

REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE
MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR
ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

UNIVERSITE DE BLIDA
INSTITUT DE MECANIQUE

THESE DE MAGISTER
Option : CONSTRUCTION MECANIQUE

Présentée par :
Djamel FACI

THEME

**COMPORTEMENT DYNAMIQUE D'UN MODELE
DE MACHINES TOURNANTES**

Devant le jury composé de :

Président : M^r M. MAGHRAOUI Maître de conférence (USTB)
Examineur : M^r Z. YOUNI Maître de conférence (USTB)
M^r B. ATTAF Maître de conférence (USTB)
Rapporteur : M^r M. OUALI Maître de conférence (USTB)

ANNEE UNIVERSITAIRE 1995/1996

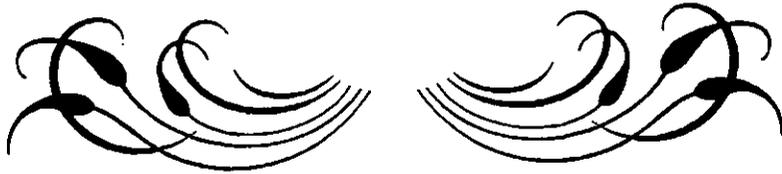
32-530-577-1



32-530-577-1

570

DEDICACES



Je Dédie cette Modeste Thèse De Magister

- A Mes Parents Qui Ont Veillés Sur moi ;

- A Mes Frères Et soeurs ;

- Et Surtout A Ma femme (Benzahra Karima),

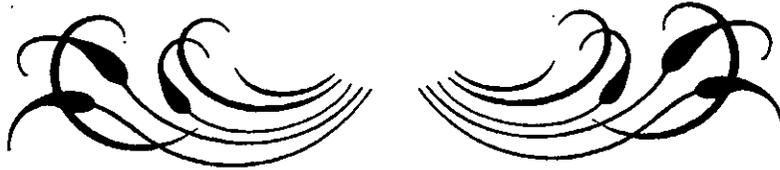
Pour ces Encouragements et le Bonheur

qu'elle me Procure .

M. FACI. D



REMERCIEMENTS

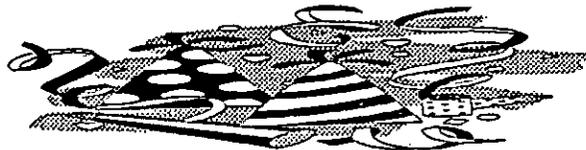


Ce Travail a Ete Réalisé sous la Direction du Dr Ouati. Mohamed . Je le Remercie pour sa Constante Disponibilité, Sa Bienveillante Attention, les Orientations qu'il a Pu me Donner et Ses Encouragements .

Je remercie le Dr Maghraoui Manmar d' Avoir Accepter de Présider le Jury de Soutenance, Ainsi que les Docteurs Youbi Zine et Attaf Brahim pour Avoir Daigner Examiner Cette Thèse.

Je Tiens à Exprimer Mes Remerciements Respectueux et Chaleureux à mes Collègues de Cosider (Samoui, Zinter, Joumi, . . .) , Et à Mes Ami (es) Pour leurs Sympathie, et les Encouragements .

Mr D. Faci



SYMBOLES ET LETTRES UTILISES

Symboles	Signification	Unité
a_0	Accélération linéaire	[m / s ²]
A , B.	Réactions aux paliers	[N]
C _{ij}	Coefficient d'influence	[m/N]
c..	Amortissement	[N.s / m]
C	Centre de masse	
[C] ²²	Matrice d'amortissement	[N. s/m]
E	Module d'élasticité	[N/m ²]
Q	Quantité de mouvement	
{q}	Coordonnée généralisée	
I	Moment d'inertie	[m ⁴]
I _p	Moment polaire	[m ⁴]
[J _o]	Tenseur d'inertie	
L	Longueur	[m]
M	Masse	[Kg]
\bar{M}	Moment des forces	[m. N]
F	Force Unitaire	[N]
F _{cr}	Force critique	[N]
F(t)	Force harmonique	[N]
f_p	Fréquence Propre	[Hz]
f	Flèche	[mm]
e	Exentrement	[mm]
P.	Charge axiale	[N]
p(t)	Charge axiale harmonique	[N]
t	Temps	[s]
i	Nombre complexe	
K_0	Moment cinétique	[m. N/s]

[K]	Matrice de rigidité	[N/m]
[Kp]	Matrice de rigidité de palier	[N/m]
k..	Rigidité	[N/m]
T	Energie cinétique	[Joule]
Mz	Moment	[N.m]
x_c', y_c'	Coordonnées des centre de masse	[mm]
ω	Vitesse de rotation	[rad/s]
Ω	Pulsation propre	[rad/s]
δ	Déplacement	[m]
π	Energie potentielle	[J]
ε	Accélération angulaire	[rad]

3.3.3	Application pour une centrifugeuse pendulaire	42
3.3.3.1	Description de la ligne d'arbre de la centrifugeuse	43
3.3.3.2	Définition des conditions aux limites	43
3.3.4	Etude théorique	44
3.3.5	Approche mathématique	45
3.3.6	Conclusion	45
3.3.6.1	Vibrations de torsion	48
3.3.7	Modélisation mathématique et applications	49
3.3.7.1	Introduction	49
3.3.7.2	Equation du mouvement	49
3.3.7.2.1	Energie potentielle et cinétique	50
	a) Energie potentielle	50
	b) Energie cinétique	51
3.3.7.3	L'effet gyroscopique	53
3.4	Charge axiale périodique	55

IV- ETUDE DE L'ARBRE DANS LE CAS D'UNE CHARGE AXIALE

4.1	Introduction	58
4.2	Etude statique	59
4.2.1	Formule d'Euler pour le force critique	59
4.2.1.1	Flambement avec flexion simple	61
4.2.2	Etude dynamique	62
4.2.2.1	Flambement avec flexion dans le cas d'un l'arbre en rotation	62

V - PRESENTATION DES TYPES DES MACHINES

5.1	Séparateur (type KDA 18-02-177)	65
	a) Partie supérieure (Bol)	65
	b) Partie inférieure	65
5.2	Fonctionnement du séparateur	66
5.2.1	Vibrations du séparateur	66
	a) Vibrations dues à la matière	66
	b) Vibrations dues aux phénomènes mécaniques	67
5.3	Description de la centrifugeuse pendulaire (type BMA G 1000/1250)	67
5.3.1	Vibrations de la centrifugeuse	68

VI - RESOLUTION DU SYSTEME D'EQUATION

6.1	Réponse en fréquence des système à N degrés de liberté sans amortissement	74
6.2	Réponse en fréquence des système à N degrés de liberté avec amortissement	78
6.3	Réponse en fréquence des système à N degrés de liberté avec excitation	79
6.4	Structure du programme	81
6.5	Application numérique	85

TABLE DES MATIERES

	PAGES
Bibliographie	
Symbole utilisée	1
Résume	
 I.- INTRODUCTION	
1 Introduction	2
 II.- ANALYSE DYNAMIQUE D'UN TYPE DE ROTOR VERTICAL	
2.1 Effort exercés sur l'axe d'un solide en rotation	8
2.1.1 Effort dynamique	8
2.1.2 Variation de la quantité de mouvement et moment cinétique	10
2.1.3 Réactions statiques et dynamiques	15
2.1.3.1 Equilibres statiques et dynamiques	15
2.1.3.2 Analyses des résultats	16
2.1.4 Solide parfaitement équilibre	18
2.1.4.1 Conditions pour lesquelles les réactions dynamiques sont nulles	18
2.2 Rotation d'un solide autour d'un axe fixe	19
2.2.1 Equilibre statique et dynamique	19
2.3 Rotation d'un solide (rotor) autour d'un axe fixe	21
2.3.1 Détermination des forces aux paliers	21
2.3.2 Détermination les moments d'inerties	22
 III- LES MODELES MATHEMATIQUE DES MACHINES AUX ARBRES VERTICAUX	
3.1 Introduction	26
3.2 Modèle Mathématique pour le type I et type II	26
3.2.1 Modèle mathématique de type I	27
3.2.2 Calcul des efforts dans le cas d'un pendule	29
3.2.3 Modèle Mathématique pour le type II	31
3.2.3.1 Etablissement de la matrices des coefficients d'influence	31
3.2.3.2 Calcul des énergies cinétiques et potentielles	34
3.3 Equations du mouvement	36
3.3.1 Méthode de calcul des vitesses critiques d'un arbre vertical	37
3.3.3.1.1 Notion de vitesse critique	37
3.3.1.a Application numérique	38
3.3.1.a.1 Calcul des valeurs propres par méthode de Stodola	38
3.3.2 Résolution du système d'équations	39
3.3.2.1 Méthode de Leverier	39
3.3.2.2 Vérification du programme LEV.	40
3.3.2.3 Méthode de Lobachevski	40
3.3.2.3.1 Algorithme	40

	Application	85
6.5	Interprétation des courbes	96
6.6	CONCLUSION	97
ANNEXE A	Efforts dynamiques	99
ANNEXE B	Résolution par méthode de Jacobi	101
ANNEXE C	Propriétés dynamiques d'un palier	105
ANNEXE D	Application numérique	113
ANNEXE E	Organigramme	118

BIBLIOGRAPHIE

BIBLIOGRAPHIE

- [1] PISSAREV. A., « Vibrations Mécaniques », Sofia, 1985.
- [2] GIRONNET. B et LOURADOUR. G, « Vibrations et vitesses dangereuses de torsion des lignes d'arbres », Technique de l'ingénieur, B5770-5772.
- [3] Timoshenko. S.; « Théorie des Vibrations »; Edition Librairie, Polytechnique Ch; Béranger, paris et Liège, 1954.
- [4] BIGRET R., « Vibration des machines tournantes et des structures » ,Ed Technique et documentation, Paris, 1980
- [5] OUALI. M, « Sur la dynamique de quelques systèmes électro-Mécanique », « Influence du moteur, méthodes asymptotiques, . . . », Thèse d'Etat, Sofia 1986.
- [6] BIGRET. R, « Equilibre sur site des machines tournantes en régime transitoire », ProVIB'93, Institut de Mécanique , Blida 1993.
- [7] BIGRET. R, « Surveillance et protection des machines tournantes par les descripteurs globaux des états vibratoire », ProVIB'93, Institut de Mécanique, Blida 1993.
- [8] MAGHRAOUI. M , « Dynamique des machines tournantes - Modélisations des système de rotors », ProVIB'93 , Institut de Mécanique , Blida 1993.
- [9] AïAD. A, « Analyse modale expérimentale des structures mécaniques », ProVIB'93 , Institut de Mécanique , Blida 1993.
- [10] AIT SAHED. Y , « Détection d'une instabilité de palier associée à un balourd sur l'alternateur du groupe turbine à gaz centrale électrique de Béchar », ProVIB'93 , Institut de Mécanique , Blida 1993.
- [11] Proceedings « La conférence Internationale, problématique des vibrations dans l'industrie », ProVIB'93 - Blida 1993.
- [12] TECHECHANKOV.
- [13] OUALI. M , BAAZIZ. A , « Analyse dynamique des machines avc différents types de transmissions en tenant compte de l'influence du moteur », ProVIB'93 , Institut de Mécanique , Blida 1993.
- [14] PAVLOVSKI. M, APOSTOLIUK. A , « Vibrations dans les appareils et machines », Ed . OPU. Alger 1992.

BIBLIOGRAPHIE

- [33] CARNAHAN .B, LUTHER. H. , A. , WILKES J.O., « Applied Numérical Méthodes », Edition John Wiley & Sons, New York, Chichester, Briston, Torontp; 1969.
- [34] DHATT G. TOUZOT G.; « Une présentation de la méthode des éléments finis » Ed Maleine S.A., Paris, 1984
- [35] BOURGAIN L.DART R.,BOURGAIN J., « Machines tournantes et circuits puisés », Ed DUNOD, Paris, 1988.
- [36] BMA - « Betriebsanweisung Automatische Zentrifuge »- STANDARD
- [37] DER -Mingku and ,Lien-Wen Chen, « Dynamic Stability of Shaft-Disk System With Flaws » ,25 February 1991.
- [38] H.D. NELSON; « A Finite Rotating shaft Element Using Timoshenko Beam Theory ».
- [39] Jozef HERING; « cours de Mécanique; (Mécanique Newtonienne) »; ed O.P.U 1990 .
- [40] Dr OUALI. M , Dr MAGHRAOUI. M et ABDESSEMED. M ; « Comportement dynamique d'un type de rotor vertical »; Blida, 1993.
- [41] R.P . ARNELL, P.B DAVIS, J. HALLING and T.L .WHOMES, « Tribology principales and Design applications », ed : Machillan, 1991.

RESUME

La dynamique occupe une place importante dans les travaux de recherche actuels.

L'étude, l'analyse et la compréhension du comportement dynamique des machines et des différentes structures mécaniques permettent de cerner divers problèmes et éventuellement de trouver des solutions technologiques et économiques.

Les méthodes numériques connaissent un essor considérable et il n'en est pas de même pour les méthodes analytiques.

Dans cette thèse on se propose d'étudier le comportement dynamique d'un type de machines à "arbres verticaux".

Les buts primordiaux consistent en des études théoriques sans pour autant négliger l'aspect numérique. Les résultats analytiques peuvent être facilement interprétés et exploitables.

Des applications sont faites sur des machines industrielles disponibles en Algérie.

- [15] BOLOLOUBOV. N.N , MITROPOLSKI. Y, « Méthode asymptotiques dans la théorie des vibrations non-linéaires », FISMAT , Moscou , 1974.
- [16] BUTCHOVAROV. S.N, OUALI. M, KOUMTCHEV. L ,« Méthode asymptotique dans un problème de vibrations non-linéaires d'une machine avec transmission par cardon », Annuaire de Mathématiques appliquées, T.22, Livre 2, Sofia , 1986.
- [17] MAGHRAOUI. M, OUALI. M, ASSOUL. Y, « Modélisation des lignes d'arbres pour l'analyse des vibrations de torsion », ProVIB'93 , Institut de Mécanique , Blida 1993.
- [18] AICHONI. M, « Analyse des vibrations de torsion des lignes d'arbres dans les installation propulsives marines », ProVIB'93 ,Institut de Mécanique , Blida 1993.
- [19] KIRAD. A , "Motorisation d'un avion léger" , thèse de Magister. Institut de Mécanique de Blida 1995.
- [20] ASSOUL. Y, "Analyse dynamique en Torsion et Etude de la Fatigue pour les lignes d'arbres ". Université de Blida, Institut de Mécanique, 1995.
- [21] BIGRET. R, « Equilibrage sur site des machines tournantes », Vibro-Méter P/N 561.018 F Suisse, 1989.
- [22] Dr MAGHRAOUI. M; cours de magister mécanique « Machine Tournantes »; 1992.
- [23] BIGRET. R, « Equilibrage des machines tournantes et durée des roulements », ProVIB'93 , Institut de Mécanique , Blida 1993.
- [24] BOUIZEM. B, « Analyse des vibrations des machines tournantes application à un réducteur - engrenage », Thèse de Magister, USTO, 1983.
- [25] TARG. S.; « Eléments de mécanique rationnelle »; édition Mir, Moscou,1972
- [26] FACI. DJ., « Comportement Dynamique d'un Arbre Vertical », projet d'Ingénieur, Dirigé par OUALI. M.,Blida, (ALGERIE);1992.
- [28] OUALI .M . FACI .D.,BAAZIZ .A. « Comportement dynamique d'un Arbre Vertical » Blida Scientific Journal (BSJ),Université de Blida , ALGERIE 1993.
- [29] BEAUMER. M,J, « Solutions constructives aux problèmes de rotation d'une éolienne verticale géante », la technique moderne N° 6-7, 1992.
- [30] BOUDCHICHA. A, « Influence de la distribution de la masse sur les fréquences naturelles des modèles en barre- consoles », Thèse de Magister, 1993.
- [31] P.STEPINE, « Résistance des Matériaux », Edition MIR.
- [32] BAKHAVALOV. N. « Méthodes Numériques »; Edition MIR Moscou;1976.

CHAPITRE I

I. INTRODUCTION

I. / INTRODUCTION

Les liaisons étroites qui se développent entre les différents domaines de la science ouvrent de nouvelles voies et perspectives de recherche pour de nombreuses branches de l'industrie.

Les connaissances des hommes de sciences sont le fruit de longues années d'observation, de description et d'étude des phénomènes naturels.

La « dynamique » occupe une place importante dans les travaux de recherche actuels [1,2,3,4,5]. Le progrès scientifique et technique est lié, entre autre, à l'analyse dynamique des machines et mécanismes. De nombreux ouvrages et revues sont consacrés à la dynamique des machines et des systèmes.

L'analyse du comportement dynamique des structures mécaniques aboutit à des résultats donnant l'information pour l'amélioration des performances des machines et pour l'obtention d'un produit fiable.

Ces dernières décennies, les phénomènes et processus vibratoires occupent une place importante dans le domaine de la recherche scientifique et ils sont présents en permanence dans la « vie industrielle » [6,7,8,9,10,...].

Les vibrations ont diverses origines: mécaniques, électriques, hydrauliques, thermiques et bien d'autres [11]. Un dysfonctionnement d'une machine peut se manifester par des vibrations susceptibles de causer des incidents d'exploitation et d'endommager l'outil de production. Les analyses théorique et expérimentale des vibrations permettent de cerner divers problèmes dans le but de trouver des solutions technologiques et économiques.

Les machines vibrent et des efforts prennent naissance en influant sur leurs organes de manière directe ou à travers la structure.

Plusieurs phénomènes peuvent être énumérés tels que les efforts dynamiques, les déformations, la fatigue, la rupture, Ces phénomènes influent énormément sur le fonctionnement et la durée de vie des machines et de leurs organes [11].

L'étude, la conception et l'entretien des machines tournantes est une préoccupation permanente pour les constructeurs et les utilisateurs. Concevoir une machine c'est aussi prévoir son avenir, afin d'éviter les pannes et de réduire son immobilisation.

On peut considérer que dans le domaine de la mécanique vibratoire, le progrès se fait d'une manière accélérée.

La conception et le calcul des structures font partie de l'activité quotidienne de l'ingénieur dans le domaine de la construction.

Une analyse adéquate des phénomènes et problèmes des vibrations montrerait qu'ils sont de nature non-linéaire [1,11]. La linéarisation permet d'étudier le comportement des systèmes mécaniques, néanmoins l'approximation s'avère souvent non suffisante [5,12,13, . . .] car à partir des résultats, ainsi obtenus, il n'est pas aisé de décrire certains phénomènes qui influent sur le système mécanique étudié [1,5,14, . . .].

La théorie des vibrations non-linéaires est très vaste. Indépendamment du grand nombre d'ouvrages et de publications dans le domaine [1,12,13,15, . . .], la théorie des vibrations non-linéaires pose des difficultés pour la résolution des cas pratiques. La cause est souvent d'ordre mathématique [1,12,13,15,16, . . .] car les méthodes analytiques connues sont laborieuses.

De perturbations diverses peuvent avoir lieu suite à un comportement dynamique excessif résultant des interactions entre les sollicitations extérieures et les caractéristiques de la structure [9]. La caractérisation de ce type de comportement peut être faite par des analyses modales et spectrales. L'article [9] s'inscrit dans le cadre général de l'analyse modale et traite le côté expérimental.

De nombreux problèmes de la dynamique des machines conduisent à l'étude des vibrations de torsion ou / et de flexion.

Les travaux [2,17,18,19,20, . . .] consistent en des études théoriques et en l'élaboration de logiciels de simulation de lignes d'arbre pour l'analyse des vibrations de torsion. Les modèles [17] permettent de discrétiser les lignes d'arbres en un important nombre de stations pour l'approximation du modèle continu et pour l'évaluation des caractéristiques du système. Une modélisation du rotor permet de chercher et d'établir une méthode qui éventuellement estimera « la perte de vie d'un arbre » due à l'accumulation de la fatigue [17].

L'étude [18] présente un algorithme de calcul des vitesses critiques des lignes d'arbres. La méthode se base sur la méthode de Gironnet et Lauradour [2].

L'indisponibilité des machines tournantes de l'industrie peut être très onéreuse et être liée à des dommages corporels [21]. Certaines machines tournantes sont équipées de systèmes de surveillance et de protection utilisant essentiellement leurs vibrations et les températures d'éléments judicieusement choisis [7]. Les états vibratoires sont repérés à partir des signaux délivrés par des systèmes de mesurage essentiellement caractérisés par des fonctions de transfert qui dans des bandes de fréquences définies n'altèrent pas les signaux [21].

Le diagnostic par la surveillance représente une partie essentielle d'un programme de maintenance conditionnelle. La méthode est basée sur l'analyse des signaux vibratoires mesurés et consiste à trouver la défaillance mécanique ayant engendré un niveau vibratoire inacceptable [10,22].

Le modèle du système de rotor est un outil de diagnostic. Les efforts engendrés dans la machine peuvent être introduits dans les équations du mouvement pour une évaluation. Il permet aussi d'apporter des corrections. une introduction aux techniques de modélisation des systèmes de rotors est présentée dans la référence [1,22].

Les rotors des machines tournantes peuvent être guidés (reliés aux stators) par des roulements. La détérioration d'un roulement peut entraîner l'indisponibilité de l'outil de production. Il est utile de connaître et de surveiller les vibrations que provoque le roulement.

La durée de vie d'un roulement est d'autant plus grande que les forces qui lui sont appliquées sont faibles. On cite les forces tournantes liées aux rotor des machines tournantes [23]. Ces forces proviennent, en général, des balourds et désalignages. La note [23] traite de la réduction des forces tournantes liées aux balourds.

L'analyse et la maintenance des machines tournantes présentant un intérêt industriel et économique. pour avoir des renseignements sur l'état mécanique d'une machine il faut étudier un certain nombre de paramètres caractéristiques du fonctionnement de la machine. La mécanique vibratoire occupe une place importante puisqu'elle permet, entre autre, la détermination des efforts dynamiques dans les différents organes de la machine [24,25,26,27,28, . . .].

Toutes les méthodes de surveillance de l'état mécanique d'une machine sont basées sur l'étude des modifications d'un certain nombre de paramètres caractéristiques de la machine [10,24]. Parmi les paramètres, on cite les vibrations et il est démontré que l'évolution du signal vibratoire renseigne sur l'état mécanique de la machine [10,24]. Toute anomalie d'une machine tournante se manifeste par une évolution des vibrations le comportement vibratoire peut être analysé et sa cause recherchée.

Il est aussi démontré que les vibrations des machines électriques sont d'origine mécanique, aérodynamique et magnétique. Ainsi, concevoir une machine sans tenir compte de son comportement dynamique s'avère une tâche très délicate.

De nombreuses machines industrielles dont l'utilisation est assez fréquente sont à arbre vertical. On cite les turbines, les pompes, les éoliennes, les centrifugeuses, les séparateurs,

Comparativement aux arbres horizontaux, les arbres verticaux ont fait l'objet de peu de recherches. Le problème devient de plus en plus important à cause des performances demandées aux machines. Le désir de l'augmentation continue des vitesses de rotation, l'importante des efforts dynamiques dans ce type de machines en vue de leurs éventuelles diminutions ne peut se faire sans une étude approfondie du comportement dynamique de la machine.

