

RÉPUBLIQUE ALGÉRIENNE DÉMOCRATE ET POPULAIRE
MINISTÈRE DE L'ENSEIGNEMENT SUPÉRIEUR ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

36/03
EX1

UNIVERSITÉ SAAD DAHLAB DE BLIDA



FACULTÉ DES SCIENCES DE L'INGÉNIEUR

DÉPARTEMENT DE L'AÉRONAUTIQUE

MÉMOIRE DE FIN D'ÉTUDES EN VUE DE L'OBTENTION DU DIPLÔME
D'INGÉNIEUR D'ÉTAT EN AÉRONAUTIQUE
OPTION PROPULSION

THÈME

**Simulation numérique du problème de Stefan
d'un matériau pur dans les géométries
unidimensionnelles**

Réalisé par : ABOU-SHIGHIBA Hicham

Encadré par : Mr Ahmed Bouneder

- PROMOTION 2003 -

Je tiens à exprimer ma profonde gratitude à tous ceux qui m'ont aidé, conseillé et assisté tout au long de ma découverte de la troisième dimension à l'institut d'aéronautique.

Je remercie en particulier mon promoteur « Mr Mohamed Boumedier » pour son aide précieuse et pour le suivi qu'il m'a prodigué au cours de ce projet.

Je remercie également tous les enseignants qui ont contribué à ma formation.

Et en fin, je remercie le président et les membres de jury d'avoir accepté d'examiner ce travail.

.ABOU-SHIGHIBA Hicham

www.ashghira.com

Je dédie ce travail en particulier à mes parents, et je tiens par ces quelques mots leurs témoigner ma profonde reconnaissance et gratitude pour leur soutien et réconfort.

Je dédie également ce travail à ma très chère petite famille :

Ma sœur, mes frères Marwan Ibrahim et Abdel Wahab

Puis mes deux grandes familles :

Ici en Algérie, et en Palestine

A tous mes amis.

ABOU-SHIGHIRA Hicham

Nomenclature

T_m : Température de fusion	[°C]
T_s : Température de surface	
T_0 : Température initiale	
T_∞ : Température à l'infinie (dans les géométrie semi-infinies)	
T_1 : Température de la phase 1	
T_2 : Température de la phase 2	
T_i^j : La température au point i à l'instant j	
H_i^j : L'enthalpie au point i à l'instant j	[J]
$X(t)$: L'abscisse du front	
s : Indice du solide	
l : Indice du liquide	
k : La conductivité k : La conductivité	[W/m°C]
α : La diffusivité	[m²/s]
	$\alpha = \frac{k}{\rho c}$
c : La chaleur spécifique	[J/kg°C]
L : La chaleur latente	[J/kg]
ρ : La densité massique	[1/kg]

ملخص

بعد ايجاد الحلول التحليلية لمسألة « Stefan » تطرقنا للحلول الرقمية تبعا للطريقة المسماة بـ « Enthalpique » وذلك على نموذج احادي البعد. وهذه الطريقة تمثل وسيلة لتتبع الحد الفاصل بين الطور الصلب و الطور السائل. بعد ذلك قمنا بتغيير بسيط على البرنامج تم على اثره الحصول على نتائج جد قريبة من تلك التحليلية في حال وجودها واخيرا تم تعميم استخدام هذه التقنية على نموذج كروي بانتقال للحرارة احادي البعد.

Résumé

Après la résolution analytique du problème dit « de Stefan », on a appliqué un schéma numérique basé sur une méthode dite « Enthalpique » sur un problème unidimensionnel. La méthode offre un moyen pour le suivi du front. Un simple développement est décrit après, qui aboutit à de très bons résultats comparés, quand c'est possible, avec ceux analytiques.

L'extension de la technique sur un problème sphérique unidimensionnel est exposée par la suite.

Abstract

After highlighting the problems associated with the conventional implementations of Stefan problems using analytical methods, a numerical scheme based on the Enthalpy method is applied to one-dimensional ones. The method provides a means to track the position of the phase front; a simple development is then described which leads to very accurate solutions compared, when possible, to analytical ones.

The extension of this technique to one-dimensional spherical problems is then demonstrated using an explicit method.

Sommaire

Introduction.....	1
Chapitre I : Généralités sur le changement de phase	
1-1 Etude expérimentale des diagrammes de phase.....	5
1-1-1 Détermination et interprétation des diagrammes.....	5
1-1-2 Miscibilité complète à l'état solide.....	6
1-1-3 Miscibilité partielle à l'état solide.....	8
1-1-3-1 Diagramme avec point eutectique.....	8
1-1-3-2 Diagramme avec point péritectique.....	8
1-2 Interprétation thermodynamique.....	9
1-2-1 Variation de l'enthalpie libre.....	10
1-2-2 Relation entre les courbes d'enthalpie libre et les diagrammes de phase.....	10
1-2-2-1 Miscibilité complète à l'état solide.....	10
1-2-2-2 Alliages à eutectique ou péritectique.....	11
1-2-2-3 Corps pur et composés intermédiaire.....	12
1-3 Cinétique de la solidification.....	12
1-3-1 Conditions de solidification.....	13
Chapitre II : Présentation du problème de Stefan	
II-1 Limitations sur les modèles.....	15
II-2 Stefan à une seule phase.....	15
II-3 Stefan à deux phases.....	16
Chapitre III : Méthodes et résolution	
III-1 Solution exacte.....	17
III-1-1 Solution exacte à deux phases.....	18
III-1-2 Solution exacte à une seule phase.....	20
III-2 La méthode Enthalpique.....	26
III-2-1 Présentation et avantages.....	26
III-2-2 Géométrie plane unidimensionnelle avec des conditions du premier type.....	28
III-2-2-1 A une seule phase.....	28
III-2-2-2 A deux phases.....	29
III-2-3 La nouvelle interprétation de la méthode Enthalpique.....	30
III-2-4 Le nouvel algorithme.....	31
III-2-5 Géométrie sphérique (problème à conditions mixtes) à deux phases.....	37
III-3 Résultats.....	39
III-3-1 Discussions des résultats.....	43
Conclusion.....	46
Bibliographie	

INTRODUCTION

INTRODUCTION

La simulation numérique est de plus en plus utilisée de nos jours. Elle représente en effet une expérimentation et permet de trouver des solutions théoriques aux problèmes que peut rencontrer l'ingénieur dans son milieu industriel. Elle nécessite cependant l'élaboration d'un modèle mathématique. Le modèle est une représentation abstraite, algébrique ou analytique, du phénomène physique étudié.

Actuellement avec le développement rapide des moyens de calculs et l'algorithme numérique, des problèmes de plus en plus complexes sont résolus. Les résultats de la simulation numérique sont confrontés à ceux de l'expérience.

Lors d'un changement d'état, le système se présente comme la réunion de deux sous-systèmes homogènes possédant des propriétés distinctes. On appelle phase chacun de ces sous-systèmes. Plus précisément, une phase est une partie homogène, physiquement distincte, séparée des autres parties du système par une surface définie.

La phase sous laquelle un système se présente est déterminée par la connaissance d'un certain ensemble de paramètres: température, pression, champ électrique ou magnétique, etc.

Si, pour diverses valeurs de ces paramètres, le système peut se présenter sous des phases différentes, il est possible d'observer le passage d'une phase à l'autre en modifiant continûment la valeur des paramètres intensifs. Dans ce cas, on dit qu'il y a changement de phase, ou transition de phase.

Dans les problèmes du thermique, là où il y a changement de phase, l'obtention des solutions analytiques s'avère très difficile, voire impossible lorsqu'on impose des conditions proches de la réalité.

En effet, elles se limitent aux problèmes à une dimension et des géométries infinies et semi infinies avec des conditions initiales et aux limites simples et des propriétés physiques constantes.

La solution du problème du changement de phase nécessite la résolution d'un système d'équations aux dérivées partielles muni des conditions initiales et aux limites. Ces solutions prennent souvent la forme de fonction d'une seule variable

$\frac{x}{\sqrt{t}}$ et sont dites « les solutions de similitude ».

Franz Neumann a présenté une solution de similitude en 1860 (bien avant les travaux de Stefan 1890) pour une géométrie semi infini initialement liquide à une température constante supérieure à la température de fusion, avec une surface $x = 0$ subitement abaisser à une température inférieure à la température de fusion.

Cette solution était reproduite par Carslaw et Jaeger en 1959 ajoutée aux résultats obtenus par Stefan pour le cas spécial où le liquide se trouve initialement à sa température de fusion.

Une autre méthode analytique, c'est la méthode HBIM inventée par Goodman en 1958. En intégrant l'équation de chaleur en une dimension plus les conditions aux limites, elle consiste à :

1- assumer une forme particulière entre la température dans les variables spatiales avec les conditions limites (par exemple une forme polynomiale)

2- intégrer l'équation de chaleur dans un intervalle d'espace approprié et substituer la forme de la température supposée pour obtenir la « balance thermique » intégrale.

3- résoudre l'équation intégrale pour obtenir le mouvement de limite de changement de phase (le front) et par la suite la température à travers le temps.

Vu la difficulté d'obtenir la solution analytique, on a recours aux méthodes numériques qui sont moins difficiles à formuler, et plus souples à appliquer.

Il y a deux approches principales pour résoudre le problème de Stefan :

La première est « The Front Tracking Method » qui, d'une façon explicite, suit la position de l'interface solide-liquide (le front de solidification ou de fusion). Ces techniques offrent un moyen pour suivre le front, mais elles sont difficiles, voire impossible, de les généraliser aux problèmes multidimensionnels.

La deuxième approche utilise un maillage fixe. Comme exemple, on peut citer « The isotherme Migration Method ». Il y a aussi la méthode de la chaleur latente aux nœuds qui détermine itérativement le temps pour lequel le front se déplace d'un nœud au nœud suivant ; qui est aussi compliquée et n'offre pas un suivi continu du front.

Une méthode plus souple est la méthode Enthalpique, inventée par Eyres en 1946, qui introduit la fonction enthalpie comme variable de calcul. Beaucoup de développements étaient portés à la méthode.

APPLICATIONS

Les processus faisant intervenir le changement de phase sont nombreux dans la nature et d'un intérêt pratique et industriel. Des domaines aussi variés que la cosmologie, la géologie, le stockage d'informations sur disques DVD réinscriptibles, le soudage, la microélectronique, la médecine, la métallurgie et le revêtement de surface sont concernés. Dans ce dernier domaine, il faut rappeler un tant que ce peut les applications du domaine aéronautique et en particulier le revêtement de surfaces qui doivent subir les aubes de turbines d'un turboréacteur ou les chambres de combustion des moteurs à explosion pour les protéger contre les hautes températures.

La technique du traitement de surface en générale et toutes les techniques de projection mettent en œuvre le même principe, à savoir la projection à grande vitesse de particules correctement fondues sur un substrat froid, où les particules se solidifient rapidement sous forme de "crêpes". Les revêtements sont obtenus par la superposition d'une multitude de petites "crêpes".

Les matériaux projetables comprennent tous les types et tous les mélanges de céramiques, carbures, plastiques et métaux existant sous forme de poudre ou de fils. C'est l'immense variété des matériaux projetables qui fait de la projection thermique la

technologie la plus souple et la plus diversifiée de tous les procédés de traitements de surfaces.

La chaleur nécessaire à la fusion des matériaux sera fournie soit par la combustion ou la détonation d'un mélange comburant (oxygène ou air) et combustible (gaz ou kérosène) ou par un arc électrique. La température de la flamme est, par ailleurs, un des éléments importants qui différencie les divers procédés.

La vitesse est l'autre facteur tout à fait essentiel qui influence directement les propriétés du revêtement obtenu.

L'obtention d'un revêtement dense et adhérent exige que

- Une fraction importante des particules injectées soit dans un état liquide ou semi-pâteux lorsqu'elles atteignent le substrat ou les particules précédemment déposées.
- Les particules fondues aient une vitesse suffisante pour "s'étaler" et couler sur les irrégularités du substrat ou sur les particules précédemment déposées.
- Une forte adhérence inter-particules et particule-substrat soit établie.

D'où la nécessité de la maîtrise du problème du changement de phase.

On peut également citer les problèmes que rencontre l'exploitation des avions à cause de la formation de givre dans les pays de grand froid.

La présence du givre sur la cellule d'un avion diminue drastiquement le coefficient de portance et les performances aérodynamiques ainsi exigées aux conditions optimales de décollage.

A titre d'information on peut noter que le dégivrage « deicing » exige l'emploi d'un fluide Newtonien, alors que l'empêchement de la formation du givre « anti-icing » nécessite en revanche l'emploi d'un fluide Non Newtonien.

Dans le domaine sidérurgique, la qualité des métaux obtenus par coulé dépend essentiellement de la maîtrise du processus thermique « phénomènes de micro et de macro ségrégation » d'où l'intérêt des expériences réalisées sous gravité réduite pour fabriquer de nouveaux cristaux « expérience de la navette américaine Columbia et la station Mir Russe ».

POSITION DU PROBLEME ET OBJECTIFS

Etant donné la complexité du problème de solidification ou de fusion, nous ne traiterons que les géométries unidimensionnelles sans la présence de la convection interne qui peut naître à cause des gradients de température, de densité et de concentration. On ne considérera que le changement de phase sous son aspect diffusif (Problème de Stefan).

Le but primordial est de déterminer la vitesse de déplacement du front, et de donner la distribution de température en un point et temps quelconques.

On choisira la solution de Neumann pour la résolution analytique d'un modèle à une seule phase puis à deux phases.

Après, on va appliquer la méthode Enthalpique sur les mêmes modèles, à fin de faire une comparaison entre les deux méthodes,

Pour aller plus loin, la géométrie plane du modèle unidimensionnel sera changée en une géométrie sphérique avec une condition de type Robin.

En fin, discuter les résultats obtenus et tirer des conclusions.

CHAPITRE I
GENERALITES SUR LE CHANGEMENT DE PHASE

I-1 ETUDE EXPERIMENTALE DES DIAGRAMMES DE PHASE

I-1-1 DETERMINATION ET INTERPRETATION DES DIAGRAMMES

En suivant la solidification d'un métal pur soumis à un refroidissement lent grâce à un thermocouple, la courbe d'analyse thermique (variation de la température avec le temps figure 2) présente un palier qui correspond à une période de coexistence du liquide et de cristaux de solide et définit la température de solidification du métal.

Avec un alliage la courbe de refroidissement est moins simple; elle comporte une ou plusieurs branches raccordées en des points anguleux et parfois un palier isotherme.

Mais ce n'est que très exceptionnellement que la solidification d'un alliage binaire s'opère en totalité à température constante comme celle d'un métal pur. Chaque point singulier de la courbe de refroidissement correspond à un changement du nombre de phase en présence, ce qui permet de déterminer les intervalles de température à l'intérieur desquels le système comporte un même nombre de phases.

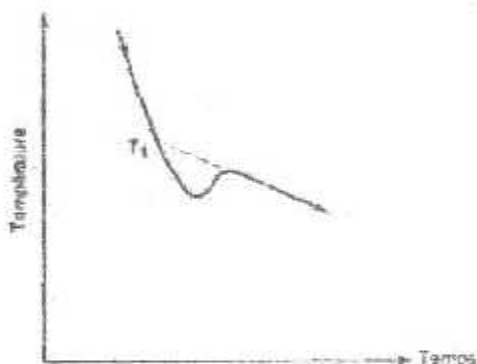


Figure1: Détermination de la température
Du liquidus d'un alliage

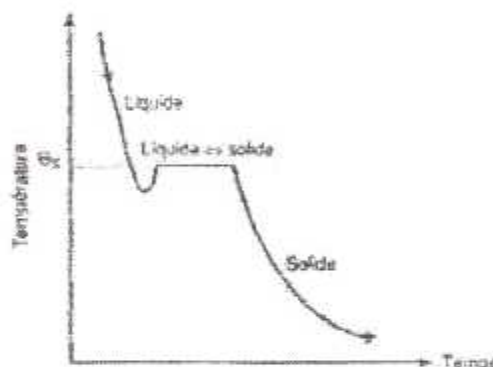


Figure2: courbe d'analyse thermique
d'un métal pur

Sur un diagramme température-composition des alliages, les points de début et de fin de solidification engendrent deux courbes dites liquidus et solidus.

Ce diagramme d'équilibre peut être lu de deux façons :

- 1- Température de début et de fin de solidification d'un alliage de composition donnée
- 2- A une température donnée, domaines de concentration où existe une seule phase, liquide ou solide, ou au contraire, coexistent ces deux phases.

À l'aide du diagramme binaire AB, suivons la solidification d'un alliage riche en A et de composition C_1 (figure3). A la température T_1 du liquidus, apparaissent des cristaux de composition C'_1 plus riches en soluté B que le liquide initial. Au fur et à mesure que la température baisse, le liquide s'appauvrit en B et le point représentatif de sa composition se déplace le long du liquidus tandis que la composition des cristaux suit le solidus. A toute température intermédiaire telle que T_2 , coexistent une phase liquide et des cristaux dans des proportions données par la règle du bras de levier. La solidification s'achève avec la disparition de la dernière goutte de liquide de composition C_3 à la température T_3 .

Cette description est quelque peu idéale; elle suppose en effet qu'à tout moment le système reste en équilibre, autrement dit que le liquide et le solide ont des compositions uniformes. Cette condition peut être réalisée par le liquide, mais certainement pas par le solide, car les processus de diffusion requis pour homogénéiser la composition des cristaux ne sont pas assez rapides; le cœur des cristaux reste plus riche en B que leur peau qui vient de se solidifier. Néanmoins il est raisonnable de supposer un équilibre local: à l'interface liquide/solide.

