



32-530-719-3

32-530-719-3

République Algérienne Démocratique et Populaire

MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR  
ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

UNIVERSITE DE BLIDA  
INSTITUT DE MECANIQUE

**THESE DE MAGISTER**

**Présentée par :**

**BENTRAD HOCINE**

(INGENIEUR EN MECANIQUE)

**Spécialité : Mécanique**

**Option : Energetique**

ETUDE NUMERIQUE DE LA CONVECTION FORCEE  
DANS  
LA ZONE D'ENTREE DE L'ECHANGEUR DE CHALEUR

**Soutenu devant le jury composé par :**

Mr M.OUALI, Maître de conférences (USTB)	Président
Mr A.HARHAD, Maître de conférences (USTB)	Rapporteur
Mr N.AIT MESSAOUDENE, Maître de conférences (USTB)	Examineur
Mr M.DAMOU, Maître de conférences (USTB)	Examineur
Mr K.GRINE, Maître de conférences (USTB)	Examineur

République Algérienne Démocratique et Populaire



MINISTRE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR  
ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

UNIVERSITE DE BLIDA  
INSTITUT DE MECANIQUE

**THESE DE MAGISTER**

**Présentée par :**

**BENTRAD HOCINE**

(INGENIEUR EN MECANIQUE)

**Spécialité : Mécanique**

**Option : Energetique**

**ETUDE NUMERIQUE DE LA CONVECTION FORCEE  
DANS  
LA ZONE D'ENTREE DE L'ECHANGEUR DE CHALEUR**

**Soutenue devant le jury composé par :**

Mr M.OUALI, Maître de conférences (USTB)	Président
Mr A.HARHAD, Maître de conférences (USTB)	Rapporteur
Mr N.AIT MESSAOUDENE, Maître de conférences (USTB)	Examineur
Mr M.DAMOU, Maître de conférences (USTB)	Examineur
Mr K.GRINE, Maître de conférences (USTB)	Examineur

## DEDICACE

*Je dedie ce modeste travail :*

*à la mémoire de mes grand parents*

*à mon père et à ma mère à qui je dois tout*

*à ma sœur*

*à Abir , Habibou, Ouafa, Naïme et Ouahid*

*à Hazar, Brahim et M. Elhadi*

*à mes oncles Belkacem et Hamouda*

*et à toute le reste de ma famille*



# REMERCIEMENTS

Ce travail a été réalisé à l'institut de mécanique de l'université de Blida et dirigé par monsieur HARHAD AMEZIANE maître de conférences, à qui j'exprime toute ma profonde gratitude pour m'avoir guidé et orienté durant la réalisation de cette étude, qu'il trouve ici toute ma sincère reconnaissance.

Mes remerciements vont à monsieur le directeur de l'institut de mécanique, M. OUALI pour l'intérêt qu'il a porté à cette thèse en me faisant l'honneur de présider le jury.

Je tiens à remercier surtout messieurs les membres de jury, N. AIT MESSAOUDENE, M. DAMOU et K.. GRINE pour m'avoir fait l'honneur de juger et mettre en valeur ce modeste travail.

Mes remerciements vont aussi à l'ensemble du corps enseignant de l'institut de mécanique et en particulier messieurs M.AZINE et A.SOUAHI .

Je tiens également à remercier mes amis CHOUIKRAT Boukhalfa, Mohamed GUELMI, M.SETTOUF, F. BENCHIKH, C. KORCHI et F. BOUKBIR pour leur aide et soutien.

Mes remerciements s'adressent aussi à messieurs le directeur d'institut Djamel GUETARNI et Mohand.Said. HAMAIDI le directeur des études ainsi qu' à tout le staff de l'institut des sciences vétérinaires de l'université de BLIDA pour leur aide et soutien, qu'ils trouvent ici l'expression de ma profonde reconnaissance.

Je remercie vivement tous (tes) mes amis (es) :

Secraoui Aicha, Nadia Ouakli, Nadia Geroudja, A.Sabrina, C.Atika, Malika, C.Aicha, Assia, K.Ali Aek.Aissat, A.Kerbala, H.Abasse, A. Abdenour, I.Charif, H.Zermout, O.Sid Ahmed, Aicha, Zoubir, T.Djamel, Smail, H.Fares, C.Messaoud, C.Dadar pour leur encouragement et soutien.



# RESUME

La méthode des volumes finis a été appliquée pour la résolution numérique des équations de bilans de quantité de mouvement ( équations de NAVIER-STOKES ) et d'énergie sous leurs formes complètes, en écoulement laminaire. Cette étude numérique a permis de prédire le comportement dynamique et thermique d'un fluide incompressible dans la zone d'entrée des conduites circulaire et annulaire.

Les résultats obtenus pour le cas du tube circulaire et de l'espace annulaire se comparent favorablement avec ceux des références bibliographiques. La combinaison de ces deux types de configuration géométrique a permis ensuite de simuler les échanges de chaleur dans les échangeurs à courants parallèles et à courants inversés. Les effets des nombres de Prandtl, de Reynolds et du rapport des capacités calorifiques des fluides chaud et froid sont considérés pour la détermination des performances thermiques de l'échangeur.

# SOMMAIRE

PAGE :

## NOMENCLATURE

## INTRODUCTION

1

## I/ ETUDE BIBLIOGRAPHIQUE

## II/ FORMULATION MATHÉMATIQUE

2-1 Introduction	10
2-2 Modèle mathématique	11
2-3 Equations adimensionnelles	13
2-4 Conditions aux limites	15
2-5 Coefficient d'échange de chaleur	16
2-6 Température de mélange	17

## III/ METHODE DE RESOLUTION

3-1 Introduction	18
3-2 Principe de la méthode	19
3-3 Maillage	20
3-4 Discrétisation de l'équation de transport diffusion	23
3-4. 1 Formulation généralisée	25
3-4. 2 Propriétés des coefficients A et B	27
3-4. 3 Discrétisation	28

3-4. 4	Représentation des termes de convection et de diffusion	29
3-5	Discrétisation des équations de quantité de mouvement	41
3-5. 1	Introduction	41
3-5. 2	Maillage décalé	41
3-5. 3	Discrétisation	43
3-5. 4	Equation de correction de vitesse	44
3-5. 5	Equation de correction de pression	46
3-5. 6	Equation de pression	47
3-5. 7	Algorithme " SIMPLER "	49
3-6	Résolution du système d'équations	50
3-7	Stabilité et convergence	51
3-8	Critère de convergence	52

#### IV/ PRESENTATION DU CODE " SIMPLER "

4-1	Introduction	54
4-1	Sous-programme " SETUP "	56
4-2	Sous-programme " SOLOVE "	56
4-3	Sous-programme " SUPPLY "	56
4-4	Sous-programme " DIFLOW "	57
4-5	Sous-programme " USER "	57

#### V/ ETUDE NUMERIQUE DE LA CONVECTION FORCEE

5-1	Introduction	59
5-2	Etude de la convection thermique dans le tube	59
5-2. 1	Présentation du problème	59
5-2. 2	Résultats et discussion	60
5-2. 2.1	Choix du maillage	60
5-2. 2.2	Effet du nombre de PRANDLT	63
5-2. 2.3	Effet de la diffusion axiale de quantité de mouvement	73
5-2. 2.4	Effet de la diffusion axiale de chaleur	77
5-2. 2.5	Coefficient de friction	77



5-2. 2.6	Longueur d'établissement	79
5-3	Etude de la convection thermique dans l'espace annulaire	80
5-3. 1	Présentation du problème	80
5-3. 2	Résultats et discussion	82
5-3. 2.1	Effet du nombre de PRANDLT	82
5-3. 2.2	Effet de la diffusion axiale de quantité de mouvement	91
5-3. 2.3	Effet de la diffusion axiale de chaleur	91
5-3. 2.4	Longueur d'établissement	96

## VI/ APPLICATION AUX ECHANGEURS DE CHALEUR

6-1	Introduction	97
6-2	Présentation du problème	97
6-3	Modélisation	98
6-4	Conditions aux limites	100
6-5	Maillage	101
6-6	Paramètres d'échange de chaleur	102
6-6. 1	Nombre de NUSSELT	102
6-6. 2	Coefficient d'échange global	102
6-6. 3	Efficacité de l'échangeur de chaleur	103
6-6. 4	Nombre d'unité de transfert (NTU)	104
6-7	Résultats et interprétation	106
6-7. 1	Echangeur à co-courant	106
6-7. 2	Echangeur à contre courant	112

## CONCLUSION

## BIBLIOGRAPHIE

## ANNEXES

ANNEXE A : ALGORITHME " TDMA "

ANNEXE B : TECHNIQUES DE RELAXATION

ANNEXE C : EFFICACITE DE L'ECHANGEUR

# NOMENCLATURE

- $A_m$  ( $m=e,w,n,s$ ) : Aire de l'interface
- $A(P_m)$  : Fonction du nombre de Peclet, équation . (3-15)
- $a_M$  ( $M=E,W,N,S$ ) : Coefficient de l'équation discrétisée (3-22)
- $b$  : Termes constant dans l'équation discrétisée (3-22)
- $a_{nb}$  : Coefficient se rapportant aux noeuds voisins de P, équation (3-23)
- $a_p$  : Coefficient se rapportant au noeud P, équation (3-22)
- $B(P_m)$  : Fonction du nombre de Peclet, équation . (3-15)
- $C_p$  : Chaleur massique à pression constante (J/KgK)
- $D_m$  : Conductance thermique équation . (3-25)
- $D_h$  : Diamètre hydraulique
- $d_m$  : Coefficient du terme de différence de pression, équation . (3-66)
- $F_m$  : Débit massique équation . (3-9)
- $h$  : Coefficient d'échange convectif (W/m<sup>2</sup>K)
- $J_m$  : Flux total , équation . (3-3)
- $k$  : Conductivité thermique (W/mK)
- $M$  : Débit massique
- NTU : Nombre d'unité de transfert
- $Nu$  : Nombre de Nusselt ( $Nu = hD_h/k$ )
- $Nu_g$  : Nombre de Nusselt global
- $Nu_m$  : Nombre de Nusselt moyen
- $P$  : Pression
- $P'$  : Correction de pression
- $P_m$  ( $e,w,n,s$ ) : Nombre de Peclet  $P_m = \frac{F_m}{D_m}$
- $Pr$  : Nombre de Prandtl ( $Pr = \nu / \alpha$ )
- $Q, q$  : Flux de chaleur (W)
- $R$  : Rapport des rayons du tube et l'espace annulaire
- $Re$  : Nombre de Reynolds ( $Re = \frac{\rho v D_h}{\mu}$ )
- $R_i$  : Rayon interne du tube de l'échangeur

$R_{i0}$  : Rayon externe du tube de l'échangeur  
 $R_o$  : Rayon extérieur de l'espace annulaire de l'échangeur  
 $r$  : Coordonnée radiale  
 $S_\phi$  : Terme source relatif à la variable  $\phi$ , équation (3-1)  
 $S_c$  : Partie constante résultant de la linéarisation du terme source, équation (3-28)  
 $S_p$  : Coefficient de  $\phi_p$  dans l'expression du terme source linéarisé, équation (3-28)  
 $T$  : Température  
 $T_e$  : Température d'entrée du fluide  
 $T_s$  : Température de sortie du fluide  
 $T_m$  : Température de mélange du fluide  
 $T_w$  : Température de la paroi, équation (2-9)  
 $U$  : Vitesse suivant la direction  $z$   
 $U_g$  : Coefficient d'échange global  
 $U_m$  : Vitesse moyenne de l'écoulement  
 $V$  : Vitesse suivant la direction  $r$   
 $z$  : Coordonnée axiale

Liste des symboles grecs :

$\alpha$  : Diffusivité thermique ( $m^2/s$ )  
 $\alpha$  : Coefficient de pondération, équation (3-14)  
 $\alpha_j$  : Élément de la matrice tridiagonale  
 $\alpha_\phi$  : Facteur de sous relaxation relatif à la variable  $\phi$   
 $\beta$  : Facteur multiplicatif, équation (3-14)  
 $\beta_j$  : Élément de la matrice tridiagonale  
 $\Delta r$  : Largeur du volume de contrôle  
 $\Delta V$  : Volume élémentaire  
 $\Delta z(\Delta r)$  : Distance entre deux noeuds voisins dans la direction  $z$  (ou  $r$ )  
 $\Delta z$  : Longueur du volume de contrôle  
 $\Gamma_\phi$  : Coefficient de diffusion relatif à la variable  $\phi$   
 $\gamma_i$  : Élément de la matrice tridiagonale  
 $\varepsilon$  : Rendement de l'échangeur, équation (6-10), (6-11) et annexe C



