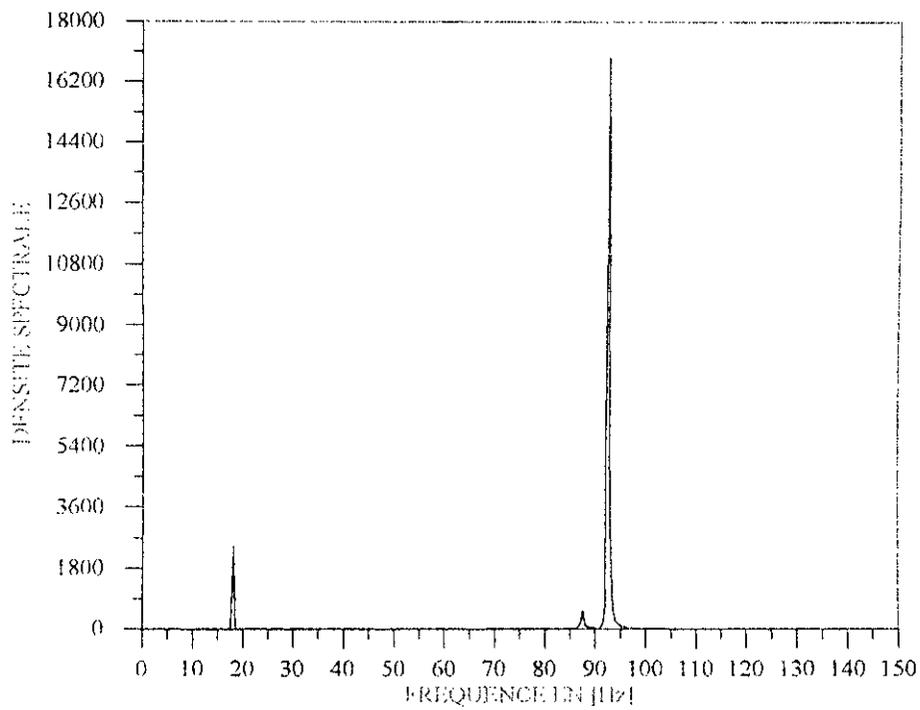


Fig. 6.16 Densité spectrale  $S_{y_4}(\omega)$  du système non amorti pour une chaussée herbeuse

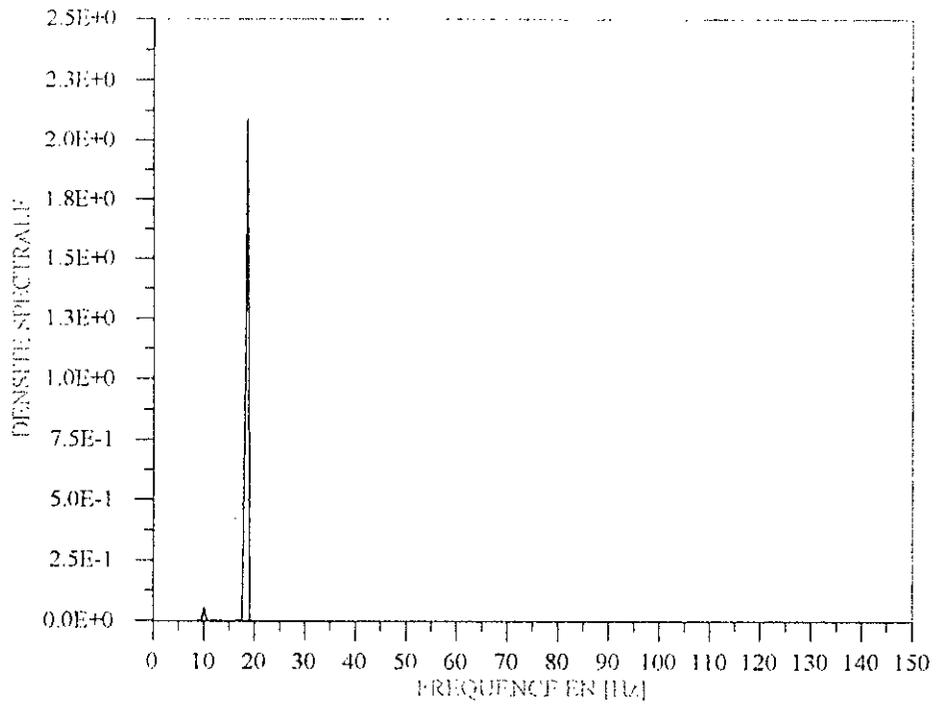


Fig. 6.17 Densité spectrale  $S_{xc}(\omega)$  du système non amorti pour une chaussée bruit blanc

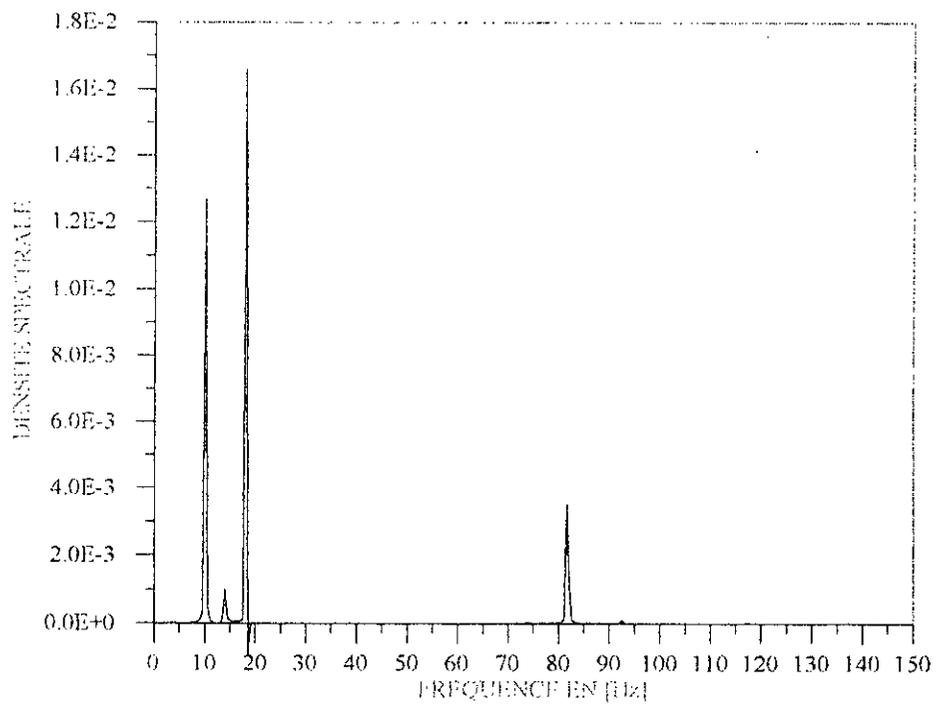


Fig. 6.18 Densité spectrale  $S_{xi}(\omega)$  du système non amorti pour une chaussée bruit blanc

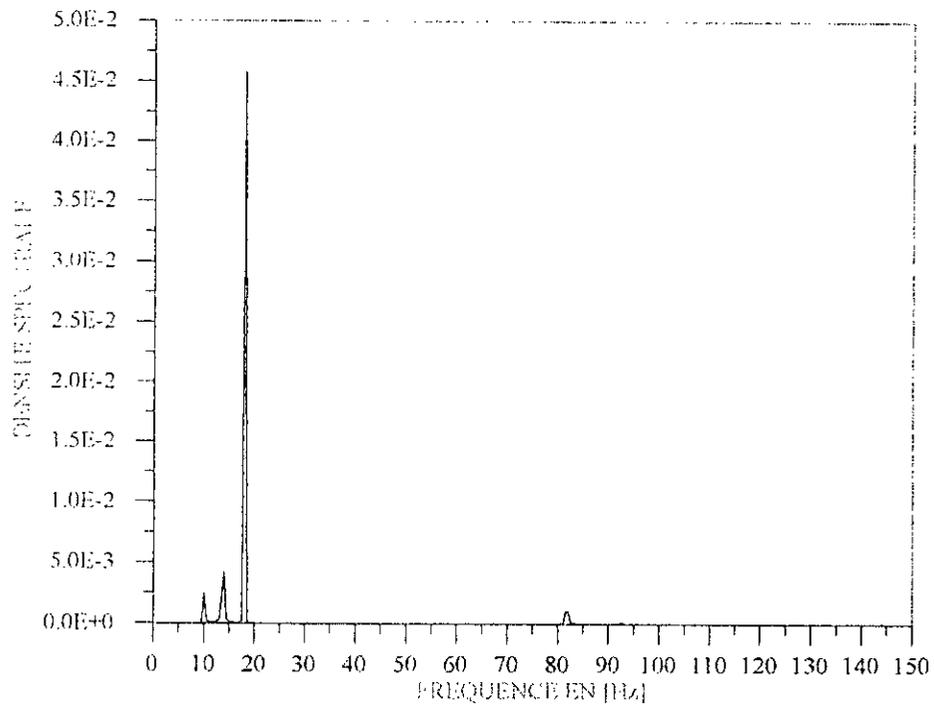


Fig. 6.19 Densité spectrale  $S_{\phi}(\omega)$  du système non amorti pour une chaussée bruit blanc

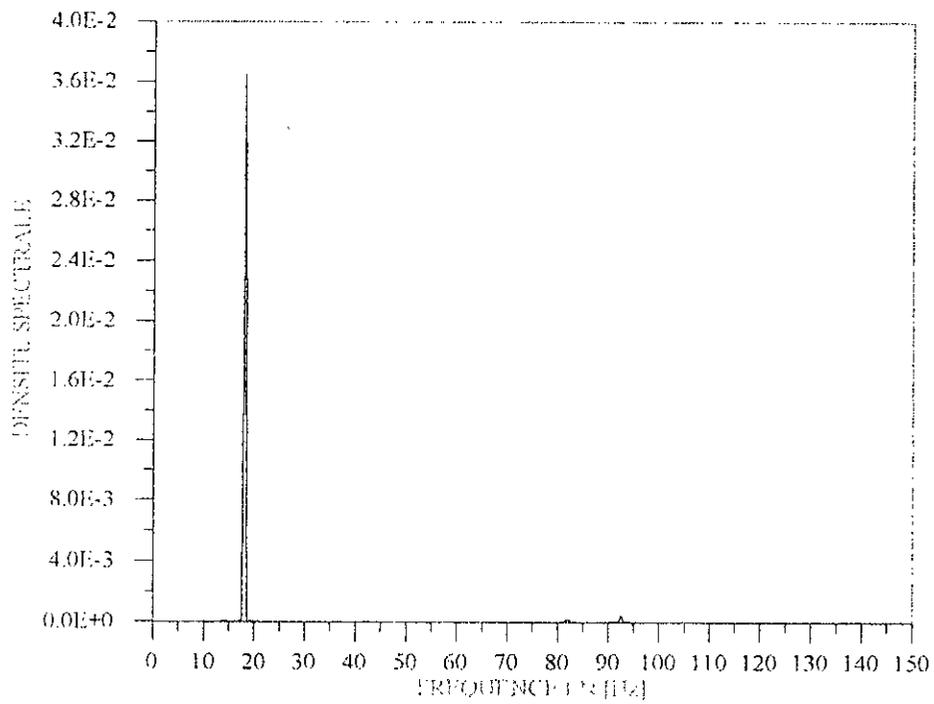


Fig. 6.20 Densité spectrale  $S_{\phi}(\omega)$  du système non amorti pour une chaussée bruit blanc

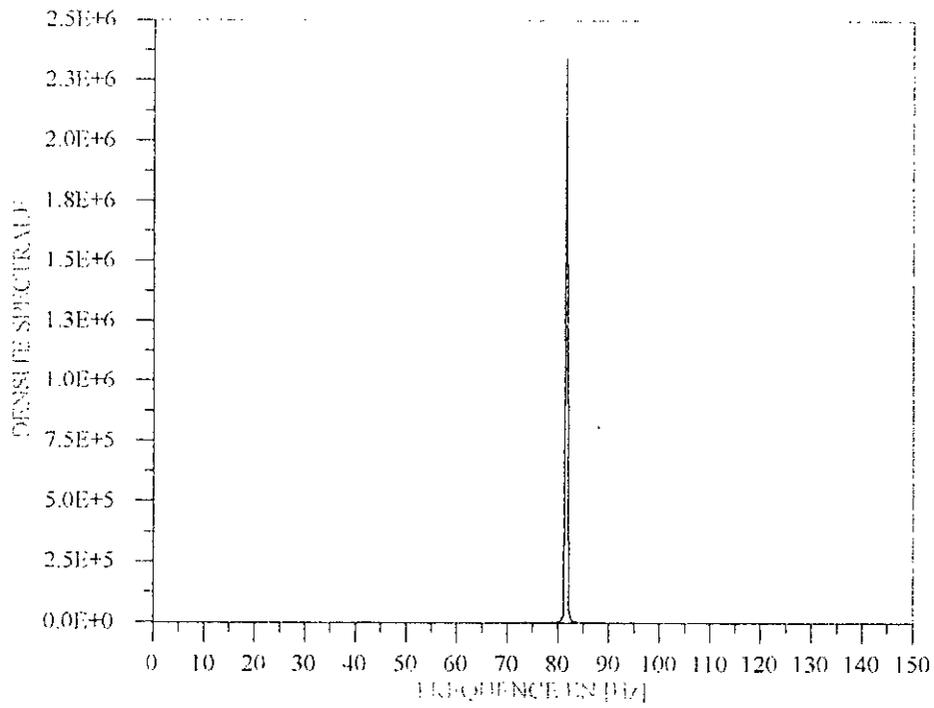


Fig. 6.21 Densité spectrale  $S_{y1}(\omega)$  du système non amorti pour une chaussée bruit blanc

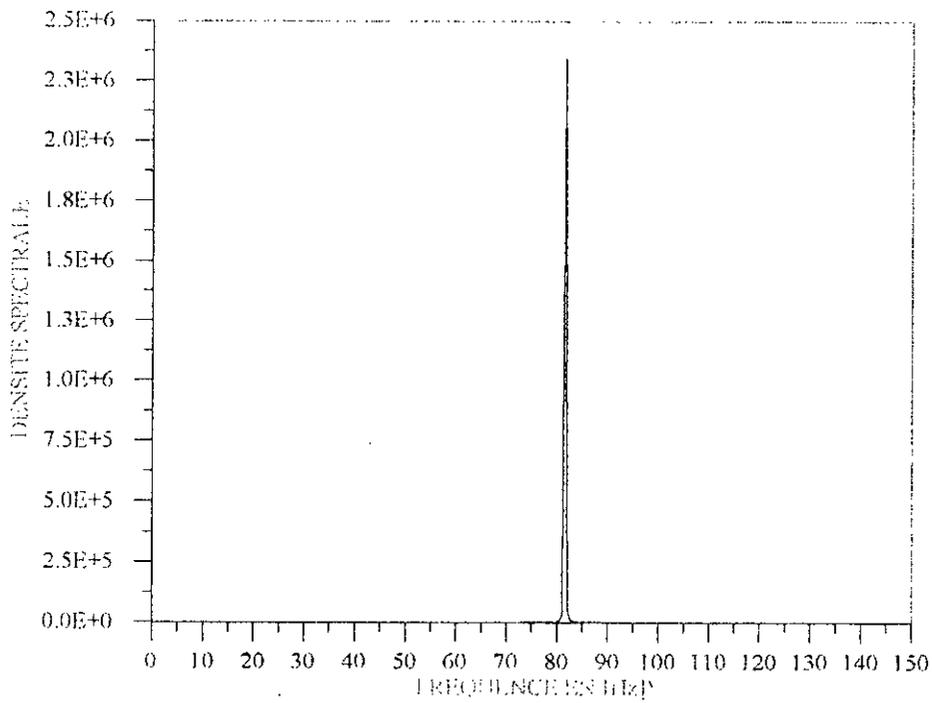


Fig. 6.22 Densité spectrale  $S_{y2}(\omega)$  du système non amorti pour une chaussée bruit blanc

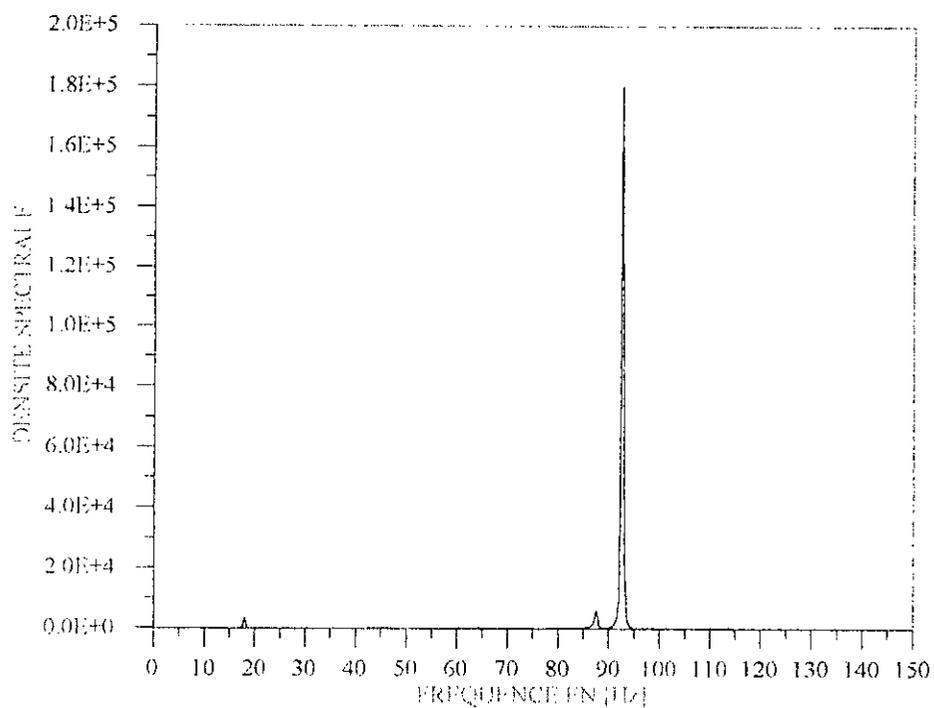


Fig. 6.23 Densité spectrale  $S_{y3}(\omega)$  du système non amorti pour une chaussée bruit blanc

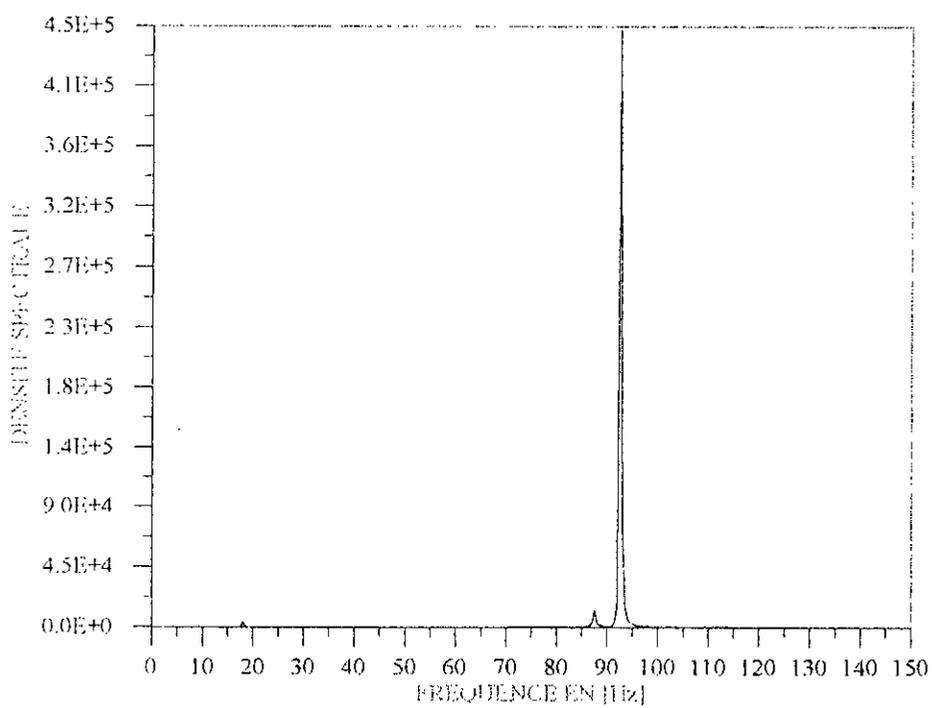


Fig. 6.24 Densité spectrale  $S_{y4}(\omega)$  du système non amorti pour une chaussée bruit blanc

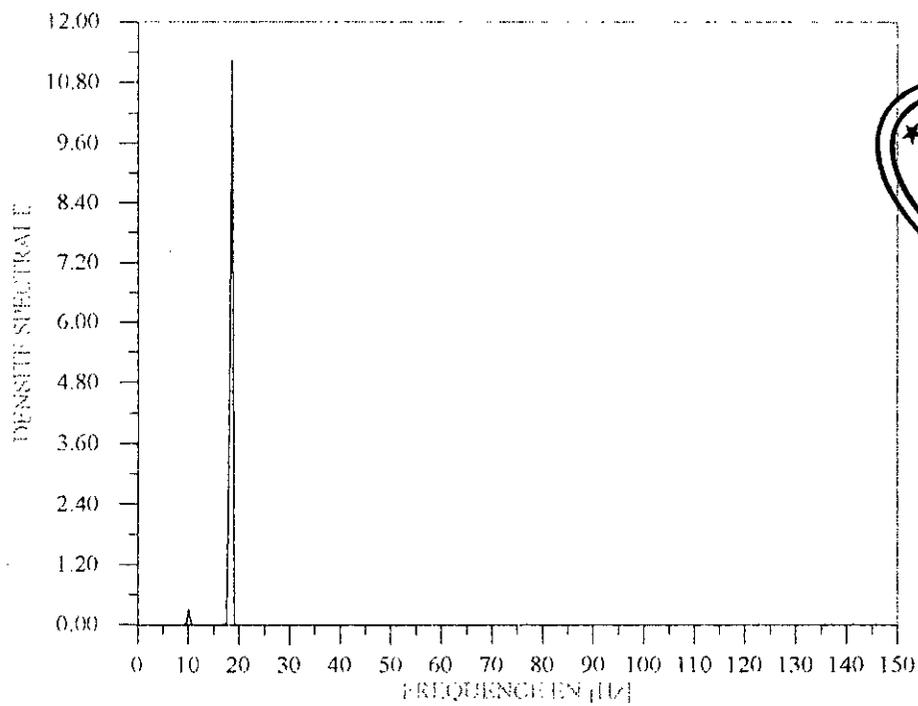


Fig. 6.25 Densité spectrale  $S_{Nc}(\omega)$  du système non amorti pour une chaussée pavée