Un travail d'introduction au comportement dynamique d'un arbre vertical a été entamé en 1991-1992 à l'Institut de mécanique de l'Université de Blida [26]. Les résultats obtenus [26] sont analytiques. L'application s'est faite sur un séparateur. Les résolutions numériques sont données sans que certains paramètres tels que les pulsations et la vitesse de rotation de l'arbre aient une justification purement scientifique. Néanmoins les résultats sont comparés à ceux du constructeur.

Le travail a vu une suite [27,28] où des cas concrets de machines tournantes à arbre vertical ont été étudiés. Il s'agit des centrifugeuses et des séparateurs. L'article [29] traite des solutions constructives aux problèmes de rotation d'une éolienne verticale géante. Le grand arbre tournant est supporté au sommet et à la base par deux roulements.

L'analyse et l'étude du comportement dynamique d'une machine ou d'un organe de machine se fait généralement sur un modèle dit modèle mathématique. Ce dernier doit être un schéma de calcul idéal, représenter d'une manière fidèle la machine et permettre l'obtention de résultats fiables.

Une étude intéressante [30] concerne l'influence de la distribution de la masse sur les fréquences naturelles des modèles en barre-console. Un modèle combinant les modèles réparti et discrétisé a été adopté afin de réduire les incertitudes causées par l'un des deux modèles.

Depuis quelques années des progrès considérables ont été enregistrés dans les différents domaines de la science: théorique, résolution d'équations différentielles, maintenance, science des matériaux, numérique,

Au début de ce siècle les études débouchèrent sur des systèmes d'équations différentielles difficilement exploitables numériquement. Les techniques de résolution numériques étant en constante évolution, il est relativement aisé d'analyser le comportement d'un système.

Les méthodes analytiques n'ont pas connu le même essor que les méthodes numériques. L'aspect analytique ne doit en aucun cas être négligé car le numérique est une partie prenante du théorique.

Rebutés par l'aspect théorique et analytique, beaucoup de chercheurs ont tendance à n'examiner que les aspects numériques et expérimentaux lors des différentes études. Il faut dire qu'une bonne compréhension des résultats numériques et expérimentaux doit être liée à de larges connaissances théoriques.

On cite que des cas d'analyse de comportement de machines sont abordés dans la référence [35]. L'optimisation de l'amortissement des paliers d'une centrifugeuse pendulaire est traitée. Pour des vitesses de rotation voisines de la vitesse critique, les amplitudes des mouvements de l'arbre des machines tournantes deviennent importantes. Pour que ces amplitudes gardent des valeurs acceptables, il est nécessaire d'adjoindre des dispositifs d'amortissement [35].

Un autre exemple est donné et il concerne la ligne d'arbre d'une centrifugeuse pendulaire. l'étude porte sur les phénomènes gyroscopiques [35].

Une compréhension détaillée du comportement dynamique des machines est essentielle pour l'étude, la conception et le développement des structures.

Dans cette thèse, on se propose d'étudier le comportement dynamique des arbres verticaux. Pour se rapprocher de la réalité, des applications sont faites pour les cas de machines industrielles dont les centrifugeuses et les séparateurs.

On se fixe comme l'un des buts primordiaux, les analyses analytiques de modèles de machines, c'est - à - dire qu'on aborde beaucoup plus les aspects théoriques.

Néanmoins l'aspect numérique est largement abordé. Les résultats analytiques peuvent être facilement exploitables.



CHAPITRE II

II. ANALYSE DYNAMIQUE D'UN TYPE DE ROTOR VERTICAL

2.1/ EFFORT EXERCES SUR L'AXE D'UN SOLIDE EN ROTATION:

2.1.1/ EFFORT DYNAMIQUE : [26,28]

La figure 2.1 représente un solide en rotation, avec :

C: centre de masse du solide,

R': (ox' y' z') repère mobile lié au solide ,

M : masse du solide ,

$\vec{\omega} = \dot{\theta} \vec{k}$: vitesse angulaire de rotation,

\vec{F} :résultante des forces extérieures,

A : palier double (à butées),

B : palier simple (appui cylindrique).

Les réactions \vec{A} et \vec{B} sont quelconques et leur projections dans le repère R'(o x' y' z') sont respectivement A_x, A_y, A_z et B_x, B_y, B_z .

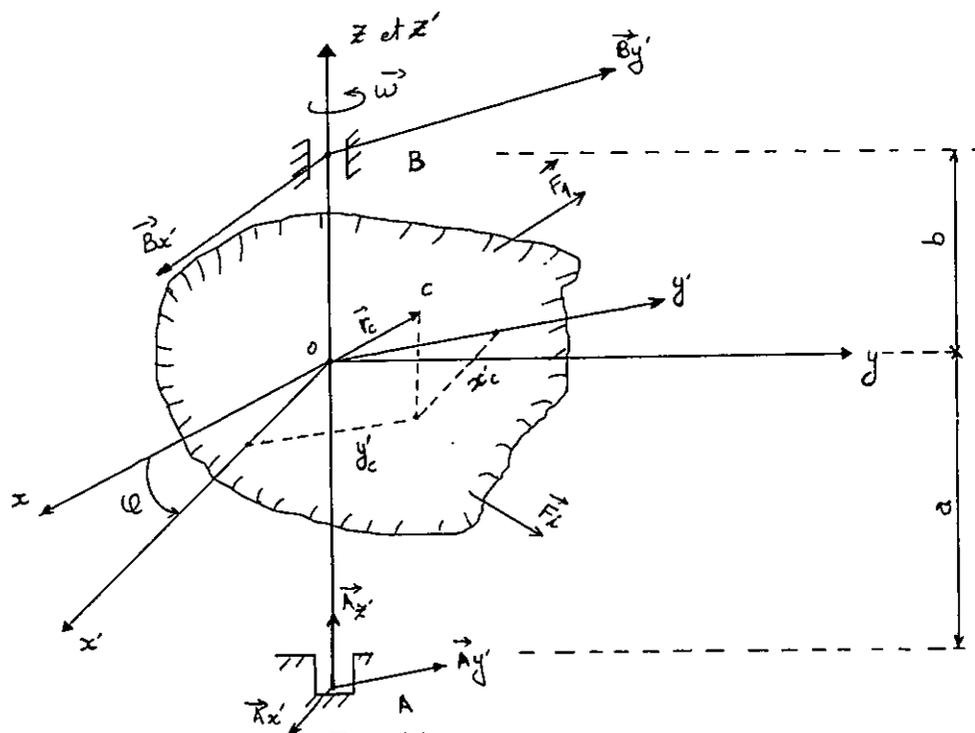


Figure 2.1:

schéma d'un solide en rotation par rapport à un axe vertical

Pour la détermination des composantes des réactions \vec{A} et \vec{B} dans le repère mobile, on utilise les six équations obtenues à partir des lois de la dynamique [25] :

$$\begin{cases} -M(y'_c \ddot{\theta} + x'_c \dot{\theta}^2) = F_{x'} + A_{x'} + B_{x'} \\ M(x'_c \ddot{\theta} - y'_c \dot{\theta}^2) = F_{y'} + A_{y'} + B_{y'} \\ 0 = (F_{z'} + A_{z'} + B_{z'}) \\ -I_{x'y'} \ddot{\theta} - I_{x'z'} \dot{\theta}^2 = M_{x'}(\vec{F}) + aA_{y'} + bB_{y'} \\ -I_{y'z'} \ddot{\theta} - I_{x'z'} \dot{\theta}^2 = M_{y'}(\vec{F}) + aA_{x'} + bB_{x'} \\ I_x \ddot{\theta} = M_x(\vec{F}). \end{cases} \quad (2.1)$$

On note que les composantes des réactions \vec{A} et \vec{B} donnent les réactions totales appliquées en A et B. Ces lois supposent la connaissance de :

- Le centre de masse du système,
- L'application du théorème du centre de masse,
- Le tenseur d'inertie en un point donné,
- Le moment cinétique du système,
- L'application du théorème de la variation du moment cinétique,
- Le moment des forces extérieures et son analogie avec la variation du moment cinétique.

2.1.2 / VARIATION DE LA QUANTITE DE MOUVEMENT ET MOMENT CINETIQUE

On sait que les variations de la quantité de mouvement \vec{Q} du solide et du moment cinétique \vec{K}_O ont respectivement pour expressions :

$$\frac{d\vec{Q}}{dt} = \vec{F} + \vec{A} + \vec{B} \quad (2.2)$$

et

$$\frac{dK_O}{dt} = M_O(\vec{F}) + M_O(\vec{A}) + M_O(\vec{B}) \quad (2.3)$$

Dans le repère R' (O x' y' z') les expressions de \vec{Q} et \vec{K}_O sont :

$$\vec{Q} = Q_x \vec{i}' + Q_y \vec{j}' + Q_z \vec{k}' \quad (2.4)$$

$$\vec{K}_O = K_x \vec{i}' + K_y \vec{j}' + K_z \vec{k}' \quad (2.5)$$

$\frac{d\vec{Q}}{dt}$ et $\frac{d\vec{K}}{dt}$ ont pour expressions les relations suivantes :

$$\frac{d\vec{Q}}{dt} = \left[\frac{dQ_x}{dt} \vec{i}' + \frac{dQ_y}{dt} \vec{j}' + \frac{dQ_z}{dt} \vec{k}' \right] + \vec{\omega} \wedge \vec{Q} \quad (2.6)$$

$$\frac{d\vec{K}_O}{dt} = \left[\frac{dK_x}{dt} \vec{i}' + \frac{dK_y}{dt} \vec{j}' + \frac{dK_z}{dt} \vec{k}' \right] + \vec{\omega} \wedge \vec{K}_O \quad (2.7)$$

On acceptera les notations suivantes :

$$\frac{d'\vec{Q}}{dt} = \left[\frac{dQ_x}{dt} \vec{i}' + \frac{dQ_y}{dt} \vec{j}' + \frac{dQ_z}{dt} \vec{k}' \right] \quad ,$$

$$\frac{d'\vec{K}_o}{dt} = \left[\frac{dK_x'}{dt} \vec{i}' + \frac{dK_y'}{dt} \vec{j}' + \frac{dK_z'}{dt} \vec{k}' \right]$$

En procédant ainsi, on obtient :

$$\frac{d'\vec{Q}}{dt} + \vec{\omega} \wedge \vec{Q} = \vec{F} + \vec{A} + \vec{B} , \quad (2.8)$$

$$\frac{d'\vec{K}_o}{dt} + \vec{\omega} \wedge \vec{K}_o = M_o(\vec{F}) + M_o(\vec{A}) + M_o(\vec{B}) \quad (2.9)$$

Les coordonnées des points A et B sont respectivement :

$(0, 0, -a)$ et $(0, 0, b)$.

$\vec{r}_A = -a\vec{k}'$ et $\vec{r}_B = b\vec{k}'$.

Les moment des réactions A et B sont :

$$\vec{M}_o(\vec{A}) = \vec{r}_A \wedge \vec{A} = \begin{vmatrix} \vec{i}' & \vec{j}' & \vec{k}' \\ 0 & 0 & -a \\ A_x & A_y & A_z \end{vmatrix} ,$$

$$\vec{M}_o(\vec{B}) = \vec{r}_B \wedge \vec{B} = \begin{vmatrix} \vec{i}' & \vec{j}' & \vec{k}' \\ 0 & 0 & b \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix} .$$

En développant $\vec{M}_o(\vec{A})$ et $\vec{M}_o(\vec{B})$. On obtient :

$$\begin{cases} M_x(\vec{A}) = a A_y & ; M_y(\vec{A}) = -a A_x & ; M_z(\vec{A}) = 0 \\ M_x(\vec{B}) = -b B_y & ; M_y(\vec{B}) = b B_x & ; M_z(\vec{B}) = 0 \end{cases} \quad (2.10)$$

En tenant compte de $\vec{\omega} = \dot{\theta} \vec{k}'$ et des projections dans R' des relations (2.8) et (2.9), on obtient :

$$\begin{aligned} \frac{dQ_x}{dt} \vec{i}' + \frac{dQ_y}{dt} \vec{j}' + \frac{dQ_z}{dt} \vec{k}' + \dot{\theta} \vec{k}' \wedge (Q_x \vec{i}' + Q_y \vec{j}' + Q_z \vec{k}') = F_x \vec{i}' + F_y \vec{j}' + F_z \vec{k}' + A_x \vec{i}' + A_y \vec{j}' + A_z \vec{k}' + \\ + B_x \vec{i}' + B_y \vec{j}' + B_z \vec{k}' \quad , \end{aligned} \quad (2.11)$$

$$\begin{aligned} \frac{dK_x}{dt} \vec{i}' + \frac{dK_y}{dt} \vec{j}' + \frac{dK_z}{dt} \vec{k}' + \dot{\theta} \vec{k}' \wedge (K_x \vec{i}' + K_y \vec{j}' + K_z \vec{k}') = M_x(F) \vec{i}' + M_y(F) \vec{j}' + M_z(F) \vec{k}' + a A_y \vec{i}' - a A_x \vec{j}' \\ - b B_y \vec{i}' + b B_x \vec{j}' \quad . \end{aligned} \quad (2.12)$$

A partir des égalités (2.11) et (2.12) , et après identification on aboutit aux relations suivantes :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{dQ_x}{dt} - \dot{\theta} Q_y = F_x + A_x + B_x \quad , \\ \frac{dQ_y}{dt} - \dot{\theta} Q_x = F_y + A_y + B_y \quad , \\ \frac{dQ_z}{dt} = F_z + A_z + B_z \quad , \\ \frac{dK_x}{dt} - \dot{\theta} K_y = M_x(\vec{F}) + a A_y - b B_y \quad , \\ \frac{dK_y}{dt} - \dot{\theta} K_x = M_y(\vec{F}) - a A_x + b B_x \quad , \\ \frac{dK_z}{dt} = M_z(\vec{F}) \quad . \end{array} \right. \quad (2.13)$$

Pour la quantité de mouvement d'un solide on a :

$$\vec{Q} = M \vec{V}_c = M \vec{\omega} \wedge \vec{r}_c \quad , \quad (2.14)$$

d'où :

$$\begin{aligned} \vec{Q} &= M \dot{\theta} \vec{k}' \wedge (x'_c \vec{i}' + y'_c \vec{j}' + z'_c \vec{k}') \\ \vec{Q} &= -M \dot{\theta} y'_c \vec{i}' + M \dot{\theta} x'_c \vec{j}' \quad . \end{aligned}$$

donc :

$$\left\{ \begin{array}{l} Q_x = -M \dot{\theta} y'_c \quad , \\ Q_y = M \dot{\theta} x'_c \quad , \\ Q_z = 0 \quad . \end{array} \right. \quad (2.15)$$

et

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{dQ_x}{dt} = -M \ddot{\theta} y'_c \quad , \\ \frac{dQ_y}{dt} = M \ddot{\theta} x'_c \quad . \end{array} \right. \quad (2.16)$$

Sachant que pour un solide en rotation autour d'un axe fixe le moment cinétique a pour expression :

$$\bar{K}_O = T_O \bar{\omega} \quad ,$$

dans notre cas, on a :

$$\bar{K}_O = \begin{bmatrix} I_x & -I_{xy} & -I_{xz} \\ -I_{yx} & I_y & -I_{yz} \\ -I_{zx} & -I_{zy} & I_z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\theta} \end{bmatrix}$$

d'où :

$$\bar{K}_O = -I_{xz} \dot{\theta} \bar{i}' - I_{yz} \dot{\theta} \bar{j}' + I_z \dot{\theta} \bar{k}' \quad (2.17)$$

Les projections de K_O dans R' sont :

$$\begin{cases} K_x = -I_{xz} \dot{\theta} \quad , \\ K_y = -I_{yz} \dot{\theta} \quad , \\ K_z = I_z \dot{\theta} \quad . \end{cases} \quad (2.18)$$

En remplaçant les expressions (2.15) et (2.16) dans (2.13) et en tenant compte de (2.17) et (2.18) , on obtient les six équations données par (2.1) . Ces derniers permettent l'obtention des réactions dans le paliers.

2.1.3 / REACTIONS STATIQUES ET DYNAMIQUES

2.1.3.1/ EQUILIBRES STATIQUES ET DYNAMIQUES:

Les composantes des réactions arbitraires \vec{A} et \vec{B} peuvent être déterminées en résolvant le système d'équations (2.1) .

Les composantes $A_{x'}$, $A_{y'}$, $B_{x'}$ et $B_{y'}$ dépendent des forces extérieures et du caractère du mouvement. La réaction A_z peut être aisément déterminée à partir de la troisième équation du système (2.1).

En réalité , les composantes des réactions \vec{A} et \vec{B} sont des réactions totales exercées sur l'axe du solide en rotation . Ces réactions comprennent simultanément, les efforts statiques et les efforts dynamiques. De ce fait , on peut écrire:

$$A_{x'} = A_{x_s'} + A_{x_d'} \quad , \quad B_{x'} = B_{x_s'} + B_{x_d'} \quad (2.19)$$

$$A_{y'} = A_{y_s'} + A_{y_d'} \quad , \quad B_{y'} = B_{y_s'} + B_{y_d'}$$

Les indices s et d sont utilisés respectivement pour statique et dynamique .

Les réactions statiques sont obtenues à partir des conditions d'équilibre statique d'un solide soumis aux forces extérieures $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \dots, \vec{A}_s, \vec{B}_s$ et \vec{P} . Dans notre cas, on obtient :

$$\begin{cases} Fx'_s + Ax'_s + Bx'_s = 0; \\ Fy'_s + Ay'_s + By'_s = 0; \\ Mx'(\bar{F}) + aAy'_s - bBy'_s = 0; \\ My'(\bar{F}) + bBx'_s - aAx'_s = 0; \\ \text{et} \\ Fz'_s + Az'_s + Bz'_s = 0. \end{cases} \quad (2.20)$$

On détermine les réactions dynamiques à partir de (2.1) et en tenant compte de (2.2) et (2.3), ce qui donne :

$$\begin{cases} -M(y'_c \ddot{\vartheta} + x'_c \dot{\vartheta}^2) = Ax'_d + Bx'_d \\ M(x'_c \ddot{\vartheta} - y'_c \dot{\vartheta}^2) = Ay'_d + By'_d \\ Ix'_z \ddot{\vartheta} + Iy'_z \dot{\vartheta}^2 = aAy'_d - bBy'_d \\ -Iy'_z \ddot{\vartheta} - Ix'_z \dot{\vartheta}^2 = -aAx'_d + bBx'_d \end{cases} \quad (2.21)$$

Les modules des réactions dynamiques sont :

$$A_d = \sqrt{A_{x'_d}^2 + A_{y'_d}^2} \quad ,$$

et

$$B_d = \sqrt{B_{x'_d}^2 + B_{y'_d}^2} \quad .$$

2.1.3.2 / ANALYSES DES RESULTATS :

Les réactions dynamiques A_d et B_d exprimées dans le repère $R'(ox',y',z')$ sont déterminées à partir de (2.21). Le repère étant lié au solide, on peut dire que les réactions dynamiques changent de sens et de direction pendant la rotation du solide.

\vec{A}_d et \vec{B}_d sont appelées « *forces pulsatoires* » de période $2\pi / \omega$ [3]. Leurs influences sur les machines sont nuisibles et indésirables. Il y a apparition de bruit, de vibrations, de fatigue du matériau, usure,

Etant donné que \vec{A}_d et \vec{B}_d dépendent de ω^2 , leurs influences sont d'autant plus néfastes pour les grandes vitesses de rotation et que plusieurs machines fonctionnent à de telles vitesses.

Dans le domaine de l'élaboration, de la conception et de la construction des divers machines et mécanismes, on essaie d'établir les conditions pour lesquelles les réactions dynamiques soient nulles.

2.1.4 / SOLIDE PARFAITEMENT EQUILIBRE :

2.1.4.1 / CONDITIONS POUR LESQUELLES LES REACTIONS DYNAMIQUES SONT NULLES :

Lors de la construction des diverses machines et mécanismes, il est nécessaire de donner les conditions pour lesquelles le système mécanique est parfaitement équilibré. Pour un cas idéal, on a

$$Ax'_d = Ay'_d = Bx'_d = By'_d = 0 \quad (2.22)$$

En remplaçant l'expression (2.22) dans (2.21), on obtient:

$$\left\{ \begin{array}{l} x'_c \ddot{\theta} - y'_c \dot{\theta}^2 = 0, \\ x'_c \dot{\theta}^2 + y'_c \ddot{\theta} = 0, \\ \text{et} \\ Ix'z' \ddot{\theta} - Iy'z' \dot{\theta}^2 = 0, \\ Ix'z' \dot{\theta}^2 + Iy'z' \ddot{\theta} = 0. \end{array} \right. \quad (2.23)$$

Les deux systèmes d'équations homogènes linéaires (2.23), servent à la détermination de l'abscisse x'_c et de l'ordonnée y'_c du centre de masse du solide ainsi que des produits d'inertie $Iy'z'$ et $Ix'z'$.

Le système d'équations (2.23) a un même et unique déterminant DELT qui est différent de zéro,

$$DEL T = \begin{vmatrix} \ddot{\theta} & -\dot{\theta}^2 \\ -\dot{\theta}^2 & \ddot{\theta} \end{vmatrix} = \ddot{\theta}^2 + \dot{\theta}^4 \quad (2.24)$$

La vitesse angulaire $\dot{\theta}$ et l'accélération angulaire $\ddot{\theta}$ ne sont pas nulles en même temps [3]. Les solutions de l'équation (2.23) sont :

$$\begin{cases} x'_c = y'_c = 0; \\ \text{et} \\ Ix'z' = Iy'z' = 0. \end{cases} \quad (2.25)$$

Si les conditions (2.25) sont satisfaites, les réactions dynamiques \vec{A}_d et \vec{B}_d sont nulles. Ce sont de conditions nécessaires et suffisantes. En réalité ceci est obtenu pour un cas idéal de machine.

Pour que les efforts dynamiques exercés sur l'axe de rotation soient nuls, il faut et il suffit que l'axe de rotation soit axe principal (central) d'inertie (2.25). Lorsque les conditions (2.25) sont remplies, on dit que le solide est **parfaitement équilibré**. L'axe de rotation est appelé axe libre de rotation.

2.2 / ROTATION D'UN SOLIDE AUTOUR D'UN AXE FIXE :

2.2.1/ EQUILIBRE STATIQUE ET DYNAMIQUE : [39]

Soit un repère fixe $R_0 (x_0, y_0, z_0)$ dont l'axe z_0 est l'axe de rotation du solide et soit un deuxième repère $R_1 (\xi, \eta, \zeta)$ lié au solide dont les axes ξ, η, ζ sont les axes principaux centraux d'inertie. Le centre de masse G se trouve dans le plan (x_0, y_0)

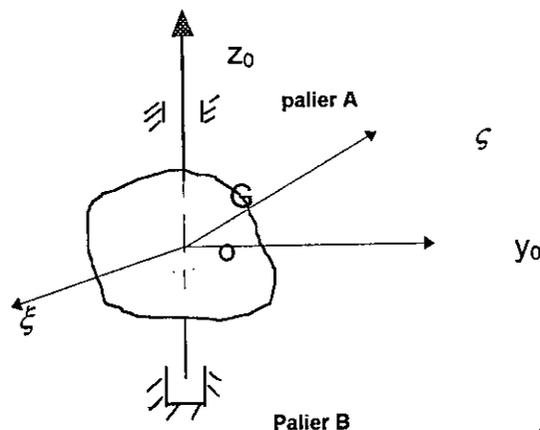


FIGURE 2.2

Schéma d'un solide en rotation autour d'un axe vertical

La loi fondamentale de la dynamique donne les équations du mouvement.

$$\sum \vec{F} = m \cdot \vec{a}_G = m [\vec{\varepsilon} \wedge \vec{r}_{OG} - \omega^2 \vec{r}_{OG}] \quad (2.26)$$

et
$$\vec{M}_G = [J_G] \cdot \vec{\varepsilon} + \vec{\omega} \wedge \vec{k}_G = \dot{\vec{k}} \quad (2.27)$$

Avec , m : masse du solide et ε : accélération angulaire.

