

REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE

MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR  
ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE



UNIVERSITE DE BLIDA  
INSTITUT DE MECANIQUE

## THESE

Présentée pour obtenir le diplôme de Magister  
En Mécanique

### SIMULATION NUMERIQUE DES ECOULEMENTS INSTATIONNAIRES, TURBULENTS DE FLUIDES COMPRESSIBLES

OPTION  
Energétique

PAR

MAMERI ABDELBAKI

SOUTENUE LE / /1998

Devant le Jury :

<b>Président</b>	BOUHADEF M.	Prof.	U.S.T.H.B.
<b>Rapporteurs</b>	DAMOU M.	M. C.	Univ. BLIDA
	HADEF R.	C. C.	C.U. OUM EL BOUAGHI
<b>Examineurs</b>	BENKHEDDA Y.	M. C.	Univ. BLIDA
	HARHAD A.	M. C.	Univ. BLIDA
	BOUMEDENE B.	C. C.	Univ. BLIDA



32-530-556-1

DEDICACES

JE DEDIE CE TRAVAIL A :

MA MERE,

MON PERE,

MON FRERE ET MA SOEURE,

MA FEMME,

TOUS MES AMIS.

## REMERCIEMENTS

*J'ai été très sensible à la qualité de l'encadrement de Messieurs DAMOU M. de l'université de Blida et HADEF R. du C.U. d'Oum El Bouaghi. Leurs compétences m'ont orienté vers une étude captivante et m'ont assuré d'excellentes conditions de travail. Je tiens à leurs exprimer ici ma profonde reconnaissance.*

*Je remercie vivement Monsieur le Professeur BOUHADEF M. de l'U.S.T.H.B. pour avoir accepté de présider le jury et de juger ce travail.*

*J'adresse mes sincères remerciements à Messieurs BENKHEDDA Y., HARHAD A., BOUMEDENE B. de l'université de Blida, qui ont accepté de faire partie du jury et de juger ce travail.*

*Monsieur M. LESCHZINER, Professeur de l'UMIST, m'a aidé au cours de la réalisation de cette thèse. Je tiens à le remercier très sincèrement de l'intérêt qu'il a porté à cette étude.*

*Mes remerciements vont enfin à toute personne ayant contribué de près ou de loin à la réalisation de ce travail.*

## RESUME

Cette thèse s'inscrit dans le cadre de la modélisation des écoulements à l'intérieur des chambres de combustion. L'objectif de l'étude est de réaliser un code qui calcule l'évolution dans le temps des écoulements turbulents des fluides compressibles avec variation de la température et des propriétés thermodynamiques.

Nous avons choisi comme base de travail le code TEAM (Turbulent Elliptic Algorithm Manchester), développé dans les années 1980 par Huang et Leschziner, qui offre de bonnes propriétés d'adaptation à ce type de problème. Sa version originelle permet de résoudre les équations stationnaires de Navier-Stokes pour un écoulement isotherme d'un fluide incompressible, et en adoptant le modèle  $k-\varepsilon$  comme approximation de la turbulence.

Afin d'atteindre notre objectif, il était nécessaire de modifier les équations du code TEAM et les algorithmes de leur résolution. Ainsi, les algorithmes SIMPLE (Semi Implicite Method for Pressure Linked Equation) et PISO (Pressure Implicit solution by Split Operator) ont fait l'objet d'une modification complète pour tenir compte des hypothèses mentionnées ci-dessus.

La procédure a été appliquée à deux cas d'écoulements, à savoir : l'élargissement brusque sur un pas vertical et l'injection d'un fluide dans une chambre cylindrique fermée qui contient un autre fluide en stagnation. Dans le premier cas, des tests sont faits pour vérifier l'efficacité des améliorations apportées. Les résultats de calcul ont montré un accord satisfaisant avec l'expérience. Le deuxième cas est une application du code sur une chambre de combustion, où le mélange de deux fluides est étudiée en fonction du nombre de Reynolds et du temps.

## SOMMAIRE

CHAPITRE I	INTRODUCTION .....	1
CHAPITRE II	TRAVAUX ANTECEDENTS .....	5
CHAPITRE III	FORMULATION MATHEMATIQUE DU PROBLEME .....	10
3-1	INTRODUCTION .....	10
3-2	EQUATIONS DE L'ECOULEMENT .....	10
3-2-1	Equations de continuité .....	10
3-2-2	Equations de la quantité de mouvement .....	11
3-2-3	Equation de l'énergie .....	12
3-2-4	Equation d'état du gaz .....	12
3-3	APPROCHE STATISTIQUE DE LA TURBULENCE .....	13
3-3-1	Traitement des écoulement compressibles .....	14
3-4	EQUATIONS DE CONTINUTE ET DE TRANSPORT MOYENNEES .....	15
3-4-1	Equations de continuité .....	15
3-4-2	Equations de la quantité de mouvement .....	15
3-4-3	Equation de l'énergie .....	16
3-4-4	Equation d'état du gaz .....	16
3-5	CONCLUSION.....	17
CHAPITRE IV	MODELISATION DE LA TURBULENCE .....	18
4-1	INTRODUCTION .....	18
4-2	TYPES DE MODELES DE LA TURBULENCE.....	18
4-2-1	Concepts de la viscosité turbulente .....	19
4-2-2	Modèles de transport des contraintes turbulentes .....	21
4-3	FORME GENERALE DES EQUATIONS DU PROBLEME .....	24
4-4	CONCLUSION .....	24
CHAPITRE V	PROCEDURE NUMERIQUE .....	26
5-1	INTRODUCTION .....	26
5-2	METHODE DE DISCRETISATION .....	26
5-2-1	Méthode des différences finies.....	26

5-2-2	Méthode des éléments finis.....	26
5-2-3	Méthode des volumes finis.....	27
5-3	GENERATION DE MAILLAGE.....	27
5-4	DERIVATION DES EQUATIONS DE DISCRETISATION.....	29
5-4-1	Discretisation spatiale.....	30
5-4-2	Schémas numériques de l'espace.....	32
5-4-3	Schémas numériques du temps.....	37
5-5	FORMULATION GENERALISEE DU PROBLEME.....	39
5-6	DISCRETISATION DES TERMES SOURCES.....	41
5-6-1	Discretisation des termes sources des propriétés vectorielles.....	41
5-6-2	Discretisation des termes sources des propriétés scalaires.....	44
5-7	EQUATION DE LA PRESSION.....	46
5-7-1	Modification des algorithmes SIMPLE et PISO pour tenir compte des espèces et de la compressibilité.....	46
5-8	CONDITIONS AUX LIMITES.....	50
5-9	DETAILS DE CALCUL.....	55
5-10	CONCLUSION.....	57
<b>CHAPITRE VI RESULTATS DU CALCUL NUMERIQUE.....</b>		<b>58</b>
6-1	INTRODUCTION.....	58
6-2	CALCUL DE L'ECOULEMENT SUR UN PAS VERTICAL.....	58
6-2-1	Conditions aux limites.....	59
6-2-2	Interprétation des résultats de calcul.....	60
6-3	INJECTION INSTATIONNAIRE, TURBULENTE, ET COMPRESSIBLE D'UN FLUIDE DANS UN AUTRE AU REPOS DANS UNE CHAMBRE FERMEE.....	64
6-3-1	Conditions aux limites et initiales.....	65
6-3-2	Interprétation des résultats de calcul.....	66
6-4	CONCLUSION.....	67
<b>CONCLUSION GENERALE.....</b>		<b>78</b>

## NOMENCLATURE

### Lettres latines

$A$  : Coefficients de convection-diffusion de l'équation algébrique.

$a$  : Aire de la surface considérée.

$b$  : Coefficient de la partie implicite du terme source.

$C_D$  : Coefficient empirique.

$C_p$  : Chaleur spécifique à pression constante.

$C_1, C_2, C_3, C_\mu$  : Constantes du modèle de turbulence k- $\epsilon$ .

$D$  : Coefficient de diffusivité massique.

$F$  : Force de volume ou flux.

$H$  : Partie diffusive des coefficients de l'équation de correction de pression.

$J, J'$  : Flux total et flux total par unité de surface.

$k$  : Energie de turbulence.

$L$  : Partie convective des coefficients de l'équation de correction de pression.

$l$  : Echelle de longueur.

$l_m$  : Longueur de mélange de Prandtl.

$M$  : Masse molaire.

$P$  : Force de pression.

$P_e$  : Nombre de Peclet.

$P_r$  : Nombre de Prandtl.

$q$  : Flux de chaleur (conduction + diffusion).

$R_{inj}$  : Rayon de l'orifice.

$R_0$  : Constante universelle des gaz parfaits.

$R_m$  : Résidu de la masse.

$R_\phi$  : Résidu de l'équation de transport de la variable  $\phi$ .

$S_\phi, \bar{S}_\phi$  : Terme source et terme source moyen de l'équation de la variable  $\phi$ .

$S_c$  : Partie constante du terme source.

$S_p$  : Coefficient de  $\phi$  dans le terme source.

$T$  : Température.

$t$  : Temps.

$U$  : Vitesse dans la direction  $x$ .

$U_r$  : Vitesse de frottement.

$V$  : Vitesse dans la direction  $r$  ou  $y$ .

$Y$  : Fraction massique.

$y$  : Distance à partir de la paroi.

### Lettres grecques

- $\alpha$  : Coefficient de relaxation.  
 $\delta$  : Epaisseur de la couche limite.  
 $\delta_{ij}$  : Delta de Kroneker.  
 $\varepsilon$  : Taux de dissipation de l'énergie de turbulence.  
 $\Gamma$  : Coefficient de diffusion.  
 $\phi$  : Variable généralisée.  
 $\chi$  : Constante de Von Karman.  
 $\lambda$  : Conductivité thermique.  
 $\mu$  : Viscosité moléculaire.  
 $\mu_{\text{eff}}$  : Viscosité effective.  
 $\mu_t$  : Viscosité turbulente.  
 $\omega$  : Taux de production par réaction.  
 $\rho$  : Densité.  
 $\sigma_k, \sigma_\varepsilon$  : Constantes du modèle k- $\varepsilon$ .  
 $\tau$  : Tenseur de Reynolds.  
 $\tau_w$  : coefficient de frottement pariétal.

### Indices et exposants

- e, w, n, s où E, W, N, S : Directions (Est, Ouest, Nord et Sud).  
i, j : Indices des directions x et y.  
K : Espèce K.  
nb : Prend les valeurs e, w, n, s où E, W, N, S.  
New : Nouvelle valeur.  
Old : Ancienne valeur.  
t : Turbulent.  
1, 0 : temps t et t +  $\Delta t$ .  
\* : Valeur estimée.  
' : Valeur corrigée où fluctuation dans la moyenne de Reynolds.  
'' : Fluctuation dans la moyenne pondérée par la masse.

### Opérateurs

- $\nabla \bar{U}$  : divergence du champ de vitesse.  
 $\|a, b\|$  : Valeur maximale entre a et b.  
 $\bar{f}$  : Moyenne de Reynolds de f.  
 $\tilde{f}$  : Moyenne pondérée par la masse (de FAVRE).

## CHAPITRE I

### INTRODUCTION

De nombreuses applications technologiques, telles que les moteurs à combustion interne, les fours industriels et les propulseurs d'avions et de fusées, trouvent leurs origines dans le phénomène de combustion.

L'optimisation des systèmes de combustion nous conduit à l'étude de l'écoulement à l'intérieur des chambres de combustion. Ce dernier est fortement gouverné par l'injection ou l'aspiration du combustible et de l'air. En effet une injection (aspiration) adéquate donne un mélange carburant - comburant le plus intime afin que la combustion soit presque complète, d'où une faible émission de polluants.

L'étude des écoulements dans les systèmes de combustion peut se faire soit par voie expérimentale, ou théorique par simulation numérique, ou les deux à la fois.

Il est vraisemblable que la première méthode est la plus sûre, néanmoins elle reste handicapée par le coût élevé du matériel et les géométries non intrusives des chambres de combustion, d'où une méconnaissance de l'écoulement (tridimensionnel, turbulent, instationnaire et hétérogène).

La simulation numérique confronte des problèmes de calcul et de stockage dans la mémoire, mais, elle reste la méthode la moins coûteuse et la plus utilisée. Parmi les méthodes de calcul des écoulements turbulents, on peut citer :

La simulation numérique directe (DNS : Direct Numerical Simulation), où les équations de Navier-Stokes sont résolues pour tout le spectre des échelles de turbulence (fig. 1-1).

L'échelle la plus petite qui doit être captée est celle de Kolmogorov. Ceci nécessite un maillage très fin pour le calcul. Cette méthode est utilisée pour comprendre les mécanismes de production, de dissipation et de transfert de l'énergie de turbulence, et l'effet des phénomènes (combustion, compressibilité, ...) sur la turbulence.

Actuellement cette méthode n'est pas utilisée dans les problèmes d'engineering car elle ne peut être employée que pour les petits nombres de Reynolds ( $Re = 200$ ) et aux milieux homogènes. Elle est aussi limitée par la capacité de stockage et de calcul des ordinateurs disponibles.

La deuxième méthode est basée sur les équations moyennées de Navier-Stokes. Le procédé de moyennage met naissance à des grandeurs turbulentes qui sont approximées (modélisées). Cette procédure est largement utilisée dans les cas pratiques. Elle nécessite moins d'espace mémoire et de temps de calcul.

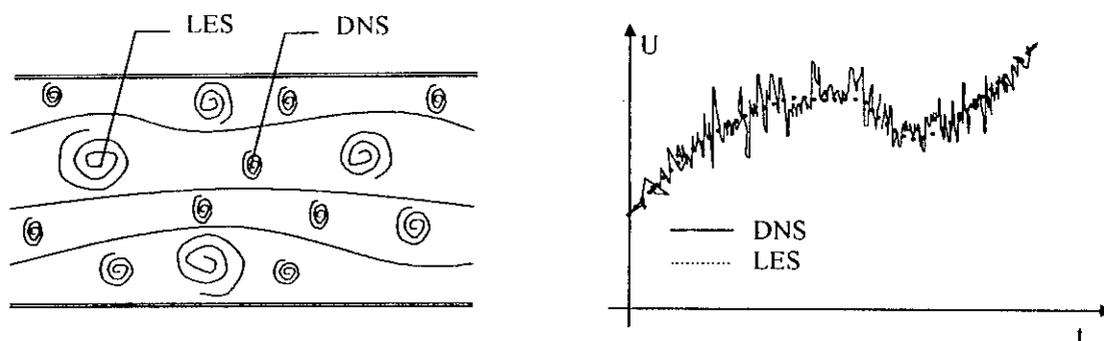


Fig. 1-1 Différence entre DNS et LES

La troisième méthode est l'intermédiaire des deux précédentes, elle est basée sur la simulation des grandes structures (LES : Large Eddy Simulation). Les équations de Navier-Stokes sont résolues pour les grandes échelles de turbulence, tandis que les plus petites sont modélisées.

Dans la présente étude nous avons utilisé la deuxième procédure. Nous avons considéré l'évolution dans le temps d'un écoulement turbulent, compressible de deux fluides dans une chambre de combustion. Le calcul est achevé par Le code TEAM (Turbulent Elliptic Algorithm Manchester). Ce dernier résout les équations de Navier-Stokes moyennées avec une approximation des grandeurs turbulentes par le modèle  $k-\varepsilon$ . Une amélioration est faite pour tenir compte du temps, du mélange de fluides, de la compressibilité et de la variation de température. Les algorithmes de résolution PISO (Pressure Implicit Solution by Split Operator) et SIMPLE (Semi Implicit Method for Pressure Linked Equations) ont été adaptés pour considérer les modifications citées ci dessus.

Le travail présenté dans cette thèse est organisé en six chapitres dont le premier représente une introduction générale sur les systèmes de combustion, leurs applications et leur calcul.

Le deuxième chapitre est composé d'une recherche bibliographique dans les différents travaux qui ont contribué à l'amélioration des systèmes de combustion.

Le chapitre trois décrit la formulation mathématique du problème. Cette dernière est basée sur les lois classiques de conservation de la quantité de mouvement, de la masse et de l'énergie.

Le problème de fermeture du système d'équations par des modèles de turbulence est discuté dans le quatrième chapitre. Une présentation de différents modèles est donnée dans cette partie.

Dans le cinquième chapitre, une explication détaillée de la procédure numérique est faite. La discrétisation des équations est achevée en utilisant le schéma PLDS (Power Law Differencing Scheme) pour l'espace et le schéma totalement implicite pour le temps. Les algorithmes SIMPLE ou PISO sont utilisés pour résoudre le problème du couplage entre les

équations de la quantité de mouvement et de la pression. Finalement, un exposé est donné sur les conditions initiales et aux limites, ainsi que sur des détails numériques.

Le chapitre six présente les résultats de calcul appliqué à deux géométries à savoir : l'écoulement sur un pas vertical et l'injection d'un fluide dans une chambre fermée contenant un autre. Le premier calcul est fait pour valider la procédure numérique, le deuxième est un cas d'application du code qui reste universel pour les situations instationnaires, turbulentes, et avec variation de température pour les mélanges de fluides compressibles.

Finalement, une conclusion et des recommandations sont données pour des travaux futurs.

## CHAPITRE II

### TRAVAUX ANTECEDENTS

Des études plus ou moins intéressantes ont porté sur les systèmes de combustion, à savoir l'entrée et la sortie des fluides, la forme de la chambre de combustion, l'aérodynamique interne de la chambre, le phénomène de combustion et les pertes de chaleur par les parois.

Pour avoir des conditions favorables de vitesse et de pression à l'entrée de la chambre de combustion, une étude numérique de l'écoulement dans le collecteur d'un moteur à combustion interne (MCI) est faite par CHAO AN LIN [1]. La méthode des volumes finis est utilisée afin de résoudre les équations curvilignes moyennées de Navier-Stokes. L'écoulement est supposé stationnaire, turbulent et compressible. Le modèle de turbulence  $k-\varepsilon$  est utilisé pour approximer les grandeurs turbulentes. Les résultats numériques ont montré un bon accord avec l'expérience. L'écoulement autour de la soupape et dans le cylindre a fait l'objet de l'étude numérique et expérimentale de M.P.ERRERA et G.JANSSENS [2]. Les auteurs ont utilisé la méthode des différences finies pour étudier l'aérodynamique instationnaire de la soupape d'admission d'un MCI. Ensuite, ils ont mesuré les vitesses par vélocimétrie laser sur une maquette d'un moteur diesel. Les résultats ont été acceptables.

Afin d'obtenir un mélange uniforme carburant-air, N. BOUKHEZZAR [3] a étudié plusieurs configurations pour l'injection du fuel et de l'air. Il a supposé que l'écoulement est turbulent

stationnaire, isotherme et incompressible. Le modèle de turbulence  $k-\varepsilon$  est utilisé pour approcher les flux turbulents. Ainsi, les équations de Navier-Stokes moyennées ont été résolues par la méthode des volumes finis. Les résultats trouvés ont été qualitatifs.

L'influence de la forme de la chambre de combustion est mise en évidence par T.WATANABE [4], qui a montré par une étude visuelle, en utilisant la technique d'injection liquide-liquide, que la diffusion du jet se fait plus uniformément dans les chambres les moins profondes. Il a aussi prouvé que cette diffusion est fortement dépendante de l'orientation du jet.

Le phénomène de combustion a fait l'objet d'un grand nombre d'études, parmi lesquelles celle faite par M. BARRERE et R. BORGHI [5], qui ont proposé une modélisation mathématique du problème de calcul du taux de réaction chimique turbulente. Ils ont mis en évidence les effets principaux de la turbulence sur les réactions chimiques d'un point de vue qualitatif. Ce couplage turbulence-combustion (réaction) est aussi soulevé par R. BORGHI et E. POURBAIX [6], pour cela ils ont proposé une modélisation par une fonction de probabilité (pdf: probability density function) pour le calcul du taux de la réaction turbulente. Dans une seconde étude [7], les auteurs ont approximé la combustion par une modélisation eulerienne-lagrangienne. Cette dernière combine un modèle lagrangien des phénomènes physiques et chimiques qui se produisent à petite échelle avec un modèle eulerien des phénomènes de convection et de diffusion turbulente à échelle plus grande. La méthode est appliquée au cas d'une flamme prémélangée à grande vitesse. Les résultats obtenus ont été très satisfaisants. Dans la simulation des flammes prémélangées R.S.CANT et K.N.C.BRAY [8] ont modifié le modèle de BRAY-LIBBY pour tenir compte du temps, de la variation de température et des propriétés thermodynamiques des fluides. Un test est fait sur la combustion turbulente prémélangée dans une enceinte fermée.

L'introduction de l'effet de la compressibilité a fait l'objet de l'étude de T.R.A. BUSSING et E.M.MURMAN[9]. Les auteurs ont utilisé la méthode des volumes finis pour résoudre le problème d'un écoulement compressible avec réaction. Ils ont fait le calcul pour deux géométries, les résultats trouvés ont été très satisfaisants.

Plusieurs applications des modèles de combustion turbulente sont faites sur des cas pratiques, à savoir : les MCI, les propulseurs d'avions et de fusées, et les fours industriels. Dans le premier domaine H.NAJI et R.BORGHI [10] ont appliqué le code KIVA, amélioré par deux modèles de combustion turbulente, au calcul d'un MCI réel. Le calcul a donné des résultats très intéressants

Pour les propulseurs d'avions, Y.H.HWANG et Y.H.HUNG [11] ont étudié numériquement le phénomène de transport turbulent avec et sans réaction dans un statoréacteur tridimensionnel. Les auteurs ont considéré deux modèles de turbulence ( $k-\varepsilon$  et  $k-k_l$ ) et une pdf pour modéliser la combustion. Les résultats obtenus ont été presque identiques pour les deux modèles. Une autre étude sur les propulseurs est faite par U.UENISHI et coauteurs [12] où le cas d'une combustion turbulente et supersonique est considéré. Un code résolvant les équations de Navier-Stokes par la méthode de Mac-Cormak a été développé. Une confrontation des résultats avec l'expérience a montré un bon accord. Une comparaison entre les modèles de turbulence  $k-\varepsilon$  linéaire et non linéaire est faite par C.C.HWANG, G.ZHU, M.MASSOUDI et J.M.EKMANN [13]. Les auteurs ont achevé les calculs sur une chambre d'un statoréacteur coaxial avec et sans tourbillonnement. Les résultats obtenus sont presque identiques pour les deux modèles. Ils ont trouvé que les paramètres de turbulence à l'entrée ont une grande influence sur les résultats de calcul.

Pour le dernier domaine, M.K.SHIN, S.O.LEE, S. JOO et J.K. YOON [14] ont résolu les équations de transport pour un four industriel. Ils ont utilisé le modèle  $k-\varepsilon$  et une pdf pour

modéliser la combustion. Les auteurs ont trouvé que l'injection de l'oxygène à faible nombre de Reynolds dans la chambre de post combustion augmente le rendement de l'installation.

D'autres études ont pris en compte les phénomènes qui aident le mélange dans les chambres de combustion tel que le tourbillonnement (swirl). Par exemple, l'étude expérimentale de M.PARSI et H.DANESHYAR [15] qui a montré le rôle du tourbillonnement dans les chambres des MCI. Ceci est fait par des mesures tridimensionnelles par fil chaud dans un cylindre d'un MCI. Les auteurs ont montré que lorsque le tourbillon se brise dans la phase de compression, l'énergie dégagée aide au mélange.

De nombreux modèles de turbulence ne sont pas aptes à simuler le tourbillonnement, c'est pourquoi d'autres modèles ont été développés. Parmi ces derniers le modèle RNG  $k-\varepsilon$  proposé par Yakhot et Orszag (1986), et modifié par Z.HAN et R.D.REITZ [16] pour tenir compte de la variation de la densité. Le modèle est ensuite appliqué à la simulation de la combustion à l'intérieur d'une chambre d'un moteur diesel. Aussi, D.G. SLOAN, P.J.SMITH et J.D.SMOOT [17] ont fait une synthèse de différents travaux et ont montré les possibilités des modèles de turbulence à simuler le tourbillonnement.

Finalement, une mise en valeur des transferts de chaleur à travers la paroi du cylindre est faite par P.GILABER et P.PINCHON [18]. Les auteurs ont utilisé un banc monocylindrique équipé par des fluxmètres à réponse rapide et d'anémomètre laser. Ils ont montré que lorsque le régime augmente, les pertes globales diminuent, mais, la valeur maximale des flux locaux augmente en raison de l'élévation du niveau de turbulence.

*Présente contribution*

Nous avons considéré le cas du mélange instationnaire, turbulent et compressible de deux fluides avec variation de la température et des propriétés thermodynamiques des fluides. Nous avons supposé que l'écoulement est bidimensionnel (plan ou axisymétrique).

L'objectif de l'étude est de concevoir un code standard qui peut être appliqué à n'importe quelle configuration. Deux applications ont été faites : L'élargissement brusque sur un pas vertical, son but est de valider la procédure numérique, et l'injection d'un fluide dans un autre qui se trouve au repos dans une chambre fermée. Une étude paramétrique en fonction du nombre de Reynolds et du temps est faite pour la deuxième géométrie.

## CHAPITRE III

### FORMULATION MATHÉMATIQUE

#### 3.1 INTRODUCTION

Pour formuler un phénomène physique on utilise souvent des équations mathématiques. Ces dernières représentent une modélisation de ce phénomène. Une modélisation ou une formulation doit obligatoirement exprimer le comportement du phénomène dans l'espace et dans le temps.

En mécanique des fluides, on suppose que le fluide est un milieu continu, ce qui permet d'utiliser les lois classiques de conservation, à savoir

1. conservation de masse ;
2. conservation d'énergie ;
3. conservation de la quantité de mouvement.

Dans cette étude on va considérer le cas de l'écoulement instationnaire et turbulent d'un fluide compressible. Ces suppositions mènent à résoudre les équations de la quantité de mouvement, conservation de masse, équation d'énergie et l'équation d'état du gaz.

#### 3.2 EQUATIONS DE L'ÉCOULEMENT

##### 3.2.1 Equations de continuité

Elles traduisent le principe de conservation de la masse (la masse ne peut être ni créée ni détruite). L'équation de conservation d'une espèce chimique  $K$  dans un mélange s'écrit sous forme tensorielle comme suit

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho Y_K) + \frac{\partial}{\partial x_i}(\rho Y_K u_i) = \frac{\partial}{\partial x_i} \left[ \rho D \frac{\partial Y_K}{\partial x_i} \right] + \omega_K \quad (3-1)$$

Avec  $\rho$  la masse volumique du mélange ;

$Y_K$  la fraction massique de l'espèce  $K$

$$Y_K = \frac{\rho_K}{\rho} \quad (3-2)$$

$u_i$  est la vitesse de l'écoulement dans la direction  $x_i$  ;

$D$  la diffusivité massique ;

et  $\omega_K$  le taux de production de l'espèce  $K$ .

L'équation de continuité du mélange s'écrit :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_i} (\rho u_i) = 0 \quad (3-3)$$

### 3.2.2 Equations de la quantité de mouvement

Si on suppose que le milieu est continu, isotrope, homogène et le fluide est Newtonien (relation contraintes-déformations linéaire). Ces équations s'écrivent :

$$\underbrace{\frac{\partial}{\partial t} (\rho u_i)}_I + \underbrace{\frac{\partial}{\partial x_j} (\rho u_i u_j)}_{II} = - \underbrace{\frac{\partial P}{\partial x_i}}_{III} + \underbrace{\frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_j}}_{IV} + \underbrace{F_i}_V \quad (3-4)$$

Où

$P$  est la pression ;

$\tau_{ij}$  le tenseur de contraintes donné par

$$\tau_{ij} = \mu \left[ \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) - \frac{2}{3} \delta_{ij} \frac{\partial u_m}{\partial x_m} \right] \quad (3-5)$$

Avec

$\mu$  viscosité moléculaire;

$$\delta_{ij} \text{ delta de Kroneker} = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ 0 & \text{si } i \neq j \end{cases}$$

Physiquement les termes de l'équation (3-4) signifient

- I : taux de changement de la quantité de mouvement par unité de volume et de temps ;
- II : taux net de transport de la quantité de mouvement par convection dans la direction  $x_i$  ;
- III : forces de pression agissantes dans la direction  $x_i$  ;
- IV : force de viscosité par unité de volume ;
- V : force de volume.

Le dernier terme (V) de l'équation (3-4) est négligeable par rapport aux autres.

### 3.2.3 Equation d'énergie

Cette équation est obtenue en négligeant les effets de Duffort, la dissipation visqueuse et le travail des forces de volumes. Elle s'écrit :

$$\underbrace{\frac{\partial}{\partial t}(\rho C_p T) + \frac{\partial}{\partial x_j}(\rho C_p T u_j)}_I = \underbrace{\frac{\partial P}{\partial x_i}}_{II} + u_j \underbrace{\frac{\partial P}{\partial x_j}}_{III} - \underbrace{\frac{\partial}{\partial x_j}(q_j)}_{III} \quad (3-6)$$

Où  $C_p$  est la chaleur spécifique du mélange à pression constante, elle est calculée par la relation :

$$C_p = \sum_{k=1}^N C_{pk} Y_k \quad (3-7)$$

$C_{pk}$  étant la chaleur spécifique à pression constante de l'espèce  $K$ .

$q_j$  est le flux de chaleur donné par

$$q_i = -\lambda \frac{\partial T}{\partial x_i} - \rho D T \sum_{k=1}^N C_{pk} \frac{\partial Y_k}{\partial x_i}, \quad (3-8)$$

$\lambda$  conductivité thermique.

Physiquement les termes de l'équation (3-6) signifient

- I : taux de changement de  $\rho C_p T$  par unité de volume et de temps ;
- II : travail de pression ;
- III : transport de chaleur par conduction et par diffusion d'espèces.

### 3.2.4 Equation d'état du gaz

On suppose que le gaz est parfait. Son équation d'état s'écrit :

$$P = \rho R_0 T \sum_{k=1}^N \frac{Y_k}{M_k} \quad (3-9)$$

Avec  $R_0$  constante universelle des gaz ;

$M_k$  masse molaire de l'espèce  $K$ .

Les équations (3-1) à (3-9) sont valables pour les écoulements laminaires et turbulents. Cependant, pour le deuxième cas, et particulièrement aux grands nombres de Reynolds dans des géométries complexes, l'écoulement devient complètement chaotique. La variation des paramètres est très rapide dans le temps et l'espace. Cela veut dire que les échelles temps et

espace du phénomène sont très réduites. C'est pourquoi le calcul numérique direct de ces écoulements est pratiquement impossible vu les capacités de stockage et de calcul qu'il nécessite.

Généralement le calcul des écoulements turbulents se fait sur des moyennes temporelles des variables, en utilisant les lois des statistiques.

### 3.3 APPROCHE STATISTIQUE DE LA TURBULENCE

Dans un écoulement turbulent, le fluide est supposé comme un milieu continu où la moyenne sur le mouvement moléculaire peut être prise. Selon Reynolds, la moyenne temporelle d'une quantité  $f$  est définie par [19], [20] :

$$\bar{f} = \frac{1}{\Delta t} \int_{t_0}^{t_0 + \Delta t} f(t) dt \quad (3-10)$$

Il est nécessaire que  $\Delta t$  soit suffisamment large par rapport à la période des fluctuations aléatoires associées à la turbulence. Mais, petite par rapport au temps caractéristique de n'importe quelle variation dans l'écoulement associé à l'état instationnaire.