$\varepsilon_\phi$  : Erreur sur la solution, équation (3-79)

$\mu$  : Viscosité dynamique (Kg m/s)

$\nu$  : Viscosité cinématique (m<sup>2</sup>/s)

$\phi$ : Variable dépendante

$\Omega$  : Domaine de calcul

### Indices Inférieurs

1: relatif au fluide froid

2: relatif au fluide chaud

E: Noeud voisin du noeud P suivant la direction z

e: Face du volume de contrôle entre P et E

e: Relatif à l'entrée de l'échangeur

N: Noeud voisin du noeud P suivant la direction r

n: Face du volume de contrôle entre P et N

P: Noeud principal

s: Relatif à la sortie de L'échangeur

S,s: Similaire à N,n

W,w: Similaire à E,e

### Indices supérieurs

\*: Relatif à une valeur estimée

' : Relatif à une correction d'une variable dépendante  $\phi$

k: Relatif à une itération

## I N T R O D U C T I O N

Durant ces dernières années, l'étude des écoulements dans les régions d'entrée des conduites a suscité un grand intérêt de la part de plusieurs chercheurs. En effet, à l'entrée des conduites, les profils de vitesse et de température varient simultanément en fonction des distances radiale et axiale. Par ailleurs, c'est dans cette partie de l'échangeur que les échanges thermiques et les frottements sont plus intenses. La connaissance des champs de vitesse et de température dans cette zone permet de déterminer le coefficient d'échange de chaleur global et le facteur de friction global. Ces résultats sont des paramètres importants dans le dimensionnement de l'échangeur et pour l'estimation de la puissance de pompage. Les méthodes classiques utilisées pour la conception des échangeurs thermiques sont basées sur des modèles monodimensionnels simples qui ne tiennent pas compte de la nature réelle de l'écoulement dans la région d'entrée.

En vue d'une conception optimale de l'échangeur de chaleur, la compréhension du comportement dynamique et thermique du fluide est indispensable dans la zone d'entrée. Dans cet objectif, la méthode des volumes finis est utilisée pour la résolution numérique des équations NAVIER-STOKES et de la conservation d'énergie sous leurs formes complètes. Cette méthode est utilisée en premier lieu à la conduite circulaire et puis à l'espace annulaire. L'assemblage des deux configurations géométriques précédentes permettra par la suite de simuler les échanges thermiques dans les échangeurs de chaleur à contre-courants et à co-courants.

La présente étude est organisée de la façon suivante:

Le premier chapitre est consacré à une revue bibliographique sur l'étude dynamique et thermique dans la conduite et l'espace annulaire.

Le deuxième chapitre consiste en la formulation mathématique de la convection forcée dans la zone d'entrée de la conduite et de l'espace annulaire.

Le chapitre trois concerne la présentation de la méthode des volumes finis et son application aux équations régissant le phénomène de la convection de chaleur dans la zone d'entrée des conduites.

Dans Le chapitre quatre, les grandes lignes du code de calcul " SIMPLER " sont exposées.

Au chapitre cinq, nous présenterons et discuterons les résultats obtenus par la simulation numérique de la convection forcée dans le tube, l'espace annulaire.

Dans le chapitre six, une application aux échangeurs de chaleur est présenté pour deux configurations d'écoulement, à co-courant et à courant inversé.

Et en dernier lieu, nous donnerons une conclusion générale et des suggestions concernant la présente étude.



ETUDE BIBLIOGRAPHIQUE

Les premiers travaux sur la convection de chaleur dans les régimes d'entrée des conduites sont ceux dûs à GRAETZ [1]. Cet auteur a supposé que l'écoulement hydrodynamique est établi tandis que le régime thermique est en cours d'établissement. Il propose alors, une solution analytique de l'établissement thermique dans la zone d'entrée d'une conduite dont la paroi est soumise à une température uniforme. Cette solution se présente sous forme de serie de fonctions infinie.

$$T(x^+, r^+) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n R_n(r^+) \text{Exp}(-\lambda_n^2 \cdot x^+) \quad (1-1)$$

- avec:  $x^+$  : distance axiale adimensionnelle  
 $r^+$  : distance radiale adimensionnelle  
 $\lambda_n$  : valeurs propres.  
 $R_n$  : fonctions propres correspondantes  
 $C_n$  : constantes à déterminer

A partir de l'équation (1-1) ont été déduits le flux de de chaleur, la temperature de mélange ainsi que le nombre de NUSSELT local.

$$NU_x = \frac{\sum_{n=0}^{\infty} G_n \cdot \text{Exp}(-\lambda_n^2 \cdot x^+)}{2 \sum_{n=0}^{\infty} (G_n / \lambda_n^2) \cdot \text{Exp}(-\lambda_n^2 \cdot x^+)} \quad (1-2)$$

Les résultats des valeurs propres et fonctions propres sont également présentées dans le tableau ci dessous.

n	$\lambda_n$	$G_n$
0	7.312	0.749
1	44.62	0.544
2	113.8	0.463
3	215.2	0.414
4	348.5	0.382
.	.	.
.	.	.
n>4	$4n + \frac{8}{3}$	$1.01276 \lambda_n^{-0.33}$

Tableau (1-1) Valeurs propres et fonctions propres, Ref[1]

Ces résultats sont valables lorsque les nombres de PRANDTL et PECLET sont respectivement supérieure ou égaux à 5 et à 100.

Par la suite, KAYS [2] a amélioré le modèle précédent afin de tenir compte du problème de l'établissement dynamique, pour des nombres de PRANDTL proches de l'unité, en empruntant le profil de vitesse obtenu par LANGHAAR [3]. Cependant le modèle proposé par KAYS, ne tient pas compte de la diffusion axiale de la chaleur et de la convection radiale. En d'autre termes, l'équation différentielle utilisée est du type parabolique ou couche limite.

Les distributions de la vitesse axiale et de la température ainsi que la variation axiale du nombre de NUSSELT obtenues par KAYS sont respectivement indiquées dans les figures (1-1),(1-2) et (1-3).

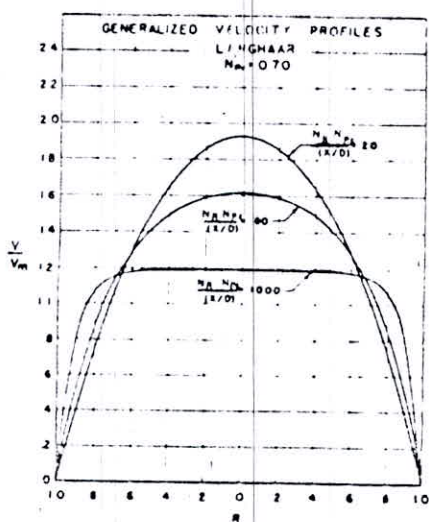


Figure (1-1) Vitesses  
Ref [2]

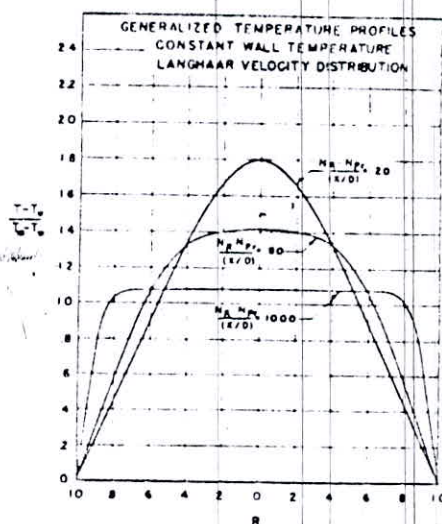
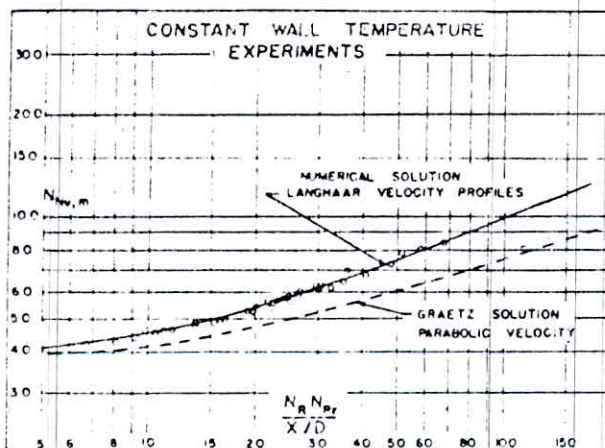


Figure (1-2) Temperatures  
Ref [2]



Fi (1-3) Variation axiale du nombre  
de NUSSELT, Ref [2]

D'après les figures (1-1) et (1-2), on constate que les régimes dynamique et thermique s'effectuent simultanément pour le cas de l'air ( $Pr=0.7$ ). On constate également dans la figure (1-3) que les résultats obtenus par KAYS se rapprochent beaucoup mieux des résultats expérimentaux. Alors que cela n'est pas le cas avec ceux obtenus par GRATEZ.



FW.SCHMIDT et D.ZELDIN [4], ont proposé une solution numérique au problème de l'établissement thermique en tenant compte de la diffusion axiale de la chaleur. L'effet de cette dernière est observé dans la figure (1-4) par des variations plus importantes du nombre de NUSSELT et de la longueur d'établissement à l'entrée du tube pour des valeurs du nombre de PECKET inferieures à 100. Ces résultats ont été également confirmés par DK.HENNECK [5] dans ses travaux sur la convection de chaleur dans la zone d'entrée des tubes (voir la partie droite figure (1-5))

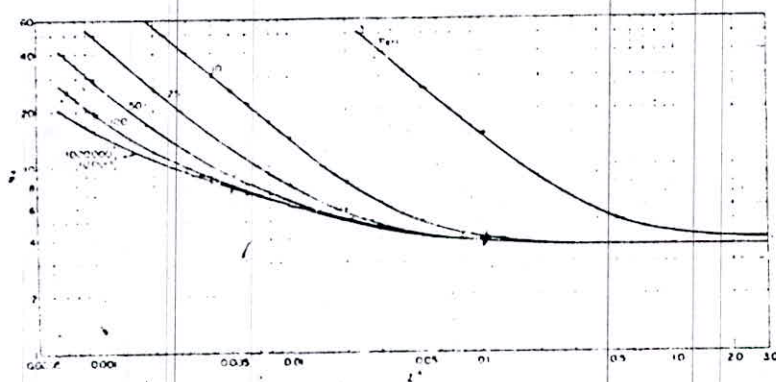


Figure (1-4) Variation axiale du nombre de NUSSELT, Ref [4]

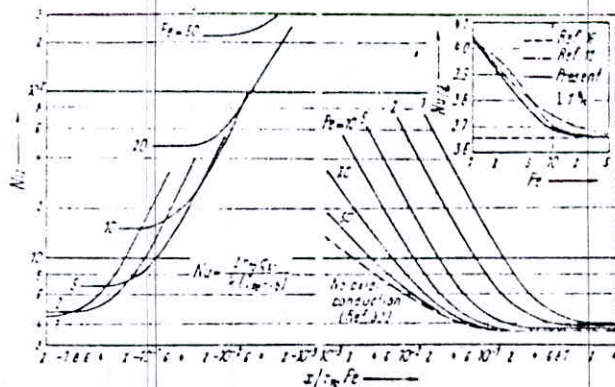


Figure (1-5) Variation axiale du nombre de NUSSELT, Ref [5]

L'étude de l'établissement dynamique dans la zone d'entrée a fait aussi l'objet de plusieurs investigations. R. HORNBECK [6] a résolu les équations de conservation de quantité de mouvement sans tenir compte de la diffusion axiale mais en prenant en considération la convection radiale. D'après la figure (1-6) on constate que les profils de la vitesse axiale sont en cours d'établissement depuis l'entrée de la conduite et se comparent qualitativement avec ceux présentés dans la figure (1-2).