Pour que le solide soit équilibré statiquement, il faut que la résultante ou $\sum \vec{F}$ des forces extérieures soit nulle, donc :

$$\vec{\varepsilon} \wedge \vec{r}_{OG} - \omega^2 \vec{r}_{OG} = \vec{0}$$

Etant donné que les deux vecteurs accélérations $\vec{\varepsilon} \wedge \vec{r}_{OG}$ et $\omega^2 \vec{r}_{OG}$ sont perpendiculaires , il faut que $r_{OG} = e$.

La condition nécessaire de l'équilibre statique consiste en ce que le centre de masse du solide doit être sur l'axe de rotation, c'est - à - dire $e=0$.

Pour avoir un équilibrage dynamique (équilibrage total) il faut que $\sum \vec{F}$ et le moment \vec{M}_G , soient nuls donc:

$$\dot{\vec{K}} = \vec{M}_G = \vec{0} \quad \text{d'où}$$

$$\vec{K}_G = [J_G] \vec{\omega} = Cst.$$

Le vecteur moment cinétique ne peut être constant que s'il est parallèle à l'axe de rotation , donc

$$\dot{\vec{K}}_G = [J] \varepsilon = \vec{0}, \quad (2.28)$$

D'où $\vec{\varepsilon} = \vec{0}$.

La condition signifie que l'axe de rotation est parallèle à l'un des axes principaux centraux d'inertie .

En conclusion, les conditions nécessaires et suffisantes de l'équilibrage dynamique d'un rotor sont que l'un des axes principaux centraux d'inertie coïncide avec l'axe de rotation et que la rotation soit uniforme :

$$\begin{aligned} \vec{a}_G &= \vec{0}; \\ \vec{\varepsilon} &= \vec{0}; \\ \vec{\omega} & // \vec{K}_G \end{aligned} \quad (2.29)$$

2.3. / ROTATION D'UN SOLIDE (ROTOR) AUTOUR D'UN AXE FIXE : [39]

Lorsque le centre de masse ne se trouve pas sur l'axe de rotation, on a un déséquilibre dans notre système. Ce phénomène crée des forces tournantes au niveau du rotor et ces dernières provoquent des forces agressives dans les paliers

Ces dernières forces varient continuellement avec la vitesse de rotation. La détermination des réactions dans les paliers est nécessaire.

On étudie des modèles de machines qui se rapportent à celles existantes sur le marché Algérien.

On examine deux types de machines tournantes qui sont les séparateurs et les centrifugeuses et qui présentent des spécificités propres à elles .

2.3.1/ DETERMINATION DES FORCES AUX PALIERS

On considère le modèle de la figure 2.3 pour déterminer les sollicitations au niveau des deux paliers A et B avec,

$R_0(x_0, y_0, z_0)$: repère fixe (galiléen) où les lois de la dynamique sont valables.

$R_1(\xi, \eta, \zeta)$: repère lié au solide dont les axes ξ, η, ζ sont des axes principaux centraux d'inertie du disque

$R_2(x, y, z)$: repère lié au solide dont l'origine est le centre de masse. L'axe z est vertical.

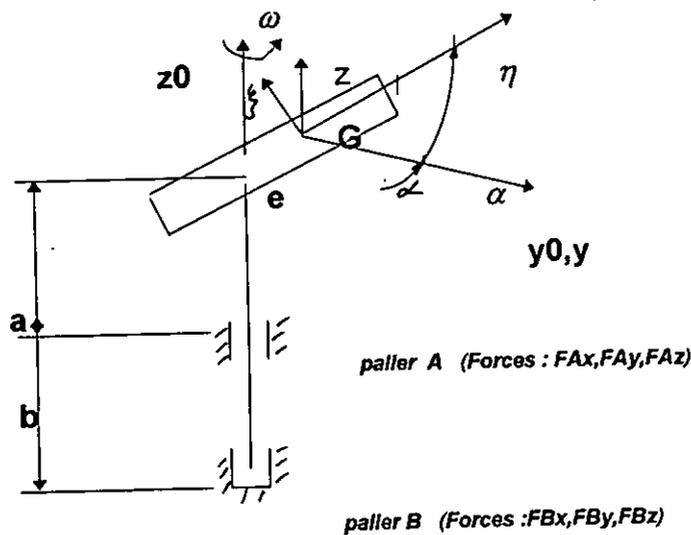


Figure 2.3
rotor en rotation à deux pallers

2. 3.2 / DETERMINATION DES MOMENTS D'INERTIE [25,28,39]

Les éléments du tenseur d'inertie sont donnés par :

$$\begin{aligned}
 J_{\zeta} &= \int r^2 dm = \int_0^R r^2 2r \pi h \mu dr = 1/2 MR^2 \\
 J_{\zeta\eta} &= \int \zeta^2 dm = \int_{-h/2}^{h/2} \zeta^2 R^2 \pi \mu dr = Mh^2 / 12 \\
 J_{\xi} &= J_{\eta} = J_{\xi\eta} + J_{\zeta} = M(h^2 / 3 + R^2) / 4
 \end{aligned}
 \tag{2.30}$$

Pour exprimer le tenseur d'inertie dans le repère R_2 , après quelques considérations mathématiques on trouve :

$$[J_G]_{R_2} = \begin{bmatrix} J_x & -D_{xy} & -D_{xz} \\ -D_{yx} & J_y & -D_{yz} \\ -D_{zx} & -D_{zy} & J_z \end{bmatrix}_{R_2} = \begin{bmatrix} J_x & 0 & 0 \\ 0 & J_y & -D_{yz} \\ 0 & -D_{zy} & J_z \end{bmatrix}$$

En utilisant les équations (2.26) et (2.27) on obtient :

$$\begin{cases} \dot{\vec{K}} = \dot{\vec{K}}_G + \vec{\omega} \wedge \vec{r}_{OG} = \vec{r}_{GA} \wedge \vec{A} + \vec{r}_{GB} \wedge \vec{B} \\ \vec{A} + \vec{B} + M\vec{g} = M\vec{a}_G \end{cases}$$

avec $\vec{\omega} = [0, 0, \omega]_{/R_2}^T$

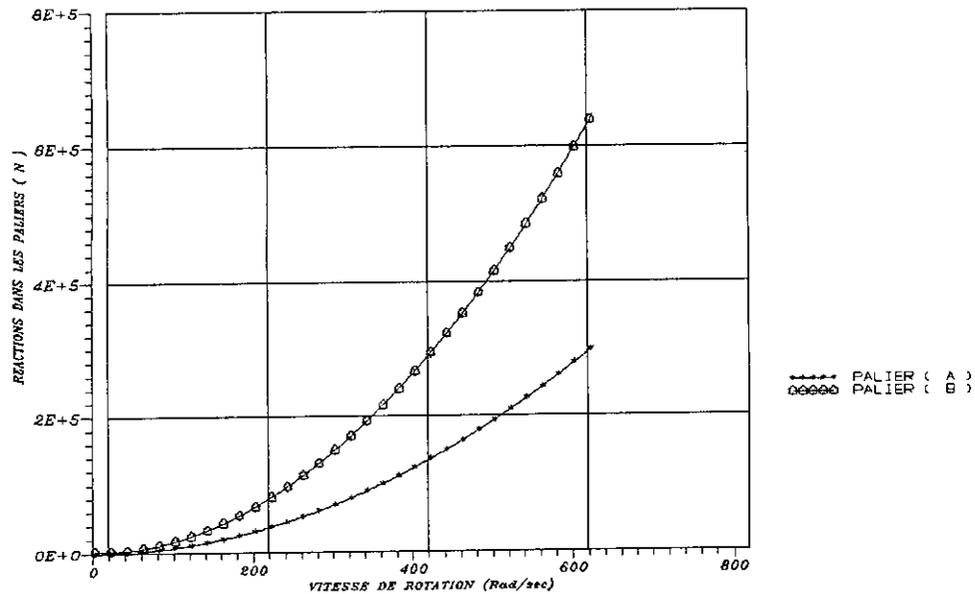
et $\vec{a} = -\omega^2 \vec{r}_{OG}$
 $\vec{K}_G = [J_G]_{R_2} \vec{\omega}$

Une fois les équations du mouvement établies (voir annexe A), on procède à une programmation en langage turbo-pascal (version 7.0). On détermine l'influence des forces tournantes dans les paliers en fonction de la vitesse de rotation.

L'application numérique est donnée graphiquement (voir graphique 2.1)
 Une première approche est faite dans le cas du séparateur

Vitesse de Rotation Rad / sec	Masse du rotor (Kg)	g (m/s ²)	a (mm)	b (mm)	R (mm)
625	294	9.81	570	122.25	230

Les résultats de l'application sont donnés sous forme d'un graphe qui sera interprété (graphe 2.1)



Graph 2.1
les forces tournant agissant dans les paliers
en fonction de la vitesse de rotation

On remarque que le palier B subit plus d'efforts que le palier A. La vitesse de rotation varie de zéro jusqu'à la vitesse de rotation utilisée.

Plusieurs modèles ont été développés pour l'analyse dynamique d'un arbre vertical. On citera dans cette étude quelques approches et on détaillera un des modèles. On considère deux types d'arbres, libres à l'une de leurs extrémités. Ces modèles s'appliquent aux problèmes des centrifugeuses et des séparateurs. Le but de cette étude (déterminations des forces tournantes aux paliers) est de déterminer les coefficients des raideurs et d'amortissements des paliers (voir Annexe C), les coefficients peuvent être donnés comme suit :

$$\begin{aligned} f_x &= -K_{xx}x - C_{xx}\dot{x} - K_{xy}y - C_{xy}\dot{y} \quad , \\ f_y &= -K_{yx}x - C_{yx}\dot{x} - K_{yy}y - C_{yy}\dot{y} \quad . \end{aligned}$$

Ces coefficients sont généralement calculés numériquement ou déterminés expérimentalement . Après la détermination de ces coefficients par les abaques on les introduit dans les équations du mouvement dans le chapitre suivant .

CHAPITRE III

III / LES MODELES MATHEMATIQUE DES MACHINES A ARBRES VERTICAUX

3.1 / INTRODUCTION :

Le concepteur doit prédire aussi précisément que possible les réactions de l'objet projeté aux diverses sollicitations du milieu dans lequel il évolue. Préalablement à la fabrication, la connaissance de certaines manifestations, mises en évidence par l'observation ou l'expérimentation, est essentielle pour le constructeur.

L'état des connaissances à un instant donné et la complexité d'une ligne d'arbres, par exemple, conduisent à substituer à la réalité des esquisses simplifiées ou modèles auxquels s'appliquent les lois de la physique, chaque modèle exprimant l'une des manifestations de l'objet [1]. Ainsi, il est nécessaire les différents modèles des lignes d'arbres de :

- Réaliser l'équilibrage,
- Connaître les fréquences propres des vibrations de torsion, de flexion ou axiales,
- Déterminer les amplitudes en quelques points particuliers, . . .

3.2 / MODELE MATHEMATIQUE POUR LE TYPE I ET TYPE II :

On appelle une machine de **type I**, lorsque l'arbre est encastré du haut et libre en bas . Et on appelle une machine de **type II** lorsque l'une des extrémités celle de haut est libre et celle de bas est encastrée.

De nombreuses structures sont assimilées au modèle du type I. Citons le cas des centrifugeuses pendulaires. Pour le type II, on cite les séparateurs (voir figure 3.1). Pour les machines à arbres verticaux les modèles mathématiques considérés sont :

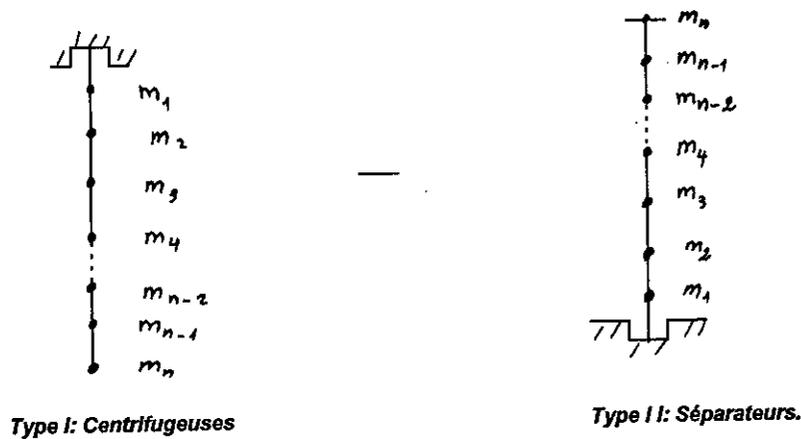


Figure 3.1
Schémas conventionnels pour des modèles de machines
des type I et II

3.2.1 / MODELE MATHEMATIQUE DE TYPE I :

Un des modèles qu'on puisse proposer dans ce cas est le pendule physique. On suppose l'arbre parfaitement rigide et tournant par gravité autour d'un axe horizontal fixe ne passant pas par son centre de masse à une vitesse constante [3,35].

On néglige les forces de frottement et la résistance de l'air. On suppose dans ce cas que la masse M du pendule pesant est concentrée en son centre de masse C . I_z est le moment d'inertie du pendule par rapport à l'axe O .

S'il se produit un mouvement latéral défini par un θ , la vitesse du centre C peut se décomposer en deux composantes : Une vitesse latérale ($a\dot{\theta}$) et une vitesse de rotation autour de l'axe $O-O$ égale à $\Omega a \sin\theta = \Omega a \theta$ provoquant un effort centrifuge [31].

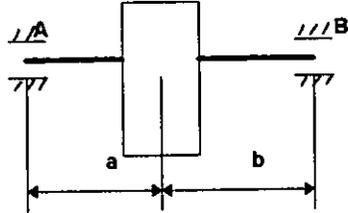


Figure 3.2 b

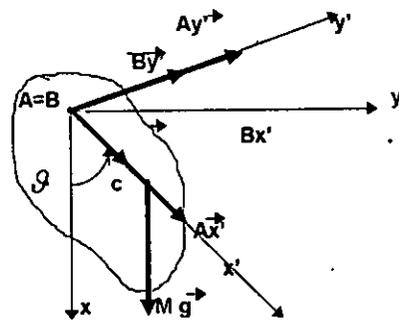


Figure 3.2 a

Figure 3.2:

Vue schématique d'un pendule pesant

L'énergie cinétique du système (figure 3.2)

$$T = 1/2(I_z \dot{\theta}^2 + M \Omega^2 a^2 \theta^2) \quad (3.1)$$

L'énergie potentielle du système due à la pesanteur est :

$$\pi = 1/2.M.g.a.\theta^2 \quad (3.2)$$

Les équations de Lagrange de la deuxième espèce donnent alors :

$$I_z.\ddot{\theta} + M.a.(g - \Omega^2 a).\theta = 0 \quad (3.3)$$

D'où la pulsation propre :
$$\omega^2 = \frac{M.a.(g - \Omega^2 a)}{I_z} \quad (3.4)$$

Il est clair que dans le cas où $\Omega = 0$, on retrouve l'expression classique de ω^2 .

En réalité, les arbres présentent une flexibilité. Néanmoins cette approche peut être envisagée pour une comparaison des résultats avec un cas réel modélisé autrement.

3.2.2 / CALCUL DES EFFORTS DANS LE CAS D'UN PENDULE :

On considère un pendule dont les vues sont indiquées sur les figure 3.2 a et f 3.2 b. Le repère R' est mobile et lié au solide; a et b sont respectivement les distances aux appuis A , B et $\Omega = 0$.

Les réactions \vec{A} et \vec{B} sont quelconques.

$$\begin{aligned}\vec{A} &= A_x \vec{i}' + A_y \vec{j}' , \\ \vec{B} &= B_x \vec{i}' + B_y \vec{j}' .\end{aligned}\quad (3.5)$$

\vec{A} et \vec{B} sont représentées sur la figure 3.2 b

on a :

$$\begin{aligned}\dot{\theta} &= \omega(t) \quad \text{et} \quad \ddot{\theta} = 0 , \\ x'_c &= l \quad \text{et} \quad y'_c = 0 .\end{aligned}$$

$$\begin{cases} -M x'_c \dot{\theta}^2 = M g \cos \theta + A_x + B_x , \\ M x'_c \ddot{\theta} = -M g \sin \theta + A_y + B_y , \\ 0 = a A_y - b B_y , \\ 0 = -a A_x + b B_x . \end{cases} \quad (3.6)$$

Après substitution on trouve :

$$B_x = -\left(M x'_c \dot{\theta}^2 + M g \cos \theta\right) \frac{a}{a+b} , \quad (3.7)$$

$$B_y = -\left(M x'_c \ddot{\theta} + M g \sin \theta\right) \frac{a}{a+b} .$$

Pour déterminer $\dot{\theta}$ et $\ddot{\theta}$ en fonction de θ , on considère l'équation du mouvement d'un pendule :

$$I_z \ddot{\theta} = -M g l \sin \theta$$

d'où :

$$\ddot{\theta} = -\frac{Mgl}{I_z} \sin \theta \quad (3.8)$$

Pour déterminer la vitesse angulaire, on fait la substitution suivante :

$$\ddot{\theta} = \dot{\theta} \frac{d\dot{\theta}}{d\theta} \quad (3.9)$$

$$\int \dot{\theta} d\dot{\theta} = \int -\frac{Mgl}{I_z} \sin \theta d\theta \quad (3.10)$$

On pose comme conditions initiales :

$$\text{à } t = 0 \text{ on a } \begin{cases} \dot{\theta} = 0 \\ \theta = \theta_0 \end{cases}$$

Après intégration on trouve :
$$\frac{\dot{\theta}^2}{2} = \frac{Mgl}{I_z} (\cos \theta - \cos \theta_0) \quad (3.11)$$

En remplaçant la relation (3.10) dans les expressions (3.7), on trouve :

$$\left. \begin{aligned} B_x &= -\frac{Mgl}{I_z} [(2Mgl^2 + gI_z) \cos \theta - 2Mgl^2 \cos \theta] \\ B_y &= -\frac{aM}{I_z(a+b)} [(Mgl^2 - I_z g) \sin \theta] \\ \text{et} \\ A_x &= \frac{bM}{I_z(a+b)} [(2Mgl^2 + gI_z) \cos \theta - 2Mgl^2 \cos \theta] \\ A_y &= \frac{bM}{I_z(a+b)} [Mgl^2 - I_z g] \sin \theta \end{aligned} \right\} \quad (3.12)$$

On remarque que les composantes des réactions dépendent de plusieurs paramètres.

3.2.3 / MODELE MATHEMATIQUE POUR LE TYPE II : (voir figure 3.1)

Dans ce cas les modèles mathématiques du type I et II sont analogues. On se propose d'exposer en détail la méthode d'obtention des équations du mouvement.

On adopte une discrétisation de l'arbre en « n » noeud effectifs c'est à dire « n » degrés de liberté. Les masses sont concentrées aux noeuds. On a alors:

$$L = x_1 + x_2 + x_3 + \dots + x_{n-1} + x_n; \quad \text{la longueur totale de l'arbre;}$$

$$M = m_1 + m_2 + m_3 + \dots + m_{n-1} + m_n \quad \text{la masse totale de l'arbre.}$$

On a adopté la méthode des forces unitaires pour déterminer la matrice des coefficients d'influence [C]. Pour un arbre de diamètre uniforme, cette méthode nous conduit à une relation générale (décrite ultérieurement).

3.2.3.1 / ETABLISSEMENT DE LA MATRICE DES COEFFICIENTS

D'INFLUENCE:

(BASE THEORIQUE) CAS D'UNE POUTRE ENCASTREE- LIBRE.

Dans cette application on se propose de déterminer la déformée de la poutre encastree-libre dans ses mouvements en flexion. pour cela, nous sectionnons cette poutre en un certain nombre d'éléments égaux. Les masses de chaque élément sont supposées concentrées et reliées entre elles par des éléments poutre. Cette méthode nous permet d'obtenir les matrices des coefficients d'influence

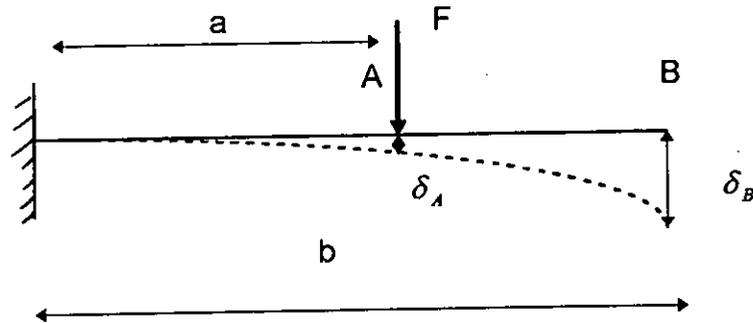
-Cas pour deux masses concentrés:

Figure 3.3

poutre encasté - libre en flexion

On applique une force unitaire $F=1$ en point A en trouve les déplacements suivants:

$$\text{Pour le point A : } \delta_A = \frac{F a^3}{3 EI}$$

$$\text{Pour le point B : } \delta_B = \frac{F a^3}{3 EI} + \frac{F a^2}{2 EI} (a+b)$$

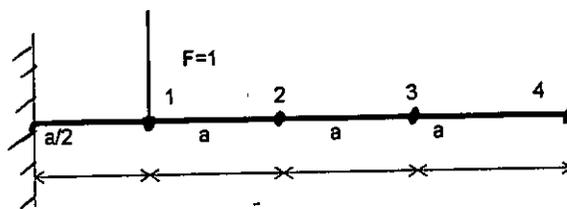
- Détermination des coefficients d'influence pour quatre noeuds:

Figure 3.4

force unitaire appliquée a une poutre encasté - libre

On applique une force unitaire au point 1 et on détermine les coefficients d'influence C_{1j} . On déplace la force unitaire au point 2 pour déterminer les coefficients en C_{2j} , tel que $j=1,4$; ainsi jusqu'au point 4 ; on trouve les coefficients d'influence du système : [26]

point 1	point 2	point 3	point 4
$C_{11} = \frac{a^3}{24 EI}$	$C_{21} = \frac{4 a^3}{24 EI}$	$C_{31} = \frac{7 a^3}{24 EI}$	$C_{41} = \frac{10 a^3}{24 EI}$
$C_{12} = \frac{4 a^3}{24 EI}$	$C_{22} = \frac{7 a^3}{24 EI}$	$C_{32} = \frac{54 a^3}{24 EI}$	$C_{42} = \frac{81 a^3}{24 EI}$
$C_{13} = \frac{7 a^3}{24 EI}$	$C_{23} = \frac{54 a^3}{24 EI}$	$C_{33} = \frac{28 a^3}{24 EI}$	$C_{43} = \frac{200 a^3}{24 EI}$
$C_{14} = \frac{10 a^3}{24 EI}$	$C_{24} = \frac{81 a^3}{24 EI}$	$C_{34} = \frac{200 a^3}{24 EI}$	$C_{44} = \frac{343 a^3}{24 EI}$

Pour généraliser ces coefficients pour N noeuds (ou N masses) concentrées, nous remarquons que la relation se présente comme une suite récurrente de terme général est :

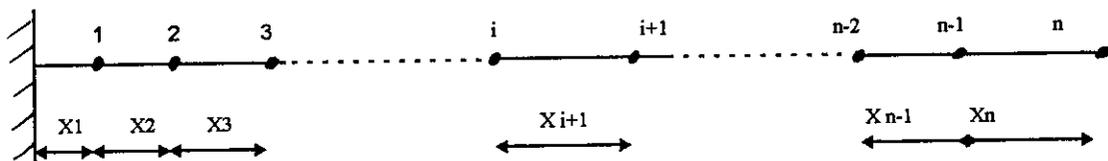


Figure 3.5
concentration de N masses sur une Poutre encastré-libre

Avec $i=1,n$ et $j=1,n$.

$$C_{ij} = \frac{\left(\sum_{k=1}^i x_k\right)^3}{3.E.Iz} + \frac{\left(\sum_{k=1}^i x_k\right)^2}{2.E.Iz} + \left(\sum_{k=1}^j x_k - \sum_{k=1}^i x_k\right) \quad (3.13)$$

Avec $i \geq j$

Cette matrice est l'inverse de la matrice de rigidité d'où :

$$[K] = [C]^{-1}$$

Cette méthode est applicable lorsque l'arbre est de diamètre uniforme. Lorsqu'il présente une géométrie complexe (changement de diamètre, usinage des logements de clavette ...etc.) , cette méthode d'approche devient insuffisante, et on est amené à utiliser une discrétisation par éléments finis [28].