Si on suppose que les fluctuations associées à la turbulence sont superposées sur le mouvement moyen (fig. 3-1), on peut écrire :

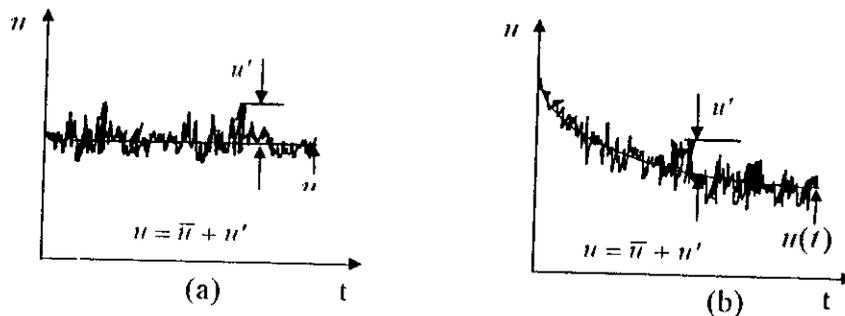


Figure 3-1 Relation entre  $u$ ,  $\bar{u}$  et  $u'$ .  
(a) stationnaire; (b) instationnaire.

$$u_i = \bar{u}_i + u'_i \quad (3-11)$$

$$P = \bar{P} + P' \quad (3-12)$$

$$\rho = \bar{\rho} + \rho' \quad (3-13)$$

$$T = \bar{T} + T' \quad (3-14)$$

$$Y_k = \bar{Y}_k + Y'_k \quad (3-15)$$

Les fluctuations dans les autres propriétés du fluide telles que : la viscosité, la conductivité, la chaleur spécifique et la diffusivité de masse sont généralement petites et peuvent être négligées.

Par définition, la moyenne d'une fluctuation est nulle, on écrit :

$$\bar{f}' = \frac{1}{\Delta t} \int_{t_0}^{t_0 + \Delta t} f' dt \equiv 0 \quad (3-16)$$

On peut aussi prouver que :

$$\overline{\bar{f}g'} = 0 \quad (3-17)$$

$$\overline{\bar{f}g} = \bar{f}\bar{g} \quad (3-18)$$

$$\overline{f'g'} \neq 0 \quad (3-19)$$

### 3-3-1 Traitement des écoulements compressibles

Pour le traitement de ce type d'écoulements, en particulier celui des mélanges gazeux, la moyenne pondérée par la masse, où de FAVRE, est utilisée, car elle simplifie l'écriture des équations. Cette moyenne est définie par [21] :

$$\tilde{f} = \frac{\overline{\rho f}}{\bar{\rho}} \quad (3-20)$$

On applique la moyenne pondérée par la masse aux composantes de la vitesse, la température et les fractions massiques des espèces. Les autres variables (densité et pression) sont traitées par la moyenne de Reynolds. On écrit donc :

$$u_i = \tilde{u}_i + u'' \quad (3-21)$$

$$T = \tilde{T} + T'' \quad (3-22)$$

$$Y_k = \tilde{Y}_k + Y_k'' \quad (3-23)$$

Il faut noter que  $\overline{u''} \neq 0$ ,  $\overline{T''} \neq 0$ , ..., et  $\tilde{u}_i'' = 0$ ,  $\tilde{T}'' = 0$ , ...

On peut montrer que  $\overline{u''} = -\frac{\overline{\rho' u'}}{\bar{\rho}}$ ,  $\overline{v''} = -\frac{\overline{\rho' v'}}{\bar{\rho}}$ , et  $\overline{\rho f''} \equiv 0$ .

Par contre, les relations suivantes sont applicables pour les deux types de moyenne.

$$\overline{f + g} = \bar{f} + \bar{g}, \quad \overline{cf} = c\bar{f}, \quad \bar{c} = c, \quad \frac{\partial \tilde{f}}{\partial x_i} = \frac{\partial \bar{f}}{\partial x_i}, \quad c \text{ est constante.}$$

### 3.4 EQUATIONS DE CONTINUITÉ ET DE TRANSPORT MOYENNES

#### 3.4.1 Equations de Continuité

Si on remplace les expressions (3-12), (3-21) et (3-23) dans les équations (3-3) et (3-1) on obtient :

$$\frac{\partial}{\partial t}(\bar{\rho} + \rho') + \frac{\partial}{\partial x_i}(\rho \tilde{u}_i + \rho u_i'') = 0 \quad (3-24)$$

et

$$\frac{\partial}{\partial t}((\bar{\rho} + \rho')(\tilde{Y}_k + Y_k'')) + \frac{\partial}{\partial x_i}((\bar{\rho} + \rho')(u_i + u_i'')(\tilde{Y}_k + Y_k'')) = \frac{\partial}{\partial x_i} \left( (\bar{\rho} + \rho') D \frac{\partial (\tilde{Y}_k + Y_k'')}{\partial x_i} \right) \quad (3-25)$$

Prenons la moyenne de tous les termes de l'équation. On obtient l'équation de continuité en terme de variables moyennes pondérées par la masse, et l'équation de conservation des espèces pour un écoulement turbulent d'un fluide compressible.

$$\frac{\partial \bar{\rho}}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_i}(\bar{\rho} \tilde{u}_i) = 0 \quad (3-26)$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(\bar{\rho} \tilde{Y}_k) + \frac{\partial}{\partial x_i}(\bar{\rho} \tilde{u}_i \tilde{Y}_k) = \frac{\partial}{\partial x_i} \left( \bar{\rho} D \frac{\partial \tilde{Y}_k}{\partial x_i} - \overline{\rho Y_k'' u_i''} \right) \quad (3-27)$$

Le terme  $\overline{\rho Y_k'' u_i''}$  représente le flux turbulent dû à la diffusion turbulente de  $\rho Y_k$ .

#### 3.4.2 Equations de la quantité de mouvement

Dans ces équations (eq. (3-4)) on substitue les expressions données par (3-11), (3-12) et (3-21). On trouve :

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho \tilde{u}_i + \rho u_i'') + \frac{\partial}{\partial x_i}(\rho \tilde{u}_i \tilde{u}_j + \rho u_j'' \tilde{u}_i + \rho u_i'' \tilde{u}_j + \rho u_i'' u_j'') = -\frac{\partial \bar{P}}{\partial x_i} - \frac{\partial P'}{\partial x_i} + \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_j} \quad (3-28)$$

Prenons la moyenne, on aura :

$$\frac{\partial}{\partial t}(\bar{\rho} \tilde{u}_i) + \frac{\partial}{\partial x_i}(\bar{\rho} \tilde{u}_i \tilde{u}_j) = -\frac{\partial \bar{P}}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_j}(\bar{\tau}_{ij} - \overline{\rho u_i'' u_j''}) \quad (3-29)$$

Où

$$\bar{\tau}_{ij} = \mu \left[ \left( \frac{\partial \tilde{u}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \tilde{u}_j}{\partial x_i} \right) - \frac{2}{3} \delta_{ij} \frac{\partial \tilde{u}_m}{\partial x_m} \right] \quad (3-30)$$

Le terme  $\overline{\rho u_i'' u_j''}$  représente les contraintes dues à la diffusion turbulente de la quantité de mouvement.

### 3.4.3 Equation d'énergie

Si on remplace les expressions données par (3-12), (3-13), (3-21), (3-22) et (3-23) dans l'équation (3-6), on obtient :

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t}(\rho C_p \tilde{T} + \rho C_p T^n) + \frac{\partial}{\partial x_i}(\rho C_p \tilde{T} \tilde{u}_i + \rho C_p T^n \tilde{u}_i + \rho u_j^n C_p \tilde{T} + \rho u_j^n C_p T^n) = \\ \frac{\partial(\bar{P} + P')}{\partial t} + (\tilde{u}_j + u_j^n) \frac{\partial(\bar{P} + P')}{\partial x_j} - \frac{\partial q_j}{\partial x_i} \end{aligned} \quad (3-31)$$

Prenons la moyenne des termes, on aura l'équation moyenne d'énergie en terme de température :

$$\frac{\partial}{\partial t}(C_p \bar{\rho} \tilde{T}) + \frac{\partial}{\partial x_i}(C_p \bar{\rho} \tilde{T} \tilde{u}_i) = \frac{\partial \bar{P}}{\partial t} + \tilde{u}_j \frac{\partial \bar{P}}{\partial x_j} - \frac{\partial}{\partial x_j}(q_j + C_p \bar{\rho} \widetilde{u_j^n T^n}) \quad (3-32)$$

Où

$$q_j = - \left( \lambda \frac{\partial \tilde{T}}{\partial x_j} + D \bar{\rho} \tilde{T} \sum_{k=1}^N C_{pk} \frac{\partial \tilde{T}_k}{\partial x_j} \right) \quad (3-33)$$

Le terme  $C_p \bar{\rho} \widetilde{u_j^n T^n}$  est la diffusion turbulente de  $\rho C_p T$ .

### 3.4.4 Equation d'état du gaz

Comme pour les autres équations, on substitue les expressions (3-12), (3-13) et (3-22) dans l'équation (3-9) on aboutit à :

$$(\bar{P} + P') = R_0 \rho (\tilde{T} + T^n) \sum_{k=1}^N \frac{(\tilde{Y}_k + Y_k^n)}{M_k} \quad (3-34)$$

En prenant la moyenne, on aura :

$$\bar{P} = R_0 \bar{\rho} \tilde{T} \sum_{k=1}^N \frac{\tilde{Y}_k}{M_k} \quad (3-35)$$

### 3-5 CONCLUSION

Les équations qui régissent le problème sont basées sur les lois classiques de conservation. Elles sont valable pour les écoulements laminaires et turbulents. Pour le dernier cas leurs résolution nécessite l'utilisation de maillages très fins. Ceci n'est faisable que pour des cas sans intérêt pratique, c'est pourquoi pour les cas réels on résout les équations « moyennées » de Navier-Stokes.

La procédure de moyennage fait naître de nouvelles inconnues, à savoir : les contraintes turbulentes, les flux turbulents et les travaux turbulents. Ceci rend la résolution du système d'équations impossible, car on a plus d'inconnues que d'équations. On dit alors que le système est ouvert. Pour le fermer, quelques inconnues sont modélisées, les autres sont négligées.

## CHAPTER IV

### MODELISATION DE LA TURBULENCE

#### 4-1 INTRODUCTION

Les détails de la turbulence ont des échelles de temps et d'espace très réduites. Par exemple, les tourbillons responsables de la dégradation de la turbulence dans les écoulements gazeux sont de l'ordre de 0.1 mm [22]. Sachant que pour résoudre les équations on est obligé d'utiliser une procédure numérique qui calcule les variables dans des points discrets. Cela veut dire que lorsque le nombre de ces points atteint  $10^5$ , le volume de calcul ne dépasse pas un centimètre cube. Ce qui signifie que le calcul direct des écoulements turbulents est impossible vu la capacité des calculateurs disponibles actuellement. Dans les cas pratiques la connaissance des détails de la turbulence n'est pas nécessaire, généralement c'est les moyennes dans le temps qui sont utiles, même si l'écoulement en question est instationnaire. Ces causes ont fait du calcul d'écoulements turbulents un calcul opéré sur les moyennes des grandeurs avec une modélisation des corrélations engendrée par le moyennage (voir chapitre III). De cette façon un tel calcul ne nécessite pas un grand nombre de points.

#### 4-2 TYPES DE MODELES DE LA TURBULENCE

Il existe trois types de modèles de turbulence, les deux premiers reposent sur la suggestion de Boussinesq (1877), qui propose une variation linéaire des déformations en fonction des contraintes turbulentes (loi similaire à celle pour un fluide Newtonien en écoulement laminaire). Ces deux types utilisent le concept de la «viscosité turbulente», qui est caractéristique de l'écoulement et non pas du fluide. Cette viscosité peut être déterminée soit directement à partir des équations algébriques, qui ont comme inconnues les vitesses moyennes, soit en résolvant une ou plusieurs équations du mouvement turbulent. Le troisième type de modèles propose des équations différentielles pour les grandeurs de turbulences elles-mêmes.

#### 4-2-1 Concepts de la viscosité turbulente

En 1877, Boussinesq a proposé une relation entre les contraintes turbulentes et le taux de déformation moyenne à travers une propriété de l'écoulement dite «viscosité turbulente» ( $\mu_t$ ). La supposition de Boussinesq est donnée par :

$$-\overline{\rho u'_i u'_j} = \mu_t \left( \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \bar{u}_j}{\partial x_i} \right) - \frac{2}{3} \delta_{ij} \left( \mu_t \frac{\partial \bar{u}_m}{\partial x_m} + \bar{\rho} k \right) \quad (4-1)$$

Où  $k$  est l'énergie cinétique de turbulence,  $k = \frac{\overline{u'_i u'_i}}{2}$ .

#### A Formulation algébrique de $\mu_t$

- *Longueur de mélange de Prandtl (1925)*

$$\mu_t = \rho l_m^2 \left| \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} \right| \quad (4-2)$$

Où  $l_m$  est la longueur de mélange, elle doit être prescrite.

Voici quelques valeurs de  $l_m$  pour les écoulements libre [23]

Configuration	$l_m/\delta$	$\delta$
Couche de mélange plane	0.07	Epaisseur de la couche
Jet plan dans un environnement en stagnation	0.09	Rayon du jet
Jet rond dans un milieu en stagnation	0.075	Rayon du jet

La longueur de mélange pour une couche limite se développant sur une paroi est donnée par :

$$y \leq \delta \frac{C}{\chi}, \quad l_m = \chi y$$

$$y > \delta \frac{C}{\chi}, \quad l_m = \delta C_\mu$$

Avec  $\chi = 0.41$  et  $C_\mu = 0.09$  des constantes ;

$y$  et  $\delta$  sont respectivement la distance à partir de la paroi et l'épaisseur de la couche limite.

- **Similarité de Von Karman (1930)**

$$\mu_t = \rho l_m^2 \left| \frac{\partial u}{\partial y} \right| \quad (4-3)$$

avec  $l_m \propto \left| \frac{\partial u}{\partial y} / \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right|$

Ce modèle ne nécessite pas la prescription de  $l_m$ , mais il pose un problème lorsque  $\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$ .

- Le premier modèle donne de bons résultats pour le cas des couches limites bidimensionnelles, particulièrement celles qui se développent près des parois rigides.
- Le deuxième donne des résultats irréels sauf pour les écoulements près des parois.

### B Equations différentielles pour $\mu_t$

- **Modèle de Prandtl (1945)**

$$\mu_t = \rho \sqrt{k} l \quad (4-4)$$

$l$  est une échelle de longueur, elle est prescrite algébriquement ;  $k$  est l'énergie cinétique de turbulence, donnée par une équation différentielle.

L'équation de  $k$  pour des écoulements en couches cisillées est donnée par

$$\rho \frac{Dk}{Dt} = \frac{\partial}{\partial y} \left[ \left( \mu + \frac{\mu_t}{Pr_k} \right) \frac{\partial k}{\partial y} \right] + \mu_t \left( \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} \right)^2 - C_D \rho \frac{k^{\frac{3}{2}}}{l} \quad (4-5)$$

avec  $Pr_k$  nombre de Prandtl turbulent ( $\approx 1.0$ )

$C_D \approx 0.164$  si  $l$  est pris égale à la longueur de mélange.

- **Modèle de Nee et Kovaszny (1968)**

$\frac{\mu_t}{\rho}$  est calculé à partir d'une équation différentielle.

L'échelle de longueur de turbulence apparaît dans l'équation de  $\frac{\mu_t}{\rho}$  ; sa variation est prescrite algébriquement.

- Le premier modèle est seulement valide au régime complètement turbulent.

#### 4-2-2 Modèles de transport des contraintes turbulentes

##### A *Modèle de Bradshaw et al (1967)*

$$\tau \propto \rho k \quad (4-6)$$

$\tau$  : est le tenseur de contraintes de Reynolds.

$k$  ( où  $\tau$  ) est déterminé à partir de la résolution d'équations différentielles. L'échelle de longueur qui apparaît dans l'équation de  $k$ , est prescrite algébriquement.

##### B *Modèle de Hanjalic et Rotta (1970)*

Le tenseur  $\tau$  est donné par des équations de transport, celles ci contiennent  $k^{1/2}$  et  $l$  comme inconnues. De plus d'autres équations sont données pour l'énergie de turbulence et l'échelle de longueur.

#### \*\* CHOIX DU MODELE DE TURBULENCE

Dans cette étude on considère le cas d'écoulement avec récirculation gouverné par des équations différentielles elliptiques. Donc, il y a une forte raison de déterminer l'échelle de longueur à partir d'une équation car dans ces écoulements, le transport convectif est important, c'est pourquoi la détermination expérimentale du profil de l'échelle de longueur est difficile.

Le modèle le plus «populaire» utilisé dans les écoulements avec récirculation et adopté dans cette étude à savoir : le modèle  $k-\varepsilon$

##### Modèle $k-\varepsilon$

C'est le type le plus simple des modèles qui permet la prédiction des écoulements cisailés-libres et près des parois, sans ajustement de constantes ou de fonctions. Il tient compte de plusieurs cas d'écoulements turbulents à petits nombres de Reynolds. De plus il mène à des résultats acceptables pour les écoulements avec récirculation ou pour ceux du type couche limite [24].

Puisque ce travail est consacré à l'étude de l'interaction turbulence-compressibilité, le concept de Boussinesq de la viscosité turbulente est adopté avec une extension tenant compte de la compressibilité du modèle standard  $k-\varepsilon$  [25], [26], et [27].

Dans ce modèle, la viscosité turbulente est fonction de deux paramètres de la turbulence, l'énergie cinétique de turbulence  $k$  et son taux de dissipation  $\varepsilon$ . La formulation de ce dernier est basée sur l'échelle de longueur des grands tourbillons, qui possèdent plus d'énergie.

$$\varepsilon \propto \frac{k^{\frac{3}{2}}}{l} \quad (4-7)$$

Une analyse dimensionnelle mène à la relation de Prandtl-Kolmogorov

$$\mu_t = C_\mu \bar{\rho} \frac{k^2}{\varepsilon} \quad (4-8)$$

La diffusivité turbulente est donnée par

$$\Gamma_t = \frac{\mu_t}{\sigma_t} \quad (4-9)$$

Où  $\sigma_t$  est le nombre de Prandtl turbulent

Dans le modèle  $k$ - $\varepsilon$  les contraintes visqueuses sont données par :

$$-\overline{\rho u_i u_j} = \mu_t \left( \frac{\partial \tilde{u}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \tilde{u}_j}{\partial x_i} \right) - \frac{2}{3} \delta_{ij} \left( \mu_t \frac{\partial \tilde{u}_m}{\partial x_m} + \bar{\rho} k \right) \quad (4-10)$$

$$-\overline{\rho u_i \phi} = \frac{\mu_t}{\sigma_{\phi,t}} \frac{\partial \phi}{\partial x_i} \quad (4-11)$$

$\phi$  est une variable générale, elle prend comme valeurs  $u$  et  $v$  pour les équations d'impulsion,  $T$  pour l'équation d'énergie,  $Y_k$  pour l'équation de conservation des espèces,  $k$  pour l'équation de l'énergie cinétique de turbulence et finalement  $\varepsilon$  pour le taux de dissipation de cette énergie ;

$\sigma_{\phi,t}$  est un nombre de Prandtl ou de Schmidt ; l'indice "t" indique qu'il s'agit des propriétés de l'écoulement turbulent.

Les paramètres  $k$  et  $\varepsilon$  sont obtenus par la résolution de deux équations différentielles. La forme compressible de ces équations est donnée par [28]:

$$\underbrace{\frac{\partial}{\partial t}(\bar{\rho}k)}_I + \underbrace{\frac{\partial}{\partial x_j}(\bar{\rho}\tilde{u}_j k)}_II = \underbrace{\frac{\partial}{\partial x_i} \left( \frac{\mu_t}{\sigma_k} \frac{\partial k}{\partial x_i} \right)}_III + \underbrace{\mu_t G_{ii} - \frac{2}{3} \frac{\partial \tilde{u}_m}{\partial x_m} \left( \mu_t \frac{\partial \tilde{u}_m}{\partial x_m} + \bar{\rho}k \right)}_IV - \underbrace{\frac{\bar{\rho}\varepsilon}{V}}_V \quad (4-12)$$

$$\underbrace{\frac{\partial}{\partial t}(\bar{\rho}\varepsilon)}_I + \underbrace{\frac{\partial}{\partial x_j}(\bar{\rho}\tilde{u}_j \varepsilon)}_II = \underbrace{\frac{\partial}{\partial x_j} \left( \frac{\mu_t}{\sigma_\varepsilon} \frac{\partial \varepsilon}{\partial x_j} \right)}_III + \underbrace{C_1 \frac{\varepsilon}{k} \left[ \mu_t G_{ii} - \frac{2}{3} \frac{\partial \tilde{u}_m}{\partial x_m} \left( \mu_t \frac{\partial \tilde{u}_m}{\partial x_m} + \bar{\rho}k \right) \right]}_IV + \underbrace{C_3 \bar{\rho}\varepsilon \frac{\partial \tilde{u}_m}{\partial x_m}}_V - \underbrace{C_2 \bar{\rho} \frac{\varepsilon^2}{k}}_VI \quad (4-13)$$

ici

$$G_{ii} = \frac{\partial \tilde{u}_i}{\partial x_j} \left( \frac{\partial \tilde{u}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \tilde{u}_j}{\partial x_i} \right) \quad (4-14)$$

$\sigma_k$ ,  $\sigma_\varepsilon$ , et  $C_1$ ,  $C_2$ ,  $C_3$  et  $C_\mu$  ( de l'éq.(2-8)) sont des constantes, leurs valeurs 'acceptées' sont données par la table 4-1.

$C_\mu$	$C_1$	$C_2$	$C_3$	$\sigma_k$	$\sigma_\varepsilon$
0.09	1.44	1.92	-0.33	1.00	1.22

Table 4-1 Valeurs des constantes pour le modèle de turbulence  $k$ - $\varepsilon$

Le sens physique des termes des équations (4-12) et (4-13) sont :

- I : taux de variation ;
- II : convection ;
- III : Diffusion ;
- IV : Production ;
- V : Dissipation.

### 4-3 FORME GENERALE DES EQUATIONS DU PROBLEME

Les équations à résoudre peuvent être écrites sous la forme générale suivante :

$$\frac{\partial(\rho\phi)}{\partial t} + \frac{1}{r} \left[ \frac{\partial}{\partial x} (r\rho u\phi) + \frac{\partial}{\partial r} (r\rho v\phi) \right] = \frac{1}{r} \left[ \frac{\partial}{\partial x} \left( r\Gamma_{\phi} \frac{\partial\phi}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial r} \left( r\Gamma_{\phi} \frac{\partial\phi}{\partial r} \right) \right] + S_{\phi} \quad (4-15)$$

Où  $\phi$  est la propriété transportée,  $\Gamma_{\phi}$  le coefficient de diffusion et  $S_{\phi}$  le terme source. Dans l'obtention des équations du problème, les nombres adimensionnels suivants sont utilisés.

**Nombre de Prandtl** : il représente le rapport du taux de transport de la quantité de mouvement à celui d'énergie.

$$Pr = \frac{\text{taux de transport de la quantité de mouvement}}{\text{taux de transport de l'énergie}} = \frac{\mu C_p}{\lambda} \quad (4-16)$$

**Nombre de Schmidt** : il représente le rapport du taux de transport de la quantité de mouvement à celui de la masse.

$$Sc = \frac{\text{taux de transport de la quantité de mouvement}}{\text{taux de transport de la masse}} = \frac{\mu C_p}{\rho C_p D} \quad (4-17)$$

Pour chaque équation le coefficient de diffusion et le terme source sont donnés par la table 4-2.

### 4-4 CONCLUSION

Pour fermer le système d'équations on utilise une approximation des flux turbulents. Cette dernière peut être soit opérée directement sur les contraintes turbulentes ou à travers une propriété de l'écoulement dite « viscosité turbulente ». Nous avons choisi la deuxième voie en utilisant un modèle à deux équations (k- $\epsilon$ ) qui s'adapte bien pour ce type d'écoulements.



Equation de	$\phi$	$\Gamma_\phi$	$S_P$	$S_U$
Conservation de la masse	I	0	0	0
Impulsion dans le sens x	u	$\mu_{eff}$	0	$S^U - \frac{\partial P}{\partial x}$
Impulsion dans le sens r	v	$\mu_{eff}$	$-2 \frac{\mu_{eff}}{r}$	$S^V - \frac{\partial P}{\partial r}$
Energie	$C_p T$	$\frac{\mu}{P_r} + \frac{\mu_t}{P_r}$	0	$\frac{dp}{dt} + Dif$
Energie de turbulence	k	$\mu_{eff} / \sigma_k$	$-\frac{C_\mu C_D K}{\mu_t} \rho^2$	G
Taux de dissipation	$\epsilon$	$\mu_{eff} / \sigma_\epsilon$	$-\frac{C_2 \rho \epsilon}{K} + C_3 \rho (\nabla \bar{u})$	$\frac{C_1 C_\mu G \rho K}{\mu_t}$
Fraction massique	Y	$\frac{\mu}{S_r} + \frac{\mu_t}{S_\sigma}$	0	0

Avec :

$$S^U = \frac{\partial}{\partial x} \left( \mu_{eff} \frac{\partial u}{\partial x} \right) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( \mu_{eff} r \frac{\partial (rv)}{\partial r} \right) - \frac{2}{3} \frac{\partial}{\partial x} \left( \mu_{eff} (\nabla \bar{u}) + \rho K \right)$$

$$S^V = \frac{\partial}{\partial r} \left( \mu_{eff} \frac{\partial v}{\partial r} \right) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( \mu_{eff} r \frac{\partial v}{\partial r} \right) - \frac{2}{3} \frac{\partial}{\partial r} \left( \mu_{eff} (\nabla \bar{u}) + \rho K \right)$$

$$G = \mu_t \left\{ 2 \left[ \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial v}{\partial r} \right)^2 + \left( \frac{v}{r} \right)^2 \right] + \left( \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial r} \right)^2 \right\} - \frac{2}{3} (\nabla \bar{u}) (\mu_t (\nabla \bar{u}) + \rho K)$$

$$Dif = -\rho DT \sum_{k=1}^N C_{rk} \frac{\partial Y_k}{\partial x_j} \quad , \quad \mu_{eff} = \mu + \mu_t = \mu + \frac{C_\mu \rho K^2}{\epsilon} \quad , \quad \nabla \bar{u} = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{r} \frac{\partial (rv)}{\partial r}$$

$Sc_r = Pr_t = 0.9, Sc_\sigma = Pr = 0.7.$

Table 4-2 : Coefficients de diffusion et termes source.

## CHAPITRE V

### PROCEDURE NUMERIQUE

#### 5-1 INTRODUCTION

La discrétisation d'une équation différentielle c'est le remplacement de l'information continue que contient sa solution par une information discrète. Donc, le domaine de calcul qui était continu doit être divisé ou discrétisé. C'est cette discrétisation systématique des variables dépendantes et de l'espace qui permet de remplacer les équations différentielles très compliquées par des équations algébriques faciles à résoudre.

#### 5-2 METHODE DE DISCRETISATION

Pour une équation différentielle donnée, plusieurs méthodes de discrétisation sont possibles. Parmi lesquelles nous avons :

##### 5-2-1 Méthode des différences finies :

Elle consiste à approximer les dérivées de l'équation différentielle par des troncatures de séries de Taylor. La substitution de ces approximations dans l'équation différentielle donne les équations aux différences finies [29].

- Cette méthode est très simple dans sa formulation, mais elle donne des résultats non satisfaisants, surtout en présence des variations exponentielles.

##### 5-2-2 Méthode des éléments finis :

Cette méthode peut être appliquée de deux façons :

###### A- Formulation variationnelle :

La résolution de certaines équations différentielles est équivalente à la minimisation d'une quantité dite fonctionnel. Si ce dernier est minimisé par rapport aux valeurs discrètes d'une variable dépendante, le résultat donne l'équation de discrétisation [30].

- Cette méthode est limitée, car le fonctionnel n'existe pas dans la majorité des cas d'intérêt pratique.

### **B- Méthode des résidus pondérés**

Cette méthode propose une approximation de la solution qui contient un nombre d'inconnues. La substitution de cette solution dans l'équation différentielle met naissance à un résidu. Le but donc, est de minimiser ce résidu. En choisissant plusieurs fonctions dites 'fonctions pondérées', on génère le nombre d'équations nécessaire pour trouver les inconnues [31].

- Les deux méthodes précédentes sont très puissantes, spécialement dans les géométries complexes. Leur inconvénient est que leur formulation est assez difficile.

### **5-2-3 Méthode des volumes finis :**

Le principe de cette méthode est de subdiviser le domaine de calcul en un nombre de volumes de contrôle juxtaposés. Chacun de ces derniers englobe un nœud dit «nœud principal». L'équation différentielle est intégrée sur ce volume de contrôle. Le profile de variation des paramètres entre les nœuds doit être choisi pour pouvoir évaluer les intégrales. Le résultat est l'équation de discrétisation qui a comme inconnues les variables recherchées [32].

### **\*\* CHOIX DE LA METHODE DE DISCRETISATION**

Dans cette étude la formulation des volumes de contrôle est adaptée puisque :

- Elle est simple dans la dérivation des équations algébriques ;
- Elle exprime le principe de conservation pour un volume de contrôle, de la même façon qu'une équation différentielle l'exprime sur un volume de contrôle infinitésimal ;
- La solution obtenue implique la conservation intégrale de toutes les quantités (quantité de mouvement, énergie, ...) sur un groupe de volumes de contrôle ou sur tout le domaine de calcul ;
- Elle est largement utilisée et testée.

### **5-3 GENERATION DE MAILLAGE**

Avant de discrétiser les équations différentielles, il est nécessaire de couvrir le domaine de calcul par un maillage. Il y a deux façons de le faire ; dans la première, le maillage des nœuds principaux (lignes continues Fig. 5-1) est défini tandis que les volumes de contrôles (lignes discontinues) sont tracés en plaçant leurs faces à mi-distances entre les

nœuds principaux. La deuxième procédure définit les faces des volumes de contrôle puis place les nœuds principaux dans leurs centres (Fig. 5-2).

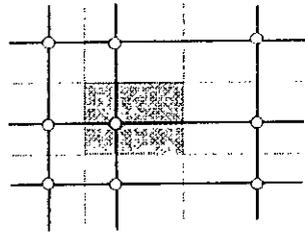


Fig. 5-1 : Faces centrées.

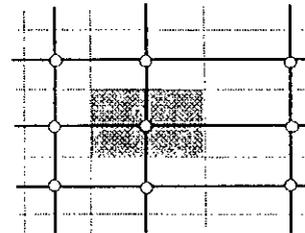


Fig. 5-2 : Nœuds centrés.

Puisque cette étude va tenir compte de la turbulence, la seconde technique est préférable. Cela est dû aux équations décrivant la distribution de  $k$  et  $\varepsilon$  qui sont dominés par leurs termes source.

Dans la discrétisation de ces termes on suppose qu'ils sont uniformes sur le volume de contrôle ; alors la valeur dans le centre de ce volume est la plus adéquate à être choisie. Aussi, lors de la simulation des écoulements dans les géométries compliquées (comme les élargissements brusques des conduites ou les écoulements autour des obstacles) les limites (de la conduite ou de l'obstacle) sont considérées comme faces de volumes de contrôle. Donc, si on place les faces en premier lieu, il sera très facile de positionner les lignes principales. En contre partie, si on commence par les lignes principales, on devra exercer des arrangements pour que les volumes de contrôle soient aux bonnes positions.