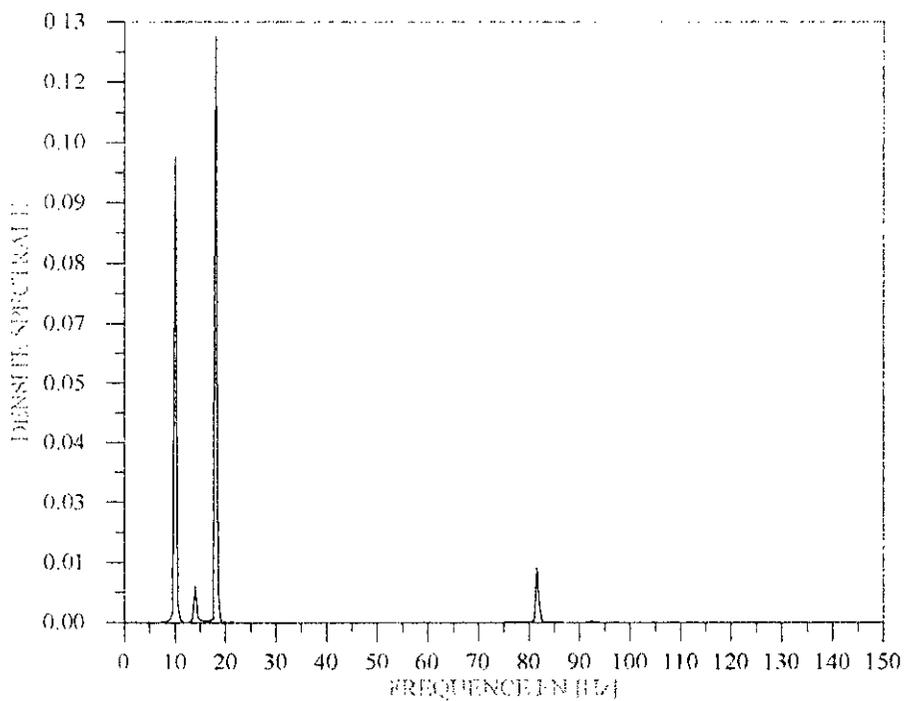


Fig. 6.26 Densité spectrale  $S_{Nt}(\omega)$  du système non amorti pour une chaussée pavée

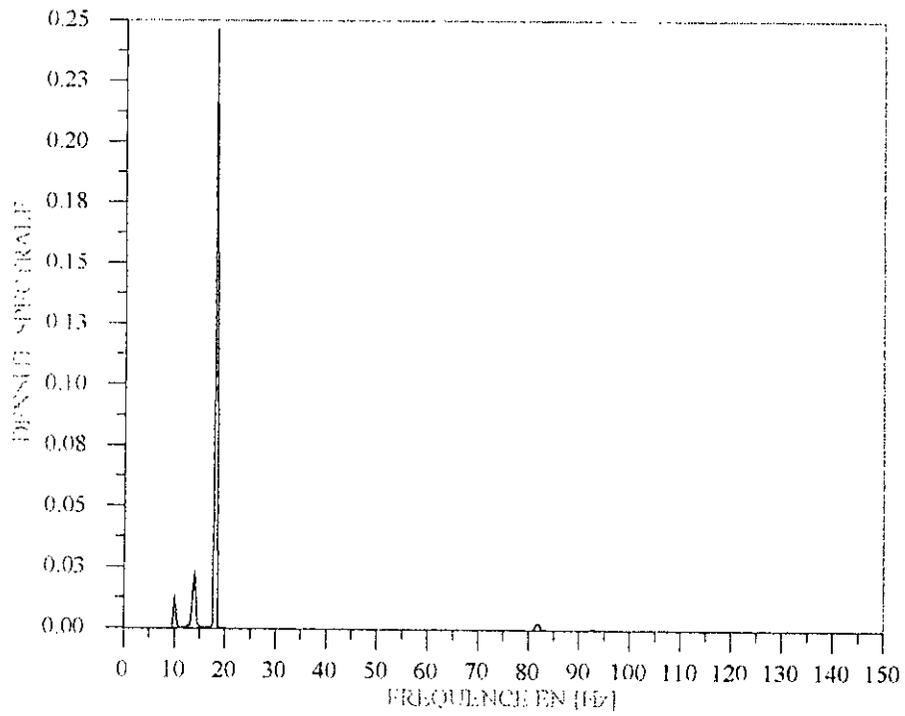


Fig. 6.27 Densité spectrale  $S_{\phi}(\omega)$  du système non amorti pour une chaussée pavée

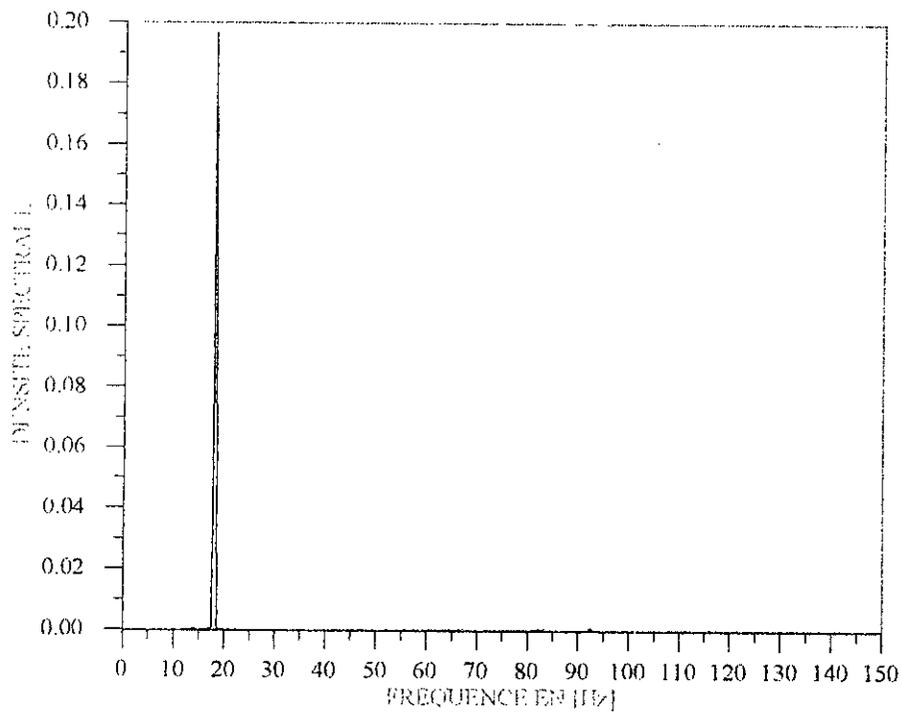


Fig. 6.28 Densité spectrale  $S_{\phi_b}(\omega)$  du système non amorti pour une chaussée pavée

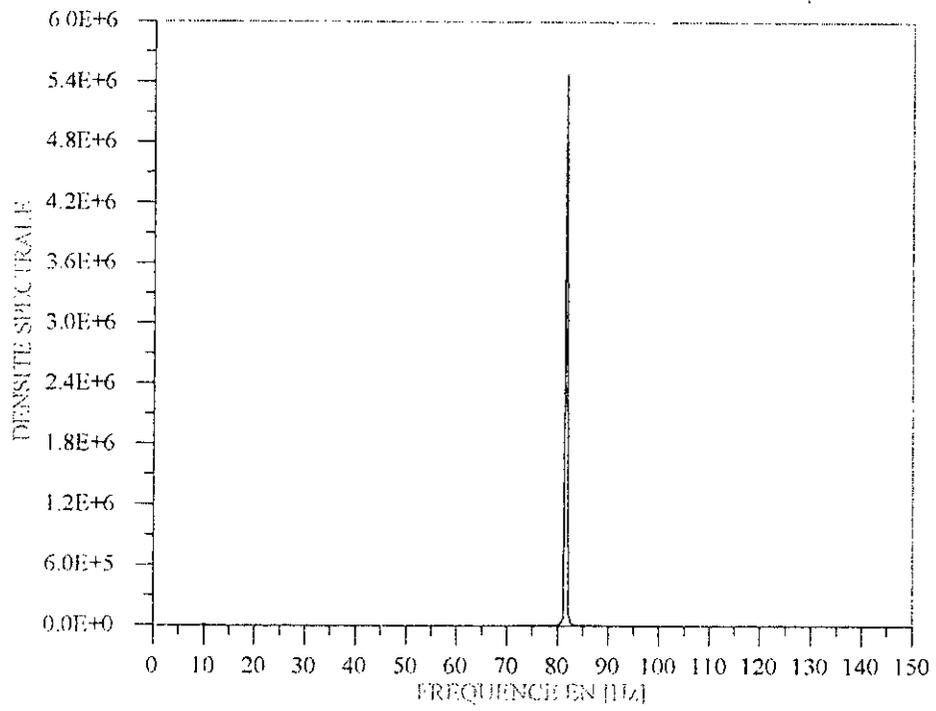


Fig. 6.29 Densité spectrale  $S_{y_1}(\omega)$  du système non amorti pour une chaussée pavée

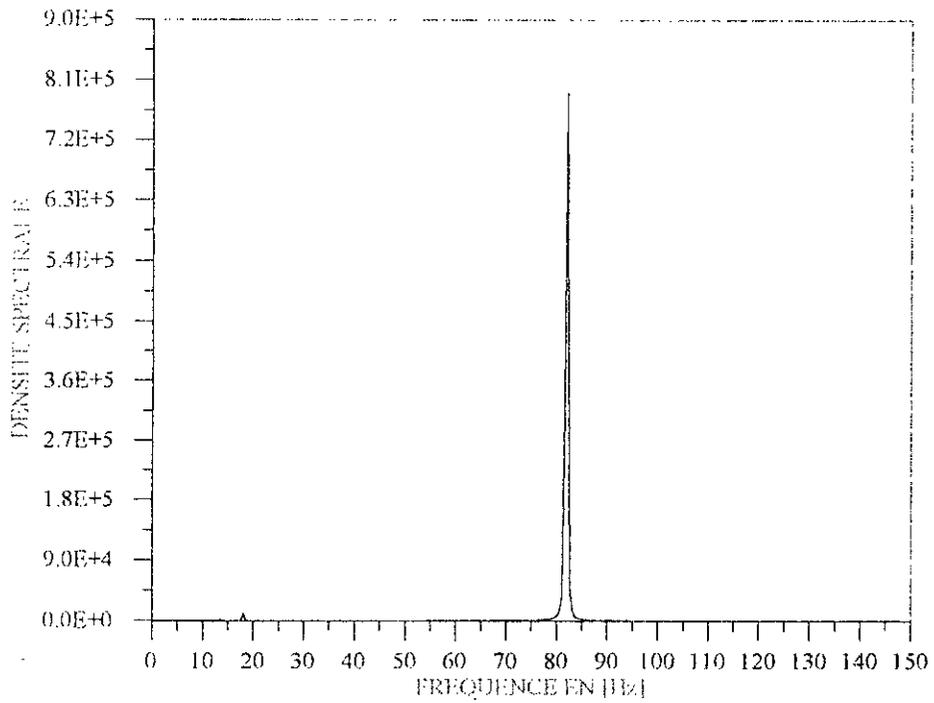


Fig. 6.30 Densité spectrale  $S_{y_2}(\omega)$  du système non amorti pour une chaussée pavée

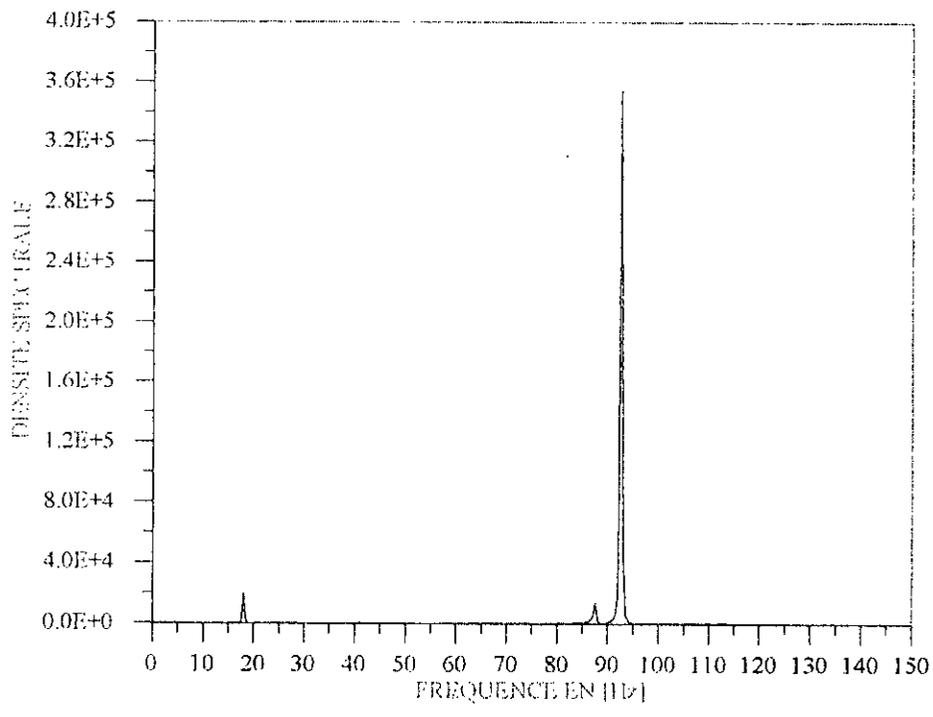


Fig. 6.31 Densité spectrale  $S_{y_3}(\omega)$  du système non amorti pour une chaussée pavée

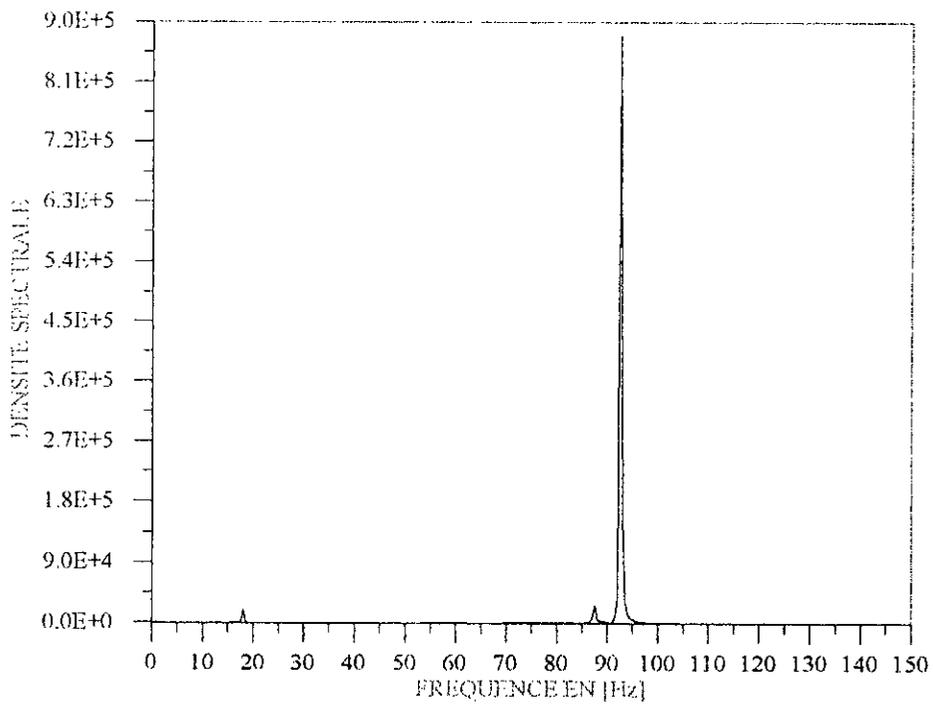


Fig. 6.32 Densité spectrale  $S_{y_4}(\omega)$  du système non amorti pour une chaussée pavée

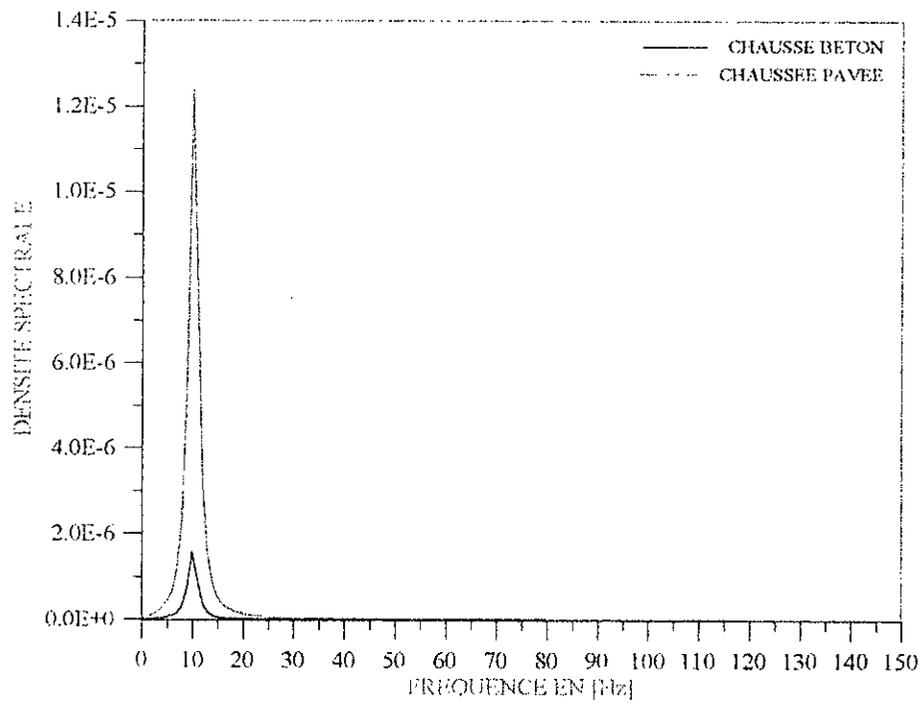
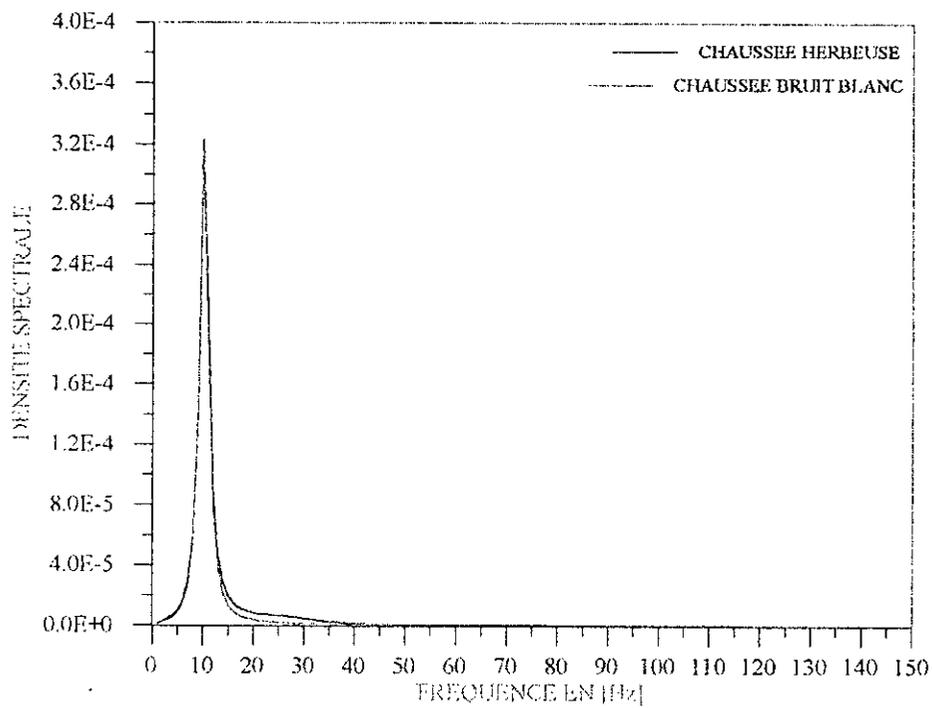