3.2.3.2 / CALCUL DES ENERGIES CINETIQUE ET POTENTIELLE:

On considère un système discret de l'arbre où les masses sont concentrées aux nœuds. Pour chaque masse m_i , la vitesse est exprimée par la relation:

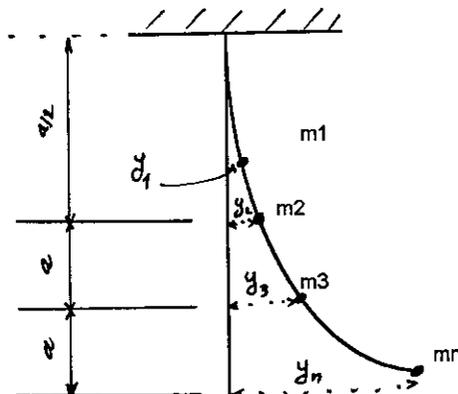


Figure 3.6

modèle mathématique d'un arbre en rotation

$$\vec{V}_i = \Omega \cdot y_i \cdot \vec{r} + \dot{y}_i \cdot \vec{i} \quad (3.14)$$

$(i = 1 \text{ à } n)$

C'est à dire :

$$V_i^2 = \Omega^2 \cdot y_i^2 + \dot{y}_i^2 \quad (3.15)$$

Où n est le nombre de masse aux noeuds, et Ω la vitesse de rotation de l'arbre. L'expression de l'énergie cinétique du système est :

$$T = \sum_{i=1}^n T_i = 1/2 \cdot \sum_{i=1}^n m_i (\Omega^2 \cdot y_i^2 + \dot{y}_i^2) \quad (3.16)$$

Cette expression peut se mettre sous la forme matricielle :

$$T = 1/2 \cdot \{\dot{y}\}' [M] \{\dot{y}\} + 1/2 \cdot \Omega^2 \{y\}' [M] \{y\} \quad (3.18)$$

L'énergie potentielle de système est donnée par l'expression :

$$\pi = 1/2 \cdot \{y\}' \cdot [K] \{y\}, \quad (3.19)$$

où

[K] : La matrice des rigidités statiques

[M] : La matrice des masses

{y} : Le vecteur des déplacements nodaux y_i

$\{\dot{y}\}$: Le vecteur des vitesses des points nodaux.

3.3 / EQUATIONS DU MOUVEMENT:

On ne s'intéressera en premier lieu à la flexion de l'arbre. En utilisant les équations de Lagrange de la deuxième espèce, on obtient alors les équations du mouvement suivantes:

$$[M].\{\ddot{y}\} + ([K] - \Omega^2[M]).\{y\} = \{0\}, \quad (3.20)$$

$$\text{Posons } [\chi] = [K] - \Omega^2[M], \quad (3.21)$$

$[\chi]$ est dite la matrice des rigidités dynamique à la vitesse de rotation Ω . $[\chi]$ reste symétrique si $[K]$ et $[M]$ le sont. On aboutit alors à l'équation du mouvement :

$$[M].\{\ddot{y}\} + [\chi]\{y\} = \{0\} \quad (3.22)$$

A la vitesse de rotation Ω donnée, on a une solution générale de l'équation :

$$\{y\} = [U]\text{Sin}(\omega.t + \varphi) \quad (3.23)$$

On remplace dans l'équation et après simplification, on aura :

$$([\chi] - \omega^2[M])\{U\} = \{0\} \quad (3.24)$$

La détermination des pulsations propres ω et des modes propres de vibration $[U]$ associés se fait à la vitesse de rotation Ω par des méthodes numériques (qui seront programmés sur l'ordinateur).

Pour cela, on varie la vitesse de rotation de la position d'arrêt jusqu'à la limite d'utilisation et on observe le comportement vibratoire de l'arbre dans chaque cas.

Il est évident qu'à l'arrêt ($\Omega = 0$), le problème se réduit à l'équation classique:

$$([K] - \omega^2 [M]) \{U\} = \{0\} \quad (3.25)$$

3.3.1. / METHODE DE CALCUL DES VITESSES CRITIQUES D'UN ARBRE

VERTICAL : [2,3,37]

3.3.1.1 / NOTION DE VITESSE CRITIQUE

On est conduit en ce moment à concevoir des machines tournantes dont les lignes d'arbre sont de plus en plus souples et les vitesses de rotation de plus en plus élevées. En conséquence ces machines sont davantage sensibles aux vibrations. A cet égard la source d'excitation la plus classique provient du balourd résiduel des parties tournantes qui induit une excitation harmonique dont la pulsation est égale à la vitesse angulaire de l'arbre et qui est en phase avec son mouvement rotatif. En régime établi, la réponse vibratoire de l'arbre présente un maximum quand cette vitesse coïncide avec la pulsation d'un mode propre vibratoire, de flexion ou de torsion.

La notion de « vitesse critique » correspond à une telle coïncidence qui rend l'excitation résonnante. Elle se distingue donc de celle d'instabilité, et de ce fait il est possible en pratique de faire tourner un arbre à une vitesse égale ou supérieure à une vitesse critique, pourvu que l'amortissement du système soit suffisant pour limiter l'amplitude vibratoire à un niveau acceptable.

Par définition, la vitesse critique Ω_c d'un arbre est la vitesse de rotation correspondant à la coïncidence entre une fréquence du mode propre ω et la fréquence de rotation Ω .

Pour trouver les vitesses critiques de rotation d'un arbre, il suffit de trouver les solutions de l'équation: $\Omega(\omega) = \omega$. Si on remplace ω par Ω dans les équations du mouvement, on obtient un nouveau problème aux valeurs propres:

$$([K] - 2\Omega^2 \cdot [M]) \cdot \{U\} = \{0\} \quad (3.26)$$

La résolution de ce P.V.P donnera toutes les vitesses critiques de rotation de l'arbre.

3.3.1.a/ APPLICATION NUMERIQUE

3.3.1.a.1/ CALCUL DES VALEURS PROPRES PAR METHODE DE STODOLA

On a vu que par la méthode des masses concentrées lors de l'étude d'un arbre vertical on aboutit aux coefficients d'influence dont la forme générale est donnée par l'expression (3.13).

Nous utilisons quatre noeuds (c'est - à - dire) quatre masses concentrées (figure 3.4)

On trouve la matrice des coefficients d'influence :

$$[C] = \frac{\alpha^3}{24 EI} \begin{bmatrix} 1 & 4 & 7 & 10 \\ 4 & 27 & 54 & 81 \\ 7 & 54 & 125 & 200 \\ 10 & 81 & 200 & 343 \end{bmatrix}$$

Avec $[K] = [C]^{-1}$ Matrice de rigidité

$$[M] = \begin{bmatrix} m_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & m_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & m_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & m_4 \end{bmatrix}$$

Equation de l'énergie (Lagrange) est donnée par l'expression (3.20), pour $\Omega = 0$

$$[M] \cdot \{\ddot{y}\} + ([K]) \cdot \{y\} = \{0\} \quad (3.27)$$

3.3.2 / RESOLUTION DU SYSTEME D'EQUATIONS

3.3.2.1/ METHODE DE LEVERIER :

Il est nécessaire de prêter une attention particulière pour la résolution des problèmes des valeurs propres d'une matrice. Dans ce cas on étudie l'équation caractéristique.

Soit une matrice du type :

$$[H] - \lambda[I] = \begin{bmatrix} h_{11} - \lambda & h_{12} & \dots & \dots & h_{1n} \\ h_{21} & h_{22} - \lambda & \dots & \dots & h_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ h_{n1} & h_{n2} & \dots & \dots & h_{nn} - \lambda \end{bmatrix}$$

Pour un grand d'équation, même la résolution du déterminant devient analytiquement compliquée pour cela, il existe différentes méthodes des résolution, parmi lesquelles on peut citer les méthodes de *LEVERIER*, de *KRILOV* et *DANILEVSKI*. L'objectif est de résoudre un polynôme du type :

$$P_n(\lambda) = \lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + a_2\lambda^{n-2} + \dots + a_n \quad (3.28)$$

Il faut calculer les coefficients a_1, a_2, \dots, a_n du polynôme (3.28).

Soient $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ les valeurs propres de la matrices $[H]$ d'ordre N d'éléments

$$h_{ij} \quad (i=1 \text{ à } n; j=1 \text{ à } n)$$

$$a_n = \left(-\frac{1}{n}\right) \left[S_n + \sum (a_i S_{n-i})\right] ,$$

Avec *et*

(3.29)

$$S_n = Sp(H^n) .$$

Où $Sp[H]$ représente la somme du spectre de la matrice (trace).

Or $n = 1, 2, \dots, m$ (m : ordre de la matrice).

On a élaboré un programme pour la méthode de LEVERIER, il fait partie du programme principal de LOBACHEVSKI et est noté LEV.

3.3.2.2/ VERIFICATION DU PROGRAMME LEV :

Dans la référence [26] un exemple a été traité analytiquement .

Soit la matrice $[H] = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 & 2 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}$,

Analytiquement on trouve comme polynôme caractéristique $[H]$:

$$P_4(\lambda) = \lambda^4 - 4\lambda^3 - 40\lambda^2 - 56\lambda - 20 .$$

Selon le programme LEV, on trouve exactement la même solution.

3.3.2.3/ METHODE DE LOBACHEVSKI :

3.3.2.3.1/ ALGORITHME: [26]

Soit un polynôme d'ordre n ,

$$a'_0 \lambda^n + a'_1 \lambda^{n-1} + a'_2 \lambda^{n-2} + \dots + a'_n = 0 .$$

a'_0 et a'_1 sont des constantes déterminés par le programme LEV, $i = 1, \dots, n$.

Chaque membre de ce polynôme est divisé par la constante a'o on obtient :

$$\lambda^n + a_1 \lambda^{n-1} + a_2 \lambda^{n-2} + \dots + a_n = 0 \quad (3.30)$$

La méthode de LOBACHEVSKI est utilisée pour la détermination des racines du polynôme (3.30). Par l'intermédiaire de cette méthode, on aboutit au tableau (3.1)

a) Généralisation (Formes compactes):

Après certaines constatations, on aboutit à la forme suivante, pour détermination des différents coefficients :

$$a_n^{(2^p)} = \left[a_n^{(2^{p-1})} \right]^2 + 2 \cdot \sum_{i=1}^n \left((-1)^i a_{n-i}^{(2^{p-1})} a_{n+i}^{(2^{p-1})} \right) \quad (3.31)$$

P : est le nombre d'itération (P = 1, ..., j)

n : est l'ordre de polynôme (n = 1, ..., i)

Les racines du polynôme sont :

$$X_n^{(2^p)} = \sqrt[2^p]{\frac{a_n^{(2^p)}}{a_{n-1}^{(2^p)}}} \quad (3.32)$$

Pour aboutir à l'expression (3.30) on a utilisé les expressions suivantes:

$$\left. \begin{aligned} a_1^{(2)} &= a_1^{(1)2} - 2.a_2^{(1)} , \\ a_2^{(2)} &= a_2^{(1)2} - 2.a_1^{(1)}a_3^{(1)} + 2.a_4^{(1)} , \\ &\dots \\ a_n^{(2)} &= a_n^{(1)2} - 2.a_{n-1}^{(1)}.a_{n-1}^{(1)} + \dots + 2.a_{n-n}^{(1)}.a_{n+n}^{(1)} . \end{aligned} \right\} \quad (3.33)$$

La P_i ème itération est:

$$a_n^{(2^p)} = a_n^{(2^{(p-1)2}} - 2.a_{n-1}^{(2^{(p-1)})}.a_{n+1}^{(2^{(p-1)})} + \dots + 2.a_{n-n}^{(2^{(p-1)})}.a_{n+n}^{(2^{(p-1)})} \quad (3.34)$$

Le nombre d'itération dépend du test d'arrêt , tel que :

$$| X_n^{(2^p)} - X_{n-1}^{(2^p)} | \leq \varepsilon$$

Avec ε petit paramètre choisi, il indique la précision désirée par l'utilisateur .

Malheureusement, vu la capacité de l'ordinateur , le langage utilisé (Fortran) et les exigences mathématiques de la méthode de Lobachevski, on ne peut se permettre d'utiliser le test d'arrêt à bienséant. On introduit directement le nombre d'itération maximal

3.3.3 / APPLICATION POUR UNE CENTRIFUGEUSE PENDULAIRE:

Dans ce paragraphe, nous nous proposons d'appliquer le même canevas pour l'étude d'une ligne d'arbre de centrifugeuse pendulaire. Cette ligne d'arbre est particulièrement intéressante d'une part à cause de sa simplicité et d'autre part à cause du nombre important des hypothèses qui doivent être faites pour conduire l'étude théorique.

3.3.3.1 / DESCRIPTION DE LA LIGNE D'ARBRE DE LA CENTRIFUGEUSE

La représentation schématique de la ligne d'arbre apparaît dans la référence [26] en détail. Pour procéder à l'étude du comportement dynamique de cette ligne d'arbre, nous formulons les principales hypothèses suivantes :

- Le rotor électrique entraîne l'arbre par l'intermédiaire d'un cardan. On admet que ce cardan découple parfaitement les mouvements de la partie supérieure et de la partie inférieure de telle sorte que l'étude de la ligne d'arbre se borne à la seule étude de cette partie inférieure,
- L'arbre est guidé à sa partie supérieure par deux roulements A et B qui sont assimilés à deux appuis élastiques,
- Les deux roulements sont solidaires d'un système rotulant qui développe un couple de rappel et des forces d'amortissement lesquelles prennent naissance à l'interface des parties mâle et femelle de la rotule. La ligne d'arbre peut être considérée comme un pendule d'où la dénomination de centrifugeuse pendulaire.

3.3.3.2/ DEFINITION DES CONDITION AUX LIMITES :

L'arbre de la centrifugeuse peut être considéré comme découplé de l'arbre du moteur électrique grâce au cardan. A sa partie inférieure, le moment fléchissant est nul et l'effort tranchant équilibre les forces d'inertie du bol. A sa partie supérieure, l'arbre de la centrifugeuse est guidé par les deux roulements. Le fonctionnement de l'ensemble roulements - rotules est difficile à appréhender.

Un des buts essentiels de l'étude sera précisément de définir les variations du comportement en fonction de la vitesse de rotation. Si l'introduction des données relatives à l'arbre et à son extrémité inférieure ne pose aucun problème, par contre, il n'en va pas de même pour l'introduction des données relatives à l'extrémité supérieure (trouver les relations mathématiques, et les données nécessaires à l'application numérique) . En plus , la linéarité qui est à la base de la résolution mathématique n'est certainement pas respectée.

3.3.4 / ETUDE THEORIQUE :

Les fréquences propres et les vitesses critiques de la ligne d'arbre dépendent de trois paramètres prépondérants :

- Les caractéristiques inertielles et élastiques de l'arbre,
- La condition à l'extrémité supérieure,
- La condition à l'extrémité inférieure.

Pour toutes ces raisons, il nous apparaît préférable de procéder à partir de considérations physiques très simples. Deux situations extrêmes peuvent se produire à l'extrémité supérieure: ou la rotule est complètement libre et la ligne d'arbre se comporte comme un pendule, ou la rotule est totalement bloquée et la ligne d'arbre se comporte comme une poutre encastree libre.

En appliquant la formule du pendule, on trouve [35]:

$$f_{p1} = 0.36 \text{ Hz}$$

Dans la configuration encastree-libre, et en appliquant les formules de la théorie des poutres exposée dans la référence [35], on trouve:

$$f_{p1} = 7.63 \text{ Hz}$$

La fréquence propre du premier mode de flexion aura une valeur comprise entre ces deux extrêmes. si on considère qu'une rotule se comporte comme un appui rigide dont le couple de rappel est nul et qu'un encastrement se comporte comme un appui rigide avec le couple de rappel infini, on peut calculer la fréquence propre pour n'importe quel couple intermédiaire.

Le même type de calcul peut être conduit pour déterminer la fréquence propre de la centrifugeuse pendulaire, on utilise des méthodes des éléments finis pour déterminer la rigidité et la masse du système, on trouve la première fréquence propre de la centrifugeuse en charge :

$$f_{p1} = 6.41 \text{ Hz}$$

Et la deuxième fréquence propre est trouvée :

$$f_{p2} = 11.48 \text{ Hz}$$

On remarque que la première fréquence propre pour le modèle d'une centrifugeuse obtenu par calcul se rapproche de celui de la référence [35].

3.3.5 / APPROCHE NUMERIQUE DU PROBLEME :

Dans cette étude, on est amené à résoudre trois types de problèmes aux valeurs propres :

- 1) Cas d'un arbre en rotation permanente avec la vitesse de rotation négligeable $\Omega \ll 0$: (voir l'équation (3.25)).
- 2) Cas de l'arbre en rotation: (voir l'équation (3.23)).
- 3) Cas de détermination des vitesses critiques: (voir l'équation (2.26)).

On note que dans les trois cas, les matrices des rigidités et des masses sont symétriques.

Pour la construction des matrices $[K]$ et $[M]$, on a utilisé la méthode des éléments finis. On opère à des corrections dynamiques de la matrice $[K]$ à la vitesse de rotation Ω pour obtenir les matrices $[\chi]$.

Dans le cas de la recherche des vitesses critiques, la correction se fait au niveau de la matrice des masses.

Pour la résolution des P.V.P, on utilise la méthode de Jacobi généralisée. (voir l'annexe).

3.3.6 / CONCLUSION :

On remarque que le palier B a une force tournante très importante comparativement au palier A. La charge axiale du rotor est soutenue par le palier B (palier à butées), et est ajoutée à la force créée par l'excentricité (graphe 3.1).

De cette étude, on doit retenir que l'alignement des lignes d'arbres verticaux de grande puissance ne peut être obtenu que si on a déterminé :

- La déformée statique de l'arbre, soit par le calcul, soit par mesure;
- Les jeux des paliers, c'est - à - dire l'épaisseur des films d'huile, (comportement dynamique des paliers);
- Les dilatations thermiques différentielles pour lesquelles on possède maintenant une instrumentation adéquate.

Le graphe de la variation des pulsations propres du système en fonction des vitesses de rotation de l'arbre donne lieu aux lectures suivantes :

a/ L'influence de la vitesse de rotation sur la première fréquence propre du système est très importante.

b/ Cette influence l'est moins pour la seconde et la troisième fréquence propre.

c/ A partir de la troisième fréquence propre, l'influence de la vitesse de rotation sur les fréquences du système devient négligeable. on a : $\omega_n \cong \omega_{0n}$.

où ω_n est la n ième pulsation propre à la vitesse de rotation Ω .

d/ Les résultats concernant les vitesses critiques obtenues par la méthode aux valeurs propres sont compatibles avec les résultats obtenus graphiquement.

$\Omega_c = 289.7789 \text{ rad/s}$, soit $N_c = 2767.266 \text{ tr/min}$.