Pour avoir une bonne approximation des flux convectifs (équation de continuité) et une meilleure évaluation des gradients de pression (équations de la quantité de la quantité de mouvement), la technique du 'maillage déplacé' est utilisée pour les composantes de la vitesse. Cette technique est trouvée par Harlow et Welch (1965). Elle forme la base de l'algorithme SIMPLE (Semi Implicit Method for Presure Linked Equations) proposé par Patankar et Spalding.

Dans un système de maillage déplacé, les vitesses sont calculées sur les faces des volumes de contrôle. Alors, dans la direction  $x$ , la vitesse  $u$  est calculée sur la face normale à cette direction. Les positions de  $u$  sont montrées sur la figure 5-3 par des flèches, tandis que celles des nœuds par des cercles ; les lignes discontinues indiquent les faces des volumes de contrôle. Il faut noter que les positions de  $u$  sont déplacées seulement dans la direction  $x$ . La même procédure est suivie dans le deuxième sens (direction  $y$  ou  $r$ ). Les autres variables ( $P$ ,  $\rho$ ,  $T$ ,  $Y_k$ ,  $k$  et  $\varepsilon$ ) sont stockées dans les nœuds principaux.

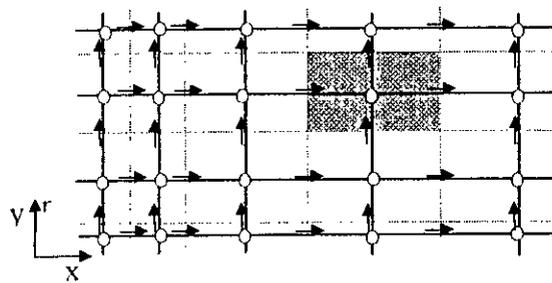


Fig. 5-3 : Système de maillage déplacé  
 $\rightarrow = u$ ;  $\uparrow = v$ ;  $\circ =$  autres variables.

Dans le présent travail, nous avons utilisé des maillages déplacés non uniformes avec raffinement dans les régions à forts gradients spatial des paramètres.

#### 5-4 DERIVATION DES EQUATIONS DE DISCRETISATION

Après avoir spécifié le maillage, on peut procéder à la conversion des équations différentielles de transport en systèmes d'équations algébriques. Ce procédé est simplifié si on traite le cas d'une équation généralisée de transport d'une variable  $\phi$ . Cette équation s'écrit dans le cas bidimensionnel axisymétrique :

$$\frac{\partial(\rho\phi)}{\partial t} + \frac{1}{r} \left[ \frac{\partial}{\partial x}(r\rho u\phi) + \frac{\partial}{\partial r}(r\rho v\phi) \right] = \frac{1}{r} \left[ \frac{\partial}{\partial x} \left( r\Gamma_{\phi} \frac{\partial\phi}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial r} \left( r\Gamma_{\phi} \frac{\partial\phi}{\partial r} \right) \right] + S_{\phi} \quad (5-1)$$

Où  $\phi$  la propriété transportée ;

$\Gamma_{\phi}$  le coefficient de diffusion ;

$S_{\phi}$  le terme source.

Tous ces termes sont listés dans la table 4-2. Pour faciliter l'écriture, les symboles (-) et (~) sont omis, cependant, il faut noter que toutes les variables dépendantes et indépendantes sont moyennées.

Premièrement, l'éq. (5-1) est intégrée entre les temps  $t$  et  $t + \Delta t$ , sur le volume de contrôle montré par la figure 5-4. Pour un point central P, les points E et W (East=Est et West=Ouest) sont des voisins dans la direction x, tandis que N et S (North=Nord et South=Sud) sont ceux dans la direction r. Le volume de contrôle entourant P est montré par les lignes discontinues. L'épaisseur de ce dernier dans la direction  $\theta$  est supposée être l'unité.

Les faces du volume de contrôle sont localisées aux points  $e$  et  $w$  dans la direction x,  $n$  et  $s$  dans la direction r.

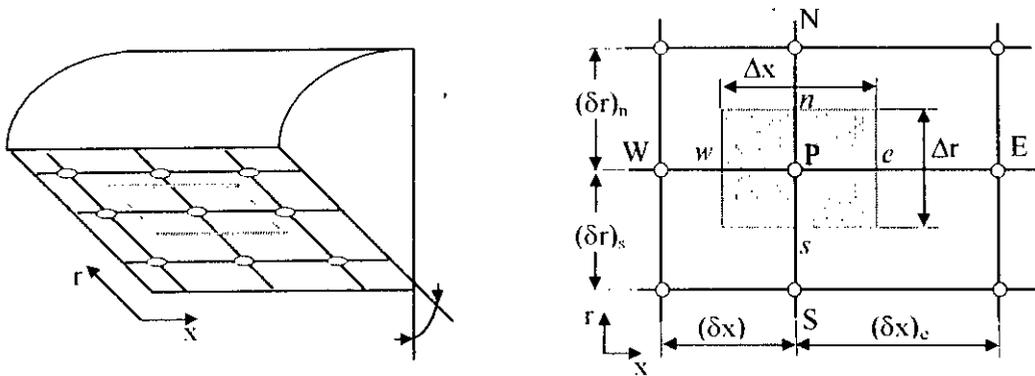


Fig. 5-4 : Volume de contrôle

L'équation (5-1) peut être écrite sous la forme :

$$\frac{\partial(r\rho\phi)}{\partial t} + \frac{\partial(rJ'_x)}{\partial x} + \frac{\partial(rJ'_r)}{\partial r} = rS_\phi \quad (5-2)$$

Avec

$$\begin{cases} J'_x = \rho u \phi - \Gamma_\phi \frac{\partial \phi}{\partial x} \\ J'_r = \rho v \phi - \Gamma_\phi \frac{\partial \phi}{\partial r} \end{cases} \quad (5-3)$$

$J'_x$  et  $J'_r$ , sont les flux totaux (convection et diffusion) par unité de surface dans les directions x et r.

L'intégration de l'équation (5-2) donne :

$$\underbrace{\int_t^{t+\Delta t} \int_w^e \int_s^n \frac{\partial(r\rho\phi)}{\partial t} dx dr dt}_I + \underbrace{\int_t^{t+\Delta t} \int_w^e \int_s^n \left( \frac{\partial(rJ'_x)}{\partial x} + \frac{\partial(rJ'_r)}{\partial r} \right) dx dr dt}_II = \underbrace{\int_t^{t+\Delta t} \int_w^e \int_s^n rS_\phi dx dr dt}_III \quad (5-4)$$

#### 5-4-1 Discrétisation spatiale

Pour rendre l'éq. (5-4) sous une forme algébrique, les suppositions suivantes doivent être faites [32] :

- La propriété  $\phi$  varie linéairement entre deux nœuds adjacents
- Les vitesses, densité et diffusivité sont uniformes sur les faces du volume de contrôle ;
- Le terme source  $S_\phi$  est uniforme sur le volume de contrôle.

**A - Intégration du flux total (terme II de l'éq. 5-4)**

$$\int_t^{t+\Delta t} \int_x^x \int_r^r \left( \frac{\partial(rJ'_x)}{\partial x} + \frac{\partial(rJ'_r)}{\partial r} \right) dx dr dt = \int_t^{t+\Delta t} \left( \int_x^x ((rJ'_x)_e - (rJ'_x)_w) dr - \int_r^r ((rJ'_r)_n - (rJ'_r)_s) dx \right) dt \quad (5-5)$$

En utilisant la deuxième supposition l'éq. (5-5) s'écrit :

$$\int_t^{t+\Delta t} \int_x^x \int_r^r \left( \frac{\partial(rJ'_x)}{\partial x} + \frac{\partial(rJ'_r)}{\partial r} \right) dx dr dt = \int_t^{t+\Delta t} \left( (J'_x)_e \int_x^x r_e dr - (J'_x)_w \int_x^x r_w dr + (J'_r)_n \int_r^r r_n dx - (J'_r)_s \int_r^r r_s dx \right) dt \quad (5-6)$$

Les intégrales dans l'équation (5-6) représentent respectivement les surfaces des faces est, ouest, nord et sud. Ces dernières seront notées par  $a_e$ ,  $a_w$ ,  $a_n$  et  $a_s$ . Pour simplifier l'écriture on note les  $(J'_m)_i$  par  $J'_i$  ( $m = x, r$  et  $i = e, w, n, s$ ).

Remplaçons ces notations dans l'équation (5-6) qui devient :

$$\int_t^{t+\Delta t} \int_x^x \int_r^r \left( \frac{\partial(rJ'_x)}{\partial x} + \frac{\partial(rJ'_r)}{\partial r} \right) dx dr dt = \int_t^{t+\Delta t} (a_e J'_e - a_w J'_w + a_n J'_n - a_s J'_s) dt \quad (5-7)$$

Le flux total est  $J_i = J'_i a_i$  ( $i = e, w, n, s$ ), l'éq. (5-7) s'écrit :

$$\int_t^{t+\Delta t} \int_x^x \int_r^r \left( \frac{\partial(rJ'_x)}{\partial x} + \frac{\partial(rJ'_r)}{\partial r} \right) dx dr dt = \int_t^{t+\Delta t} (J_e - J_w + J_n - J_s) dt \quad (5-8)$$

**B- Intégration du terme Source (terme III de l'éq. 5-4)**

$$\int_t^{t+\Delta t} \int_x^x \int_r^r r S_\phi dx dr dt = \int_t^{t+\Delta t} \left[ \int_x^x \int_r^r r S_\phi dx dr \right] dt \quad (5-9)$$

En utilisant la troisième supposition, on peut écrire :

$$\int_t^{t+\Delta t} S_\phi \int_x^x \int_r^r r dx dr dt = \int_t^{t+\Delta t} \bar{S}_\phi \Delta V dt \quad (5-10)$$

Où  $\Delta V$  est le volume du volume de contrôle,  $\bar{S}_\phi$  est la valeur moyenne du terme source sur ce volume.

Puisque les équations de discrétisation vont être résolues par les méthodes de résolution des systèmes linéaires, la linéarisation des termes source est nécessaire. Après linéarisation, on obtient la forme :

$$\bar{S}_\phi = S_C + S_P \phi_P \quad (5-11)$$

Où  $S_C$  est le terme constant, tandis que  $S_P$  est le coefficient de  $\phi_P$  (voir table 4-2) ( $S_P$  n'est pas  $S$  évalué au point  $P$ ).

Le problème qui se pose maintenant c'est comment évaluer les dérivées spatiales et temporelles ? Ceci est la tâche des schémas numériques de l'espace et du temps.

#### 5-4-2 Schémas numériques de l'espace

Dans cette partie, on va discuter l'évaluation des flux convectifs et diffusifs, pour se faire, il est préférable de traiter l'équation générale de transport en état stationnaire, et l'étendre au cas instationnaire.

La forme instationnaire de l'éq. (5-4) est :

$$J_e - J_w + J_n - J_s = (S_C + S_P \phi_P) \Delta V \quad (5-12)$$

Où  $J_i$  ( $i = e, w, n, s$ ) est le flux total évalué sur chaque face du volume de contrôle. Ce flux est composé de deux parties : le flux convectif et diffusif.

Par exemple :

$$J_e = \left( (\rho u)_e \phi_e - \Gamma_e \left( \frac{\partial \phi}{\partial x} \right)_e \right) a_e \quad (5-13)$$

#### A- Schéma aux différences centrées (CDS)

Afin d'évaluer le flux convectif à l'interface, un profile linéaire exprimant la variation de  $\phi$  entre deux nœuds adjacents est utilisé. Si les interfaces sont au milieu des nœuds principaux, cette approximation s'écrit :

$$\begin{aligned} \phi_e &= \frac{1}{2}(\phi_P + \phi_r) \\ \phi_w &= \frac{1}{2}(\phi_P + \phi_w) \\ \phi_n &= \frac{1}{2}(\phi_N + \phi_P) \\ \phi_s &= \frac{1}{2}(\phi_P + \phi_S) \end{aligned} \quad (5-14)$$

Les parties diffusives sont évaluées en approximant les dérivées par les différences, ce qui donne :

$$\begin{aligned} \Gamma_e \left. \frac{\partial \phi}{\partial x} \right|_e &= \Gamma_e \frac{\phi_e - \phi_P}{(\delta x)_e} \\ \Gamma_w \left. \frac{\partial \phi}{\partial x} \right|_w &= \Gamma_w \frac{\phi_P - \phi_w}{(\delta x)_w} \\ \Gamma_n \left. \frac{\partial \phi}{\partial x} \right|_n &= \Gamma_n \frac{\phi_N - \phi_P}{(\delta x)_n} \\ \Gamma_s \left. \frac{\partial \phi}{\partial x} \right|_s &= \Gamma_s \frac{\phi_P - \phi_S}{(\delta x)_s} \end{aligned} \quad (5-15)$$

Remplaçons les équations (5-14) et (5-15) dans l'eq. (5-12), on obtient :

$$A_e \phi_e = A_w \phi_w + A_n \phi_n + A_s \phi_s + A_p \phi_P + b \quad (5-16)$$

Avec

$$\begin{aligned} A_e &= D_e - \frac{F_e}{2} \\ A_w &= D_w + \frac{F_w}{2} \\ A_n &= D_n - \frac{F_n}{2} \\ A_s &= D_s - \frac{F_s}{2} \\ A_p &= A_e + A_w + A_n + A_s - S_p \Delta t \\ b &= S_p \Delta t \phi_P \\ F_i &= (\rho u_i) \\ D &= \frac{\Gamma a}{(\delta x)_i} \end{aligned} \quad (5-17)$$

$$(5-18)$$

Les variables  $F$  et  $D$  ont les mêmes dimensions ;  $F$  exprime la force de la convection tandis que  $D$  est la conductance de la diffusion.

Dans la majorité des cas d'intérêt, la valeur d'une variable dépendante dans un nœud est influencée par les valeurs des nœuds voisins seulement par convection et diffusion. Il s'ensuit qu'une augmentation de cette valeur provoque une augmentation des autres. En d'autres termes, les coefficients  $A_i$  ( $i = E, W, N, S$ ) et  $A_p$  doivent avoir le même signe, soit par exemple le signe positif.

Dans les expressions des coefficients de l'eq. (5-16), on note que le terme  $D$  est toujours positif,  $F$  peut être, selon le sens de l'écoulement, positif ou négatif, ce qui peut engendrer des coefficients négatifs.

Les coefficients de l'éq. (5-16) écrits en terme du nombre de Peclet ( $P_e$ ) sont donnés par :

$$\begin{aligned} A_E &= D_e \left( 1 - \frac{P_{ex}}{2} \right) \\ A_W &= D_w \left( 1 + \frac{P_{wx}}{2} \right) \\ A_N &= D_n \left( 1 - \frac{P_{en}}{2} \right) \\ A_S &= D_s \left( 1 - \frac{P_{sn}}{2} \right) \\ A_p &= A_E + A_W + A_N + A_S - S_p \Delta I' \\ b &= S_p \Delta I' \end{aligned}$$

avec

$$P_e = \frac{F}{D} = \frac{(\rho u_i) a}{\Gamma a} = \frac{(\rho u_i)(\delta x_i)}{\Gamma} \quad (5-19)$$

Pour que les coefficients soient positifs, le nombre de Peclet doit être dans l'intervalle  $[-2, 2]$  et  $S_p \leq 0$ .

- Le schéma CDS est utilisable pour  $|P_e| \leq 2$ , ceci est réalisé par des maillages fins.

### B - Schéma Upwind (UDS)

Ce schéma a été développé par Courant, Isaacson et Rees (1952). Dans celui-ci la formulation des termes de diffusion est inchangée. La partie convective est calculée en utilisant l'hypothèse suivante :

A l'interface la valeur de  $\phi$  est égale à celle du nœud se trouvant en amont de l'écoulement (Fig. 5-5). Par exemple, pour  $\phi_e$  on aura :

$$\begin{aligned} \phi_e &= \phi_p \text{ si } F_e > 0 \\ \phi_e &= \phi_E \text{ si } F_e < 0 \end{aligned} \quad (5-20)$$

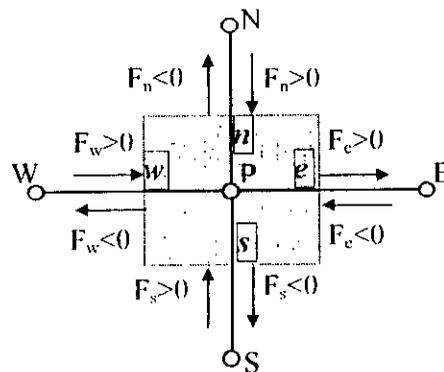


Fig. 4-5 Schéma Upwind

Les valeurs de  $\phi_w$ ,  $\phi_n$  et  $\phi_s$  sont définies par la même méthode. Les conditions exprimées par l'éq. (5-20) peuvent être assemblées en utilisant l'opérateur :

$$\|A, B\| = \max(A, B) \quad (5-21)$$

Le schéma Upwind s'écrit donc :

$$\begin{aligned} F_e \phi_e &= \phi_e \|F_e, 0\| - \phi_E \| -F_e, 0\| \\ F_w \phi_w &= \phi_w \|F_w, 0\| - \phi_r \| -F_w, 0\| \\ F_n \phi_n &= \phi_n \|F_n, 0\| - \phi_N \| -F_n, 0\| \\ F_s \phi_s &= \phi_s \|F_s, 0\| - \phi_r \| -F_s, 0\| \end{aligned} \quad (5-22)$$

Lorsque les expressions (5-22) sont remplacées dans (5-12), l'équation de discrétisation devient :

$$A_P \phi_P = A_E \phi_E + A_W \phi_W + A_N \phi_N + A_S \phi_S + b \quad (5-23)$$

Avec

$$\begin{aligned} A_E &= D_e + \| -F_e, 0\| \\ A_W &= D_w + \|F_w, 0\| \\ A_N &= D_n + \| -F_n, 0\| \\ A_S &= D_s + \|F_s, 0\| \\ A_P &= A_E + A_W + A_N + A_S - S_P \Delta t \\ b &= S_c \Delta t \end{aligned}$$

Puisque  $S_P$  est inférieur ou égal à zéro ( $S_P \leq 0$ ), le schéma Upwind peut être utilisé pour n'importe quelle valeur du nombre de Peclet, malgré qu'il surestime la diffusion pour les grandes valeurs.

### C- Schéma Hybride (HDS)

Ce schéma est développé par Spalding (1972). Il est la combinaison des deux premiers (CDS et UDS). On connaît que CDS est utilisé si  $|P_e| \leq 2$  et UDS surestime la diffusion pour les grands nombres de Peclet, pour cela HDS propose une solution à ces difficultés en utilisant :

- le schéma aux différences centrées pour  $|P_e| \leq 2$
- le schéma Upwind avec diffusion négligée pour  $|P_e| > 2$ .

Le schéma Hybride peut être représenté par trois droites, de telle façon, par exemple, pour  $A_E$  on a :

$$\begin{aligned} \text{Pour } P_{cr} < -2, \quad \frac{A_E}{D_r} &= -P_{cr}; \\ \text{Pour } -2 \leq P_{cr} \leq 2, \quad \frac{A_E}{D_r} &= 1 - \frac{P_{cr}}{2}; \\ \text{Pour } P_{cr} > 2, \quad \frac{A_E}{D_r} &= 0. \end{aligned} \quad (5-24)$$

Ceci peut s'écrire dans une forme compacte comme suit :

$$A_E = \left\| -F_r \cdot D_r - \frac{F_r}{2}, 0 \right\| \quad (5-25)$$

L'équation de discrétisation pour le schéma hybride s'écrit :

$$A_P \phi_P = A_E \phi_E + A_W \phi_W + A_N \phi_N + A_S \phi_S + b \quad (5-26)$$

Où

$$\begin{aligned} A_E &= \left\| -F_r \cdot D_r - \frac{F_r}{2}, 0 \right\| \\ A_W &= \left\| F_w \cdot D_w + \frac{F_w}{2}, 0 \right\| \\ A_N &= \left\| -F_n \cdot D_n - \frac{F_n}{2}, 0 \right\| \\ A_S &= \left\| F_s \cdot D_s + \frac{F_s}{2}, 0 \right\| \\ A_P &= A_E + A_W + A_N + A_S - S_P \Delta V \\ b &= S_c \Delta V \end{aligned}$$

#### D- Schéma à la loi de puissance (PLDS)

Ce schéma, proposé par Patankar (1979), représente une bonne approximation de la courbe exacte (cas de convection et diffusion stationnaire sans source). L'expression de  $A_E$  pour ce schéma s'écrit :

$$\begin{aligned} \text{Pour } P_{cr} < -10, \quad \frac{A_E}{D_r} &= -P_{cr}; \\ \text{Pour } -10 \leq P_{cr} \leq 0, \quad \frac{A_E}{D_r} &= (1 + 0,1P_{cr})^2 - P_{cr}; \\ \text{Pour } 0 \leq P_{cr} \leq 10, \quad \frac{A_E}{D_r} &= (1 - 0,1P_{cr})^2; \\ \text{Pour } P_{cr} > 10, \quad \frac{A_E}{D_r} &= 0. \end{aligned} \quad (5-27)$$

Notons que pour  $|P_e| > 10$  on retrouve le schéma hybride (Upwind avec convection nulle).

L'équation de discrétisation pour ce schéma s'écrit :

$$A_p \phi_p = A_E \phi_E + A_w \phi_w + A_N \phi_N + A_S \phi_S + b \quad (5-28)$$

avec

$$A_E = D_e \left\| 0, (1 - 0,1 |P_e|)^x \right\| + \|0, -F_e\|$$

$$A_w = D_w \left\| 0, (1 - 0,1 |P_w|)^x \right\| + \|0, F_w\|$$

$$A_N = D_n \left\| 0, (1 - 0,1 |P_n|)^x \right\| + \|0, -F_n\|$$

$$A_S = D_s \left\| 0, (1 - 0,1 |P_s|)^x \right\| + \|0, F_s\|$$

$$A_p = A_E + A_w + A_N + A_S - S_p \Delta t$$

$$b = S_p \Delta t$$

## \*\* CHOIX DU SCHEMA DE L'ESPACE

Il a été montré que pour choisir un schéma numérique, il faut respecter plusieurs conditions. Par exemple le schéma CDS nécessite l'utilisation de maillages fins, ce qui est coûteux en temps machine. UDS surestime la diffusion pour les grands nombres de Peclet, ceci conduit à des résultats erronés. Le troisième schéma néglige la diffusion pour des nombres de Peclet supérieurs ou inférieurs à deux, ce qui n'est pas tout à fait correct. En contre partie, le schéma PLDS donne une très bonne approximation de la solution exacte, en plus il a été largement utilisé [33], [34], et [35] ; c'est pourquoi notre choix a porté sur ce schéma.

### 5-4-3 Schémas numériques du temps

Dans l'éq. (5-4) le terme (I) est une dérivée par rapport au temps, son intégration entre les temps  $t$  et  $t + \Delta t$  et sur le volume de contrôle (figure 5-4) est faite en supposant  $\rho\phi$  uniforme sur ce dernier, ceci donne

$$I = \int_t^{t+\Delta t} \frac{\partial(\rho\phi)}{\partial t} dt \int_V r dr dx = \int_t^{t+\Delta t} \frac{\partial(\rho\phi)}{\partial t} dt \Delta V = (\rho_1^1 \phi_1^1 - \rho_0^0 \phi_0^0) \Delta V \quad (5-29)$$

Où les exposants 0 et 1 indiquent les temps  $t$  et  $t + \Delta t$ .

Les autres termes (II) et (III) de l'éq. (5-4) nécessitent la connaissance de la variation de  $\phi_i$  ( $i = E, W, N, S, P$ ) entre les temps  $t$  et  $t + \Delta t$ . Ceci est la tâche des schémas temporels.

Plusieurs suppositions sont possibles dont certaines peuvent être écrites sous la forme :

$$\int_{t^n}^{t^{n+1}} \phi_i dt = (f\phi_i^1 + (1-f)\phi_i^n)\Delta t, \quad i = E, W, N, S, P \quad (5-30)$$

Où  $f$  est un facteur qui varie entre 0 et 1.

#### A- Schéma explicite

Dans ce schéma  $f$  prend la valeur 0, cela signifie que lorsqu'on remplace (5-30) dans l'équation de discrétisation,  $\phi_i^1$  est obtenu explicitement en terme de valeurs  $\phi_i^n$  ( $i = E, W, N, S$ ). Ce schéma est très simple, mais sérieusement limité. Si on veut garder les coefficients de l'équation de discrétisation positifs, on doit respecter un certain critère dit «critère de stabilité» qui relie  $\Delta x$ ,  $\Delta r$  et  $\Delta t$ . Selon ce critère, la réduction de  $\Delta x$  et  $\Delta r$ , pour obtenir des résultats précis, nécessite la réduction de  $\Delta t$  et par conséquent l'augmentation du temps de calcul.

#### B- Schéma de Cranck-Nicolson

Pour ce schéma, la variable  $f$  prend la valeur 0.5. On trouve que  $\phi_i^1$  est fonction de  $\phi_i^n$  et  $\phi_i^{n+1}$  ( $i = E, W, N, S$ ). Ce schéma nécessite aussi le respect d'un critère de stabilité, en plus si  $\Delta t$  est grand on risque d'obtenir des résultats erronés (Patankar et Baliga (1978)).

#### C- Schéma totalement implicite

Pour garder les coefficients de l'équation de discrétisation toujours positifs, on doit donner la valeur 1 au facteur  $f$ . Ce schéma n'a aucun critère de stabilité à respecter. De plus il a donné des résultats satisfaisants.

#### \*\* CHOIX DU SCHEMA TEMPOREL

Il a été montré que les schémas explicite et de Cranck-Nicolson sont limités par un critère de stabilité. Aussi le deuxième donne des résultats erronés pour  $\Delta t$  large. Le schéma implicite est utilisable pour tous les  $\Delta t$  et ne nécessite pas le respect d'aucun critère de stabilité, il simplifie aussi l'écriture des équations. Vu ces avantages nous avons choisi le schéma totalement implicite.

### 5-5 FORMULATION GENERALISEE DU PROBLEME

Une fois le choix du schéma du temps est fait, l'intégration de l'éq. (5-4) sera possible. Elle donne l'équation suivante :

$$\Delta t \int_t^{t+\Delta t} \frac{\partial(\rho\phi)}{\partial t} dt + \int_t^{t+\Delta t} (J_e - J_w + J_n - J_s) dt = \Delta t \int_t^{t+\Delta t} (S_c + S_p\phi_p) dt \quad (5-31)$$

En utilisant le schéma totalement implicite, on aura :

$$(\rho_p^1\phi_p^1 - \rho_p^0\phi_p^0)\Delta t + (J_e^1 - J_w^1 + J_n^1 - J_s^1)\Delta t = (S_c + S_p\phi_p^1)\Delta t \Delta t \quad (5-32)$$

Où

$$J_i^1 = \left( (\rho u)_i \phi_i^1 - \Gamma_i \frac{\partial \phi_i^1}{\partial x_i} \right) a_i, \quad \text{avec} \begin{cases} \text{si } i = E, W \text{ alors } u_i = u \text{ et } x_j = x \\ \text{si } i = N, S \text{ alors } u_i = v \text{ et } x_j = r \end{cases} \quad (5-33)$$

Pour simplifier l'écriture, l'exposant '1' sera omis. Divisons l'éq. (5-32) par  $\Delta t$ , on obtient :

$$\frac{(\rho_p\phi_p - \rho_p^0\phi_p^0)}{\Delta t} \Delta t + (J_e - J_w + J_n - J_s) = (S_c + S_p\phi_p)\Delta t \quad (5-34)$$

En appliquant la même procédure, l'intégration de l'équation (3-3) entre  $t$  et  $t + \Delta t$ , sur le volume de contrôle (figure 5-4) donne :

$$\frac{(\rho_p - \rho_p^0)}{\Delta t} \Delta t + F_e - F_w + F_n - F_s = 0 \quad (5-35)$$

Où  $F_i$  ( $i = e, w, n, s$ ) sont les débits massiques à travers les faces du volume de contrôle.

Si on multiplie l'éq. (5-35) par  $\phi_p$  et on la retranche de l'équation (5-34), on obtient :

$$\begin{aligned} (\phi_p - \phi_p^0) \frac{\rho_p \Delta t}{\Delta t} + (J_e - F_e\phi_p) - (J_w - F_w\phi_p) + (J_n - F_n\phi_p) - (J_s - F_s\phi_p) \\ = (S_c + S_p\phi_p)\Delta t \end{aligned} \quad (5-36)$$

La supposition d'uniformité sur les faces des volumes de contrôle nous permet d'écrire [32]:

$$\begin{aligned} J_e - F_e\phi_p &= A_E(\phi_p - \phi_E) \\ J_w - F_w\phi_p &= A_W(\phi_p - \phi_W) \\ J_n - F_n\phi_p &= A_N(\phi_p - \phi_N) \\ J_s - F_s\phi_p &= A_S(\phi_p - \phi_S) \end{aligned} \quad (5-37)$$

avec

$$\begin{aligned}
 A_E &= D_e A(|P_w|) + \|F_e, 0\| \\
 A_W &= D_w A(|P_w|) + \|F_w, 0\| \\
 A_N &= D_n A(|P_w|) + \|F_n, 0\| \\
 A_S &= D_s A(|P_w|) + \|F_s, 0\|
 \end{aligned}
 \tag{5-38}$$

L'équation de discrétisation s'écrit sous la forme :

$$A_i \phi_P = A_E \phi_E + A_W \phi_W + A_N \phi_N + A_S \phi_S + b$$

Où les coefficients  $A_i$  ( $i = E, W, N, S$ ) sont donnés par l'éq.(5-38)

$$\begin{aligned}
 \text{et} \quad b &= S_e \Delta V + A_P^0 \phi_P^0 \\
 A_P &= A_E + A_W + A_N + A_S + A_P^0 - S_e \Delta V
 \end{aligned}
 \tag{5-39}$$

$$\text{avec} \quad A_P^0 = \rho_P^0 \frac{\Delta V}{\Delta t}$$

Ici  $\phi_P^0$  et  $\rho_P^0$  représentent des valeurs connues au temps  $t$ , tandis que les autres  $\phi_i$  ( $i = E, W, N, S, P$ ) au temps  $t + \Delta t$ , sont inconnues.

La fonction  $A(|P_e|)$  est choisie à partir de la table 5-1 selon le schéma voulu.

Schéma	Formule pour $A( P_e )$
Différences Centrées	$1 - 0.5 P_e $
Upwind	1
Hybride	$\ 1 - 0.5 P_e \ $
Loi de puissance	$\ 0. (1 - 0.1 P_e )^2\ $
Exponentiel. (exact)	$ P_e  / (\exp( P_e ) - 1)$

Table 5-1 La fonction  $A(|P_e|)$  pour différents schémas.

### 5-6 DISCRETISATION DES TERMES SOURCE

Avant de procéder à la discrétisation, on va définir quelques coefficients d'interpolation. Ces derniers vont permettre d'exprimer les paramètres aux interfaces en terme de ceux dans les nœuds. Prenons par exemple  $\phi_e$  et  $\phi_w$ , notre but est de les calculer en fonction de  $\phi_r$ ,  $\phi_p$  et  $\phi_l$  (figure 5-6).