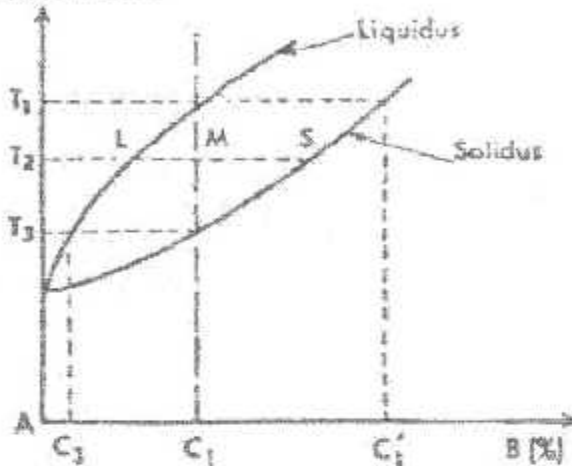


Figure 3 Solidification par refroidissement lent d'un alliage binaire de composition C_1 .

L'exploitation des courbes d'analyse thermique est en outre assez délicate du fait de deux particularités :

1) le début de la solidification s'opère fréquemment avec un certain retard: c'est la surfusion; elle est suivie d'une remontée de la température jusqu'au palier de solidification isotherme dans le cas d'un métal pur (figure 2). Dans le cas d'un alliage, la température de liquidus doit être déterminée par extrapolation (figure 1).

2) la température de fin de solidification est généralement difficile à apprécier sur les courbes d'analyse thermique en raison de la non homogénéité du solide. Pour établir le solidus, il est préférable de déterminer la température de début de fusion au cours du réchauffage d'alliages soigneusement homogénéisés à l'état solide.

I-1-2 MISCIBILITE COMPLETE A L'ÉTAT SOLIDE

La miscibilité complète des deux constituants d'un alliage binaire est assez rare à l'état solide. Ces alliages peuvent présenter deux formes de diagramme:

- Diagramme à un seul fuseau
- Diagramme à deux fuseaux : Le liquidus et le solidus ont un point de contact avec une tangente commune à une température supérieure ou plus souvent inférieure aux températures de solidification des deux constituants de base (figure 4). Le mécanisme de la solidification est identique à celui qui a été décrit plus haut (figure 3), cependant l'alliage dont la composition se situe au minimum du diagramme se solidifie comme un corps pur (fusion congruente).

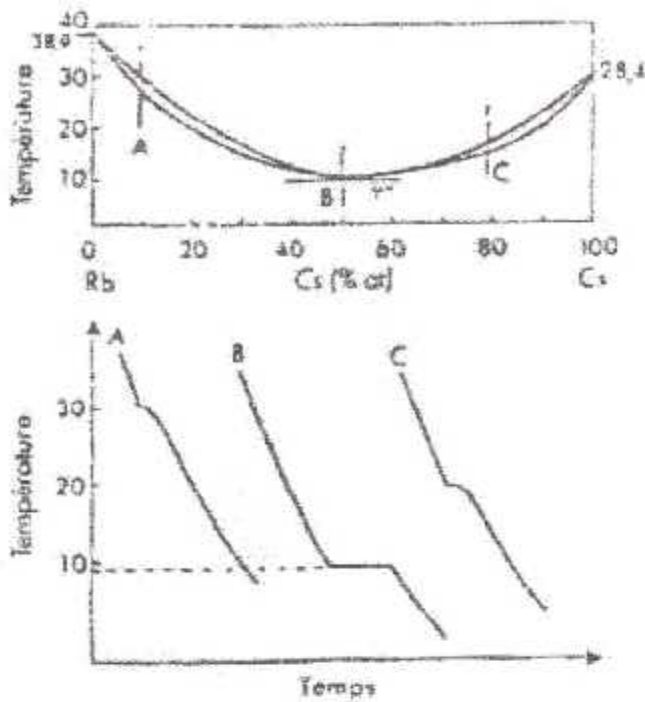


Figure 4 Diagramme à deux fuseaux et courbes d'analyse thermique pour trois alliages

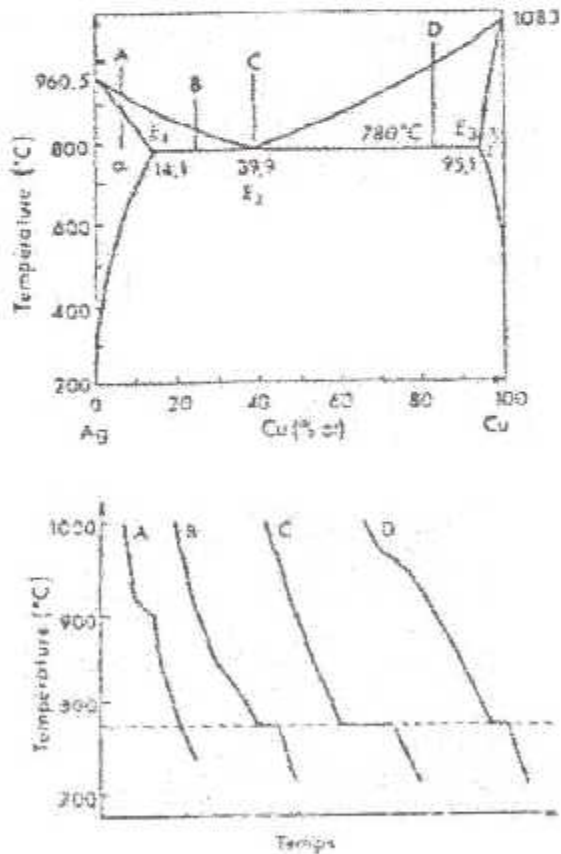


Figure 5 Diagramme d'équilibre de type eutectique et courbe d'analyse thermique pour quatre alliages.

I-1-3 MISCIBILITE PARTIELLE A L'ÉTAT SOLIDE

C'est le cas général. La situation la plus simple est celle de deux solutions solides terminales. Les deux fuseaux de solidification se raccordent pour une valeur intermédiaire de la composition en un point d'équilibre invariant entre une phase liquide et deux phases solides. Suivant la température de ce point par rapport aux températures de fusion des constituants purs deux cas se présentent :

I-1-3-1 DIAGRAMME AVEC POINT EUTETIQUE

La température de ce point est inférieure aux températures de fusion des deux constituants purs figure5. Les courbes d'analyse thermique présentent un palier à la température eutectique correspondant à l'équilibre :



La longueur du palier est maximale pour l'alliage de composition eutectique : cet alliage se solidifie en totalité à température constante comme un corps pur.

Exemple : $Ag - Cu, MgO - CaO$

I-1-3-2 DIAGRAMME AVEC POINT PÉRITECTIQUE

La température du point invariant: est intermédiaire entre les températures de fusion des deux constituants (figure6). L'analyse thermique montre un palier à la température péritectique correspondant à l'équilibre invariant :



La solidification des alliages de composition située dans le domaine P_1P_2 commence par des cristaux de la solution β dont la composition évolue jusqu'au point P_3 à la température péritectique. Alors commence la transformation isotherme de β en phase α (composition P_2) au sein du liquide de composition P_1 . Lorsque cette transformation est achevée, il reste encore du liquide qui se solidifie en suivant le fuseau correspondant (courbe B de la figure avec deux branches de part et d'autre du palier).

Les alliages de composition située dans le domaine P_2P_3 suivent à peu près le même processus ; mais à la fin de la solidification péritectique, il ne reste plus de liquide et l'on obtient directement un mélange $\alpha + \beta$. La courbe d'analyse thermique (courbe C) ne présente qu'une branche anisotherme précédant le palier. Les alliages à concentration inférieure à P_2 ou supérieure à P_3 sont monophasés. Les alliages situés entre P_2 et P_3 sont diphasés, la fraction de phase α passe de 100% à 0 lorsque la composition passe de P_2 à P_3 .

Exemple : $Fe - C, Ag - Pt, ZrO_2 - CaO...$

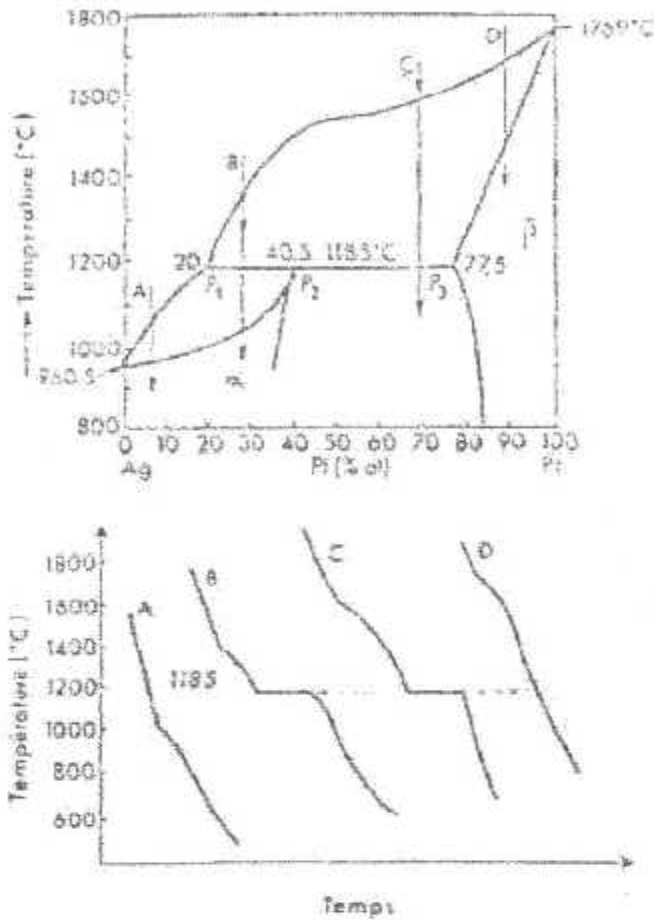


Figure 6 Diagramme d'équilibre type péritectique et courbes d'analyse thermique de quatre alliages.

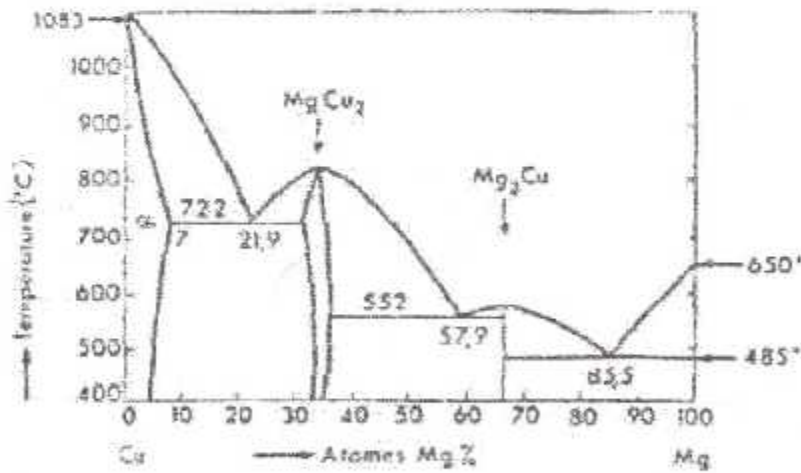


Figure 7 Diagramme d'équilibre du système Cu-Mg

I-2 INTERPRÉTATION THERMODYNAMIQUE

Pour déterminer l'état d'un système à n constituants à l'équilibre, il faut étudier la variation de son enthalpie libre de mélange en fonction de la composition à la température considérée, puis suivre son évolution avec la température.

I-2-1 VARIATION DE L'ENTHALPIE LIBRE

Des cas typiques d'alliages binaires peuvent être facilement discutés qualitativement. Le terme $-T\Delta S$ est toujours négatif, par contre le terme d'enthalpie de mélange ΔH peut être positif, négatif ou nul.

- Solution idéale : $\Delta H = 0$. La courbe de variation de ΔG présente un minimum (et deux tangentes verticales aux extrémités) (Figure 8.I)
- Enthalpie de mélange négative. ΔG présente un minimum plus important que dans le cas précédent (figure 8.II)
- Enthalpie de mélange faiblement positive. ΔG présente un minimum moins important (figure 8.III)

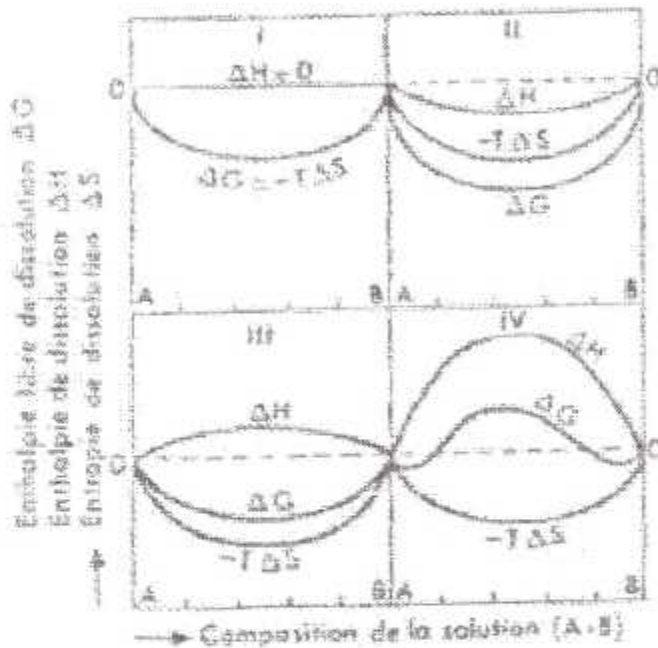


Figure 8 Variation de l'enthalpie libre avec la composition suivant des valeurs et le signe de l'enthalpie de mélange

- Enthalpie de mélange fortement positive. Elle surpasse le terme entropique sauf au voisinage des corps purs, d'où une courbe avec un maximum et deux points d'inflexion (figure 8.IV).

I-2-2 RELATIONS ENTRE LES COURBES D'ENTHALPIE LIBRE ET LES DIAGRAMMES DE PHASE

Il suffit de tracer les courbes $\Delta G(X)_T$ des phases liquide et solide(s); les tangentes communes délimitent les domaines mono-, di- et triphasés.

I-2-2-1 MISCIBILITÉ COMPLÈTE À L'ÉTAT SOLIDE

Les figures 9 et 10 présentent les cas des diagrammes à un seul et à deux fuseaux pour des températures qui coupent le (les) fuseau(x).

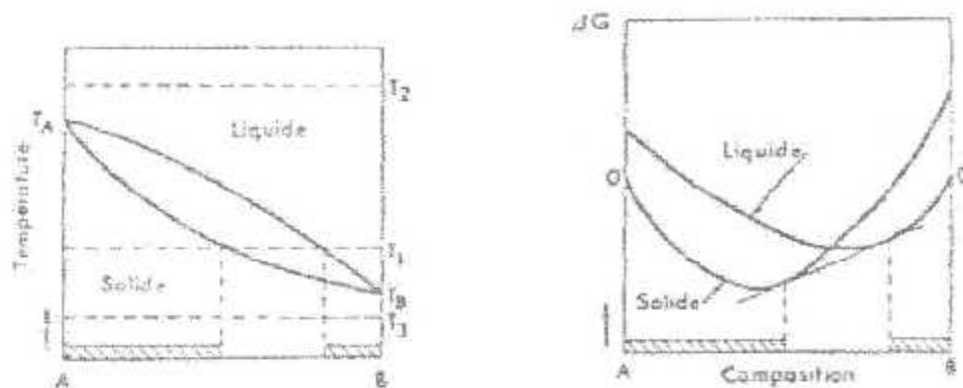


Figure 9 Diagramme à deux fuseaux. Enthalpie libre du solide et du liquide à la température T_1 .

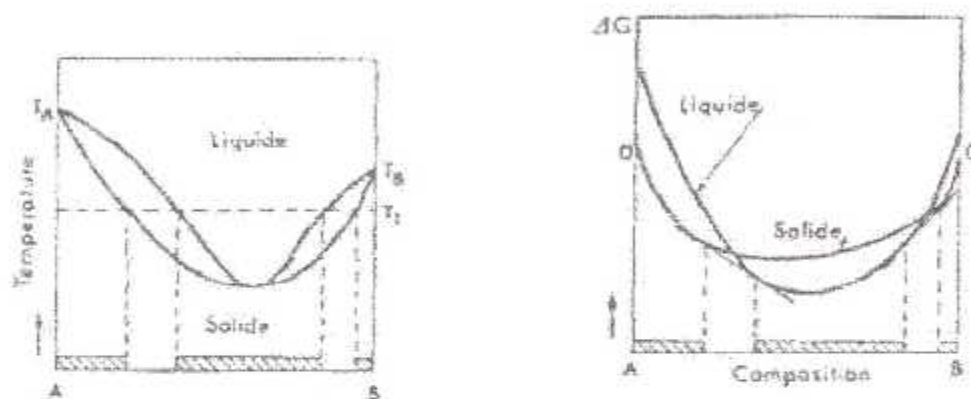


Figure 10 Diagramme à un seul fuseau. Enthalpie libre du liquide et du solide à la température T_1 . L'état standard est le solide pour les deux constituants

I-2-2-2 ALLIAGES A EUTÉCTIQUE OU PÉRITÉCTIQUE

Il faut considérer les courbes ΔG du liquide et des deux phases solides. L'eutectique correspond à une situation où le minimum du liquide se situe entre les minimums des solides (figure 11). La figure ne diffère que peu du cas précédent, si ce n'est que les deux fuseaux qui sont maintenant indépendants. A la température eutectique, il existe une tangente commune aux trois phases (équilibre invariant).

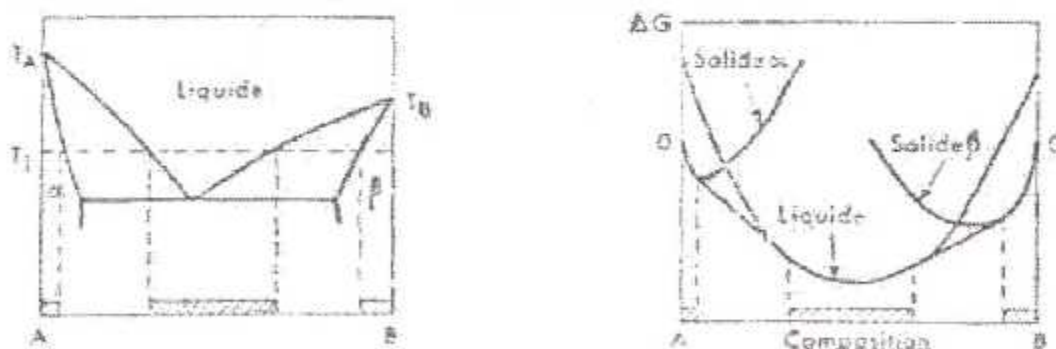


Figure 11 Diagramme de type eutectique. Enthalpie libre du liquide et des deux solides à la température T_1 .