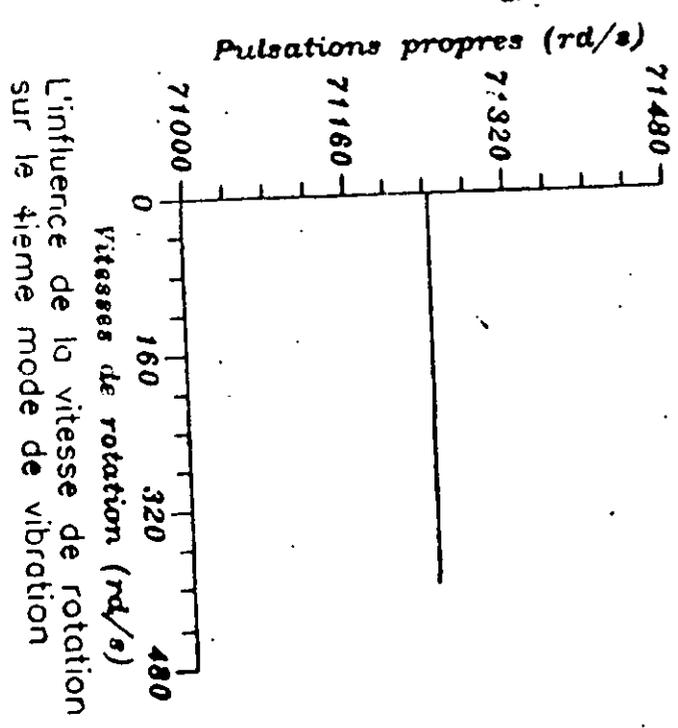
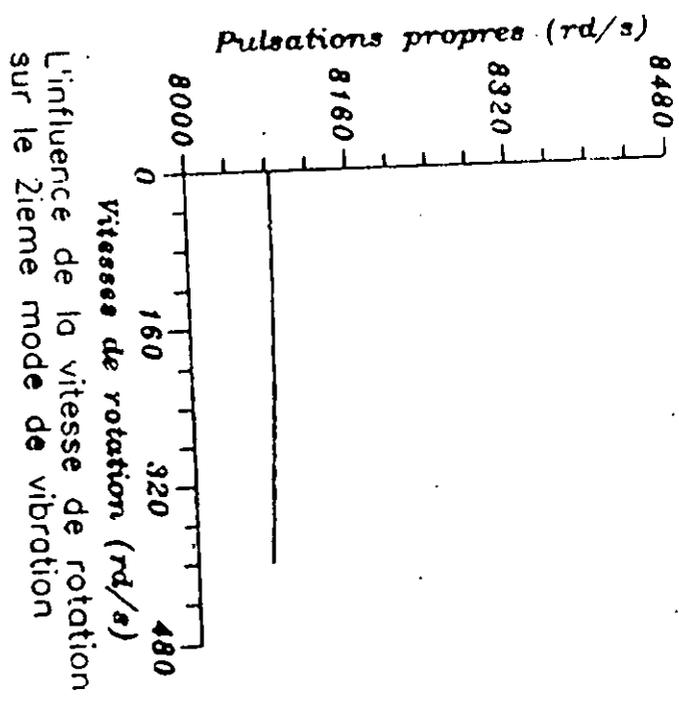
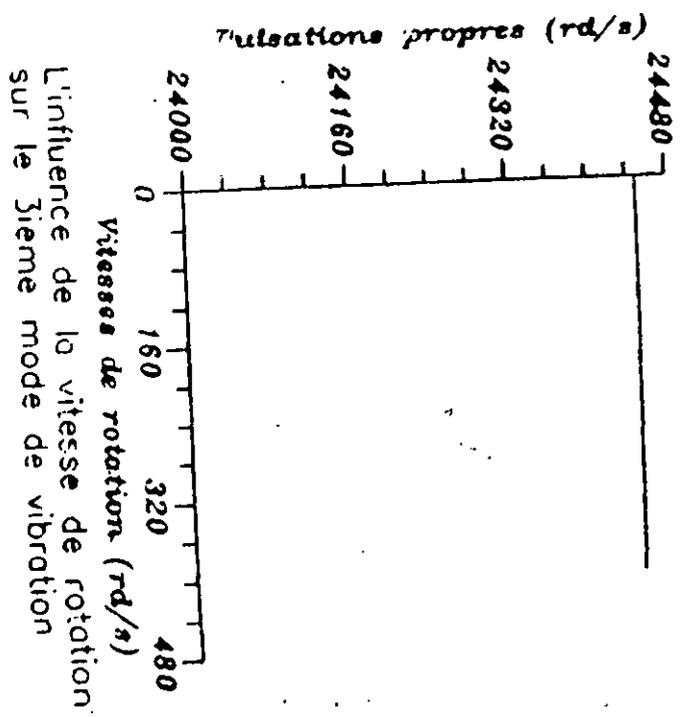
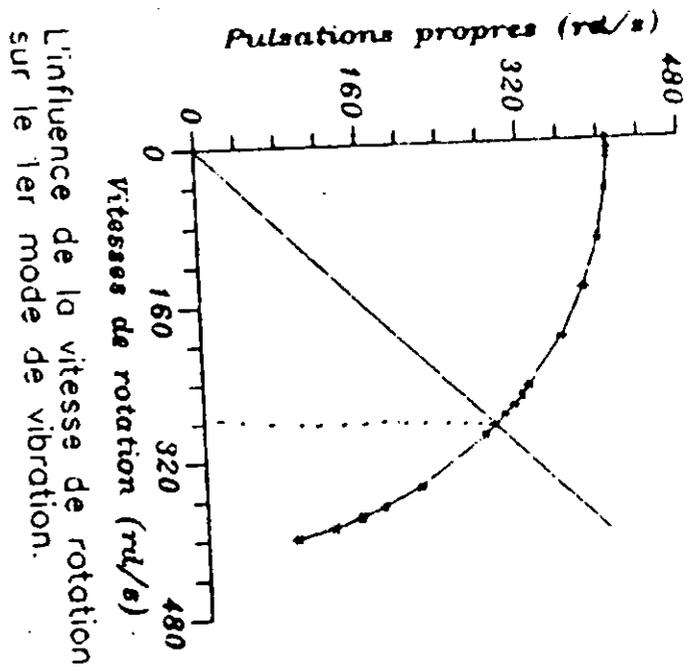


Figure .3. Résultats obtenues sur un Séparateur KDA 18-02-177
 Vitesse de rotation maxi: 5500 tr/min (576 rd/s)

3.3.6.1 / VIBRATIONS DE TORSION : [1,17,19,20]

L'origine de divers problèmes est souvent liée aux vibrations de torsion. Plusieurs cas en dynamique des machines conduisent à la prise en considération des vibrations de torsion .

Parmi les particularités des vibrations de torsion, on cite :

- Faible amortissement structural,
- Elles peuvent atteindre des amplitudes excessives, . . .

L'étude [20] porte particulièrement sur la problématique des vibrations de torsion dans les turbo-machines alors que [18] les analyse dans le cas des installations propulsives marines.

La référence [19] traite les vibrations de torsion et de flexion dans le but de la motorisation d'un avion léger.

Des algorithmes de calcul des vitesses critiques des lignes d'arbre [2,17] , la modélisation et l'élaboration des programmes pour simuler des systèmes mécaniques [17],. . . sont développés.

Dans ce présent travail, lors de l'analyse du comportement dynamique de modèles se machines tournantes, on s'occupe particulièrement, des vibrations dues à la flexion. On attire l'attention que les résultats obtenus dans les différentes références citées peuvent êtres utilisés. Ils ne feront qu'enrichir l'aspect scientifique de ce travail.

3.3.7 / MODELISATION MATHEMATIQUE ET APPLICATIONS

3.3.7. 1 / INTRODUCTION:

On s'intéresse principalement aux modes propres des structures. On se propose de montrer, comment à partir de ces données de base et de certaines approches il est possible de cerner le comportement dynamique d'un système dans toute la plage des fréquences d'utilisation. En particulier, on détermine la zone d'antirésonance pour une excitation donnée, (la vibration est minimal) . L'étude dynamique nous permet de dimensionner, des organes d'une machine à partir des résultats des études vibratoires .

En conséquence, quelque soit l'angle sous lequel on examine le problème (études, essais ou exploitation) il apparaît que la connaissance du comportement vibratoire du système dans toute la plage d'utilisation est indispensable . Pour se rapprocher de la réalité nous nous proposons d'étudier un type de machine disponible sur marché national qui est le « séparateur » .

3.3.7. 2 / EQUATION DU MOUVEMENT:

Soit une modélisation mathématique simple du séparateur. On considère le modèle usuel disques-rotor vertical.

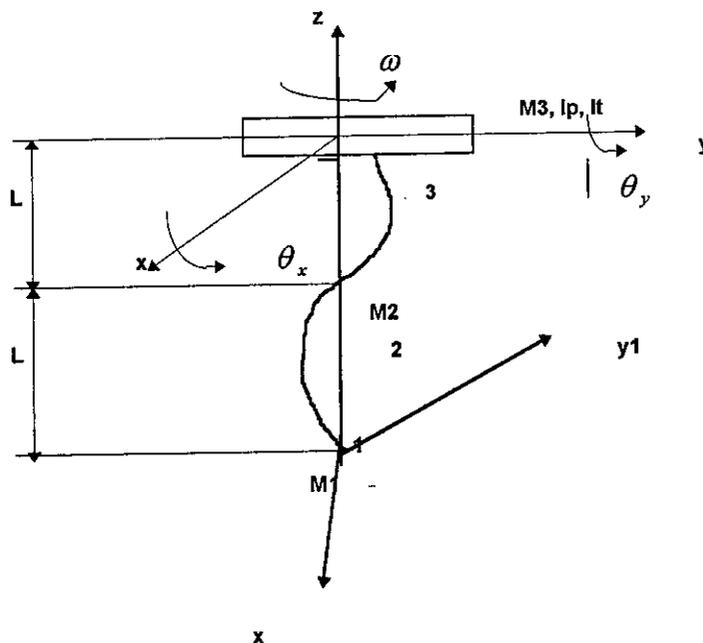


Figure 3.7
modélisation d'un séparateur

Les coordonnées généralisées du système (Fig 7.1) sont:

$$q = \{ x_1, y_1, x_2, y_2, x_3, y_3, \theta_x, \theta_y \}$$

On considère les déformations de la ligne d'arbre dans les plans XOY et YOZ pour calculer l'énergie potentielle et l'énergie cinétique du système .

Le système d'équations différentielles du mouvement est obtenu à partir de:

$$\frac{d}{dt} \frac{\delta T}{\delta \dot{q}_i} - \frac{\delta T}{\delta q_i} = - \frac{\delta \pi}{\delta q_i} \quad (3.35)$$

3.3.7 .2.1/ ENERGIE POTENTIELLE ET CINETIQUE [1] :

a) ENERGIE POTENTIELLE:

L'énergie potentielle de système de la figure 3.7 et donnée par la relation [25].

$$\pi = \int_0^{2\pi} \frac{Mxy^2 + Myz^2}{2EI} dz \quad (3.36)$$

On suppose que la section de l'arbre est uniforme, homogène et isotrope donc:

$$\begin{aligned} Mxy &= EI \ddot{x} \\ Myz &= EI \ddot{y} \end{aligned} \quad (3.37)$$

Vu la discontinuité des moments dans l'arbre au niveau de $Z = L$, on intègre en deux parties, la première intégrale varie de $Z = 0$ à L et la deuxième varie de $Z = L$ à $2L$

- Dans le plans XOZ : [40]

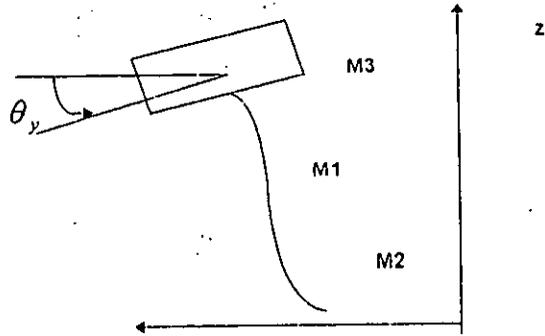


Figure 3.8
Représentation dans le plan xoz

$$\ddot{x} = \frac{2}{L^2} \begin{cases} x_1 - x_2 + \theta_y L & \text{pour } 0 \leq z < L \\ x_3 - x_2 - \theta_y L & \text{pour } L \leq z \leq L \end{cases} \quad (3.38)$$

- Dans le plan YoZ

$$\ddot{y} = \frac{2}{L} \begin{cases} y_1 - y_2 - \theta_x L & \text{pour } 0 \leq z < L \\ y_3 - y_2 + \theta_x L & \text{pour } L \leq z \leq 2L \end{cases} \quad (3.39)$$

A partir des équations (3.37) , (3.38), (3.36) et (3.35) on obtient l'expression de l'énergie potentielle:

a) - Energie potentielle [4,22,40]

$$\pi = \frac{2EI}{L^3} (x_1^2 + 2x_2^2 + x_3^2 - 2x_1x_2 - 2x_2x_3 + 2x_1\theta_y L - 2x_3\theta_y L + 2\theta_y^2 L^2 + y_1^2 + 2y_2^2 + y_3^2 - 2y_1y_2 - 2y_2y_3 - 2y_1\theta_x L + 2y_3\theta_x L + 2\theta_x^2 L^2) \dots (3.40)$$

b) - Energie cinétique [26,37]

L'énergie cinétique est la somme des énergies cinétiques des points matériels constituant le système.

$$T = \sum_{i=1}^{n=3} T_i \quad (3.41)$$

$$T = 1/2 \left[\sum_{i=1}^{n=3} m_i (\dot{x}_i^2 + \dot{y}_i^2) + \sum \omega^2 m_i (x_i^2 + y_i^2) \right] + 1/2 I_i (\dot{\theta}_x^2 + \dot{\theta}_y^2)$$

En considérant l'équation de Lagrange de la deuxième espèce, on aboutit au système d'équations différentielles suivant :

$$m_1 \ddot{x}_1 + \left(\frac{4EI}{L^3} - \omega^2 m_1 \right) x_1 - \frac{4EI}{L^3} x_2 + \frac{4EI}{L^2} \theta_y = 0,$$

$$m_1 \ddot{y}_1 + \left(\frac{4EI}{L^3} - \omega^2 m_1 \right) y_1 - \frac{4EI}{L^3} y_2 + \frac{4EI}{L^2} \theta_x = 0,$$

$$m_2 \ddot{x}_2 + \left(\frac{8EI}{L^3} - \omega^2 m_2 \right) x_2 - \frac{4EI}{L^3} x_1 - \frac{4EI}{L^2} x_3 = 0,$$

$$m_2 \ddot{y}_2 + \left(\frac{8EI}{L^3} - \omega^2 m_2 \right) y_2 - \frac{4EI}{L^3} y_1 - \frac{4EI}{L^2} y_3 = 0,$$

$$m_3 \ddot{x}_3 + \left(\frac{4EI}{L^3} - \omega^2 m_3 \right) x_3 - \frac{4EI}{L^3} x_2 - \frac{4EI}{L^2} \theta_y = 0,$$

$$m_3 \ddot{y}_3 + \left(\frac{4EI}{L^3} - \omega^2 m_3 \right) y_3 - \frac{4EI}{L^3} y_2 + \frac{4EI}{L^2} \theta_x = 0,$$

$$I_i \ddot{\theta}_x + \left(\frac{8EI}{L} \right) \theta_x - \frac{4EI}{L^2} y_1 + \frac{4EI}{L^2} y_3 = 0,$$

$$I_i \ddot{\theta}_y + \left(\frac{8EI}{L} \right) \theta_y + \frac{4EI}{L^2} x_1 - \frac{4EI}{L^2} x_3 = 0.$$
(3.42)

Ecrivons les équations sous forme matricielle, avec

$$A_i = \frac{4EI}{L^3} - \omega^2 m_i$$

$$B = \frac{4EI}{L^3}$$

$$C_i = \frac{8EI}{L^3} - \omega^2 m_i$$

$$i = 1, 2, 3.$$

$$\begin{bmatrix} m_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & m_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & m_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & & m_2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & & & m_3 & 0 & 0 & 0 \\ S & Y & M & & & m_3 & 0 & 0 \\ & & & & & & I_x & 0 \\ & & & & & & & I_y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{y}_1 \\ \ddot{x}_2 \\ \ddot{y}_2 \\ \ddot{x}_3 \\ \ddot{y}_3 \\ \ddot{\theta}_x \\ \ddot{\theta}_y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} A_1 & 0 & -B & 0 & 0 & 0 & 0 & BL \\ A_1 & 0 & -B & 0 & 0 & -BL & 0 & 0 \\ & C_2 & & -B & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & C_2 & 0 & -B & 0 & 0 & 0 \\ & & & A_3 & 0 & 0 & -BL & 0 \\ S & Y & M & & A_3 & BL & 0 & 0 \\ & & & & & 2BL^2 & 0 & 0 \\ & & & & & & 2BL^2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ x_2 \\ y_2 \\ x_3 \\ y_3 \\ \theta_x \\ \theta_y \end{bmatrix} \quad (7.9)$$

3.3.7.3/ L'EFFET GYROSCOPIQUE

L'existence d'un moment polaire donne naissance à un moment gyroscopique

D'après la deuxième loi de NEWTON pour les corps non déformables (solides) en rotation, on utilise la relation classique ,

$$\vec{H} = \dot{\theta}_x I_x \vec{i} + \dot{\theta}_y \vec{j} + \omega I_p \vec{k} \quad (3.42)$$

Avec \vec{H} : vecteur de moment cinétique .

$\dot{\vec{H}} = \vec{M}$: moment des forcées extérieures.

Dans ce cas on considère que la vitesse de rotation est constante. On assimile le bol du séparateur [26] à un disque tournant à la vitesse de rotation avec les considérations suivantes:

$$I_t = \frac{1}{4} m_3 R^2$$

et

$$I_p = \frac{1}{2} m_3 R^2$$

(3.43)

$$\dot{\vec{H}} = \frac{d\vec{H}}{dt} = \frac{\delta \vec{H}}{\delta t} + \vec{\omega} \wedge \vec{H}$$

Avec $\vec{\omega} = \theta_x \vec{i} + \theta_y \vec{j} + \omega \vec{k}$.

Le moment cinétique devient :

$$\vec{H} = \theta_x I_t \vec{i} + \theta_y I_t \vec{j} + \omega I_p \vec{k} \quad (3.44)$$

On remplace l'équation (3.44), dans l'équation (3.43), et puis on dérive par rapport au temps, on aboutit à :

$$\dot{\vec{H}} = (\ddot{\theta}_x I_t + I_p \omega \dot{\theta}_y) \vec{i} + (\ddot{\theta}_y I_t - \omega I_p \dot{\theta}_x) \vec{j}$$

Le moment des forces peut être écrit sous la forme suivante:

$$\vec{M} = M_x \vec{i} + M_y \vec{j} + M_z \vec{k}$$

Par identification, Nous obtenons :

$$\begin{Bmatrix} M_x \\ M_y \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} I_t \ddot{\theta}_x + \omega I_p \dot{\theta}_y \\ I_t \ddot{\theta}_y - \omega I_p \dot{\theta}_x \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} I_t & 0 \\ 0 & I_p \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{\theta}_x \\ \ddot{\theta}_y \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & \omega I_p \\ -\omega I_p & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{\theta}_x \\ \dot{\theta}_y \end{Bmatrix}$$

$$M_x = I_t \ddot{\theta}_x + I_p \omega \dot{\theta}_y;$$

$$M_y = I_t \ddot{\theta}_y - I_p \omega \dot{\theta}_x$$

$$M_z = 0.$$

Les moments gyroscopiques sont:

$$\begin{aligned} M_x^G &= -\omega I_p \dot{\theta}_x; \\ M_y^G &= +\omega I_p \dot{\theta}_y. \end{aligned} \quad (3.45)$$

On introduit l'effet gyroscopique (3.45) dans les équation des mouvement (3.41) qui prend la forme.

$$\begin{aligned} m_1 \ddot{x}_1 + \left(\frac{4EI}{L^3} - \omega^2 m_1 \right) x_1 - \frac{4EI}{L^3} x_2 + \frac{4EI}{L^2} \theta_y &= 0; \\ m_1 \ddot{y}_1 + \left(\frac{4EI}{L^3} - \omega^2 m_1 \right) y_1 - \frac{4EI}{L^3} y_2 + \frac{4EI}{L^2} \theta_x &= 0; \\ m_2 \ddot{x}_2 + \left(\frac{8EI}{L^3} - \omega^2 m_2 \right) x_2 - \frac{4EI}{L^3} x_1 - \frac{4EI}{L^2} x_3 &= 0; \\ m_2 \ddot{y}_2 + \left(\frac{8EI}{L^3} - \omega^2 m_2 \right) y_2 - \frac{4EI}{L^3} y_1 - \frac{4EI}{L^2} y_3 &= 0; \\ m_3 \ddot{x}_3 + \left(\frac{4EI}{L^3} - \omega^2 m_3 \right) x_3 - \frac{4EI}{L^3} x_2 - \frac{4EI}{L^2} \theta_y &= 0; \\ m_3 \ddot{y}_3 + \left(\frac{4EI}{L^3} - \omega^2 m_3 \right) y_3 - \frac{4EI}{L^3} y_2 + \frac{4EI}{L^2} \theta_x &= 0; \\ I_i \ddot{\theta}_x + \omega I_p \dot{\theta}_x + \left(\frac{8EI}{L} \right) \theta_x - \frac{4EI}{L^2} y_1 + \frac{4EI}{L^2} y_3 &= 0; \\ I_i \ddot{\theta}_y - \omega I_p \dot{\theta}_y + \left(\frac{8EI}{L} \right) \theta_y + \frac{4EI}{L^2} x_1 - \frac{4EI}{L^2} x_3 &= 0. \end{aligned} \quad (3.46)$$

3.4 / CHARGE AXIALE PERIODIQUE

La machine pour laquelle on applique la théorie est un séparateur de lait écrémé. Lors de son fonctionnement la distribution du liquide (lait écrémé), dans le bol du séparateur se fait de façon périodique, telle que la charge peut être écrite [37] :

$$P(t) = P_0 + P_1 \cos(\phi t) \quad (3.47)$$

On définit P_0 et P_1 comme des charges de lait écrémé, de fréquence

$T = \frac{2\pi}{\Omega}$ Donc cette charge périodique peut être introduite dans les calculs des

énergies potentielles du système; finalement on obtient , les équations du mouvement du séparateur sous forme suivante:

$$[M]\{\ddot{q}\} + [C]\{\dot{q}\} + ([K] + [K_p] - \omega^2[M] - (P_0 + P_1 \cos(\phi t))[S])\{q\} = \{0\} \quad (3.48)$$

Les matrices d'amortissement $[C]$ et la raideur $[K_p]$ sont obtenues a partir des relations données en annexe (Annexe C), en considérant l'effet gyroscopique

$$[C] = \begin{bmatrix} C_{xx}^1 & C_{xy}^1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ C_{yx}^1 & C_{yy}^1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & C_{xx}^2 & C_{xy}^2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & C_{yx}^2 & C_{yy}^2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \omega I_p \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\omega I_p & 0 \end{bmatrix}$$

Et

$$[K_p] = \begin{bmatrix} k_{xx}^1 & k_{xy}^1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ k_{yx}^1 & k_{yy}^1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & k_{xx}^2 & k_{xy}^2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & k_{yx}^2 & k_{yy}^2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Donc la solution de l'équation (3.48) peut être donnée comme suit:

$$\{q\} = \{a\} \sin(\Omega t / 2) + \{b\} \cos(\Omega t / 2) \quad (3.49)$$

On remplace l'équation (3.49) dans l'équation (3.48), puis on développe les expressions obtenues. On aboutit à:

$$\left[\begin{aligned} & -[M]\frac{\Omega^2}{4}\{a\}\sin(\Omega t/2) - [M]\frac{\Omega^2}{4}\{b\}\cos(\Omega t/2) + [C]\{a\}\frac{\Omega}{2}\cos(\Omega t/2) - [C]\{b\}\frac{\Omega}{2}\sin(\Omega t/2) + \\ & + ([K] + [K_p] - \omega^2[M] - (P_0 + P_1\cos(\phi t/2))[S])\{a\}\sin(\Omega t/2) + \\ & + ([K] + [K_p] - \omega^2[M] + (P_0 + P_1\cos(\phi t/2))[S])\{b\}\cos(\Omega t/2) \end{aligned} \right] \{q\} = \{0\} \quad (3.50)$$

Dans l'expression (3.50), on compare les termes devant les mêmes harmoniques, On trouve.

$$\left\{ \begin{aligned} & [[K] - [M]\left(\frac{\Omega^2}{4} + \omega^2\right) - (P_0 + P_1\cos(\phi t))[S]] \{a\} + \left[-\frac{\Omega}{2}[C]\right] \{b\} = \{0\}; \\ & \left[[C]\frac{\Omega}{2} \right] \{b\} + \left[[K] - [M]\left(\frac{\Omega^2}{4} + \omega^2\right) - (P_0 + P_1\cos(\phi t))[S] \right] \{a\} = \{0\} \end{aligned} \right.$$

Le déterminant des relations (3.50) est :

$$D = \left[[K] - [M]\left(\frac{\Omega^2}{4} + \omega^2\right) - (P_0 + P_1\cos(\phi t))[S] \right]^2 + \frac{\Omega^2}{4}[C]^2 \quad (3.51)$$

Si $D=0$, on a les pulsations d'instabilité dynamique, et si $D \neq 0$, on a les pulsations pour lesquelles le système (arbre-rotor) peut tourner, alors c' est zone de stabilité

CHAPITRE IV

IV. / ETUDE DE L'ARBRE DANS LE CAS D'UNE CHARGE AXIALE

4.1/ INTRODUCTION:

Lorsque la force comprimante atteint une certaine valeur dépassant la valeur critique définie, la forme rectiligne d'équilibre devient instable et est remplacée par la forme curviligne qui dans ces conditions devient stable [31].