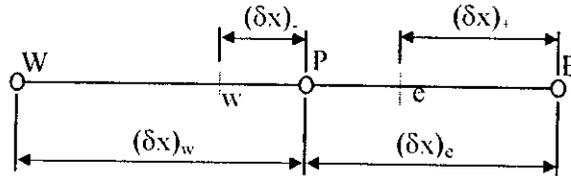


Fig. 5-6 Coefficients d'interpolation

Si on utilise une interpolation linéaire. On aura :

$$\begin{aligned}\phi_r &= \phi_p + f'_r (\phi_s - \phi_p), \quad \text{avec } f'_r = \frac{(\delta x)_e}{(\delta x)_r} \\ \phi_w &= \phi_p + f'_w (\phi_r - \phi_w), \quad \text{avec } f'_w = \frac{(\delta x)_e}{(\delta x)_w}\end{aligned}\tag{5-40}$$

Appliquons la même procédure pour la direction  $r$ , on obtient :

$$\begin{aligned}\phi_n &= \phi_r + f'_n (\phi_s - \phi_r), \quad \text{avec } f'_n = \frac{(\delta v)_e}{(\delta v)_n} \\ \phi_s &= \phi_r + f'_s (\phi_r - \phi_s), \quad \text{avec } f'_s = \frac{(\delta v)_e}{(\delta v)_s}\end{aligned}\tag{5-41}$$

#### 5-6-1 Discrétisation des termes source des propriétés vectorielles :

Puisque ces termes sont supposés uniformes sur le volume de contrôle, le but est donc de déterminer leur moyennes sur ce dernier.

Dans le calcul des composantes de la vitesse nous avons utilisé le système de maillage déplacé, alors les termes source de chaque composante doivent être évalués sur le volume de contrôle approprié.

#### A- Vitesse axiale $u$

Son terme source est :

$$S_u = \frac{\partial}{\partial x} \left( \mu \frac{\partial u}{\partial x} \right) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \mu \frac{\partial u}{\partial r} \right) - \frac{2}{3} \frac{\partial}{\partial x} \left( \mu \nabla \bar{u} + \rho k \right) - \frac{\partial \mathcal{P}}{\partial x}\tag{5-42}$$

Avec

$$\nabla \bar{u} = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{r} \frac{\partial (rv)}{\partial r} \quad (5-43)$$

L'indice 'eff' figurant dans les viscosités est omis pour simplifier l'écriture. Le terme source est discrétisé sur le volume de contrôle montré par la figure 5-7 :

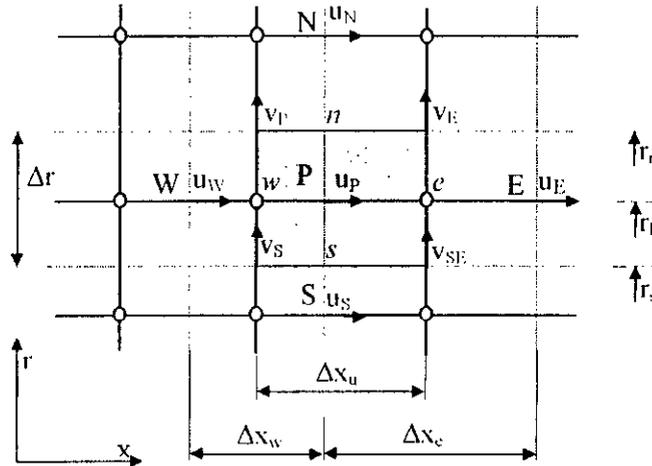


Fig. 5-7 Volume de contrôle pour u.

De l'équation (5-4) on a :

$$\int_{t'}^{t''} \int_{r_s}^{r_n} \int_{x_w}^{x_e} r S_u dx dr dt = \int_{t'}^{t''} \int_{r_s}^{r_n} \int_{x_w}^{x_e} \left[ \frac{\partial}{\partial x} \left( \mu \frac{\partial u}{\partial x} \right) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \mu \frac{\partial v}{\partial r} \right) - \frac{2}{3} \frac{\partial}{\partial x} \left( \mu \nabla \bar{u} + \rho k \right) - \frac{\partial P}{\partial x} \right] r dx dr dt \quad (5-44)$$

①
②
③
④

Ce qui donne :

$$\textcircled{1} = \frac{\Delta V_u}{\Delta x_u} \int_{t'}^{t''} \left[ \left( \mu \frac{\partial u}{\partial x} \right)_e - \left( \mu \frac{\partial u}{\partial x} \right)_w \right] dt = \frac{\Delta V_u}{\Delta x_u} \left[ \mu_e \frac{u_e - u_p}{\Delta x_e} - \mu_w \frac{u_p - u_w}{\Delta x_w} \right] \Delta t \quad (5-45)$$

$$\textcircled{2} = \frac{\Delta V_u}{r_p \Delta r} \left[ r_n \mu_n \frac{v_n - v_p}{\Delta r_n} - r_s \mu_s \frac{v_s - v_p}{\Delta r_s} \right] \Delta t \quad (5-46)$$

$$\textcircled{3} = \frac{\Delta V_u}{\Delta x_u} \left[ \begin{aligned} & \mu_e \left( \frac{u_e - u_p}{\Delta x_e} + \frac{1}{r_p} \frac{r_n v_n - r_s v_s}{\Delta r} + \rho_e k_e \right) \\ & - \mu_w \left( \frac{u_p - u_w}{\Delta x_w} + \frac{1}{r_p} \frac{r_n v_n - r_s v_s}{\Delta r} + \rho_w k_w \right) \end{aligned} \right] \Delta t \quad (5-47)$$

$$\textcircled{4} = \frac{\Delta V_u}{\Delta x_u} (P_e - P_w) \Delta t \quad (5-48)$$

Avec  $\Delta V_u$  est le volume du volume de contrôle pour la composante de vitesse u.

**B- Vitesse Radiale  $v$**

Son terme source est :

$$S_v = \frac{\partial}{\partial x} \left( \mu \frac{\partial u}{\partial x} \right) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \mu \frac{\partial v}{\partial r} \right) - \frac{2}{3} \frac{\partial}{\partial x} (\mu \nabla \bar{U}) + \rho k + 2 \mu \frac{v}{r^2} - \frac{\partial P}{\partial r} \quad (5-49)$$

Le volume de contrôle de  $v$  est montré par la figure 5-8

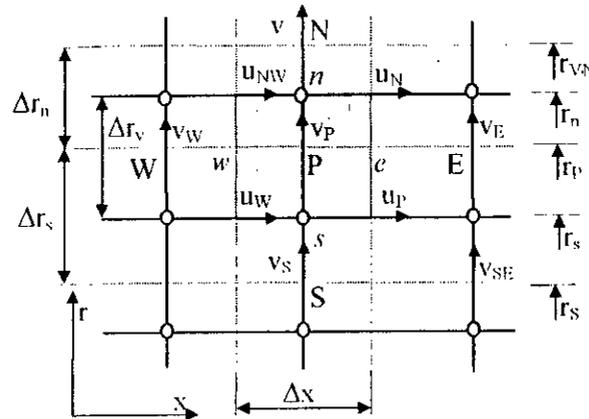


Fig. 5-8 Volume de contrôle pour  $v$ .

L'intégration du terme source donne :

$$\int_{t'}^{t'+\Delta t} \int_{x'}^{x'+\Delta x} \int_{r'}^{r'+\Delta r} r S_v dx dr dt = \int_{t'}^{t'+\Delta t} \int_{x'}^{x'+\Delta x} \int_{r'}^{r'+\Delta r} \left[ \underbrace{\frac{\partial}{\partial x} \left( \mu \frac{\partial u}{\partial x} \right)}_{\textcircled{1}} + \underbrace{\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \mu \frac{\partial v}{\partial r} \right)}_{\textcircled{2}} - \underbrace{\frac{2}{3} \frac{\partial}{\partial x} (\mu \nabla \bar{U}) + \rho k}_{\textcircled{3}} + \underbrace{2 \mu \frac{v}{r^2}}_{\textcircled{4}} - \underbrace{\frac{\partial P}{\partial r}}_{\textcircled{5}} \right] r dx dr dt \quad (5-50)$$

Avec :

$$\textcircled{1} = \frac{\Delta V_v}{\Delta x} \int_{t'}^{t'+\Delta t} \left[ \left( \mu \frac{\partial u}{\partial x} \right)_e - \left( \mu \frac{\partial u}{\partial x} \right)_w \right] dt = \frac{\Delta V_v}{\Delta x} \left[ \mu_e \frac{u_N - u_P}{\Delta r_n} - \mu_w \frac{u_{NW} - u_N}{\Delta r_n} \right] \Delta t \quad (5-51)$$

$$\textcircled{2} = \frac{\Delta V_v}{r_p \Delta r_n} \left[ r_n \mu_n \frac{v_N - v_P}{\Delta r_n} - r_s \mu_s \frac{v_P - v_S}{\Delta r_s} \right] \Delta t \quad (5-52)$$

$$\textcircled{3} = \frac{\Delta V_v}{\Delta r_n} \left[ \mu_n \left( \frac{u_N - u_{NW}}{\Delta x} + \frac{1}{r_n} \frac{r_{iN} v_N - r_P v_P}{\Delta r_n} + \rho_n k_n \right) - \mu_s \left( \frac{u_P - u_W}{\Delta x} + \frac{1}{r_s} \frac{r_P v_P - r_S v_S}{\Delta r_s} + \rho_s k_s \right) \right] \Delta t \quad (5-53)$$

$$\textcircled{4} = \Delta V_v \mu_P \frac{v_P}{r_P^2} \Delta t \quad (5-54)$$

$$\textcircled{5} = \frac{\Delta V_v}{\Delta r_n} (P_n - P_s) \Delta t \quad (5-55)$$

Avec  $\Delta V_v$  est le volume du volume de contrôle pour la composante de vitesse  $v$ .

### 5-6-2 Discrétisation des termes sources des quantités scalaires :

Pour ces quantités, un seul volume de contrôle est utilisé (Fig. 5-9) pour la discrétisation.

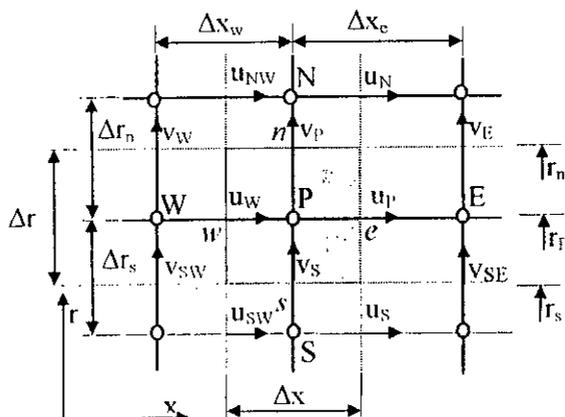


Fig. 5-9 volume de contrôle pour les quantités scalaires.

#### A- Equation de l'énergie

Le terme source intégré de cette équation est :

$$\int_t^{t+\Delta t} \int_x^{x+\Delta x} \int_y^{y+\Delta y} r S_p dx dy dt = \int_t^{t+\Delta t} \int_x^{x+\Delta x} \int_y^{y+\Delta y} \left[ \frac{1}{C_p} \left( \frac{\partial p}{\partial t} + u \frac{\partial p}{\partial x} + v \frac{\partial p}{\partial y} \right) \right] r dx dy dt + \int_t^{t+\Delta t} \int_x^{x+\Delta x} \int_y^{y+\Delta y} \left[ \frac{(\rho D)}{C_p} \frac{\partial}{\partial x} \left( T \sum_k C_{pk} \frac{\partial Y_k}{\partial x} \right) + \frac{(\rho D)}{C_p} \frac{\partial}{\partial y} \left( r T \sum_k C_{pk} \frac{\partial Y_k}{\partial y} \right) \right] r dx dy dt + \quad (5-56)$$

Avec :

$$\textcircled{1} = \frac{\Delta V_s}{C_p(T_p)} \left( P_p - P_p^o + \frac{u_p + u_w}{2} \frac{P_p - P_w}{\Delta x} + \frac{v_p + v_s}{2} \frac{P_p - P_s}{\Delta r} \right) \Delta t \quad (5-57)$$

$$\textcircled{2} = \left[ \frac{(\rho D)_p}{C_p(T_p)} \frac{\Delta V_s}{\Delta x} \left( T_e \sum_k C_{pk}(T_e) \frac{Y_{ke} - Y_{kp}}{\Delta x_e} - T_w \sum_k C_{pk}(T_w) \frac{Y_{kp} - Y_{kw}}{\Delta x_w} \right) + \frac{(\rho D)_p}{C_p(T_p)} \frac{\Delta V_s}{r_p \Delta r} \left( r_n T_n \sum_k C_{pk}(T_n) \frac{Y_{kn} - Y_{kp}}{\Delta r_n} - r_s T_s \sum_k C_{pk}(T_s) \frac{Y_{kp} - Y_{ks}}{\Delta r_s} \right) \right] \Delta t \quad (5-58)$$

L'indice K prend la valeur 1 (fuel) ou 2 (combustible).

### B- Equation de l'énergie de turbulence

Son terme source intégré est donné par :

$$\begin{aligned}
 \int_t^{t+\Delta t} \int_s^s \int_w^w r S_k dx dr dt &= \int_t^{t+\Delta t} \int_s^s \int_w^w \mu_t \left[ 2 \left( \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} \right)^2 + 2 \left( \frac{\partial \bar{v}}{\partial r} \right)^2 + 2 \left( \frac{v}{r} \right)^2 + \left( \frac{\partial \bar{u}}{\partial r} + \frac{\partial \bar{v}}{\partial x} \right)^2 \right] r dx dr dt \\
 &\quad - \frac{2}{3} \int_t^{t+\Delta t} \int_s^s \int_w^w \left[ \nabla \bar{u} \left( \mu_t \nabla \bar{u} + \rho k \right) \right] r dx dr dt - \int_t^{t+\Delta t} \int_s^s \int_w^w \rho \varepsilon r dx dr dt
 \end{aligned} \tag{5-59}$$

Où :

$$\textcircled{1} = \Delta t \int_s^s \mu_t \left[ 2 \left( \frac{u_p - u_w}{\Delta x} \right)^2 + 2 \left( \frac{v_p - v_s}{\Delta r} \right)^2 + 2 \left( \frac{v_p + v_s}{2} \right)^2 + \left( \frac{u_p - u_s}{\Delta r} + \frac{v_r - v_w}{\Delta x} \right)^2 \right] \Delta t \tag{5-60}$$

$$\textcircled{2} = \nabla \bar{u} \Big|_{rr} = \left( \frac{u_p - u_w}{\Delta x} + \frac{1}{r_p} \frac{r_p v_p - r_s v_s}{\Delta r} \right) \tag{5-61}$$

$$\textcircled{3} = \Delta t \int_s^s \left[ -\frac{2}{3} \nabla \bar{u} \Big|_{rr} \left( \mu_t \nabla \bar{u} \Big|_{rr} + \rho_r k_r \right) - \rho_r \varepsilon_r \right] \Delta t \tag{5-62}$$

### C- Equation du taux de dissipation

Le terme source intégré de cette équation est donné par :

$$\begin{aligned}
 \int_t^{t+\Delta t} \int_s^s \int_w^w r S_\varepsilon dx dr dt &= \int_t^{t+\Delta t} \int_s^s \int_w^w C_1 \frac{\varepsilon}{k} \mu_t \left[ 2 \left( \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} \right)^2 + 2 \left( \frac{\partial \bar{v}}{\partial r} \right)^2 + 2 \left( \frac{v}{r} \right)^2 + \left( \frac{\partial \bar{u}}{\partial r} + \frac{\partial \bar{v}}{\partial x} \right)^2 \right] r dx dr dt \\
 &\quad - \frac{2}{3} \int_t^{t+\Delta t} \int_s^s \int_w^w C_1 \frac{\varepsilon}{k} \left[ \nabla \bar{u} \left( \mu_t \nabla \bar{u} + \rho k \right) \right] r dx dr dt - \int_t^{t+\Delta t} \int_s^s \int_w^w \left( C_2 \frac{\varepsilon}{k} \rho \varepsilon + C_3 \rho \varepsilon \nabla \bar{u} \right) r dx dr dt
 \end{aligned} \tag{5-63}$$

Cette expression est similaire à celle de l'énergie de turbulence, donc elle est évaluée de la même façon.

$\Delta V_s$  est le volume du volume de contrôle pour les quantités scalaires.

### 5-7 EQUATION DE LA PRESSION

En principe, les équations d'impulsion peuvent être résolues directement par une procédure appropriée à condition que le champ de pression soit donné. Malheureusement, ce dernier est inconnu, aussi il n'y a pas d'équations régissant directement la pression. La méthode utilisée pour résoudre ce problème est basée sur la compatibilité entre  $u$  et  $v$  imposée par l'équation de continuité.

Plusieurs algorithmes ont été formulés à partir d'une combinaison des équations d'impulsion et de continuité. Cette formulation donne une équation elliptique de la pression ou de sa correction.

Dans cette étude les algorithmes SIMPLE et PISO sont adoptés avec une modification tenant compte de la compressibilité et du mélange des espèces.

#### 5-7-1 Modification des algorithmes SIMPLE et PISO pour tenir compte du mélange d'espèces et de la compressibilité

Le champ de pression estimé est utilisé pour calculer  $u$  et  $v$  à partir des équations d'impulsion. Si l'exposant (\*) note l'estimation et (') sa correction, les valeurs exactes des paramètres sont données par :

$$P = P^* + P' \quad (5-64)$$

$$\rho = \rho^* + \rho' = \rho^* + \left( \frac{\partial \rho}{\partial P} \right)_T P' = \rho^* + KP' \quad (5-65)$$

avec 
$$K = \frac{1}{RT} \quad (5-66)$$

et 
$$R = R_0 \sum_m \frac{Y_m}{M_m} \quad (5-67)$$

$R_0$  est la constante universelle des gaz.

$$u = u^* + u' \quad (5-68)$$

$$v = v^* + v' \quad (5-69)$$

Où les champs  $u^*$  et  $v^*$  sont obtenus des équations suivantes :

$$A_e u_e^* = \sum_{nb} A_{nb} u_{nb}^* + b_u + a_e (P_p^* - P_v^*) \quad (5-70)$$

$$A_n v_n^* = \sum_{nb} A_{nb} v_{nb}^* + b_v + a_n (P_p^* - P_N^*) \quad (5-71)$$

avec  $b_u$  et  $b_v$  définis de la même façon que dans l'équation (5-39), mais avec les termes de pression non inclus dans les termes source  $S_c$  et  $S_p$ . Les gradients de pression sont représentés par les derniers termes des équations (5-70) et (5-71), qui sont les forces de pression agissantes sur les volumes de contrôle de  $u$  et  $v$ .  $a_e$  et  $a_n$  sont les surfaces sur lesquelles agissent ces forces. La valeur exacte de  $u$  et  $v$  est exprimée par :

$$A_e u_e = \sum_{nb} A_{nb} u_{nb} + b_u + a_e (P_P - P_E) \quad (5-72)$$

$$A_n v_n = \sum_{nb} A_{nb} v_{nb} + b_v + a_n (P_P - P_N) \quad (5-73)$$

Si les équations (5-70) et (5-71) sont retranchées respectivement des équations (5-72) et (5-73), le résultat est :

$$A_e u'_e = \sum_{nb} A_{nb} u'_{nb} + a_e (P'_P - P'_E) \quad (5-74)$$

$$A_n v'_n = \sum_{nb} A_{nb} v'_{nb} + a_n (P'_P - P'_N) \quad (5-75)$$

Donc

$$u'_e = \frac{\sum_{nb} A_{nb} u'_{nb}}{A_e} + \frac{a_e}{A_e} (P'_P - P'_E) \quad (5-76)$$

$$v'_n = \frac{\sum_{nb} A_{nb} v'_{nb}}{A_n} + \frac{a_n}{A_n} (P'_P - P'_N) \quad (5-77)$$

Si on pose

$$P = P'_1 + P'_2 \quad (5-78)$$

et

$$D^e_u = \frac{a_e}{A_e} \quad (5-79)$$

$$D^n_v = \frac{a_n}{A_n} \quad (5-80)$$

Les équations (5-76) et (5-77) peuvent être écrites comme suit :

$$u'_e = u'_{e1} + u'_{e2} \quad (5-81)$$

$$v'_n = v'_{n1} + v'_{n2} \quad (5-82)$$

Où

$$u'_{e1} = (P'_{P1} - P'_{E1})D'_u \quad (5-83)$$

$$v'_{n1} = (P'_{P1} - P'_{N1})D'_v \quad (5-84)$$

et

$$u'_{e2} = \frac{\sum_{nb} A_{nb} u'_{nb}}{A_e} + (P'_{P2} - P'_{E2})D'_u \quad (5-85)$$

$$v'_{n2} = \frac{\sum_{nb} A_{nb} v'_{nb}}{A_n} + (P'_{P2} - P'_{N2})D'_v \quad (5-86)$$

Alors, les champs exacts de vitesse et de pression auront la forme :

$$u_e = u_e^* + u'_{e1} + u'_{e2} = u_e^{**} + u'_{e2} \quad (5-87)$$

$$v_e = v_e^* + v'_{e1} + v'_{e2} = v_e^{**} + v'_{e2} \quad (5-88)$$

$$P = P^* + P'_1 + P'_2 \quad (5-89)$$

Comme première approximation, on suppose que  $u'_{e2} = v'_{n2} = 0$ , les équations (5-87) et (5-88) deviennent :

$$u_e^{**} = u_e^* + (P'_{P1} - P'_{E1})D'_u = u_e \quad (5-90)$$

$$v_e^{**} = v_e^* + (P'_{P1} - P'_{N1})D'_v = v_e \quad (5-91)$$

Sachant que  $u_e, u_w, u_n$  et  $u_s$  satisfont l'équation discrète de continuité donnée par :

$$\frac{(\rho_P - \rho_P^0)}{\Delta t} \Delta V + (\rho u)_e a_e - (\rho u)_w a_w + (\rho u)_n a_n - (\rho u)_s a_s = 0 \quad (5-92)$$

Remplaçons les équations (5-65) (deuxième expression), (5-68) et (5-69) dans (5-92) on aura :

$$\begin{aligned} \frac{(\rho_P - \rho_P^0)}{\Delta t} \Delta V + \left( (\rho^* + \rho')(u^* + u')a \right)_e - \left( (\rho^* + \rho')(u^* + u')a \right)_w \\ + \left( (\rho^* + \rho')(v^* + v')a \right)_n - \left( (\rho^* + \rho')(v^* + v')a \right)_s = 0 \end{aligned} \quad (5-93)$$

A ce stade, nous utilisons l'approximation suivante :

$$(\rho^* + \rho')(u^* + u') \approx \rho^* u^* + \rho^* u' + \rho' u^* \quad (5-94)$$

Remplaçons les équations (5,65) (quatrième expression), (5-90) et (5-91) dans (5-93) et

utilisons l'approximation donnée par l'équation (5-94) on obtient :

$$\begin{aligned} & \left( \rho_e^* D_u^c (P'_{P1} - P'_{E1}) + K_e P'_{e1} u_{e1}^* \right) a_e - \left( \rho_w^* D_u^w (P'_{W1} - P'_{P1}) + K_w P'_{w1} u_{w1}^* \right) a_w \\ & + \left( \rho_n^* D_u^n (P'_{P1} - P'_{N1}) + K_n P'_{n1} v_{n1}^* \right) a_n - \left( \rho_s^* D_u^s (P'_{S1} - P'_{P1}) + K_s P'_{s1} v_{s1}^* \right) a_s + \frac{K_P P'_{P1}}{\Delta t} \Delta t = b_1 \end{aligned} \quad (5-95)$$

Avec

$$b_1 = \rho_w^* u_{w1}^* a_w - \rho_e^* u_{e1}^* a_e + \rho_s^* u_{s1}^* a_s - \rho_n^* u_{n1}^* a_n + \frac{\rho_P^0 - \rho_P^*}{\Delta t} \quad (5-96)$$

Après réarrangement et utilisation du schéma hybride on aura la forme suivante :

$$A_P P'_{P1} = A_E P'_{E1} + A_W P'_{W1} + A_N P'_{N1} + A_S P'_{S1} + b_1 \quad (5-97)$$

Avec

$$\begin{aligned} A_E &= H_e \left\| -L_e \cdot 1 - f_x^+ L_e \cdot 0 \right\| \\ A_W &= H_w \left\| L_w \cdot 1 + (1 - f_x^-) L_w \cdot 0 \right\| \\ A_N &= H_n \left\| -L_n \cdot 1 - f_y^+ L_n \cdot 0 \right\| \\ A_S &= H_s \left\| L_s \cdot 1 + (1 - f_y^-) L_s \cdot 0 \right\| \\ A_P &= \left( \rho_e^* D_u^c + (1 - f_x^+) K_e u_{e1}^* \right) a_e + \left( \rho_w^* D_u^w - K_w f_x u_{w1}^* \right) a_w \\ &+ \left( \rho_n^* D_u^n + (1 - f_y^+) K_n v_{n1}^* \right) a_n + \left( \rho_s^* D_u^s - K_s f_y v_{s1}^* \right) a_s + \frac{K_P}{\Delta t} \Delta t \\ b_1 &= \rho_w^* u_{w1}^* a_w - \rho_e^* u_{e1}^* a_e + \rho_s^* u_{s1}^* a_s - \rho_n^* u_{n1}^* a_n + \frac{\rho_P^0 - \rho_P^*}{\Delta t} \end{aligned} \quad (5-98)$$

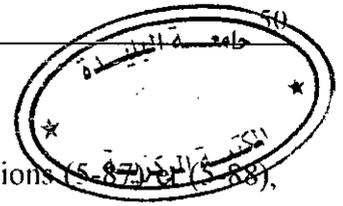
et

$$L_i = K_i a_i u_i^* \quad (5-99)$$

$$H_i = \rho_i D_i a_i \quad (5-100)$$

$f_x^+$ ,  $f_x^-$ ,  $f_y^+$ , et  $f_y^-$  sont les coefficients d'interpolation linéaire (voir eq. (5-40) et (5-41)).

Dans les algorithmes SIMPLE et PISO, l'éq. (5-96) est utilisée pour calculer le champ de pression, ainsi  $u^{**}$  et  $v^{**}$  sont calculées à partir des équations (5-90) et (5-91). Les deux algorithmes se différencient par la façon de calculer la correction de pression. Dans SIMPLE, seulement  $P'_1$  est utilisé pour corriger le champ de pression, tandis que  $P'_2$  est utilisé dans PISO avec  $P'_1$ .



Le champ de  $P'_2$  est obtenu en introduisant  $u'_{e1} = v'_{n1} = 0$  dans les équations (5-87) et (5-88), ce qui donne :

$$u_e = u_e^* + u'_{e2} = u_e^* + \frac{\sum A_{nb} u'_{nb}}{A_e} + (P'_{P2} - P'_{E2}) D_u \quad (5-101)$$

$$v_n = v_n^* + v'_{n2} = v_n^* + \frac{\sum A_{nb} v'_{nb}}{A_n} + (P'_{P2} - P'_{N2}) D_v \quad (5-102)$$

Suivant les mêmes étapes, on peut obtenir l'équation de la correction de pression comme suit :

$$A_P P'_{P2} = A_E P'_{E2} + A_W P'_{W2} + A_N P'_{N2} + A_S P'_{S2} + b_2 \quad (5-103)$$

Où les coefficients  $A_i$  ( $i = E, W, N, S$ ) ont les mêmes expressions que ceux de l'équation (5-97) et :

$$b_2 = b_1 + \rho_w^* \left( \frac{\sum A_{nb} u'_{nb}}{A} \right)_w - \rho_e^* \left( \frac{\sum A_{nb} u'_{nb}}{A} \right)_e + \rho_s^* \left( \frac{\sum A_{nb} v'_{nb}}{A} \right)_s - \rho_n^* \left( \frac{\sum A_{nb} v'_{nb}}{A} \right)_n \quad (5-104)$$

Les organigrammes des algorithmes SIMPLE et PISO sont donné à la page 52.

### 5-8 CONDITIONS AUX LIMITES

Vu la nature elliptique des équations de transport, les conditions aux limites sont nécessaires sur toutes les frontières du domaine de calcul. Dans cette étude on considère quatre types de conditions aux limites, à savoir : l'entrée et la sortie du fluide, l'axe de symétrie et les parois rigides (Fig. (5-11)).

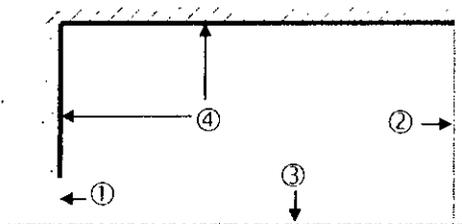


Fig. 5-11: Limites

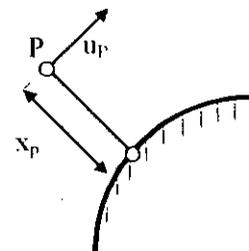


Fig. 5-12: Nœuds près des parois

#### A- Entrée du fluide

Sur cette limite, toutes les propriétés sauf la pression sont prescrites. Puisque l'entrée coïncide avec les faces de la première colonne des volumes de contrôle, on doit assurer un flux exact entrant au domaine. Ce flux est généralement dû à la convection. La correction de pression est nulle, puisque la pression est fixe.

**B- Sortie du fluide**

On suppose que la sortie est assez éloignée, de telle sorte qu'on peut considérer l'écoulement totalement développé. Donc, le gradient de toutes les propriétés transportables est nul. Cette supposition n'affecte pas les calculs si elle n'est pas tout à fait correcte, car l'écoulement dans cette zone est parabolique.

**C- Axe de symétrie**

Sur cette frontière, les gradients de toutes les propriétés sont nuls.

**D- Parois rigides**

Le modèle  $k-\varepsilon$  adopté n'est valable que dans la région turbulente. Près de la paroi, les effets de la viscosité peuvent dominer ceux de la turbulence. Il y a deux méthodes pour prendre en compte ces effets : Les modèles de turbulence à faible nombre de Reynolds et les lois de parois.

La première méthode nécessite un modèle de turbulence [36] qui doit tenir compte des interactions entre la turbulence et les effets de la viscosité. L'inconvénient principal pour cette procédure est le coût de calcul (mémoire et temps machine).