Fig. 6.33 Densité spectrale  $S_{x_c}(\omega)$  du système amorti

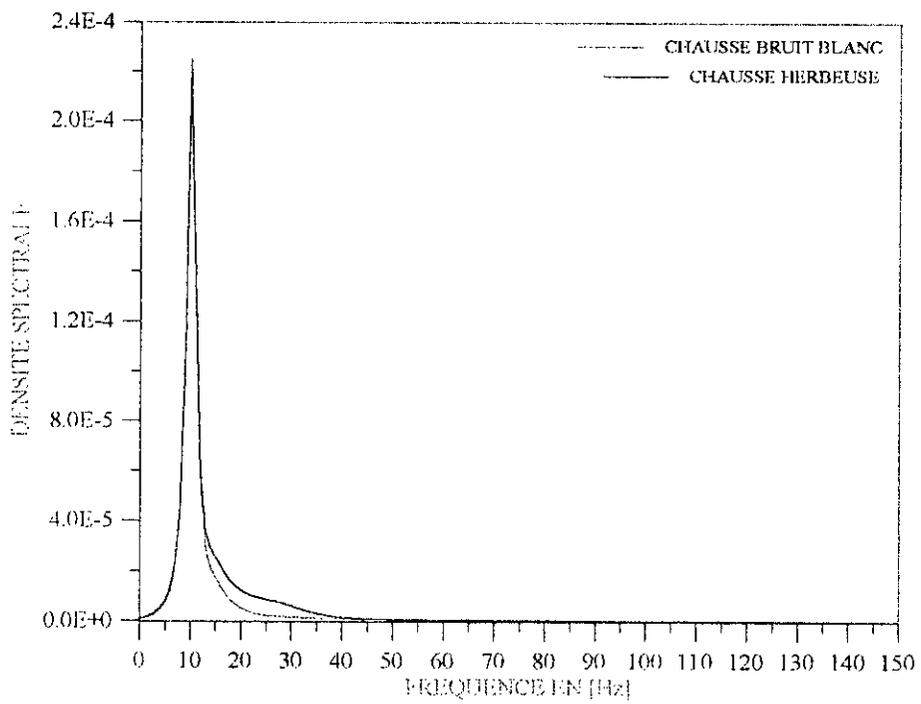
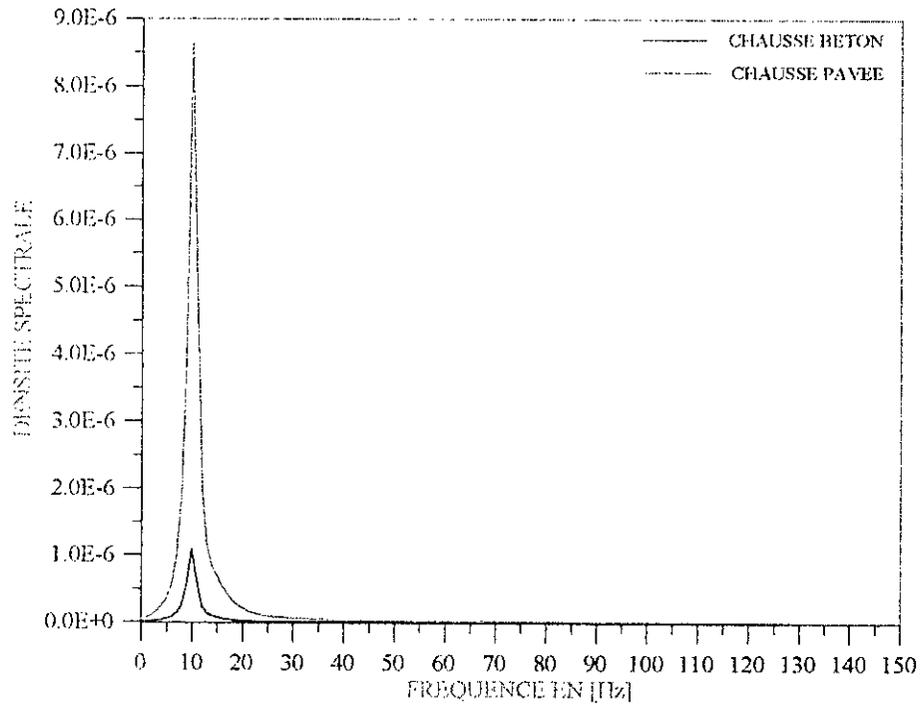


Fig. 6.34 Densité spectrale  $S_{N_i}(\omega)$  du système amorti

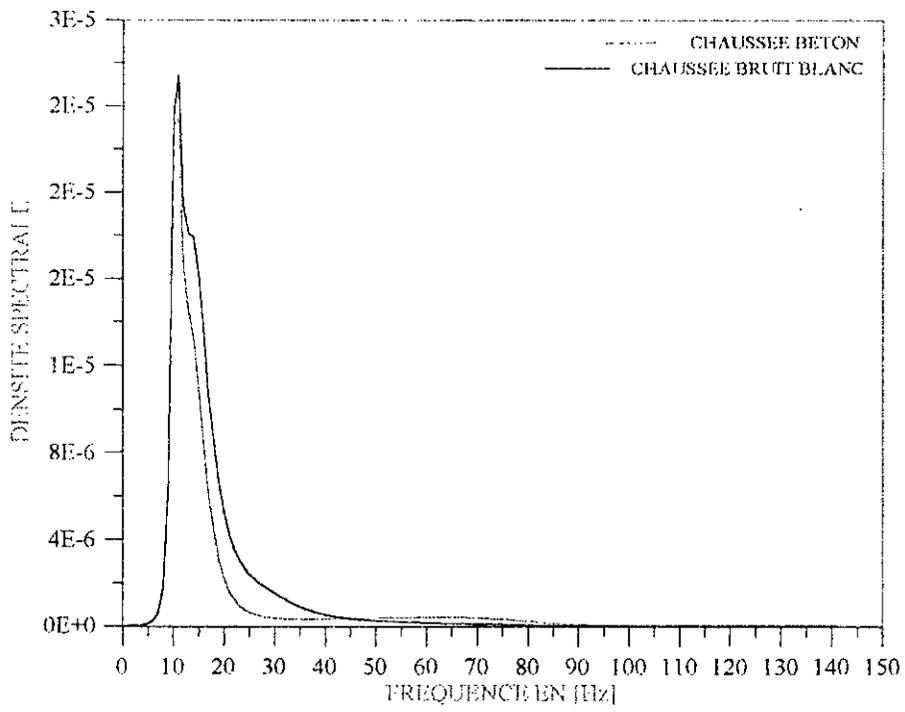
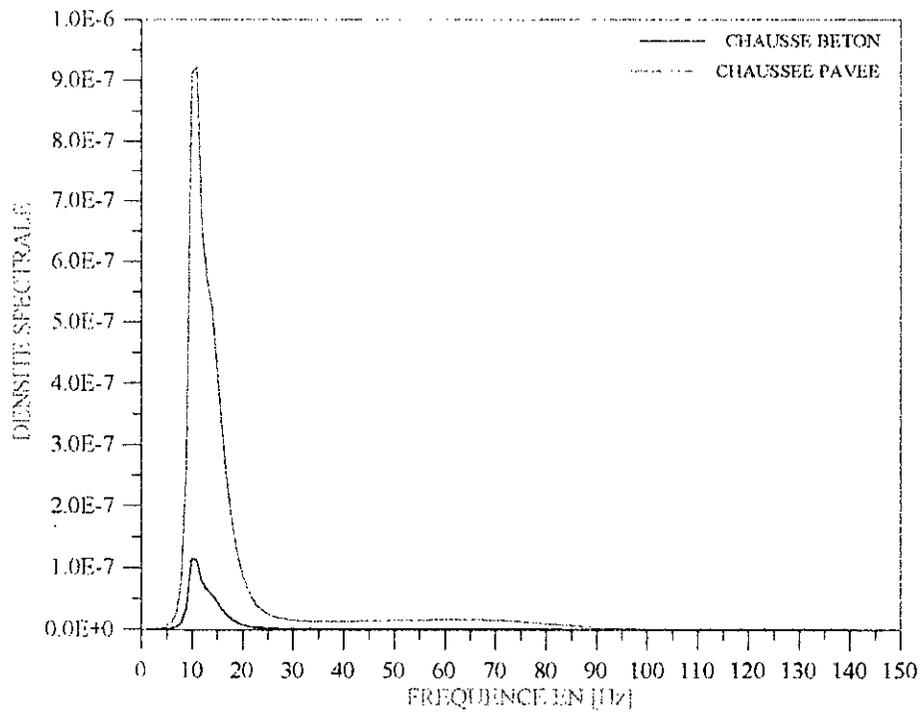


Fig. 6.35 Densité spectrale  $S_{\eta_i}(\omega)$  du système amorti

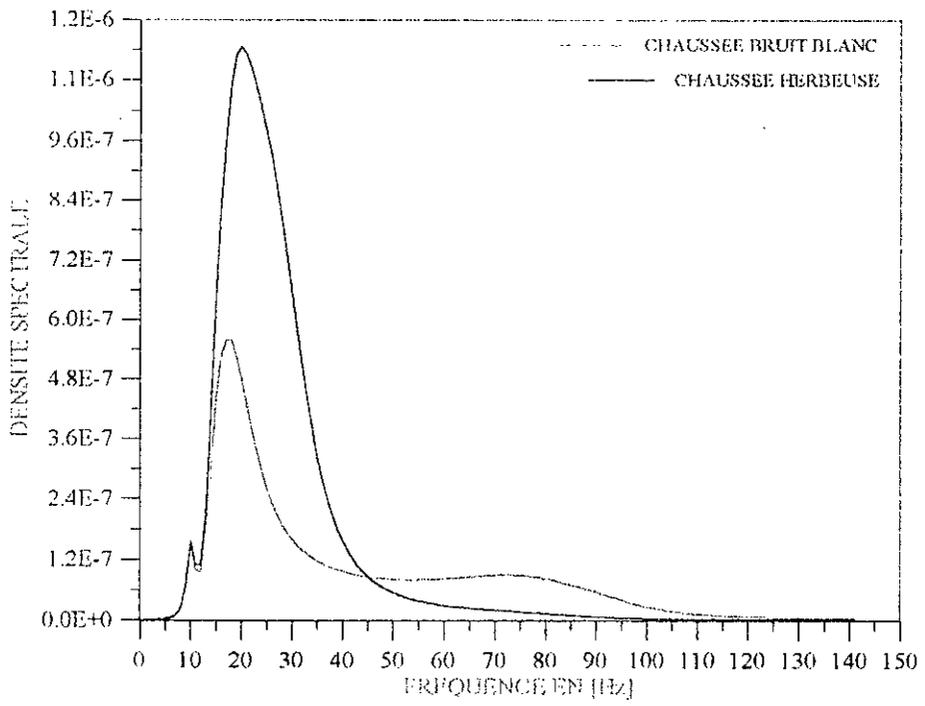
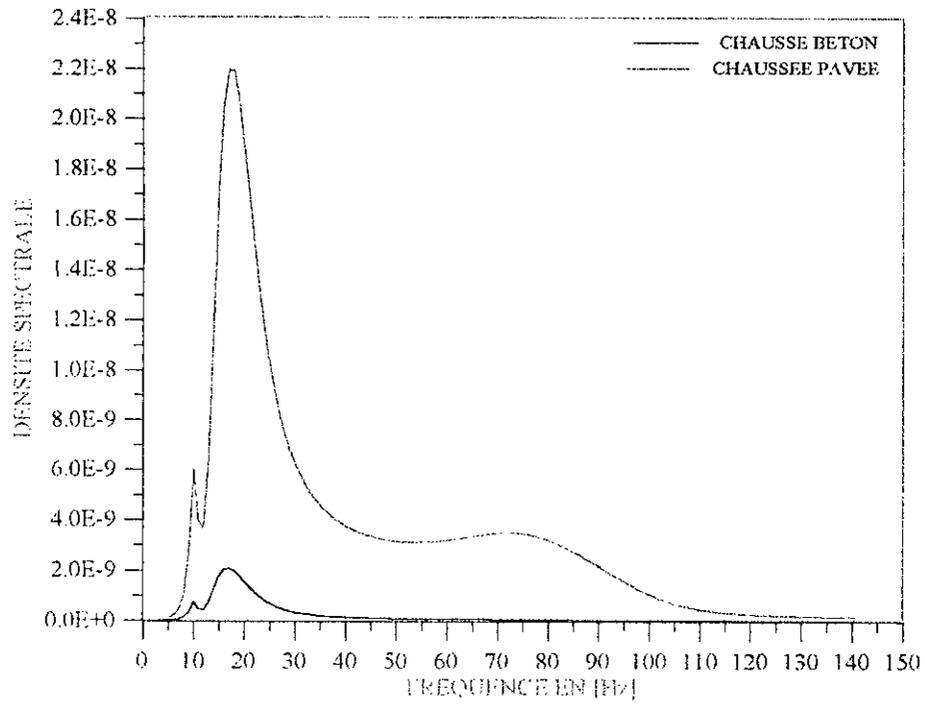


Fig. 6.36 Densité spectrale  $S_{\phi_b}(\omega)$  du système amorti

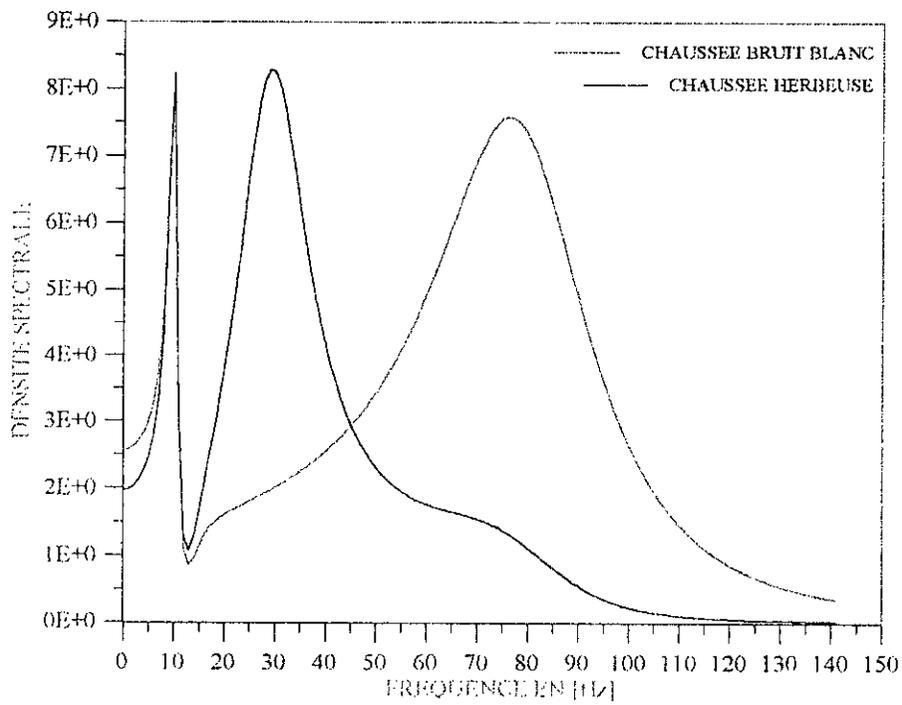
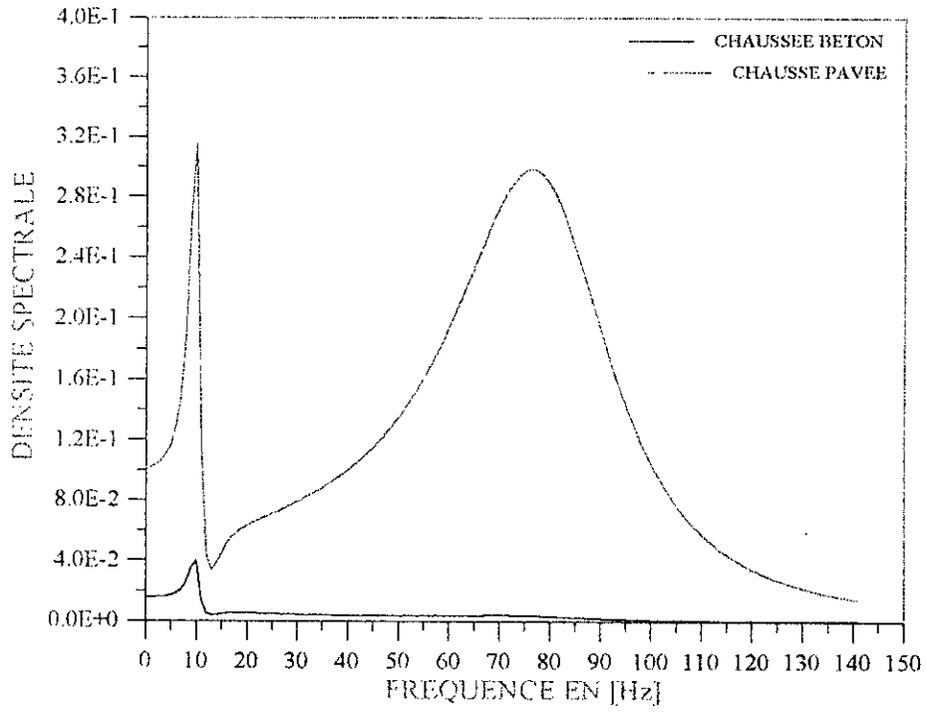


Fig. 6.37 Densité spectrale  $S_{y_1}(\omega)$  du système amorti

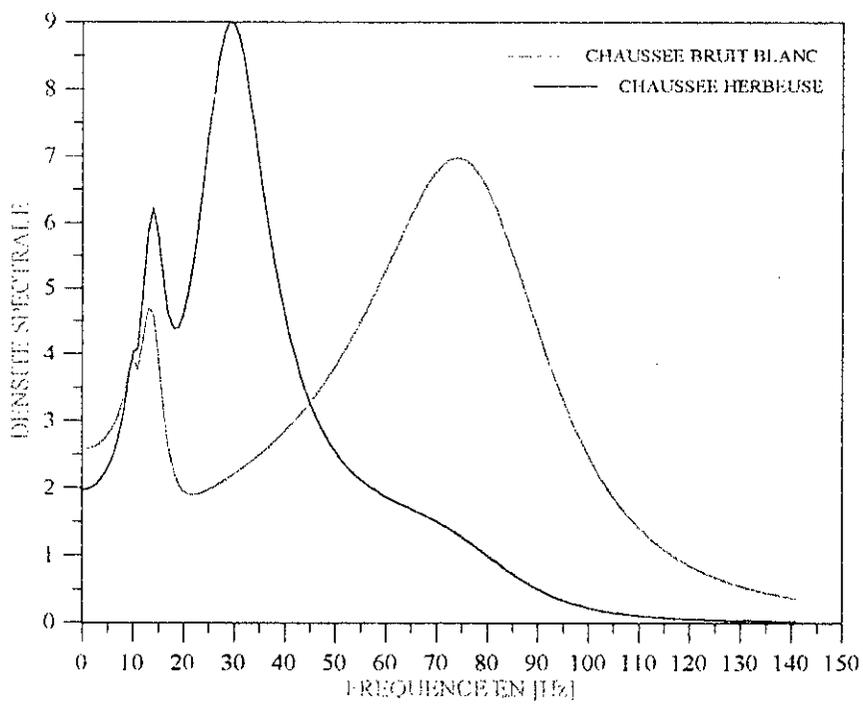
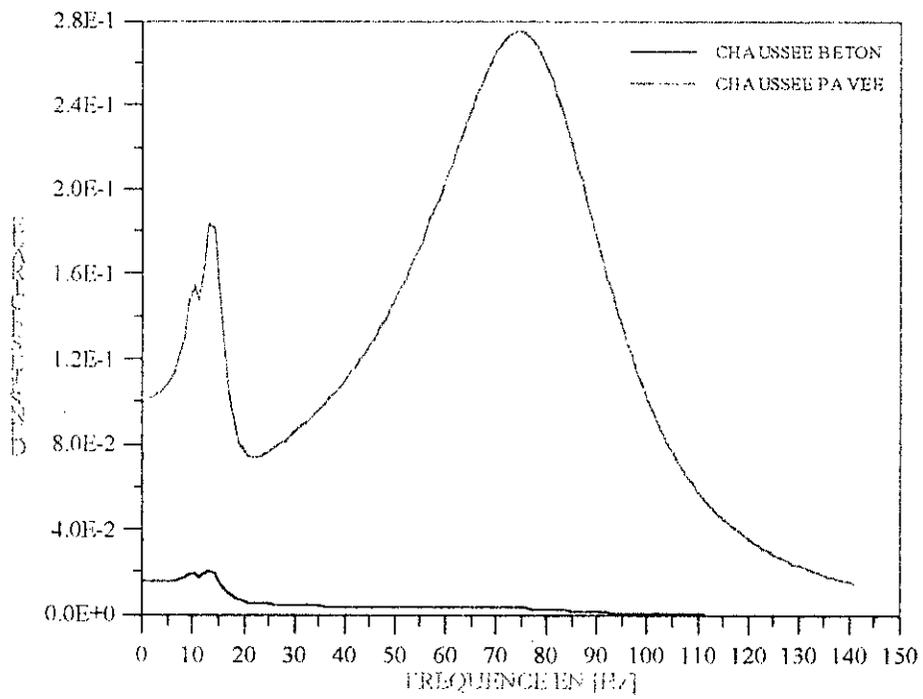


Fig. 6.38 Densité spectrale  $S_{y_2}(\omega)$  du système amorti

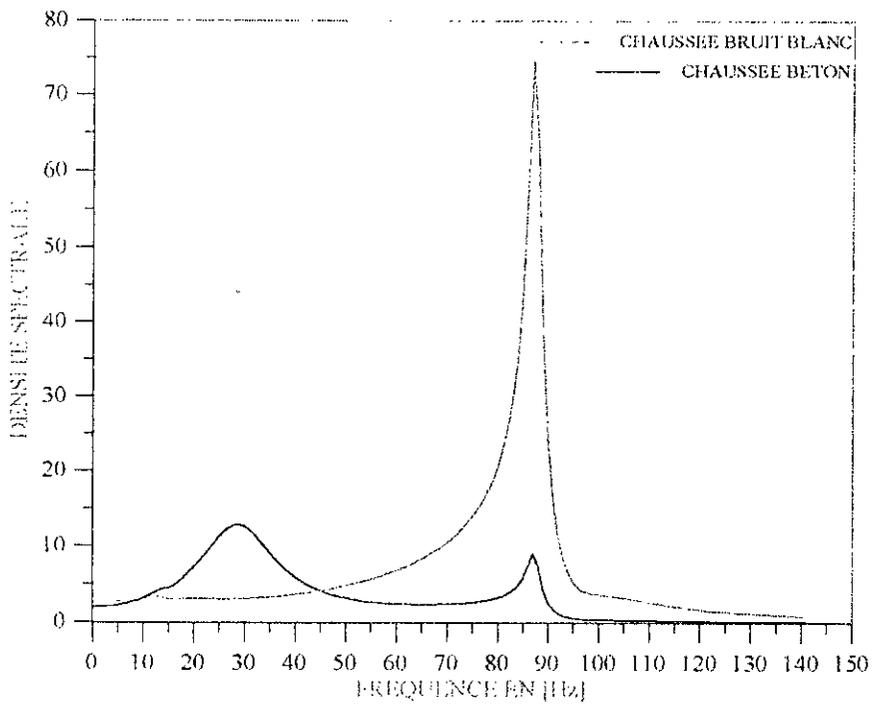
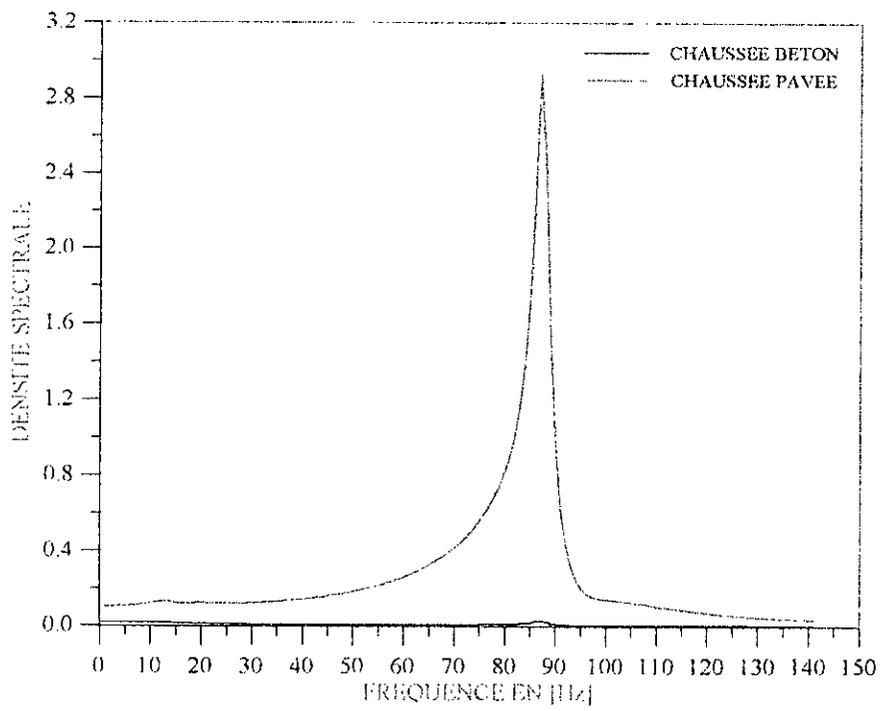