Dans le cas péritectique (figure12), la position relative des trois courbes est inversée, la courbe du liquide se trouvant à une extrémité du graphc. A la température péritectique, les deux tangentes se confondent en une seule.

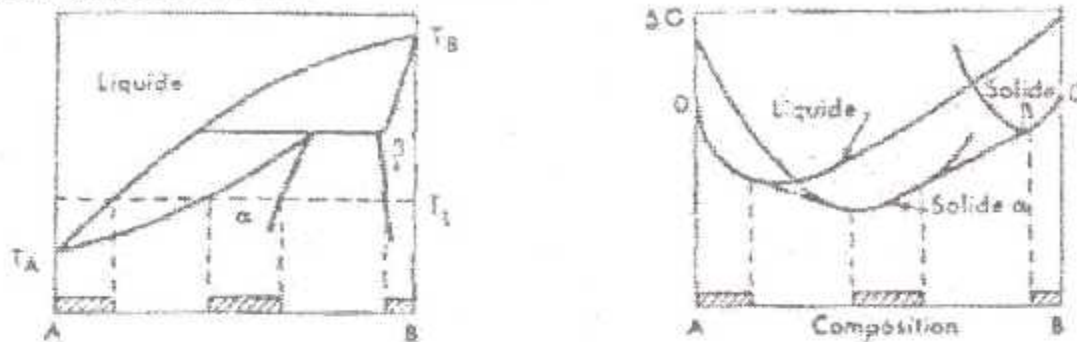


Figure 12 Diagramme de type péritectique. Enthalpie libre du liquide et des deux solides à la température T1.

I-2-2-3 CORPS PURS ET COMPOSÉS INTÉRMÉDIAIRES

En l'absence totale de solubilité, le corps pur est indiqué par un point correspondant à la valeur de son enthalpie libre qui n'est pas susceptible de variation. Une légère solubilité se traduira par une courbe d'allure parabolique très étroite avec un minimum très accentué. Il en va de même pour les phase intermédiaires suivant qu'elles sont strictement stœchiométriques ou non : plus les écarts à la composition stœchiométrique sont importants et plus la courbe ΔG sera «ouverte». La figure13 montre comment le domaine d'existence du composé peut être réduit par un accroissement de la stabilité des phases terminales, ce qui explique sa variation avec la température.

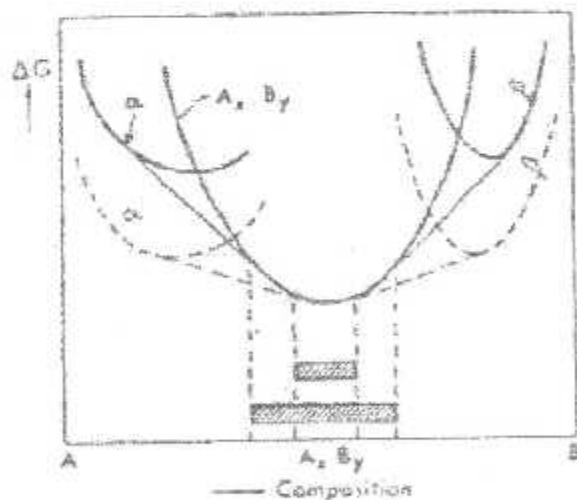


Figure 13 : influence de la stabilité relative d'un composé en équilibre avec deux solutions solides sur le domaine de stabilité du composé.

I-3 CINÉTIQUE DE LA SOLIDIFICATION

La solidification est un phénomène complexe du fait de plusieurs modes de germination et d'une croissance régie par l'évacuation de la chaleur latente de solidification et la redistribution des solutés face à des conditions pratiques très variées. La figure14

schématise les conditions thermiques les plus courantes de la solidification; mais des conditions différentes sont réalisées au cours de la solidification directionnelle, du soudage ou des traitements superficiels par laser.

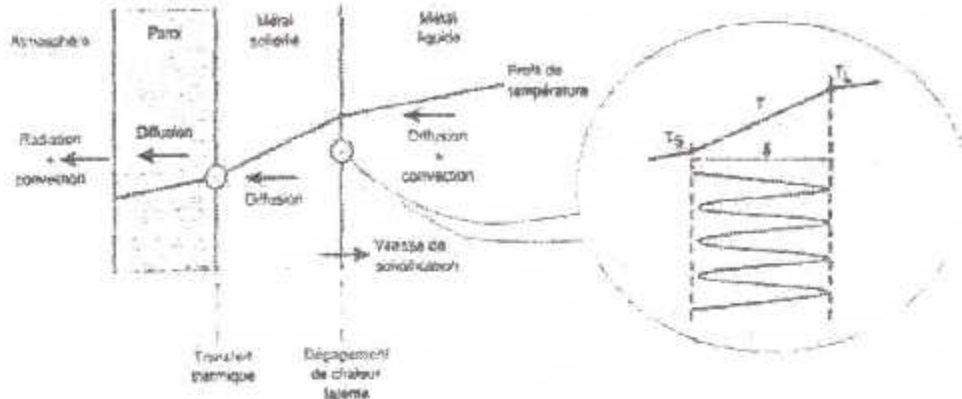


Figure 14 Ecoulement de la chaleur au cours de la solidification au contact d'une paroi froide. La bulle montre le front de solidification en croissance colonnaire dendritique.

I-3-1 CONDITIONS DE LA SOLIDIFICATION

Pour que la solidification démarre, une certaine surfusion est requise (taux de germination suffisant). Pour qu'elle se poursuive, la chaleur latente de solidification doit être évacuée ; la croissance des cristaux est régie par les processus d'évacuation et d'extraction de la chaleur qui imposent la vitesse de refroidissement. On peut donc classer les procédés de solidification suivant la vitesse de refroidissement qui peut varier de 10^{-3} à 10^7 (ou plus) $K.s^{-1}$. Citons les principaux : tirage de monocristaux, fonderie dans des moules de sable ou de réfractaire, coulée en lingots dans des lingotières métalliques, coulée continue de produits plats, coulée en bandes mince ou très minces, atomisation d'un jet de métal liquide (refroidissement des gouttes par jets de liquide ou de gaz).

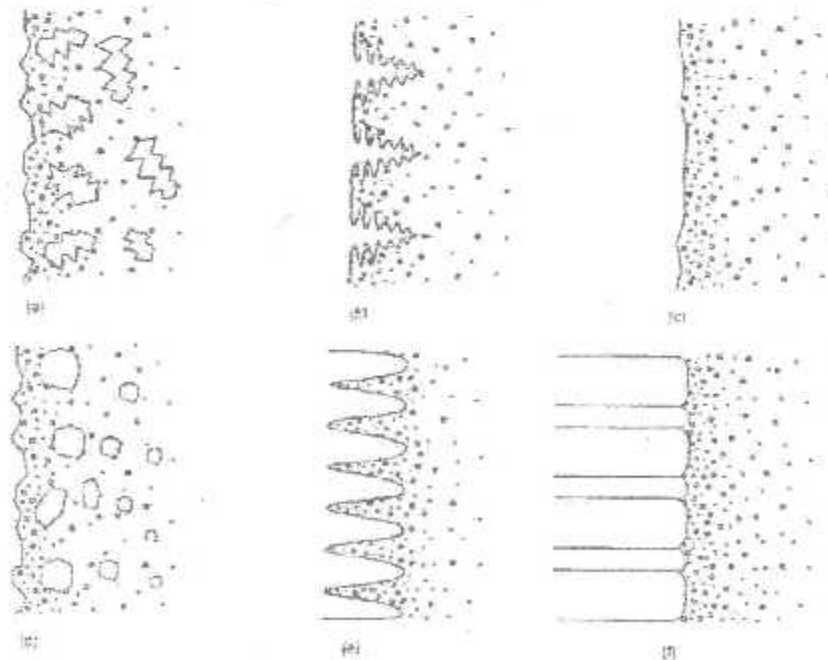


Figure 15 Faciès de solidification

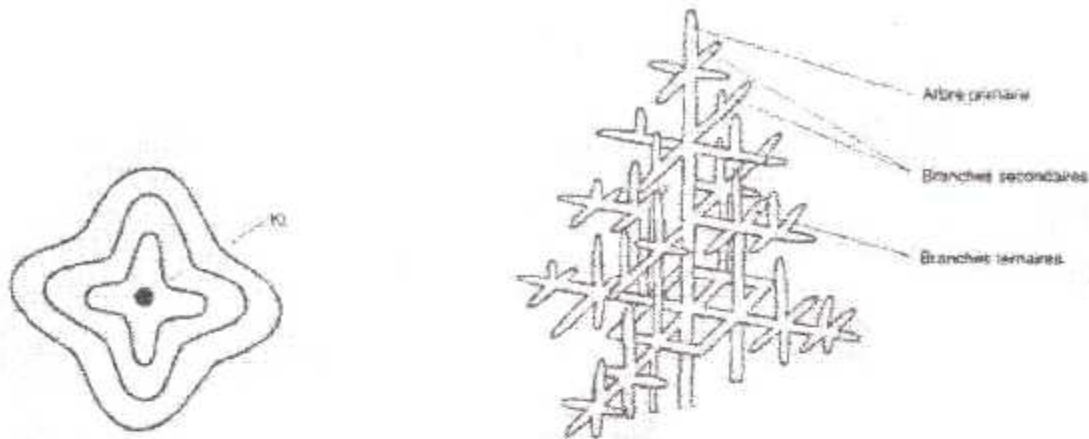


Figure 16 Ségrégation mineure (a) et croissance dendritique (b); section schématique d'une dendrite illustrée par quelques courbes d'égalité concentration.

Dans les alliages on peut observer six faciès de solidification (figure 15) : colonnaire dendritique, cellulaire, équiaxe dendritique, équiaxe non dendritique front plan avec solide monophasé ou diphasé, sans compter l'état amorphe. Une dendrite (figure 16.b) est constituée d'un squelette tridimensionnel (un tronc et des branches primaires, secondaires..., d'où son nom tiré du grec : dendron = arbre). La solidification se poursuit sur cette base pour donner naissance aux grains de solidification ou de coulée, et s'accompagne d'une ségrégation des éléments d'alliage. Pour des alliages qui se solidifient sur un certain domaine de température, sous un gradient assez fort et faible convection, la structure est généralement colonnaire dendritique (figure 15.b). Pour des gradients plus forts et une croissance lente, la structure est plutôt cellulaire (e). De faibles gradients thermiques, l'agitation du liquide ou la présence d'inoculant (affineurs de grains) favorisent la structure équiaxe dendritique. Une agitation rigoureuse et des inoculants très efficaces conduisent à une solidification équiaxe non dendritique. Par solidification ultrarapide, on peut obtenir des structures non cristallisées (amorphes ou verres métalliques).

CHAPITRE II
PRESENTATION DU PROBLEME DE STEFAN

II INTRODUCTION

Lorsqu'un matériau est soumis à un processus de chauffage la répartition de la température ne sera pas uniforme, il arrive que des régions vont atteindre la température de fusion du matériau, et évidemment elles vont fondre. Le reste du milieu va continuer à augmenter de température jusqu'à la fusion du matériau au total. Avant que le matériau ne fonde totalement il va se diviser en phases, une phase liquide une autre solide et une interface liquide-solide qui les sépare et qui se déplace de la phase solide vers la phase liquide (selon le processus). C'est ce mouvement, dû à la répartition non uniforme de la température, qui nous intéresse.

La première étude publiée dans ce sens là est celle de Josef Stefan en 1889 lors d'une étude sur la congélation de la glace. Et c'est pour cette raison que le problème est fréquemment connu par: "le problème de Stefan".

II-1 LIMITATIONS SUR LES MODELES

Stefan a pu avoir la solution analytique exacte, mais en imposant des conditions aux limites simples qui sont un peu loin de la réalité. La solution analytique du problème est très difficile et n'a été obtenue que dans des cas très particuliers. La raison de cette difficulté est que les solutions particulières de l'équation à dérivée partielle qui régit le problème sont inconnues lorsqu'on impose des conditions aux limites correspondant à la réalité physique.

Le seul modèle, dans les géométries planes, pour lequel on a peut trouvé la solution analytique est le modèle semis infini avec des conditions aux limites du premier type. De plus la convection naturelle, à l'intérieur du matériau, est à éliminer.

D'autre part, dans des géométries sphériques ou cylindriques des solutions simplifiées ont aussi peut être trouvée mais dans des conditions proches des précédentes.

Mais toutefois, des solutions numériques approchées, d'intérêt pratique, peuvent donner des résultats satisfaisants.

II-2 STEFAN A UNE SEULE PHASE

En effet il y a deux approches pour la résolution du problème de Stefan: à 1-phase et à 2-phases.

- La première consiste à considérer seulement une phase active, l'autre phase reste à la température de fusion constante.
- la deuxième considère les deux phases actives et cherche la distribution de la température dans les deux.

Supposons qu'on a un phénomène de solidification.

Donc pour la première approche notons que les grandeurs indicées par S sont celles du solide, et par L celles du liquide:

$$\rho_s c_s \frac{\partial T}{\partial t} = k_s \left(\frac{\partial^2 T_s}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T_s}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T_s}{\partial z^2} \right) \text{ c'est la phase active}$$

Pour l'autre phase (liquide) qui était initialement à la température de fusion, elle reste à sa température de fusion :

$$T_L = T_m$$

Le long du front du changement de phase, les températures sont égales à la température de fusion:

$$T_l = T_s = T_m$$

et l'on a, pour les composantes normales des densités de flux de chaleur, la relation:

$$k_s \frac{\partial T_s}{\partial x} - k_l \frac{\partial T_l}{\partial x} = L \cdot \rho \cdot \frac{dX}{d\tau}$$

où $\frac{dX}{d\tau}$ est la vitesse normale du front.

II-3 STEFAN A DEUX PHASES

Il y a deux régions, l'une solide (indice S) où l'équation de la chaleur s'écrit:

$$\rho_s c_s \frac{\partial T}{\partial t} = k_s \left(\frac{\partial^2 T_s}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T_s}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T_s}{\partial z^2} \right),$$

et l'autre liquide (indice L) où l'on a:

$$\rho_l c_l \frac{\partial T}{\partial t} = k_l \left(\frac{\partial^2 T_l}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T_l}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T_l}{\partial z^2} \right).$$

Le long du front du changement de phase, les températures sont aussi égales à la température de fusion:

$$T_l = T_s = T_m$$

et l'on a, pour les composantes normales des densités de flux de chaleur, la relation:

$$k_s \frac{\partial T_s}{\partial x} - k_l \frac{\partial T_l}{\partial x} = L \cdot \rho \cdot \frac{dX}{d\tau}$$

où $\frac{dX}{d\tau}$ est la vitesse normale du front.

La résolution sera faite dans le chapitre suivant « méthodes de résolution ».

CHAPITRE III
METHODE DE RESOLUTION

III-1 SOLUTION EXACTE

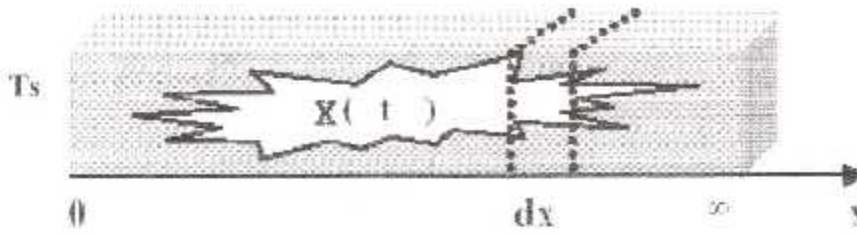


Figure 17 Cas unidimensionnel géométrie semi infinie

Pour un cas générale on va noter ρ, c_1, k_1 et α_1 , les constantes thermiques du matériau dans la phase solide et T_1 sa température; les valeurs correspondantes de la phase liquide seront ρ, c_2, k_2, α_2 et T_2 .

On suppose aussi que le changement du volume on solidification sera négligeable, par conséquent la densité ρ sera la même dans la phase solide et liquide.

Et que L est la chaleur latente de fusion du matériau et T_m son point de fusion (température de fusion).

Sur la surface de séparation entre la phase liquide et solide (c'est l'interface solide-liquide) repérée par $X(\tau)$, il y aura satisfaction de la condition:

$$T_1 = T_2 = T_m, \text{ lorsque } x = X(\tau) \dots\dots\dots (1)$$

Une seconde condition limite concerne l'absorption ou la libération de la chaleur latente sur la surface. Pour se fixer les idées, on va supposer que la région $x > X(\tau)$ contient le liquide à la température $T_2(x, \tau)$, et que la région $x < X(\tau)$ contient le solide à la température $T_1(x, \tau)$ (c'est-à-dire un problème de solidification).

Lorsque l'interface se déplace d'une distance de dX , une quantité de chaleur $L \cdot \rho \cdot dX$ par unité de surface est libérée, et sera véhiculée par conduction.

Cela implique:

$$k_1 \frac{\partial T_1}{\partial x} - k_2 \frac{\partial T_2}{\partial x} = L \cdot \rho \cdot \frac{dX}{d\tau} \dots\dots\dots (2)$$

(1) et (2) sont les conditions limites qui doivent être satisfaites à l'interface solide-liquide (idem pour un problème de fusion ou la quantité $L \cdot \rho dX$ sera absorbée et véhiculée par conduction aussi.)

III-1-1 SOLUTION EXACTE A DEUX PHASES

Pour simplifier on suppose l'écoulement linéaire unidimensionnel, les températures T_1 et T_2 dans les régions solides et liquides doivent satisfaire:

$$\frac{\partial^2 T_1}{\partial x^2} - \frac{1}{\alpha} \frac{\partial T_1}{\partial \tau} = 0 \dots\dots\dots (5)$$

$$\frac{\partial^2 T_2}{\partial x^2} - \frac{1}{\alpha} \frac{\partial T_2}{\partial \tau} = 0 \dots\dots\dots (6)$$

En plus de (1), (2), (5) et (6), on doit avoir d'autres conditions aux limites fixes. Ce qui présente beaucoup de cas possibles.