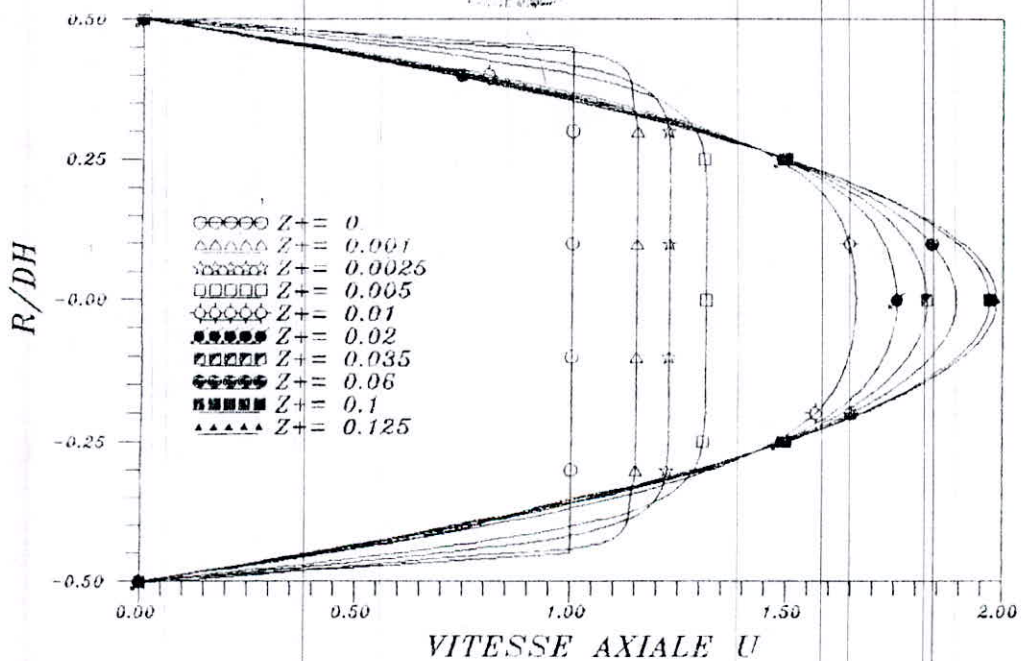


Figure (1-6) Etablissement dynamique, Ref [6]

nous remarquons aussi d'après la figure (1-6) que le profil de vitesse en regime établi est atteint à partir de la distance  $Z^+=0.1$

A.P. HATTON ET A. QUARMBY [7], ont proposé une solution analytique du problème de GRATEZ dans l'espace annulaire sous une forme similaire à celle de la référence [1]. Pour cela ils ont utilisés les conditions aux limites suivantes:

- Temperature uniforme au niveau de la paroi interne.
- Paroi externe isolée

Le nombre de NUSSELT obtenu s'exprime par :

$$Nu = \frac{2R_i + 1}{R_i} \cdot \frac{\sum_{n=0}^{\infty} G_n \cdot \text{Exp}(-\lambda_n^2 \cdot L)}{\sum_{n=0}^{\infty} (G_n / \lambda_n^2) \cdot \text{Exp}(-\lambda_n^2 \cdot L)} \quad (1-3)$$

Avec:

$R_i$  : rayon interne

$\lambda_n$  : valeurs propres.

$G_n$  : fonctions propres correspondantes

$$L = \frac{4}{Re \ Pr} \left( \frac{x}{DH} \right)$$

DH : diamètre hydraulique

Les valeurs et fonctions propres sont données dans le tableau ci dessous.

n	Ri = 0.2		Ri = 1.0		Ri = 20.0	
	$\lambda_n$	Gn	$\lambda_n$	Gn	$\lambda_n$	Gn
1	1.124	0.849	1.383	2.651	1.546	4.407
2	4.582	0.363	4.767	1.553	4.855	8.133
3	7.830	0.291	8.052	1.259	8.133	13.957
4	11.047	0.255	11.332	1.118	11.403	21.449
5	14.225	0.232	14.583	1.035	14.677	30.955
6	17.453	0.216	17.841	0.995	17.944	42.111
7	20.649	0.204	21.109	0.977	21.011	54.490
8	23.843	0.194	24.385	0.966	24.077	68.498
9	27.036	0.185	27.661	0.961	27.144	84.498
10	30.228	0.178	30.865	0.955	30.212	102.441

Tableau (1-2) valeurs et fonctions propres, Ref [7]



Le problème précédent a été résolu également par une méthode numérique proposée par A.MOJTABI et J.P CALIAGIRONE [8], en utilisant la méthode des éléments finis. D'autres travaux plus récents [9],[10],[11] et [12], ont été effectués pour la résolution des équations de conservation de quantité de mouvement et de l'énergie sous leurs formes complètes.

Dans cette optique, on s'intéresse dans une première étape à la maîtrise de la méthode des volumes finis afin de l'adapter à l'étude de la convection forcée dans la zone d'entrée des conduites en écoulement laminaire. Les résultats de la première partie serviront par la suite pour l'étude du transfert thermique dans les échangeurs de chaleur.



FORMULATION MATHÉMATIQUE

2-1) INTRODUCTION

Les équations régissant le phénomène de la convection forcée dans la zone d'entrée du problème physique décrit dans la figure (2-1), sont les équations de conservation de quantité de mouvement et d'énergie en coordonnées cylindriques, d'un fluide incompressible, newtonnien en écoulement laminaire.

A l'entrée d'une conduite, la répartition des vitesses est uniforme. Les particules de fluides voisines des parois sont freinées progressivement, engendrant ainsi la couche limite. Tandis que les particules de la zone centrale, qui n'ont pas subi l'effet de frottement seront accélérées afin qu'il y est conservation du débit total à travers toute section.

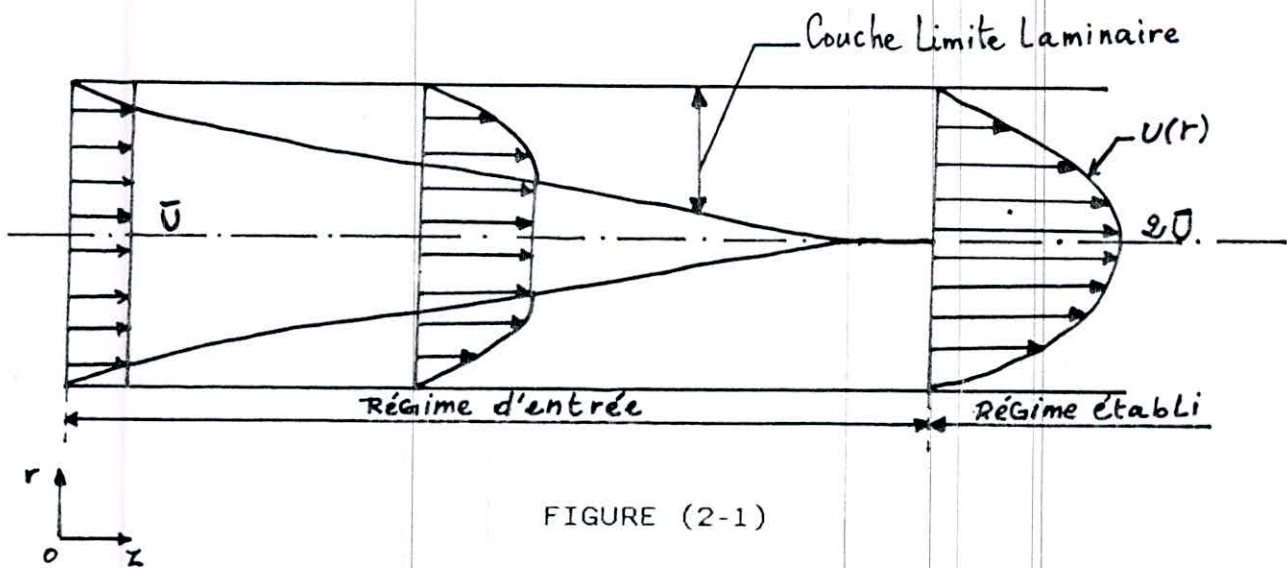


FIGURE (2-1)

Cette évolution où l'écoulement est non établi se poursuit sur une distance appelée longueur d'entrée. Elle représente la distance de l'entrée du tube au point où l'épaisseur de la couche limite couvre toute la section de passage, il s'agit donc de l'établissement dynamique.

Du point de vue thermique on est en présence d'un phénomène similaire à ce dernier et qui est dû au gradient de température. En effet le fluide se trouvant dans la couche thermique s'échauffe ou se refroidit. Mais, à l'extérieur de la couche limite il garde la température qu'il avait à l'entrée du tube. Cependant une fois que l'établissement thermique est atteint, tout le fluide participe à l'échange de chaleur, alors qu'à l'entrée seules les couches proches de la paroi y participent.

## 2-2) MODELE MATHÉMATIQUE

Pour la modélisation du problème physique décrit dans la figure (2-1) nous adopterons des hypothèses simplificatrices suivantes:

- Ecoulement bidimensionnel en  $(r, z)$ , axi-symétrique en  $\theta$

$$- \text{d'où } w = 0 \quad \text{et} \quad \frac{\partial}{\partial \theta} = 0 \quad (2-1)$$

- Régime permanent; Ce qui conduit à :

$$- \frac{\partial}{\partial t} = 0 \quad (2-2)$$

- Les propriétés physiques du fluide sont constantes et évaluées à une même température de référence.

$$- \rho, K \text{ et } C_p \mu \text{ sont constants}$$

■ Convection naturelle négligeable.

■ Dissipation visqueuse négligeable.

Compte tenu de ces hypothèses les équations, gouvernant le phénomène physique de la convection forcée dans la conduite, se traduisent par :

1°/ Equation de continuité :

$$\rho \left[ \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial}{\partial r} (r \cdot v) + \frac{\partial u}{\partial z} \right] = 0 \quad (2-4)$$

2°/ Equation de quantité de mouvement suivant r :

$$\rho \left[ u \frac{\partial v}{\partial z} + v \frac{\partial v}{\partial r} \right] = - \frac{\partial p}{\partial r} + \mu \cdot \left[ \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial v}{\partial r} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{\partial v}{\partial z} \right) - \frac{v}{r^2} \right]$$

(2-5a)

3°/ Equation de quantité de mouvement suivant z :

$$\rho \left[ u \frac{\partial u}{\partial z} + v \frac{\partial u}{\partial r} \right] = - \frac{\partial p}{\partial z} + \mu \cdot \left[ \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial u}{\partial r} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{\partial u}{\partial z} \right) \right]$$

(2-5b)

4°/ Equation d'énergie :

$$\rho \cdot c_p \left[ u \frac{\partial T}{\partial z} + v \frac{\partial T}{\partial r} \right] = k \left[ \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial T}{\partial r} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{\partial T}{\partial z} \right) \right]$$

(2-6)



2-5) EQUATION ADIMENSIONNELLE

L'emploi de la variable adimensionnelle permet d'exprimer la réalité des phénomènes physiques indépendamment des systèmes de mesures pour permettre d'avoir des informations généralisées à une variété de problèmes de mécanique de fluide ou de transferts de chaleur ayant les mêmes grandeurs de coefficients de similitudes. En effet, pour ramener les équations développées précédemment sous une forme adimensionnelle, il est nécessaire de définir des grandeurs caractéristiques des changements de variables. Ainsi on adoptera pour nos équations les variables réduites suivantes :

$$\begin{cases} z^+ = \frac{z}{D} \\ r^+ = \frac{r}{D} \end{cases} \quad (2-7)$$

D : représente le diamètre hydraulique de la conduite.

$$\begin{cases} U^+ = \frac{U}{U_m} \\ V^+ = \frac{V}{U_m} \\ P^+ = \frac{P}{\rho U_m^2} \end{cases} \quad (2-8)$$

U<sub>m</sub> : représente la vitesse moyenne.

$$\begin{cases} T^+ = \frac{T - T_w}{T_e - T_w} \end{cases} \quad (2-9)$$

T<sub>e</sub> et T<sub>w</sub>, représentent respectivement la température à l'entrée et à la paroi.



Ces changements de variables effectués sur les équations de mouvement et d'énergie conduisent à des équations réduites qui peuvent être exprimées d'une manière générale sous une forme conservative d'une variable physique  $\phi$ . Elle peut être la vitesse dans une direction donnée s'il s'agit des équations de mouvement ou de la température pour l'équation de l'énergie.