Fig. 6.39 Densité spectrale  $S_{y_3}(\omega)$  du système amorti

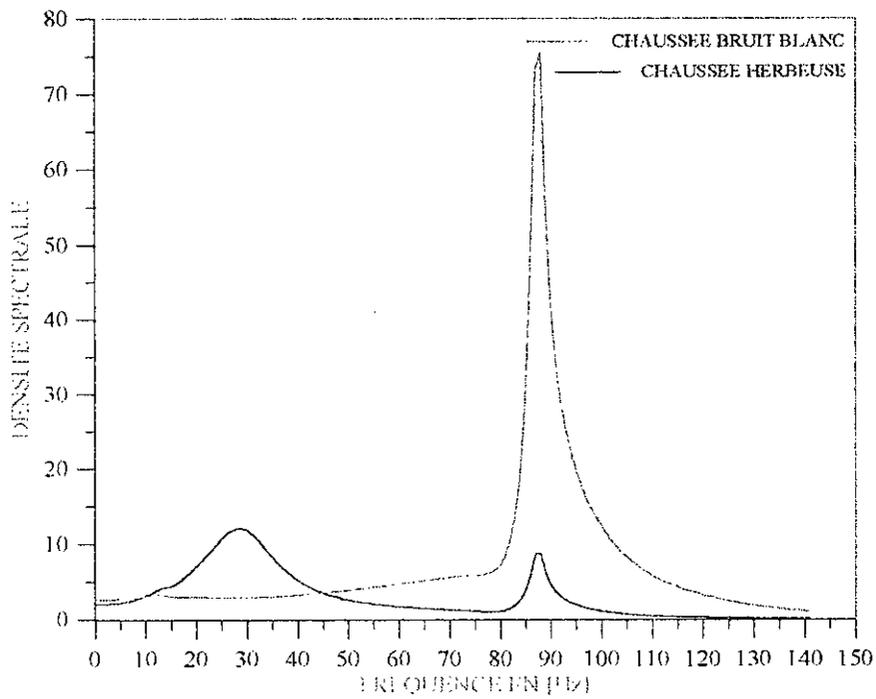
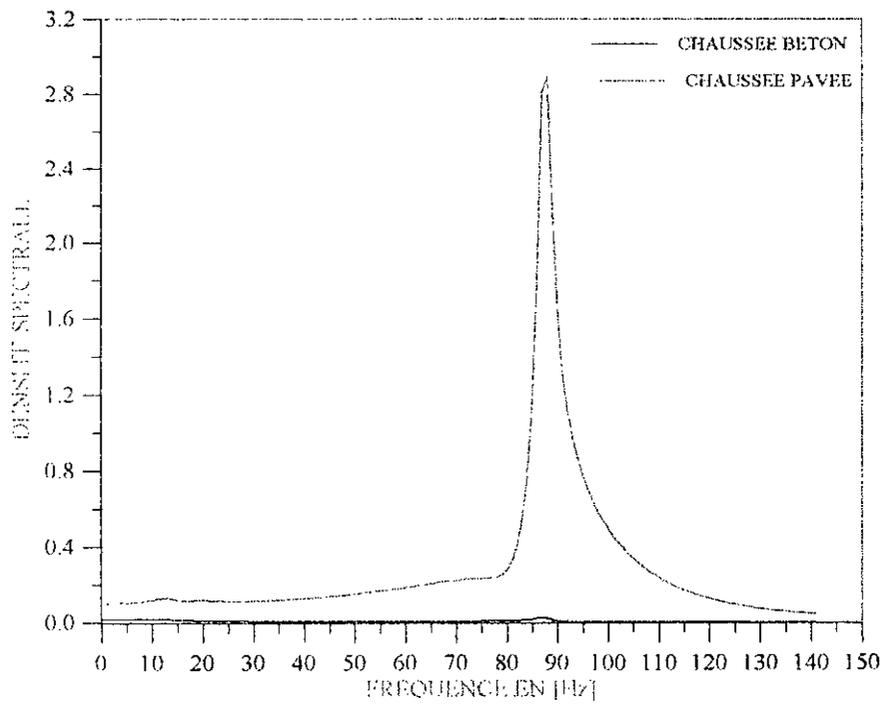


Fig. 6.40 Densité spectrale  $S_{y_d}(\omega)$  du système amorti

## 6.5 Résolution du système forcé ( cas d'un système découplé).

Dans le cas particulier où les équations différentielles qui régissent le comportement dynamique du système étudié sont découplables, le raisonnement utilisé auparavant pour la détermination des caractéristiques probabilistiques des composantes  $x_i(t)$  ( $i = 1$  à 8) du vecteur solution  $\{x(t)\}$  peut être évité et ainsi une autre méthode basée sur le principe du découplage du système d'équations différentielles (6.35) peut être utilisée [4].

Exprimons (6.35), pour simplifier l'écriture, par l'équation suivante

$$[M]\{\ddot{X}\} + [C]\{\dot{X}\} = [K]\{X\} = \{F\} \quad (6.73)$$

$$\text{où } \{F\} = [C_r]\{\dot{h}\} + [K_r]\{h\}$$

Si le système (6.73) est découplable, sa solution peut s'écrire comme étant une combinaison linéaire des différents modes de ce système.

$$\{x(t)\} = [\Phi]\{p_r(t)\} \quad (6.74)$$

En remplaçant  $\{x(t)\}$  par son expression (6.74) et en pré-multipliant par  $[\Phi]^T$  le système (6.73), on peut définir les différentes équations qui permettent de définir les réponses modales du système (6.73).

$$\ddot{p}_r(t) + 2\xi_r \omega_r \dot{p}_r(t) + \omega_r^2 p_r(t) = \omega_r^2 f_r(t) \quad (6.75)$$

ou  $\xi_r$  est le coefficient d'amortissement associé au mode propre,  $\omega_r$  est la  $r$ ème valeur propre du système (6.73) et

$$f_r(t) = \sum_{i=1}^8 \frac{1}{\omega_r^2} \phi_i^{(r)} f_i(t) = \sum_{i=1}^8 \frac{1}{\omega_r^2} \{\phi^{(r)}\}^T \{f(t)\} \quad (6.76)$$

est la force généralisée, en qui  $\{\phi^{(r)}\}$  représente le  $r$ ème vecteur propre du système non amorti.

Notre premier objectif est de déterminer la fonction de corrélation entre deux réponses du système. Pour cela introduisons les transformés de Fourier de  $p_r(t)$  et  $f_r(t)$  respectivement par [4].

$$P_r(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} p_r(t) e^{-i\omega t} dt$$

$$F_r(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_r(t) e^{-i\omega t} dt = \sum_{i=1}^8 \frac{1}{\omega_r^2} \phi_i^{(r)} \int_{-\infty}^{+\infty} f_i(t) e^{-i\omega t} dt \quad (6.77)$$

En transformant les deux parties de (6.75), on obtient:

$$P_r(\omega)(-\omega^2 + 2i\xi_r\omega_r + \omega_r^2) = \omega_r^2 F_r(\omega) \quad (6.78)$$

soit

$$P_r(\omega) = H_r(\omega)F_r(\omega) \quad (6.79)$$

où

$$H_r(\omega) = \frac{1}{1 - \left(\frac{\omega}{\omega_r}\right)^2 + 2i\xi_r\left(\frac{\omega}{\omega_r}\right)} \quad (6.80)$$

(6.79) est la réponse complexe dans le domaine fréquentiel associé en mode propre  $r$ .

Suite à cela, on peut définir la fonction de corrélation entre les réponses  $X_i(t)$  et  $X_j(t)$ , mais, les deux éléments  $X_i(t)$  et  $X_j(t)$  du vecteur réponse  $\{X(t)\}$  peuvent être obtenus de l'équation (6.74).

$$\begin{aligned} X_i(t) &= \sum_{r=1}^8 \phi_i^{(r)} p_r(t) & i = 1 \text{ à } 8 \\ X_j(t) &= \sum_{s=1}^8 \phi_j^{(s)} p_s(t) & j = 1 \text{ à } 8 \end{aligned} \quad (6.81)$$

et la fonction de corrélation  $K_{X_i X_j}(\tau)$  entre les réponses  $X_i(t)$  et  $X_j(t+\tau)$  est égale à [4]:

$$\begin{aligned} K_{X_i X_j}(\tau) &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} X_i(t) X_j(t+\tau) dt \\ &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \sum_{r=1}^8 \sum_{s=1}^8 \phi_i^{(r)} \phi_j^{(s)} p_r(t) p_s(t+\tau) dt \\ &= \sum_{r=1}^8 \sum_{s=1}^8 \phi_i^{(r)} \phi_j^{(s)} K_{p_r p_s}(\tau) \end{aligned} \quad (6.82)$$

où

$$K_{p_r p_s}(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} p_r(t) p_s(t+\tau) dt \quad (6.83)$$

or d'après [4]

$$K_{p_i, p_s}(\tau) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} H_r(-\omega) H_s(\omega) S_{r_i, r_s}(\omega) e^{i\omega\tau} d\omega \quad (6.84)$$

et ainsi

$$K_{x_i, x_s}(\tau) = \frac{1}{2\pi} \sum_{r=1}^8 \sum_{s=1}^8 \phi_i^{(r)} \phi_j^{(s)} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} H_r(-\omega) H_s(\omega) S_{r_i, r_s}(\omega) e^{i\omega\tau} d\omega \quad (6.85)$$

En général, on ne donne pas la densité spectrale croisée entre les excitations généralisées  $f_r(t)$  et  $f_s(t)$ , mais les densités spectrales croisées  $S_{F_i F_j}(\omega)$  entre  $F_i(t)$  et  $F_j(t)$ . Cependant dans notre cas particulier, il existe une relation qui lie ces deux densités croisées, définie par [4]:

$$S_{r_i, r_s}(\omega) = \sum_{i=1}^8 \sum_{j=1}^8 \frac{1}{\omega_r^2} \frac{1}{\omega_s^2} \phi_i^{(r)} \phi_j^{(s)} S_{F_i F_j}(\omega) \quad i=1 \text{ à } 8 \text{ et } j=1 \text{ à } 8 \quad (6.86)$$

soit sous forme matricielle [4].

$$[S_r(\omega)] = [\omega_r^2]^{-1} [\phi] [S_F(\omega)] [\phi]^T [\omega_r^2]^{-1} \quad (6.87)$$

et

$$[K_x(\tau)] = \frac{1}{2\pi} [\phi] \int_{-\infty}^{+\infty} [H(-\omega)] [S_r(\omega)] [H(\omega)] e^{i\omega\tau} d\omega [\phi]^T \quad (6.88)$$

et

$$[S_x(\omega)] = [\phi] [H(-\omega)] [\omega_r^2]^{-1} [\phi] [S_F(\omega)] [\phi]^T [\omega_r^2]^{-1} [H(\omega)] [\phi]^T \quad (6.89)$$

La matrice regroupant les variances des réponses du système ainsi que les fonctions de corrélations à  $\tau = 0$  est égale à [4]:

$$[K_x(0)] = \frac{1}{2\pi} [\phi] \int_{-\infty}^{+\infty} [H(-\omega)] [S_r(\omega)] [H(\omega)] d\omega [\phi]^T \quad (6.90)$$

Le facteur confort du système étudié est donné par la valeur moyenne des variances des accélérations [16]. De ce fait, augmenter le confort de l'engin revient à limiter l'accélération du châssis. Dans le cas de notre modèle, ce terme prendrait la forme suivante.

$$I1 = (\sigma Z1 + \sigma Z2 + \sigma Z3) / 3 \quad (6.91)$$

le facteur de la course de fonctionnement de la suspension est la moyenne des variances des déplacements relatifs entre le châssis et les axes des roues de l'engin et sa remorque. C'est le terme qui limite la course de fonctionnement de la suspension [16].

$$I_2 = \sigma(Z_1 - Y_1) + \sigma(Z_2 - Y_2) + \sigma(Z_3 - Y_3) / 3 \quad (6.92)$$

Le facteur de déflexion des pneus est la moyenne des déplacements relatifs entre les axes des roues et la surface de la route. Il est préférable de garder ce terme petit pour éviter les pertes de contact entre les roues et la surface de la route [16].

$$I_3 = \sigma_{(Y_1-h_1)} + \sigma_{(Y_2-h_2)} + \sigma_{(Y_3-h_3)} + \sigma_{(Y_4-h_4)} / 4 \quad (6.93)$$

L'indice de performance est la somme des différents termes pondérés.

$$I = I_1 + \rho_1 I_2 + \rho_2 I_3 \quad (6.94)$$

où 1 et 2 sont des coefficients de pondération. Ce sont des constantes sur lesquelles on peut agir pour favoriser la qualité que l'on juge nécessaire [16]. Les ordres de grandeur des coefficients sont choisis de telle sorte que tous les termes de l'indice de performance aient un même ordre de grandeur si tous ces termes ont une même importance.

## 6.6. CONCLUSION

Dans cette étude, on analyse le comportement dynamique du modèle mathématique (Fig:5.1) de l'engin TB260 et sa remorque soumis à l'effet des irrégularités de quatre différents type de route . On détermine toutes les caractéristiques probabilistiques du mouvements des différents compartiments de l'engin ainsi que sa remorque.

Grâce à ces dernières on conclut qu'on peut définir ou du moins estimer le système de suspension le plus optimal qui permet de respecter toutes les normes concernant le confort, la tenue de route et l'espace de fonctionnement de la suspension.

Par ce travail, on espère apporter un plus fondements de la vibration aléatoire d'un engin de transport et donner au lecteur une vision globale du sujet. Un domaine aussi important, où les techniques enregistrent des développements permanent, demande une analyse et un intérêt plus grands que ceux autorisés par un travail de cette envergure.

## CONCLUSION GENERALE.

L'analyse du comportement dynamique d'un véhicule routier est un tâche qui s'avère délicate. La prise en considération d'un nombre important de facteurs dont le moteur, l'état de la route, la suspension,... conduit à des résultats analytiques difficiles à résoudre et à exploiter.

Notre travail a été consacré à la modélisation mathématique de la suspension du véhicule, à la détermination des efforts engendrés par différents types de moteur, à la modélisation de l'état de la route et à l'application de ces phénomènes à un type de véhicule routier disponible dans notre pays.

Une première approche de l'état de la route est faite sous une forme sinusoïdale. Les déplacements des différents compartiments du véhicule sont déterminés.

Une approche plus réaliste et plus rigoureuse est donnée quand l'état de la route est considéré comme étant aléatoire. On détermine toutes les caractéristiques probabilistiques du mouvement des différents compartiments de l'engin ainsi que de sa remorque.

Grâce à ces dernières on conclut qu'on peut définir ou du moins estimer le système de suspension le plus optimal qui permet de respecter toutes les normes concernant le confort, la tenue de route et l'espace de fonctionnement de la suspension.

Une application a été faite sur un modèle de véhicule routier TB260 et sa remorque soumis à l'effet des irrégularités de quatre différents types de route.

Les résultats obtenus peuvent trouver un large champ d'application dans le domaine industriel.

## REFERENCES

- [1] J- MOREL ; “ Vibrations des machines et diagnostic de leur état mécanique “ ; Edition EYROLLES, 61 Bd Saint Germain Paris 5° France , 1992.
- [2] B.GIRONNET et G.LOURADOUR , “ Vibrations et vitesses dangereuses de torsion des lignes d’arbres ”, Technique de l’ingénieur B5770-5772.
- [3] S.TIMOSHENKO , “ Théorie des vibrations ”, Edition Librairie, Polytechnique Ch Be-ranger; Paris Liège, 1954.
- [4] L - MEIROVITCH ; “ Elements of vibration analysis “ ; Edition Mc-Graw - HILL ; Inc USA 1975.
- [5] I- ANGUELOV et V.OVTCHAROV, “ Bruit et vibrations dans les moyens de transport ”, Technika, SOFIA 1985.
- [6] S.N-BUTCHVAROV, K-ARNAODOV, M-OUALI, “ Dynamique d’un monte charge en tenant compte de l’influence du moteur et de l’état et de l’état de la route dans le cas de la ré-sonnance”, Third conference, Differential equations and applications, Rouse, 1985.
- [7] A-PISSAREV, “ Vibrations mécaniques, SOFIA 1985.
- [8] R- BIGRET, “ Equilibre sur cite des machines tournantes en rigime transitoire ”, Pro-VIB’93, Institut de génie mécanique, Blida, ALGERIE 1993.
- [9] M- OUALI, “ Sur la dynamique de quelques système électromécaniques ”, “ Influence du moteur, méthodes asymptotiques,...”, Thèse d’état, SOFIA 1986.
- [10] L- BOURGAIN, R- DART, J- BOURGAIN, “ Machines tournantes et circuits pulsés ”, Edition DUNOD, Paris 1988.
- [11] N- BAKHALOV, “ Méthodes numériques ”, Edition MIR, Moscou 1976.
- [12] A - GOURDIN ; M - BOUMAH RAT ; “ Méthodes numériques appliquées. “ ; Edition OPU ; ALGER 1991.
- [13] D- FACI, “ Comportement dynamique d’un modèle de machines tournantes ”, Thèse Magister, Université de Blida , ALGERIE 1995.
- [14] M- KAZOULA ;” Suspension active pour véhicule “ ; Thèse de Magister, Université de Blida, Algérie, 1992.
- [15] N.N- BOGOLOUBOV, “ Méthodes asymptotiques dans la théorie des vibrations non-linéaire ”, Fismat, Moscou 1974.

[16] R - BOULAHIA ; “ Vibro-isolation optimal d'un véhicule soumis à des efforts du profil de la route “ ; Thèse de Magister , département de mécanique , Ecole Polytechnique, Alger 1995.

[17] M - MITSCHKE ; “ Les vibrations du moteur et son influence sur la voiture particulière.” 2<sup>ème</sup> section Technique « Mécanique de structure » S.I.A 88086 ; 1988.

[18] M-BOUKABACHE ; “ Etude des vibrations de torsion du groupe motopropulseur des camions S.N.V.I- SONACOME, “ Thèse de Magister ; Département de génie Mécanique ; Ecole Polytechnique ; Alger 1982.

[19] S.N- BUTCHVAROV, K- ARNAOUDOV, “ Vibrations forcées à une seule pulsation d'un véhicule simple ”, Mécanique technique, tome 13 livre 3, SOFIA 1978.

[20] W.T - THOMSON ; “ Theorie of vibration with applications “ ; édition PRENTICE - HILL , inc Engelwood cliffs ; New Jersey ; 1981.

[21] S.N-BUTCHVAROV, K-ARNAOUDOV, M-OUALI, “ Dynamique d'un monte charge en tenant compte de l'influence du moteur et de l'état et de l'état de la route ”, Third conference, Differential equations and applications, Rousse, 1985.

[22] V.A - SVETLICKIJ ; “ Vibration aléatoire des système mécanique “ ; traduit du russe par Albert COUBA pour l'édition française Technique et documentation ; 1980.

[23] V.L- WEISS, M.Z- KOLOVSKI, A.E- KOTCHOURA, “ Dynamique des machines “ agregats ”, Naouka, Moscou 1984.

[24] A - AÏAD ; “ Cours de méthode des éléments finis “ ; Institut de génie mécanique , Université de Blida ; 1995.

[25] livre de RDM

[26] M - DELANETTE , H - DUBOIS ; “ Mécanique théorique et appliquée “ ; Edition TECHNOR DELAGRAVE , 16 Rue Soufflot 15 France , 6<sup>ème</sup> édition 1973.

[27] R - BRUN ; “ Science et technique du moteur diesel industriel et de transport tome 2“ ; Edition TECHNIP , 27 Rue Ginoux 75737 Paris CEDEX 15 France , 4<sup>ème</sup> édition 1984.

[28] N - PISKOUNOVE ; “ Calcul différentiel et intégral “ ; Edition MIR MOSCOU ; 11<sup>ème</sup> édition 1980.

[29] C.A - BREBBIA , A.J - FERRANTE ; “ Computational methods for the solution of ingeneering problems. “ ; Edition PENTCH presse LONDON . Plymouth ; 1978.

[30] K.J - BATH , E.L WILSON . “ Numerical methods in finite element analysis “ ; Edition PRENTICE - HILL , Inc Engelewood cliffs , New jersey , 1976 .

[31] N - DJAFFAR ; “ Dynamique et synthèse des engins de transport “ ; Mémoire de fin d'étude d'ingénieur d'état ; université de Blida , institut de mécanique Algérie 1991.

[32] B- TECHECHANKOV, “ théorie des vibrations ”, SOFIA 1981.

[33] K.C-ARNAOUDOV ; “ Dynamique et stabilité d'un tracteur routier ( Motocar)”, Thèse de Doctorat d'Etat ; Sofia 1982

Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

Université de Blida  
Institut de Génie Mécanique

## Thèse de Magister

Option : Construction Mécanique

Présentée par : Mesloub Rabah

Ingénieur d'état en Génie Mécanique

Université de Blida

### DYNAMIQUE D'UN VEHICULE ROUTIER.

Influence du Moteur et du Profil de la route.