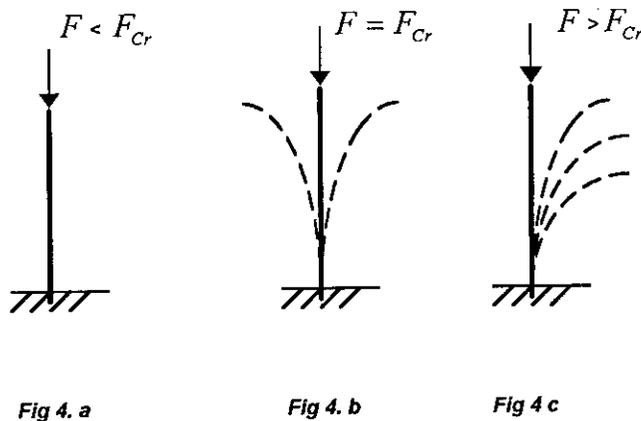


Figure 4.1
schéma d'un arbre encastré -libre avec une charge axiale

La valeur minimale de la force comprimante à laquelle la barre perd sa propriété de garder la forme d'équilibre rectiligne s'appelle force critique est notée F_{Cr} (Figure 4.a)

Euler définit la force critique comme la force nécessaire pour qu'une colonne s'incline de la plus petite valeur possible [31].

Les recherches ont permis d'établir que lorsque, l'effort de compression est inférieur à sa valeur critique, les fléchés de la barre sont peu importantes mais avec l'approche de cette valeur, elles commencent à croître indéfiniment (figure4.c).

Cette croissance illimitée des fléchés sous l'action de la croissance limitée de l'effort de compression peut être adaptée comme critère de la perte de stabilité.

Après avoir déterminé la force critique, il faut établir pour une barre comprimée la charge admissible. Naturellement, dans des but de sécurité celle-ci doit être inférieure à la charge critique [31].

$$F_{adm} = \frac{F_{cr}}{n_s}$$

Ou n_s est le coefficient de sécurité vis-à-vis la stabilité

4. 2/ ETUDE STATIQUE :

4.2.1/ FORMULE D'EULER POUR LA FORCE CRITIQUE:

Pour étudier le « flambement » et déterminer la force critique, on fait appel à l'équation différentielle approchée de l'axe fléchi d'une poutre.

$$EI_{\min} \ddot{f} = M \tag{4.1}$$

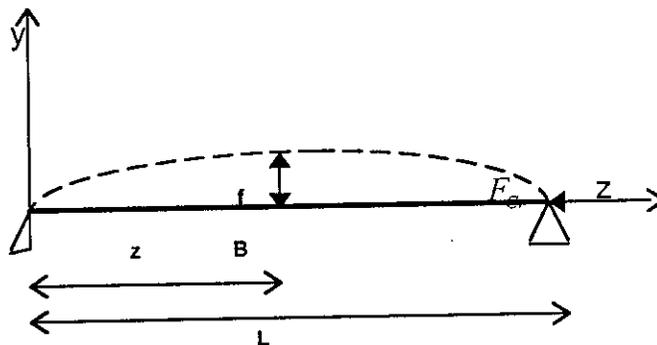


Figure 4.2
schéma d'une poutre en état fléchi

Le moment fléchissant par rapport au centre de gravité de la section B à l'état fléchi est :

$$M = -F_{Cr} f \tag{4.2}$$

On remplace l'équation (4.2) dans l'équation (4.1), on obtient :

$$\begin{aligned}
 EI_{\min} \ddot{f} &= -F_{Cr} f; \\
 \ddot{f} + \frac{F_{Cr}}{EI_{\min}} f &= 0. \\
 \ddot{f} + \alpha^2 f &= 0.
 \end{aligned}
 \tag{4.3}$$

avec $\alpha^2 = \frac{F_{Cr}}{EI_{\min}}$

Donc la solution est de la forme suivante:

$$f = A \cos(\alpha z) + B \sin(\alpha z) \tag{4.4}$$

Les constantes d'intégration A et B sont déterminées à partir des conditions aux extrémités de la barre (figure 4.2). Après certains calculs, on détermine la force critique.

Pour $Z = 0 \Rightarrow f = 0;$
 $Z = l \Rightarrow f = 0.$

La première condition permet d'obtenir A=0. Donc la barre fléchi suivant la sinusoïde. La deuxième condition amène $B \sin(\alpha z) = 0$ cette relation est valable dans deux cas :

1-ere cas : B=0. Mais si A=0 et B=0 et en vertu de l'équation (4.4) les fléchés de

la barre sont nulles, ce qui contredit la prémisse initiale.

2-ème cas: $\sin(\alpha l) = 0$. Cette condition est observée lorsque αl prendre les valeurs de la série infinie suivante:

$\alpha l = 0, \pi, 2\pi, \dots, n\pi$. Ou n est un nombre entier quelconque ,on

tire $\alpha = \frac{n\pi}{l}$, et puisque $\alpha = \sqrt{\frac{F_{Cr}}{E I_{\min}}}$,

alors $F_{Cr} = \pi^2 I_{\min} \frac{nE}{l^2}$ (4.5)

Ainsi on obtient un ensemble infini des valeurs des forces critiques associées aux formes différentes de la courbe . Dans le cas pratique , ce n'est qu'à la valeur minimale de la force critique que le système perd sa stabilité qui présente de l'intérêt .

Pour $n = 1$, on obtient la force critique minimale dont l'expression représente la formule d'Euler [31].

$$F_{Cr} = \pi^2 I_{\min} \frac{E}{l^2} \quad (4.6)$$

4.2.1.1 / FLAMBEMENT AVEC FLEXION SIMPLE :

Considérons encore l'action simultanée sur la barre de la force appliquée suivant l'axe et la charge transversale . Sous l'action des charges de ce type la barre se déforme comme l'indique les pointillés (figure 4.6).

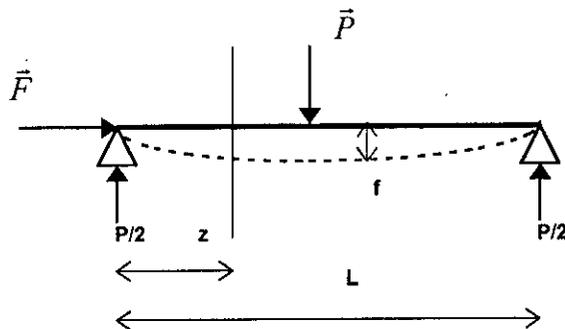


Figure 4.6 :
(schéma d'un flexion simple)

Examinons la solution exacte (figure4.3). En considérant des déformations faibles, utilisons l'équation différentielle de la fléchie (4.1). Composons l'équation de la flexion seulement pour la moitié gauche de la barre étant donné qu'elle est symétrique :

$$EI_x \ddot{f} = -Ff - P \frac{z}{2} \Rightarrow$$

$$\ddot{f} + \alpha^2 f = -\frac{P.z}{2EI_x} \quad (4.7)$$

$$\alpha^2 = \frac{F}{EI_x}$$

La solution de cette équation différentielle comprend la solution de l'équation sans le deuxième membre plus la solution particulière de l'équation non homogène.

4.2.2/ ETUDE DYNAMIQUE :

4.2.2.1/ FLAMBEMENT AVEC FLEXION DANS LE CAS DE L'ARBRE EN ROTATION :

Lorsque le système (arbre-rotor) est en mouvement, avec des vitesses progressive, et le rotor est excentré par rapport à l'axe de rotation, on a des forces tournantes (forces centrifuges) de la forme : $F_{Cent} = -m\omega^2 e$.

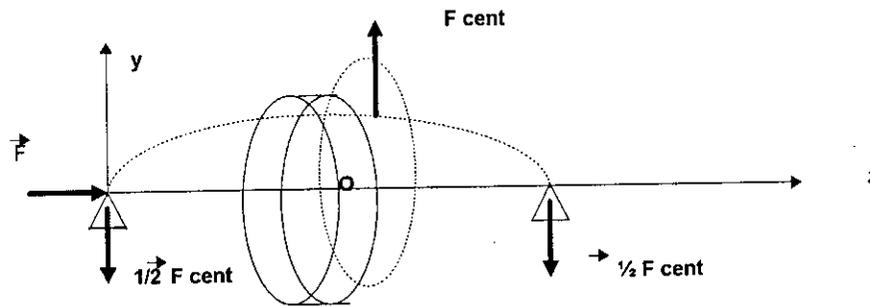


Figure 4.7
Schéma d'un rotor en rotation avec charge axiale

Il suffit d'appliquer les relations trouvées dans le paragraphe (§III.1) on trouve l'équation suivante :

$$M = -Ff + \frac{Fz}{2} \quad (4.8)$$

On remplace l'équation (4.8) dans l'équation de la flèche, on obtient:

$$EI\ddot{f} = -Ff + \frac{Fz}{2}$$

Or $F_2 = -m\omega^2 e$

L'équation différentielle devient :

$$\ddot{f} + \alpha^2 f = -\frac{m}{2EI_x} \omega^2 e z \quad (4.9)$$

avec $\alpha^2 = \frac{F}{EI}$

La solution de l'équation (3.9) est de la forme :

$$f = A\sin(\alpha z) + B\cos(\alpha z) - \frac{m\omega^2 e z}{2FEI_x} \quad (4.10)$$

Pour déterminer les constantes A et B on a les conditions suivantes:

$z = l \Rightarrow f = 0;$
 Pour $z = \frac{l}{2} \Rightarrow f = f_{Max}$

L'équation de la flèche devient :

$$f(z) = \frac{m\omega^2 e}{2\alpha^2 F \cos(\alpha \frac{l}{2})} [\sin(\alpha z) - z] \quad (4.11)$$

Pour déterminer la flèche maximale, il suffit de remplacer z par $\frac{l}{2}$.

$$f(l/2) = f_{Max} = \frac{m\omega^2 e}{2\alpha^2} \left(\tan(\alpha \frac{l}{2}) - \alpha \frac{l}{2} \right) \quad (4.12)$$

On dérive deux fois l'équation (4.11), et on remplace dans l'équation de (4.1). On trouve le moment fléchissant en fonction de la variation z, tel que pour $z=l/2$, le moment soit maximal

$$M_{Max} = EIf''(l/2) = -EI \frac{m\omega^2 e}{2\cos(\alpha l/2)} \sin(\alpha l/2)$$

avec $F = \alpha^2 EI$

Donc
$$M_{Max} = -\frac{EI_x m\omega^2 e}{2} \tan(\alpha l/2) \quad (4.13)$$

A partir des contraintes maximales engendrées par la compression et la flexion, on peut déterminer la force critique du système .

$$\sigma = -\frac{F}{A} - \frac{M}{W_x} \quad (4.14)$$

Nous remplaçons les équations trouvées dans l'équation (4.14), on obtient la relation suivante :

$$\sigma = -\frac{F}{A} + \frac{EI_x m\omega^2 e}{2 W_x} \tan(\alpha \frac{l}{2}) \quad (4.15)$$

On remarque que pour $\alpha l/2 = \pi/2$, on a une contrainte qui tend vers l'infini; l'arbre perd sa stabilité

$$\begin{aligned} (\alpha l/2)^2 = (\pi/2)^2 &\Rightarrow \frac{Fl^2}{EI} = \pi^2 \\ F_{cr} &= \frac{\pi^2 EI}{l^2} \end{aligned} \quad (4.16)$$

Donc F_{cr} c'est une force critique d'Euler

Notre but est de faire intervenir l'équation du flambement (voir annexe B), et les forces tournantes dans l'équation du mouvement du système à étudier. Une fois les équations du mouvement établies, on utilise les méthodes numériques, et différents programmes. Parmi ces méthodes, on cite la méthode énergétique (Rayleigh, Ritz...), la méthode de Dunkerley, la méthode de Jacobi, ...etc. (voir annexe C).

CHAPITRE V

V. PRESENTATION DES TYPES DES MACHINE

Pour pouvoir profiter scientifiquement de la thèse, on se propose de considérer comme exemple deux machines tournantes à arbres verticaux; ce séparateur de type KDA 18. 02. 177; qui se trouve à l'unité de O.R.L.A.C de Blida; et une centrifuges pendulaire de type BMA G 1000/1250, qui se trouve à L'ENASUCRE de KHEMIS-MALIANA.

5.1/ SEPARATEUR : type KDA 18-02-177

- La partie essentielle de ce type de machine est le bol, le séparateur se compose de deux partie :(voire figure .1).

a / PARTIE SUPERIEURE (Bol) :

Le bol est un ensemble de pièces mécaniques qui sont à base d'acier inoxydable. Parmi les pièces importantes on a:

- Les assiettes au nombre de soixante-sept,
- Le chapeau distributeur,
- La cage à segments,
- Le fond du bol.

L'ensemble des pièces pèsent environ de 294 kg.

b / PARTIE INFERIEURE :

La partie inférieure comporte :

- L'arbre,
- Les roulements à bille a contact oblique,
- La boite de palier,
- Le tuyau d'aspiration

L'arbre est entraîné par un moteur d'une puissance de 15 kW, qui a un régime de rotation de 3000 tr/min. Vu la grande vitesse de la rotation il y a un

système de lubrification et de graissage, aux niveaux des roulement et les parties tournantes. Le séparateur est équipé d'un système de freinage pour l'arrêt totale de la machine, si le système de freinage n'est utilisé d'une façon adéquate, le bol reste en rotation pour une durée De trois heures environs, ceci est dû aux différentes forces d'inertie.

5.2./ FONCTIONNEMENT DU SEPARATEUR:

La partie essentielle de ce type de machine est le bol, par l'intermédiaire de la conduite d'alimentation A, le lait écrémé. emprésuré est introduit dans la chambre de distribution. le liquide s'écoule à travers des trous prévus dans les pieds du distributeur. Des canaux l'achement vers la pile d'assiettes D.

La grande vitesse de rotation (environ de 5500 tr/min) , sépare le lait écrémé en sérum et en lait caillé. Le sérum s'écoule vers l'intérieur des assiettes et est refoulé vers la sortie B du séparateur par l'intermédiaire d'une turbine C. Le lait caillé s'écoule dans la chambre à boues E et passe à travers de buses K jusqu'au capteur de concentrât L . A la sortie du capteur, on trouve un anneau d'évacuation M . Le lait caillé est transporté vers la sortie N par des palettes fixées à un anneau d'évacuation M et en suite vers l'entonnoir. Le séparateur (partie inférieure et supérieur) tourne à une vitesse de 5500 tr / min . L'énergie cinétique de rotation est très grande (importante), il y a donc un transfert de chaleur au niveau des assiettes pour éviter l'échauffement du bol, on refroidit la ferblanterie H par la circulation d'eau froid.

5.2.1 / VIBRATIONS DU SEPARATEUR :

a / VIBRATION DUES A LA MATIERE :

Parmi les problèmes qui provoquent les vibrations de la machine sont :

- une ou plusieurs buses sont engorgées,
- La matière solide déposée irrégulièrement dans le bol,
- Le bol n'est pas monté correctement (déséquilibre),
- La pile d'assiettes n'est plus suffisamment tassée...

b / VIBRATIONS DUES AUX PHENOMENES MECANIQUES :

Les vibrations dûes au phénomènes mécanique sont diverses, on cite :

- Des ressorts du coussinet supérieur sont fatigués,
- Marche excentrique de la poulie à gorge,
- Les roulements à billes ayant subi une usure normal. ...

**5.3. / DESCRIPTION DE LA CENTRIFUGEUSE PENDULAIRE : type BMA G
1000/1250**

La centrifugeuse pendulaire BMA G 1000/1250 est décrite d'une façon complète dans le travail cité dans la référence [3], pour ne pas trop détailler, on donne les principales caractéristiques, de cette centrifugeuse, lors du chargement elle est livrée pour un poids de charge de 1000 à 1250 kg. La centrifugeuse a une marche régulière d'où une répartition uniforme de masse cuite (sucre) dans le panier est d'une grande importance. La vitesse de chargement et le degré d'ouverture des vanes influent sur la répartition de masse cuite.

Ce type de centrifugeuse est très utilisé en Algérie. Parmi les domaines d'utilisation fréquente, on cite l'industrie du sucré, et également on les trouve dans les industries alimentaire et chimique.

5.3.1 / VIBRATIONS DE LA CENTRIFUGEUSE :

Parmi les causes qui provoquent les vibrations de la centrifugeuse on cite :

- les balourds dûs à une mauvaise répartition de la charge,
- les tamis bouchés,
- l'encrassement des pièces en rotation,
- le Mauvais équilibrage et usure des pièces. ...

Les parties vibrantes essentielles de la centrifugeuse pendulaire sont : l'arbre, l'obturateur et de panier.

CHAPITRE VI

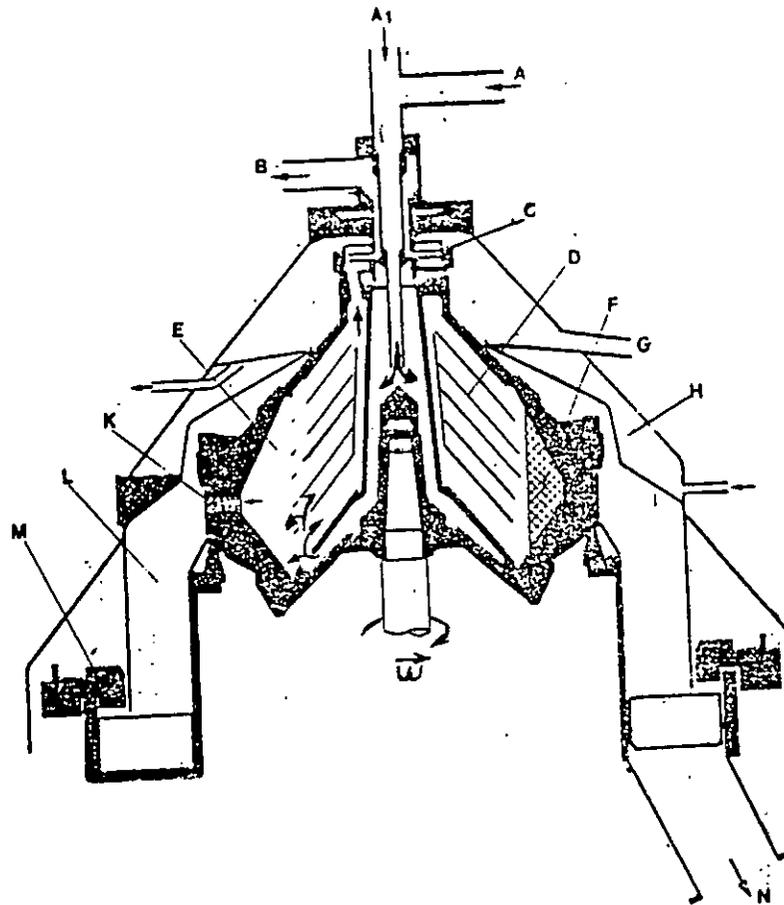


Figure 5.1

shema de fonctionnement d'un séparateur de type KDA 18-02-177)

- A : alimentation (lait écrémé)
- A1 : alimentation en eau
- B : sortie du sérum
- C : turbine
- D : assiettes
- E : chambres à boues
- F : cage à segments
- G : débordement
- H : ferblanterie
- K : buses
- L : capteur de concentrat
- M : anneau d'évacuation du caillé
- N : sortie du caillé.

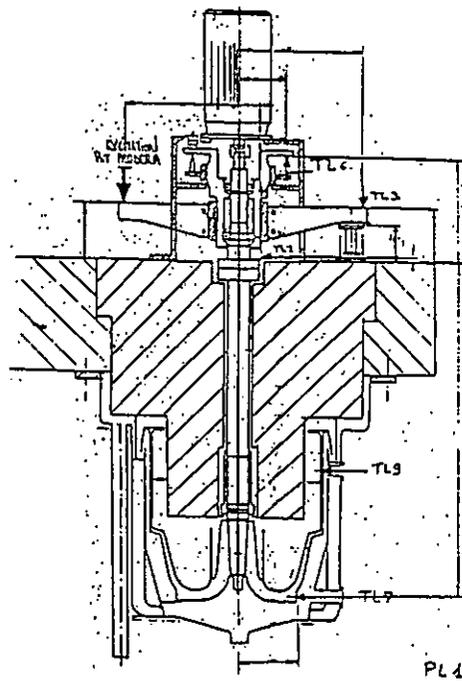
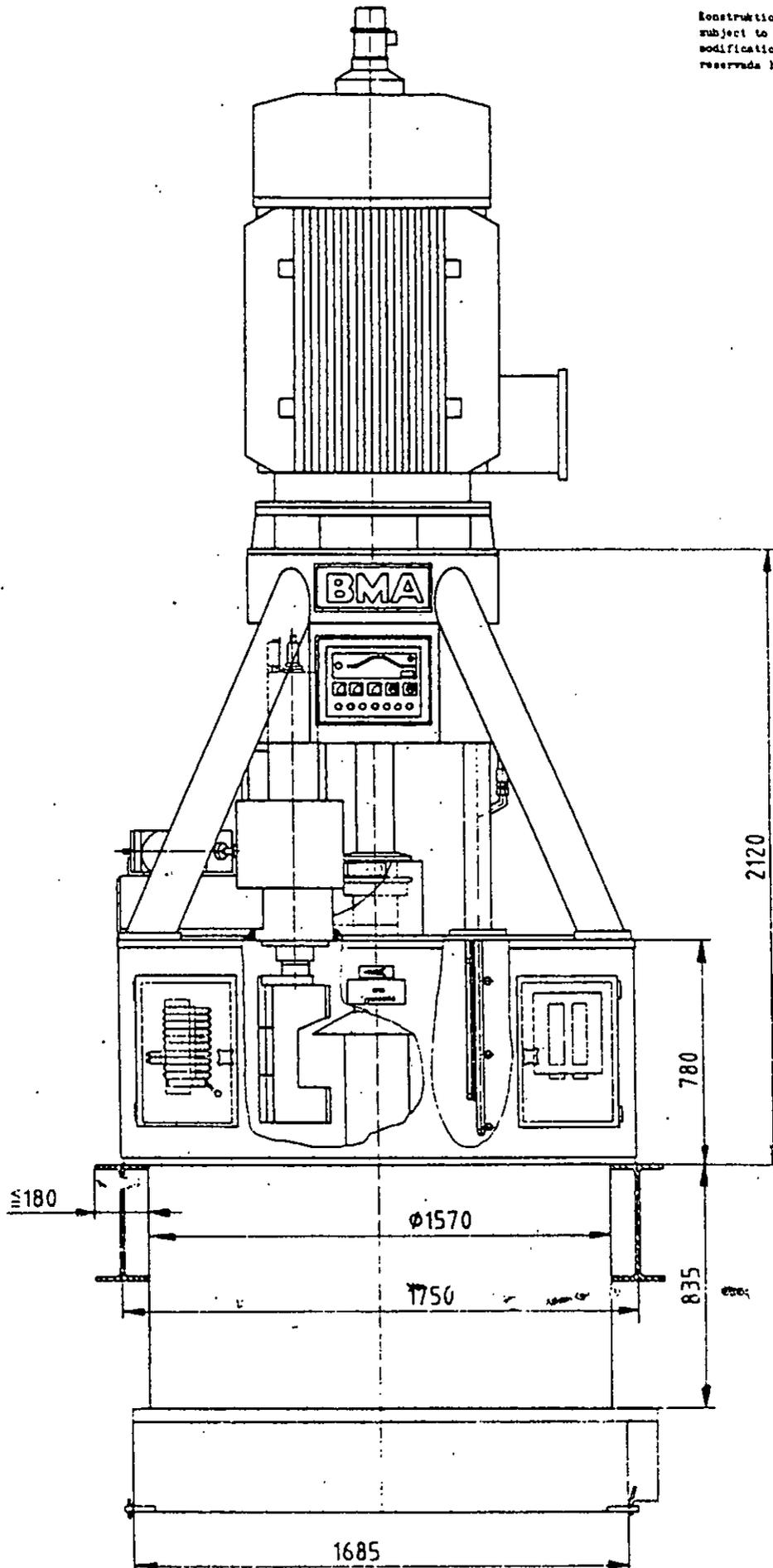


Figure 5.2
schema de la ligne d'arbre d'une centrifugeuse

Konstruktionsänderungen vorbehalten
subject to modifications
modification de construction réservée
reservada la modificación de construcción



Spindel
Spindle
Arbre
Eje

ENVA

TD 26.90825

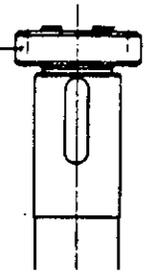
M85x2 links/left



1.01/34

M85x2 links/left

26.03789.02



compl. 26.03789.00

26.03789.03



BAA 0008

Désignation	Masse (kg)
Arbre	282.9
Panier	1100
Obturateur	620.9

REMARQUE : Le séparateur est appelé dans cet étude système de **type II** ,et la centrifugeuse système de **type I** .