L'équation généralisée de transport diffusion est donnée sous la forme suivante :

$$\left( \frac{\partial}{\partial z} (\rho U\phi) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r\rho V\phi) \right) = \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial}{\partial r} (\Gamma_\phi \cdot r \frac{\partial \phi}{\partial r}) + \frac{\partial}{\partial z} (\Gamma_\phi \cdot \frac{\partial \phi}{\partial z}) + S_\phi \quad (2-10)$$

$\phi$  : Représente la variable dépendante, qui peut être U, V ou T

$\Gamma_\phi$  : Coefficient de diffusion

$S_\phi$  : Terme source

Les expressions de  $\Gamma_\phi$  et  $S_\phi$  sont rapportées dans le tableau (2-1).

EQUATIONS	$\phi$	$\Gamma_\phi$	$S_\phi$
continuité	1	0	0
Qté de Mvt svt Z	U	$\frac{1}{Re}$	$-\frac{\partial p}{\partial z}$
Qté de Mvt svt r	V	$\frac{1}{Re}$	$-\frac{\partial p}{\partial r} - \frac{\Gamma_\phi V}{r^2}$
Eq d'énergie	T	$\frac{1}{Pe}$	0

Tableau (2-1) Description de l'équation (2-10)

Le signe (+) est omis pour simplifier les équations

2-6) CONDITIONS AUX LIMITES

Dans notre étude, on s'intéressera à deux types de géométrie : la conduite et l'espace annulaire. Les conditions aux limites seront spécifiées comme suit.

■ Sur les parois

- condition de non glissement

$$r = 0.5 \quad U=0 \text{ et } V=0 \text{ (conduite)}$$

$$r = \frac{1}{2(R-1)}, \quad r = \frac{R}{2(R-1)} \quad U=0 \text{ et } V=0 \text{ (espace annulaire)}$$

- température imposée aux parois pour l'équation d'énergie

■ L'entrée

Le choix du profil à l'entrée de la conduite est d'une très grande importance. Dans notre étude, on considérera un profil uniforme de température et de vitesse.

■ Condition de symétrie pour la conduite :

sur l'axe on a :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial T}{\partial r} = 0 \\ \frac{\partial U}{\partial r} = 0 \\ V = 0 \end{array} \right.$$

■ La sortie

à la sortie, les conditions aux limites sont inconnues, pour le cas des équations de mouvement le profil de vitesse axiale est déterminé à partir de la conservation de débit massique entre l'entrée et la sortie (annexe D). Tandis que le profil de température à la sortie sera pris égale à celui des noeuds voisin de gauche.

---

2-7 COEFFICIENT D'ÉCHANGE DE CHALEUR

Le taux d'échange de chaleur est exprimé sous forme adimensionnelle par le nombre de Nusselt, qui représente le rapport du taux d'échange par convection à celui qui est transmis par conduction au fluide.

■ Température imposée

$$Nu = \frac{h D}{K} \quad (2-11)$$

$$q'' = h ( T_w - T_m ) \quad (2-12)$$

$q''$  représente la densité de flux à la paroi donnée par l'expression suivante :

$$q'' = - \left. \frac{\partial t}{\partial r} \right|_{r=R} \quad (2-13)$$

ou encore en utilisant les variables réduites on a :

$$Nu = \frac{- \frac{\partial T}{\partial r}}{( T_w - T_m )} \quad (2-14)$$

$T_w$  : Température de la paroi

$T_m$  : Température de mélange

2-8 TEMPERATURE DE MELANGE

La température de mélange est la température moyenne du fluide à une position donnée. Elle est déterminée comme suit :

$$\dot{M} C_p T_m = \int \rho C_p T U 2 \pi r dr \quad (2-15)$$

avec

$$\dot{M} = \rho U_m A \quad (2-16)$$

Ainsi en utilisant les variables réduites, la température de mélange pour les deux cas de géométrie considérés est:

■ Tube circulaire

$$T_m = 8 \int_0^{0.5} T U r dr \quad (2-17)$$

■ Espace annulaire

$$T_m = \frac{8}{(R+1)} \int_{\frac{1}{2(R-1)}}^{\frac{R}{2(R-1)}} T U r dr \quad (2-18)$$

avec

$$R = \frac{R_o}{R_i o} \quad (2-19)$$

( R Le rapport des rayons externe et interne )



## CHAPITRE : 3

# METHODE DE RESOLUTION

### 3-1) INTRODUCTION

Les équations de conservation de quantité de mouvement et d'énergie régissant le phénomène de convection forcée dans les conduites, sont des équations différentielles aux dérivées partielles non linéaires et elliptiques. Du moment que ces équations ne sont pas couplées, on pourra les résoudre séparément. Vu la complexité mathématique de ces dernières, on fait appel aux méthodes de résolution numérique.

Durant ces dernières décennies, plusieurs méthodes numériques ont été développées pour la résolution des équations aux dérivées partielles rencontrées dans le domaine de la mécanique des fluides et de la transmission de la chaleur. On peut citer parmi ces méthodes:

- La Méthodes des différences finies
- La Méthode des volumes finis
- la Méthode des éléments finis

Pour Le système d'équations considéré nous avons choisi la méthode des volumes finis pour sa simplicité et surtout pour son approche physique du problème en question. Cette méthode a été développée par PATANKAR et SPALDING en 1980 et a prouvé son efficacité dans la résolution des problèmes de mécanique des fluides et de transfert de chaleur.

Un code de calcul basé sur l'algorithme SIMPLER [13] a été mis au point pour le traitement numérique des équations de mouvement et d'énergie.

3-2) PRINCIPE DE LA METHODE

Le principe de la méthode des volumes finis, consiste à partager le domaine de calcul en un ensemble de petits volumes élémentaires. Chaque volume de contrôle contient un noeud central sorte que l'ensemble de ces noeuds forme une grille. Pour deux noeuds consécutifs, les volumes de contrôle respectifs doivent posséder un côté commun appelé interface et de manière à ce que la réunion de tous les volumes forme le domaine de calcul. Ceci va mettre en évidence la conservation des flux locaux et globaux au sein du volume de contrôle et du domaine.

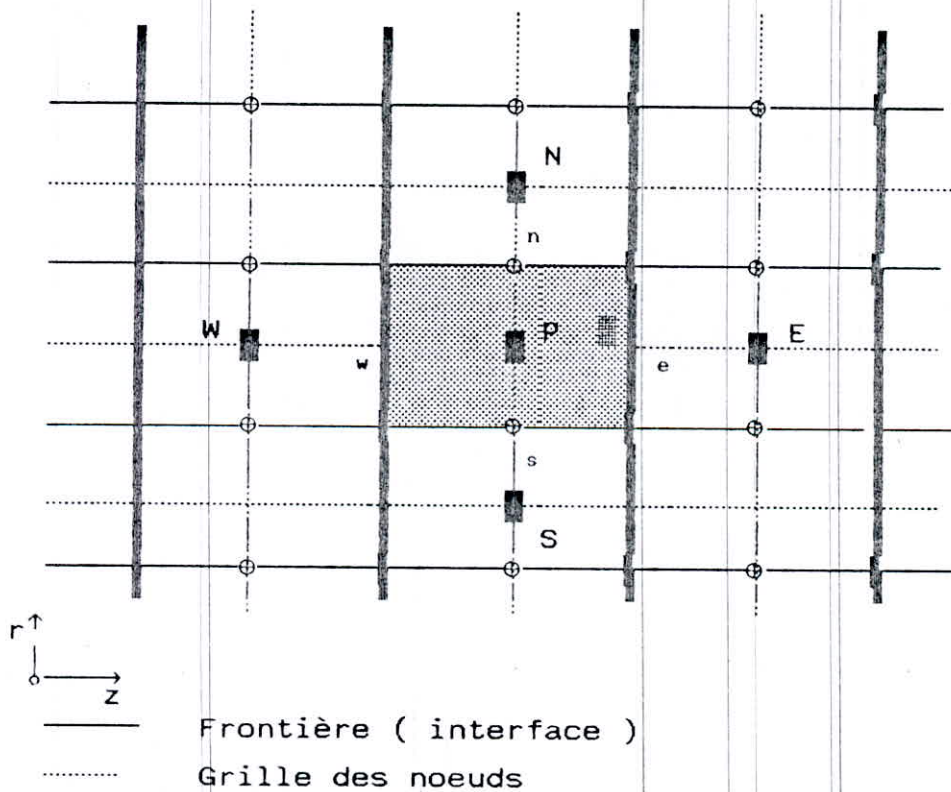


Figure (3-1) Détails d'un volume de contrôle

l'idée principale de cette méthode est d'intégrer les équations différentielles dans le volume de contrôle, afin d'aboutir à une équation algébrique. L'assemblage de toutes les équations, relatives aux différents volumes du domaine se traduit par un système d'équations algébriques qu'il faudra ensuite résoudre par des méthodes itératives.

### 3-3) MAILLAGES

Il existe deux méthodes pour générer le maillage dans le domaine de calcul. La première, consiste à placer d'abord les noeuds, puis les interfaces seront placés à mi-distance de deux noeuds consécutifs. Cette pratique exige des équations supplémentaires pour le traitement des noeuds frontières.

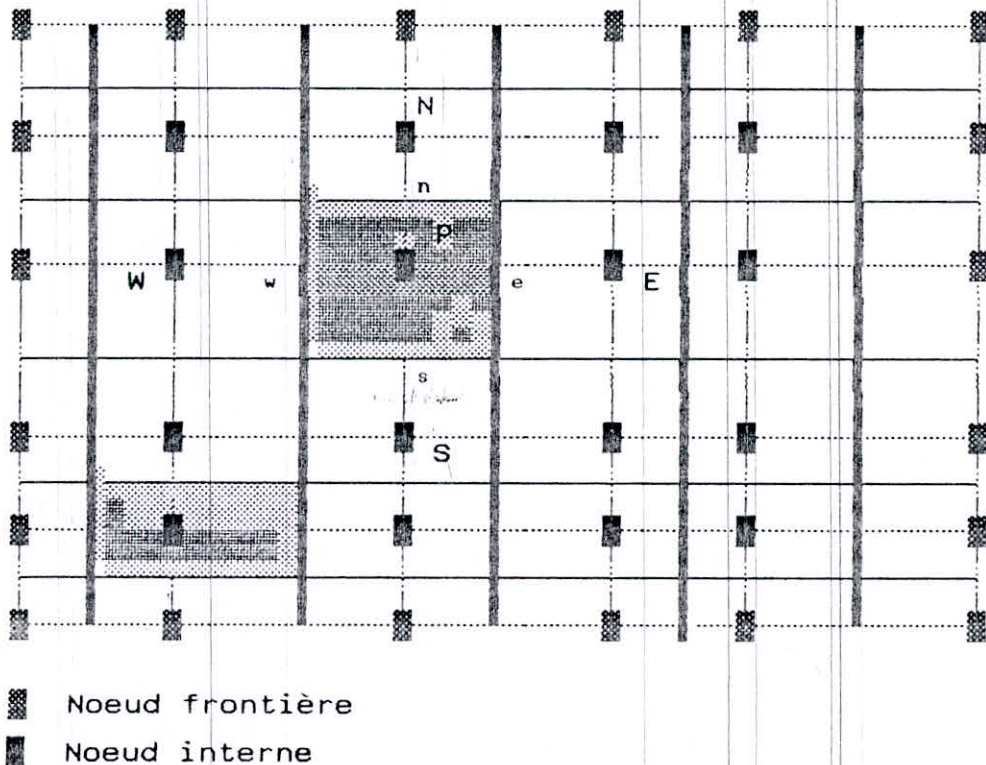
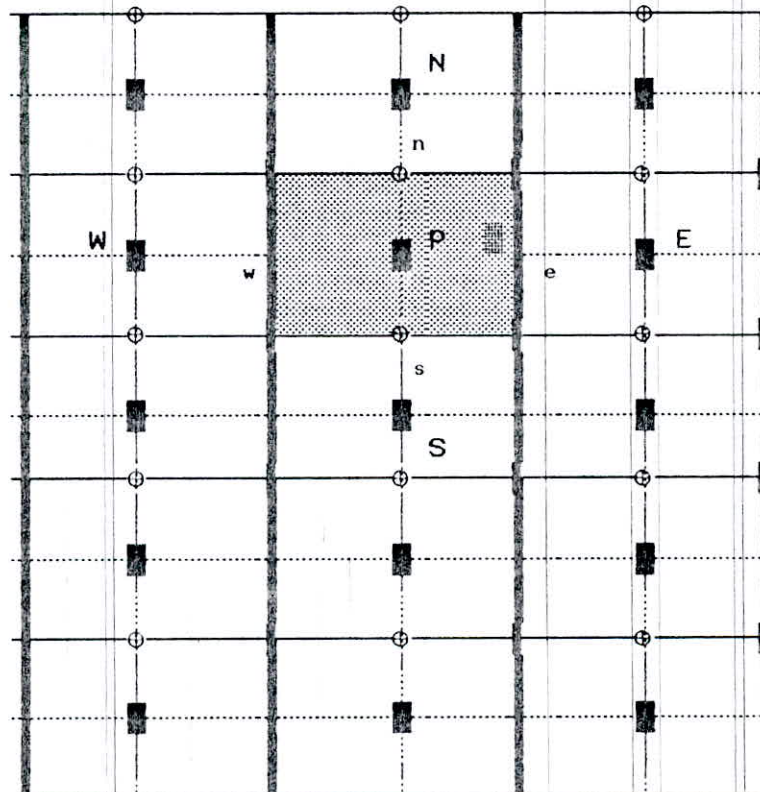


Figure (3-2) Maillage non centré



La deuxième, consiste à partager le domaine en un ensemble de volumes élémentaires, puis les noeuds sont placés au centre des volumes. Cette pratique est souvent utilisée en raison de sa simplicité et ne nécessite pas un traitement spécial pour les noeuds frontières.