Théorie et Application

## ANNEXES

1997

# ANNEXE I

## Notions générales sur la thermodynamique

### 1.1- Définition

Un moteur thermique est une machine transformant l'énergie calorifique (chaleur) en énergie mécanique (travail).

La combustion du carburant dans un cylindre dégage beaucoup de chaleur et libère sous faible volume et forte pression une grande quantité de gaz qui repousse la paroi mobile (piston) du cylindre (course motrice). Le mouvement rectiligne du piston est transformé en mouvement circulaire continu par le système bielle - manivelle.

L'inertie des organes tournant est suffisante pour ramener le piston en sens inverse.

Pour un cycle fermé, avec seulement échange chaleur - travail, on a:

$$W = J.Q \tag{1.1}$$

Où: Q: est la chaleur dégagée qui dépend du pouvoir calorifique ( $P_c$ ) du carburant.

W: travail produit par la moteur.

J: une constante : 4.18

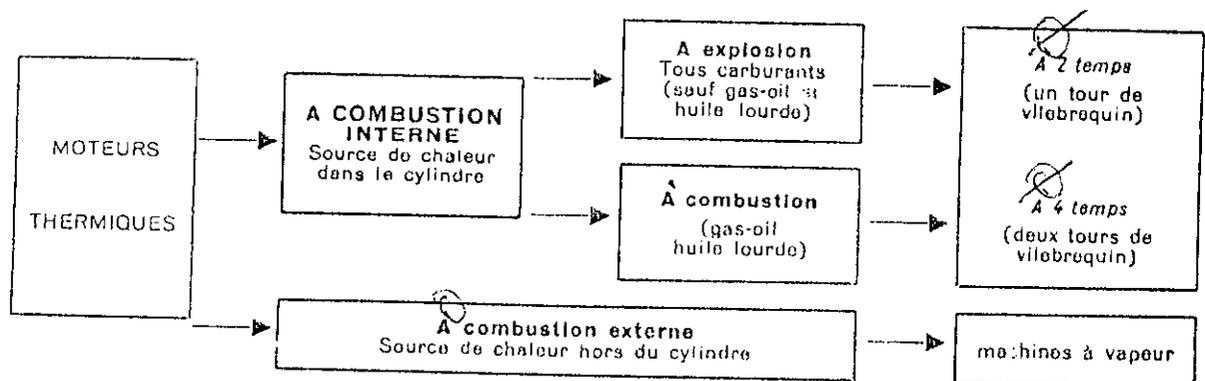


Fig.1.1 : Type de moteur thermique

### 1.2- Principe de Carnot

Une machine thermique ne peut produire du travail que si elle possède deux sources de chaleur à des températures différentes.

- La source chaude (à température absolue  $T_2$ ) où a lieu la combustion du carburant.

- La source froide à température  $T_1$  (gaz d'échappement, radiateur, milieu extérieur très proche du moteur).

### 1.2.1-Théorème de Carnot

Si les gaz en évolution prennent  $Q_2$  Kcal à la source chaude et cédant  $Q_1$  Kcal à la source froide , nous avons la relation suivante:

$$\frac{Q_1}{Q_2} = \frac{T_1}{T_2} \quad (1.2)$$

### 1.2.2- Rendement de Carnot

Le rendement thermique théorique maximum de Carnot (que l'on ne peut pas atteindre) est le rapport entre le travail fourni au moteur ( $W_2 = JQ_2$ ) et le travail fourni par le moteur ( $W_1 = J(Q_2-Q_1)$ ).

$$\tau_c = 1 - \frac{Q_1}{Q_2} = 1 - \frac{T_1}{T_2} \quad (1.3)$$

### 1.2.3- Energie interne (U) d'un mélange gazeux

L'énergie interne d'un mélange gazeux est l'énergie totale que possède le mélange en réserve et qu'il peut la fournir sous une seule ou plusieurs formes d'énergies calorifiques, chimiques, électriques...etc.

On ne peut pas connaître exactement l'énergie  $U$ , néanmoins, il est possible quelquefois de déterminer une variation de  $U$  lorsque le mélange gazeux évolue d'une certaine façon.

Si un gaz passe de la température absolue  $T_1$  et  $T_2$  nous avons:

$$U_2 - U_1 = JC(T_1-T_2)$$

où,  $C$ : chaleur spécifique moyenne entre  $T_1$  et  $T_2$ , elle est égale à la chaleur nécessaire pour élever de  $1^\circ\text{C}$  la température de l'unité de masse du corps.

## 1.3- Cycle thermodynamique d'un mélange gazeux

### 1.3.1- Définition

Un gaz est caractérisé par les éléments suivants:

- la pression statique  $P$ .
- le volume  $V$ .
- la température  $T$ .

On dit qu'un gaz est en état d'équilibre si ses caractéristiques (citées ci-dessus) restent constantes.

Par contre, on entend par le mot changement d'état toute évolution ou transformation de caractéristique du gaz (compression, détente, chauffage ou refroidissement). Une au moins des caractéristiques P, V, T prend une nouvelle valeur.

Un cycle est l'ensemble des évolutions dans lesquels le fluide ou le gaz reprend périodiquement les mêmes caractéristiques. on dit qu'un cycle est fermé si les caractéristiques finales et initiales sont identiques.

### 1.3.2- Evolution isothermique

C'est un changement d'état d'un gaz à température constante T.

Le travail mis en jeu entre 1 et 3 est égal à:

$$W_{13} = 2.3RT \log \frac{V_3}{V_1} \quad (1.5)$$

où:  $RT = p_1 v_1 = p_3 v_3$

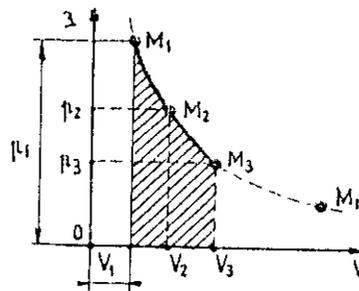


Fig. 1.2 Evolution isothermique d'un gaz.

### 1.3.3 Evolution isobare

C'est un changement d'état à pression constante. Exemple on fait chauffer un volume d'eau dans un cylindre de section circulaire et on pose sur son piston une masse de poids P.

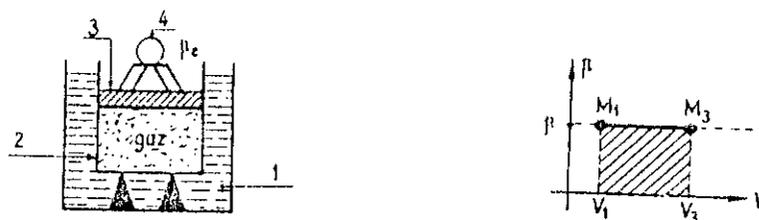


Fig. 1.3 Evolution isobare d'un gaz.

La représentation de l'évolution du volume du gaz en fonction de la pression sera donc une droite horizontale parallèle à l'axe des volumes et le travail mis en jeu sera égal à:

$$W_{13} = p(v_3 - v_1) \quad (1.6)$$

où

$$p = p_{\text{ext}} + \frac{P}{S}$$

$$v_1 = v_0(1 + \alpha T_1)$$

$$v_3 = v_0(1 + \alpha T_3)$$

avec:  $\alpha$ : un coefficient =  $\frac{1}{273}$ .

$v_0$ : volume du gaz à 0°C.

### 1.3.4- Evolution isochore

C'est le changement d'état du gaz à volume constant.

Si on fait chauffer un volume d'eau dans un cylindre fermé (de volume fixe) et en un point donné du cylindre on place un manomètre pour déterminer la pression au sein de cet eau, alors la représentation du diagramme PV dans ce cas sera une droite horizontale parallèle à l'axe des pressions.

Dans ce cas le travail mis en jeu est nul.

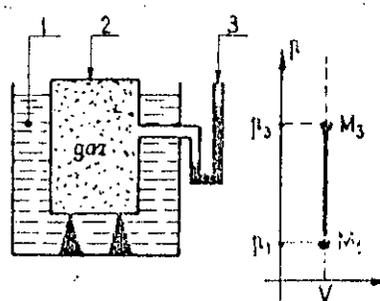


Fig 1.4 Evolution isochore d'un gaz.

### 1.3.5- Evolution réelle ou polytropique

C'est une évolution entre l'évolution adiabatique et l'isothermique.

$$p.v^k = \text{cte} \quad \text{où } k < \gamma \quad (1.7)$$

### 1.3.6 Evolution adiabatique

C'est un cas de protection calorifique parfaite.

on a:

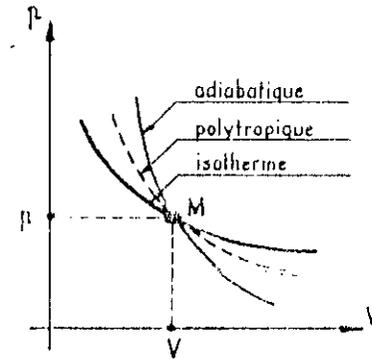


Fig. 1.5 Evolution adiabatique d'un gaz.

$$\frac{P_1}{P_3} = \left( \frac{v_3}{v_1} \right)^\gamma \quad \text{ou} \quad \frac{T_3}{T_1} = \left( \frac{v_1}{v_3} \right)^{\gamma-1} = \left( \frac{p_3}{p_1} \right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}$$

et

$$W_{13} = \frac{p_3 v_3 - p_1 v_1}{\gamma - 1} \quad (1.8)$$

où:

$\gamma = 1.4$  pour l'air

$\gamma = 1.3$  pour un mélange air - essence

### 1.4- Moteur à explosion

Un moteur à explosion est un moteur thermique transformant l'énergie calorifique (chaleur) provenant de la combustion d'un carburant (sauf le gazoil et les huiles lourdes) en énergie mécanique (travail).

La description générale de ce genre de moteur est comme suite:

Par définition on entend par:

- Alésage: le diamètre intérieur du cylindre  $d$  en mm.
- Point mort haut (P.M.H.): la position du piston en fin de course retour (ou de compression).
- Point mort bas (P.M.B.): La position du piston en fin de course aller (ou de détente).
- Course du piston  $C$ : La distance parcouru par le piston entre le P.M.H. et le P.M.B.

en général:  $1 < \frac{C}{d} < 1.5$

- Cylindrée unitaire V: Le volume engendré par le piston entre le P.M.H. et le P.M.B.

$$V = \frac{\pi \cdot d^2 \cdot C}{4} \quad v \text{ en l ou en cm}^3$$

- Cylindrée totale:  $n \cdot V$ : le produit entre la cylindrée unitaire et le nombre de cylindres du moteur.

- Espace nuisible: v: Le volume compris entre le fond de la culasse et la face supérieure du piston ou P.M.H.

- Taux de compression (compression volumétrique)

$$\varphi = \frac{V + v}{v} \quad \text{en général } 6 < \varphi < 8$$

- Taux de remplissage, x: Le rapport entre le volume réel des gaz frais et le volume des gaz qu'il serait possible d'admettre.

$$0.6 < x < 0.9$$

- Régime N, la vitesse de rotation du vilebrequin (en tr/min)

Les différentes fonctions que doit assurer un tel moteur sont les suivantes:

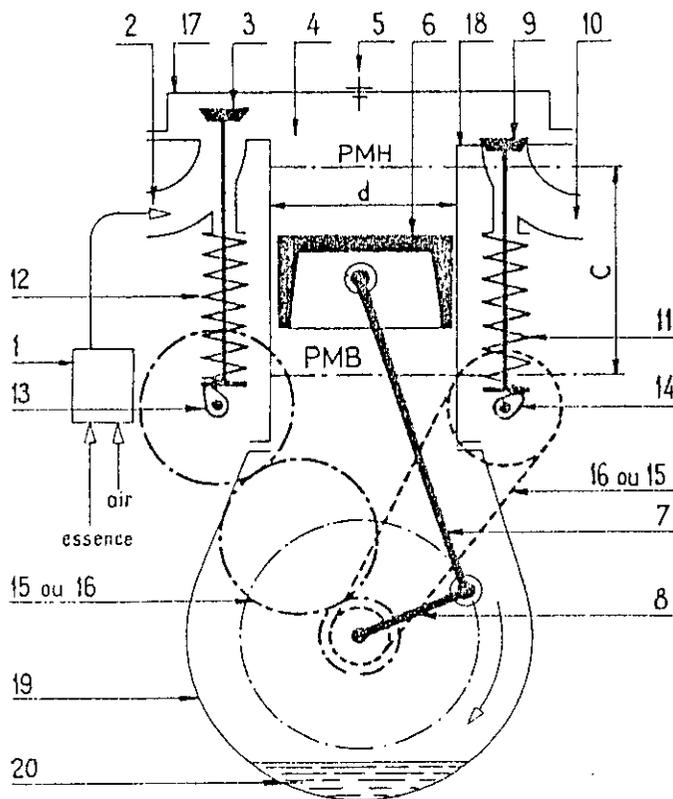
. Carburant: préparation du mélange air - essence.

. Allumage: Production opportune et précise de l'étincelle électrique qui enflamme le mélange.

. Distribution: Ouverture et fermeture exacte des soupapes d'admission et d'échappement.

. Graissage: réduit l'usure et l'échauffement, évite la dilatation excessive et le grippage.

. Refroidissement des organes portés à haute température par la combustion.



- (1) Carburateur : prépare le mélange combustible air-essence);
- (2) Tuyauterie d'admission du mélange dans le cylindre;
- (3) Soupape d'admission, obture ou découvre à temps voulu l'orifice d'admission;
- (4) Chambre de combustion ou chambre d'explosions (espace résiduel);
- (5) Bougie d'allumage électrique : enflamme le mélange;
- (6) Piston
- (7) Bielle } organes mobiles;
- (8) Vilebrequin } billes;
- (9) Soupape d'échappement : s'ouvre pour l'évacuation des gaz de combustion;
- (10) Tuyauterie d'échappement;
- (11) Poussoir et ressort de commande de la soupape (9);
- (12) Poussoir et ressort de (3);
- (13) Came de commande de (3);
- (14) Came de (9);
- (15) Engrenages entraînant les arbres à cames : peuvent être remplacés par une transmission par chaîne (16);
- (17) Culasse } organes fixes;
- (18) Cylindre } organes fixes;
- (19) Carter } organes fixes;
- (20) Réservoir d'huile de graissage.

Fig. 1.7: Description d'un moteur à explosion

### 1.4.1- Moteur à explosion à 4 temps

On entend par cycle, l'ensemble des opérations à la fin desquels les organes mobiles du moteur se retrouvent dans leurs positions initiales, prêts à exécuter le même mouvement.

Pour faire un temps moteur, il faut 4 temps à deux tours du vilebrequin.

1- Premier temps, Admission: elle est caractérisée par les étapes suivantes:

- Une évolution isobare,
- Premier ½ tour du vilebrequin,
- Soupape d'admission seul ouverte,
- Le piston s'éloigne du P.M.H. et aspire le mélange air- essence,
- Le volume des gaz croît de  $v$  à  $V + v$ ,
- La pression des gaz reste théoriquement constante = pression atmosphérique.

que.

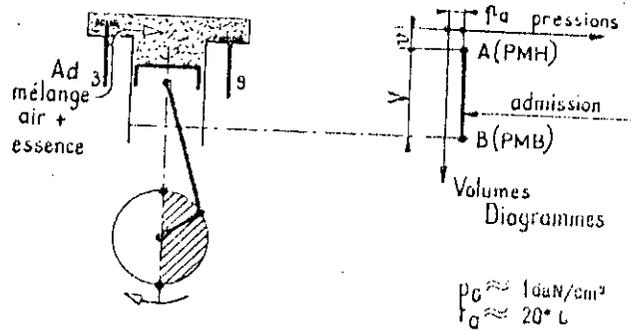
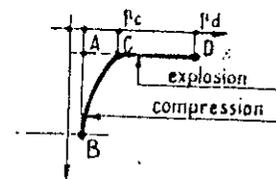
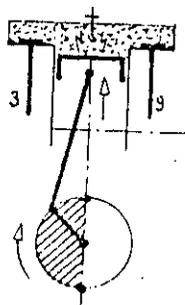


Fig. 1.7 Temps d'admission

2- Deuxième temps, Compression: Elle est adiabatique

- Deuxième tour du vilebrequin,
- Les deux soupapes sont fermées,
- Le piston revient vers le P.M.H. en comprimant le mélange,
- Le volume des gaz diminue de  $V + v$  à  $v$  et la pression augmente de  $P_a$  à  $P_e$ ,
- L'étincelle jaillit au P.M.H., la combustion est instantanée, il y a explosion (isochore),
- Le volume des gaz ne varie pas.



$$\begin{aligned}
 p_c &\approx 7 \text{ daN/cm}^2 \\
 p_d &\approx 30 \text{ daN/cm}^2 \\
 t_c &\approx 300^\circ \text{C} \\
 t_d &\approx 2000^\circ \text{C}
 \end{aligned}$$

Fig. 1.8: Temps de compression

3- Troisième temps, Temps moteur: Il est caractérisé par une détente adiabatique des gaz

- C'est le troisième demi-tour du vilebrequin,
- Les soupapes sont fermées,
- Les gaz libérés par la combustion poussent le piston vers le P.M.B.,
- Le volume augmente de  $v$  à  $V + v$ ,
- La pression diminue de  $P_d$  à  $P_e$ .

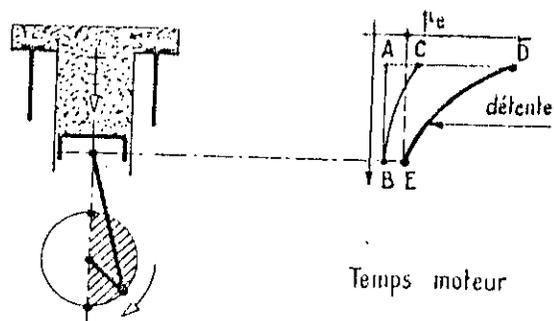


Fig 1.9: Temps moteur

4- Quatrième temps: Echappement: Il est isochore et isobare (des gaz).

- Quatrième demi-tour du vilebrequin,
- Soupape d'échappement ouverte,
- La pression descend de  $P_c$  à  $P_a$ ,
- Le piston revient au P.M.H. en expulsant les gaz brûlés.

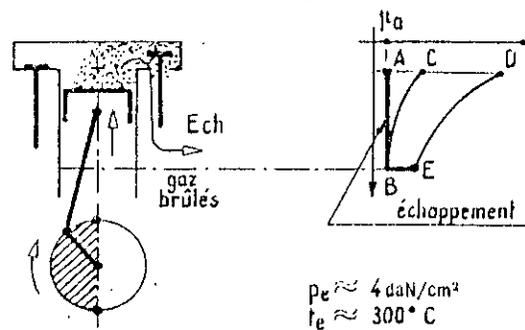


Fig. 1.10 : Temps d'échappement

La combustion de ces différents temps du cycle va nous donner le cycle global suivant:

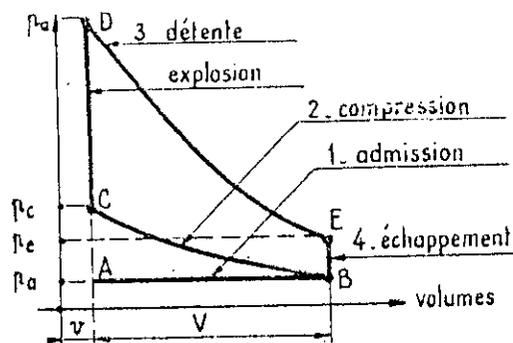


Fig. 1.11 Cycle thermodynamique global

#### 1.4.1.2- Cycle réel d'un moteur à explosion à 4 temps

Dans la réalité des choses, un moteur à explosion à 4 temps ne peut suivre d'une manière idéale les différentes phases du cycle d'évolution des échanges d'état des gaz entrant dans une chambre de combustion.

En effet, l'absence d'un réglage préalable des ouvertures et fermetures des soupapes d'admission et d'échappement va influencer nettement sur le cycle réel de l'évolution des différentes phases de changement d'état des gaz inclus dans la chambre de combustion.

Ce dernier sera nettement différent du cycle théorique voulu. Parmi les défauts que peut contenir ce genre de cycle, on peut citer; (voir figure 11).

- Remplissage insuffisant  $P_2 < P_a$
- Pression d'explosion trop faible  $P_3 < P_a$
- Echappement incomplet (contre pression)  $P_4 < P_a$
- Surface utile et puissance plus petite
- Rendement très mauvais
- Les causes essentielles provoquant ces différents défauts sont:
  - Ecoulement défectueux des gaz: lent et difficile (coudes, soupapes)
  - Inflammation non instantanée des gaz frais; le temps d'inflammation est inférieur à 0.001s
- Compression et détente non adiabatique

- Vitesse du piston assez grande

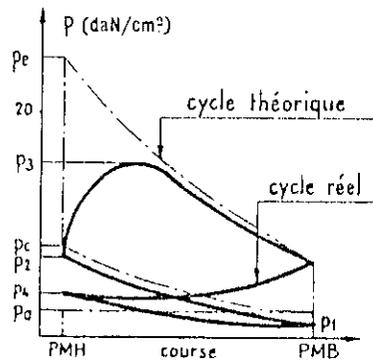


Fig. 1.12: Cycle réel sans réglage

Néanmoins, il existe plusieurs possibilités pour améliorer le cycle réel du diagramme PV et essayer de l'approcher le plus possible du cycle théorique. En réglant au mieux la distribution des gaz et l'allumage des étincelles. Parmi ces solutions, on peut citer:

- Avance à l'ouverture de l'admission (AOA): pour les moteurs rapides et un retard à l'ouverture de l'admission (ROA) pour les moteurs lents.
- Retard à la fermeture de l'admission (RFA)
- La RFA et AOA améliorent le remplissage des cylindres.
- Avance à l'allumage (AA); afin que le piston ne soit pas trop éloigné du PMH au début de la détente des gaz.

\* Avance initiale: Réglage fixe qui dépend surtout du taux de remplissage et de la qualité du carburant

\* Avance variable: Réglage variable suivant le régime N du moteur à partir de l'avance initiale.

- Avance à l'ouverture de l'échappement (AOE): Diminution de la contre pression (travail résistant plus faible).