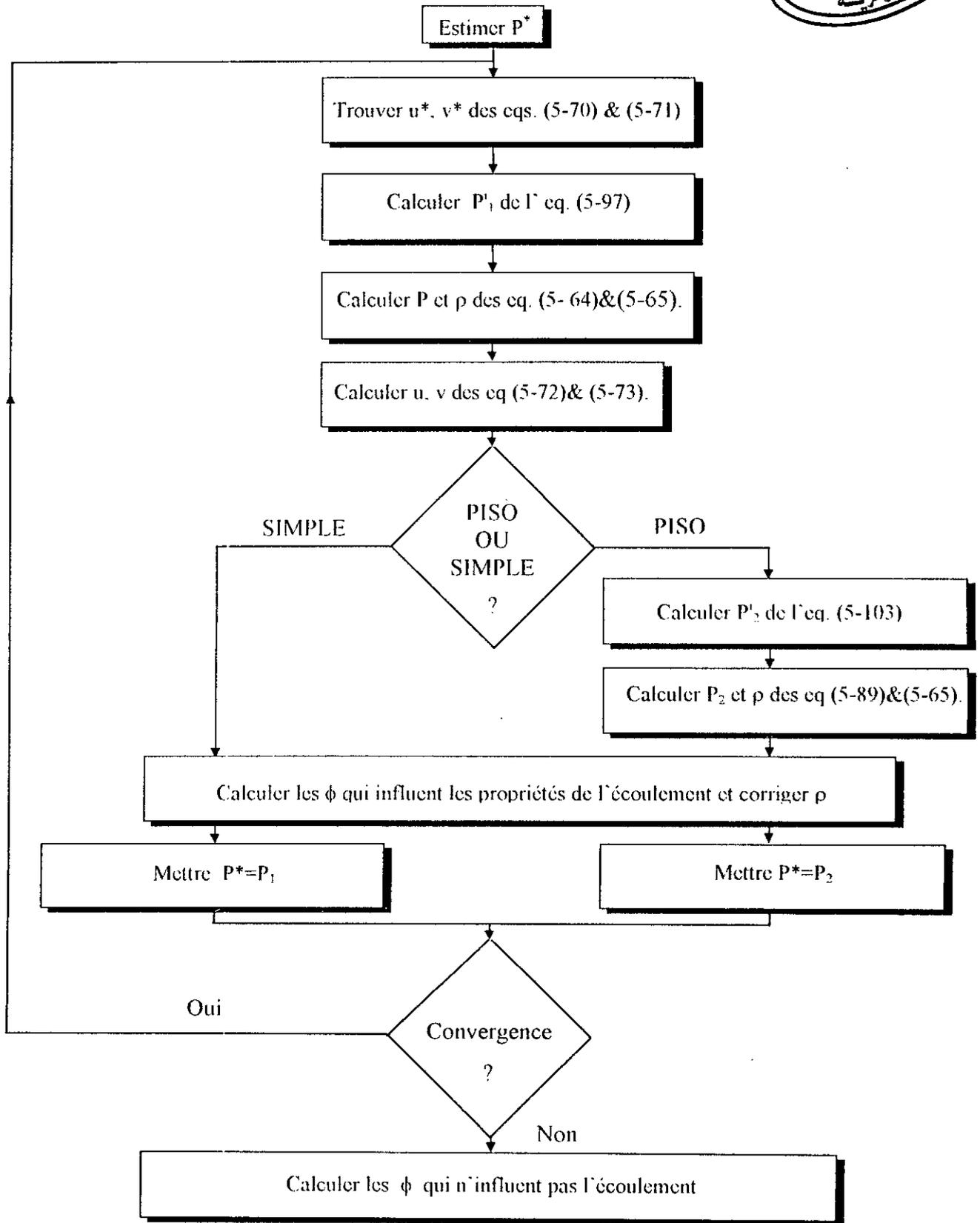
La deuxième méthode est largement utilisée. Elle économise le temps de calcul et l'espace mémoire ; aussi elle permet l'introduction des informations empiriques dans les cas spéciaux. Plusieurs fonctions de parois sont proposées et utilisées. Dans cette étude nous avons adopté celle proposée par B. E. Launder et D.B. Spalding [24], [25]. Pour expliquer son implémentation, on considère une région proche de la paroi (Fig. 5-12). Cette zone est décrite par la loi logarithmique suivante :

$$\frac{U_p}{U_\tau} = \frac{1}{\chi} \ln[E x_p'] \quad (5-105)$$

Où 
$$U_\tau = \sqrt{\frac{\tau_w}{\rho}} \quad (5-106)$$

et 
$$x_p' = \frac{U_\tau x_{ip}}{\nu_i} \quad (5-107)$$

Ici  $\tau_w$  est la contrainte de frottement pariétal ;  $U_\tau$  est la vitesse de frottement ;  $\chi$  la constante de Von Karman (=0.42);  $E$  est une constante empirique égale approximativement 9.7 pour les parois lisses et  $x_p'$  est la distance entre la paroi et le premier nœud adjacent (Fig. 5-12).



La fonction de paroi donne un profil logarithmique de vitesse, si on suppose que dans la couche mince près de la paroi le fluide est incompressible, la génération et la dissipation de l'énergie de turbulence sont en équilibre.

L'équation de  $k$ , par conséquent, se simplifie à :

$$\mu_t \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right) = \rho \varepsilon \quad (5-108)$$

Elle s'écrit en terme de contrainte de frottement comme suit :

$$\tau = \rho C_\mu^{1/2} k \quad (5-109)$$

On suppose que cette contrainte est uniforme près de la paroi, ce qui implique que :

$$\tau_w = \rho C_\mu^{1/2} k = Cte \quad (5-110)$$

La combinaison de (5-105) et (5-106) donne l'expression du frottement pariétal :

$$\tau_w = \frac{\rho C_\mu^{1/2} k_p^{1/2} U_{ip}^{1/2}}{\chi \ln[E\chi_i^+]} \quad (5-111)$$

Puisque ce dernier représente le flux de la quantité de mouvement à travers la paroi. L'expression de  $\tau_w$  va servir comme condition à la limite pour les parois rigides.

Il faut noter que le modèle  $k-\varepsilon$  est seulement valable loin des parois, on doit vérifier que le premier nœud adjacent à la paroi est à une distance  $x_i^+ > 11.63$  [25], [37]. Si durant le procédé de calcul la valeur de  $x_i^+$  devient inférieure à cette valeur (11.63), la relation laminaire suivante est employée.

$$\tau_w = \mu_l \frac{u_{ip}'}{x_{ip}'} \quad (5-112)$$

Près de la paroi, l'énergie de turbulence  $k_p$  est obtenue par résolution directe de l'équation de  $k$ , avec les hypothèses suivantes :

- les flux convectifs et diffusifs sont négligeables, l'écoulement est supposé stationnaire et incompressible [38]

Pour tenir compte des contraintes pariétales, le terme de génération est modifié comme suit :

$$\bar{G}_y = \int_t^{t+\Delta t} \int_s^{s+\Delta s} \int_w^{w+\Delta w} (1 - \delta_y) \mu_t \frac{\partial u_i}{\partial x_j} r dx dr dt \quad (5-113)$$

Ce qui donne :

$$\bar{G}_y = (1 - \delta_y) \mu_t \frac{u_{ip}}{x_{jp}} \Delta V_s \Delta t \quad (5-114)$$

Le terme de dissipation est aussi modifié pour tenir compte de la contrainte de frottement :

$$\int_t^{t+\Delta t} \int_s^{s+\Delta s} \int_w^{w+\Delta w} \rho \varepsilon r dx dr dt = \frac{\rho_r C_\mu^{3/4} k_p^{1/2} u_{ip}'}{x_{ip}} \Delta V_s \quad (5-115)$$

Avec

$$u_{ip}' = \begin{cases} x_i' & \text{pour } x_i' \leq 11.63 \\ \frac{1}{\chi} \ln|E x_i'| & \text{pour } x_i' \geq 11.63 \end{cases} \quad (5-116)$$

Pour trouver la condition aux limites rigides pour  $\varepsilon$ , on note [43] que l'échelle de longueur dans la région logarithmique est donnée par :

$$l = \frac{k^{1/2}}{\varepsilon} \quad (5-117)$$

Où en fonction de la longueur de mélange de Prandtl  $l_m$

$$l = C_\mu^{1/4} l_m \quad (5-118)$$

avec

$$l_m = \chi x_p \quad (5-119)$$

Cela mène à écrire :

$$\varepsilon_p = \frac{C_\mu^{1/4} k_p^{1/2}}{\chi x_p} \quad (5-120)$$

Qui est la condition aux limites rigides pour le taux de dissipation  $\varepsilon$ .

**5-9 DETAILS DE CALCUL**

**A- Sous relaxation**

Vu la non linéarité et le couplage des équations, la sous relaxation s'avère très nécessaire pour éviter les variations brusques des paramètres durant le calcul, et aussi pour égaliser les vitesses de convergence des équations. Ici, la sous relaxation est introduite implicitement comme suit :

$$\frac{A_r}{\alpha} \phi_r = \sum_{nb} \phi_{nb} + b + \frac{1-\alpha}{\alpha} A_r \phi_r^{old} \tag{5-121}$$

Avec  $\alpha$  le facteur de relaxation ( $0 < \alpha < 1$  correspond à la sous relaxation). L'exposant 'Old' indique l'itération précédente (dernière itération).

La pression est aussi sous relaxée par ajout d'une fraction de  $P'$  à  $P^*$  i.e. :

$$P = P^* + \alpha_p P' \tag{5-122}$$

Les autres quantités peuvent aussi être relaxées. Par exemple :

$$\begin{aligned} T_\phi &= T_\phi^{old} + \alpha_T (T_\phi^{New} - T_\phi^{old}) \\ G_\phi &= G_\phi^{old} + \alpha_G (G_\phi^{New} - G_\phi^{old}) \end{aligned} \tag{5-123}$$

Dans cette étude les facteurs choisis sont donnés par la table suivante (table 5-4) :

Equation	U	V	T	Y	K	$\epsilon$
$\alpha$	0.5	0.5	0.3	0.5	0.5	0.5

Table 5- 4 Valeurs du facteur de relaxation pour différentes équations.

**B- Résolution des systèmes d'équations linéaires**

L'algorithme de Thomas, TDMA (Tri Diagonal Matrix Algorithm) est utilisé en conjonction avec la méthode de balayage. Pour montrer le principe, considérons une ligne J (Fig. 5-13) .

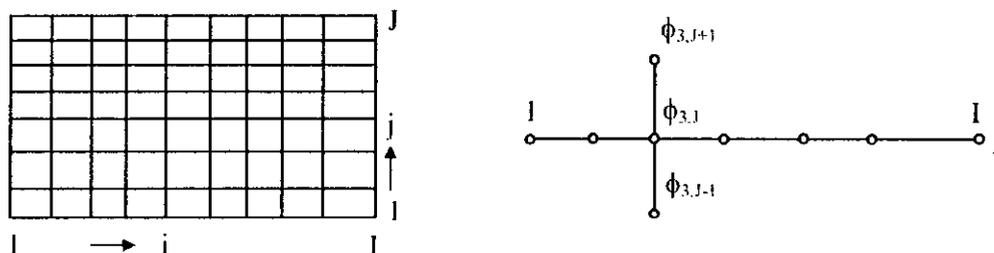


Fig. 5-13 Méthode de balayage

Le système d'équations le long de cette ligne s'écrit :

$$\begin{aligned} A_{11,j}\phi_{1,j} + A_{12,j}\phi_{2,j} &= B_{1,j} - A_{11,j-1}\phi_{1,j-1} - A_{11,j+1}\phi_{1,j+1} \\ A_{21,j}\phi_{1,j} + A_{22,j}\phi_{2,j} + A_{23,j}\phi_{3,j} &= B_{2,j} - A_{22,j-1}\phi_{2,j-1} - A_{22,j+1}\phi_{2,j+1} \end{aligned} \quad (5-124)$$

Les termes de droite représentent les relations avec les lignes J-1 et J+1. Ce système est tridiagonal, i.e. que la matrice de coefficient a la forme suivante :

$$\begin{bmatrix} * & * & & & & \\ * & * & * & & & \\ & * & * & * & & \\ & & * & * & * & \\ & & & * & * & \\ & & & & * & * \end{bmatrix} \phi = b \quad (5-125)$$

Ce système peut être résolu par un algorithme d'élimination de Gauss simplifié (TDMA). Sachant que les valeurs des lignes J-1 et J+1 ne sont pas connues, une estimation de ces dernières est nécessaire. Le procédé d'élimination appliqué à toutes les lignes J, s'appliquera aussi pour les lignes I. Cette méthode s'appelle le balayage.

### C- Critère de convergence

La solution est acceptée si le résidu absolu des équations de  $u$ ,  $v$ ,  $k$ ,  $\varepsilon$ ,  $Y_1$  et  $T$ , aussi le terme source de masse  $b_1$  de l'équation de  $P$  sont inférieurs ou égaux à 0.01. Ce résidu est défini par :

$$R_\phi = \sum_{\text{all nodes}} \left| \sum_{nb} a_{nb} \phi_{nb} + S_u - a_P \phi_P \right| / \bar{F}_{in\phi} \quad (5-126)$$

et

$$R_m = \sum_{\text{all nodes}} |b_1| / M_m \quad (5-127)$$

$R_\phi$  résidus des équations de  $u$ ,  $v$ ,  $k$ ,  $\varepsilon$ ,  $y$  et  $T$  ;

$R_m$  résidus de l'équation de continuité ;

$\bar{F}_{in}$  est le flux total à l'entrée de la variable  $\phi$ ,  $M_m$  représente la masse totale à l'entrée.

## 5-10 CONCLUSION

Afin de convertir les équations aux dérivées partielles en équations algébriques faciles à résoudre, le choix d'une méthode de discrétisation ainsi que des schémas pour le temps et l'espace est nécessaire. Nous avons adoptés la méthode des volumes finis et les schémas PLDS pour l'espace et totalement implicite pour le temps.

Pour achever le couplage entre les équations de la quantité de mouvement et la pression les algorithmes SIMPLE et PISO sont utilisés. Finalement, les conditions aux limites doivent être implantées pour résoudre les équations.

## CHAPTRE VI

### RESULTATS DU CALCUL NUMERIQUE

#### 6-1 INTRODUCTION

Ce chapitre concerne l'application de la procédure numérique à deux configurations géométriques. Dans la première, des tests ont été fait pour valider le fonctionnement de la procédure, cela est achevé par le calcul d'un élargissement sur un pas vertical (CHAO AN LIN, ABBOT & KLINE ), le cas plan est donc considéré. La procédure de capture de la compressibilité à été incorporée pour vérifier qu'elle n'affecte pas les possibilités originales du code. La deuxième configuration est l'injection d'un fluide dans un autre en stagnation dans une chambre axisymétrique, le cas cylindrique est considéré.

#### 6-2 CALCUL DE L'ELARGISSEMENT BRUSQUE SUR UN PAS VERTICAL

La géométrie confinant l'écoulement est montrée par la figure 6-1A. Le rapport de la hauteur du pas H à celle du canal W est 0.5. Nous avons supposés que l'écoulement en amont présente un cône potentiel et deux couches limites d'épaisseur 0.5H se développant sur chaque paroi. Les données expérimentales sont obtenues (ABBOT et KLINE [39]) pour un nombre de Reynolds compris dans l'intervalle [39] :

$$2 \cdot 10^4 < \frac{\rho U_{in} H}{\mu} < 5 \cdot 10^4$$

Où  $U_{in}$  est la vitesse longitudinale dans le cône.

Les calculs sont fait pour  $Re = 3.5 \cdot 10^4$ . L'indépendance maillage solution est assurée par une grille de 35 nœuds dans la direction transversale et 40 dans celle longitudinale, couvrant ainsi une distance 18H à partir du pas (fig. 6-1B).

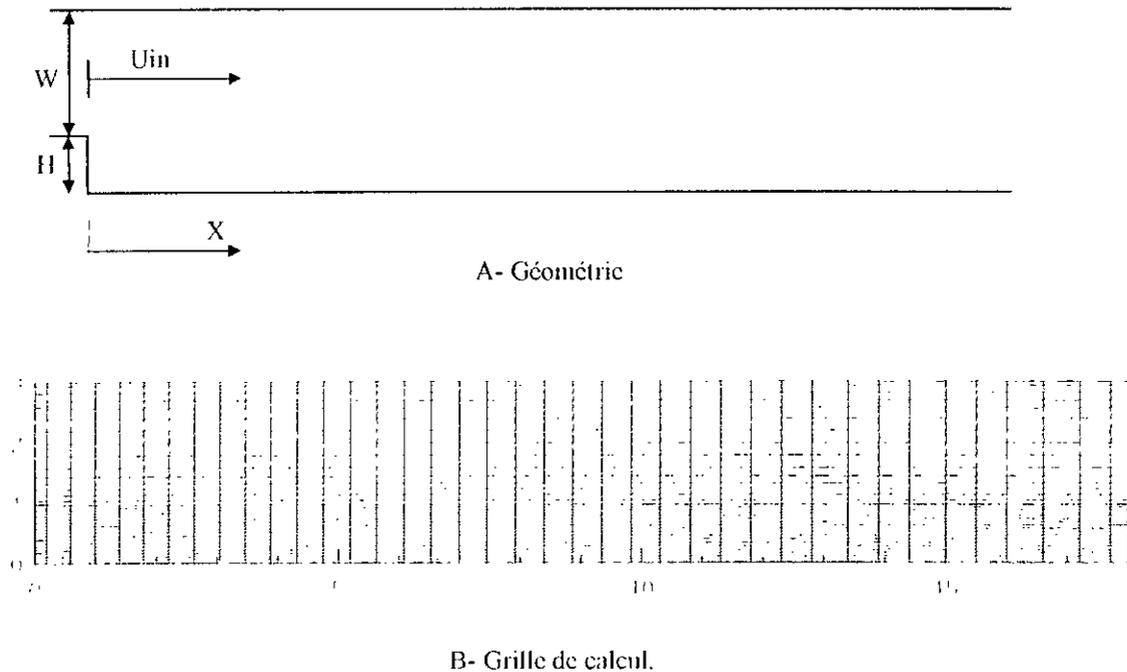


Fig. 6-1 Géométrie et maillage du calcul du pas transversal

### 6-2-1 Conditions aux limites

#### A-Entrée du fluide :

Etant donnée l'épaisseur de la couche limite  $\delta$ , le profil de vitesse longitudinale à l'entrée est donné par [40]

$$u = U_m \left( \frac{y}{\delta} \right)^{1/5}$$

Tandis que celle transversale est nulle ( $v = 0$ ). L'énergie de turbulence et son taux de dissipation dans la couche limite sont prescrites sur la base de la longueur de mélange (Section 4-2) comme suit :

$$k = \frac{l_m^2}{\sqrt{C_\mu}} \left( \frac{\partial u}{\partial y} \right)^2$$

$$\varepsilon = \frac{C_\mu^{3/4} k^{3/2}}{l_m^2}$$

Où la longueur de mélange  $l_m$  est donnée par

$$l_m = \min(\chi y, C_\mu \delta)$$

Y est la distance à partir de la paroi,  $\chi=0.42$  et  $C_\mu=0.09$ .

Dans le cône potentiel, les conditions suivantes sont prescrites (Pour  $k$  et  $\varepsilon$  on suppose que la distribution de  $k$  est isotrope).

$$\begin{aligned} U &= U_m \\ V &= 0 \\ k &= 1.5 \overline{U'^2} \\ \varepsilon &= \frac{C_\mu^3 k^3}{\lambda \delta} \end{aligned}$$

Sachant que le rapport  $\frac{\sqrt{\overline{U'^2}}}{U_m}$  est compris dans l'intervalle [0.01, 0.02.] (ABBOT et KLINE), le choix de  $k$  et ainsi  $\varepsilon$  peut être fait.

### *B - Parois rigides*

Sur les parois solides, le traitement est celui souligné dans la section (5-8-D).

### *C- Sortie du fluide*

A la sortie, on suppose que l'écoulement est complètement développé, ceci implique un gradient nul de toutes les grandeurs transportables.

### **6-2-2 Interprétation des résultats de calcul**

Les résultats de calcul sont montrés par les figures 6-2 à 6-6. Premièrement, la fig. 6-2 montre l'allure générale de l'écoulement par les vecteurs vitesses. Les lignes de courant et les contours d'énergie de turbulence sont montrées respectivement par les figures 6-5 et 6-6. La zone de récirculation est nettement visible juste en aval du pas, l'énergie de turbulence est maximale dans la région de récirculation où la génération de turbulence est intense. Cette énergie est convectée en aval, où elle est réduite par l'effet de dissipation et de la diminution de génération lors de l'établissement de l'écoulement.

Dans les écoulements avec récirculation, la longueur de la région de récirculation est considérée comme un paramètre qui permet de connaître la performance de la procédure numérique. Pour ce cas, la valeur expérimentale est  $X/R \approx 7$ . Le calcul fait par CHAO AN LIN [1] propose  $X/R \approx 5$ . Dans la présente étude cette longueur est  $X/R \approx 6$ .

Vitesse moyenne de l'écoulement  $U/U_{in}$

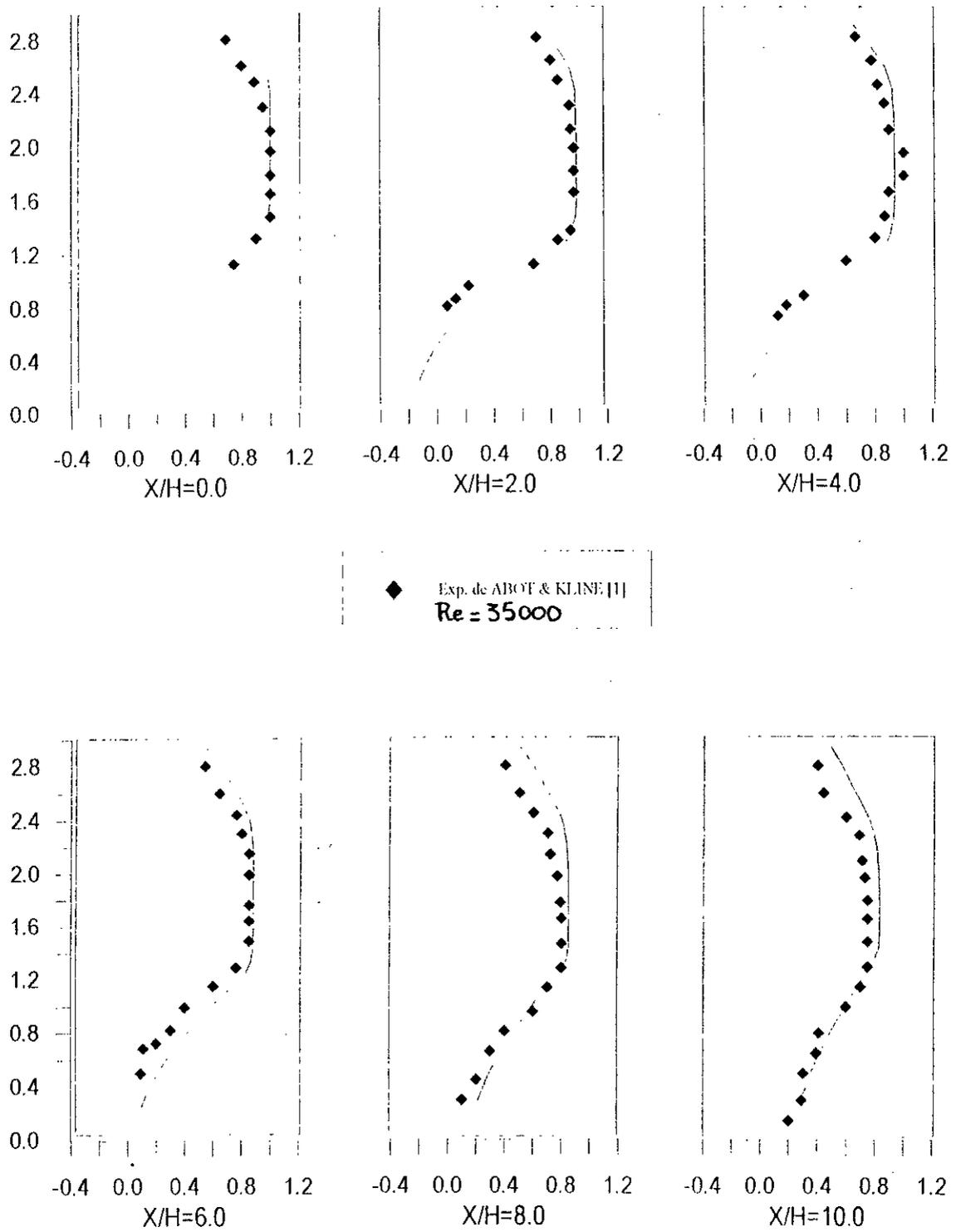


Fig. 6-3 Comparaison des vitesses moyennes avec les résultats expérimentaux pour le pas vertical.

Intensité de turbulence  $U'^2 \cdot 0.5 / U_{in}$

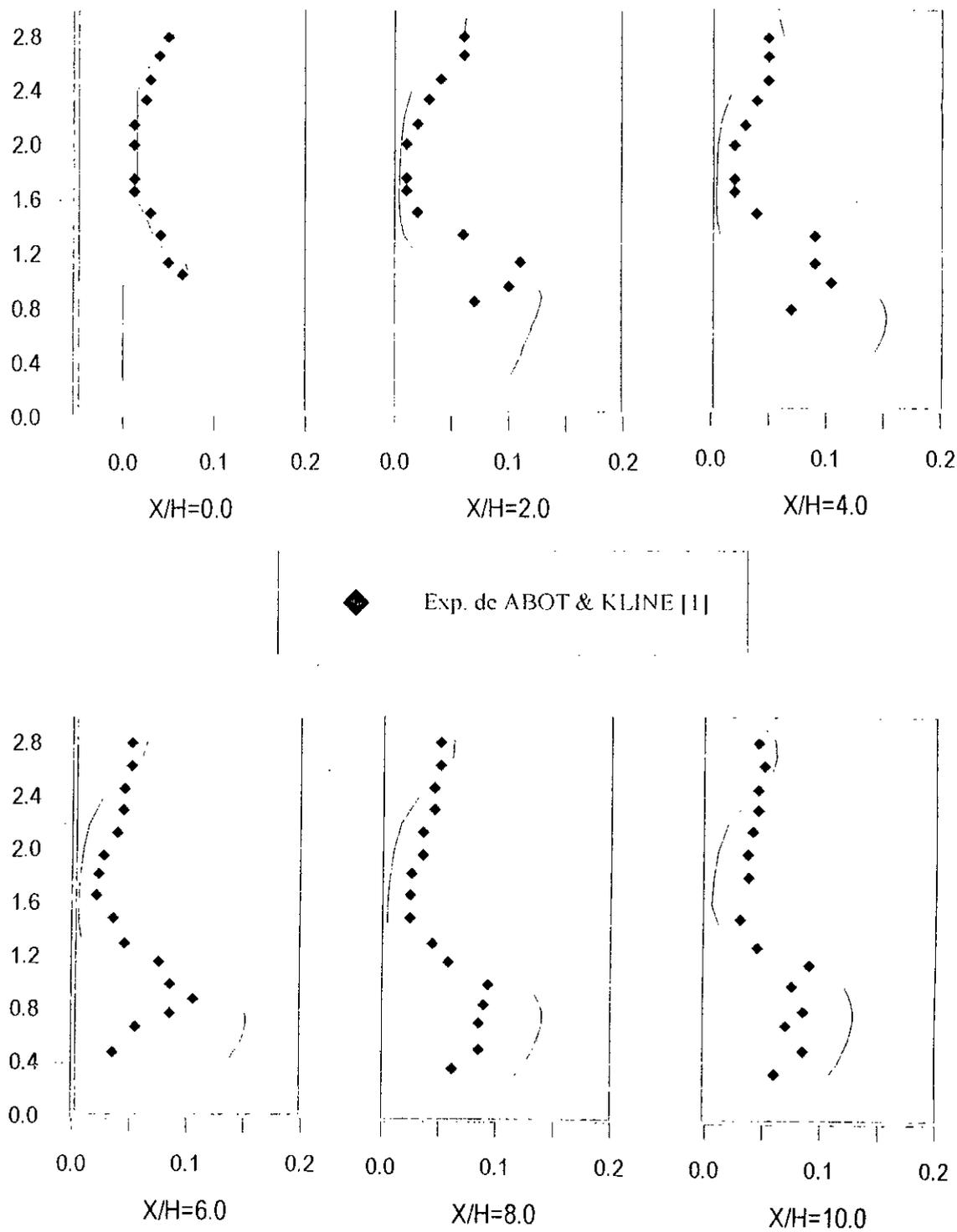


Fig. 6-4 Comparaisons des résultats numériques de l'intensité de turbulence avec ceux expérimentaux.

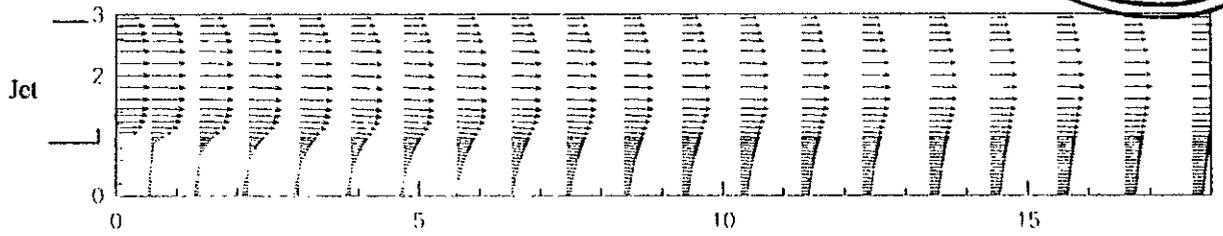


Fig. 6-2 Vecteurs vitesses

Une des conséquences de cette insuffisance est montrée par la figure 6-4 dans les profils de l'énergie de turbulence. Cette dernière est maximale dans la couche de cisaillement, menant à des valeurs importantes de la viscosité. Par conséquent une diffusion très forte de la quantité de mouvement de la région à vitesse plus grande vers celle à faible vitesse dans le sens de l'amont. Cela provoque une réduction de la zone de séparation.

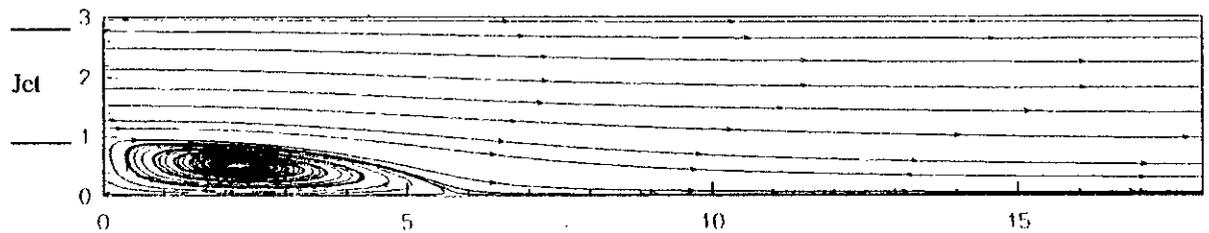


Fig. 6-5 Lignes de courant.