■ Noeud centré dans le volume

Figure (3-3) Maillage centrée

3-4) DISCRETISATION DE L'EQUATION DE TRANSPORT-DIFFUSION

L'équation de convection-diffusion en coordonnées cylindriques est donnée sous la forme suivante :

$$\frac{\partial}{\partial z} (\rho r U \cdot \phi) + \frac{\partial}{\partial r} (\rho r V \cdot \phi) = \frac{\partial}{\partial r} \left( \Gamma_{\phi} r \cdot \frac{\partial \phi}{\partial r} \right) + \left( \Gamma_{\phi} r \cdot \frac{\partial \phi}{\partial z} \right) + r \cdot S_{\phi} \quad (3-1)$$

ou encore en regroupant les termes de diffusion et de convection :

$$\frac{\partial}{\partial z} \left( \rho r U \cdot \phi - \Gamma_{\phi} r \frac{\partial \phi}{\partial z} \right) + \frac{\partial}{\partial r} \left( \rho r V \cdot \phi - \Gamma_{\phi} r \frac{\partial \phi}{\partial r} \right) = r \cdot S_{\phi} \quad (3-2)$$

on a :

$$\frac{\partial}{\partial z} (r \cdot J_z) + \frac{\partial}{\partial r} (r \cdot J_r) = r \cdot S_{\phi} \quad (3-3)$$

$J_r$  et  $J_z$  : représentent respectivement les flux totaux dans les directions  $r$  et  $z$  à travers la section de passage .

l'intégration de l'équation (3-3) dans le volume de contrôle nous donne :

$$\int_s^n \int_w^e \frac{\partial}{\partial z} (r \cdot J_z) \cdot dz \cdot dr + \int_w^e \int_s^n \frac{\partial}{\partial r} (r \cdot J_r) \cdot dr \cdot dz = \int_s^n \int_w^e r \cdot S_{\phi} \cdot dr \cdot dz \quad (3-4)$$

Si on admet que le flux total est constant le long d'une interface considérée. alors, le résultat obtenu après intégration de l'équation (3-4) est :

$$(A_e \cdot J_e - A_w \cdot J_w) + (A_n \cdot J_n - A_s \cdot J_s) = \overline{S_{\phi}} \Delta V \quad (3-5)$$

METHODE DE RESOLUTION

L'équation (3-5) est représentée dans la figure ci dessous sous forme de flux entrant et sortant dans l'élément de volume.

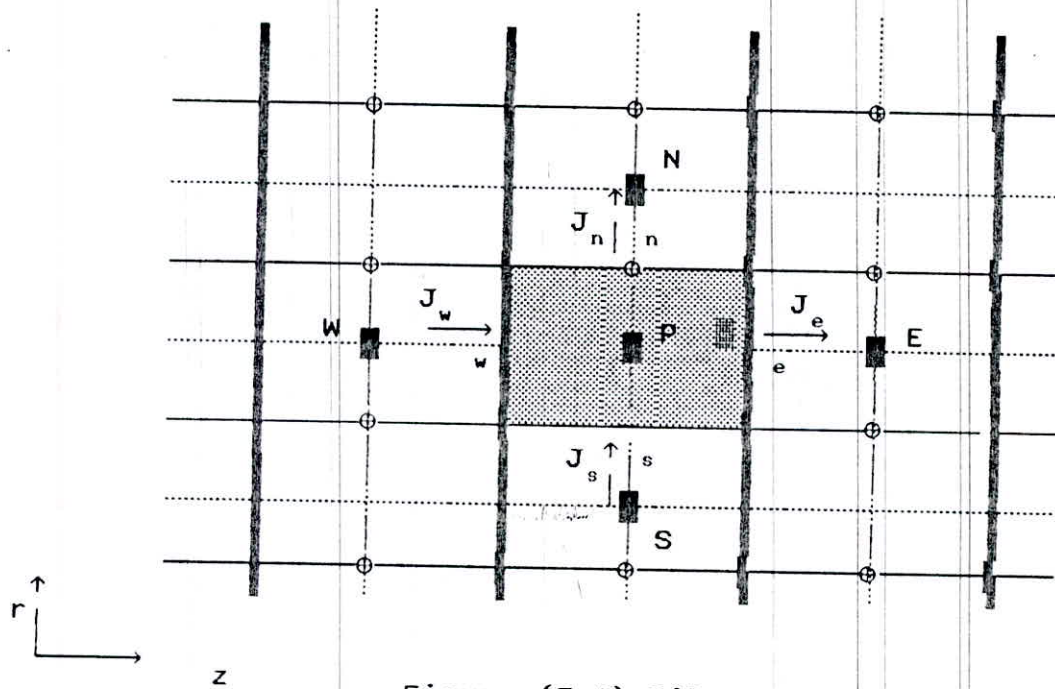


Figure (3-4) Bilan de flux total

avec :

$$\begin{cases} A_e = r_e \Delta r \\ A_w = r_w \Delta r \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} A_n = r_n \Delta z \\ A_s = r_s \Delta z \end{cases} \quad (3-6)$$

$A_{m(m=w,e,n,s)}$  : représente la section de passage à l'interface considérée

$\overline{S}_\phi$  : est la moyenne du terme source dans le volume de contrôle et peut être non linéaire.

Pour obtenir des équations algébriques linéaires, le terme source doit être linéarisé. Ce dernier est mis alors sous la forme générale suivante:

$$\overline{S}_\phi = S_p \cdot \phi_p + S_c \quad (3-7)$$



similairement l'équation de continuité est intégrée dans le volume de contrôle elle est obtenue à partir de l'équation (3-2) en posant  $\phi = 1$  et  $S_\phi = 0$ .

on obtient:

$$(F_e - F_w) + (F_n - F_s) = 0 \quad (3-8)$$

$F$  : représente le débit massique à l'interface considérée (e,w,n,s)

$$\begin{cases} F_e = A_e (\rho u)_e \\ F_w = A_w (\rho u)_w \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} F_n = A_n (\rho v)_n \\ F_s = A_s (\rho v)_s \end{cases} \quad (3-9)$$

En multipliant l'équation (3-8) par la grandeur physique  $\phi_p$  et en la retranchant à l'équation (3-5) on obtient alors :

$$(A_e J_e - F_e \phi_p) - (A_w J_w - F_w \phi_p) + (A_e J_e - F_e \phi_p) - (A_w J_w - F_w \phi_p) = \overline{S_\phi} \cdot \Delta V \quad (3-10)$$

Pour présenter l'équation ci dessus sous forme linéaire, il faut trouver un moyen pour exprimer l'évolution de la variable physique  $\phi$  dans l'élément de volume. On est contraint d'effectuer un choix judicieux du profil donnant la variable  $\phi$  entre deux points voisins et surtout de trouver une interpolation pour représenter  $\phi$  à l'interface.

### 3-4.1) FORMULATION GENERALISEE

Considerons deux points voisins  $i$  et  $i+1$  séparés d'une distance  $\delta$  voir figure (3-5).

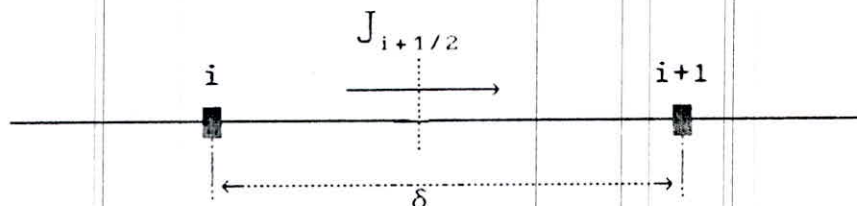


Figure (3-5) Flux total à l'interface

Le flux traversant l'interface  $i+1/2$  est :

$$J_{i+1/2} = \left( \rho U \cdot \phi - \Gamma_{\phi} \cdot \frac{\partial \phi}{\partial z} \right)_{i+1/2} \quad (3-11)$$

En pose  $J^* = \frac{J \cdot \delta}{\Gamma_{\phi}}$ , (3-12)

l'équation(3-11) devient :

$$J^*_{i+1/2} = \left( P \cdot \phi - \frac{\partial \phi}{\partial (z/\delta)} \right)_{i+1/2} \quad (3-13)$$

ou  $P = \rho \cdot \frac{U \cdot \delta}{\Gamma_{\phi}}$  désigne le nombre de PECLET à l'interface

Il sagit maintenant de chercher à exprimer le flux total à l'interface ( $i+1/2$ ) en fonction des grandeurs physiques  $\phi$  correspondant aux noeuds  $i$  et  $i+1$ . On considère alors  $\phi$  comme étant une moyenne pondérée entre les points voisins  $i$  et  $i+1$ , par contre le terme de diffusion sera lié par un facteur multiplicatif à la différence progressive. Cela se traduit par l'expression suivante:

$$J^*_{i+1/2} = P \cdot \left( \alpha \phi_i + (1-\alpha) \phi_{i+1} \right) - \beta \cdot \left( \phi_i - \phi_{i+1} \right) \quad (3-14)$$

où

$\alpha$  : facteur de pondération

et

$\beta$  : facteur multiplicatif

l'équation (3-14) peut s'écrire encore sous la forme.

$$J^*_{i+1/2} = B \cdot \phi_i - A \cdot \phi_{i+1} \quad (3-15)$$

les paramètres A et B sont des coefficients adimensionnels et dépendant du nombre de PECLET.