- Retard à la fermeture de l'échappement (RFE); évacuation plus complète des gaz brûlés.

L'ensemble des différents réglages cités ci-dessus sont explicités sur le diagramme fig. 3.14.

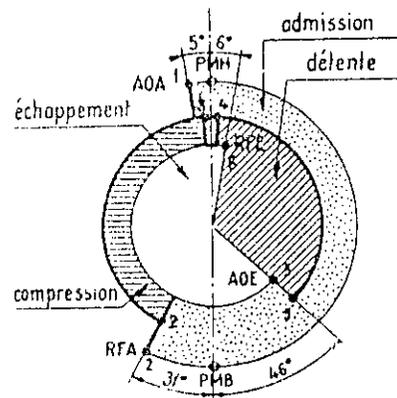
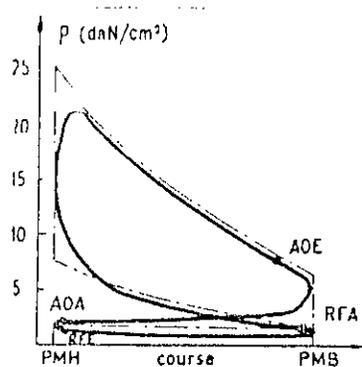
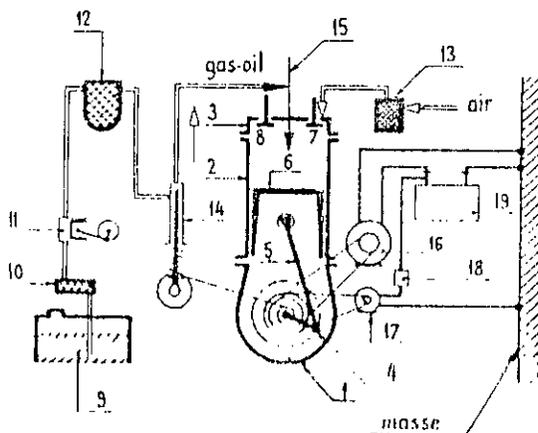


Fig. 1.13: Réglage des moteurs à explosion à 4 temps

### 1.5- Moteur du type «DIESEL»

Les moteurs du type «DIESEL» où moteur à combustion sont des moteurs à 4 temps fonctionnant avec un combustible liquide pulvérisé (gasoil ou huile spéciale) qui s'enflamment spontanément dès qu'on le met en contact avec de l'air fortement comprimé à 500°C.



#### Principaux organes.

Fig. 5. Schéma de fonctionnement :  
 — Organes fixes : (1) Carter; (2) Cylindre; (3) Culasse et sa chambre de combustion particulière.  
 — Organes mobiles : (4) Vilebrequin; (5) Bielle; (6) Piston.  
 — Organes de distribution : (7) soupape d'admission d'air; (8) soupapes d'échappement, arbres à cames.  
 — Organes d'alimentation : (9) Réservoir de gas-oil; (10) Préfiltre; (11) Pompe; (12) Filtre de gas-oil; (13) Filtre d'air.  
 — Organes d'injection : (14) Pompe d'injection; (15) injecteur.  
 — Autres organes : (16) Démarreur; (17) Dynamo; (18) Régulateur; (19) Batterie.

Fig. 1.14 Système de fonctionnement du moteur DIESEL

Ce type de moteur doit assurer un ensemble de fonctions essentielles telles que:

- Distribution: Règle le mouvement des soupapes d'admission (de l'air dans le cylindre) et l'échappement (des gaz de combustion).
- Alimentation du moteur en combustible (gasoil)
- Injection du combustible dans les cylindres (injection mécanique)

- Refroidissement
- Graissage
- Démarrage ou lancement avec un démarreur électrique (petit moteur électrique alimenté par une batterie de 24V).

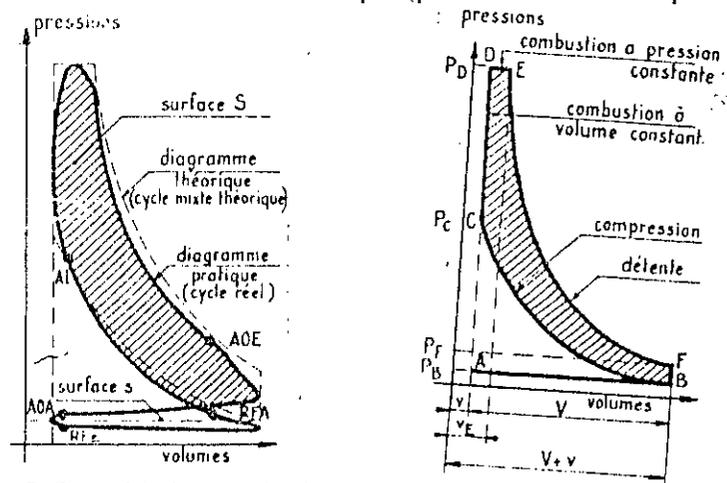


Fig. 1.15 Cycle théorique et réel d'un moteur DIESEL

### 1.6- Performance d'un moteur à combustion interne

Aux sous chapitres précédents on a pu définir et étudier le fonctionnement des différents types de moteurs à combustion interne, mais on ne peut pas savoir lequel d'entre eux est le plus performant, combien de combustible il peut consommer durant son fonctionnement, quelle puissance pourra t-il fournir, quel est le couple moteur enregistré au niveau du vilebrequin. Pour cela il existe un ensemble de paramètres définissant les performances d'un tel ou tel moteur, tel que:

- La puissance
- Le rendement
- La pression
- La consommation
- Couple moteur

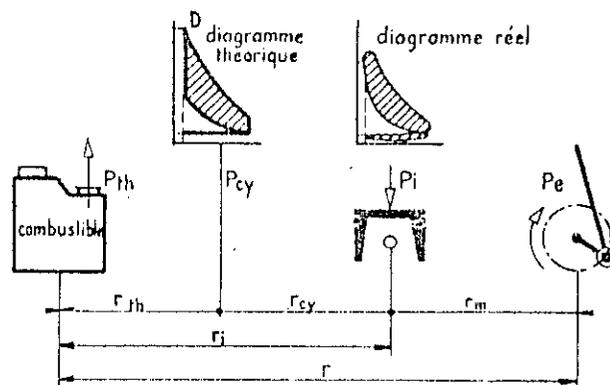


Fig. 1.16 Performances d'un moteur à combustion interne

## 1.6.1- La puissance

### 1- Puissance théorique $P_{th}$

C'est la puissance relative au combustible brûlé en t secondes par le moteur

$$P_{th} = \frac{M.C}{289t} \quad (1.9)$$

où:

M: La masse du combustible brûlée en t(s) =  $\rho v$

$\rho$ : Masse volumique du combustible  $g/cm^3$

v: volume du combustible  $cm^3$

C: pouvoir calorifique inférieur en calories grammes

### 2- Puissance du cycle $P_{cy}$

C'est la puissance relative au cycle théorique du moteur où la puissance que le moteur fournit s'il fonctionnait exactement suivant le cycle théorique prévu.

$$P_{cy} = n.W_{cy} \frac{N}{60.X} \quad (1.10)$$

$W_{cy}$ : travail correspondant en (J) à un cycle théorique

$W_{cy} = S.K$  où  $K = K_p.K_v$

S: surface évaluée ou mesurée du diagramme.

$K_v, K_p$ : Echelles respectives des axes de pression et de volume du diagramme théorique.

n: nombre de cylindre.

N: Régime du moteur.

X: Durée du cycle en tours du vilebrequin

$X=2$  pour un moteur à 4 temps

$X=1$  pour un moteur à 2 temps

### 3- Puissance indiquée $P_i$

C'est la puissance (en KW) développée sur le piston par les gaz de combustible.

$$P_i = \frac{n.W_i.N}{60X} \quad (1.11)$$

$W_i$ : travail correspondant à un cycle réel pour un cylindre ( en J)

$$W_i = K(S - s)$$

S - s: quantité voir Fig. 1.17

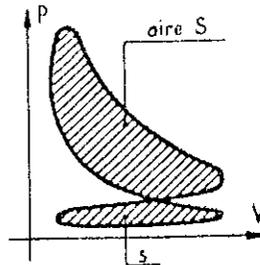


Fig. 1.17 Cycle réel d'un moteur à combustion interne à 4 temps

#### 4- Puissance effective du moteur $P_e$

C'est la puissance fournie par le moteur en bout du vilebrequin.

$$P_e = \frac{C \cdot N}{9543} \quad (1.12)$$

où:

C: est le couple moteur déterminé au niveau du vilebrequin (il est mesuré sur banc d'essai).

N: Régime du moteur.

**Remarque:** La différence entre la puissance indiquée,  $P_i$ , et la puissance effective,  $P_e$ , est égale à la puissance nécessaire pour vaincre les frottements et entraîner les organes auxiliaires: allumeurs, pompe, génératrices...etc.

#### 5- Puissance fiscale $P_f$

C'est une puissance conventionnelle qui sert à désigner administrativement un véhicule (carte grise, impôts, assurances)

$$P_f = k \cdot n \cdot \Delta^2 \cdot C \cdot K \quad (1.13)$$

C'est une formule empirique dont les éléments qui la composent sont:

n: le nombre de cylindre

k: une constante égale à:

$$k = 0.00020 \text{ pour } n = 1$$

$k = 0.00017$  pour  $n = 2$

$k = 0.00015$  pour  $n \geq 3$

$\Delta$ : l'alésage du cylindre en cm

C: la course du piston en cm

K: un coefficient suivant la masse M du châssis nu ( $M \leq 1250$  kg,  $K = 30$ ), ( $1250 < M < 2250$ ,  $K = 20$ ), ( $M \geq 2250$ ,  $K = 10$ ).

### 1.6.2- Les rendements

#### 1- Rendement thermique théorique: $r_{th}$

Il est égal au rapport entre la puissance du cycle et la puissance théorique.

$$r_{th} = \frac{P_{cy}}{P_{th}} \quad (1.14)$$

où:

$P_{cy}$ : puissance du cycle

$P_{th}$ : puissance théorique

#### 2- Rendement thermique indiqué

C'est le rapport entre la puissance indiquée et la puissance thermique théorique.

$$r_i = \frac{P_i}{P_{th}} \quad (1.15)$$

où:

$P_i$ : puissance indiquée

$P_{th}$ : puissance théorique

#### 3- Rendement du cycle $r_{cy}$

Il est égal au rapport entre la puissance indiquée et la puissance du cycle

$$r_{cy} = \frac{P_i}{P_{cy}} \quad (1.16)$$

où:

$P_i$ : puissance indiquée

$P_{cy}$ : puissance du cycle

#### **4- Rendement mécanique $r_m$**

C'est le rapport entre la puissance effective et la puissance indiquée.

$$r_m = \frac{P_e}{P_i} \quad (1.17)$$

où:

Pe: puissance effective

Pi: puissance indiquée

#### **5- Rendement de la transmission $r_t$**

C'est le rapport entre la puissance effective,  $P$ , mesurée sur le banc d'essai au niveau des roues motrices et la puissance effective.

$$r_t = \frac{P}{P_e} \quad (1.18)$$

où:

P: puissance effective sur les roues motrices

Pe: puissance effective

#### **6- Rendement global du moteur $r'$**

C'est le rapport entre la puissance effective,  $P_e$ , mesurée au niveau des roues motrices et la puissance théorique.

$$r' = \frac{P_e}{P_{th}} \quad (1.19)$$

où:

Pe: puissance effective

Pth: puissance théorique

#### **7- Rendement global du véhicule, $r$**

C'est le rapport entre la puissance effective  $P$  et la puissance théorique.

$$r = \frac{P}{P_{th}} \quad (1.20)$$

Puissance	Symbole	Expression	Rendement	Symbole	Expression
Théorique	$P_{th}$	$P_{th} = \frac{M.C}{289t}$	Théorique	$r_{th}$	$r_{th} = \frac{P_{cy}}{P_{th}}$
Cycle	$P_{cy}$	$P_{cy} = n.W_{cy} \frac{N}{60.X}$	Cycle	$r_{cy}$	$r_{cy} = \frac{P_i}{P_{cy}}$
Indiquée	$P_i$	$P_i = \frac{n.W_i.N}{60X}$	Indiqué	$r_i$	$r_i = \frac{P_i}{P_{th}}$
Effective	$P_e$	$P_e = \frac{C.N}{9543}$	Mécanique	$r_m$	$r_m = \frac{P_e}{P_i}$
Fiscale	$P_f$	$P_f =$ $k.n.\Delta 2.C.K$	Transmission	$r_t$	$r_t = \frac{P}{P_e}$
			Global du mo- teur	$r'$	$r' = \frac{P_e}{P_{th}}$
			Global du vé- hicule	$r$	$r = \frac{P}{P_{th}}$

Tableau T1 Coefficient de performance d'un moteur 4 temps.

### 1.6.3- Pressions

#### 1- Pression moyenne indiquée $p_i$ (Pascale)

C'est une pression constante qui, agissant sur le piston pendant la détente produisant un travail égal à  $W_i$  (pour un cylindre).

$$p_i = \frac{W_i}{V} \quad (1.21)$$

#### 2- Pression moyenne efficace $p_e$ (Pascale)

C'est une pression fictive constante qui agissant sur le piston produirait un travail égale à  $W_e$  (pour un cycle).

où:

$W_i, W_e$  en Joule

$V$ : est la cylindre unitaire en  $m^3$

#### 1.6.4- Consommation (kilométrique)

C'est la quantité  $x$  (l ou dm<sup>3</sup>) de combustible consommée au 100 km.

Elle n'admet pas une expression théorique, elle est obtenue grâce au diagramme expérimental déterminant la consommation en fonction du régime du moteur. Elle est spécifique pour chaque moteur.

La consommation totale sur un parcours de  $L$  km,  $X$ , est égale au produit de la consommation kilométrique  $x$ , le rapport entre 100 et la distance  $L$ .

$$X = x \cdot \frac{100}{L} \quad (1.22)$$

#### 1.6.5-Éléments de comparaison des moteurs entre eux

##### 1- Puissance spécifique PSP (ch/l)

$$P_{sp} = \frac{P_e}{nV} \quad (1.23)$$

où:

$P_e$ : puissance efficace en (ch)

$n$ : nombre de cylindres

$V$ : la cylindrée unitaire en (l)

##### 2- Puissance massique $P_m$ (ch/kg)

$$P_m = \frac{P_e}{M} \quad (1.24)$$

où:

$P_e$ : puissance efficace en (ch)

$M$ : masse du moteur en (kg)

##### 3- Masse spécifique $m$ (kg/ch)

$$m = \frac{M}{P_e} \quad (1.25)$$

##### 4- Couple spécifique $\gamma$ (m.N/l)

$$\gamma = \frac{C}{nV} \quad (1.26)$$

où:

$C$ : couple moteur m.N

### 5- Consommation spécifique $v$ (en g)

C'est la quantité du combustible consommés par cheval et par heure

$v \approx 200$  g/ch/h (DIESEL), 250 g/ch/h (moteur à essence)

### 6- Courbes caractéristiques

Ils représentent la variation de  $P_e$ ,  $C$  et  $n$  en fonction du régime  $N$  du moteur. On les détermine sur banc d'essai (voir fig. 3.18).

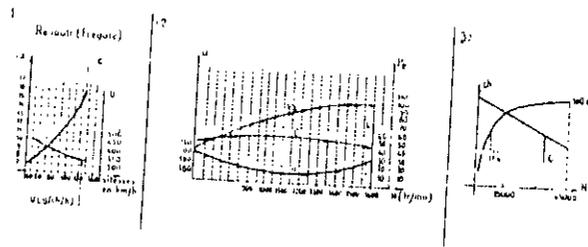


Fig. 1.18 Courbes caractéristiques d'un moteur à combustion interne

## ANNEXE2

### 2.1 SUBROUTINE eigg(A,B,H,V,Err,N,Nx)

CE PROGRAMME CONSISTE A LA DETERMINATION DES VALEURS PROPRES  
ET DES VECTEURS PROPRES D'UN SYSTEME DU TYPE

$$A*X=Lambda*B*X$$

```
C
C  N : ordre de A et B
C  Nx : dimension de A et B
C  Err : erreur de Jacobi (entre 1e-6 et 1e-8)
C
C  V : vecteur auxiliaire
C
    dimension A(Nx,Nx),B(Nx,Nx),H(Nx,Nx),V(Nx)
C
C  Décomposition de la matrice B en utilisant la méthode de CHOLISKI
C
    call decom(B,N,Nx)
C
C  Inversion de la matrice B
C
    call invch(B,H,N,Nx)
C
C  Multiplication transposée (H)*A*H
C
    call btabs(A,H,V,N,Nx)
C
C  Compilation des valeurs propres
C
    call jaco(A,B,Err,N,Nx)
C
C  Compilation des vecteurs propres
C
    call matmb(H,B,V,N,Nx)
C
    Return
    End
```

## 2.2 .SUBROUTINE jaco(A,V,Err,N,Nx)

CE PROGRAMME CONSISTE A CALCULER  
LES VALEURS PROPRES ET LES VECTEURS PROPRES  
D'UN SYSTEME D'EQUATIONS DIFFERENTIELLES DU DEUXIEME ORDRE  
PAR LA METHODE DE JACOBI

```
C
C  A : une matrice du système après résolution de ses termes diagonaux
C      donnant les fréquences propres du système
C
C  V: une matrice dont les vecteurs colonnes correspondent aux vecteurs
C      propres
C
C  Err : erreur de calcul désirée généralement comprise entre 10e-6 et 10e-8
C
C  N: ordre actuel de A
C
C  Nx: dimension de la matrice A

dimension A(Nx,Nx), V(Nx,Nx)
ITM=200
It=0

C
C  Entrée de la matrice unité dans V
C
      do 10 i=1,N
      do 10 j=1,N
      if(i-j) 3,1,3
3  V(i,j)=0
      goto 10
1  v(i,j)=1
10 continue

C
C  Trouver le plus grand coefficient diagonal
C
13 T=0
   M=N-1
   do 20 i=1,M
      J1=i+1
      do 20 j=j1,n
      if(abs(A(i,j))-T)20,20,2
2  T=abs(a(i,j))
      ir=i
      ic=j
20 continue
   if(it) 5,4,5

4  T1=T*err
5  if(T-T1) 999,999,6
C
C  Détermination de Tan(Ta), sin(s) et cosinc(c) de l'angle
C  de rotation
```

```

6  ps=a(ir,ir)-a(ic,ic)
   ta=(-ps+sqrt(ps*ps+4*t*t))/(2*a(ir,ic))
   c=1./sqrt(1+ta*ta)
   s=c*ta

C
C  Multiplier la matrice rotation V et stocker dans V
C
   do 50 i=1,n
   p=v(i,ir)
   v(i,ir)=c*p+s*v(i,ic)
50  v(i,ic)=c*v(i,ic)-s*p
   i=i+1
100 if(i-ir) 7,200,7

C
C  Appel de la transformation orthogonale de A et stocker dans A
C

7  p=a(i,ir)
   a(i,ir)=c*p+s*a(i,ic)
   a(i,ic)=c*a(i,ic)-s*p
   i=i+1
   goto 100
200 i=ir+1
300 if(i-ic) 8,400,8
8  p=a(ir,i)
   a(ir,i)=c*p+s*a(i,ic)
   a(i,ic)=c*a(i,ic)-s*p
   i=i+1
   goto 300
400 i=ic+1
500 if(i-n) 9,9,600
9  p=a(ir,i)
   a(ir,i)=c*p+s*a(ic,i)
   a(ic,i)=c*a(ic,i)-s*p
   i=i+1
   goto 500
600 p=a(ir,ir)
   a(ir,ir)=c*c*p+2*c*s*a(ir,ic)+s*s*a(ic,ic)
   a(ic,ic)=c*c*a(ic,ic)+s*s*p-2*c*s*a(ir,ic)
   a(ir,ic)=0
   it=it+1
   if(it-itm) 13,13,999

999 Return
   End

```

### 2.3. SUBROUTINE decom(A,N,Nx)

CE PROGRAMME CONSISTE A DECOMPOSER UNE MATRICE COMPLETEMENT DEFINIE  
POSITIVIE EN DEUX MATRICES TRIANGULAIRES SUPERIEURE ET INFERIEURE

```
C
C A : une matrice originalemnt contenant la matrice à décomposer.
C Après compilation elle contiendra la matrice triangulaire supérieure
C
C N : ordre de la matrice A
C
C Nx: dimension de la matrice A
C
  dimension A(Nx,Nx)
  if(a(1,1))1,1,3
  1 write(*,2)
  2 format('radicand nul ou négatif')
  goto 200
  3 a(1,1)=sqrt(a(1,1))
  do 10 j=2,n
 10 a(1,j)=a(1,j)/a(1,1)
  do 40 i=2,n
  i1=i-1
  d=a(i,i)
  do 20 L=1,i1
 20 d=d-a(L,i)*a(L,i)
  if(a(i,i))1,1,21
 21 a(i,i)=sqrt(d)
  if(n-1)45,45,47
 47 i2=i+1
  do 40 j=i2,n
  d=a(i,j)
  do 30 l=1,i1
 30 d=d-a(l,i)*a(l,j)
 40 a(i,j)=d/a(i,i)
 45 do 50 i=2,n
  i1=i-1
  do 50 j=1,i1
 50 a(i,j)=0
 200 Return
  End
```