VI./ RESOLUTION DU SYSTEME D'EQUATIONS

6.1/ REPONSE EN FREQUENCE DES SYSTEME A PLUSIEURS DEGRES DE LIBERTE SANS AMORTISSEMENT :

Soit l'équation de mouvement pour un système à N degrés de liberté sans amortissement :

$$[M]\{\ddot{q}\} + [\tilde{K}]\{q\} = \{F(t)\} \quad (6.1)$$

La solution de l'équation (6.1), avec l'excitation $\{F(t)\} = \{F\} e^{i\Omega t}$ est donnée comme :

$$\{q\} = \{q_0\} e^{i\Omega t} \quad (6.2)$$

On remplace la solution (6.2) dans l'équation de mouvement (6.1) qui prend la forme suivante :

$$-\Omega [M]\{q\} + [\tilde{K}]\{q\} = \{F\} \quad (6.3)$$

Pour résoudre ce système, on recherche d'abord classiquement les solutions de l'équation sans seconde membre. On a alors :

$$-\Omega [M]\{q\} + [\tilde{K}]\{q\} = \{0\} \quad (6.4)$$

Ce système n'admet de solutions non nulles que si le déterminant principal est égal à zéro :

$$\left| -\Omega [M] + [\tilde{K}] \right| = 0$$

On développement ce déterminant, on obtient une équation du nième degré en Ω^2 , généralement appelée comme précédemment « *Equation caractéristique* » ou « *Equation aux fréquences propres* ». Les racines $\Omega_1, \Omega_2, \dots, \Omega_n$ sont les pulsations propres du système.

Dans le système (6.3) remplaçons Ω par une quelconque pulsation propre Ω_r . La résolution de ce système fournit un ensemble de valeurs q_1, q_2, \dots, q_n .

$$\{Q_r\} = \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ \vdots \\ q_n \end{bmatrix}$$

La matrice colonne ci-dessus est le « vecteur propre » du mode « r ». Ce vecteur est défini à une constante arbitraire près. Nous nous proposons tout d'abord de démontrer que les différents vecteurs propres sont orthogonaux entre eux.

$$-\Omega_r^2 [M] \{Q_r\} + [\tilde{K}] \{Q_r\} = \{0\} \tag{6.5}$$

On multiplie les deux membres de cette équation par la matrice transposée $\{Q_r\}'$. On rappelle que la matrice transposée s'obtient en permutant les lignes et les colonnes. Dans le cas où la matrice est une matrice colonne, la matrice transposée est une matrice ligne. on a donc :

$$-\Omega_r^2 \{Q_r\}' [M] \{Q_r\} + \{Q_r\}' [\tilde{K}] \{Q_r\} = \{0\} \tag{6.6}$$

Du fait que les matrice $[M]$ et $[K]$ sont des matrices symétriques, la transposée de cette équation s'écrit :

$$-\Omega_r^2 \{Q_r\}' [M] \{Q_s\} + \{Q_r\}' [\tilde{K}] \{Q_s\} = \{0\} \quad (6.7)$$

Par ailleurs, le vecteur propre $\{Q_s\}$ étant solution de l'équation (6.2), on peut écrire:

$$-\Omega_s^2 [M] \{Q_s\} + [\tilde{K}] \{Q_s\} = \{0\}$$

Multiplions les deux membres de cette équation par $\{Q_r\}'$, il vient :

$$-\Omega_r^2 \{Q_r\}' [M] \{Q_s\} + \{Q_r\}' [\tilde{K}] \{Q_s\} = \{0\} \quad (6.8)$$

En retranchant (6.8) et (6.7), il vient :

$$(\Omega_s^2 - \Omega_r^2) \{Q_r\}' [M] \{Q_s\} = \{0\} \quad (6.9)$$

Pour toutes les valeurs $\Omega_s \neq \Omega_r$, on a:

$$\{Q_r\}' [M] \{Q_s\} = \{0\} \quad (6.10)$$

L'équation (6.6) permet d'écrire :

$$\{Q_r\}' [\tilde{K}] \{Q_s\} = \{0\} \quad (6.11)$$

Les relations (6.10) et (6.11) sont appelées « *Relations d'orthogonalité* ». Les n vecteurs propres constituent un ensemble linéairement indépendant de n

vecteurs dans l'espace à n dimensions. N'importe quel vecteur de cet espace peut être représenté par une combinaison linéaire de ces n vecteurs. Par suite, la solution de l'équation (6.4) avec second membre peut être représentée par la sommation:



$$\{q_n\} = \sum_{r=1}^n \gamma_r \{Q_r\} \quad (6.12)$$

En substituant cette valeur de q_n dans l'équation (6.4), il vient :

$$-\Omega^2 [M] \sum_{r=1}^n \gamma_r \{Q_r\} + [K] \sum_{r=1}^n \gamma_r \{Q_r\} = \{F\} \quad (6.13)$$

Pour déterminer les différents coefficients γ_r , nous utilisons les propriétés d'orthogonalité précédemment démontrées. Multiplions donc les deux membres de l'équation (6.13) par la matrice transposée $\{Q_s\}'$. On a:

$$-\Omega^2 \{Q_s\}' [M] \sum_{r=1}^n \gamma_r \{Q_r\} + \{Q_s\}' [K] \sum_{r=1}^n \gamma_r \{Q_r\} = \{Q_s\}' \{F\} \quad (6.14)$$

En tenant compte des relations d'orthogonalité, on trouve les différents coefficients de γ_s :

$$\gamma_s = \frac{\{Q_s\}' \{F\}}{-\Omega^2 \{Q_s\}' [M] \{Q_s\} + \{Q_s\}' [K] \{Q_s\}} \quad (6.15)$$

Et puis on replace la relation (6.15) dans l'équation (6.12).

6.2/ REPONSE EN FREQUENCE DES SYSTEMES A PLUSIEURS DEGRES DE LIBERTE AVEC AMORTISSEMENTS:

Pour des vibrations amorties, les équations sont données sous la forme :

$$[M]\{\ddot{q}\} + [C]\{\dot{q}\} + [\tilde{K}]\{q\} = \{0\} \quad (6.16)$$

Avec $[\tilde{K}] = [[K] + [K_p] - \omega^2 [M] - (P_0 + P_1 \cos(\Omega t)) [S]]$

Il est préférable de procéder à un changement de coordonnées pour passer d'un système à « N » équations de seconde ordre à un système à « 2N » équations de première ordre, tel qu'en multipliant les deux membres (après translation de seconde membre) par l'inverse de la matrice masse $[M]^{-1}$, on trouve:

$$[M]^{-1}[M]\{\ddot{q}\} = -[M]^{-1}[C]\{\dot{q}\} - [M]^{-1}[\tilde{K}]\{q\} \quad (6.17)$$

Ou

$$\{\ddot{q}\} = -[M]^{-1}[C]\{\dot{q}\} - [M]^{-1}[\tilde{K}]\{q\} ;$$

Et

$$\{\dot{q}\} = [I]\{\dot{q}\} + [0]\{q\} \quad (6.18)$$

On pose $\{Z\} = \{\dot{q} \quad q\}^T$

Le système d'équation devient :

$$\{\dot{Z}\} = [A]\{Z\} \quad (6.19)$$

Avec

$$A = \begin{bmatrix} -[M]^{-1} [C] & -[M]^{-1} [\tilde{K}] \\ \dots\dots\dots & \dots\dots\dots \\ [I] & [0] \end{bmatrix}_{2NX2N}$$

Alors la solution de l'équation (6.4) est de la forme :

$$\{Z\} = \{\phi\} e^{\lambda t} \tag{6.20}$$

Et
$$\{\dot{Z}\} = \lambda [I] \{\phi\} e^{\lambda t} \tag{6.21}$$

Donc
$$\{\dot{Z}\} = \lambda [I] \{Z\}$$

En remplaçant dans l'équation (6.19), les équations (6.20) et (6.21) on trouve :

$$\begin{aligned} \lambda [I] \{Z\} &= [A] \{Z\} \Rightarrow \\ ([A] - \lambda [I]) \{Z\} &= \{0\} \end{aligned} \tag{6.22}$$

C'est un problème aux valeurs propres d'un système amorti, tel que $\lambda = \alpha + i \beta$ avec $i^2 = -1$.

α : Partie réelle des valeurs propres (partie amorti)

β : Partie imaginaire des valeurs propres (partie harmonique)

Pour calculer les parties réelles et imaginaires, nous utilisons un algorithme QR dans le programme principale de Jacobi.

6.3 / REPONSE EN FREQUENCE DES SYSTEMES A N DEGRES DE LIBERTE AVEC EXCITATION :

Nous nous proposons maintenant d'étudier la réponse de ces système aux excitations sinusoïdales. On adopte les notions d'Euler.

Les équations du mouvements pour un système force amorti sont données comme suit :

$$[M]\{\ddot{q}\} + [C]\{\dot{q}\} + [\tilde{K}]\{q\} = \{F(t)\} \quad (6.23)$$

Avec $\{F(t)\} = \{F_0\} e^{i(\omega t + \phi)}$

$\{F_0\}$ = module des forces en [Kg], donnée dans le plan x, y , et le moment en [Kg-m] en θ_x ou θ_y

ϕ : phase en [Deg]

ω : vitesse de rotation du rotor en [rad/s]

Soit la solution harmonique de la forme :

$$\{q\} = \{q_0\} e^{i(\omega t + \theta)}$$

En substituant dans l'équation du mouvement (6.23) et en divisant par $e^{i\omega t}$; on aboutit a une nouvelle équation :

$$[-\omega^2 [M] + i\omega [C] + [\tilde{K}]] \{q_0\} e^{i\theta} = \{F_0\} e^{i\phi} \quad (6.24)$$

Or $[Z]\{q\} e^{i\theta} = \{F_0\} e^{i\phi}$

Alors $[Z] = [-\omega^2 [M] + [\tilde{K}] + i\omega [C]]$

On multiplie les termes à gauche et à droite de l'égalité (6.24) par $[Z]$, on trouve

$$\{q_0\} e^{i\theta} = [Z]^{-1} \{F_0\} e^{i\phi}$$

$$q_0 = \text{Vibration d'amplitude} = \left[(R_e(q_0))^2 + (I_m(q_0))^2 \right]^{\frac{1}{2}}$$

Avec

$$\theta = \text{Vibration de phase} = \text{Tan}^{-1} \left(\frac{I_m(q_0)}{R_e(q_0)} \right)$$

Pour déterminer les valeurs propres et les modes, on procède à une programmation qui est annexée au programme principale VRDA.

6.4 / STRUCTURE DU PROGRAMME

Le programme est écrit en fortran 77 version 3.30 sous forme de modules séparés qui seront compilés, pour donner un fichier exécutable . La structure du programme est donnée en figure 6.1. L'organigramme et le programme sont basés sur celui de la référence citée [22]. Les résultats des calculs sont donnés dans le chapitre suivant .

Figure 6.1 : Structure du programme « Analyse dynamique d'un rotor vertical »

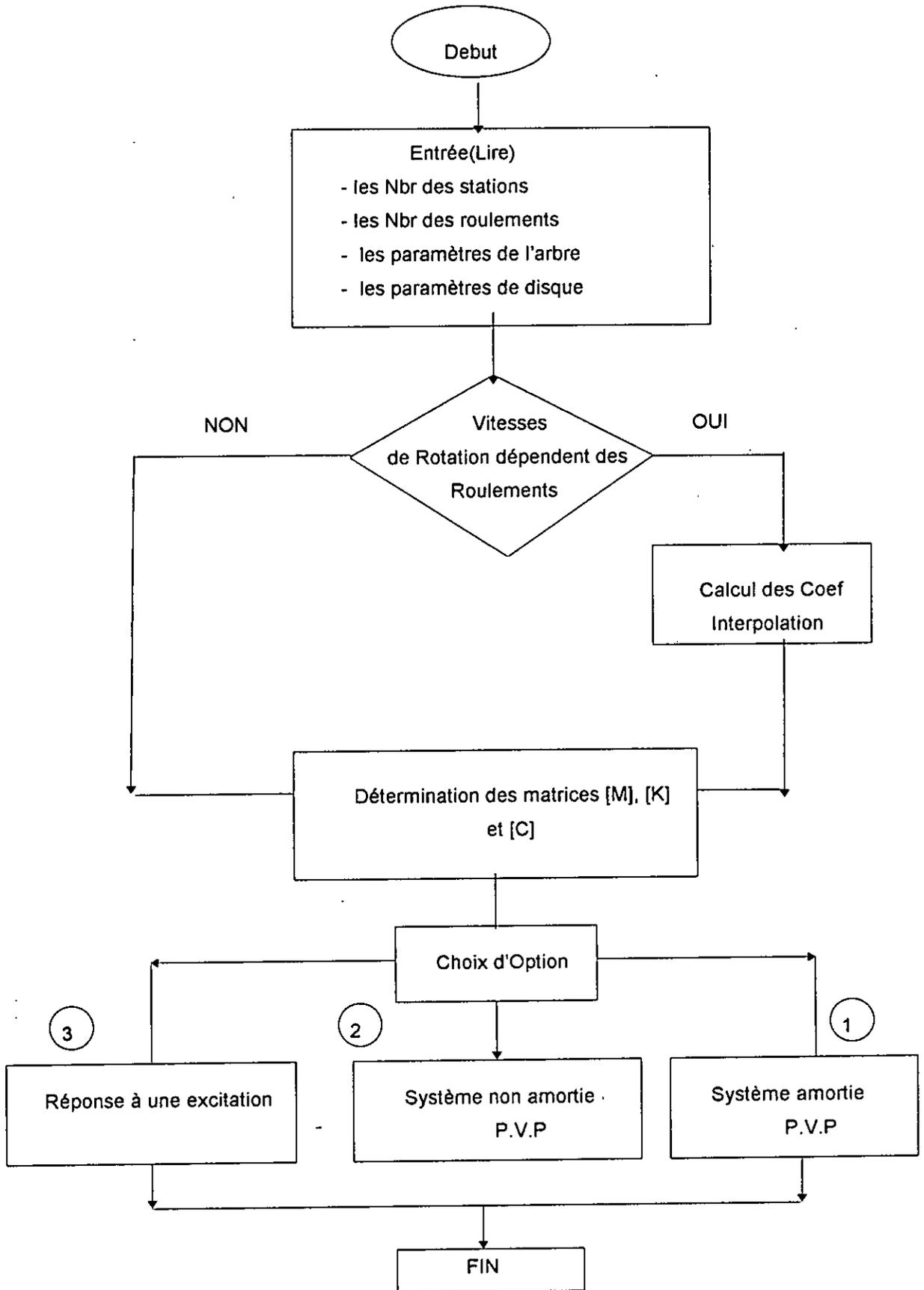


Figure 6.2
 problème aux valeurs propre pour un système
 non-amorti

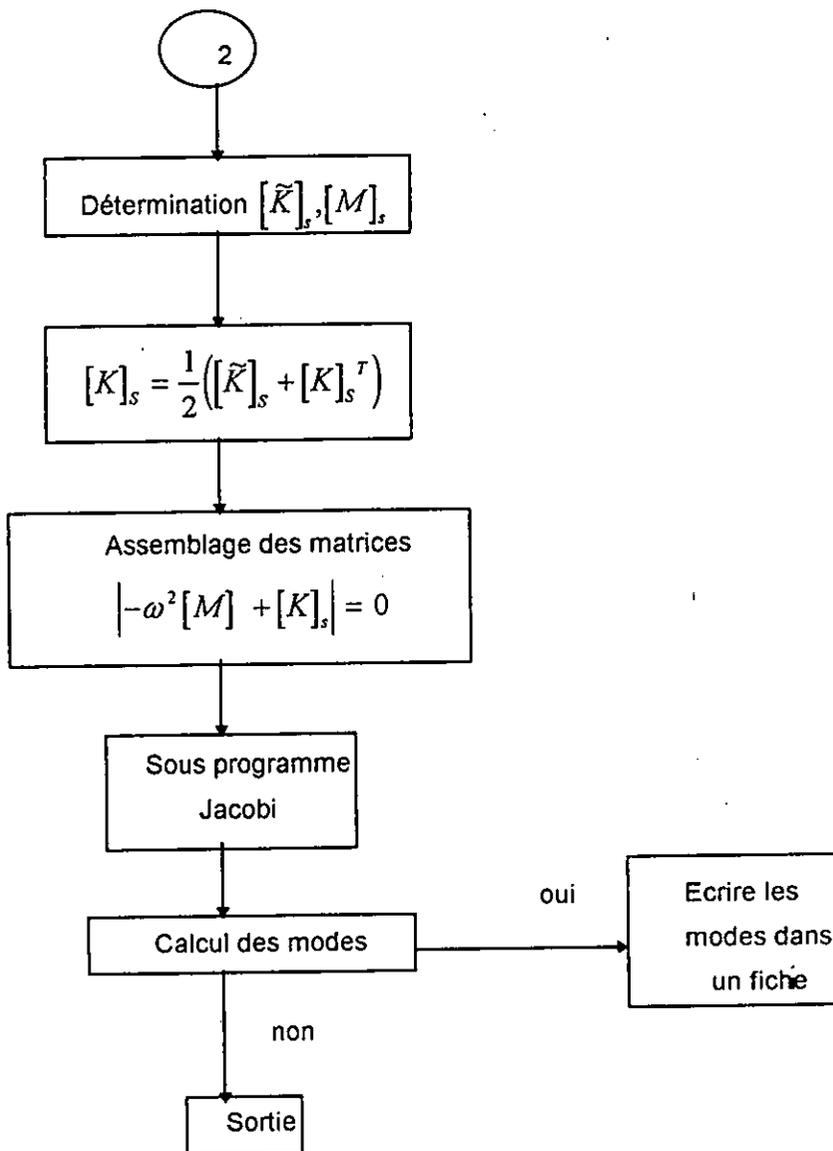
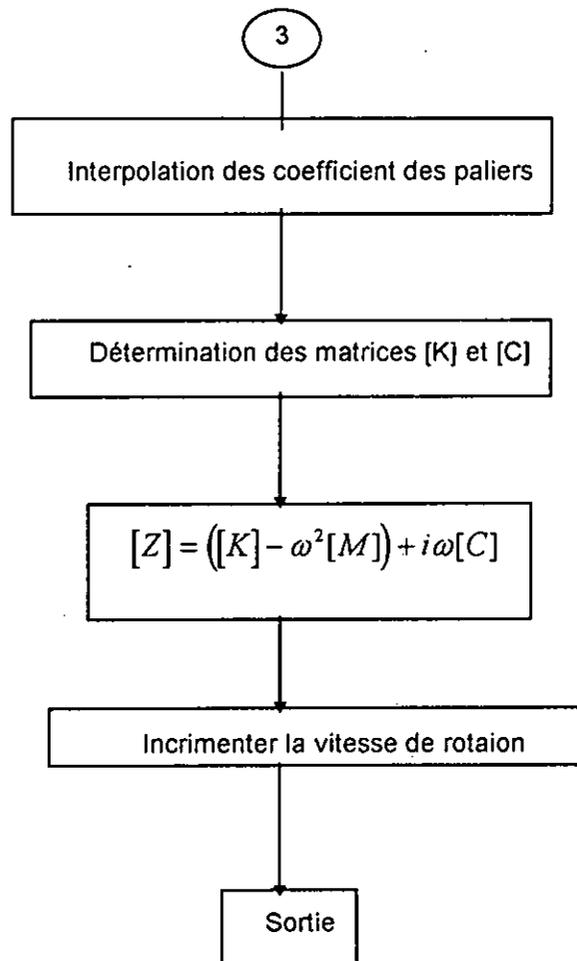


Figure 6.3
Problème aux valeurs propre pour un système
Amorti



6.5 / APPLICATION NUMERIQUE:

Pour faire une application numérique on utilise les paramètre du séparateur.
 Les donnés sont :

MECHANICAL ENGINEERING DEPARTMENT OF BLIDA

VERTICAL ROTOR DYNAMICS ANALYSIS (VRDA)

TITRE : cor.don
 =====

Séparateur en charge

Nombre des stations = 3
 Nombre des disques = 1
 Nombre des roulements = 2
 Charge Statique = .000
 Charge Dynamique = .120E+04

Nombre Total des Degrés de Liberté est 12

Paramètre de l Arbre :

=====

Elément No.	O.D. MM.	I.D. MM.	Longueur MM.	Poids KG	Mod. de Elas. KG/MM**2	Densité KG/MM**3
----------------	-------------	-------------	-----------------	-------------	---------------------------	---------------------

1	85.0	10.0	123.	17.0	.210E+08	.125E-02
2	90.0	10.0	570.	18.0	.210E+08	.125E-02

SOM: 693. 35.0

Paramètre de Disque :

=====

Disque Station O.D. I.D. Epaisseur Poids Mom.Polar. Mom.Trans.
 No. No. MM. MM. MM. KG KG-MM**2 KG-MM**2

1	3	460.	15.0	75.0	294.	.778E+07	.403E+07
---	---	------	------	------	------	----------	----------

SOM: 294.

Paramètre de Roulement :

=====

Roulement Station Poids
 No. No. KG

1	1	.000
2	2	.000

SOM: .000

coefficients des Roulements :

=====

Roulement Vitesse Matrice Raideur Matrice Amortissement
 No. RPM KG/MM. KG-SEC/MM.