3-4.2) PROPRIETES DE A ET B

- si  $\phi_i$  est égale à  $\phi_{i+1}$  le terme de diffusion est nulle

d'où :

$$J_{i+1}^* = P \cdot \phi_i = P \cdot \phi_{i+1} \quad (3-16a)$$

de l'équation (3-15) on tire

$$B = A + P \quad (3-16b)$$

- pour deux valeurs opposées du nombre de PECLET P et -P on obtient les relations suivantes.

$$\begin{cases} A(-P) = B(P) \\ B(-P) = A(P) \end{cases} \quad (3-17)$$

En combinant les équations (3-16) et (3-17) entre elles, on obtient les relations suivantes.

$$\begin{aligned} A(P) &= B(P) - P \\ A(P) &= A(-P) - P \\ A(P) &= A(\lceil P \rceil) - P \end{aligned} \quad (3-18)$$

donc selon le signe du nombre de PECLET on aura l'expression généralisée de A et de B sous la forme suivante :

$$\begin{aligned} A(P) &= A(\lceil P \rceil) + \llbracket -P, 0 \rrbracket \\ B(P) &= A(\lceil P \rceil) + \llbracket +P, 0 \rrbracket \end{aligned} \quad (3-19)$$

où  $\llbracket a, b \rrbracket$  Désigne le maximum entre a et b



3-4.3) DISCRETISATION

En se basant sur ce qui a été développé précédemment et en combinant les équations (3-15) et (3-16) entres elles on trouve alors:

$$\begin{cases} J_{i+1/2}^* = A(P) \cdot (\phi_i - \phi_{i+1}) + P \cdot \phi_i \\ J_{i+1/2}^* = B(P) (\phi_i - \phi_{i+1}) + P \cdot \phi_i \end{cases} \quad (3-20)$$

ou encore à partir de l'équation (3-19) on à :

$$\begin{cases} J_{i+1/2}^* = \left( A(\mathbb{I}P\mathbb{I}) + \mathbb{I}[-P,0]\mathbb{I} \right) \cdot (\phi_i - \phi_{i+1}) + P \cdot \phi_i \\ J_{i+1/2}^* = \left( A(\mathbb{I}P\mathbb{I}) + \mathbb{I}[+P,0]\mathbb{I} \right) \cdot (\phi_i - \phi_{i+1}) + P \cdot \phi_i \end{cases} \quad (3-21)$$

on pose  $\mathbb{D} = \frac{\Gamma_\phi A}{\delta}$

$\mathbb{D}$  : est appelée La conductance

$A$  : est la section de passage

Multis les équations (3-21) par  $\mathbb{D}$  on obtient :

$$(A \cdot J)_e - F_e \phi_P = \mathbb{D}_e \left( A(\mathbb{I}P_e\mathbb{I}) + \mathbb{I}[-P_e,0]\mathbb{I} \right) \cdot (\phi_P - \phi_E) \quad (3-21a)$$

$$(A \cdot J)_w - F_w \phi_P = \mathbb{D}_w \left( A(\mathbb{I}P_w\mathbb{I}) + \mathbb{I}[P_w,0]\mathbb{I} \right) \cdot (\phi_W - \phi_P) \quad (3-21b)$$

$$(A \cdot J)_n - F_n \phi_P = \mathbb{D}_n \left( A(\mathbb{I}P_n\mathbb{I}) + \mathbb{I}[-P_n,0]\mathbb{I} \right) \cdot (\phi_P - \phi_N) \quad (3-21c)$$

$$(A \cdot J)_s - F_s \phi_P = \mathbb{D}_s \left( A(\mathbb{I}P_s\mathbb{I}) + \mathbb{I}[P_s,0]\mathbb{I} \right) \cdot (\phi_W - \phi_P) \quad (3-21d)$$

En Remplaçant les expressions des différents flux dans l'équation (3-10), on trouve une équation algébrique en  $\phi$ .

$$a_P \phi_P = a_E \phi_E + a_W \phi_W + a_S \phi_S + a_N \phi_N + b \quad (3-22)$$

ou encore :

$$a_P \phi_P = \sum_{nb} a_{nb} \phi_{nb} + b \quad (3-23)$$

$a_{nb}$  désigne respectivement  $a_E, a_W, a_N, a_S$

ou plus encore

$$a_E = D_e \left( A(P_e) \right) + [-F_e, 0] \quad (3-24a)$$

$$a_W = D_w \left( A(P_w) \right) + [F_w, 0] \quad (3-24b)$$

$$a_N = D_n \left( A(P_n) \right) + [-F_n, 0] \quad (3-24c)$$

$$a_S = D_s \left( A(P_s) \right) + [F_s, 0] \quad (3-24d)$$

$$b = S_C \cdot \Delta V \quad (3-24e)$$

$$a_P = a_E + a_W + a_N + a_S - S_P \cdot \Delta V \quad (3-24f)$$

■ Conductance à l'interface :

La conductance à l'interface est calculée par une moyenne pondérée entre deux points voisins dans la direction donnée.

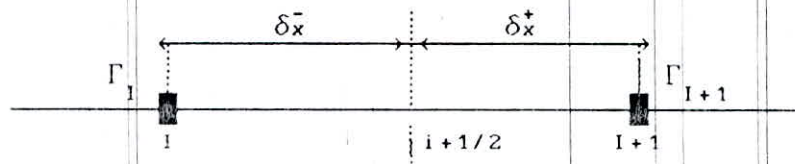


Figure (3-6) Conductance à l'interface

La conductance est:

$$D_{i+1/2} = A_{i+1/2} \left[ \frac{\delta x_e^-}{\Gamma_i} + \frac{\delta x_e^+}{\Gamma_{i+1}} \right]^{-1} \quad (3-25)$$

■ Linéarisation du terme source

Dans l'équation (3-22) les termes provenant du terme source  $S_\phi$  peuvent avoir des formes non linéaires dans certaines situations physiques. Dans de tels cas on linéarise le terme source sous la forme:

$$\bar{S}_\phi = S_p \phi_p + S_c \quad (3-28)$$

tout en spécifiant les valeurs de  $S_c$  et  $S_p$  qui peuvent être eux même fonction de la variable physique  $\phi$ . Généralement, on recommande la méthode de linéarisation suivante. [13]

$$\bar{S} = \bar{S}^* + \left[ \frac{d \bar{S}}{d \phi} \right]^* \cdot (\phi_p - \phi_p^*) \quad (3-29)$$

$\bar{S}^*$  et  $\phi_p^*$  sont respectivement les valeurs du terme source et de la variable physique à l'itération précédente.

3-4.4) REPRESENTATION DES TERMES DE CONVECTION ET DIFFUSION

Il existe plusieurs schémas d'interpolation et de discretisation des termes de convection et de diffusion. nous allons maintenant présenter ces différentes schémas numériques.

---



1°/ SCHEMA CENTRE

Si on suppose que la variable physique, obeit à une variation linéaire, entre deux points voisins d'un maillage uniforme. On pourra alors, exprimer la variable  $\phi$  relative au terme de convection à l'interface correspondante, par une moyenne arithmétique.

d'où:

$$\begin{cases} \phi_e = 0.5 (\phi_E + \phi_P) \\ \phi_n = 0.5 (\phi_N + \phi_P) \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} \phi_w = 0.5 (\phi_W + \phi_P) \\ \phi_s = 0.5 (\phi_S + \phi_P) \end{cases} \quad (3-30)$$

De cette manière, le flux total à l'interface s'exprime donc comme suit :

$$A_e J_e = F_e \cdot 0.5 (\phi_E + \phi_P) - D_e \cdot (\phi_E - \phi_P) \quad (3-31a)$$

ou encore;

$$A_e J_e - F_e \phi_P = D_e \cdot (1 - 0.5 P_e) \cdot (\phi_P - \phi_E) \quad (3-31b)$$

avec  $P_e = \frac{F_e}{D_e}$  (nombre de PECLET à l'interface)

Par identification avec les équations (3-21) on déduit alors :

$$A_e J_e - F_e \phi_P = D_e \cdot A(P_e) \cdot (\phi_P - \phi_E) \quad (3-32)$$

avec  $A(P_e) = (1 - 0.5 P_e)$

De la même manière on peut déterminer les flux dans les autres directions. En résumé on a :

$$\begin{cases} (A_e J_e) - F_e \phi_P = D_e \cdot \left( A(\|P_e\|) + \llbracket -P_e, 0 \rrbracket \right) \cdot (\phi_P - \phi_E) \\ (A_w J_w) - F_w \phi_P = D_w \cdot \left( A(\|P_w\|) + \llbracket P_w, 0 \rrbracket \right) \cdot (\phi_P - \phi_W) \end{cases} \quad (3-33a)$$

et

$$\begin{cases} (A_n J_n) - F_n \phi_P = D_n \cdot \left( A(\|P_n\|) + \llbracket -P_n, 0 \rrbracket \right) \cdot (\phi_P - \phi_N) \\ (A_s J_s) - F_s \phi_P = D_s \cdot \left( A(\|P_s\|) + \llbracket P_s, 0 \rrbracket \right) \cdot (\phi_P - \phi_S) \end{cases} \quad (3-33b)$$

La fonction  $A(P)$  est donnée comme suit :

$$A(\|P_m\|) = 1 - (0.5) \cdot \|P_m\| \quad (\text{avec } m = e, w, s, n) \quad (3-34)$$

En remplaçant les expressions ci dessus dans l'équation (3-24), on a alors :

$$\begin{aligned} a_E &= D_e \left( A(\|P_e\|) + \llbracket -F_e, 0 \rrbracket \right) \\ a_W &= D_w \left( A(\|P_w\|) + \llbracket F_w, 0 \rrbracket \right) \\ a_N &= D_n \left( A(\|P_n\|) + \llbracket -F_n, 0 \rrbracket \right) \\ a_S &= D_s \left( A(\|P_s\|) + \llbracket F_s, 0 \rrbracket \right) \end{aligned} \quad (3-35)$$

Etant donné que le signe et la valeur des termes  $F_m$  dépendent de la vitesse, les coefficients  $a_M$  peuvent être positifs ou négatifs. Mais, il a été montré pour un problème monodimensionnel que la réalité physique des problèmes de transfert de chaleur exige que les valeurs des coefficients soient positives ou nulles [13].

d'où :

$$\left| \frac{F_m}{D_m} \right| \leq 2 \quad (3-36)$$

En choisissant un maillage suffisamment fin, on peut toujours se placer dans des conditions telles que la discrétisation de l'équation (3-24), par un schéma centré, soit possible. Mais seulement l'augmentation du nombre de points entraîne un encombrement dans l'espace mémoire et engendre un temps de calcul élevé. En général, le schéma centré n'est utilisé que pour des cas d'écoulements à faible nombre de Péclet pour les quels les problèmes de stabilité sont évités.

## 2°/ Schéma décentré amont ( UPWIND )

Pour remédier au problème d'instabilité rencontré avec le schéma centré, COURANT, ISSACSON & REES [13] proposent pour la première fois une méthode pour représenter le terme de convection mais sans changer le terme de diffusion. Cette dernière est illustrée par un exemple physique appelé la théorie des réservoirs tubes; En effet chaque volume de contrôle dans le domaine de calcul représente un réservoir relié à l'autre par un petit pont de tube qui représente l'interface du volume dans le domaine. Les propriétés physiques dans le réservoir, sont égales en tout point.



Si le remplissage des réservoirs s'effectue de gauche à droite alors, l'information au niveau du tube ne peut provenir que du réservoir gauche. Ainsi la valeur de la variable  $\phi$  à l'interface n'est autre, que celle qui lui est en amont. Le réservoir de droite ne contribue pas dans l'information. De la même manière, si le remplissage est de la droite vers la gauche l'information à l'interface qui sera prise sera celle du réservoir de droite seulement.

on peut alors écrire l'expression mathématique suivante pour représenter  $\phi$  à l'interface.

$$\begin{cases} \phi_e = \phi_P \\ \phi_w = \phi_W \end{cases} \text{ si } F_e > 0 \quad \text{et} \quad \begin{cases} \phi_e = \phi_E \\ \phi_w = \phi_P \end{cases} \text{ si } F_e < 0 \quad (3-37)$$

ou en d'autres termes :

$$\begin{cases} F_e \phi_e = \phi_P \cdot [F_e, 0] - \phi_E \cdot [-F_e, 0] \\ F_w \phi_w = \phi_W \cdot [F_w, 0] - \phi_P \cdot [-F_w, 0] \end{cases} \quad (3-38)$$

et les directions NORD et SUD :

$$\begin{cases} F_n \phi_n = \phi_P \cdot [F_n, 0] - \phi_N \cdot [-F_n, 0] \\ F_s \phi_s = \phi_S \cdot [F_s, 0] - \phi_P \cdot [-F_s, 0] \end{cases} \quad (3-39)$$

Le flux total à l'interface sera donc:

$$\begin{aligned} A_e J_e &= D_e \cdot A(P_e) \cdot (\phi_P - \phi_E) + F_e \phi_P \\ A_e J_e &= \phi_P \cdot [F_e, 0] - \phi_E \cdot [-F_e, 0] - D_e \cdot (\phi_E - \phi_P) \\ A_e J_e &= \phi_P \cdot ([F_e, 0] + D_e) - \phi_E \cdot ([-F_e, 0] + D_e) \end{aligned} \quad (3-40)$$

Finalement on a le flux à l'interface comme suit :

$$\begin{cases} (A_e J_e) - F_e \phi_P = D_e \cdot \left( 1 + \llbracket -P_e, 0 \rrbracket \right) \cdot (\phi_P - \phi_E) \\ (A_w J_w) - F_w \phi_P = D_w \cdot \left( 1 + \llbracket P_w, 0 \rrbracket \right) \cdot (\phi_W - \phi_P) \end{cases} \quad (3-41)$$