## 2.4. SUBROUTINE inver(A,D,N,Nx,Mx)

CE PROGRAMME CONSISTE A DETERMINER L'INVERSE D'UNE MATRICE A  
PAR LA METHODE D'ELIMINATION DE GAUSS

C A : Matrice rectangulaire de dimension  $N*2*N$   
C Dans les  $N*N$  premiers termes est stockée la matrice à inverser. Les  
C lignes de 1 à N et les colonnes de N+1 à  $2*N$  contiennent la matrice  
C identité. Après compilation la matrice inverse est placée dans les  $N*N$   
C premiers termes de la matrice A. La matrice originale A est détruite.  
C D : La valeur du déterminant de la matrice A.  
C N : Ordre actuel de A.  
C Nx: Dimension des lignes et colonnes de A, et dimension des lignes de B  
C Mx: Dimension de la colonne de B, et est égale à  $2*N$ .

```
      Dimension A(Nx,Mx)
      N1=N-1
      N2=2*N
C
C Entrée de la matrice identité pour augmenter la taille de A.
C
      do 2 i=1,n
      do 1 j=1,n
      j1=j+n
1  A(i,j1)=0
      j1=i+n
2  a(i,j1)=1
C
C Appel au procédé d'élimination.
C
      do 10 k=1,n1
      c=a(k,k)
      if(abs(c)-0.00001)3,3,5
3  write(*,*)k
4  write(*,*)'singularité de la matrice'
      D=0
      goto 300
5  K1=k+1
      do 6 j=k1,n2
6  a(k,j)=a(k,j)/c
      do 10 i=k1,n
      c=a(i,k)
      do 10 j=k1,n2
10 a(i,j)=a(i,j)-c*a(k,j)
      np1=n+1
C  if(abs(a(n,n))-0.000001)3,3,19
19 do 20 j=np1,n2
20 a(n,j)=a(n,j)/a(n,n)
C
C Appel au procédé restitution
C
      do 200 l=1,n1
      k=n-l
      k1=k+1
```

```

do 200 i=np1,n2
do 200 j=k1,n
200 a(k,i)=a(k,i)-a(k,j)*a(j,i)
C
C Positionnement de la matrice inverse dans les N*N premiers termes de A
C
do 250 i=1,n
do 250 j=1,n
j1=j+n
250 a(i,j)=a(i,j1)

C
C Calcul de la valeur du déterminant.
C
d=1
do 220 i=1,n
220 D=D*a(i,i)
300 Return
End

```

## 2.5. SUBROUTINE invch(S,A,N,NX)

CE PROGRAMME CONSISTE A INVERSER UNE MATRICE TRIANGULAIRE SUPERIEURE  
NOTEE S ET LA STOCKER DANS LA MATRICE A

```
C
C N : ordre actuel de S et A
C
C Nx : dimension de S et A
C
C dimension A(Nx,Nx),S(Nx,NX)

C
C Compiler les termes diagonales de A
C
C do 10 i=1,N
10 a(i,i)=1/s(i,i)

C
C Compilation de la kicme diagonale de A
C
C N1=N-1
do 100 K=1,N1
Nk = N-K
do 100 i=1,Nk
j = i+k
d=0
i1=i+1
ik=i+k
do 20 l=i1,ik
20 d=d+s(i,l)*a(l,j)
100 a(i,j)=-d/s(i,i)
Return
End
```

## 2.6. SUBROUTINE matma(C,b,A,N,M,L)

CE PROGRAMME CONSISTE A RESOUDRE L'OPERATION SUIVANTE  
 $C=A*B$

```
C
C   Le résultat sera stocké dans la matrice A.
C   N: nombre de lignes de A et C.
C   M: nombre de colonnes de A et B.
C   L: nombre de colonnes de B et C.
C
C   dimension C(20,20),A(20,20),B(20,20),V(20)
C   do 10 i=1,n
C   do 5 j=1,l
C   V(j)=0
C   do 5 k=1,m
5   V(j)=V(j)+A(i,k)*B(k,j)
C   do 10 j=1,l
10  c(i,j)=v(j)
C   Return
C   End
```

## 2.7.SUBROUTINE btabs(A,B,V,N,Nx)

CE PROGRAMME CONSISTE A DETERMINER LA MATRICE  
 $A = \text{transposée } (B)*A*B$

```
C   où A et B sont des matrices carrées
C
C   N: ordre actuel de A et B
C
C   Nx :dimension de A et B
C
C   V: vecteur auxiliaire
C
C   Dimension A(Nx,Nx),B(Nx,Nx),V(Nx)
C
C   compiler A*B et stocker dans A
C
C   do 10 i=1,n
C   do 5 j=1,n
C   v(j)=0
C   do 5 k=1,n
5   v(j)=v(j)+a(i,k)*b(k,j)
C   do 10 j=1,n
10  a(i,j)=v(j)
C
C   Compiler Transposée (B)*A et stocker dans A
C
C   do 20 j=1,n
C   do 15 i=1,n
C   v(i)=0
C   do 15 k=1,n
```

```

15 v(i)=v(i)+b(k,i)*a(k,j)
   do 20 i=1,n
20 a(i,j)=v(i)
   Return
   End

```

## 2.8. SUBROUTINE ATIMB(C,A,B,N,M,L)

CE PROGRAMME CONSISTE A RESOUDRE L'OPERATION SUIVANTE  
 $C=A*B$

```

C   Le résultat sera stocké dans la matrice C.
C   N: nombre de lignes de A et C.
C   M: nombre de colonnes de A et B.
C   L: nombre de colonnes de B et C.
C

```

```

dimension C(20,20),A(20,20),B(20,20)
do 10 i=1,n
do 10 j=1,l
C(i,j)=0
do 10 k=1,m
10 C(i,j)=C(i,j)+A(i,k)*B(k,j)
Return
End

```

## 2.9. SUBROUTINE matmb(A,B,V,N,Nx)

CE PROGRAMME CONSISTE A EFFECTUER L'OPERATION  
 $B=A*B$

```

C
C   N : ordre de A et V
C
C   Nx : dimension de A et B
C
C   V : vecteur auxiliaire
C

```

```

Dimension A(Nx,Nx),B(Nx,Nx),V(Nx)
do 20 j=1,n
do 16 i=1,n
V(i)=0
do 16 k=1,n
16 v(i)=v(i)+a(i,k)*b(k,j)
do 20 i=1,n
20 b(i,j)=v(i)
Return
End

```

## 2.10. SUBROURINE multv(C,A,B,N,M)

CE PROGRAMME PERMET L'OBTENTION DU PRODUIT  
D'UNE MATRICE PAR UN VECTEUR  
 $C=A*B$

C Où B est un vecteur  
C N: nombre de racine de A.  
C M: nombre de colonnes de A et de lignes de B.  
C

```
dimension C(10),A(10,10),B(10)
do 10 i=1,n
  c(i)=0
  do 10 j=1,m
10  c(i)=c(i)+a(i,j)*b(j)
  Return
End
```

## 2.11. PROGRAMME INTEG

CE PROGRAMME CONSISTE A DETERMINER LES VALEURS PROPRES ET LES VECTEURS PROPRES DU MODELE MATHEMATIQUE DE L'ENGIN TB260 AINSI ET DE SA REMORQUE QUE LES REPONSES DES MOUVEMENTS DE SES DIFFERENTS COMPARTIMENTS SOUS L'EFFET DU MOTEUR ET DES IRREGULARITES DE LA ROUTE (CAS DES IRREGULARITES SINUSOIDALES).

```
real MM(8,8),KK(8,8),H(8,8),V(8),Phi(8,8),W(8,8),F(250)
real Foo(8,250)
real M(8,8),K(8,8),C(8,8),MM1(8,8),KK1(8,8),VVo(8),Vo(8)
real Xt(8,250),T(250),Fo(8,250),Y(8),Xo(8),Xvo(8)
real vt(8,250),act(8,250),X0(8),X1(8),X2(8),aco(8),Xd(8,250)
real XX1(8),XX0(8),UUo(8),Uo(8),L(8,8),U(8,8),Phit(8,8)
real L3,L4,k1,k2,k3,jt,m1,m2,m3,m4,mt,mb,mc,Kc
real Kr1,Kr2,Kr3,Kr4,jb,Ji,Mi,KSIR
open(unit=2,file='donne8.dat',status='old')
open(unit=10,file='mov1.dat',status='new')
open(unit=20,file='mov2.dat',status='new')
open(unit=30,file='mov3.dat',status='new')
open(unit=40,file='mov4.dat',status='new')
open(unit=50,file='mov5.dat',status='new')
open(unit=60,file='mov6.dat',status='new')
open(unit=70,file='mov7.dat',status='new')
open(unit=80,file='mov8.dat',status='new')
write(*,*)'donner les raideurs K1,K2,K3,Kc'
read(2,*) K1,K2,K3,Kc
write(*,*)'donner les raideurs Kr1,Kr2,Kr3,Kr4'
read(2,*) Kr1,Kr2,Kr3,Kr4
write(*,*)'Donner les amortisseurs C1,C2,C3,Cec'
read(2,*) C1,C2,C3,Cec
write(*,*)'Donner les amortisseurs Cr1,Cr2,Cr3,Cr4'
read(2,*) Cr1,Cr2,Cr3,Cr4
write(*,*)'Donner les masses M1,M2,M3,M4'
read(2,*) M1,M2,M3,M4
write(*,*)'Donner les masses Mt,Jt,Mb,Jb,Mc'
read(2,*)Mt,jt,mb,jb,mc
write(*,*)'Donner les distances b1,b2,b3,b4,b5,b6,b7'
read(2,*) b1,b2,b3,b4,b5,b6,b7
write(*,*)'INTRODUCTION LES CONDITIONS AUX LIMITES'
do 500 i=1,8
write(*,*)'Donner le vecteur déplacement initial Uo('i,')='
read(*,*) Uo(i)
500 continue
do 510 i=1,8
write(*,*)'Donner le vecteur vitesse initiale Vo('i,')='
read(*,*) Vo(i)
510 continue

C-----
C   INTRODUCTION DE LA MATRICE MASSE
C-----

do 10 i=1,8
do 10 j=1,8
M(i,j)=0
```

10 continué

$$M(1,1)=M_c$$

$$M(2,2)=M_t+M_b$$

$$M(2,3)=M_b*b_3$$

$$M(2,4)=M_b*b_4$$

$$M(3,3)=J_t+M_b*b_3**2$$

$$M(3,2)=M_b*b_3$$

$$M(3,4)=M_b*b_3*b_4$$

$$M(4,4)=J_b+M_b*b_4**2$$

$$M(4,2)=M_b*b_4$$

$$M(4,3)=M_b*b_4*b_3$$

$$M(5,5)=M_1$$

$$M(6,6)=M_2$$

$$M(7,7)=M_3$$

$$M(8,8)=M_4$$

C-----  
C INTRODUCTION DE LA MATRICE RIGIDITE  
C-----

$$AA1=K_c*b_7+K_1*b_1$$

$$AA2=-K_2*b_2-K_3*b_3$$

$$AA=-(AA1+AA2)$$

$$K(1,1)=K_c$$

$$K(1,2)=-K_c$$

$$K(1,3)=K_c*b_7$$

$$K(1,4)=0$$

$$K(1,5)=0$$

$$K(1,6)=0$$

$$K(1,7)=0$$

$$K(1,8)=0$$

$$K(2,2)=(K_c+K_1+K_2+K_3)$$

$$K(2,3)=AA$$

$$K(2,4)=K_3*(b_4+b_5)$$

$$K(2,5)=-K_1$$

$$K(2,6)=-K_2$$

$$K(2,7)=-K_3/2$$

$$K(2,8)=-K_3/2$$

$$K(3,3)=(K_c*(b_7**2)+K_1*(b_1**2)+K_2*(b_2**2)+K_3*(b_3**2))$$

$$K(3,4)=K_3*b_3*(b_4+b_5)$$

$$K(3,5)=K_1*b_1$$

$$K(3,6)=-K_2*b_2$$

$$K(3,7)=-K_3*b_3/2$$

$$K(3,8)=-K_3*b_3/2$$

$$K(4,4)=K_3*((b_4+b_5)**2)$$

$$K(4,5)=0$$

$$K(4,6)=0$$

$$K(4,7)=-K_3*(b_4+b_5)/2$$

$$K(4,8)=-K_3*(b_4+b_5)/2$$

$$K(5,5)=(K_1+K_{r1})$$

$$K(5,6)=0$$

$$K(5,7)=0$$

$$K(5,8)=0$$

$$K(6,6)=(K_2+K_{r2})$$

$$K(6,7)=0$$

$$K(6,8)=0$$

$$K(7,7)=(K_3/4+K_{r3})$$

$$K(7,8)=K_3/4$$

```

K(8,8)=(K3/4+Kr4)
do 20 i=2,8
  j1=i-1
  do 30 j=1,j1
    K(i,j)=K(j,i)
  30 continue
20 continue

```

```

C-----
C  INTRODUCTION DE LA MATRICE AMORTISSEMENT
C-----

```

```

C(1,1)=Ccc
C(1,2)=-Cec
C(1,3)=Ccc*b7
C(1,4)=0
C(1,5)=0
C(1,6)=0
C(1,7)=0
C(1,8)=0
C(2,2)=(Ccc+C1+C2+C3)
C(2,3)=-(Ccc*b7+C1*b1-C2*b2-C3*b3)
C(2,4)=C3*(b4+b5)
C(2,5)=-C1
C(2,6)=-C2
C(2,7)=-C3/2
C(2,8)=-C3/2
C(3,3)=(Ccc*b7**2+C1*b1**2+C2*b2**2+C3*b3**2)
C(3,4)=C3*b3*(b4+b5)
C(3,5)=C1*b1
C(3,6)=-C2*b2
C(3,7)=-C3*b3/2
C(3,8)=-C3*b3/2
C(4,4)=C3*((b4+b5)**2)
C(4,5)=0
C(4,6)=0
C(4,7)=-C3*(b4+b5)/2
C(4,8)=-C3*(b4+b5)/2
C(5,5)=(C1+Cr1)
C(5,6)=0
C(5,7)=0
C(5,8)=0
C(6,6)=(C2+Cr2)
C(6,7)=0
C(6,8)=0
C(7,7)=(C3/4+Cr3)
C(7,8)=C3/4
C(8,8)=(C3/4+Cr4)
do 40 i=2,8
  j1=i-1
  do 50 j=1,j1
    C(i,j)=C(j,i)
  50 continue
40 continue

```

```

C-----
C  DETERMINATION DES VALEURS ET VECTEURS PROPRES DU SYSTEME
C-----

```

```

do 60 i=1,8
do 60 j=1,8
MM(i,j)=M(i,j)
KK(i,j)=K(i,j)
MM1(i,j)=M(i,j)
KK1(i,j)=K(i,j)
60 continue
call eig(K,M,H,V,1e-8,8,8)
do 70 i=1,8
do 70 j=1,8
w(i,j)=K(i,j)
Phi(i,j)=M(i,j)
70 continue
do 1020 i=1,8
do 1020 j=1,8
phil(i,j)=phi(j,i)
1020 continue
C-----
C  IMPRESSION DES VALEURS ET VECTEURS PROPRES DU SYSTEME
C-----
write(*,*)'LES VALEURS PROPRES DU SYSTEME SONT'
write(*,*)
do 12 i=1,8
do 12 n=1,8
if(i-n)12,79,12
79 if(K(i,n))91,92,92
91 k(i,n)=-k(i,n)
w(i,n)=sqrt(k(i,n))
write(*,*)'W('',i,n,'')=j',W(i,j)
92 W(i,n)=sqrt(K(i,n))
write(*,*)'W('',i,n,'')=',W(i,n)
12 continue
write(*,*)'LES VECTEURS PROPRES DU SYSTEME SONT '
do 190 i=1,8
do 190 j=1,8
write(*,*)'PHI('',i,j,'')',PHI(i,j)
190 continue
C-----
C  LES MATRICES DU SYSTEME DECOUPLES
C-----
call btabs(MM,Phi,V,8,8)
call btabs(KK,Phi,V,8,8)
call btabs(C,Phi,V,8,8)
do 200 i=1,8
do 200 j=1,8
if(i-j)200,14,200
14 write(*,*)'KK('',i,j,'')',KK(i,j)
200 continue
do 80 i=1,8
do 80 j=1,8
if(i-j)80,15,80
15 write(*,*)'MM('',i,j,'')',MM(i,j)
80 continue

```

C-----  
C DETERMINATION DE L'incrément DU TEMPS dt  
C-----

```
Wnmax=0
do 310 i=1,8
if(W(i,i).gt.Wnmax) then
Wnmax=W(i,i)
else
goto 310
endif
310 continue
dt=2/Wnmax
write(*,*)'dt=',dt
a0=dt**(-2)
a1=1/(2*dt)
a2=2*a0
a3=1/a2
```

C-----  
C INTRODUCTION DES CARACTERISTIQUES DES EFFORTS EXTERIEURS  
C-----

```
write(*,*)'Donner Wrot (tr/min)'
read(*,*)Wrot
write(*,*)'Donner la vitesse du véhicule Vit (Km/h)'
read(*,*) Vit
write(*,*)'Donner la longueur de l irrégularité Lon (m)'
read(*,*) Lon
write(*,*)'Donner l amplitude de l irrégularité de Hmax (m)'
read(*,*)Hmax
write(*,*)'Donner le déphasage de l irrégularité deph (degr,)'
read(*,*) deph
write(*,*) 'PATIENTEZ S.V.P'
```

C-----  
C DETERMINATION DU VECTEUR EFFORTS EXTERIEURS  
C-----

```
pi=3.1457796
Wrot=(2*pi*Wrot)/60
Vit=(Vit*10)/36
Fre=(2*pi*Vit)/lon
t2=(b1+b2)/vit
t3=(b1+b3+b4+b5-b6/2)/vit
t4=(b1+b3+b4+b5+b6/2)/vit
do 320 nn=1,250
t(nn)=(nn-1)*dt
Foo(1,nn)=0
Foo(2,nn)=0
Foo(3,nn)=3.18e-2*(Wrot**2)*cos(Wrot*t(nn))
Foo(4,nn)=0
ss=Kr1*Hmax*sin(Fre*t(nn)+deph)
Foo(5,nn)=ss+cr1*Hmax*Fre*cos(Fre*t(nn)+deph)
ss=Kr2*Hmax*sin(Fre*(t(nn)-t2)+deph)
Foo(6,nn)=ss+cr2*Hmax*Fre*cos(Fre*(t(nn)-t2)+deph)
ss=Kr3*Hmax*sin(Fre*(t(nn)-t3)+deph)
Foo(7,nn)=ss+cr3*Hmax*Fre*cos(Fre*(t(nn)-t3)+deph)
ss=Kr4*Hmax*sin(Fre*(t(nn)-t4)+deph)
Foo(8,nn)=ss+cr4*Hmax*Fre*cos(Fre*(t(nn)-t4)+deph)
```

320 continue

C-----  
C DECOUPLAGES DES EQUATIONS DU SYSTEME  
C-----

do 900 i=1,8  
do 900 j=1,250  
Fo(i,j)=0  
do 900 kkk=1,8  
900 Fo(i,j)=Fo(i,j)+Phit(i,kkk)\*Foo(kkk,j)  
call matmb(PHI,MM1,V,8,8)  
call multv(Xo,MM1,Uo,8,8)  
call multv(Xvo,MM1,Vo,8,8)  
do 78 i=1,8  
write(\*,\*)'Xo(',i,')',Xo(i)  
write(\*,\*)'Xvo(',i,')',Xvo(i)  
78 continue

C-----  
C RESOLUTION DES EQUATIONS DECOUPLEES DU SYSTEME  
C PAR LA METHODE D'INTEGRATION DIRECTE  
C METHODE DE DIFFERENCE CENTRALE  
C-----

C DETERMINATION DES VECTEUR DEPLACEMENT, VITESSE ET  
C ACCELERATION INITIAUX  
C-----

call multv(UUo,KK,Xo,8,8)  
call multv(VVo,C,Xvo,8,8)  
do 330 j=1,8  
aco(j)=Fo(j,1)-UUo(j)-VVo(j)  
330 continue  
do 340 j=1,8  
X0(j)=Xo(j)-dt\*Xvo(j)+a3\*aco(j)  
X1(j)=Xo(j)  
340 continue

C-----  
C DETERMINATION DES MATRICES MASSE, RIGIDITE ET  
C AMORTISSEMENT EFFECTIVES DU SYSTEME  
C-----

do 350 i=1,8  
do 350 j=1,8  
M(i,j)=a0\*MM(i,j)+a1\*C(i,j)  
K(i,j)=KK(i,j)-a2\*MM(i,j)  
C(i,j)=a0\*MM(i,j)-a1\*C(i,j)  
350 continue

C-----  
C TRIANGULARISATION DE LA MATRICE MASSE EFFECTIVE M  
C METHODE DE DOOLITTLE  
C-----

do 801 i=1,8  
do 801 j=1,8  
if(i-j)1,2,1  
1 U(i,j)=0

```

      goto 801
2    U(i,j)=1
801  continue
      do 811 mmm=1,8
          il=mmm
          do 821 i=il,8
              kkk1=mmm-1
              s1=0
              do 831 kkk=1,kkk1
                  s1=s1+L(i,kkk)*U(kkk,mmm)
831  continue
          L(i,mmm)=M(i,mmm)-S1
821  continue
          j1=mmm+1
          do 841 j=j1,8
              kkk2=mmm-1
              S2=0
              do 851 kkk=1,kkk2
                  s2=s2+L(mmm,kkk)*U(kkk,j)
851  continue
          u(mmm,j)=(M(mmm,j)-S2)/l(mmm,mmm)
841  continue
811  continue
          do 861 i=1,8
              do 861 j=1,8
                  write(*,*)'U(',i,j,')',U(i,j)
861  continue
          do 871 i=1,8
              do 871 j=1,8
                  write(*,*)'L(',i,j,')',L(i,j)
871  continue

```

```

C-----
C  DETERMINATION DES VECTEURS DEPLACEMENT, VITESSE ET
C  ACCELERATION MODALE A CHAQUE INSTANT DT
C-----

```

```

      do 360 j=1,8
          Xt(j,1)=Xo(j)
          Vt(j,1)=Xvo(j)
          act(j,1)=aco(j)
360  continue
          do 370 nn=2,250
              do 802 i=1,8
                  XX1(i)=0
                  XX0(i)=0
                  do 802 j=1,8
                      XX1(i)=XX1(i)+K(i,j)*X1(j)
802  XX0(i)=XX0(i)+C(i,j)*X0(j)

          do 380 j=1,8
              F(j)=Fo(j,nn)-XX1(j)-XX0(j)
380  continue
          y(1)=F(1)/L(1,1)
          do 390 j=2,8
              j1=j-1
              s=0

```

```

do 400 ll=1,jl
s=s+L(j,ll)*Y(ll)
400 continue
Y(j)=(F(j)-s)/L(j,j)
390 continue
X2(8)=y(8)/U(8,8)
do 410 j=7,1,-1
jl=j+1
s=0
do 420 ll=j,1,8
s=s+U(j,ll)*X2(ll)
420 continue
X2(j)=(Y(j)-s)/U(j,j)
410 continue
do 430 j=1,8
xt(j,nn)=X2(j)
act(j,nn)=a0*(X0(j)-2*X1(j)+X2(j))
vt(j,nn)=a1*(-X0(j)+X2(j))
X0(j)=X1(j)
X1(j)=X2(j)
430 continue
370 continue