1	10.1	.200E+04	.120E+05	.125E+10	.140E+08
		.310E+04	.100E+04	.254E+07	.120E+04

		.397E+04	-.520E+07	.156E+06	.740E+06	.126E+08
			.125E+07	-.456E+06	.515E+08	.266E+08

		.165E+06	.412E+07	.530E+08	.123E+06	.154E+07
			.112E+07	-.455E+06	.100E+06	.123E+06

2	10.1	.575E+10	.151E+06	.212E+10	.132E+06
		-.146E+07	.256E+06	.250E+06	.234E+06

.397E+04 .125E+07 .529E+07 .389E+07 .408E+08
 .570E+07 -.460E+06 .127E+06 .155E+07

.165E+06 .415E+07 .147E+06 .690E+07 .145E+07
 -.450E+09 .120E+07 .125E+08 .130E+07

DISTRIBUTION DE MASSE UTILISE

 masse concentré

problem.V.P solution :

=====

MODE	No. 1		No. 2	
FREQ. [RPM]	.1078E+06		.1078E+06	
Stat. No.	X-dir	Y-dir	X-dir	Y-dir
1	.8428E-04	-.1291E-10	.8428E-04	-.1291E-10
2	1.000	1.000	1.000	1.000
3	1.000	1.000	1.000	1.000

MODE	No. 3		No. 4	
FREQ. [RPM]	.1078E+06		.1078E+06	
Stat. No.	X-dir	Y-dir	X-dir	Y-dir
1	.8428E-04	-.1291E-10	.8428E-04	-.1291E-10
2	1.000	1.000	1.000	1.000
3	1.000	1.000	1.000	1.000

MODE	No. 5		No. 6	
FREQ. [RPM]	1092.		3455.	
Stat. No.	X-dir	Y-dir	X-dir	Y-dir
1	.8428E-04	.9393E-13	.8428E-04	.1077E-09
2	1.000	1.000	1.000	1.000
3	1.000	1.000	1.000	1.000

MODE	No. 7		No. 8	
FREQ. [RPM]	3623.		3998.	
Stat. No.	X-dir	Y-dir	X-dir	Y-dir
1	.8428E-04	-.4750E-14	.8428E-04	-.2170E-11
2	1.000	1.000	1.000	1.000
3	1.000	1.000	1.000	1.000

MODE	No. 9		No.10	
FREQ. [RPM]	3998.		.1947E+05	
Stat. No.	X-dir	Y-dir	X-dir	Y-dir
1	.8428E-04	.1916E-11	.8428E-04	-.3970E-15
2	1.000	1.000	1.000	1.000
3	1.000	1.000	1.000	1.000

MODE	No.11		No.12	
FREQ. [RPM]	.1078E+06		.1107E+06	
Stat. No.	X-dir	Y-dir	X-dir	Y-dir
1	.8428E-04	-.1291E-10	.8428E-04	-.4565E-12
2	1.000	1.000	1.000	1.000
3	1.000	1.000	1.000	1.000

Vitesse d'utilisation = 5000.00 RPM

Mode No.	Partie Reel	Partie Imaginaire
1	.366E+09	.000
2	-.410E+08	.000
3	.298E+09	.000
4	-.106E+07	.000
5	-16.4	.155E+05
6	-16.4	-.155E+05
7	1.95	.155E+05
8	1.95	-.155E+05
9	-.655E-01	.207E+04
10	-.655E-01	-.207E+04
11	-.119	.110E+04
12	-.119	-.110E+04
13	-17.3	418.
14	-17.3	-418.
15	.151	419.
16	.151	-419.
17	-.827E-01	158.
18	-.827E-01	-158.
19	-.115	147.
20	-.115	-147.

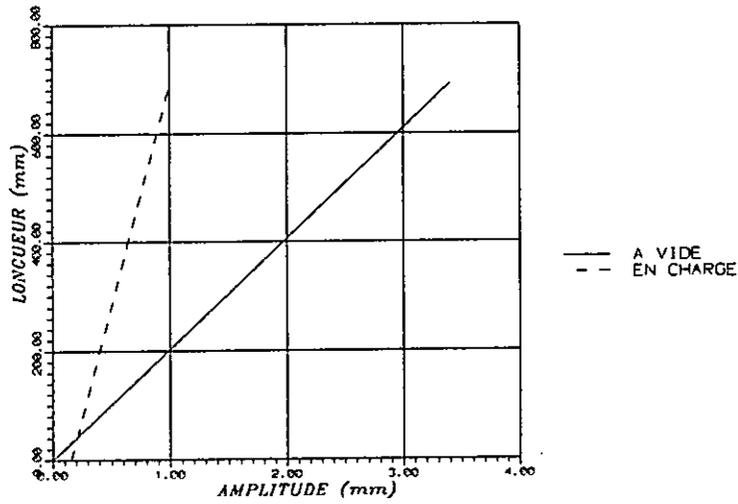
21	.302E-01	.000
22	-.118E-01	.000
23	-3.02	.000
24	.346	.000

Fin de calcul

Une fois on trouve les résultats on trace les graphes des modes des vibration, graphe de stabilité et les orbites. (Voire les graphes)

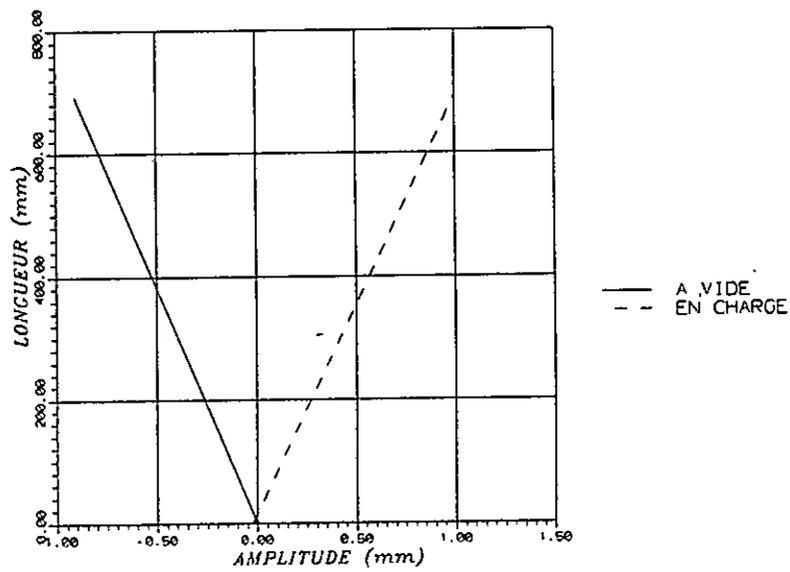
Graphe 6.1

GRAPHE... (LES MODES DE VIBRATIONS DE SEPARATEUR
A VIDE ET EN CHARGE)



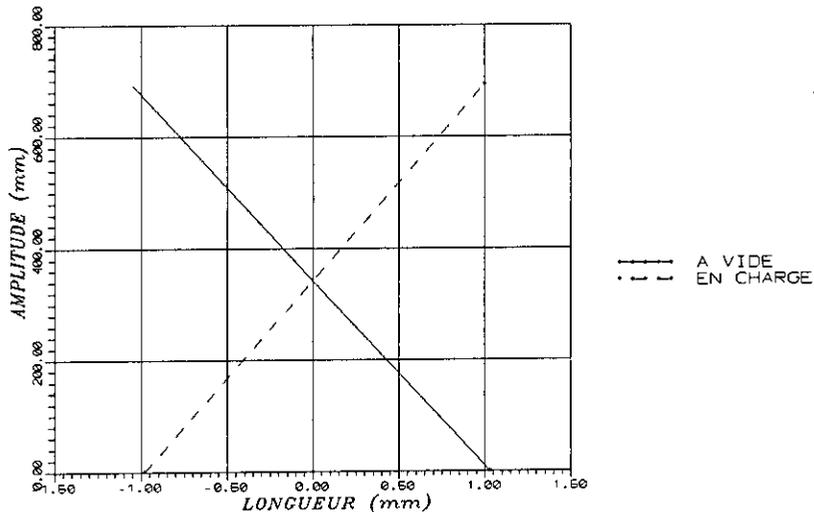
Graphe 6.2

GRAPHE... (LES MODES DE VIBRATIONS DE SEPARATEUR
A VIDE ET EN CHARGE)

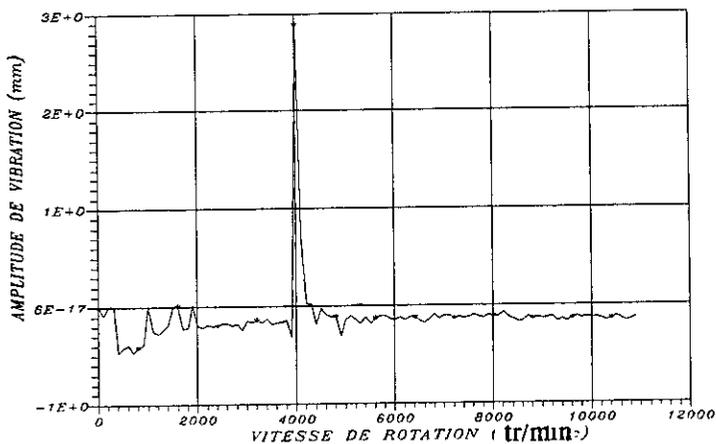


Graphe 6.3

GRAPHE... (LES MODES DE VIBRATIONS DE SEPARATEUR
A VIDE ET EN CHARGE)

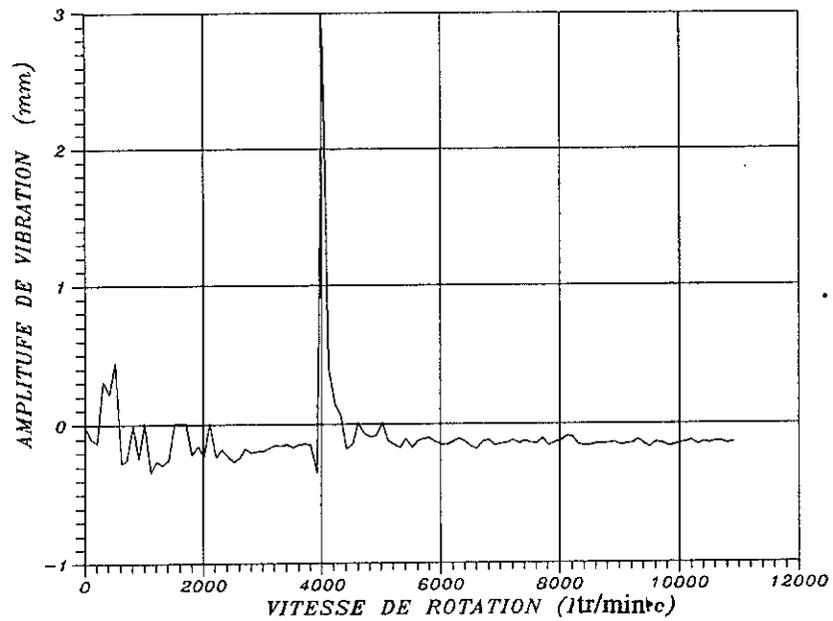


Graphe 6.4



Graphe... ETUDE DE LA STABILITE DE SEPARATEUR
CAS A VIDE

Graphe 6.5



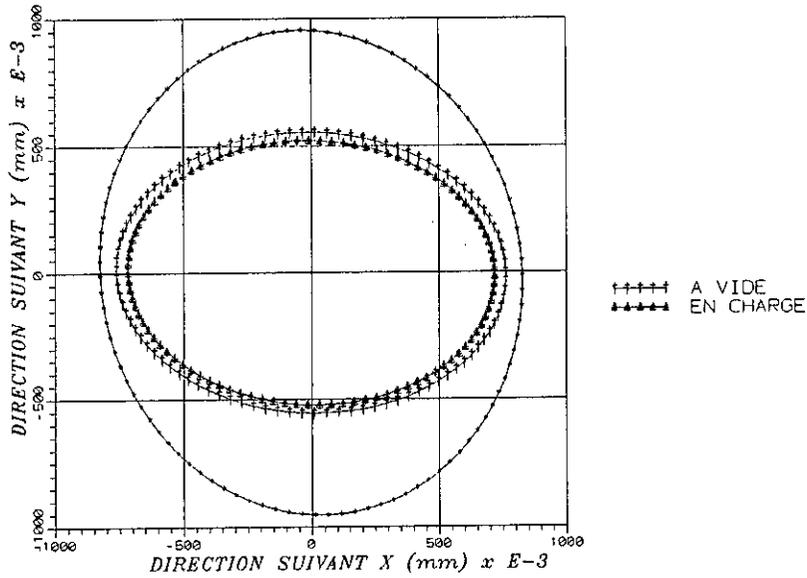
Graphe.... ETUDE DE LA STABILITE EN CHARGE

L'amplitude de vibration à 3998 tr/min est très importante. La largeur de la bande du pic est liée à l'amortissement .

Un palier cylindrique donne un bon amortissement .

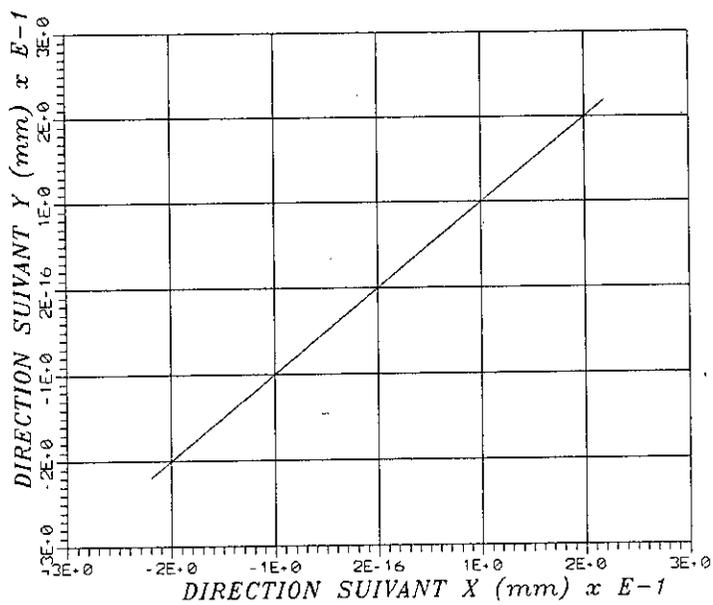
Graphe 6.6

GRAPHE... (LES MODES DE VIBRATIONS DE SEPARATEUR
A VIDE ET EN CHARGE)



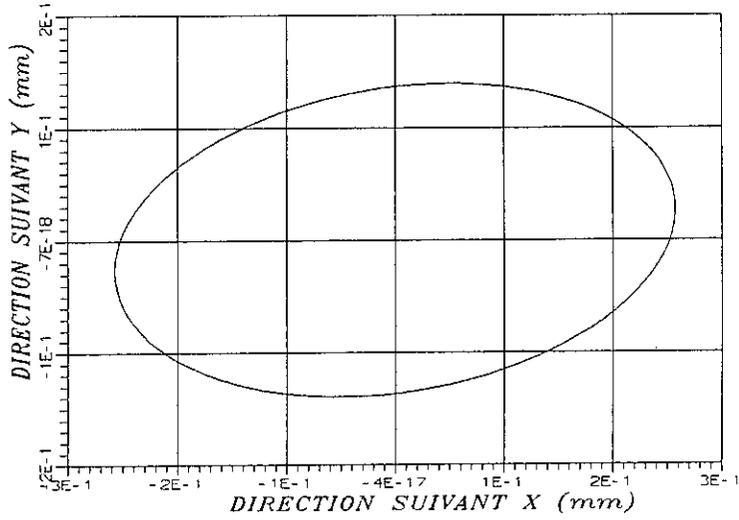
Graphe 6.7

GRAPHE... ORBITE DE VIBRATIONS DE SEPARATEUR EN CHARGE
vitesse de rotation 3998 tr/sec
STATION N: 01



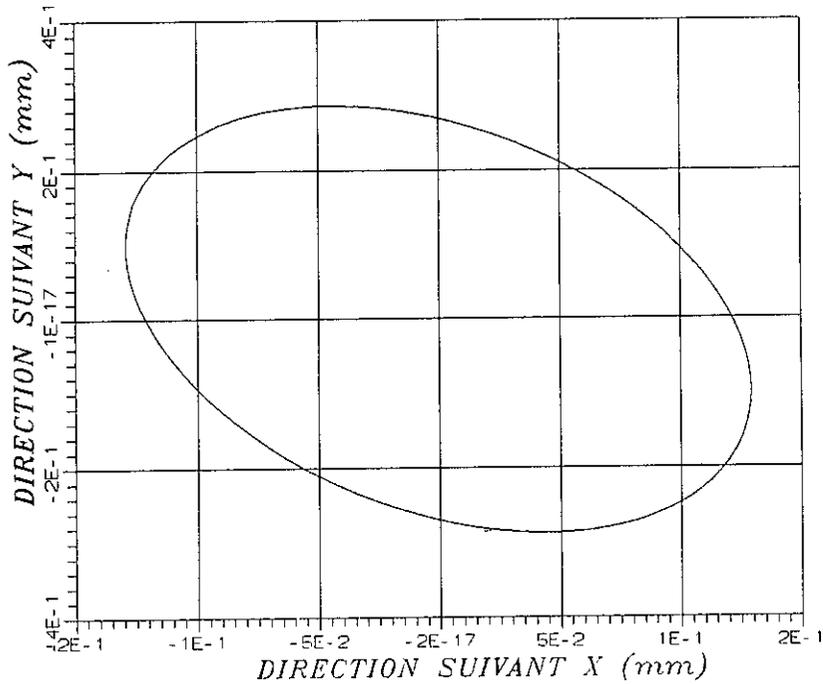
Graphe 6.8

GRAPHE... ORBITE DE VIBRATIONS DE SEPARATEUR A VIDE
STATION N: 01



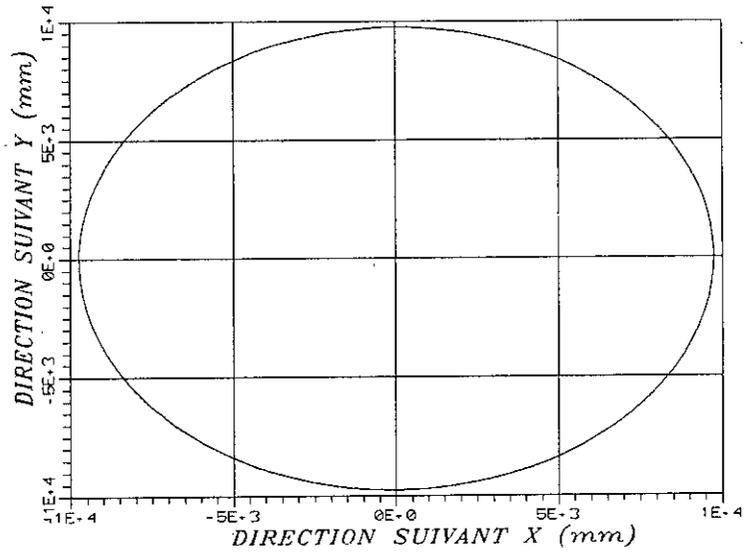
Graphe 6.9

GRAPHE... ORBITE DE VIBRATIONS DE SEPARATEUR EN CHARGE
STATION N: 02



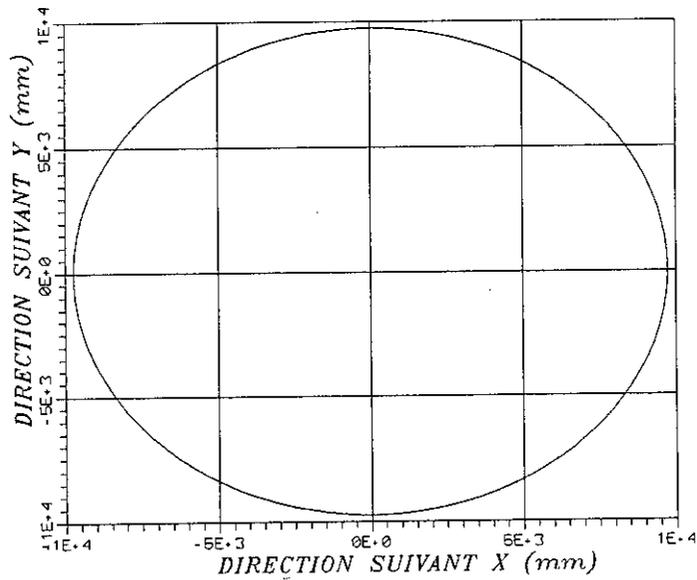
Graphe 6.10

GRAPHE... ORBITE DE VIBRATIONS DE SEPARATEUR A VIDE
STATION N: 03



Graphe 6.11

GRAPHE... ORBITE DE VIBRATIONS DE SEPARATEUR EN CHARGE
STATION N: 03



6.6 / INTERPRETATION DES COURBES

On remarque que pour les trois premiers modes (à vide et en charge, figure 6.1 à 6.3), le rotor se comporte comme étant rigide pour les deux premiers. Pour cette raison, le constructeur utilise des paliers (roulements) oscillants pour que l'arbre ne brise pas au moment de passage sur des vitesses critiques.

Lorsque le séparateur commence à tourner à vide de zéro jusqu'à 11000 tr/min, on observe la présence d'un certain nombre de pics d'amplitude. Le pic le plus important est d'amplitude d'environ 2.9 mm et de fréquence 66.6 Hz, voir graphe 6.4.

Il est toujours nécessaire que la fréquence, pour laquelle la machine tourne, soit suffisamment éloignée de la fréquence critique. Dans ce cas la vitesse critique est de 3998 tr/min à vide. Il faut de plus que les amplitudes au passage de la résonance (Vitesse critique est de 3998 tr/min) restent dans des limites raisonnables.

Lorsque ces deux critères de qualité ne sont pas remplis, il est indispensable de modifier la définition de la machine pour qu'ils le soient.

Lorsque le séparateur est en charge, on fait varier progressivement les fréquences de rotation et d'excitation. On observe la présence d'un pic à 2.8 mm de fréquence 67 Hz.

	Amplitude en (mm)	Fréquence en Hz
A vide	2.9	66.6
En charge	2.8	67

CONCLUSION

L'étude et l'analyse du comportement dynamique des structures aboutissent à des résultats qui donnent des informations non négligeables pour la compréhension de certains phénomènes.

Les machines industrielles vibrent et des efforts influent sur leurs organes.

Ces dernières décennies les méthodes numériques ont connu un essor considérable. Il n'en est pas de même pour les méthodes analytiques qui dépendent en majeure partie des progrès réalisés dans le domaine des mathématiques .

Il s'avère que l'étude analytique fournit des résultats dont les interprétations donnent une meilleure vision et compréhension du comportement dynamique des machines.

Dans cette thèse les objectifs essentiels consistent en des analyses analytiques de modèles de machines tournantes sans pour autant négliger l'aspect numérique.

On constate à travers l'étude bibliographique que les machines tournantes à arbres verticaux sont l'objet de peu de recherches en comparaison aux machines à arbres horizontaux . Pour cette raison, on s'intéresse particulièrement aux machines à arbres verticaux .

On opte pour des modèles mathématiques de machines à arbres verticaux. On démontre l'influence des efforts aux niveaux des paliers et que l'alignement des lignes d'arbre de grande puissance dépend de différents paramètres.

CONCLUSION

A partir de l'analyse des modèles, on aboutit à des systèmes d'équations différentielles du mouvements dont les résolutions sont analytiques et numériques.

L'application et la validation de la théorie a été faite sur de modèles de machines disponibles dans l'industrie Algérienne.