Nous allons considérer le cas suivant:

Solidification d'un matériau fondu, initialement à la température T_0 , avec la surface $x = 0$ maintenue à une température $T_{x=0}$ pour tout $\tau > 0$, et pour une géométrie semi infinie (c'est-à-dire lorsque $x \rightarrow \infty$) donc:

$$T_2 \rightarrow T_0 \quad \text{lorsque} \quad x \rightarrow \infty \dots\dots\dots (7)$$

$$T_1 = T_{x=0} \quad \text{lorsque} \quad x = 0 \dots\dots\dots (8)$$

Pour une expression de la forme:

$$\frac{\partial^2 U_1}{\partial x^2} - \frac{1}{\alpha} \frac{\partial U_1}{\partial \tau} = 0 \dots\dots\dots (**)$$

On a la solution particulière:

$$U = \tau^{\frac{1}{2}} e^{-x^2/4\alpha\tau}$$

Elle a les propriétés suivantes:

$$U \rightarrow 0 \quad \text{lorsque} \quad \tau \rightarrow 0 \quad \text{pour} \quad x \neq 0$$

$$U \rightarrow \infty \quad \text{lorsque} \quad \tau \rightarrow 0 \quad \text{si} \quad x = 0$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} U dx = 2(\pi\alpha)^{\frac{1}{2}}, \text{ pour tout } \tau > 0$$

Il en suit que $\int_{-\infty}^{\infty} \tau^{\frac{1}{2}} e^{-x^2/4\alpha\tau} dx = 2\alpha^{\frac{1}{2}} \int_0^{\infty} e^{-\xi^2} d\xi$ satisfait aussi l'équation différentielle

(**) précédente.

La fonction erreur

On note $erf x = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-\xi^2} d\xi$

On aura alors $A erf \frac{x}{2(\alpha\tau)^{\frac{1}{2}}}$ comme solution de l'équation différentielle (**), où A est

une constante arbitraire déterminée par la conditions et initiales.

La fonction erfc est la fonction complémentaire de la fonction erf et:

$$erfc(x) = 1 - erf(x)$$

Alors:

$$T_1 = A erf \frac{x}{2(\alpha_1\tau)^{\frac{1}{2}}} \dots\dots\dots(9)$$

On déterminera A par (5) et (8).

Et: $T_2 = I_0 - B erfc \frac{x}{2(\alpha_2\tau)^{\frac{1}{2}}} \dots\dots\dots(10)$

Avec B satisfaisant (6) et (7)

Ensuite (1) implique:

$$A erf \frac{x}{2(\alpha_1\tau)^{\frac{1}{2}}} - I_0 - B erfc \frac{x}{2(\alpha_2\tau)^{\frac{1}{2}}} = T_m \dots\dots\dots(11)$$

L'expression (11) doit satisfaire toutes les valeurs du temps, et par conséquent X doit

être proportionnel à $\tau^{\frac{1}{2}}$, cela donne:

$$\boxed{X = 2\lambda(\alpha_1\tau)^{\frac{1}{2}}} \dots\dots\dots(12)$$

Où λ est une constante déterminée par la condition (2). En utilisant (9), (10), et (12)

cela va donner:

$$k_1 A e^{-\lambda^2} - k_2 B \left(\frac{\alpha_1}{\alpha_2}\right)^{\frac{1}{2}} e^{\frac{\alpha_2 \lambda^2}{\alpha_1}} = \lambda I_0 \alpha_1 \rho \pi^{\frac{1}{2}} \dots\dots\dots(13)$$

Ou bien en utilisant (11) et (12)

$$\frac{e^{-\lambda^2} k_2 \sqrt{\alpha_1} (T_0 - T_m) e^{-\alpha_1 x^2 / \alpha_2}}{\operatorname{erf} \lambda k_1 \sqrt{\alpha_2} (T_m - T_s) \operatorname{erfc} \lambda \sqrt{\alpha_1 / \alpha_2}} = \frac{\lambda L \sqrt{\pi}}{c_1 (T_m - T_s)} \quad (14)$$

Après trouver λ de (14), T_1 et T_2 peuvent être écrites d'après (9), (10), (11), et (12):

$$T_1 = \frac{(T_m - T_s)}{\operatorname{erf} \lambda} \operatorname{erf} \left(\frac{x}{2(\alpha_1 \tau)^{1/2}} \right) + T_s \quad (15)$$

$$T_2 = T_0 - \frac{(T_0 - T_m)}{\operatorname{erfc} \left[\lambda (\alpha_1 / \alpha_2)^{1/2} \right]} \operatorname{erfc} \left(\frac{x}{2\sqrt{\alpha_2 \tau}} \right) \quad (16)$$

La solution de (14) est donnée numériquement en utilisant les tables de la fonction erreur.

III-1-2 SOLUTION EXACTE A UNE SEULE PHASE

Seul la condition (6) va changer pour devenir

$$T_2(x, t) = T_m \quad (6^*)$$

Plus la condition initiale qui doit être $T_0 = T_m$.

De la même façon on aura l'équation du front:

$$X = 2\lambda(\alpha_1 \tau)^{1/2}$$

λ et la racine de :

$$\lambda^* e^{x^*} \operatorname{erf}(\lambda) = \frac{c_1 (T_m - T_s)}{L^* \sqrt{\pi}} \quad (14^*)$$

T_1 et T_2 sont données par :

$$T_1 = \frac{(T_m - T_s)}{\operatorname{erf} \lambda} \operatorname{erf} \left(\frac{x}{2(\alpha_1 \tau)^{1/2}} \right) + T_s \quad (15^*)$$

$$T_2 = T_m \quad (16^*)$$

Application numérique

On prend les paramètres suivant correspondant à l'eau :

Où l'eau à l'état solide (glace) se trouve initialement à sa température de fusion $T_0 = T_m$, à l'instant $t=0$ la température de sa surface en $x=0$ est instantanément élevée à la température de 25°C , puis maintenue constante.

(Une petite modification est faite sur les unités à fin de bien présenter les résultats)

$$T_\infty = 0,$$

$$T_0 = T_m$$

$$T_s = 25^\circ\text{C}$$

$$c = 4.1868 \text{ J/g} \cdot ^\circ\text{C}$$

$$L_f = 333.4 \text{ J/g}$$

$$\alpha = \frac{k}{\rho \cdot c} \left[\frac{\text{cm}^2}{\text{hr}} \right]$$

$$k_1 = 20.304 \text{ J/cm}^2 \cdot \text{hr} \cdot ^\circ\text{C}$$

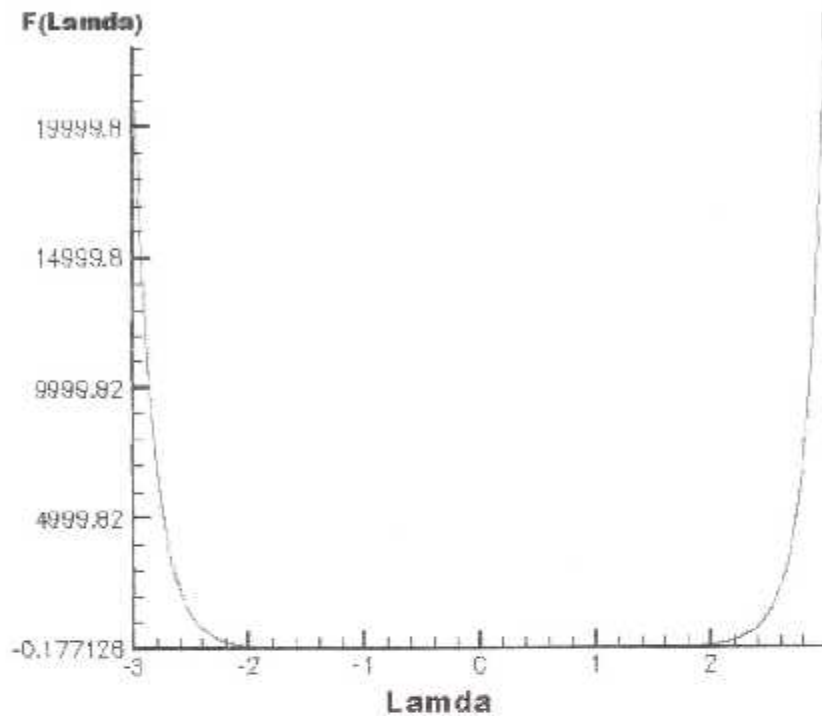
$$\text{longueur} = 1\text{m}$$

Remarque :

Pour aborder les deux changements (c'est-à-dire : la fusion et la solidification) et montrer qu'ils obéissent à une même logique, on choisira la fusion pour le cas à une seule phase et la solidification pour celui à deux phases, en prenant, bien sûr, les conditions aux limites en considération.

Pour l'approche à 1-phase (fusion)

$$F(\lambda) = \frac{e^{-\lambda^2}}{\operatorname{erf}\lambda} - \frac{\lambda L \sqrt{\pi}}{c_1 (T_w - T_s)}$$

Figure 18 Graphe présentant $F(\lambda)$ (à 1-phase)

La solution approchée acceptable sera $\lambda = 0.37764$

On trace maintenant $X(t)$ donné par l'équation (12), on peut même calculer le temps nécessaire pour qu'un tube de glace de longueur l fonde totalement grâce à cette équation.

En effet :

$$X = 2\lambda(\alpha t)^{\frac{1}{2}} \Rightarrow t = \frac{1}{\alpha} \left(\frac{X(t)}{2\lambda} \right)^2, \text{ pour une longueur } l; t = \frac{1}{\alpha} \left(\frac{l}{2\lambda} \right)^2$$

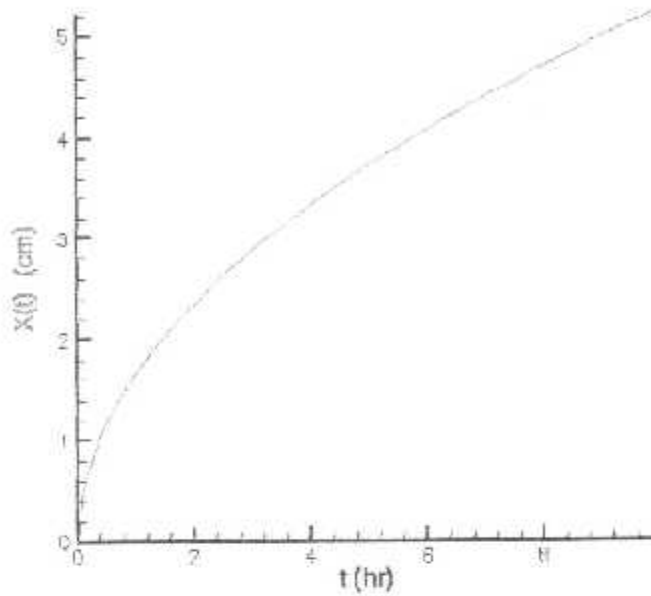


Figure 19 le front de fusion obtenu analytiquement

Pour tracer l'historique de la température d'un point n de coordonnées X_n , on doit connaître l'instant t_n pour lequel le front de fusion atteint ce point, puis utiliser l'équation (16) après t_n , avant t_n la température reste égale à T_m (problème à 1-Phase). à l'instant t_n le front se trouve sur le point considéré et $T_n = T_m$ aussi.

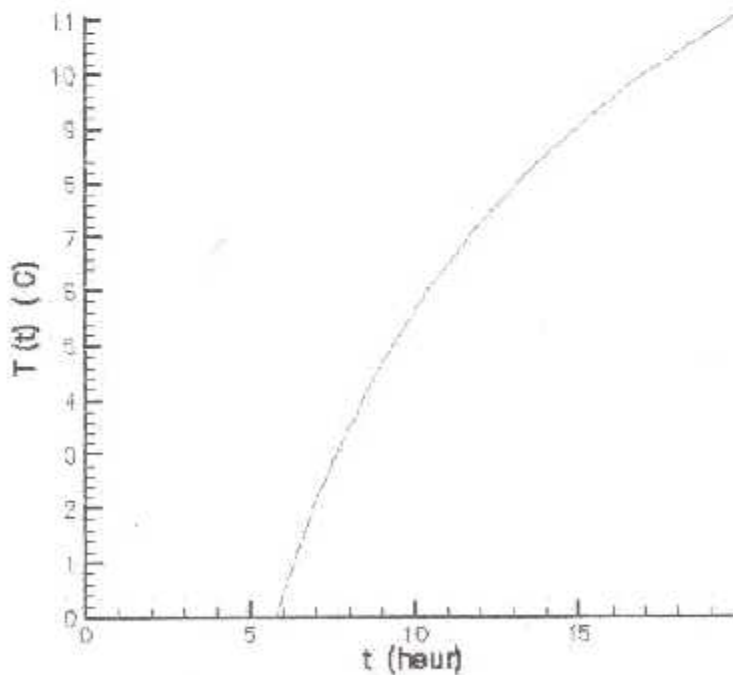
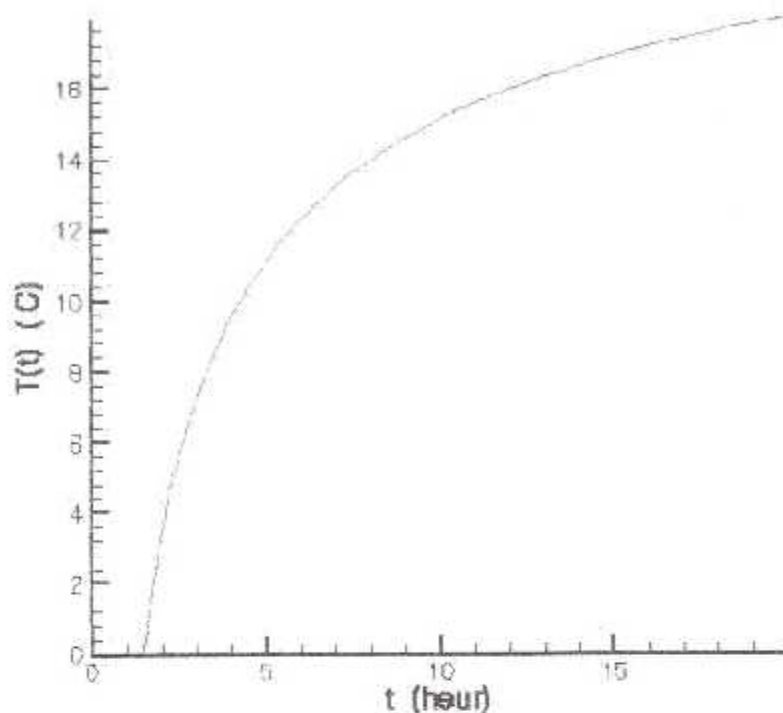


Figure 20 Historique de la température pour $X_n=4\text{cm}$

Figure 21 historique de la température pour $X_n=2\text{cm}$

Pour une approche à 2-phases (solidification)

Pour le même modèle sauf que :

$$T_m = 0,$$

$$T_0 = 2^\circ\text{C}$$

$$T_s = -10^\circ\text{C}$$

On trace la fonction $F(\lambda) = 0$ qui découle encore de l'équation (14) tel que :

$$F(\lambda) = \frac{e^{-\lambda^2}}{\text{erf}\lambda} - \frac{k_2 \sqrt{\alpha_1} (T_0 - T_m) e^{-\alpha_1 \lambda^2 / \alpha_2}}{k_1 \sqrt{\alpha_2} (T_m - T_s) \text{erfc}(\lambda \sqrt{\alpha_1 / \alpha_2})} - \frac{\lambda L \sqrt{\pi}}{c_1 (T_m - T_s)}$$

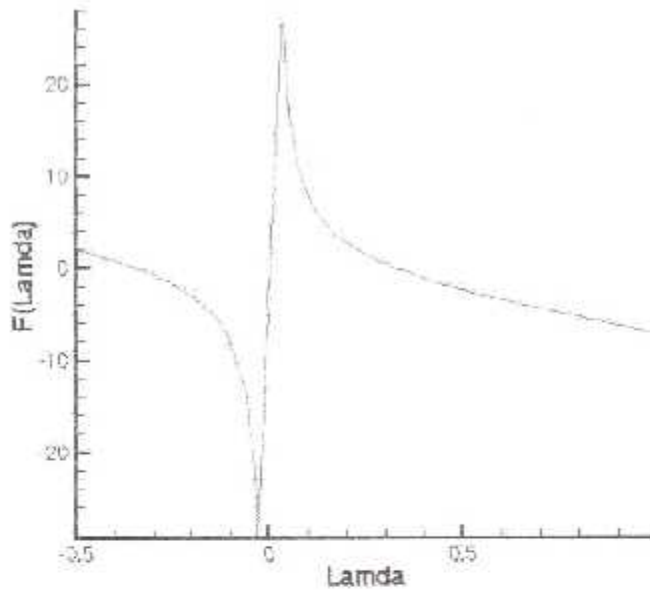


Figure 22 graphe présentant $L'(\lambda)$ (à 2-phases)

La solution approchée sera $\lambda = 3.223888E - 01$

De la même manière que l'approche à une phase on trace maintenant $X(t)$ donné par l'équation (12)

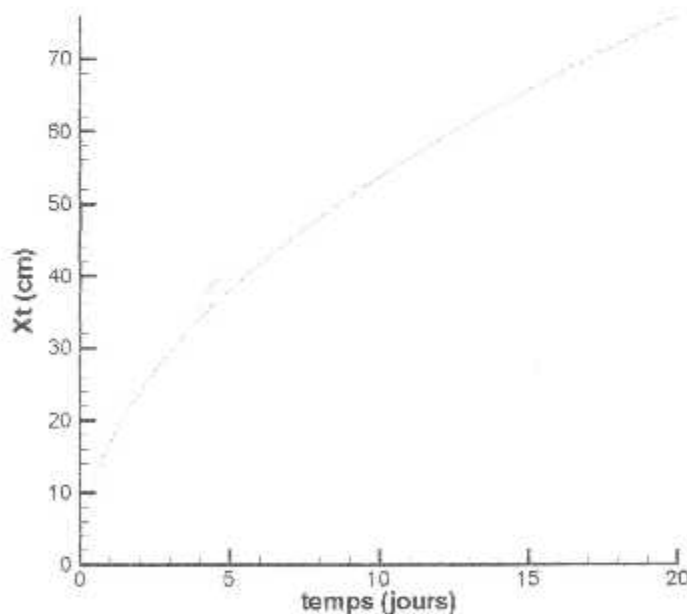


Figure 23 graphe présentant $X(t)$ (à 2-phases)

Pour tracer l'historique de la température d'un point n de coordonnées Xn , on doit connaître l'instant t_n pour lequel le front de fusion atteint ce point, puis utiliser

l'équation (16) après t_n , l'équation (15) avant t_n , et à l'instant t_n le front se trouve sur le point considéré et $T_n = T_m$.