La sous-estimation de la longueur de récirculation est un défaut du modèle  $k-\epsilon$ , qui ne peut négocier la présence d'un champs de déformations complexe dont l'effet sur la structure de

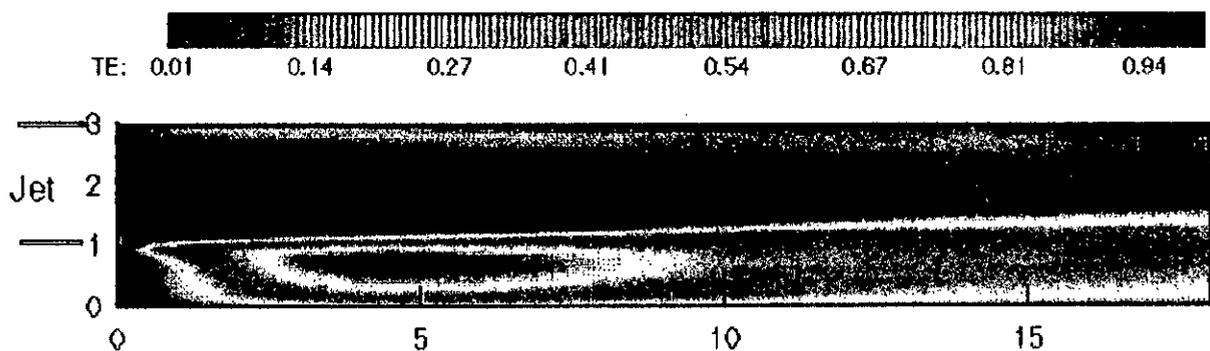
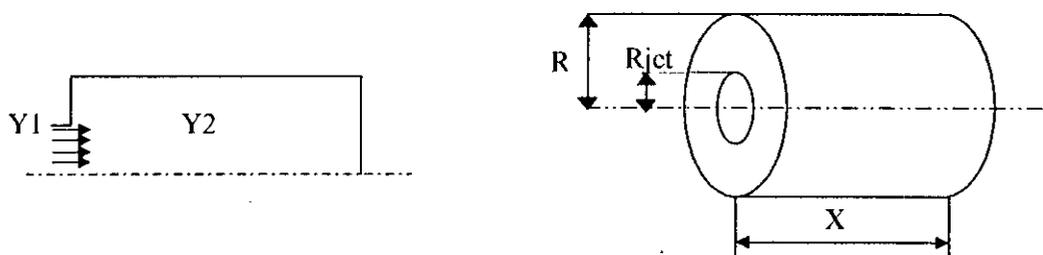


Fig. 6-6 Energie de turbulence  $K/K_{max}$

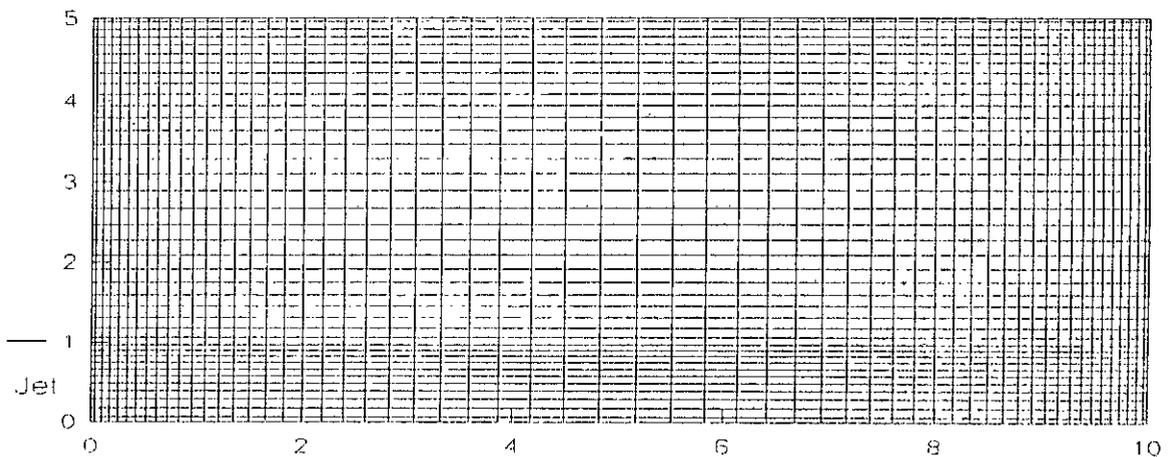
la turbulence est difficilement quantifiable. Elle est due aussi à l'insuffisance du concept de la viscosité turbulente de Boussinesq.

### 6-3 INJECTION INSTATIONNAIRE ET TURBULENTE D'UN FLUIDE COMPRESSIBLE DANS UN AUTRE EN STAGNATION DANS UNE CHAMBRE AXISYMETRIQUE FERMEE

Nous avons considéré le cas d'une chambre cylindrique carée (hauteur = diamètre). Le rapport du rayon de l'orifice à celui de la chambre (fig. 6-7A) est  $R/R_{\text{jet}} = 1/5$ .



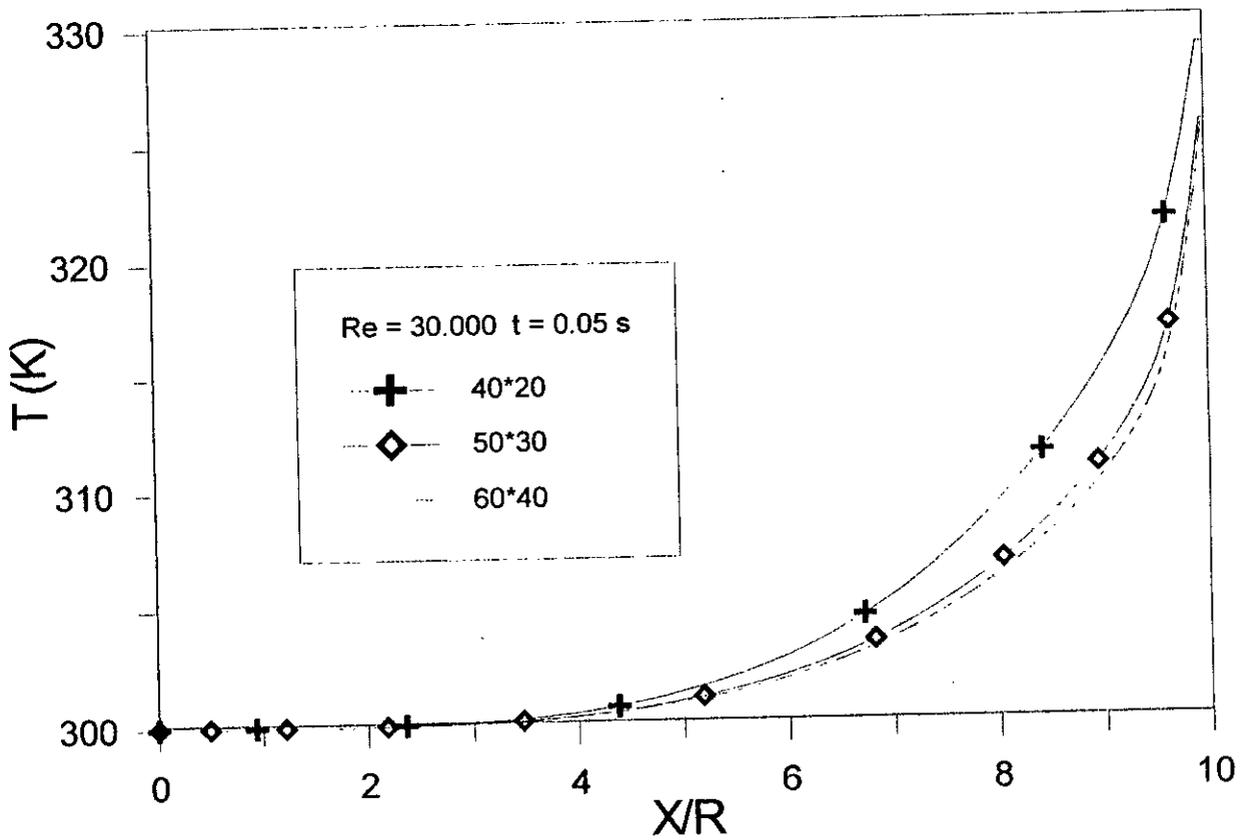
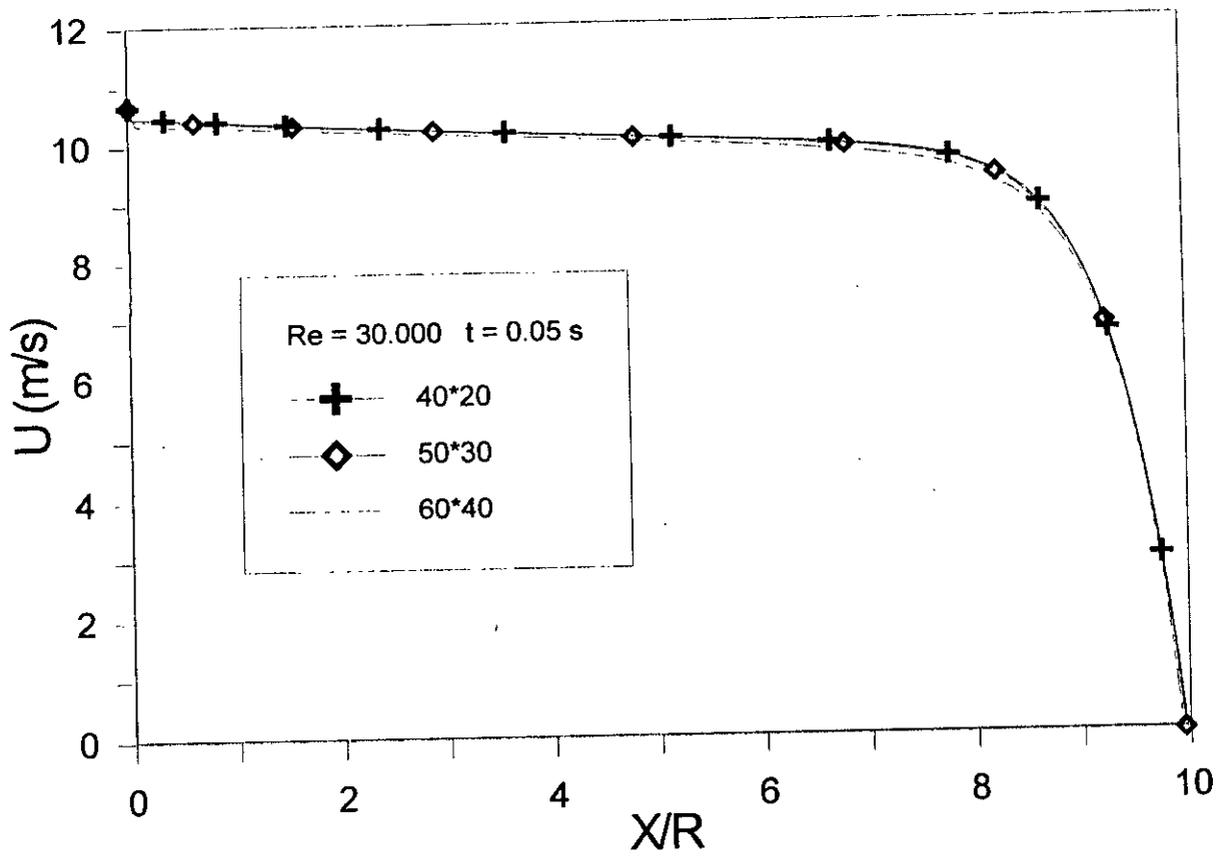
A) Géométric



B) Maillage de calcul

Fig. 6-7 Géométrie et maillage de calcul pour la chambre fermée

Figure : Indépendance Maillage - Solution



La première espèce (oxygène chaud  $T = 600 \text{ K}$ ) est introduite dans la deuxième (oxygène froid  $T = 300 \text{ K}$ ), qui se trouve en stagnation dans la chambre, à travers une conduite circulaire où l'écoulement est totalement développé.

Les calculs sont fait pour cinq nombres de Reynolds ( $10^4$ ,  $2*10^4$ ,  $3*10^4$ ,  $4*10^4$  et  $5*10^4$ ) sur un intervalle de temps d'une seconde avec un pas  $\Delta t = 10^{-2} \text{ s}$ . Après avoir assuré l'indépendance de la solution du maillage, une grille non uniforme (fig. 6-7B) de 60 (direction x)\*40(direction r) est adopté.

### 6-3-1 Conditions initiales et aux limites

#### A – Entrée du fluide et dans la chambre

Nous avons pris un profil de vitesse et une longueur de mélange proposé par Nikuradzé [40] pour une conduite circulaire.

- La vitesse est donnée pour un nombre de Reynolds compris dans l'intervalle  $4*10^4 \leq Re \leq 3.2*10^6$  par :

$$u = U_{in} \left( \frac{y}{R_{jet}} \right)^{1/n}$$

$$v = 0$$

Avec  $U_{in}$  est une vitesse maximale,  $y$  et  $R_{jet}$  sont respectivement la distance à partir de la paroi de la conduite et son rayon. L'exposant  $n$  prend les valeurs 6 aux petits nombres de Reynolds, il augmente à  $n = 7$  pour  $Re = 10^5$  et à  $n = 8$  pour  $Re = 3.2*10^6$ .

- Similairement à la première géométrie, l'énergie de turbulence et son taux de dissipation sont prescrit à l'entrée sur la base de la longueur de mélange qui est donnée par :

$$\frac{l_m}{R_{jet}} = 0.14 - 0.08 \left( 1 - \frac{y}{R_{jet}} \right)^2 - 0.06 \left( 1 - \frac{y}{R_{jet}} \right)^4$$

- A l'entrée, la température est  $T_{inj} = 300 \text{ K}$ , celle initiale est  $T_{ch} = 2T_{inj}$ .
- La concentration des espèces est  $Y_1 = 1$  à l'entrée et 0 dans la chambre.  $Y_2 = 0$  à l'entrée et 1 dans la chambre.
- La viscosité est calculée par la formule de Sutherland [41] :

$$\mu = \frac{AT^{3/2}}{\sqrt{B+T}}, \quad A = 1.457*10^{-5} \text{ et } B = 110.$$



- La chaleur spécifique à pression constante est donnée par la relation

$$C_p = C_{pF1}Y_1 + C_{pF2}Y_2,$$

Avec  $Y_2 = 1 - Y_1.$

- La pression initiale et d'injection est prise  $P = 1.013 \cdot 10^5 \text{ Pa}.$
- La densité est donné par l'équation d'état du gaz.

### ***B – Parois rigides***

Nous avons adopté le même traitement présenté dans la section (5-8-D).

### ***C – Axe de symetrie***

Sur cette frontière, le gradient de toute quantité transportable est nul, sauf la deuxième composante de la vitesse qui est elle même nulle ( $v = 0$ ).

### **6-3-2 Interprétation des résultats de calcul**

Les animations montrées par les figures 6-8 et 6-10 présentent l'allure générale du jet lors de sa pénétration dans la chambre fermée. Le jet frappe la paroi du fond puis il s'élargisse pour impacter la paroi cylindrique. Le retour du jet se fait ensuite vers la paroi supérieure d'où la naissance d'un mouvement tourbillonnaire qui entoure l'orifice. Le tourbillon est ensuite convecté vers l'aval où il se loge dans le coin supérieur de la chambre. Les figures 6-18 et 6-22 représentent respectivement la variation de la vitesse axiale pour  $r = 0$  et dans plusieurs stations  $x$  en fonction de  $r$ . Ces courbes indiquent une diffusion de la quantité de mouvement apportée par le jet dans tout l'espace de la chambre. Le profile de la vitesse axiale pour  $r = 0$  tend vers une courbe fixe qui présente un cône potentiel de longueur  $X/R_{\text{jet}} \approx 7$ . Après le cône la vitesse décroît rapidement pour s'annuler sur la paroi.

Les figures de l'énergie turbulente ( figures 6-9, 6-11 et 6-26) montrent une génération intense dans les zones de cisaillement, on remarque que la région entourant l'orifice présente un pic d'énergie. Cette dernière est convectée vers l'aval où l'impact du jet avec le fond de la chambre met naissance à une autre zone d'énergie élevée. Les figures 6-9 et 6-11 indiquent que la valeur maximale de l'énergie de turbulence augmente avec le temps et avec l'augmentation du nombre de Reynolds. Aussi, la figure 6-26 montre que la génération de l'énergie de turbulence est beaucoup plus importante dans le fond du cylindre. Cela est due au double impact du jet avec les parois.

La température du fluide en stagnation est le double de celle du fluide injecté, donc la densité de ce dernier est le double de celle dans la chambre. Les figures 6-12 à 6-15 et 6-23 à 6-25 montrent les distributions de la densité, la température et la fraction massique en fonction du temps et du nombre de Reynolds. On remarque que lorsque ce dernier augmente l'épaisseur de la zone de mélange augmente. Cela est due à l'importance de la viscosité turbulente qui traduit l'augmentation de l'énergie de turbulence.

#### 6-4 CONCLUSION

Du calcul fait sur la première géométrie, nous pouvons dire que la procédure dans sa forme compressible reproduit les résultats pour le cas incompressible. Donc, les modifications ajoutées n'affectent pas les aptitudes originales du code TEAM.

Le deuxième calcul a montré une variation très logique des grandeurs ajoutées (température, densité, concentrations des espèces). Nous pouvons dire que ces résultats sont acceptables qualitativement, reste à les valider quantitativement.

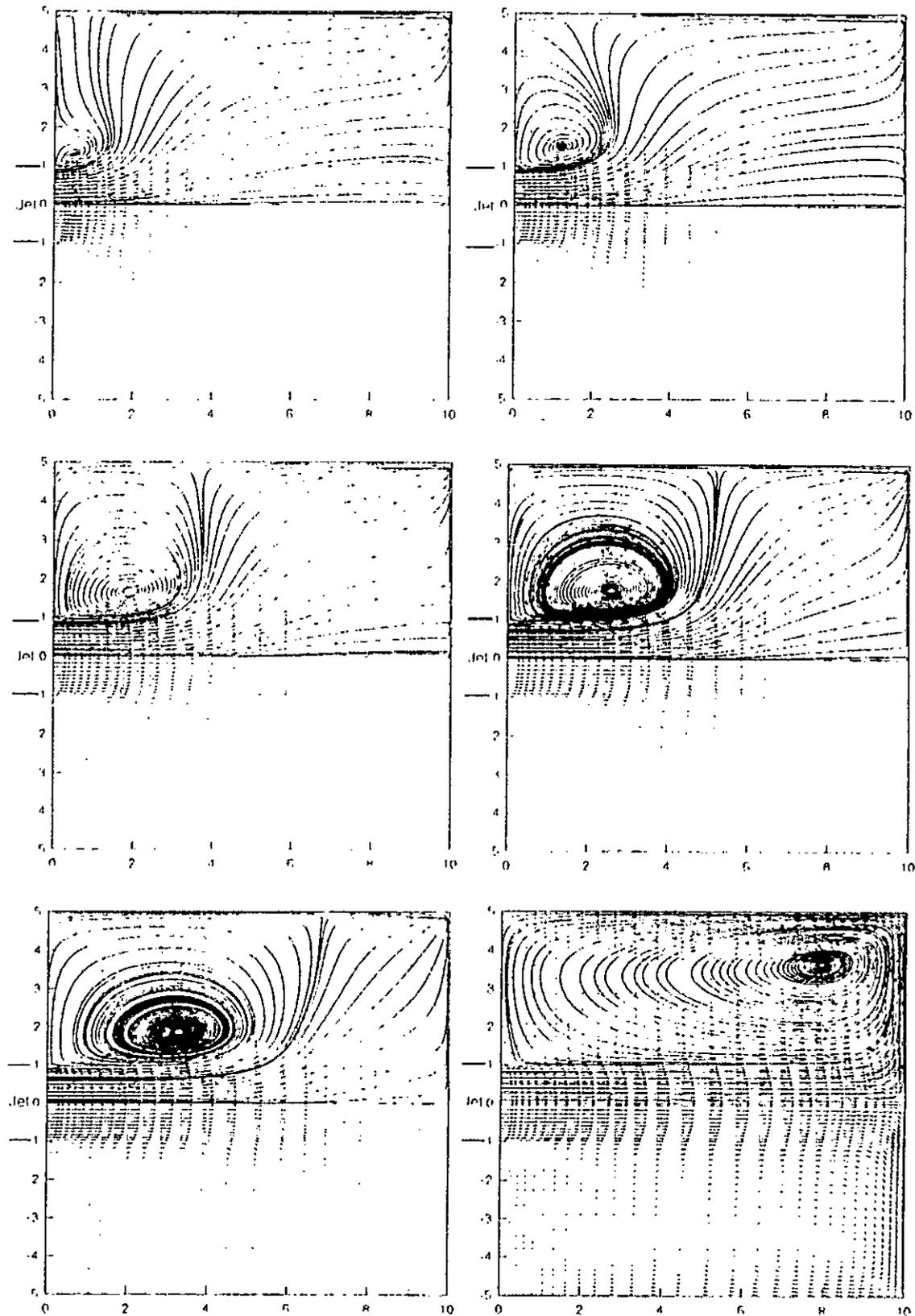


Figure 6-8 : Vecteurs vitesses et lignes de courant pour  $Re = 10000$

- (a)  $t = 10^{-2} \text{ s}$  (b)  $t = 2 \cdot 10^{-2} \text{ s}$   
(c)  $t = 3 \cdot 10^{-2} \text{ s}$  (d)  $t = 4 \cdot 10^{-2} \text{ s}$   
(e)  $t = 5 \cdot 10^{-2} \text{ s}$  (f)  $t = 1 \text{ s}$

Re = 10000

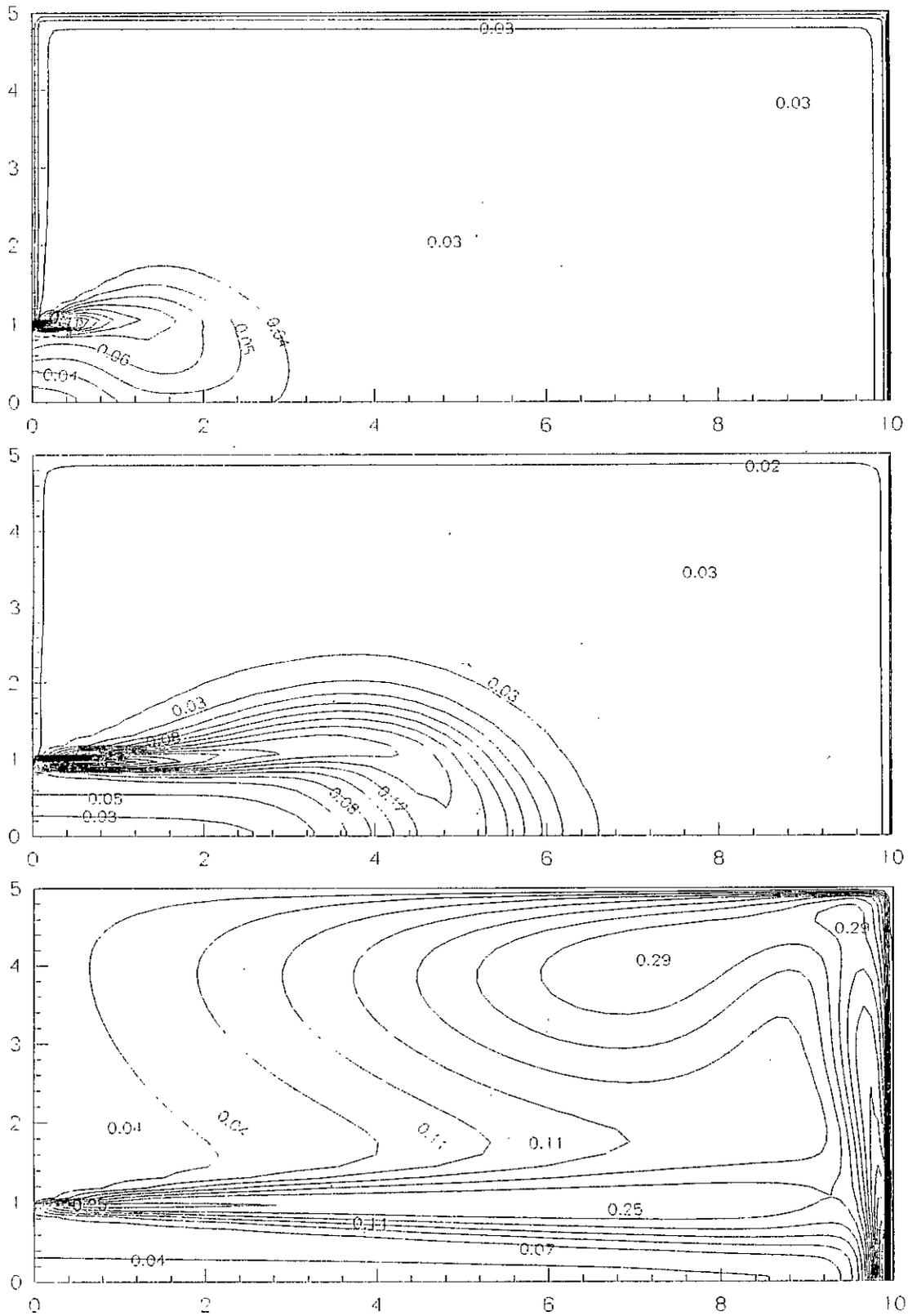


Figure 6-9 : Distribution de l'énergie de turbulence  $k$  en  $[(m/s)^2]$   
 $t = 0.01, 0.02$  et 1 secondes.

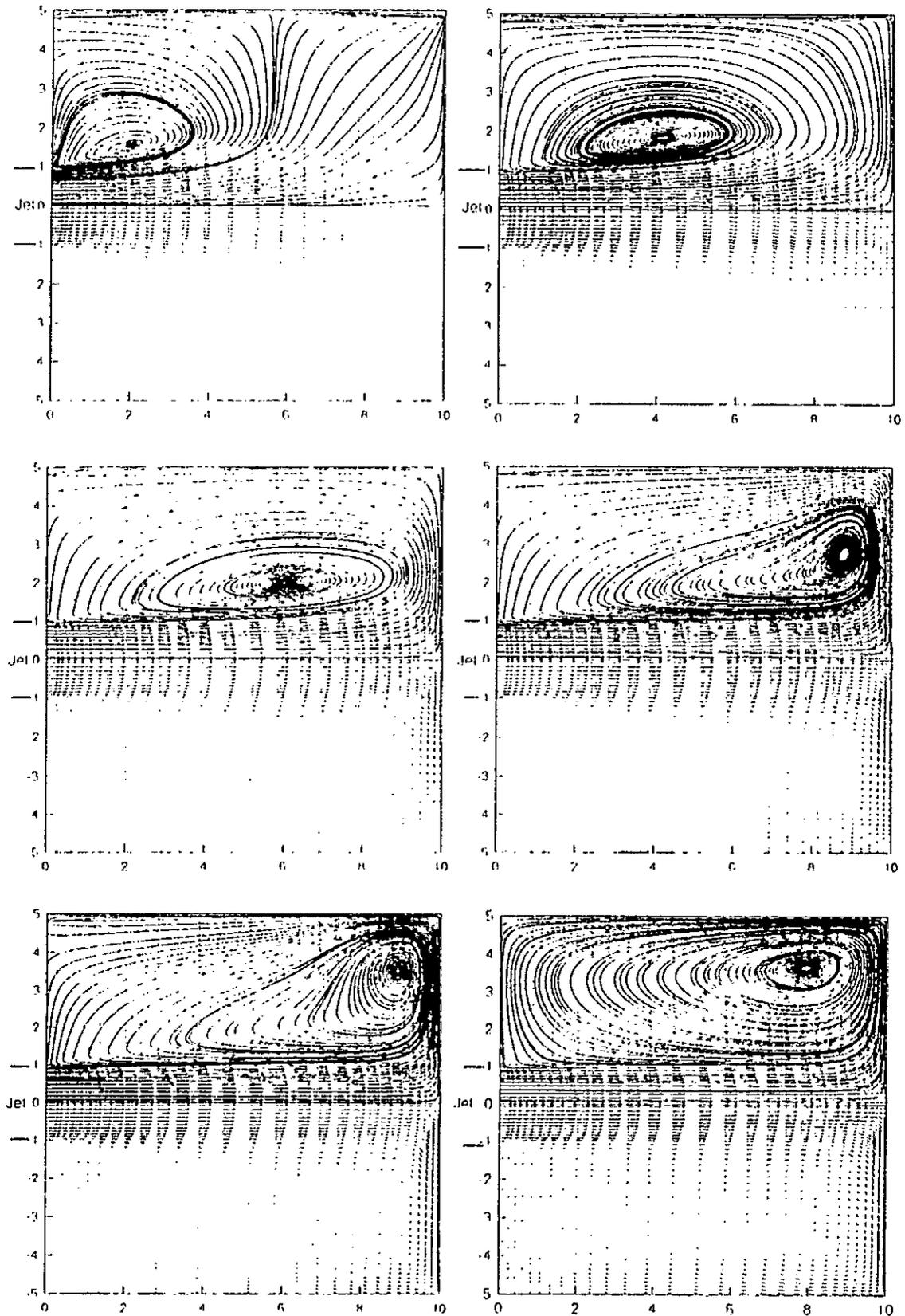


Figure 6-10 : Vecteurs vitesses et lignes de courant pour  $Re = 30000$

(a)  $t = 10^{-2} s$  (b)  $t = 2 \cdot 10^{-2} s$

(c)  $t = 3 \cdot 10^{-2} s$  (d)  $t = 4 \cdot 10^{-2} s$

(e)  $t = 5 \cdot 10^{-2} s$  (f)  $t = 1 s$

Re = 30000

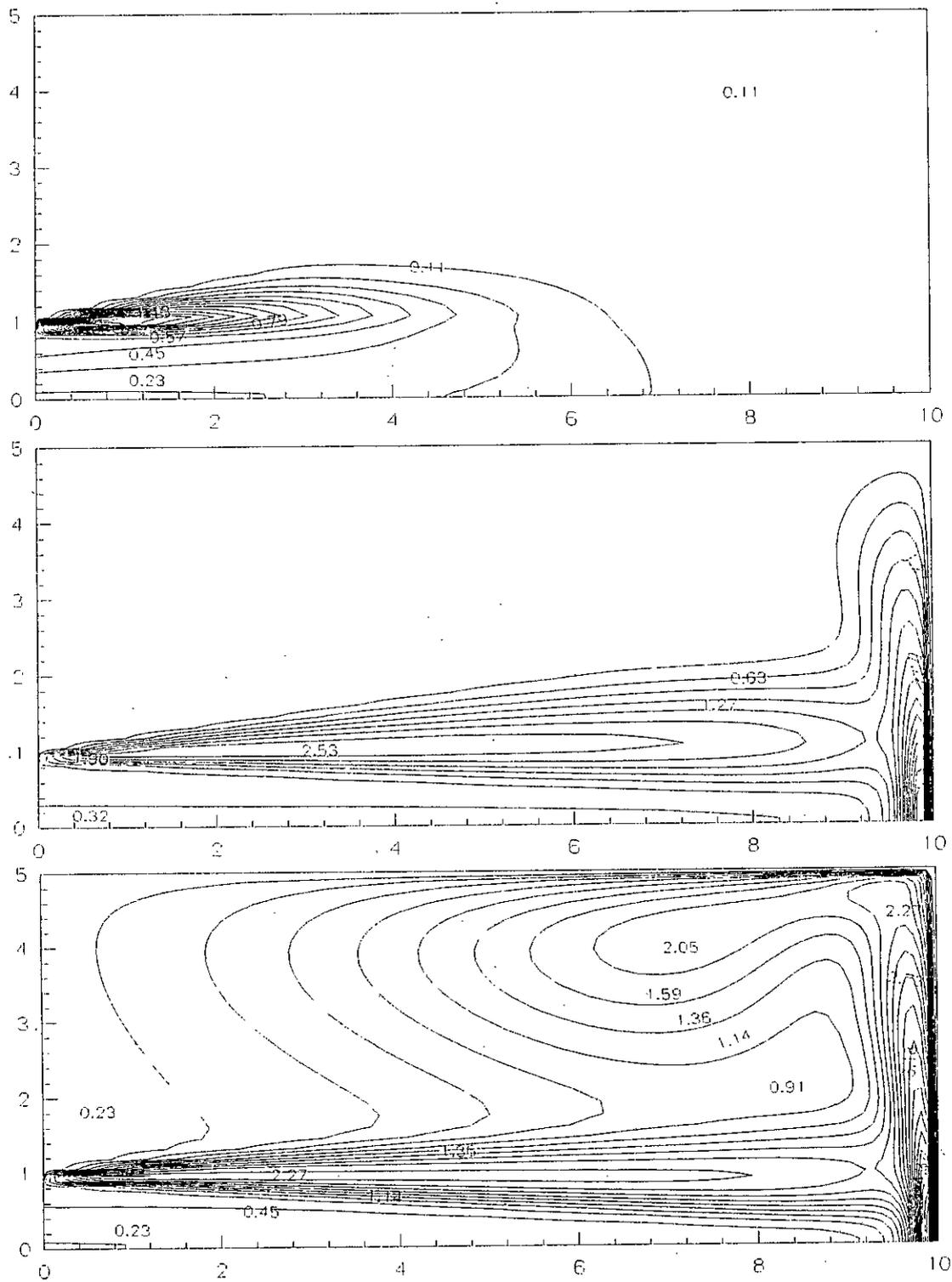


Figure 6-11 : Distribution de l'énergie de turbulence  $k[(m/s)^2]$   
 $t=0.01, 0.02$  et 1 secondes.