Dou les coefficients  $a_m$  sont :

$$\begin{aligned} a_E &= D_e \left( A(\llbracket P_e \rrbracket) \right) + \llbracket -F_e, 0 \rrbracket \\ a_W &= D_w \left( A(\llbracket P_w \rrbracket) \right) + \llbracket F_w, 0 \rrbracket \\ a_N &= D_n \left( A(\llbracket P_n \rrbracket) \right) + \llbracket -F_n, 0 \rrbracket \\ a_S &= D_s \left( A(\llbracket P_s \rrbracket) \right) + \llbracket F_s, 0 \rrbracket \end{aligned} \quad (3-42)$$

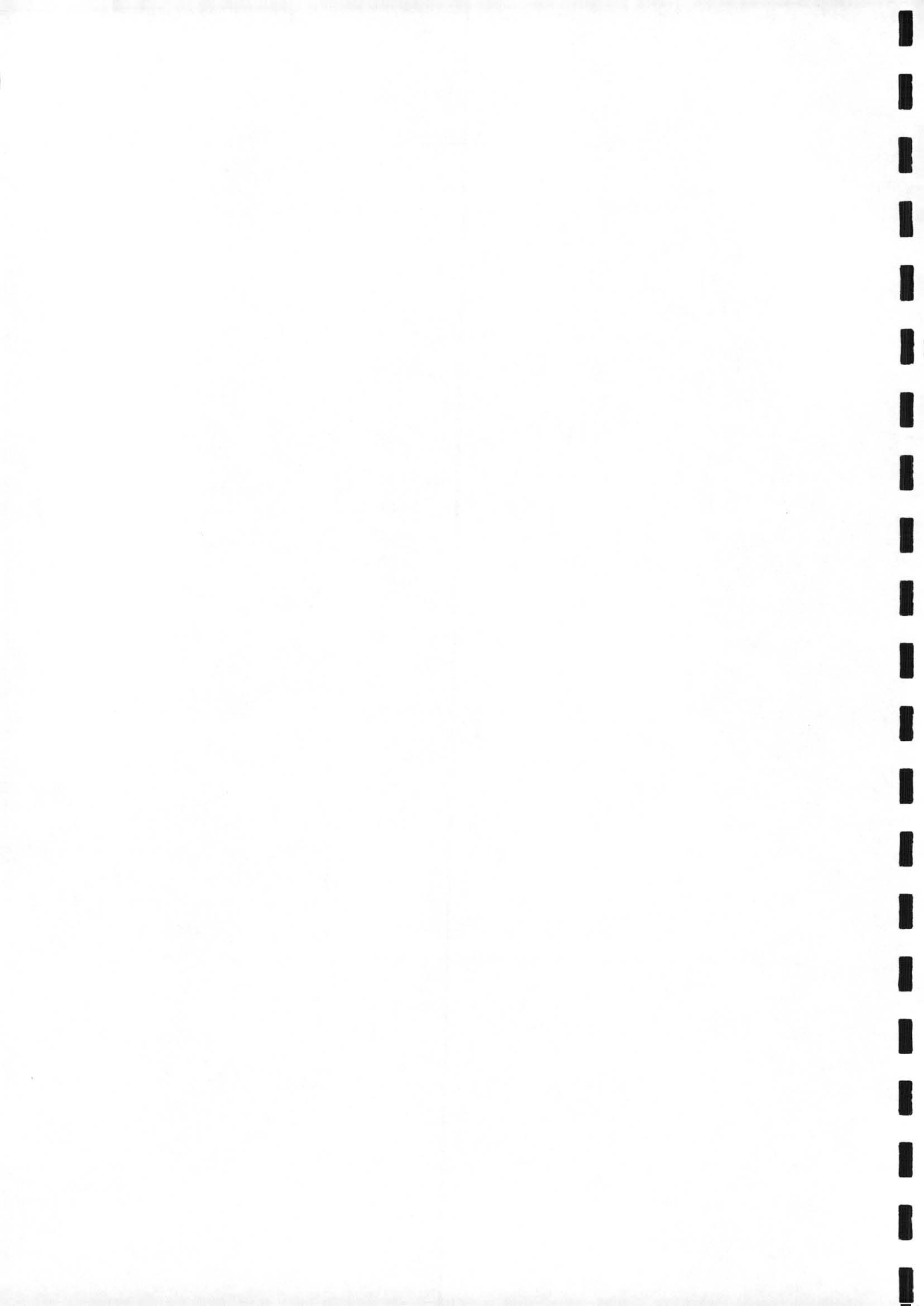
avec  $A(\llbracket P_m \rrbracket) = 1$  et  $(m = e, w, s, n)$  (3-43)

### 3°/ SCHEMA HYBRIDE

Ce schema a été développé par SPALDING [13] pour représenter la fonction  $A(\llbracket P \rrbracket)$  comme une combinaison des deux schémas précédents; Il se réduit donc à l'approximation d'un schéma centré pour les valeurs de PECLET comprises  $-2 \leq Pe \leq 2$  mais devient identique au schéma " UPWIND " au delà de ce domaine.

à l'interface on a alors:

$$\begin{aligned} A(\llbracket P_e \rrbracket) &= -P & P_e < -2 \\ A(\llbracket P_e \rrbracket) &= 1 - 0.5 P_e & -2 < P_e < 2 \\ A(\llbracket P_e \rrbracket) &= 0 & P_e = 0 \end{aligned} \quad (3-44)$$





Ces expressions peuvent être combinées et regroupées sous une forme compacte comme suit :

$$A(P_e) = [-P_e, (1-0.5 P_e), 0] \quad (3-45)$$

$$A(P_e) = [(1-0.5 P_e), 0] + [-P_e, 0]$$

D'une manière similaire, on peut alors déduire les expressions des coefficients  $a_m$ .

$$a_E = D_e (A(P_e)) + [-F_e, 0]$$

$$a_W = D_w (A(P_w)) + [F_w, 0]$$

$$a_N = D_n (A(P_n)) + [-F_n, 0]$$

$$a_S = D_s (A(P_s)) + [F_s, 0]$$

(3-46)

avec :

$$A(P_m) = [(1-0.5 P_m), 0] \quad (m=e, w, s, n) \quad (3-47)$$

#### 4° / SCHEMA EXACT (ou Exponentiel)

Le schéma exponentiel a été présenté, en premier lieu, par SPALDING [13], qui considère que la variable  $\phi$ , entre deux points voisins, obéit à une fonction exponentielle. Par ailleurs cette fonction exponentielle est la solution de l'équation différentielle, monodimensionnelle du phénomène de convection et de diffusion.



soit à résoudre l'équation de convection-diffusion suivante;

$$\frac{d}{dx} (U \cdot \phi) = \frac{d}{dx} \left( \Gamma_{\phi} \cdot \frac{d\phi}{dx} \right) \quad (3-48)$$

soumise aux conditions aux limites suivantes :

$$\begin{cases} x = 0 & \phi = \phi_0 \\ x = L & \phi = \phi_L \end{cases} \quad (3-49)$$

La solution exacte est donc donnée comme suit :

$$\frac{\phi - \phi_0}{\phi_L - \phi_0} = \frac{\text{EXP} \left( \frac{P \cdot X}{L} \right) - 1}{\text{EXP}(P) - 1} \quad (3-50)$$

En utilisant cette solution comme un profil exprimant l'évolution de  $\phi$  entre deux nœuds voisins d'un volume de contrôle, le flux total à l'interface sera alors exprimé comme suit:

$$J_e = F_e \left( \phi_P + \frac{\phi_P - \phi_E}{\text{EXP}(P_e) - 1} \right) \quad (3-51)$$

D'une manière similaire, les autres flux sont déterminés puis, on remplace leurs expressions dans l'équation (3-10) pour obtenir les coefficients de l'équation discretisée.

$$\begin{aligned} a_E &= \frac{F_e}{\text{EXP}(P_e) - 1} & a_N &= \frac{F_n}{\text{EXP}(P_n) - 1} \\ a_W &= \frac{F_w \text{EXP}(P_w)}{\text{EXP}(P_w) - 1} & a_S &= \frac{F_s \text{EXP}(P_s)}{\text{EXP}(P_s) - 1} \end{aligned} \quad (3-52)$$





ou en d'autres termes :

$$\begin{aligned}
 a_E &= D_e \left( A(|P_e|) \right) + \left[ -F_e, 0 \right] \\
 a_W &= D_w \left( A(|P_w|) \right) + \left[ F_w, 0 \right] \\
 a_N &= D_n \left( A(|P_n|) \right) + \left[ -F_n, 0 \right] \\
 a_S &= D_s \left( A(|P_s|) \right) + \left[ F_s, 0 \right]
 \end{aligned}
 \tag{3-53}$$

où  $A(P)$  est comme suit:

$$A(|P|) = \frac{|P|}{\text{EXP}(|P|) - 1}
 \tag{3-54}$$

Ce schéma s'adapte mieux pour un écoulement monodimensionnel. Par contre, son utilisation pour la résolution des problèmes bi et tridimensionnel n'est pas souhaitable. Car le temps de calcul est élevé ce qui est dû à la présence de la fonction exponentielle. C'est pourquoi on s'intéressera alors à trouver une autre approximation pour diminuer le temps de calcul.

#### 5°/ SCHEMA DE LA LOI PUISSANCE

Pour pallier aux difficultés citées précédemment et en s'inspirant du schéma hybride, on utilise un nouveau schéma d'approximation appelé schéma en loi puissance qui n'est qu'une interpolation asymptotique du schéma exact. Ce schéma est largement utilisé dans la littérature et s'avère très efficace et consistant du fait qu'il approche beaucoup mieux la solution exacte par rapport aux autres schémas [13].

Le schéma est donc défini comme suit :

$$\begin{aligned}
 A(\|P_e\|) &= -P_e & P_e < -10 \\
 A(\|P_e\|) &= (1 - 0.1 P_e)^5 - P_e & -10 < P_e < 0 \\
 A(\|P_e\|) &= (1 - 0.1 P_e)^5 & 0 < P_e < 10 \\
 A(\|P_e\|) &= 0 & P_e > 10
 \end{aligned}
 \tag{3-54}$$

ces expressions conditionnelles peuvent être écrites sous la forme compacte suivante:

$$A(\|P_e\|) = \left[ 0, \left( 1 - \frac{0.1 \|F_e\|}{D_e} \right)^5 \right] + [-P_e, 0]
 \tag{3-55}$$

d'où les coefficients de l'équation discretisée sont :

$$\begin{aligned}
 a_E &= D_e \left( A(\|P_e\|) \right) + [-F_e, 0] \\
 a_W &= D_w \left( A(\|P_w\|) \right) + [F_w, 0] \\
 a_N &= D_n \left( A(\|P_n\|) \right) + [-F_n, 0] \\
 a_S &= D_s \left( A(\|P_s\|) \right) + [F_s, 0]
 \end{aligned}
 \tag{3-56}$$

avec :

$$A(\|P_e\|) = \left[ 0, \left( 1 - \frac{0.1 \|F_e\|}{D_e} \right)^5 \right]
 \tag{3-57}$$



6°/ RECAPITULATION

Les fonctions  $A(|P|)$  relatives aux differents schemas d'approximations sont donnés dans le tableau (3-1). Afin de comparer ces differents schemas de discrétisations par rapport au schema exact (exponentiel), nous allons considerer le problème unidirectionnel de convection-diffusion pour lequel on suppose  $a_E = 1$  et  $a_W = 0$ . Les résultat de ce problème sont indiqués dans la figure (3-7).