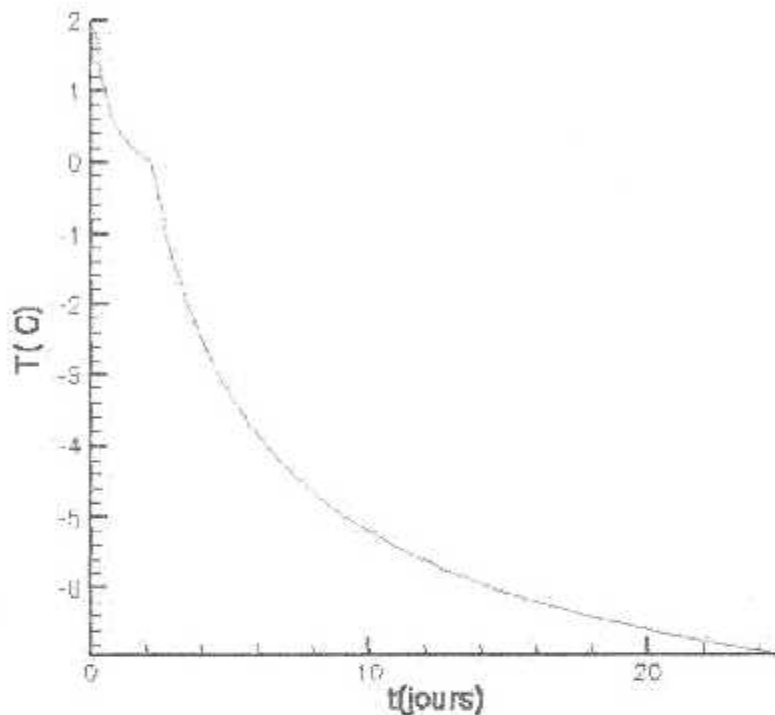


Figure 24 historique de la température pour $X_n=25\text{cm}$

III-2 LA METHODE ENTHALPIQUE

III-2-1 PRESENTATION ET AVANTAGES

La classe des problèmes de Stefan où une solution analytique existe est très petite. Les schémas numériques basés sur l'équation (5*) et (6*) nécessitent la poursuite du changement d'état $x = X(\tau)$.

Et cela rend la majorité des schémas numériques existants difficiles à reformuler.

Une solution pour contourner le problème, c'est de reformuler les équations qui régissent le problème elles-mêmes (c'est-à-dire (5) et (6)), en terme d'enthalpie H (d'où l'appellation de la méthode), qui sera, par la suite, une somme d'une chaleur sensible et d'une chaleur latente de transformation.

Dans ce cas les équations de Stefan se retrouveront sous une seule équation:

$$\rho \frac{\partial H}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left(k \frac{\partial T}{\partial x} \right), \quad x \geq 0 \dots\dots\dots (18)$$

(Cas plan unidimensionnel)

Plus les conditions initiales et aux limites :

$$\begin{cases} \rho \frac{\partial H}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left(k \frac{\partial T}{\partial x} \right) \\ T|_{t=0} = T_{ini} \\ T|_{x=c} = T_s \\ T|_{x=L} = \text{Solution Analytique} \end{cases}$$

La température sera reliée par l'enthalpie via :

$$T = \begin{cases} H/c & , H \leq cT_m \\ T_m & , cT_m \leq H \leq cT_m + L \\ (H-L)/c & , H \geq cT_m + L \end{cases} \dots\dots\dots (19)$$

Et contrairement, on peut écrire :

$$H(T) = \begin{cases} cT & T < T_m \\ cT + L & T > T_m \end{cases} \dots\dots\dots (19^*)$$

Avantages de la procédure

- 1- On n'a aucune condition à satisfaire en $x = X(\tau)$ limite du changement de phase.
- 2- On n'a pas à suivre l'interface solide liquide.
- 3- Ce n'est pas nécessaire de considérer deux régions de part et d'autre du front c'est-à-dire $x = X(\tau)$.
- 4- Il est facile d'introduire une zone maillée, c'est-à-dire où le changement de phase se produira dans un intervalle de température au lieu d'un point singulier.

La représentation en schéma explicite de différence finie de la formulation de la méthode enthalpique donnera :

$$H_i^{j+1} = H_i^j + \frac{k}{\rho} r (T_{i+1}^j - 2T_i^j + T_{i-1}^j) \dots\dots\dots (20)$$

Combinée avec l'équation (19), l'équation (20) fournira un algorithme pour le calcul de "l'historique" de la température d'un écoulement en une dimension.

Pour assurer la convergence du schéma explicite on doit satisfaire la condition :

$$r = \frac{\delta \tau}{\delta x^2} < \frac{\rho c}{2k} \quad (\text{C'est la condition de convergence}).$$

III-2-2 GEOMETRIE PLANE UNIDIMENSIONNELLE AVEC DES CONDITIONS DU PREMIER TYPE

III-2-2-1 A UNE SEULE PHASE

On a à résoudre les équations : $\rho \frac{\partial H}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left(k \frac{\partial T}{\partial x} \right), \quad x \geq 0$

Plus les conditions initiales et aux limites :

$$\begin{cases} \rho \frac{\partial H}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left(k \frac{\partial T}{\partial x} \right) \\ T_{x=0} = T_{ini} = T_m \\ T_{x=L} = T_s \\ T|_{x=L} = \text{Solution Analytique} \end{cases}$$

Toujours avec:

$$T = \begin{cases} H/c & , H \leq cT_m \\ T_m & , cT_m \leq H \leq cT_m + L \\ (H-L)/c & , H \geq cT_m + L \end{cases}$$

et:

$$H(T) = \begin{cases} cT & T < T_m \\ cT + L & T > T_m \end{cases}$$

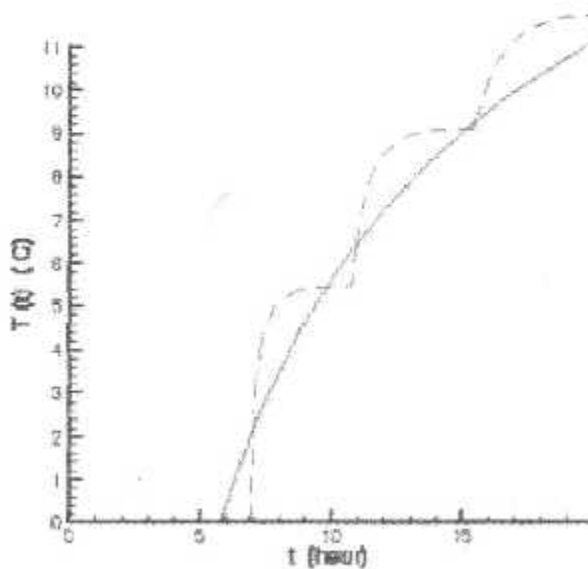


Figure 25 historique de la température Enthalpique en pointillé et analytique en continue pour $X_0=4\text{cm}$

III-2-2-2 A DEUX PHASES

On ne changera que la condition limite $T_{i,0} = T_{ini} < T_m$ (pour un problème de solidification),

Le reste ne changera en rien, c'est-à-dire :

$$\left\{ \begin{array}{l} \rho \frac{\partial H}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left(k \frac{\partial T}{\partial x} \right) \\ T_{i,0} = T_{ini} = T_m \\ T|_{x=0} = T_s \\ T|_{x=L} = \text{Solution Analytique} \end{array} \right.$$

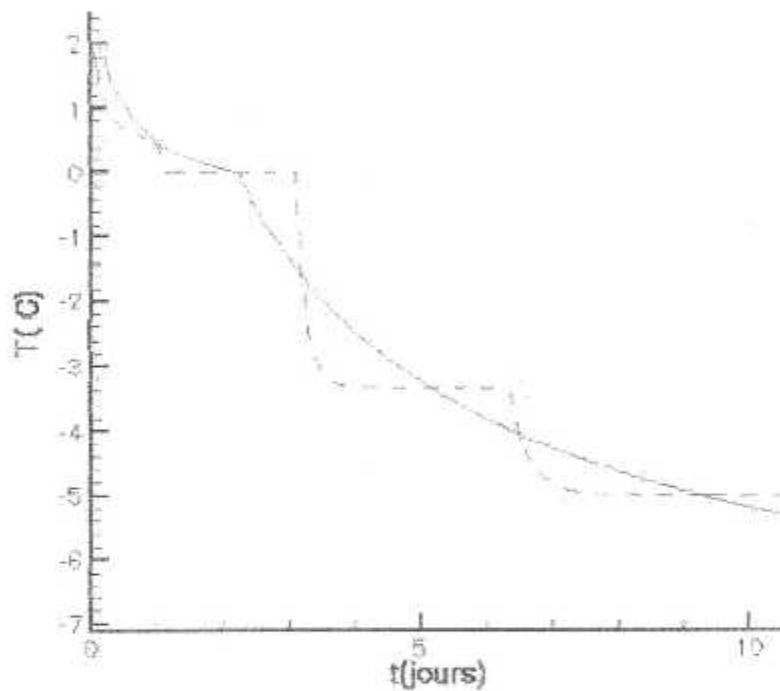


Figure 26 Température Enthalpique en pointillé et analytique en continu au point 25cm
(avec 9 nœuds en espace et 443 dans le temps)

En augmentant le nombre de nœuds à 33 nœuds en espace et 7078 dans le temps on aura :

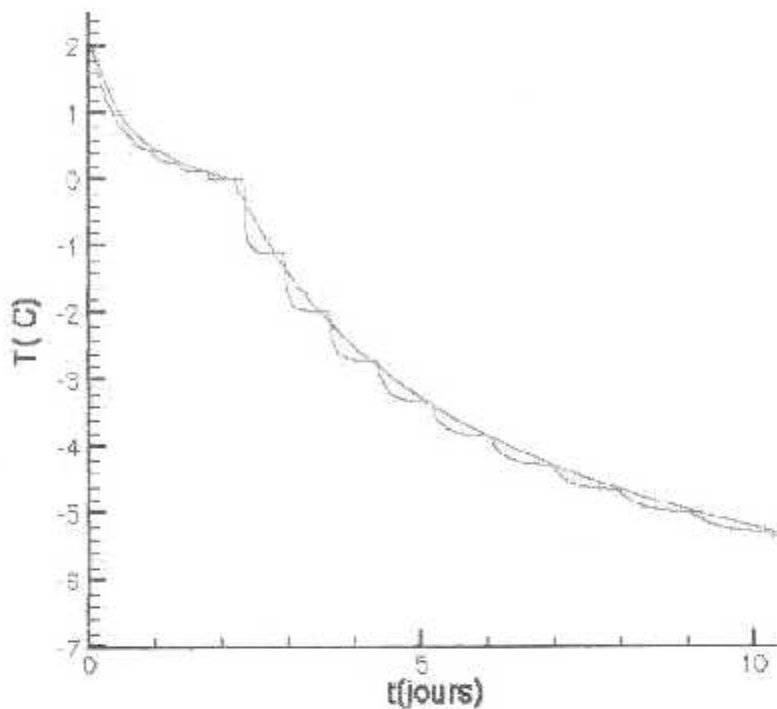


Figure 27 solution Enthalpique oscillant au tour de l'analytique (au point 25cm, avec 33 nœuds en espace et 7078 dans le temps)

On remarque l'amélioration mais aussi l'augmentation du nombre de points dans le temps, à cause des exigences de convergence. D'où l'idée, de reformulation de la technique.

III-2-3 LA NOUVELLE INTERPRETATION DE LA METHODE ENTHALPIQUE

Si le point de correspondance des deux courbes peut être prédit on peut trouver un algorithme exact pour le problème de Stefan classique. Comme premier pas vers un tel algorithme, l'enthalpie dans la région discrétisée, qui se solidifie, doit être interprétée.

Posons i le point du nœud dans cette région et ε_i sont élément associé. La chaleur totale dans l'élément ε_i à n'importe quel temps est approximée à $H_i \delta x$, où H_i est l'enthalpie du nœud et δx est la largeur de l'élément.

Si au temps t le front de la solidification est sur l'élément ε_i et se déplace vers ε_{i+1} la chaleur totale dans l'élément peut s'approximer à la somme de la chaleur dans le solide et dans le liquide de l'élément:

$$H_i \delta x = (cT_i S + (cT_m + L)(1-S)) \delta x \quad \dots\dots\dots (21)$$

où S est la fraction de l'élément qui est solide.

Quand le front de solidification atteint le nœud i , S sera égal à $\frac{1}{2}$ et $T_i = T_m$ est

l'équation (21) se réduit à:

$$H_i = cT_m + \frac{L}{2} \quad \dots\dots\dots (22)$$

D'où, où que l'enthalpie nodal H_i de la région discrétisée soit, c'est la somme de la chaleur sensible (cT_m) du changement de phase et le $\frac{1}{2}$ de la chaleur latente associé au changement de phase, la limite du changement de phase sera approximativement au nœud i .

III-2-4 Le nouvel algorithme

A partir de l'interprétation de l'enthalpie donnée avant, on proposera l'algorithme de résolution du problème de Stefan qui suit:

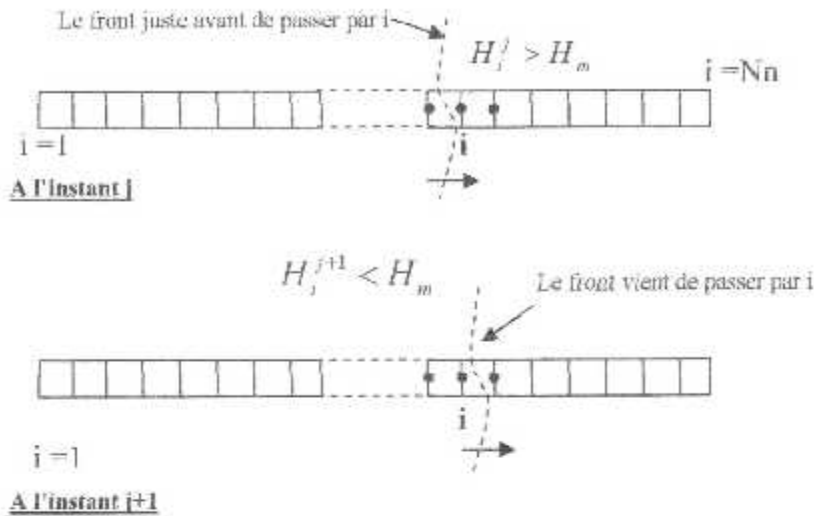
L'enthalpie et une température de "travail" sont calculées à chaque interaction sur le temps par le schéma explicite de différence finie donnée par (20) (c'est-à-dire

$$H^{j+1} = H^j + \frac{K}{\rho} \eta (T_{i+1}^j - 2T_i^j + T_{i-1}^j)$$

Et l'équation (19*), c'est-à-dire $H(T) = \begin{cases} cT & T < T_m \\ cT + L & T > T_m \end{cases}$

Si l'enthalpie à un nœud i est tel que au temps j ; $H_i^j > cT_m + \frac{L}{2}$ et au temps $j+1$ est $H_i^{j+1} < cT_m + \frac{L}{2}$ (pour un problème de solidification), alors la limite du changement de phase vient de passer par le point i .

Soit $H_m = cT_m + \frac{L}{2}$



L'instant où $H_i = \frac{l}{2} + cT_m$, est égal à $\tau_i = (j + X)(\delta\tau)$(23)



Où $X < 1$ est estimé par une interpolation linéaire dans le temps:

$$X = \frac{\frac{l}{2} + cT_m - H_i^j}{(H_i^{j+1} - H_i^j)} \dots\dots\dots(24)$$

Au temps τ_i la température dans le nœud i est T_m , la température au autre point est facilement estimée en utilisant une interpolation linéaire:

$$T_i^{j+X} = X(T_i^{j+1} - T_i^j) + T_i^j \quad k \neq i \dots\dots\dots(25)$$

Dans le cas où les propriétés thermiques différent entre le solide et le liquide l'algorithme sera modifié en utilisant le schéma de différence finie suivant:

$$H_i^{j+1} = H_i^j + \rho \frac{\delta\tau}{\delta x^2} (K_{i-1}(T_{i-1}^j - T_i^j) - K_{i+1}(T_i^j - T_{i+1}^j)) \dots\dots\dots(26)$$

au lieu de l'équation (20)

La nouvelle interprétation

On va progresser en i , à chaque i correspond un X qui va nous donner :

$\tau_i = (j + X)d\tau$ le temps pour lequel le front de la solidification va atteindre le point i et après on calcul la température dans les autres points par:

$$T^{i,x} = X(T^{i+1} - T) + T_i \quad (k \neq i)$$

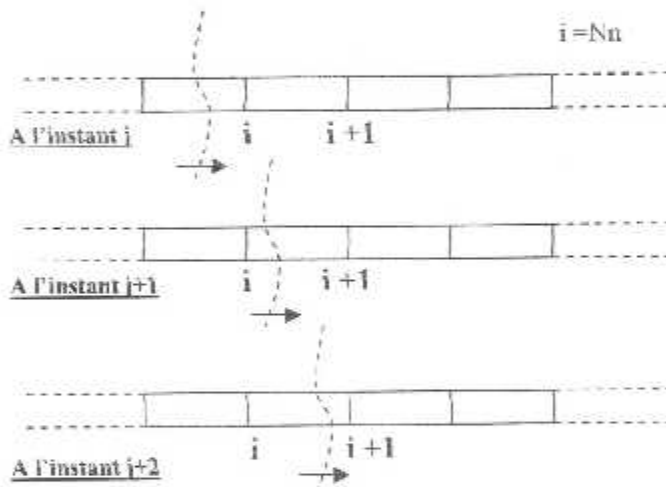
Le temps pour lequel le front de solidification atteindra le point $i\delta x$, est:

$$\tau_i = (j + X)d\tau$$

$$\text{Où: } X = \frac{l/2 + cT_m - H_i^i}{(H_i^{i+1} - H_i^i)} \quad (\text{par interpolation dans le temps})$$

La température au temps τ_i au point $i\delta x$ est T_m pour les autres points T est obtenue par interpolation:

$$T = X(T_k^{i+1} - T_k^i) + T_k \quad k \neq i$$



Il se peut qu'à l'instant suivant du passage du front par i , le front n'atteigne pas le point suivant $i+1$, à cause de sa vitesse non uniforme. D'où, il ne faut calculer les températures que si i varie d'une itération de temps à une autre, sinon la courbe d'analyse thermique aura des paliers non conformes.