```

```

C-----
C   DETERMINATION DU VECTEUR DEPLACEMENT
C   DU SYSTEME EN FONCTION DU TEMPS
C-----

```

```

do 990 i=1,8
do 990 j=1,250
xd(i,j)=0
do 990 kkk=1,8
990 Xd(i,j)=Xd(i,j)+Phi(i,kkk)*xt(kkk,j)

```

```

C-----
C   IMPRESSION DES RESULTATS
C-----

```

```

do 999 i=1,250
write(10,*) T(i), Foo(1,i), Xd(1,i)
write(20,*) T(i), Foo(2,i), xd(2,i)
write(30,*) T(i), Foo(3,i), Xd(4,i)
write(40,*) T(i), Foo(4,i), Xd(4,i)
write(50,*) T(i), Foo(5,i), Xd(5,i)
write(60,*) T(i), Foo(6,i), Xd(6,i)
write(70,*) T(i), Foo(7,i), Xd(7,i)
write(80,*) T(i), Foo(8,i), Xd(8,i)
999 continue

```

```

Stop
End

```

## 2.12. PROGRAMME ALEATO

CE PROGRAMME CONSISTE A DETERMINER LES VALEURS PROPRES  
ET LES VECTEURS PROPRES DU MODELE MATHEMATIQUE DE L'ENGIN  
TB260 ET DE SA REMORQUE AINSI QUE LES REPONSES DES MOUVEMENTS  
DE SES DIFFERENTS COMPARTIMENTS SOUS L'EFFET DES  
IRREGULARITES DE LA ROUTE  
(CAS DES IRREGULARITES ALEATOIRES)

```
real Sywr(8,8),Sgdr(8,8),Sgar(8,8),W4(8,8),W5(8,8)
real M(8,8),K(8,8),C(8,8),Re(8,8),Im(8,8),R(8,8),II(8,8)
real W1(16,16),W2(16,16),W3(16,16),WW1(16,32),WW(8,8)
real Sywr1(8,8),Sywr2(8,8),Sywi1(8,8),Sywi2(8,8)
real Ren(8,8),Inn(8,8),Rn(8,8),IIn(8,8),W40(8,8),W30(8,8)
real W1n(16,16),W2n(16,16),W3n(16,16),WW1n(16,32),WWn(8,8)
real W4n(8,8),W5n(8,8),Sywi(8,8),Sgdi(8,8),Sgai(8,8)
real W50(8,8),W60(8,8),W70(8,8),W80(8,8),Syw(8,8)
real Sgd(8,8),Sga(8,8),coss(8,8),sins(8,8)
real L3,L4,k1,k2,k3,jt,m1,m2,m3,m4,mt,mb,mc,Kc
real Kr1,Kr2,Kr3,Kr4,jb,Ji,Mi,KSIR,Wmax,dw,V
open(unit=2,file='donne8.dat',status='old')
open(unit=1,file='sw.dat',status='new')
open(unit=10,file='syw1.dat',status='new')
open(unit=20,file='Syw2.dat',status='new')
open(unit=30,file='Syw3.dat',status='new')
open(unit=40,file='Syw4.dat',status='new')
open(unit=50,file='Syw5.dat',status='new')
open(unit=60,file='Syw6.dat',status='new')
open(unit=70,file='Syw7.dat',status='new')
open(unit=80,file='Syw8.dat',status='new')
write(*,*)'donner les raideurs K1,K2,K3,Kc'
read(2,*) K1,K2,K3,Kc
write(*,*)'Donner les raideurs Kr1,Kr2,Kr3,Kr4'
read(2,*) Kr1,Kr2,Kr3,Kr4
write(*,*)'Donner les amortisseurs C1,C2,C3,Cec'
read(2,*) C1,C2,C3,Cec
write(*,*)'Donner les amortisseurs Cr1,Cr2,Cr3,Cr4'
read(2,*) Cr1,Cr2,Cr3,Cr4
write(*,*)'Donner les masses M1,M2,M3,M4'
read(2,*) M1,M2,M3,M4
write(*,*)'Donner les masses Mt,Jt,Mb,Jb,Mc'
read(2,*)Mt,jt,mb,jb,mc
write(*,*)'Donner les distances b1,b2,b3,b4,b5,b6,b7'
read(2,*) b1,b2,b3,b4,b5,b6,b7
write(*,*)'Donner la vitesse du vehicule en Km/h'
read(*,*) Vk
write(*,*)'Donner la frequence maximale Wmax'
read(*,*)Wmax
write(*,*)'Donner le pas dw'
read(*,*) dw
```

```
C-----
C   INTRODUCTION DE LA MATRICE MASSE
C-----
```

```
do 10 i=1,8
do 10 j=1,8
```

$M(i,j)=0$   
 10 continue  
 $M(1,1)=Mc$   
 $M(2,2)=Mt+Mb$   
 $M(2,3)=Mb*b3$   
 $M(2,4)=Mb*b4$   
 $M(3,3)=Jt+Mb*b3**2$   
 $M(3,2)=Mb*b3$   
 $M(3,4)=Mb*b3*b4$   
 $M(4,4)=Jb+Mb*b4**2$   
 $M(4,2)=Mb*b4$   
 $M(4,3)=Mb*b4*b3$   
 $M(5,5)=M1$   
 $M(6,6)=M2$   
 $M(7,7)=M3$   
 $M(8,8)=M4$

C-----  
 C INTRODUCTION DE LA MATRICE RIGIDITE  
 C-----

$AA1=Kc*b7+K1*b1$   
 $AA2=-K2*b2-K3*b3$   
 $AA=-(AA1+AA2)$   
 $K(1,1)=Kc$   
 $K(1,2)=-Kc$   
 $K(1,3)=Kc*b7$   
 $K(1,4)=0$   
 $K(1,5)=0$   
 $K(1,6)=0$   
 $K(1,7)=0$   
 $K(1,8)=0$   
 $K(2,2)=(Kc+K1+K2+K3)$   
 $K(2,3)=AA$   
 $K(2,4)=K3*(b4+b5)$   
 $K(2,5)=-K1$   
 $K(2,6)=-K2$   
 $K(2,7)=-K3/2$   
 $K(2,8)=-K3/2$   
 $K(3,3)=(Kc*(b7**2)+K1*(b1**2)+K2*(b2**2)+K3*(b3**2))$   
 $K(3,4)=K3*b3*(b4+b5)$   
 $K(3,5)=K1*b1$   
 $K(3,6)=-K2*b2$   
 $K(3,7)=-K3*b3/2$   
 $K(3,8)=-K3*b3/2$   
 $K(4,4)=K3*((b4+b5)**2)$   
  
 $K(4,6)=0$   
 $K(4,7)=-K3*(b4+b5)/2$   
 $K(4,8)=-K3*(b4+b5)/2$   
 $K(5,5)=(K1+Kr1)$   
 $K(5,6)=0$   
 $K(5,7)=0$   
 $K(5,8)=0$   
 $K(6,6)=(K2+Kr2)$   
 $K(6,7)=0$   
 $K(6,8)=0$   
 $K(7,7)=(K3/4+Kr3)$

```

K(7,8)=K3/4
K(8,8)=(K3/4+Kr4)
do 20 i=2,8
  j1=i-1
  do 30 j=1,j1
    K(i,j)=K(j,i)
30  continue
20  continue

```

```

C-----
C  INTRODUCTION DE LA MATRICE AMORTISSEMENT
C-----

```

```

C(1,1)=Ccc
C(1,2)=-Ccc
C(1,3)=Ccc*b7
C(1,4)=0
C(1,5)=0
C(1,6)=0
C(1,7)=0
C(1,8)=0
C(2,2)=(Ccc+C1+C2+C3)
C(2,3)=-(Ccc*b7+C1*b1-C2*b2-C3*b3)
C(2,4)=C3*(b4+b5)
C(2,5)=-C1
C(2,6)=-C2
C(2,7)=-C3/2
C(2,8)=-C3/2
C(3,3)=(Ccc*b7**2+C1*b1**2+C2*b2**2+C3*b3**2)
C(3,4)=C3*b3*(b4+b5)
C(3,5)=C1*b1
C(3,6)=-C2*b2
C(3,7)=-C3*b3/2
C(3,8)=-C3*b3/2
C(4,4)=C3*((b4+b5)**2)
C(4,5)=0
C(4,6)=0
C(4,7)=-C3*(b4+b5)/2
C(4,8)=-C3*(b4+b5)/2
C(5,5)=(C1+Cr1)
C(5,6)=0
C(5,7)=0
C(5,8)=0
C(6,6)=(C2+Cr2)
C(6,7)=0
C(6,8)=0
C(7,7)=(C3/4+Cr3)
C(7,8)=C3/4
C(8,8)=(C3/4+Cr4)
do 40 i=2,8
  j1=i-1
  do 50 j=1,j1
    C(i,j)=C(j,i)
50  continue
40  continue

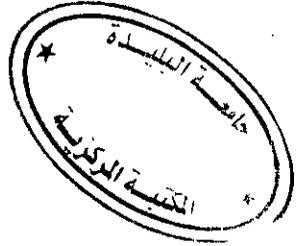
```

C-----  
 C INTRODUCTION DE LA DENSITE SPECTRALE DU TYPE DE ROUTE  
 C CAS DU CHAUSSEE HERBEUSE  
 C-----

```

V=(Vk*36)/10
t2=(b1+b2)/V
t3=(b1+b3+b4+b5-b6/2)/V
t4=(b1+b3+b4+b5+b6/2)/V
Pi=3.14529
w=0
500 S1w=96.4*2*0.0627*v*((w**2)+.043*(v**2))
S2w=((w**4)-0.07*((V**2)*(w**2))+(18.4e-4*(V**4)))
Sw=(S1w/S2w)

```



C-----  
 C DECOMPOSITION DES MATRICES COMPLEXES [W(w)] et [W(-w)]  
 C EN PARTIE REELLE ET IMAGINAIRE  
 C-----

```

wn=-w
do 60 i=1,8
do 60 j=1,8
Rc(i,j)=K(i,j)-(w**2)*M(i,j)
Im(i,j)=w*C(i,j)
Rcn(i,j)=K(i,j)-(wn**2)*M(i,j)
Imn(i,j)=wn*C(i,j)
60 continue
do 70 i=1,8
do 70 j=1,8
R(i,j)=0
II(i,j)=0
Rn(i,j)=0
IIn(i,j)=0
70 continue
R(1,1)=1
R(2,2)=1
R(3,3)=1
R(4,4)=1
R(5,5)=Kr1
R(6,6)=Kr2*cos(w*t2)+w*Cr2*sin(w*t2)
R(7,7)=Kr3*cos(w*t3)+w*Cr3*sin(w*t3)
R(8,8)=Kr4*cos(w*t4)+w*Cr4*sin(w*t4)
II(1,1)=w
II(2,2)=w
II(3,3)=w
II(4,4)=w
II(5,5)=w*Cr1
II(6,6)=w*Cr2*cos(w*t2)-Kr2*sin(w*t2)
II(7,7)=w*Cr3*cos(w*t3)-Kr3*sin(w*t3)
II(8,8)=w*Cr4*cos(w*t4)-Kr4*sin(w*t4)
Rn(1,1)=1
Rn(2,2)=1
Rn(3,3)=1
Rn(4,4)=1
Rn(5,5)=Kr1
Rn(6,6)=Kr2*cos(wn*t2)+wn*Cr2*sin(wn*t2)

```

```

Rn(7,7)=Kr3*cos(wn*t3)+wn*Cr3*sin(wn*t3)
Rn(8,8)=Kr4*cos(wn*t4)+wn*Cr4*sin(wn*t4)
In(1,1)=wn
In(2,2)=wn
In(3,3)=wn
In(4,4)=wn
In(5,5)=wn*Cr1
In(6,6)=wn*Cr2*cos(w*t2)-Kr2*sin(w*t2)
In(7,7)=wn*Cr3*cos(w*t3)-Kr3*sin(w*t3)
In(8,8)=wn*Cr4*cos(w*t4)-Kr4*sin(w*t4)
do 80 i=1,8
do 90 j=1,8
W1(i,j)=Rc(i,j)
W2(i,j)=R(i,j)
W1n(i,j)=Rcn(i,j)
W2n(i,j)=Rn(i,j)
90 continue
80 continue
do 100 i=9,16
do 110 j=9,16
W1(i,j)=Ren(i-8,j-8)
W2(i,j)=Rn(i-8,j-8)
W1n(i,j)=Ren(i-8,j-8)
W2n(i,j)=Rn(i-8,j-8)
110 continue
100 continue
do 120 i=1,8
do 130 j=9,16
W1(i,j)=-Im(i,j-8)
W2(i,j)=-In(i,j-8)
W1n(i,j)=-Imn(i,j-8)
W2n(i,j)=-Inn(i,j-8)
130 continue
120 continue
do 140 i=9,16
do 150 j=1,8
W1(i,j)=Im(i-8,j)
W2(i,j)=In(i-8,j)
W1n(i,j)=Imn(i-8,j)
W2n(i,j)=Inn(i-8,j)

```

```

C-----
C  INVERSION DES MATRICES [WW1(w)] et [WW1n(-w)] FORMEE PAR
C  LES PARTIES REELLES RESPECTIVES DE [W(w)] et [W(-w)]
C-----

```

```

150 continue
140 continue
do 160 j=1,16
do 170 j=1,16
WW1(i,j)=W1(i,j)
WW1n(i,j)=W1n(i,j)
170 continue
160 continue
do 180 i=1,16
do 190 j=17,32
WW1(i,j)=0
WW1n(i,j)=0

```

```

190 continue
180 continue
  WW1(1,17)=1
  WW1(2,18)=1
  WW1(3,19)=1
  WW1(4,20)=1
  WW1(5,21)=1
  WW1(6,22)=1
  WW1(7,23)=1
  WW1(8,24)=1
  WW1(9,25)=1
  WW1(10,26)=1
  WW1(11,27)=1
  WW1(12,28)=1
  WW1(13,29)=1
  WW1(14,30)=1
  WW1(15,31)=1
  WW1(16,32)=1
  WW1n(1,17)=1
  WW1n(2,18)=1
  WW1n(3,19)=1
  WW1n(4,20)=1
  WW1n(5,21)=1
  WW1n(6,22)=1
  WW1n(7,23)=1
  WW1n(8,24)=1
  WW1n(9,25)=1
  WW1n(10,26)=1
  WW1n(11,27)=1
  WW1n(12,28)=1
  WW1n(13,29)=1
  WW1n(14,30)=1
  WW1n(15,31)=1
  WW1n(16,32)=1
  call inver(WW1,D,16,16,32)
  call inver(WW1n,D,16,16,32)
  do 200 i=1,16
  do 210 j=1,16
  W1(i,j)=WW1(i,j)
  W1n(i,j)=WW1n(i,j)
210 continue
200 continue

```

```

C-----
C  DETERMINATION DES PARTIES REELLES ET IMAGINAIRES
C  DU PRODUIT MATRICIELLE [Sy(w)]=[W(w)][Sh(w)][W(w)]
C-----

```

```

  do 950 i=1,16
  do 950 j=1,16
  W3(i,j)=0
  W3n(i,j)=0
  do 950 kk=1,16
  W3(i,j)=W3(i,j)+W1(i,kk)*W2(kk,j)
  W3n(i,j)=W3n(i,j)+W1n(i,kk)*W2n(kk,j)
950 continue
  do 400 i=1,8
  do 410 j=1,8

```

```

        W4(i,j)=W3(i,j)
        W4n(i,j)=W3n(i,j)
410 continue
400 continue
    do 420 i=1,8
    do 430 j=1,8
        W5(i,j)=W3(i+8,j)
        W5n(i,j)=W3n(i+8,j)
430 continue
420 continue
    do 240 i=1,8
    do 250 j=1,8
        coss(i,j)=0
        sins(i,j)=0
250 continue
240 continue
    coss(5,5)=Sw
    sins(5,5)=0
    coss(5,6)=Sw*cos(w*t2)
    sins(5,6)=Sw*sin(w*t2)
    coss(5,7)=Sw*cos(w*t3)
    sins(5,7)=Sw*sin(w*t3)
    coss(5,8)=Sw*cos(w*t4)
    sins(5,8)=Sw*sin(w*t4)
    coss(6,5)=Sw*cos(w*t2)
    sins(6,5)=Sw*sin(w*t2)
    coss(6,6)=Sw
    sins(6,6)=0
    coss(6,7)=Sw*cos(w*(t2-t3))
    sins(6,7)=Sw*sin(w*(t2-t3))
    coss(6,8)=Sw*cos(w*(t2-t4))
    sins(6,8)=Sw*sin(w*(t2-t4))
    coss(7,5)=Sw*cos(w*t3)
    sins(7,5)=Sw*sin(w*t3)
    coss(7,6)=Sw*cos(w*(t3-t2))
    sins(7,6)=Sw*sin(w*(t3-t2))
    coss(7,7)=Sw
    sins(7,7)=0
    coss(7,8)=Sw*cos(w*(t3-t4))
    sins(7,8)=Sw*sin(w*(t3-t4))
    coss(8,5)=Sw*cos(w*t4)
    sins(8,5)=Sw*sin(w*t4)
    coss(8,6)=Sw*cos(w*(t4-t2))
    sins(8,6)=Sw*sin(w*(t4-t2))
    coss(8,7)=Sw*cos(w*(t4-t3))
    sins(8,7)=Sw*sin(w*(t4-t3))
    coss(8,8)=Sw
    sins(8,8)=0
    do 2000 i=1,8
    do 2000 j=1,8
        W30(i,j)=0
        W40(i,j)=0
    do 2000 kk=1,8
        W30(i,j)=W30(i,j)+W4n(i,kk)*coss(kk,j)
        W40(i,j)=W40(i,j)+W5n(i,kk)*coss(kk,j)
2000 continue
    do 2010 i=1,8
    do 2010 j=1,8

```

```

W50(i,j)=0
W60(i,j)=0
W70(i,j)=0
W80(i,j)=0
do 2010 kk=1,8
W50(i,j)=W50(i,j)+W30(i,kk)*W4(kk,j)
W60(i,j)=W60(i,j)+W40(i,kk)*W5(kk,j)
W70(i,j)=W70(i,j)+W40(i,kk)*W4(kk,j)
W80(i,j)=W80(i,j)+W30(i,kk)*W5(kk,j)
2010 continue
do 2020 i=1,8
do 2030 j=1,8
Sywr1(i,j)=W50(i,j)-W60(i,j)
Sywi1(i,j)=W70(i,j)+W80(i,j)
2030 continue
2020 continue
do 2001 i=1,8
do 2001 j=1,8
W30(i,j)=0
W40(i,j)=0
do 2001 kk=1,8
W30(i,j)=W30(i,j)+W4n(i,kk)*sins(kk,j)
W40(i,j)=W40(i,j)+W5n(i,kk)*sins(kk,j)
2001 continue
do 2011 i=1,8
do 2011 j=1,8
W50(i,j)=0
W60(i,j)=0
W70(i,j)=0
W80(i,j)=0
do 2011 kk=1,8
W50(i,j)=W50(i,j)+W30(i,kk)*W4(kk,j)
W60(i,j)=W60(i,j)+W40(i,kk)*W5(kk,j)
W70(i,j)=W70(i,j)+W40(i,kk)*W4(kk,j)
W80(i,j)=W80(i,j)+W30(i,kk)*W5(kk,j)
2011 continue
do 2021 i=1,8
do 2031 j=1,8
Sywr2(i,j)=W50(i,j)-W60(i,j)
Sywi2(i,j)=W70(i,j)+W80(i,j)
2031 continue
2021 continue
do 2022 i=1,8
do 2032 j=1,8
Sywr(i,j)=Sywr1(i,j)-Sywi2(i,j)
Sywi(i,j)=Sywr2(i,j)+Sywi1(i,j)
Syw(i,j)=sqrt((Sywr(i,j))**2+(Sywi(i,j))**2)
2032 continue
2022 continue

```

```

C-----
C   IMPRESSION DES RESULTATS
C-----

```

```

write(1,*) w,Sw
write(10,*) w,Sywr(1,1),Sywi(1,1),Syw(1,1)
write(20,*) w,Sywr(2,2),Sywi(2,2),Syw(2,2)
write(30,*) w,Sywr(3,3),Sywi(3,3),Syw(3,3)

```

```

write(40,*) w,Sywr(4,4),Sywi(4,4),Syw(4,4)
write(50,*) w,Sywr(5,5),Sywi(5,5),Syw(5,5)
write(60,*) w,Sywr(6,6),Sywi(6,6),Syw(6,6)
write(70,*) w,Sywr(7,7),Sywi(7,7),Syw(7,7)
write(80,*) w,Sywr(8,8),Sywi(8,8),Syw(8,8)
do 3100 i=1,8
do 3110 j=1,8

```

```

C-----
C  DETERMINATION DES VARIANCES DES REPOSES DU SYSTEME ETUDIE
C-----

```

```

      Sgdr(i,j)=0
      Sgar(i,j)=0
      Sgdi(i,j)=0
      Sgai(i,j)=0
      Sgd(i,j)=0
      Sga(i,j)=0
3110 continue
3100 continue
      do 3000 i=1,8
      do 3010 j=1,8
      Sgdr(i,j)=Sgdr(i,j)+(1/Pi)*Sywr(i,j)*dw
      Sgar(i,j)=Sgar(i,j)+(1/Pi)*(w**4)*Sywr(i,j)*dw
      Sgdi(i,j)=Sgdi(i,j)+(1/Pi)*Sywi(i,j)*dw
      Sgai(i,j)=Sgai(i,j)+(1/Pi)*(w**4)*Sywi(i,j)*dw
      Sgd(i,j)=Sgd(i,j)+Sqrt((Sgdr(i,j)**2)+(Sgdi(i,j)**2))
      Sga(i,j)=Sga(i,j)+Sqrt((Sgar(i,j)**2)+(Sgai(i,j)**2))
3010 continue
3000 continue
      goto 64
      else
      w=w+dw
      goto 500
      endif
64  Stop
      End

```