Re = 10000

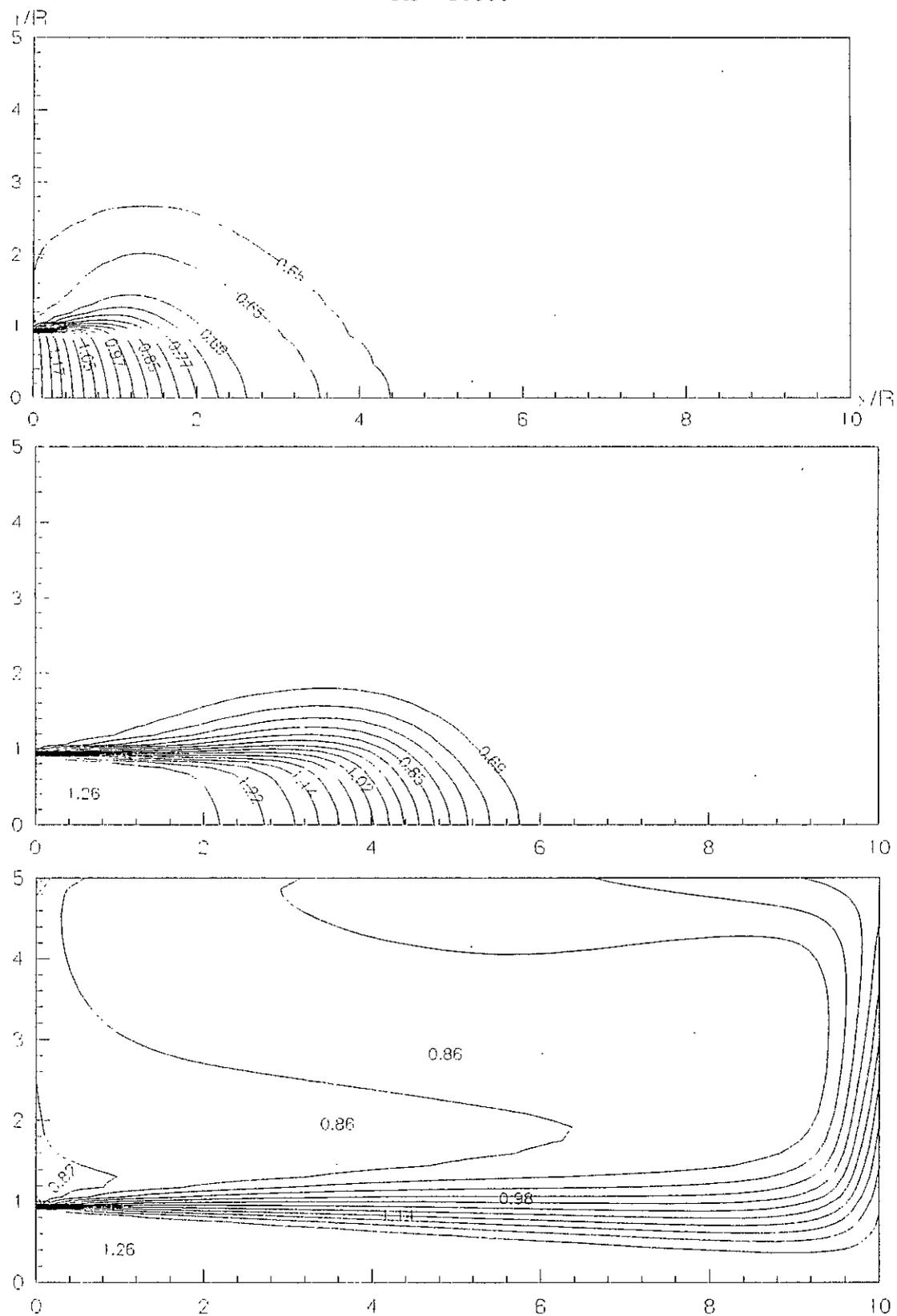


Figure 6-12 : Distribution de la densité du mélange  $[\text{kg/m}^3]$   
 $t = 0.01, 0.02$  et  $0.03$  secondes.

Re = 30000

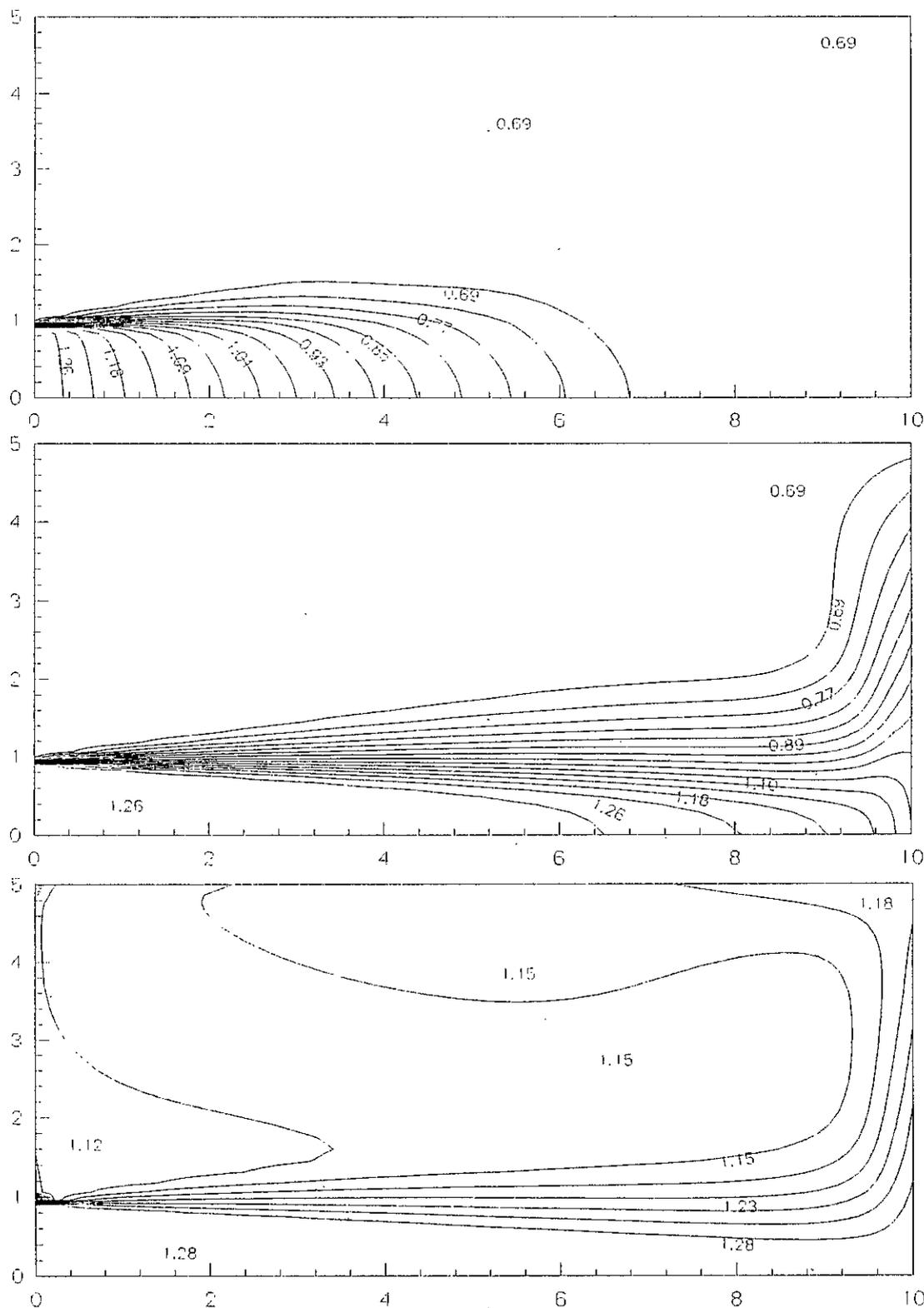
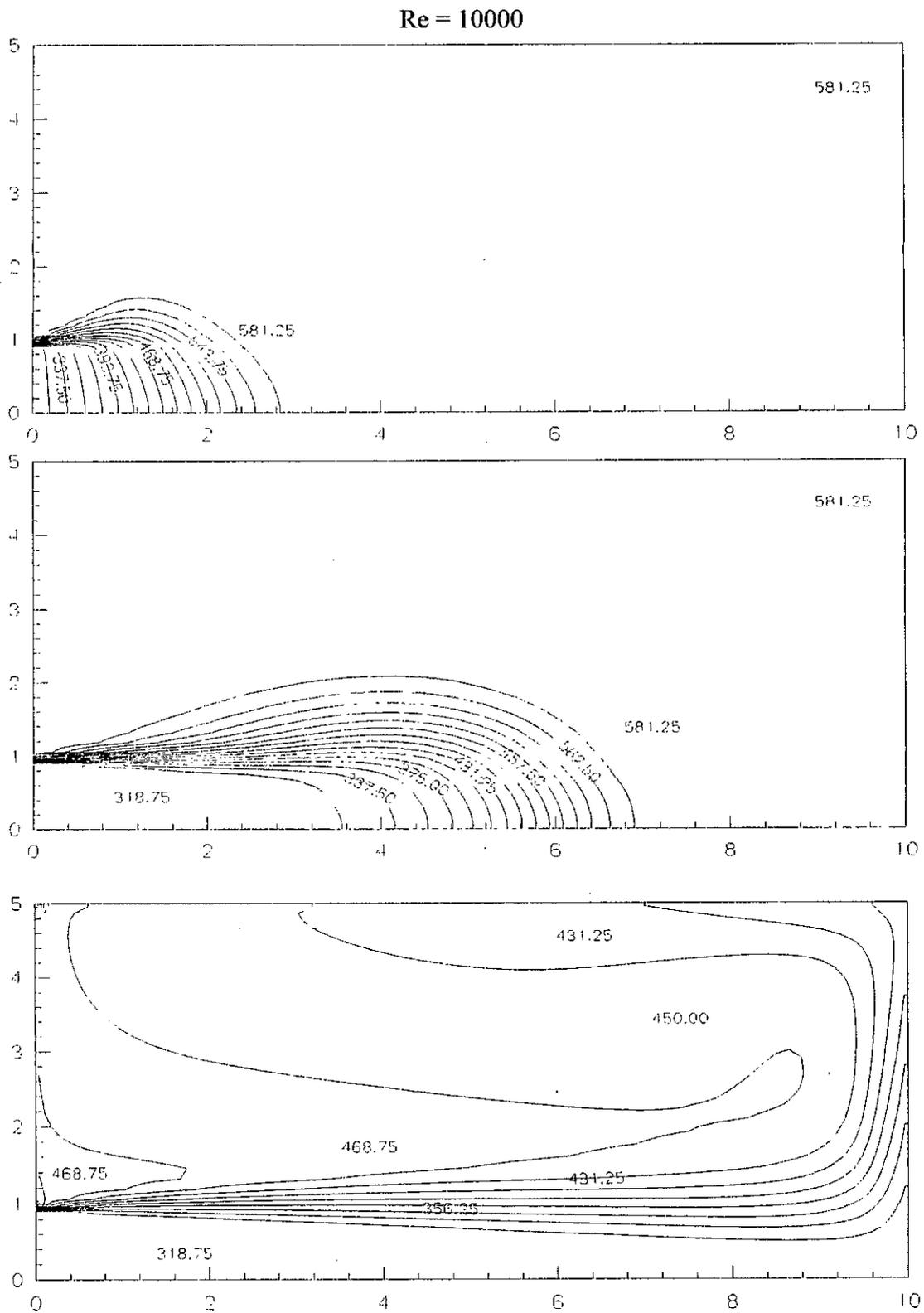


Figure 6-13 : Distribution de la densité du mélange [kg/m\*\*3]  
 t=0.01, 0.03 et 1 secondes.



Re = 30000

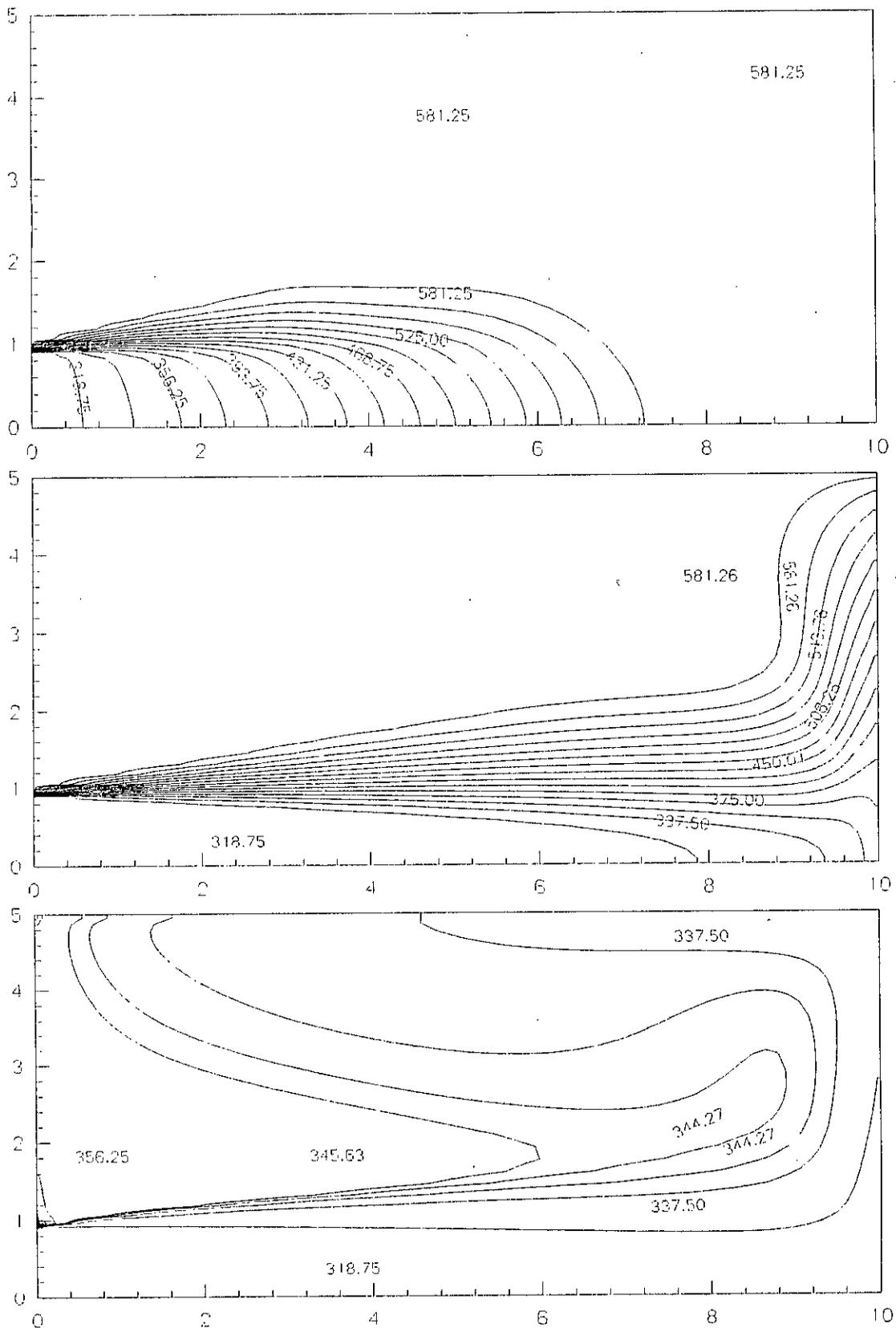


Figure 6-15 : Distribution de la température  $T$  [K]  
 $t=0.01, 0.02$  et  $1$  secondes.

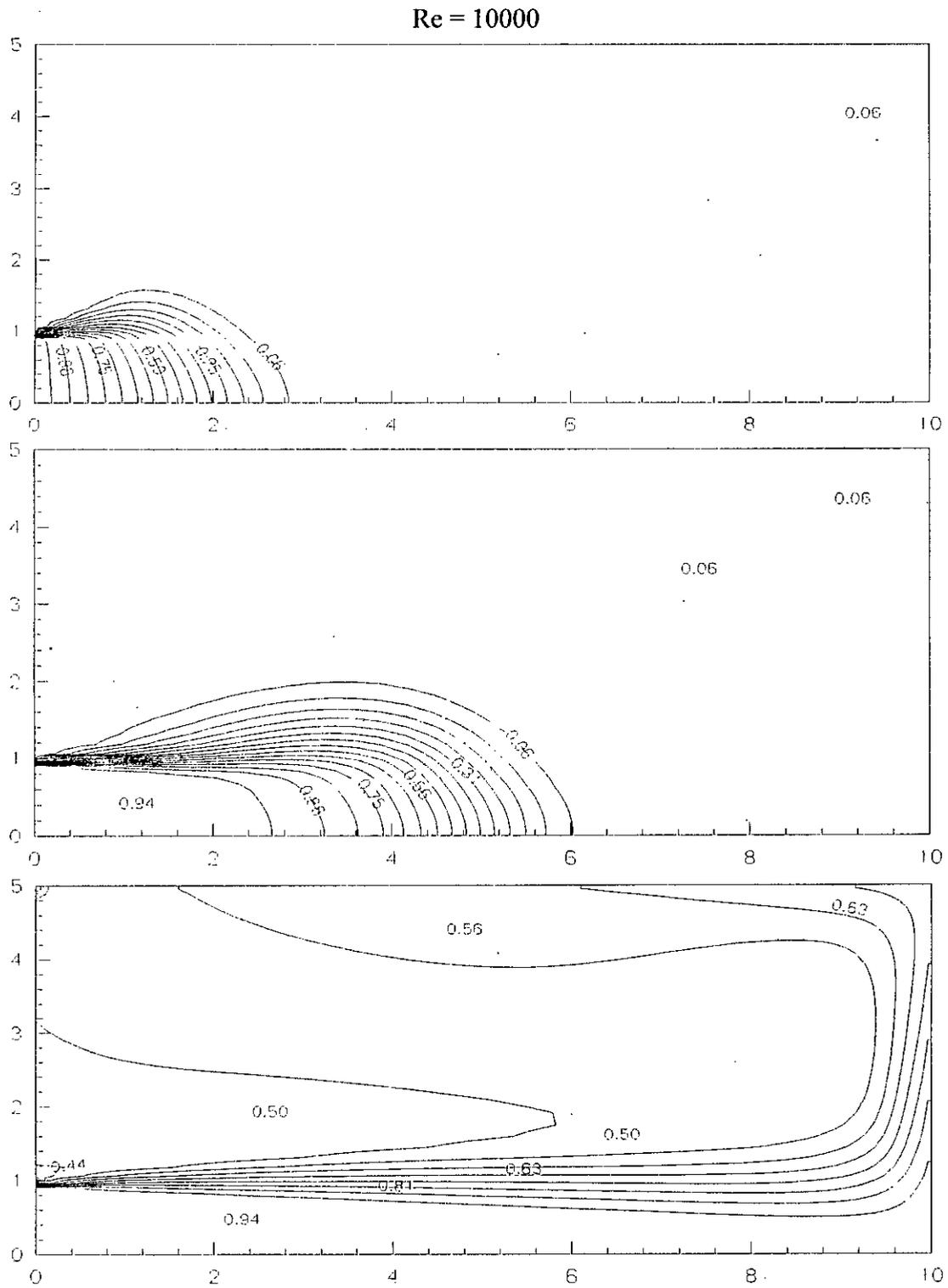


Figure 6-16 : Distribution de la fraction massique du fuel  
 $t=0.01, 0.02$  et 1 secondes

Re = 30000

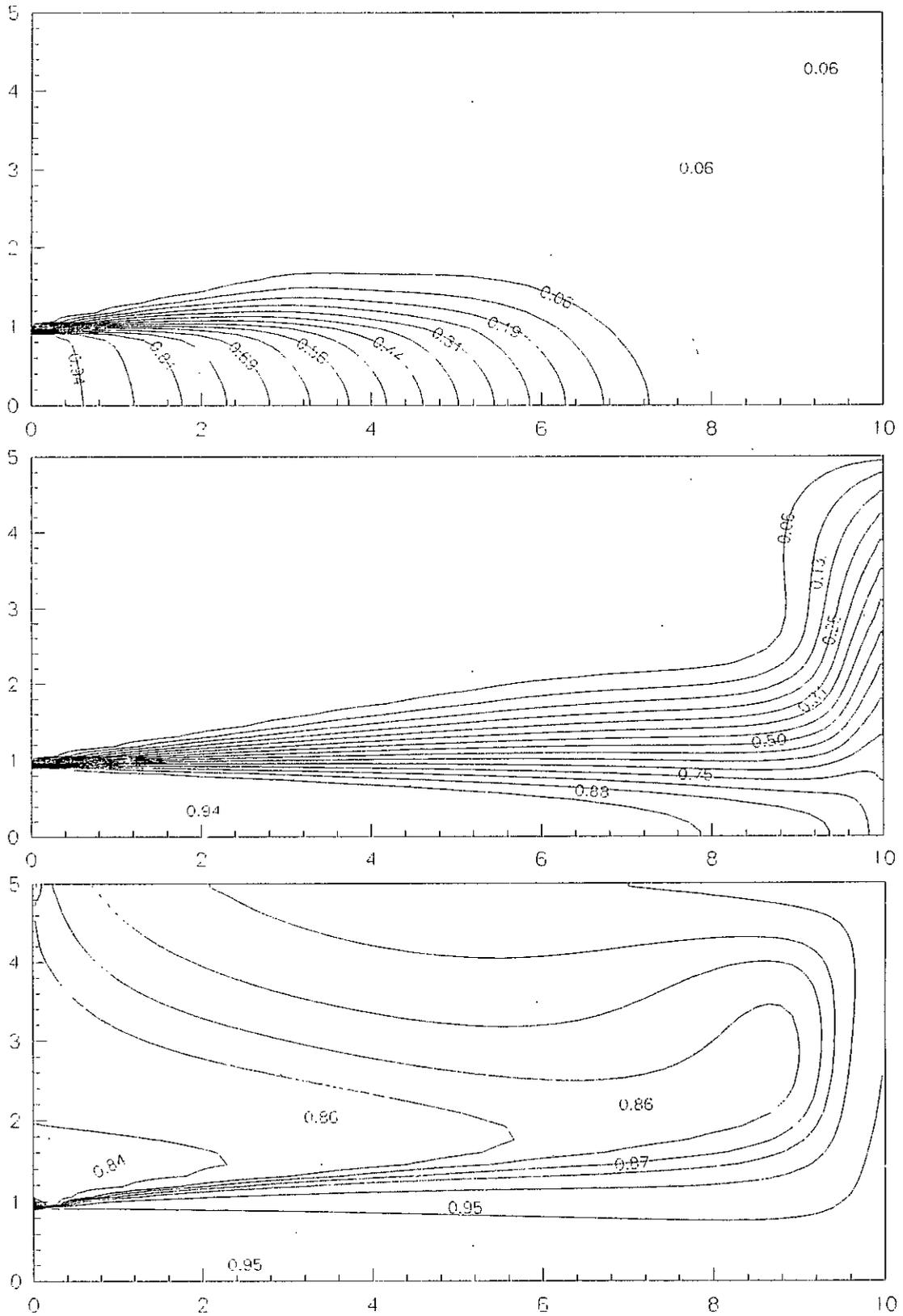


Figure 6-17 : Distribution de la fraction massique du fuel  $t=0.01, 0.02$  et 1 secondes.

Re = 100000

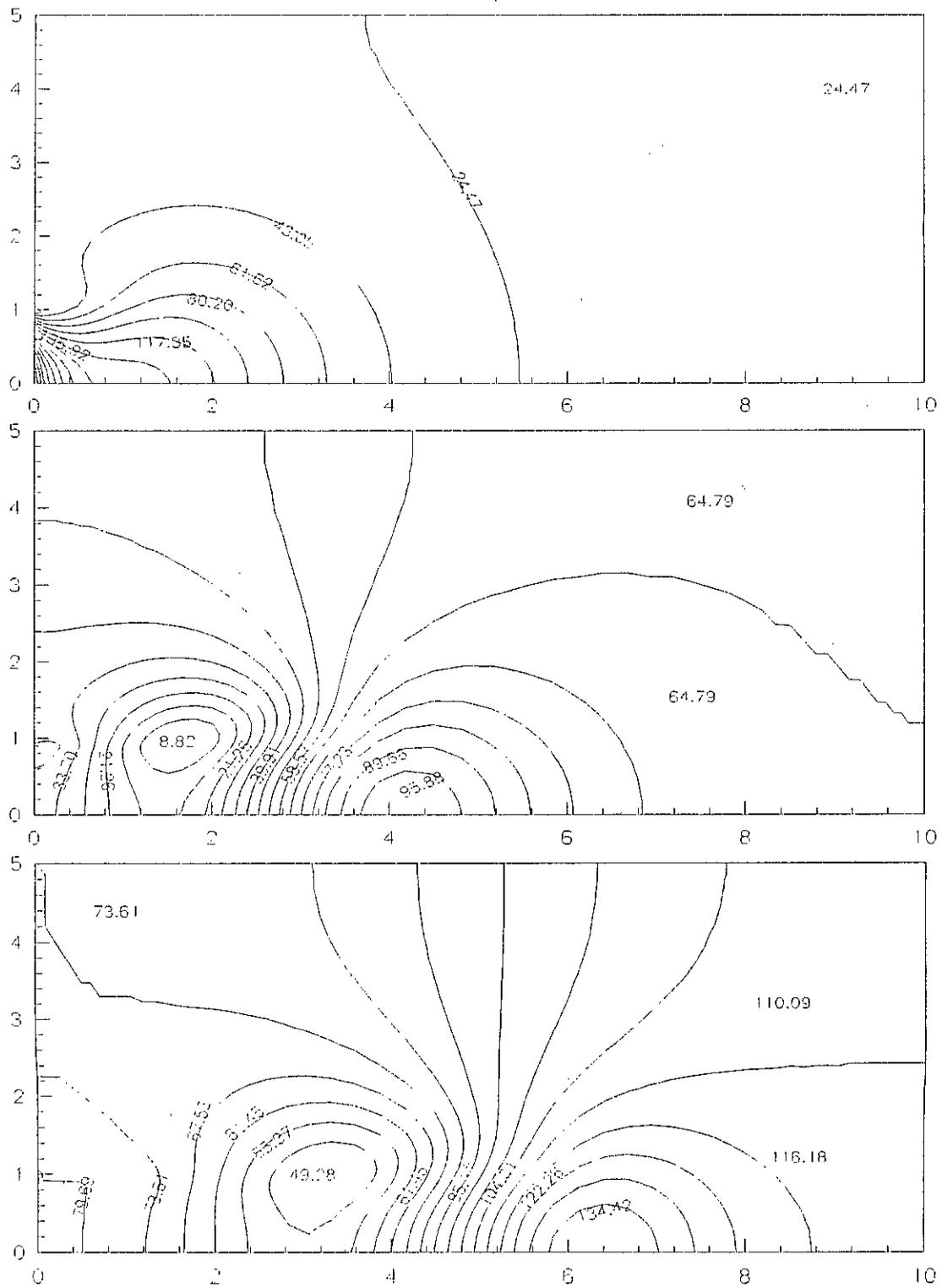


Figure 6-17' : Distribution de la pression  $P-P_o$  en Pa [ $N/m^{**2}$ ]  
 $t=0.001, 0.003$  et  $0.005$  secondes.

Re = 100000

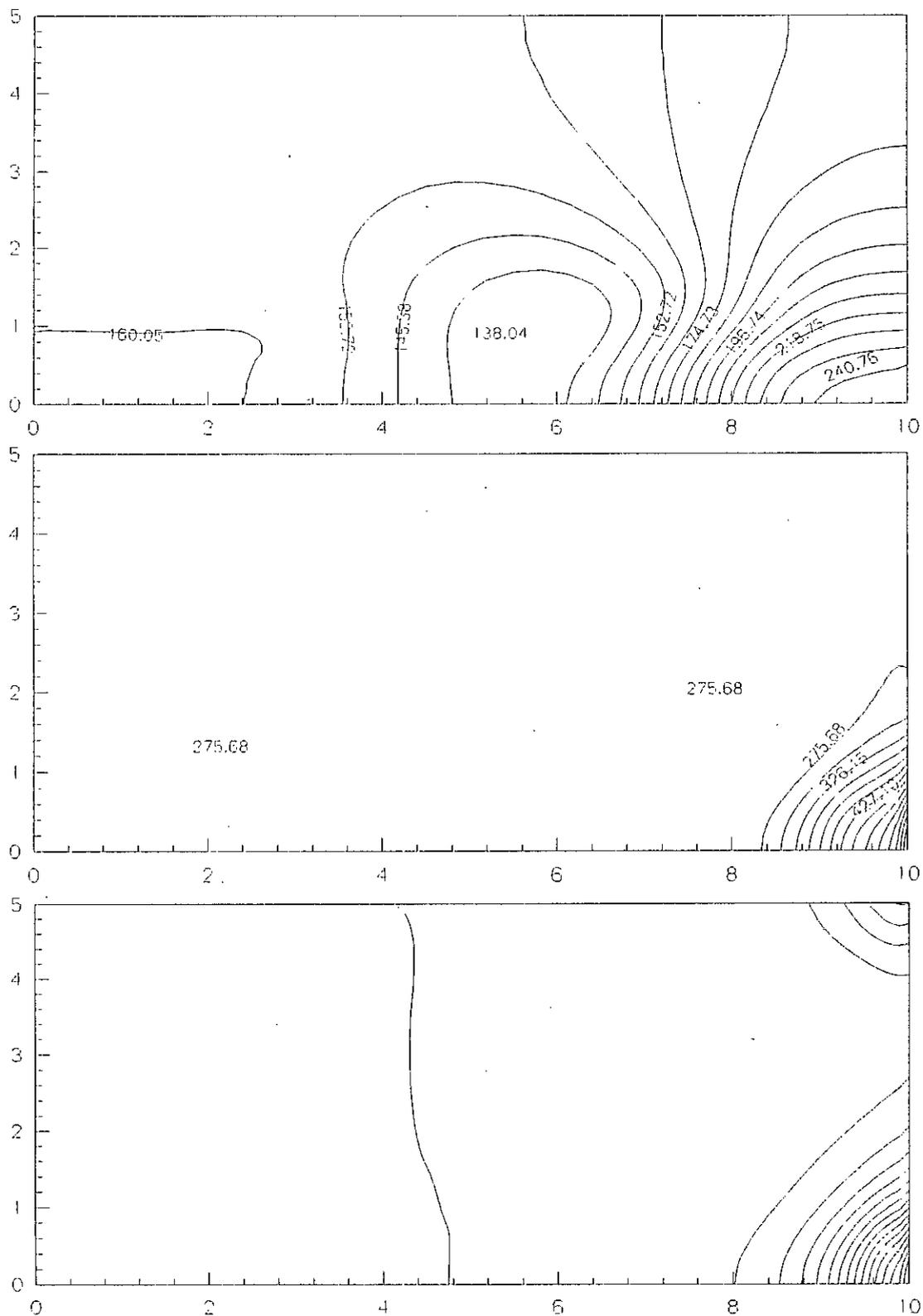


Figure 6-17'' : Distribution de la pression P-Po en Pa [N/m\*\*2]  
 $t=0.007, 0.009$  et  $0.085$  secondes.