Avec seulement 9 nœuds en espaces et 443 dans le temps on obtient au point $x=25\text{cm}$:

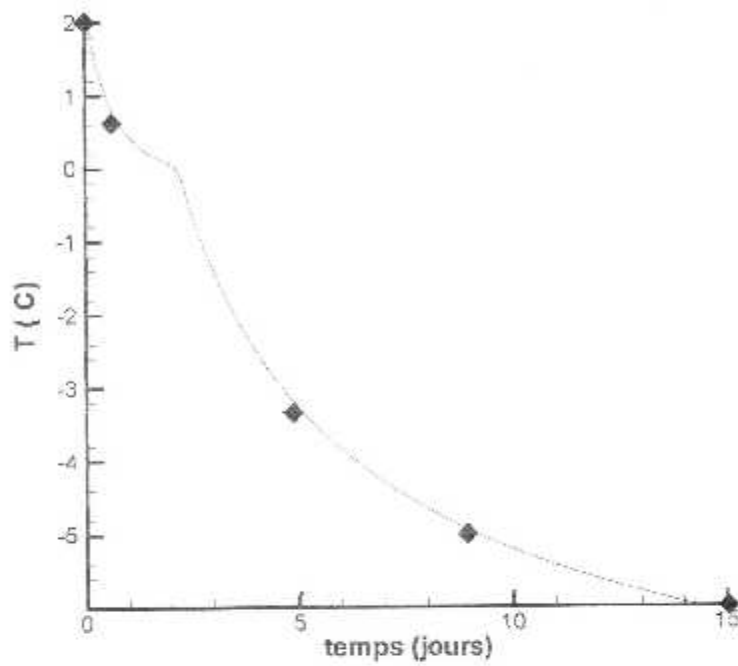


Figure 28 Avec seulement 9 nœuds en espaces et 443 dans le temps
Au point $x=25\text{cm}$

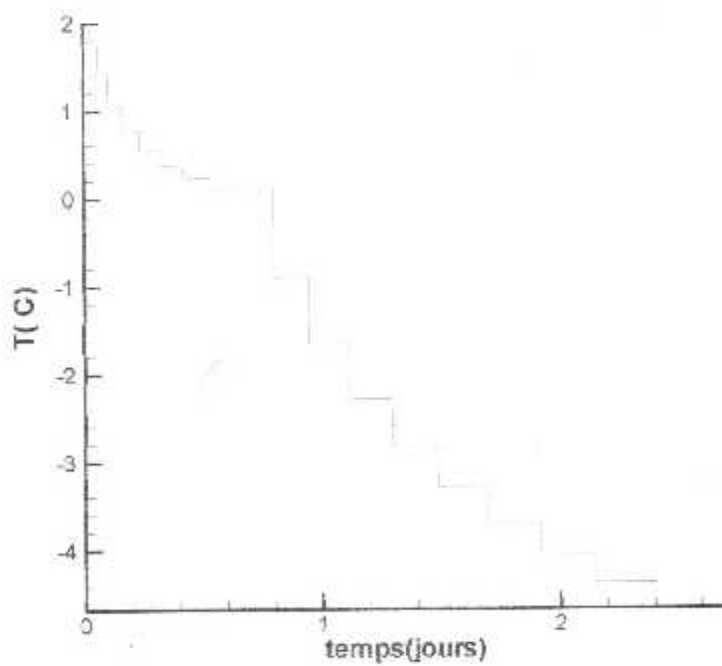


Figure 29 Avec seulement 21 nœuds en espaces et 2765 dans le temps
au point $x=25\text{cm}$

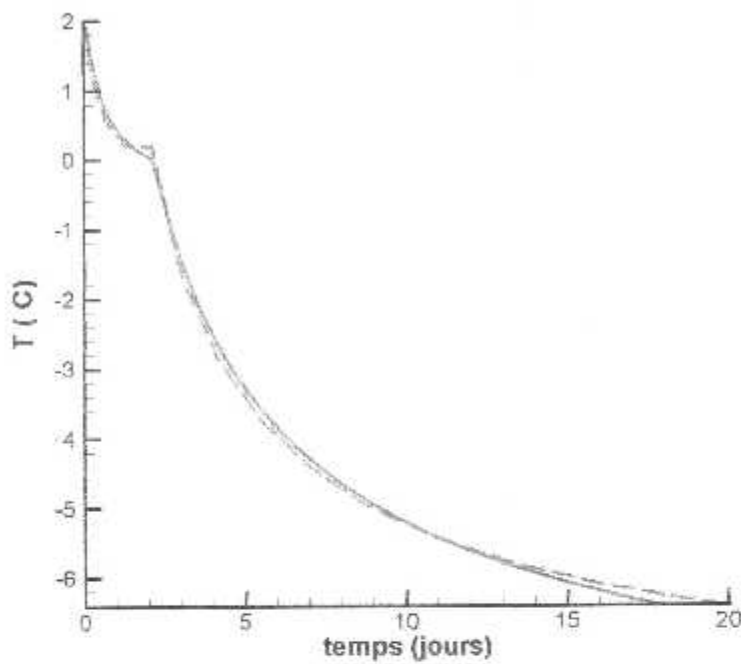


Figure 30 Avec seulement 21 nœuds en espaces et 2765 dans le temps
au point $x=25\text{cm}$ (en évitant les points déjà dessinés)

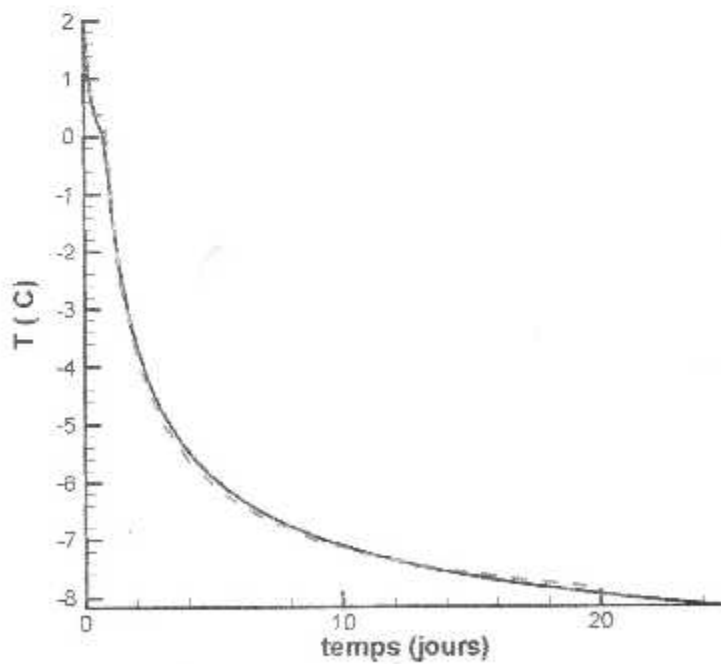


Figure 31 Avec seulement 21 nœuds en espaces et 2765 dans le temps
Au point $x=15\text{cm}$

Le calcul du front donnera

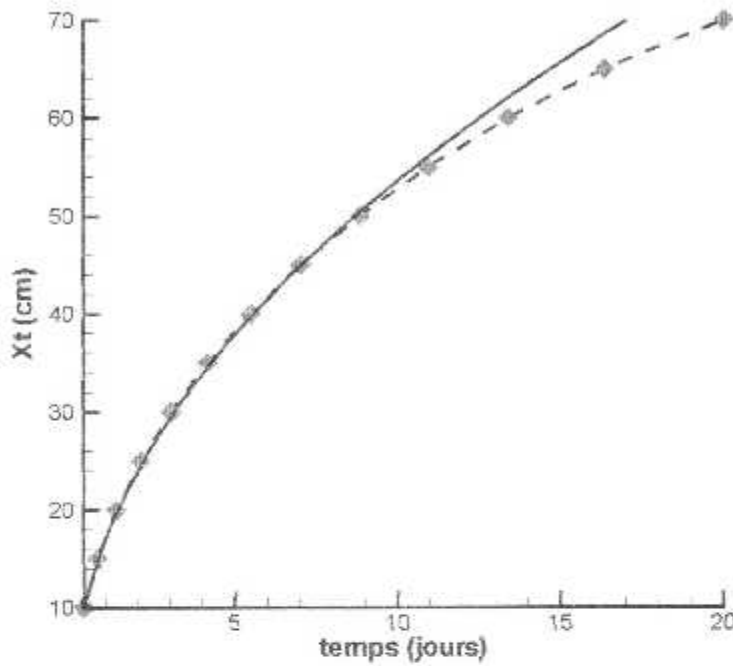


Figure 32 La courbe en continue est celle de l'analytique, et celle en pointillé est celle de l'enthalpique

Cette courbe est obtenue sans l'application de la condition de Goodrich (c'est-à-dire : $T_{in}^i = T_{in}$)

Si on le fait (c'est-à-dire : $T_{in}^i = T_{analytique}$) on obtiendra :

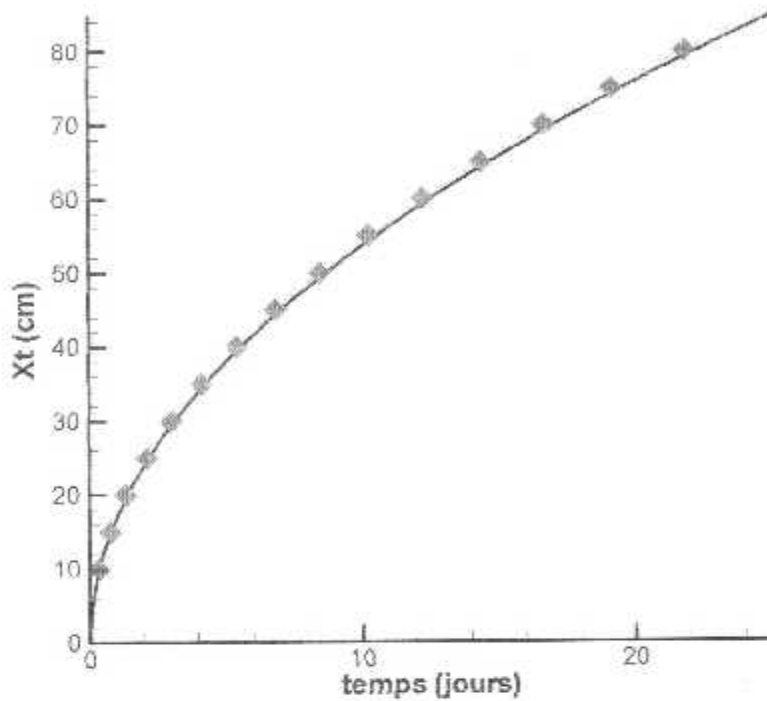


Figure 33 La courbe en continue est celle de l'analytique, et celle en pointillé est celle de l'enthalpique

III-2-5 GEOMETRIE SPHERIQUE (PROBLEME À CONDITIOS MIXTES) A DEUX PHASES

Dans le cas sphérique unidimensionnel l'équation (18) changera en:

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \alpha \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial T}{\partial r} \right)$$

Qui donnera $\frac{\partial H}{\partial t} = \frac{k}{\rho} \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial T}{\partial r} \right)$ (18*)

Plus les conditions suivantes :

La condition initiale, au centre on a un flux nul, et en fin à la surface de la goûte (de rayon R) on a un chauffage par convection naturelle:

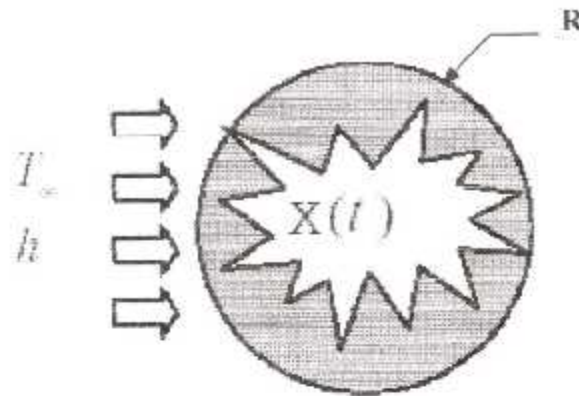


Figure 34 Cas d'une sphère refroidie par convection

$$\begin{cases} \frac{\partial H}{\partial t} = \frac{k}{\rho} \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial T}{\partial r} \right) \\ T_{r=0} = T_{ini} \\ \frac{\partial H}{\partial t} = 3 \frac{k}{\rho} \frac{\partial^2 T}{\partial r^2} \dots \dots r = 0 \\ \left. k \frac{\partial T}{\partial r} \right|_{r=R} = h(T_\infty - T_{r=R}) \end{cases}$$

La température sera reliée par l'enthalpie via les expressions (19) et (19*).

La discrétisation de en différences finies schéma explicite donnera :

$$\begin{cases} H_i^{j+1} = H_i^j + \frac{k}{\rho} r \left(\left(1 - \frac{1}{i-1}\right) T_{i-1}^j - 2T_i^j + \left(1 + \frac{1}{i-1}\right) T_{i+1}^j \right) \\ T_i^0 = T_{ini} \\ H_i^{j+1} = H_i^j + \frac{k}{\rho} r * 6 * (T_2^j - T_1^j) \\ T_{N+1}^{j+1} = \frac{\left(\frac{\Delta r * h}{k} T_\infty + T_{N+1}^{j+1} \right)}{\left(1 + \frac{\Delta r * h}{k} \right)} \end{cases}$$

Pour assurer la convergence du schéma explicite on doit satisfaire aussi la condition :

$$r = \frac{\delta r}{\delta x^2} < \frac{\rho c}{2k} \quad (\text{C'est la condition de convergence}).$$

Pour la modélisation, prenons une goutte d'eau de rayon R initialement à la température T_{in} , refroidie par l'air qui se trouve à une température T_{∞} constante et inférieur à la température de fusion T_m .

Soit :

$$R = 30 \mu m$$

$$T_{in} = 2^{\circ}C$$

$$T_{\infty} = -25^{\circ}C$$

Avec un coefficient de convection $h = 2W/cm^2^{\circ}C$

Remarque :

Vue que le rayon R est très petit la durée du transitoire doit être de l'ordre de $1E-3$ secondes. En effet on va la pendre égale à $2.7E-3$

III-3 RESULTATS

La Courbe d'analyse est présentée au milieu et au quart du rayon R , avec un nombre de nœuds égale à 21 en espace et 3841 en temps (sans correction).

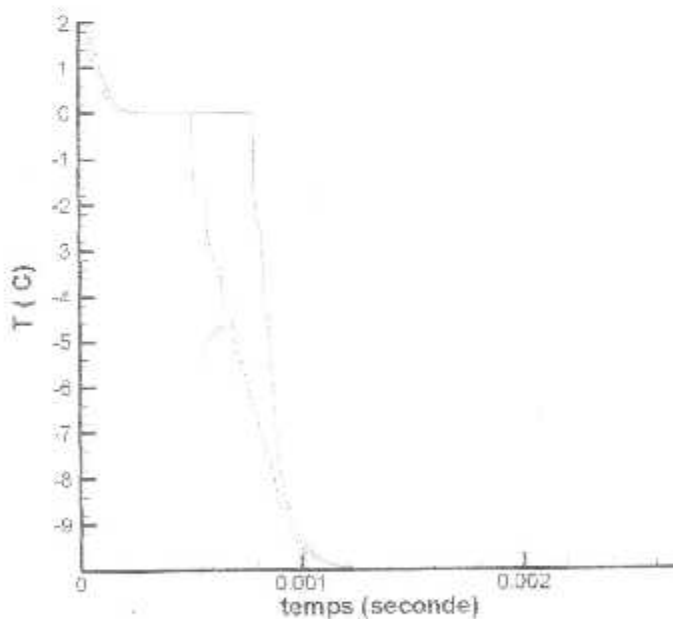
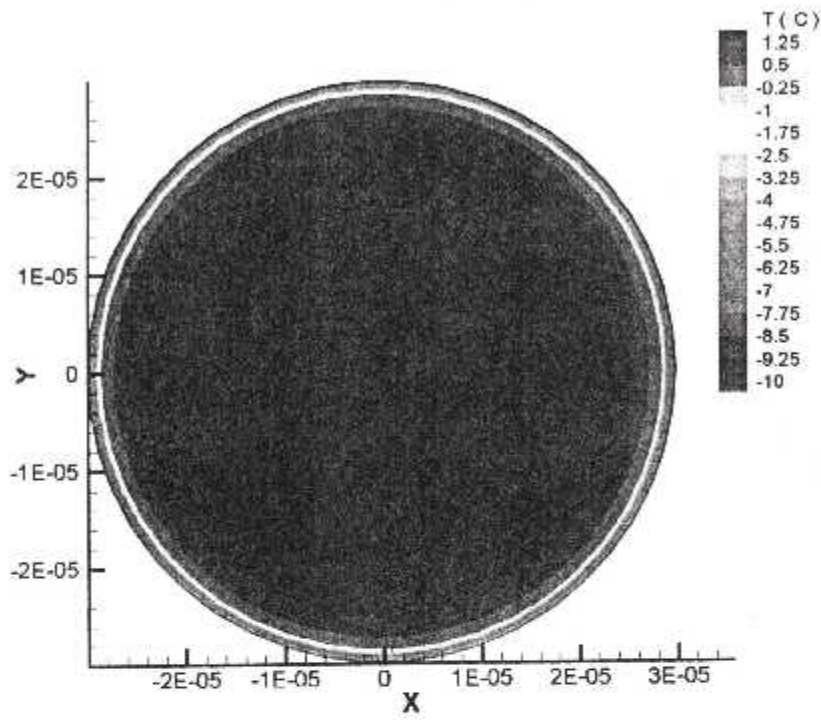
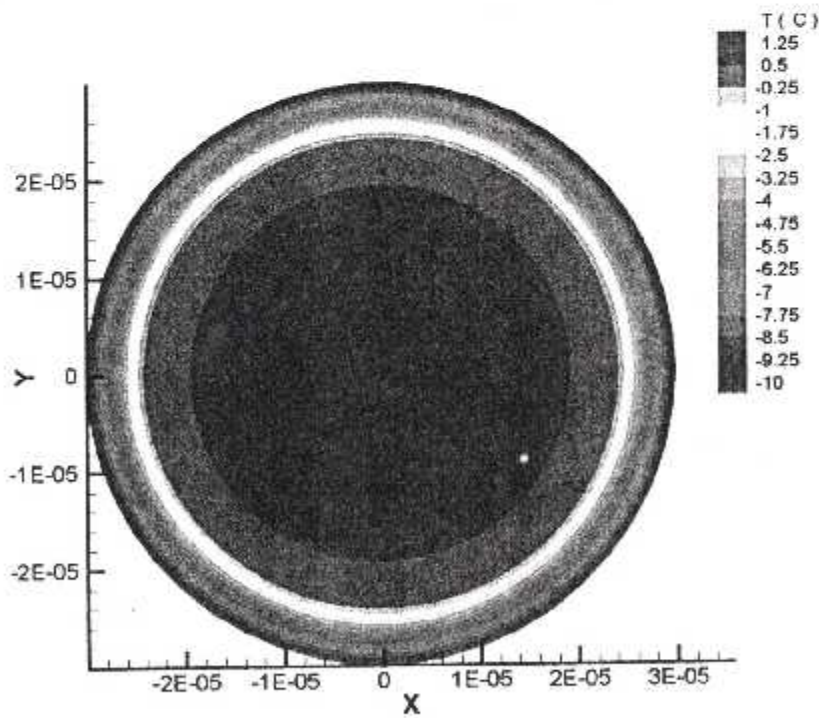


Figure 35 Courbe d'analyse au milieu et au quart du rayon R , avec un nombre de nœuds égale à 21 en espace et 3841 en temps sans correction

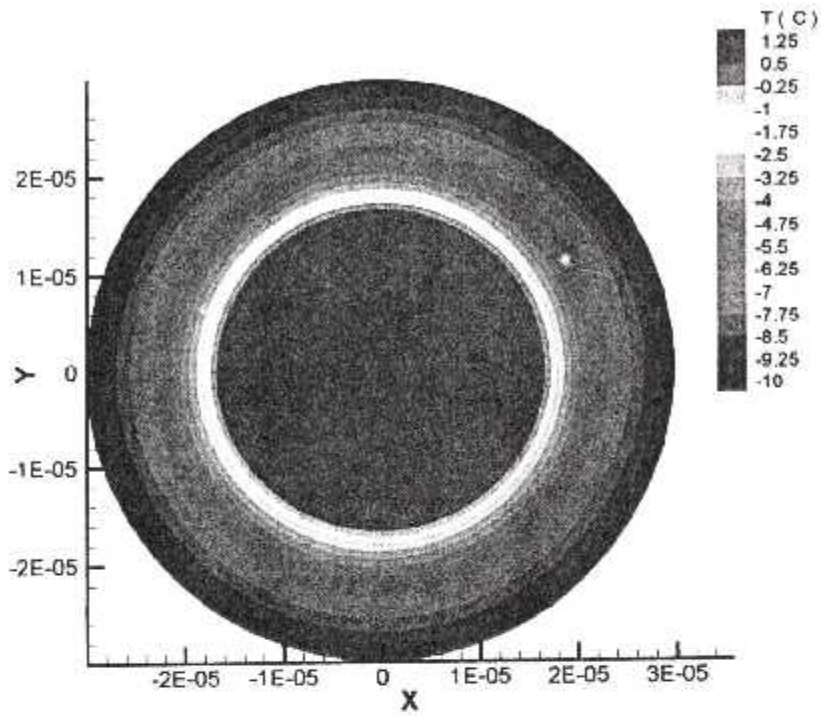
On va maintenant présenter les figures 36 de distribution de la température dans des instants différents :



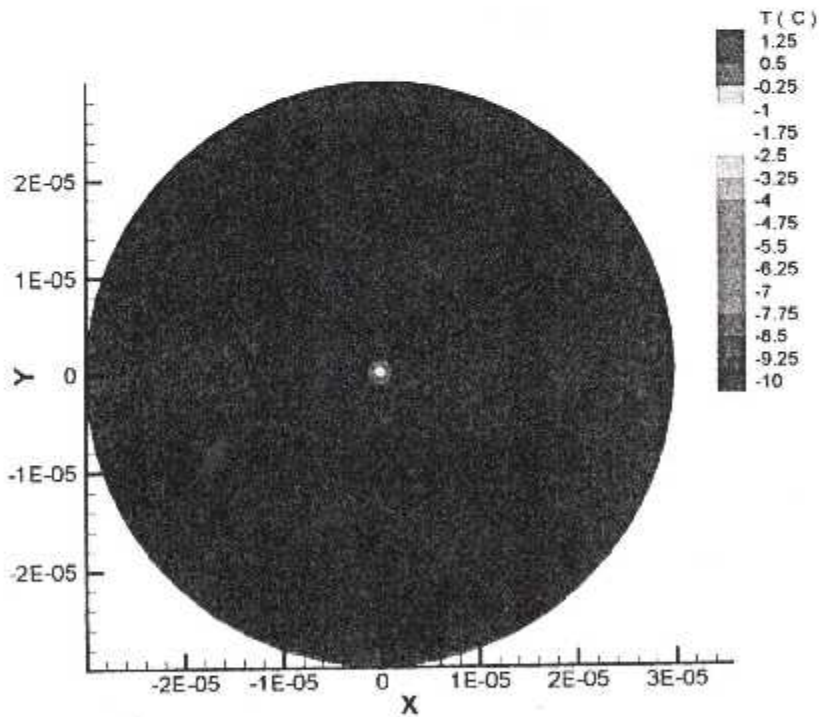
Lors ce que $j=10$



Lors ce que $j=100$



Lors ce que $j=500$



Lors ce que $j=2000$

Pour avoir une idée de ce que représentent les figures 36, faisons une présentation 3d :



Aux premiers instants



Quelques instants après



Proche de la fin de solidification



Presque à la fin de solidification

Figure 37 des coupes en des instants différents d'une sphère refroidie par convection naturelle

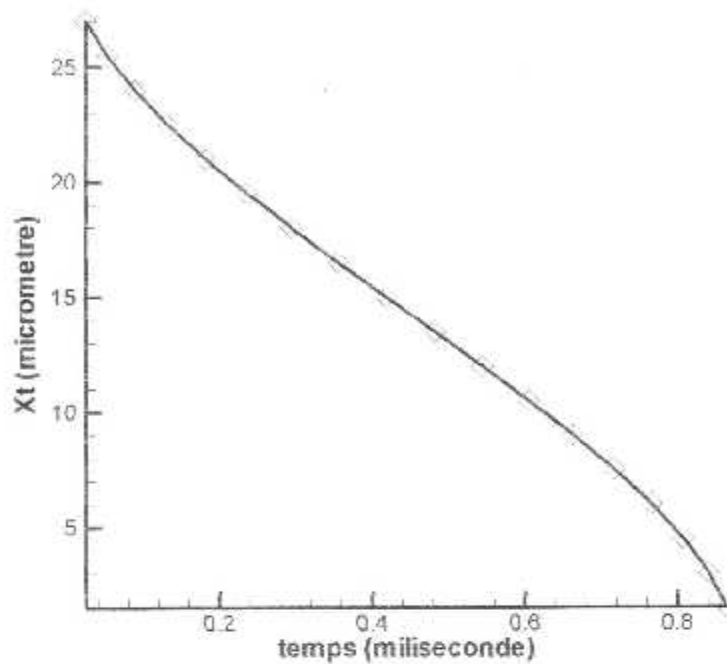


Figure 38 La courbe du front de solidification obtenue par la méthode Enthalpique.

III-3-1 DISCUSSIONS DES RESULTATS

Les premières courbes obtenues par la méthode Enthalpique comparées avec celles obtenues analytiquement (figures 25 et 26), montrent clairement l'oscillation de la solution numérique autour de l'analytique. Cela est dû à plusieurs causes la plus dominante est que la nature de la fonction Enthalpie est du type échelon et progresse par des sauts de chaleur latente.

Cela ne peut être maîtrisé qu'en diminuant au maximum le pas en espace (figure 27) (c'est-à-dire augmenter le nombre de nœuds en espace N_n), si $N_n \rightarrow \infty$ on aura théoriquement la solution analytique.

Mais cela va introduire une augmentation beaucoup plus importante en nombre de nœuds en temps (c'est-à-dire le N_j), cela est dû à la condition de convergence.

Cette augmentation provoque un temps d'exécution très important, et exige une mémoire vive sur la machine plus importante aussi. Cela peut ne pas être senti dans des modèles simples à une dimension, mais dès qu'on aborde des modèles en deux dimensions (sans parler du 3D), le problème devient embarrassant.

On peut éviter ça par plusieurs manières, on peut par exemple changer complètement le schéma utilisé, un schéma implicite va nous éliminer la condition de convergence et nous donnera plus de liberté lors du choix des paramètres espace-temps, mais cela va aboutir à des équations non linéaires qui doivent être résolues itérativement ce qui revient au même problème, sinon raisonner autrement et trouver une technique de correction pour le schéma explicite simple, d'ailleurs c'est ce qui a fait V. Voller et M. Cross.

En effet l'idée était simple, elle consiste à corriger la température par interpolation chaque fois qu'elle est calculée, en redéfinissant la fonction enthalpie complètement.

Cela a conduit, comme nous le constatons sur les (figure 28) à des courbes en « escalier » causées par les le recalculé des points déjà calculés et en évitant se petit détail on obtient (figure 29, 30 et 31), à des résultats surprenants (erreur relative de l'ordre de 0.1%), et presque égaux ceux obtenus analytiquement (différence qui ne dépasse jamais le 0.2°C), en gardant des nombres très petits de nœuds que ça soit en espace ou en temps tout en gardant aussi l'aspect simple du schéma explicite

Pour le front, on constate qu'il faut appliquer une condition suivant la technique de Goodrich à la deuxième limite ($i=Nn$), pour avoir un résultats satisfaisant (voir les figures 32 et 33). Cela est du fait qu'en numérique, jamais on ne pourra réaliser l'aspect semi infini, à cause des limitations en mémoire et en temps d'exécution.

Sur un problème réel (en laboratoire par exemple), cette condition c'est nous qui l'imposons ou bien elle est mesurée par instrumentation, d'où la justification de ce choix.

Le modèle appliqué après (sphère refroidie par convection), où la dégradation des couleurs (voir figures 36 et 37) représente le gradient en température en des instants différent, n'est comparé avec aucune solution analytique, tout simplement, par ce qu'elle n'existe pas.

Une telle application ne peut être validée que par des résultats obtenus par mesures directes au laboratoire, ou bien par des résultats obtenus par d'autres méthodes numériques déjà validées par cette manière.

CONCLUSION

CONCLUSIONS

Ce travail traite le problème de Stefan dit « à frontière mobile » en abordant des géométries unidimensionnelles (Mur plan, cylindre et sphère). Il concerne uniquement le cas d'un corps pur (une seule température de fusion) selon que l'on ait une ou deux phases.

La revue de la littérature a montré que très peu de solutions analytiques existent. En fait, celles-ci n'existent que dans le cas des solutions de Neumann et ont été obtenus grâce à l'utilisation d'une variable de similitude. Dans le cas de géométries complexes la solution analytique n'existe pas et il faut utiliser les méthodes numériques pour résoudre les problèmes. A ce titre, on peut citer les méthodes utilisant la technique des différences finis, volumes finis ou éléments finis.

A L'heure actuelle plusieurs codes de calcul commerciaux de type (FLUENT, CFX, PHOENICS, FIDAP) utilisent la méthode des volumes finis qui a montré une grande flexibilité de calculs à prendre en charge des conditions aux limites de type Dirichlet, Neumann ou Robin.

La transformation (fusion, solidification) s'accompagne par une libération ou absorption d'une grande quantité de chaleur modifiant ainsi l'état du corps (solide ↔ liquide) avec apparition d'une interface qu'il faut capturer. Toute la difficulté du problème provient de cette interface ; et c'est ainsi que l'on peut distinguer dans la littérature les deux principales méthodes de résolution :

- les méthodes à suivi de front à maillage mobile « Front tracking method »
- et les méthodes à maillage fixe ou « Fixed grid methods ». la méthode enthalpique en fait partie.

A précision égale, nous avons opté d'utiliser cette dernière technique en raison de sa facilité de programmation, et des possibilités de son extension à des problèmes plus compliqués.

Au début, les courbes obtenues numériquement par la méthode enthalpique présentent des paliers, et donnent ce qu'on appelle dans la littérature spécialisé « des courbes en escalier », ces escaliers sont justifiés par la nature de la fonction enthalpie elle-même, qui n'est pas continue en passant d'une phase à une autre (c'est-à-dire à travers l'interface), à cause des sauts d'énergie dus au changement de phase (absorption lors de la fusion et libération lors d'une solidification).

Mais une petite modification sur la méthode, proposée par V.Voller et M.Cross (1980), fait que ces courbes se superposent presque exactement sur celles de la solution analytique, même avec un faible nombre de nœuds, et avec un schéma explicite simple n'exigeant aucun processus itératif, ce qui rend cette modification fort intéressante.

Dans la méthode Enthalpique, la position du front est déterminée a posteriori par l'examen du champ de température.

Nos résultats numériques ont été comparés aux solutions analytiques existants et ont montré une bonne concordance.

Dans le cas sphérique, il faudrait les comparer soit avec l'expérience soit à des solutions obtenus par d'autres méthodes (méthode intégrale, HBIM, suivi de front).

Ce présent travail nous a permis de juger de l'importance du changement de phase dans le domaine aéronautique (revêtement de matériaux) et dans bien d'autres secteurs de la vie professionnelle de l'ingénieur.

Dans une perspective future, on peut relever les points qui nous paraissent utiles et intéressants d'étudier :

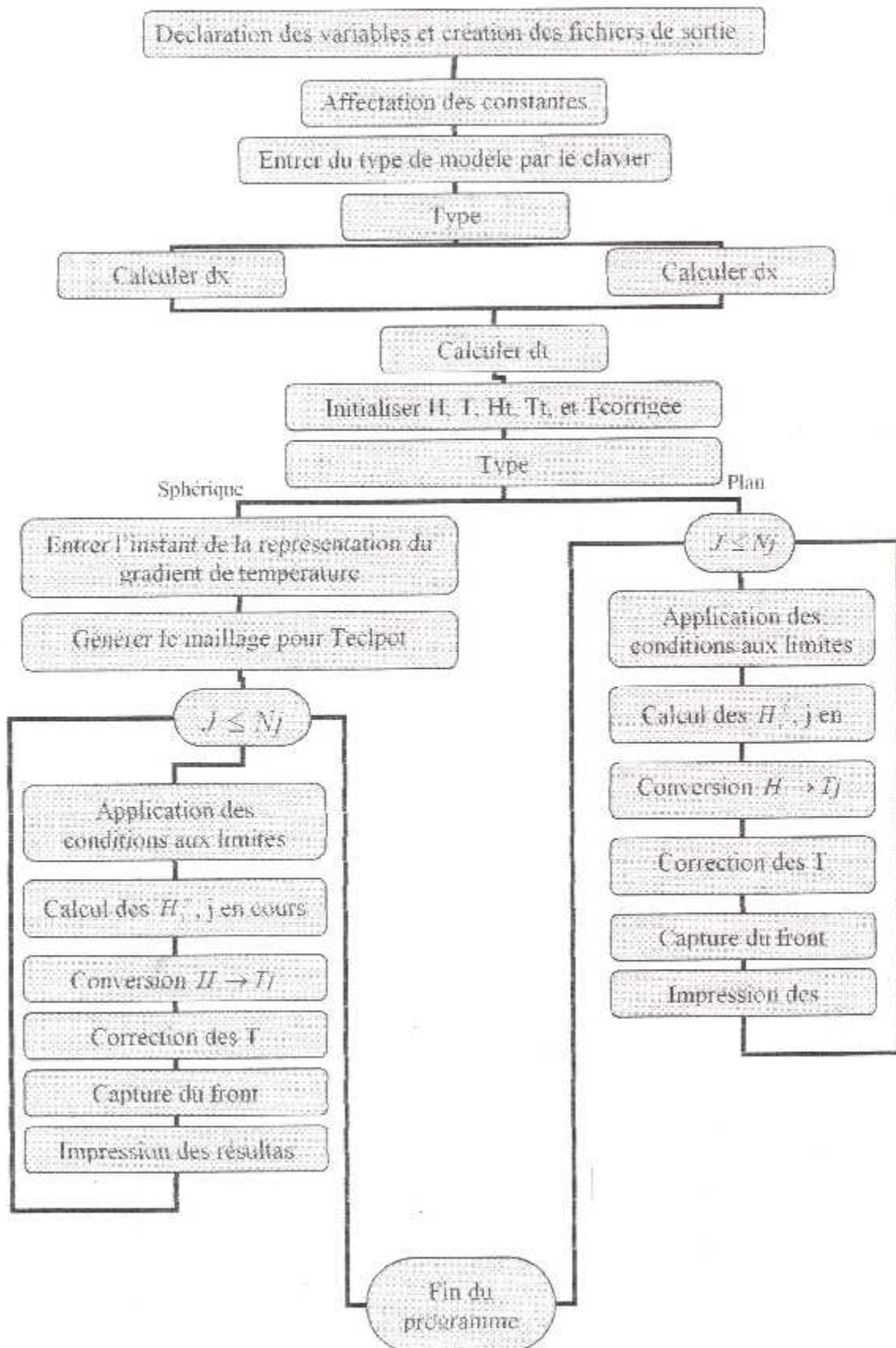
- ❖ des géométries bi- ou même tri- dimensionnelles
- ❖ des alliages, ou même des compositions plus compliquées au lieu d'un matériau pur

- ❖ des variations des propriétés physico thermiques avec la température, ce qui veut dire des problèmes fortement non linéaires
- ❖ des effets de convection et de l'évaporation dans le cas du problème de fusion.
- ❖ Le transfert de matière dans le cas de matériaux hétérogènes.