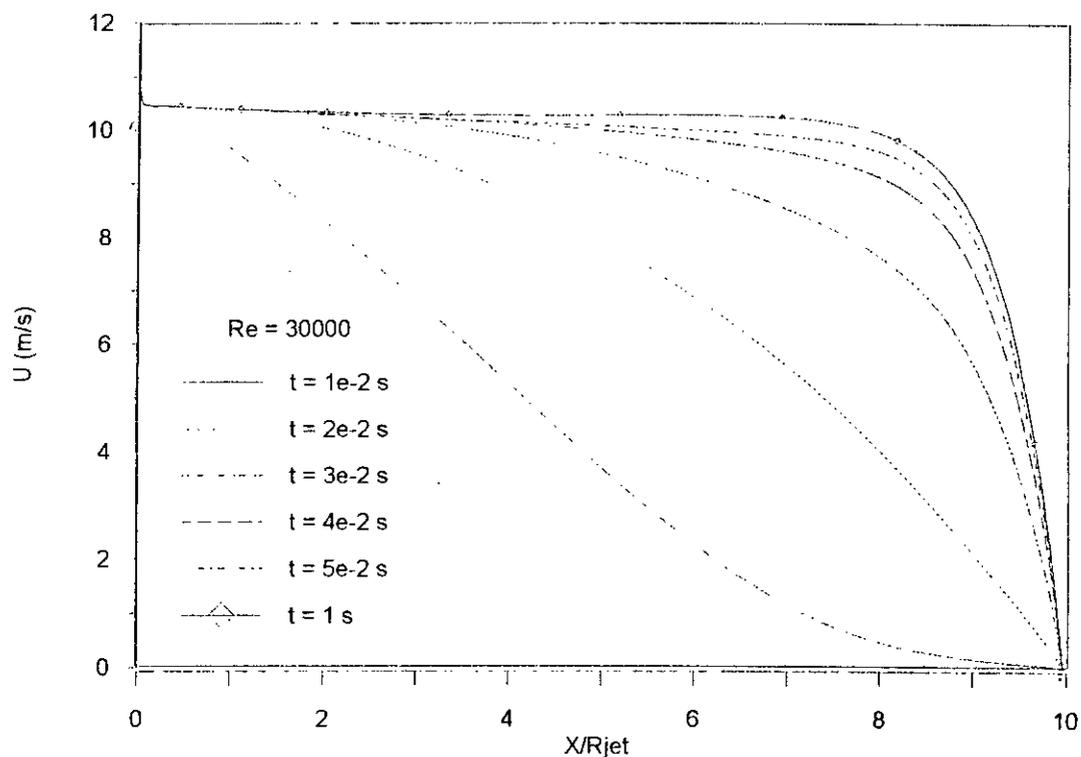


Fig. 6-18: Variation de la vitesse axiale pour  $r = 0$

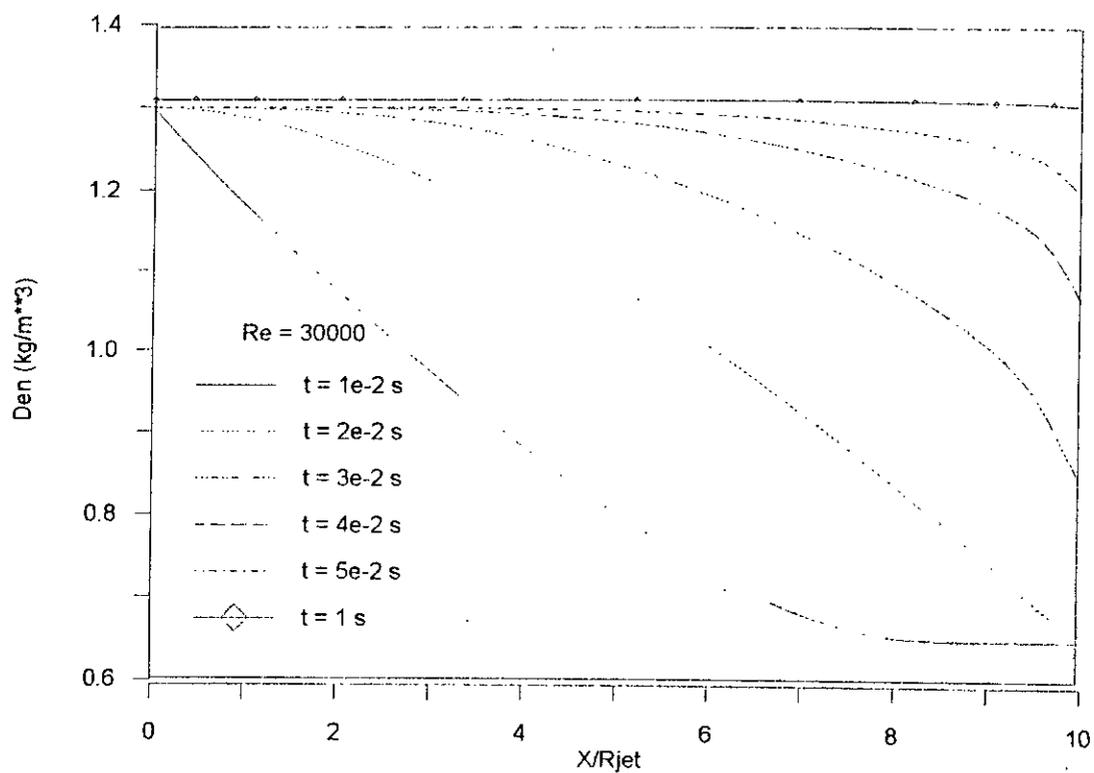


Fig. 6-19: Variation de la densité dur l'axe de la chambre.

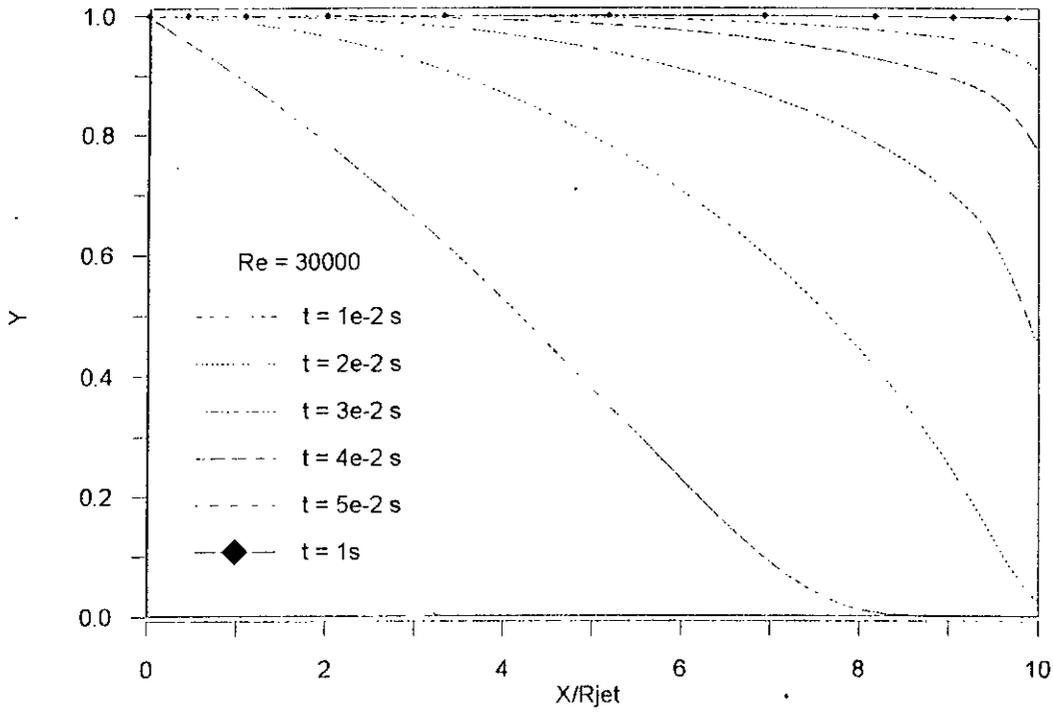


Fig. 6-20 : Variation de la concentration sur l'axe de la chambre.

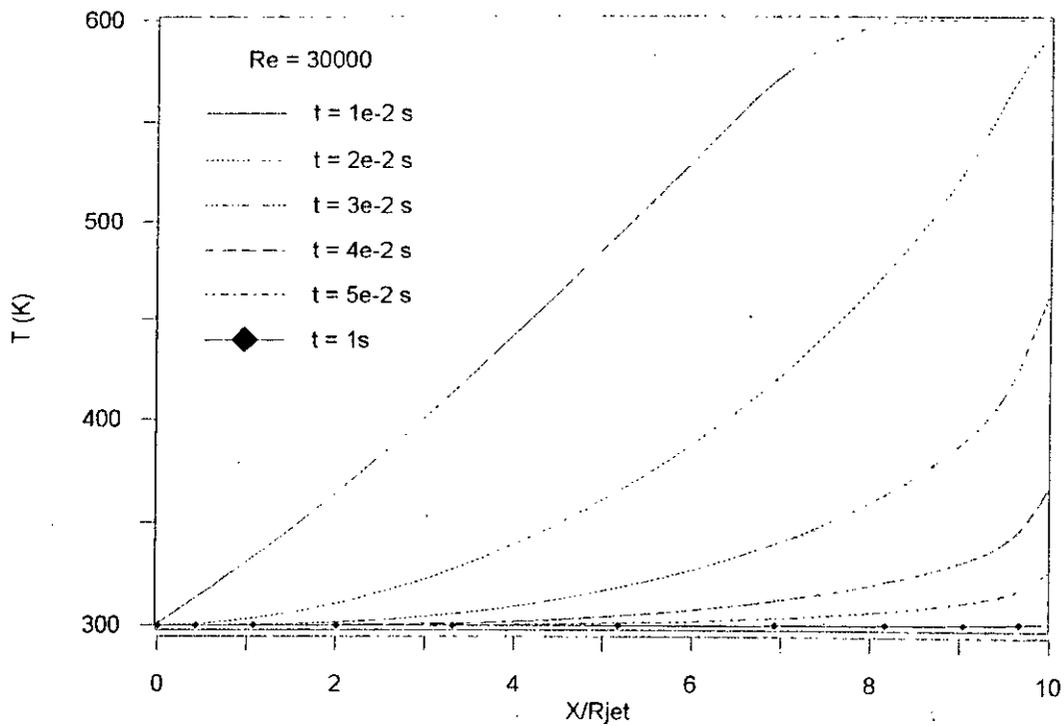


Fig. 6-21 : Variation de la température sur l'axe de la chambre.

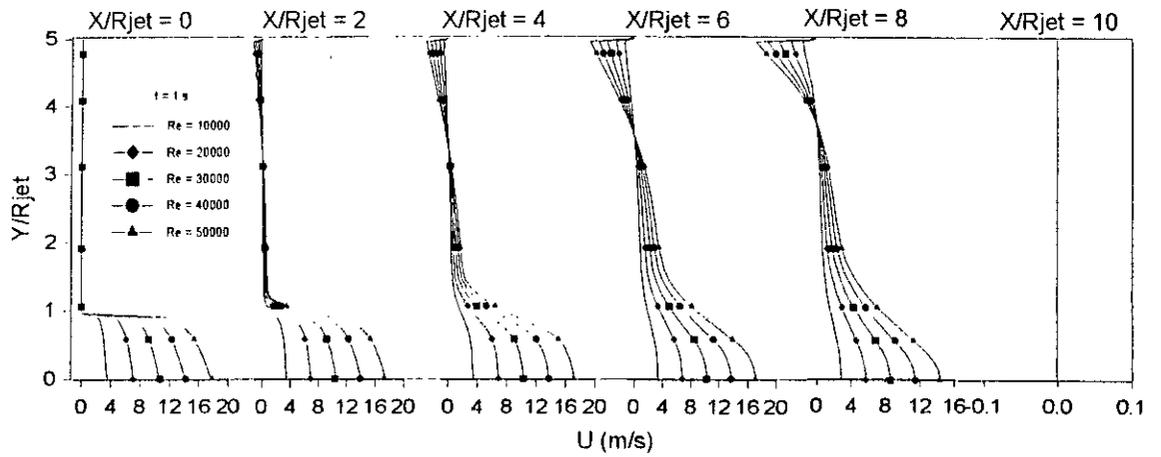


Fig. 6-22 : Comparaisons des vitesses

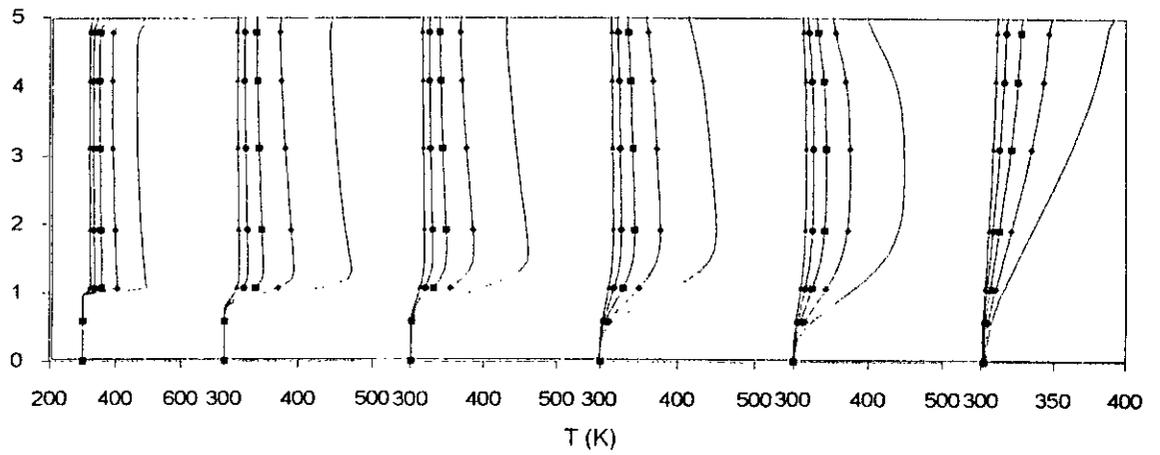


Fig. 6-23 : Comparaisons des températures.

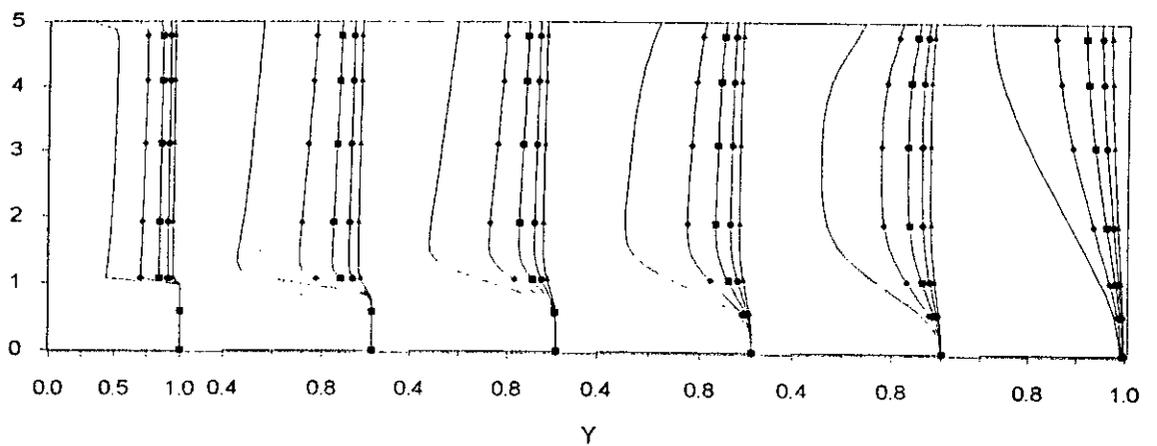


fig. 6-24 : Comparaisons des concentrations.

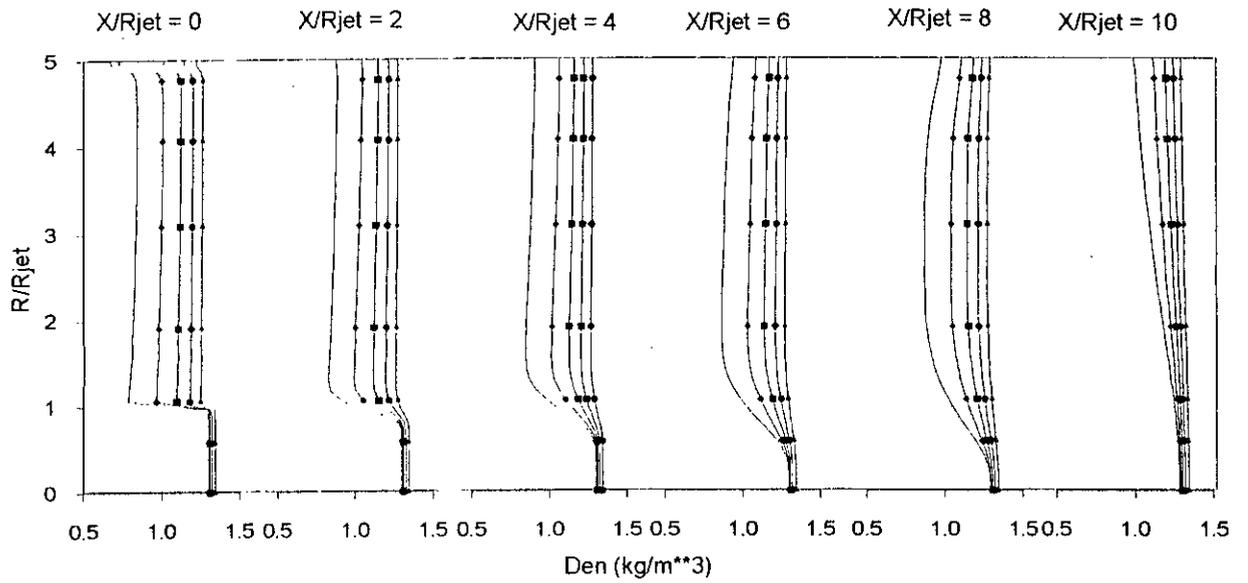


Fig. 6-25: Comparaisons des densités.

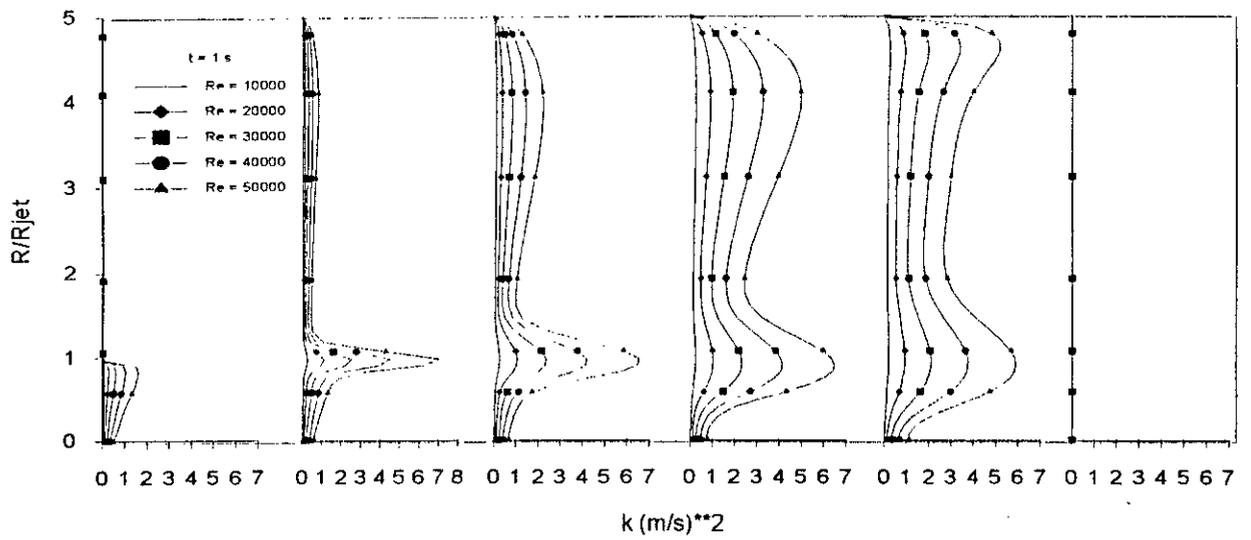


Fig. 6-26 : Comparaisons des énergies de turbulence.

## CONCLUSION GENERALE

Dans cette étude nous avons considéré l'écoulement instationnaire et turbulent de fluides compressibles. La résolution des équations moyennées de conservation de masse, de l'impulsion et de l'énergie avec une modélisation des quantités turbulentes s'avère nécessaire. La discrétisation des équations est faite par la méthode des volumes finis.

Un code existant (TEAM) qui calcule les écoulements turbulents, stationnaires, incompressibles et isothermes d'un seul fluide a été la base du travail. Le code a fait l'objet de plusieurs améliorations pour tenir compte du temps, de la compressibilité, de la variation de la température et des propriétés thermodynamiques des fluides.

Dans un test préliminaire nous avons vérifié que la procédure de capture de la compressibilité n'affecte pas les possibilités originales du code. Cela est achevé par le calcul d'un élargissement brusque sur un pas vertical. Les résultats de calcul ont montré un accord satisfaisant avec l'expérimental.

Une deuxième application est faite sur l'étude de l'évolution dans le temps de l'injection turbulente, compressible et non isotherme de l'oxygène froid dans une chambre cylindrique fermée contenant de l'oxygène chaud. Vu le manque de données expérimentales sur cette configuration, l'application a été qualitative. Nous avons remarqué que la procédure donne des résultats logiquement acceptables.

Antérieurement, nous avons mis au point une amélioration de ce code à travers plusieurs travaux (non présentés dans cette thèse), parmi lesquels on peut citer : La simulation numérique de l'injection turbulente et compressible d'un fluide dans une chambre fermée (étude dynamique et thermique) [42], l'étude numérique de l'impact d'un jet sur une

plaque horizontale [43], l'aérodynamique interne d'un moteur a combustion interne [44], l'étude du phénomène de transport dans un réacteur à deux jets coaxiaux [45] et l'étude numérique d'un jet compressible et turbulent en stagnation [46]. Qualitativement les résultats trouvés sont acceptables. Quantitativement, il reste à l'expérience de les adopter ou les rejeter.

Pour un travail futur, on recommande l'étude de la même configuration avec tourbillonnement (étude déjà en cours) et réaction chimique (combustion).

## REFERENCES

- [1] CHAO AN LIN: "Computational study of compressibility effects in two-dimensional junction flow at a high subsonic Mach numbers"; Master of science dissertation Mec. dep. Manchester univ. 1985.
- [2] M. ERRERA et G. JANSSENS: "Ecoulement autour de la soupape d'admission et dans la chambre de combustion d'un moteur diesel"; Entropie N°122 PP 67-75 1985.
- [3] BOUKHEZAR N.: "Etude de l'injection de deux fluides non réactifs, aux régimes laminaire et turbulent, dans une chambre de combustion a géométrie complexe"; Thèse de magister. Université de Constantine 1996
- [4] TAKASHI WATANABE: " Visual study of the influence of combustion chamber configuration on Fuel-Air Mixing process in D.I. Diesel engine using liquid-liquid injection "; Kurume institute of technology 901575 PP 1824 -1835.
- [5] M. BARRERE et R. BORGHI: « Taux de production chimique en régime turbulent », Entropie N°52 Juillet Août 1973 PP 7-17.
- [6] R. BORGHI et E. POUBAIX: « On the coupling of complex chemistry with a turbulent combustion model », PCH Vol. 2 N°1. PP65-77 1981.
- [7] R.BORGHI et E.POURBAIX: « Une modélisation eulérienne-lagrangienne pour la combustion turbulente », La recherche Aérospatiale, 1983 N°4 (Juillet-Août) PP 245-255.
- [8] R.S. CANT et K.N.C. BRAY: "A theoretical model of premixed turbulent combustion in closed vessels"; Combustion and flame 76 1989 PP 243-263.
- [9] T.R.A. BUSSING et E.M.MURMAN: « Finite volume method for the calculation of compressible chemically reacting flows », AIAA Journal Vol. 26 N°9 PP 1070-1078 (1987).
- [10] H.NAJI et R.BORGHI: « Progrès dans le calcul d'écoulements en combustion dans les moteurs à allumage commandé », Entropie N° 134, 1987 PP 52-57.
- [11] Y.H.HWANG et Y.H.HUNG: "Turbulent transport phenomena in three dimensional side-dump ramjet combustors"; J. Heat Mass Transfer vol. 32, N°11 1989 PP 2113-2125.

- [12] K. UENISHI et co-auteurs : "Three dimensional numerical predictions of the flow behind a rearward-facing step in a supersonic combustor"; AIAA 87-1962
- [13] C.C. HWANG et G. ZHU : « A comparaison of the linear and nonlinear k- $\epsilon$  turbulence models in combustors », J. Fluid Eng. Vol. 115/93 Mars 1993.
- [14] M.K.SHIN, S.D.LEE, S.H.JOO et Y.K.YOON : « A numerical study on the combustion phenomena occuring at the post combustion stage in the Bath-type smelting reduction furnance », ISIJ Int. Vol. 33 (1993) N° 3, PP 369-375.
- [15] M. PARSI et H. DANESYAR: "Measurements of the three-dimensionnall turbulent flow in the cylinder of an I.C. engine"; D.F.G. Durao et al (eds). Instrumentation for combustion and flow in engines 1989 PP 377-390.
- [16] Z. HAN et R.D.REITZ : « Turbulence modeling of internal combustion engines using RNG k- $\epsilon$  models », Combust. Sci. And Tech. 1995, Vol 106 PP 267-295.
- [17] DAVID G. SLOAN et co-auteurs : "Modeling of swirl in turbulent flow systems"; Prog. Energy combustion science 1986 vol. 12 PP 163-250.
- [18] P.GILABER et P.PINCHON : « Mesure et modélisation des transfets thermiques gaz-paroi dans le cas des moteurs à allumage commandé », Revue d'IFP Vol. 44 N°1 Jan.-Fev. 1989.
- [19] J.O. HINZE: "Turbulence"; 2<sup>nd</sup> ed., Mc Graw-Hill PP 2 1975 ISBN 0-07-02903707.
- [20] P.A. LIBBY et F.A. WILLIAMS: "Turbulent reacting flow"; Springer-Verlag New York ISBN 3-540-10192-6
- [21] A. FAVRE: "La turbulence en mécanique des fluides"; Bordas Paris 1976 ISBN 2-04-003566-4
- [22] B.E. LAUNDER et D.B. SPALDING: "Mathematical models of turbulence" Academic Press INC. ISBN 0-12-438050-6
- [23] N.C. MARKATOS: "Computer simulation techniques for turbulent flows"; Ency. of Fluid Mec. vol. 16 PP 1221-1275. ISBN 0-87201-518-1.
- [24] B.E. LAUNDER et D.B. SPALDING: "The numerical computation of turbulent flows"; computer methods in applied mechanics and engineering 3 1974 287-288.

- [25] R. SCHISTEL : "Modélisation et simulation des écoulements turbulents" Hermes, Paris, 1993  
ISBN 2-86601-371-9
- [26] G. VLAD, O. BOIRON, G. LEPALEC et P. BOURNOT: "Numerical study of the compressible turbulent flow in a laser cavity"; J. Heat Mass Transfer 1995 vol. 8 N°14 PP 2623-2633.
- [27] J.H. FERZIGER ET M. PERIC: "Computational methods for fluid dynamics"; Springer 1996  
ISBN 3-540-59434-5.
- [28] R. S. BENSON : "The thermodynamics and gas dynamics of internal combustion engines": vol. 2  
CLARENDON-PRESS OXFORD 1982 ISBN 0-19-856210-1.
- [29] D.A.ANDERSON, J.C. TANNEHILL et R.H. PLETCHER : «Computational fluid Mechanics and heat transfer », Hemisphere, Mc Graw-HILL.
- [30] KENNETH H. HUEBNER : "The finite element methode for engineers"; John Wiley and Son  
1982 ISBN 0-471-09159-6.
- [31] OLIVIER PIRONNEAU: "Finite elemnet methods for fluids"; John Wiley and Son, Masson 1982  
ISBN 0-471-92255-2 (Wiley).
- [32] SUHAS V. PATANKAR: "Numerical heat transfer and fluid flow"; Hemishpère 1980,  
ISBN 0-07-048740-5
- [33] BELKHERCHOUCHE D.: "Simulation numérique de l'écoulement instationnaire laminaire ou turbulent d'un fluide inerte dans une chambre de combustion"; Thèse de magister. Université de Constantine 1995
- [34] M. DAMOU et M. KHIDA: "Simulation numérique d'écoulements turbulents avec tourbillonnement dans une chambre à combustion"; COME'96 Blida 1996 PP 73-76.
- [35] M. DAMOU : « Simulation numérique de jets confinés turbulents avec récirculation avec application aux chambres à combustion à l'aide de 2 modèles de turbulence », COME'96, Blida (1996) PP 83-89.
- [36] B.E. LAUNDER, W.C. REYNOLDS, W. RODI, J. MATHIEW ET D.JEANDEL: "Turbulence models and their applications" Eyrolles 1984 ISSN 0399-4189 PP 94-120

- [37] P.G. HUANG et M.A. LESCHZINER: "An introduction and guide to the computer code TEAM"; PP 21-22.
- [38] GSM : "La combustion dans les moteurs d'automobile"; Ed. Technip 1988 PP 182 ISBN 2-7108-0540-6
- [39] ABBOT D.E. et KLINE J.S., "Experimental investigation of subsonic turbulent flow over single and double backward facing step", J. of Basic Engineering, Sep. 1962, PP 317-325.
- [40] H. SCHLICHTING: "Boundary layer theory" ; 6<sup>th</sup> ed. Mc Graw-Hill 1968 ISBN 07-055329-
- [41] C. HABCHI : « Contribution à la simulation numérique d'un moteur à deux temps », Thèse de Doctorat de l'université de PARIS VI, 1990.
- [42] HADEF R. et MAMERI A.: "Simulation numérique de l'injection turbulente d'un fluide compressible dans une chambre fermée: Etude dynamique et thermique"; 3<sup>rd</sup> inter. Meeting on Energetic physics Béchar 1996 PP 331-334.
- [43] MAMERI A. , HADEF R. et KHALDOUNE F. : " Etude numérique de l'impact d'un jet compressible turbulent sur une plaque horizontale"; 5<sup>th</sup> NSM INGM Boumerdès 1996 PP 61-66.
- [44] HADEF R. et MAMERI A.: "Aerodynamique de l'écoulement dans un moteur alternatif"; JMM'97 Guelma 1997 PP 354-359.
- [45] HADEF R. et MAMERI A.: "Phénomène de transport turbulent dans une réacteur à deux jets coaxiaux"; 3eme congrès de Mécanique, Tetouan Maroc 1997 PP 735-740.
- [46] HADEF R., M.J. SAFI et MAMERI A.: "Etude numérique d'un jet compressible et turbulent en stagnation"; JTET Monastir, Tunis 1996.