La méthode Enthalpique offre la plateforme idéale pour l'étude de tels problèmes. Son extension tridimensionnelle ne pose à priori aucune difficulté contrairement aux méthodes de type « front tracking method», qui posent de sérieux problèmes de programmation en 3D.

ANNEXES

ANNEXE 1
ORGANIGRAMME ET PROGRAMMES



LE PROGRAMME

Le programme est écrit en Fortran90, il fait la résolution du problème de Stefan en géométrie unidimensionnelle avec des conditions de type Dirichlet par la méthode analytique et Enthalpique, plus en géométrie Sphérique par la méthode Enthalpique seulement.

Le programme est optimisé, on a éliminé toutes les matrices pour dégager l'espace mémoire.

ANNEXE 2**FONCTION D'ERREUR**

La fonction d'erreur est définie par la relation

$$\operatorname{erf}x = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x \exp(-u^2) du$$

Il résulte de la définition que

$$\operatorname{erf}(-x) = -\operatorname{erf}x$$

$$\frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\infty} \exp(-u^2) du = 1$$

est un résultat classique et facile à démontrer si bien que $\operatorname{erf}\infty = 1$

On définit alors

$$\operatorname{erfc}x = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_x^{\infty} \exp(-u^2) du = 1 - \operatorname{erf}x$$

Développement en série de puissance :

$$\operatorname{erf}x = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)n!}$$

pour tout x

Développement asymptotique :

$$\operatorname{erfc}x = \frac{\exp(-x^2)}{\sqrt{\pi}} \left[\frac{1}{x} - \frac{1}{2x^3} + \frac{1 \cdot 3}{2^2 x^5} - \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2^3 x^7} + \dots \right]$$

pour $x \rightarrow \infty$

Dérivées :

$$\frac{d}{dx}[\operatorname{erf}x] = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \exp(-x^2) ; \quad \frac{d^2}{dx^2}[\operatorname{erf}x] = -\frac{4}{\sqrt{\pi}} x \exp(-x^2)$$

Intégrales : par définition

$$I^n \operatorname{erfc} x = \int_x^\infty I^{n-1} \operatorname{erfc} u \, du \quad \text{avec } n = 1, 2, \dots$$

$$\text{et } I^0 \operatorname{erfc} x = \operatorname{erfc} x$$

On obtient :

$$I \operatorname{erfc} x = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \exp(-x^2) - x \operatorname{erfc} x$$

$$I^2 \operatorname{erfc} x = \frac{1}{4} \left[(1 + 2x^2) \operatorname{erfc} x - \frac{2}{\sqrt{\pi}} x \exp(-x^2) \right] = \frac{1}{4} [\operatorname{erfc} x - 2x I \operatorname{erfc} x]$$

$$\text{et la formule de récurrence } 2n I^n \operatorname{erfc} x = I^{n-1} \operatorname{erfc} x - 2x I^{n-1} \operatorname{erfc} x$$

qui montre que $y = I^n \operatorname{erfc} x$

est solution de l'équation différentielle

$$\frac{d^2 y}{dx^2} + 2x \frac{dy}{dx} - 2ny = 0$$

Quelques valeurs de $\operatorname{erfc} x$:

x	$\operatorname{erfc} x$	x	$\operatorname{erfc} x$	x	$\operatorname{erfc} x$	x	$\operatorname{erfc} x$
0	0	0,3	0,328627	0,8	0,742101	1,8	0,989091
0,05	0,056372	0,4	0,428392	1	0,842701	2	0,995322
0,1	0,112463	0,5	0,520500	1,2	0,910314	2,5	0,999593
0,15	0,167996	0,6	0,603856	1,4	0,952285	3	0,999978
0,2	0,222703	0,7	0,677801	1,6	0,976348	∞	1

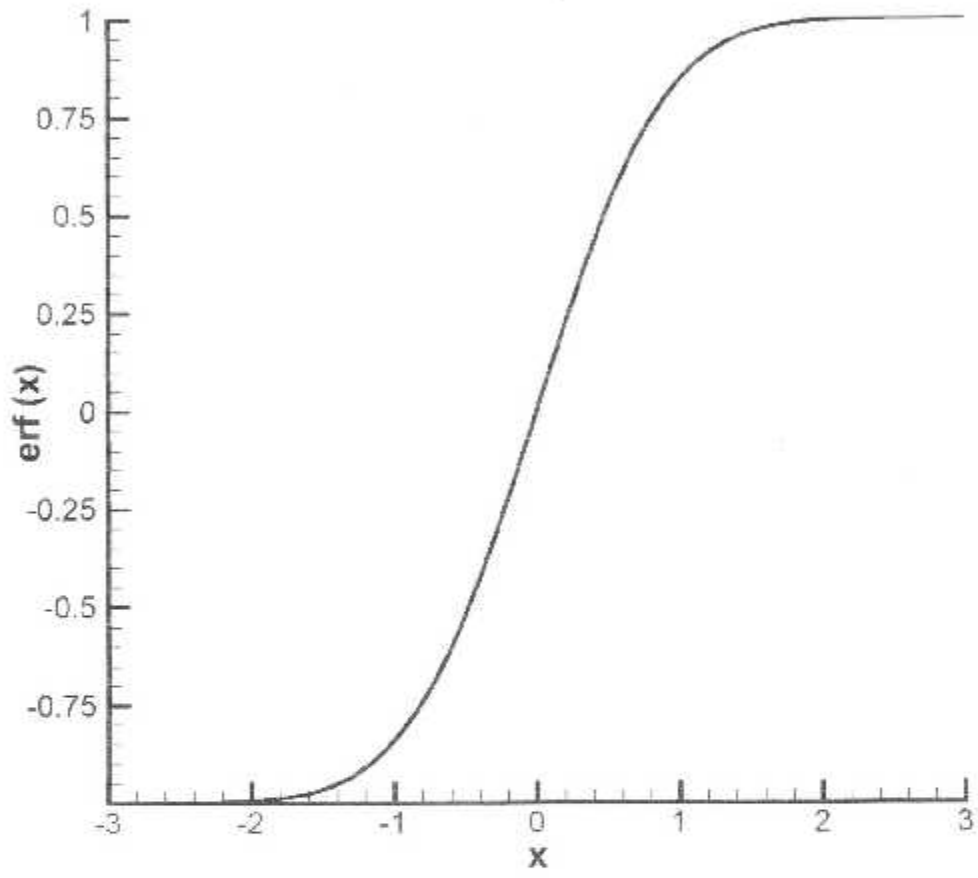


Table de la fonction d'erreur complémentaire erfc(x)

x	erfc x	x	erfc x	x	erfc x
0.00	1.00000 00000	0.30	0.58125 13065	0.70	0.20885 95937
0.01	0.98977 63684	0.40	0.47143 75432	0.75	0.20389 65462
0.02	0.97743 14223	0.41	0.46033 09336	0.80	0.19989 96333
0.03	0.96309 87777	0.42	0.44793 23816	0.85	0.19689 87134
0.04	0.94688 58333	0.43	0.43431 33036	0.90	0.19489 52457
0.05	0.92893 85223	0.44	0.41957 48947	0.95	0.19389 72033
0.06	0.90937 28336	0.45	0.40381 82852	0.98	0.19333 18424
0.07	0.88821 42333	0.46	0.38704 45793	0.99	0.19309 87317
0.08	0.86559 45743	0.47	0.36926 48457	1.00	0.19300 00000
0.09	0.84157 94657	0.48	0.35058 03253		
0.10	0.81623 79643	0.49	0.33109 17368		
0.11	0.78967 71633	0.50	0.31080 07227		
0.12	0.76194 30482	0.51	0.28975 63832		
0.13	0.73313 28953	0.52	0.26800 13655		
0.14	0.69326 29833	0.53	0.24563 58031		
0.15	0.65243 41236	0.54	0.22276 07485		
0.16	0.61076 71833	0.55	0.19948 62337		
0.17	0.56838 75333	0.56	0.17580 42352		
0.18	0.52536 41833	0.57	0.15181 41533		
0.19	0.48176 51833	0.58	0.12751 70896		
0.20	0.43763 74533	0.59	0.10291 26028		
0.21	0.39303 93770	0.60	0.07801 42932		
0.22	0.34793 40333	0.61	0.05281 87811		
0.23	0.30237 76033	0.62	0.02733 55361		
0.24	0.25643 85413	0.63	0.01167 41375		
0.25	0.21017 98333	0.64	0.00593 00728		
0.26	0.16363 32733	0.65	0.00230 00728		
0.27	0.11688 13833	0.66	0.00091 20123		
0.28	0.07007 34433	0.67	0.00037 23777		
0.29	0.02327 55943	0.68	0.00017 23523		
0.30	0.00737 32433	0.69	0.00007 26078		
0.31	0.00213 18427	0.70	0.00003 88633		
0.32	0.00053 63532	0.71	0.00001 44438		
0.33	0.00013 13433	0.72	0.00000 58738		
0.34	0.00003 64767	0.73	0.00000 62571		
0.35	0.00001 29454	0.74	0.00000 14631		
0.36	0.00000 02483	0.75	0.00000 42933		
0.37	0.00000 49166	0.76	0.00000 32472		
0.38	0.00000 35433	0.77	0.00000 80855		
1.00	0.00000 20451	1.40	0.00000 20451	1.45	0.04033 43744
1.01	0.00000 83712	1.41	0.00000 83712	1.46	0.03854 64906
1.02	0.00000 46443	1.42	0.00000 46443	1.47	0.03675 71351
1.03	0.00000 98738	1.43	0.00000 98738	1.48	0.03496 58346
1.04	0.00000 62547	1.44	0.00000 62547	1.49	0.03317 21352
1.05	0.00000 26956	1.45	0.00000 26956	1.50	0.03138 48535
1.06	0.00000 83634	1.46	0.00000 83634	1.51	0.02959 32619
1.07	0.00000 45313	1.47	0.00000 45313	1.52	0.02780 28031
1.08	0.00000 1847	1.48	0.00000 1847	1.53	0.02601 27999
1.09	0.00000 68717	1.49	0.00000 68717	1.54	0.02422 43707
1.10	0.00000 30542	1.50	0.00000 30542	1.55	0.02243 72067
1.11	0.00000 83707	1.51	0.00000 83707	1.56	0.02064 18736
1.12	0.00000 58378	1.52	0.00000 58378		
1.13	0.00000 32673	1.53	0.00000 32673		
1.14	0.00000 13673	1.54	0.00000 13673		

x	erfc x	x	erfc x	x	erfc x
1.57	0.02639 73726	1.97	0.00522 02714	2.27	0.00060 32102
1.58	0.02582 23821	1.98	0.00510 73235	2.28	0.00076 31470
1.59	0.02527 73962	1.99	0.00498 25368	2.29	0.00077 81963
1.60	0.02473 18167	2.00	0.00487 77250	2.30	0.00058 85138 86545
1.61	0.02420 31534	2.01	0.00477 51508	2.40	0.00032 07325 11729
1.62	0.02368 13116	2.02	0.00468 25488	2.41	0.00058 81738 83861
1.63	0.02316 71803	2.03	0.00460 38778	2.42	0.00053 32528 82158
1.64	0.02267 82105	2.04	0.00453 41905	2.43	0.00049 27881 80234
1.65	0.02220 84250	2.05	0.00447 19540	2.50	0.00040 08102 12442
1.66	0.02175 52287	2.06	0.00442 85882	2.51	0.00038 54951 20826
1.67	0.02132 96684	2.07	0.00438 25670	2.52	0.00037 80398 20857
1.68	0.02091 72190	2.08	0.00434 55073	2.53	0.00037 41235 20412
1.69	0.02051 24211	2.09	0.00431 85786	2.54	0.00037 36054 20127
1.70	0.02012 95414	2.10	0.00428 28867	2.55	0.00037 53346 19529
1.71	0.01975 26928	2.11	0.00425 81050	2.56	0.00037 11910 85738
1.72	0.01939 21721	2.12	0.00423 52852	2.64	0.00018 88152 38732
1.73	0.01904 15523	2.13	0.00421 28767	2.65	0.00018 88984 27029
1.74	0.01870 84563	2.14	0.00419 47073	2.66	0.00015 86912 87994
1.75	0.01837 80288	2.15	0.00418 13950	2.70	0.00013 43322 89447
1.76	0.01805 07348	2.16	0.00417 28471	2.72	0.00011 87385 13415
1.77	0.01773 86478	2.17	0.00416 88918	2.74	0.00010 86881 14321
1.78	0.01742 59041	2.18	0.00415 82629	2.76	0.00009 85176 47810
1.79	0.01712 34513	2.19	0.00415 40888	2.78	0.00008 44128 82028
1.80	0.01683 94884	2.20	0.00415 29453	2.80	0.00007 80131 84855
1.81	0.01655 54754	2.21	0.00415 08020	2.82	0.00006 80095 72740
1.82	0.01628 88415	2.22	0.00415 28516	2.84	0.00006 81072 14829
1.83	0.01602 81840	2.23	0.00415 21672	2.86	0.00006 28011 20484
1.84	0.01577 49228	2.24	0.00415 87687	2.88	0.00004 84243 21841
1.85	0.01553 88729	2.25	0.00415 27188	2.90	0.00004 83078 28026
1.86	0.01530 25111	2.26	0.00415 28789	2.92	0.00003 82817 20728
1.87	0.01507 82528	2.27	0.00415 41279	2.94	0.00003 21344 28028
1.88	0.01484 87172	2.28	0.00415 23288	2.96	0.00002 82822 17807
1.89	0.01462 06212	2.29	0.00415 13838	2.98	0.00002 80821 44936
1.90	0.01440 85728	2.30	0.00414 21798	3.00	0.00002 20904 98859
1.91	0.01419 04857	2.31	0.00414 73789	3.02	0.00001 84883 80714
1.92	0.01398 17749	2.32	0.00414 44874	3.04	0.00001 21408 92804
1.93	0.01377 63488	2.33	0.00414 28870	3.06	0.00001 80818 28488
1.94	0.01357 14291	2.34	0.00414 14421	3.08	0.00001 21588 21842
1.95	0.01337 84264	2.35	0.00414 22670		
1.96	0.01317 87245	2.36	0.00414 82233		

3.45	0.00000 32680 87726	4.45	0.00000 03732 16732
3.50	0.00000 07432 88372	4.50	1.84121 88 1-81
3.55	0.00000 06154 88826	4.60	0.20002 77 1-81
3.60	0.00000 03958 89282	4.70	2.85145 42
3.65	0.00000 02444 89737	4.80	1.18347 18
3.70	0.00000 01871 90193	4.90	4.88171 05 1-701
3.75	0.00000 01137 90657	4.95	1.98018 04
3.80	0.00000 00770 91127	5.00	7.74828 20 1-117
3.85	0.00000 00518 91603	4.70	2.30525 88
3.90	0.00000 00347 92089	4.80	1.13521 44
3.95			
4.00			
4.05			
4.10			
4.15			
4.20			
4.25			
4.30			
4.35			
4.40			
4.45			
4.50			
4.55			
4.60			
4.65			
4.70			
4.75			
4.80			
4.85			
4.90			
4.95			
5.00			

BIBLIOGRAPHIE

Références

- H.S. Carslaw and J.C. Jeager, *Conduction of Heat in solids*, Clarendon, Oxford (1959)
- J.Crank. *Free And Moving Boundary Problems*, Clarendon Press, Oxford (1996)
- V. Voller and M. Cross, *Accurate solutions of moving boundary problems using the enthalpy method*, *Department of Mathematics and Computer Studies, Sunderland Polytechnic* (1980)
- James Caldwell and Ching-Chuen Chan, *Spherical solidification by the enthalpy method and the heat balance integral method*, *Department of Mathematics* (1999)
- L. Clavier E .Arquis J.P. Caltagirone D.Gobin, *a fixed grid method for the numerical solution of phase change problems*, *Laboratoire M.A.S.T.E.R-E.N.S.C.P.B et Laboratoire F.A.S.T.U.A* (1994)
- Moïse. Sibony et Jean-Claude Mardon, *Approximations et équations différentielles Analyse numérique II*, Hermann, éditeurs des sciences et des arts (1984)
- Gourdin et M. Boumahrat, *Méthodes numériques Appliquées avec nombreux problème résolus en Fortran77*, Office Des Publications Universitaires.
- *Physical Metallurgy And Materials Science, Metallurgical and materials transactions, Volume 30A-N°1 January 1999*
- *Physical Metallurgy And Materials Science, Metallurgical and materials transactions, Volume 30A-N°7 January 1999*

- *Numerical recipes:*

www.nr.com

- *Ahmed Boucenna, Introduction au langage C, université Farhat Abbas de Setif (1993)*

- *David J. Kruglinski Scot Wingo and George Shepherd, Programming Visual C++, Microsoft Press (1998)*