Schemas	$A( P_m )$
■ Centrée	$A( P_m ) = 1 - (0.5) \cdot  P_m $
■ Upwind	$A( P_m ) = 1$
■ Hybride	$A( P_m ) = \left[ (1 - 0.5  P_m ), 0 \right]$
■ Exacte	$A( P_m ) = \frac{ P_m }{EP( P_m ) - 1}$
■ Lois Puissance	$A( P_m ) = \left[ 0, \left( 1 - \frac{0.1  F_m }{D_m} \right)^5 \right]$

Tableau (3-2) Schémas d'interpolation

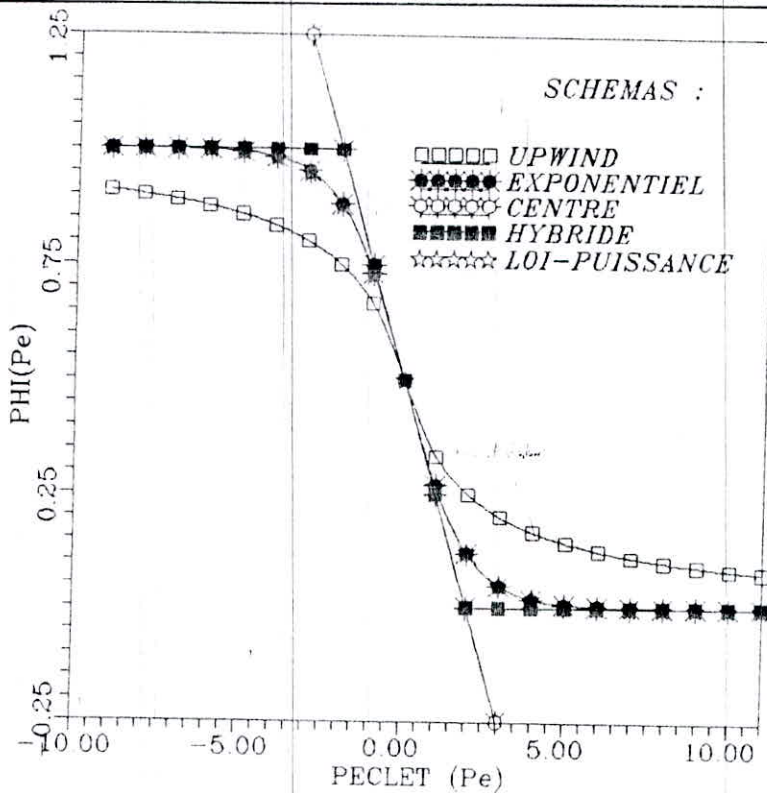


Figure (3-7) Representation des differentes schemas

Daprès cette figure on constate que:

- Le schema CENTREE ne donne pas une bonne approximation pour des valeurs de PECTLET superieur ou égal à 2
- Par contre le schema UPWIND represente une bonne approximation du schema exacte seulement pour des nombres de PECTLET superieur ou égal à 10.
- Le schema hybride englobe les deux schemas précédent et se rapproche beaucoup mieux de la solution exacte.
- Le schema en loi-puissance donne la meilleur approximation du schema exacte par rapport aux schemas precedents

Dans la suite de notre travail le schema d'approximation choisi est le schema en loi-puissance.

### 3-5) DISCRETISATION DES EQUATIONS DE QUANTITE DE MOUVEMENT

#### 3-5.1) INTRODUCTION

Nous avons formulé précédemment une procédure de discrétisation de l'équation généralisée en terme d'une variable physique  $\phi$  qui peut être la temperature ,la vitesse ou autre.

Dans le cas des équations de mouvement on a toujours cette forme generalisée mais avec un gradient de pression qui est considéré à son tour comme terme source. Ce dernier peut être déterminé avec facilité si le champ de vitesses est connu. Cependant, dans la majorité des problèmes de mécanique des fluides, on est toujours confronté à trouver le champ de pression. Malheureusement on sait seulement que ce dernier est lié indirectement à l'équation de continuité. Donc pour un champ de pression donné il faut qu'il y ait satisfaction de l'équation de continuité.

L'intégration du gradient de pression dans un volume de contrôle nous révèle une autre difficulté, en effet cette dernière nous donnera dans l'équation de mouvement la pression exprimée entre deux noeuds alternés et non pas adjacents. cette représentation nous ramène à des résultats irréalistiques. par exemple si le gradient est nulle on retrouvera alors un champ de pression alternatif comme solution, ce qui n'a pas de sens physique. D'où l'idée de retrouver une autre représentation pour exprimer la pression entre deux noeuds adjacents.

#### 3-5.2) MAILLAGE DECALE

La difficulté rencontrée pour l'intégration du gradient de pression peut être remediée en calculant les differentes variables physiques non pas dans un maillage unique mais en un maillage bien spécifique à chacune d'elles.

---



Ainsi pour les équations de mouvement on adoptera un maillage décalé dans la direction de la variable dépendante  $\phi$ . Cette technique a été utilisée par HARLOW et WELCH [13] en 1965 et récemment reprise par PATANKAR et SPALDING dans la procédure SIMPLER. [13]

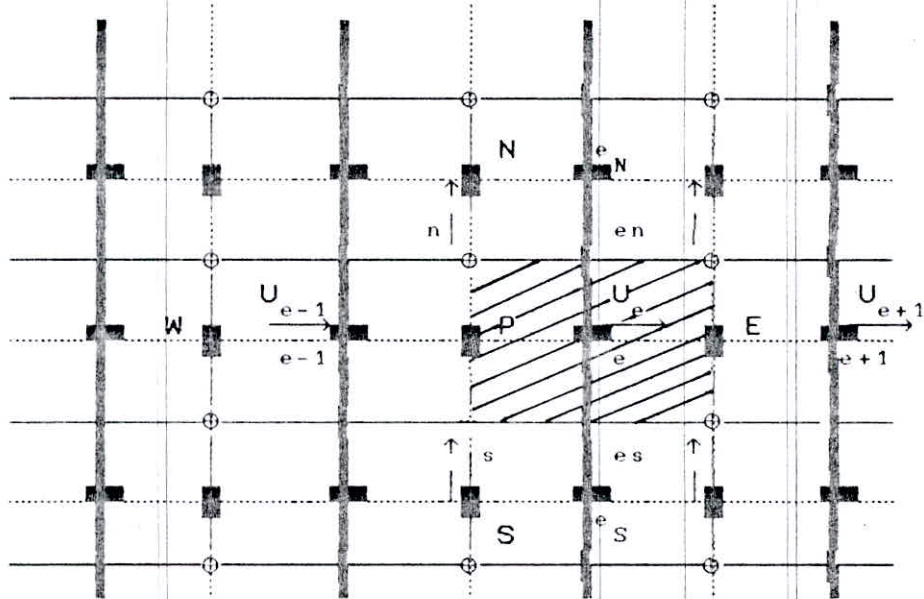
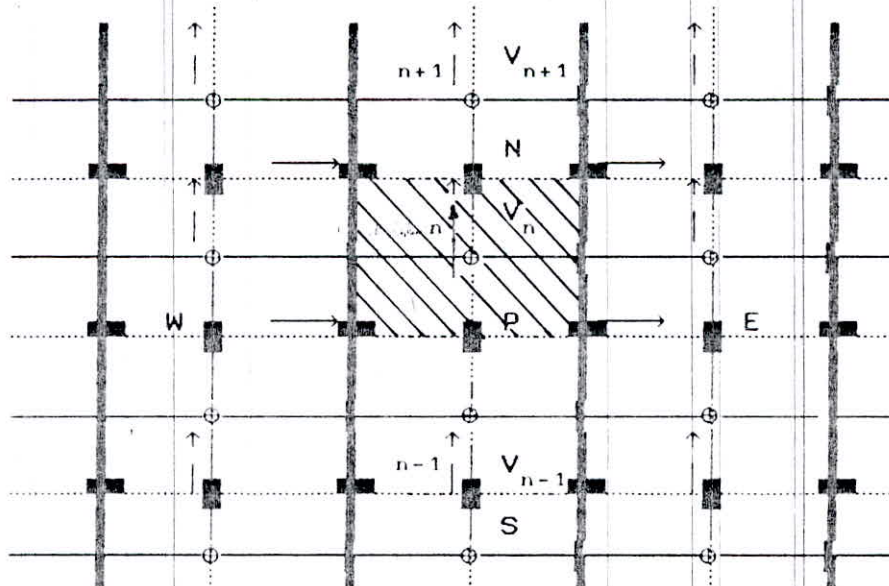


Figure (3-8) Maillage décalé suivant la direction Z



Figure(3-9) Maillage décalé suivant la direction R

Les composantes de vitesse sont donc déterminées aux niveaux des interfaces. Par contre, la pression est exprimée cette fois ci aux noeuds principaux. Seuls les composantes de vitesses sont concernées par le maillage décalé.

### 3-5.3) DISCRETISATION

En manipulant les équations de mouvement, on obtiendra la forme généralisée avec le terme source approprié. L'intégration de cette dernière dans le maillage décalé est identique à celui du maillage centré. La seule différence reside dans l'expression des coefficients mais on a toujours la même forme globale.

■ l'équation de mouvement suivant Z et r sont :

$$\begin{cases} a_e U_e = \sum_{nb} a_{e,nb} \cdot U_{e,nb} + b + A_e \cdot \left( P_P - P_E \right) \\ a_n V_n = \sum_{nb} a_{n,nb} \cdot V_{n,nb} + b + A_n \cdot \left( P_P - P_N \right) \end{cases} \quad (3-59)$$

Les forces de pressions sont représentées dans l'équations (3-59) par les termes suivants:

$$\begin{cases} A_e \cdot \left( P_P - P_E \right) \\ A_n \cdot \left( P_P - P_N \right) \end{cases} \quad (3-60)$$

les coefficients de l'équation algébrique (3-59) sont :

$$\begin{aligned}
 a_{e+1} &= D_E \left( A(P_E) \right) + [ -F_E, 0 ] \\
 a_{e-1} &= D_P \left( A(P_P) \right) + [ F_P, 0 ] \\
 a_{e_N} &= D_{en} \left( A(P_{en}) \right) + [ -F_{en}, 0 ] \\
 a_{e_S} &= D_{es} \left( A(P_{es}) \right) + [ F_{es}, 0 ]
 \end{aligned}
 \tag{3-61}$$

En conclusion, si le champ de pression est connu ou estimé, les équations (3-59) seront identiques à celles développées précédemment pour une variable  $\phi$ . Alors si on suppose une certaine distribution de pression  $P^*$ , la résolution des équations (3-59) nous donnera un champ de vitesses estimé  $U^*$  et  $V^*$  relatif au champ de pression choisi au départ. Mais en général le champ de vitesses estimé ne satisfait pas l'équation de continuité. Pour cette raison on fait appel à une méthode itérative appelée SIMPLER [13], qui nous permet de résoudre le problème de couplage entre la vitesse et la pression.

#### 3-5.4) EQUATION DE CORRECTION DE VITESSE

Pour aboutir à l'équation de correction de vitesse, on pose  $P'$ ,  $U'$ ,  $V'$  pour exprimer respectivement les corrections de pression et de vitesse.

$$\text{doù : } \begin{cases} P = P^* + P' \\ U = U^* + U' \\ V = V^* + V' \end{cases}
 \tag{3-62}$$

Les indices supérieurs \* et ' indiquent respectivement les valeurs estimée et corrigée de la variable  $\phi$ .



Pour un champ de vitesses  $U^*$  et  $V^*$  résultant d'un champ de pression  $P^*$  estimé les équations (3-59) deviennent :

$$\begin{cases} a_e U_e^* = \sum_{nb} a_{e,nb} \cdot U_{nb}^* + b + A_e \cdot (P_P^* - P_E^*) \\ a_n V_n^* = \sum_{nb} a_{n,nb} \cdot V_{nb}^* + b + A_n \cdot (P_P^* - P_N^*) \end{cases} \quad (3-63)$$

En combinant les équations (3-59), (3-62) et (3-63) entres elles on obtient:

$$\begin{cases} a_e U_e' = \sum_{nb} a_{e,nb} \cdot U_{nb}' + A_e \cdot (P_P' - P_E') \\ a_n V_n' = \sum_{nb} a_{n,nb} \cdot V_{nb}' + A_n \cdot (P_P' - P_N') \end{cases} \quad (3-64)$$

En négligeant le terme  $\sum a_m \cdot U_m'$  dans l'équation précédente ou m représente les noeuds voisin on a donc

$$\begin{cases} a_e U_e' = A_e \cdot (P_P' - P_E') \\ a_n V_n' = A_n \cdot (P_P' - P_N') \end{cases} \quad (3-65)$$

ou en d'autres termes ,

$$\begin{cases} U_e' = d_e \cdot (P_P' - P_E') \\ V_n' = d_n \cdot (P_P' - P_N') \end{cases} \quad \text{avec} \quad d_e = \frac{A_e}{a_e} \quad (3-66)$$



Les équations (3-66) nous permettent alors d'écrire les équations de correction de la vitesse comme suit :

$$\begin{cases} U_e = U_e^* + d_e \cdot (P'_P - P'_E) \\ V_n = V_n^* + d_n \cdot (P'_P - P'_N) \end{cases} \quad (3-67)$$

Pour corriger les vitesses, il faut donc connaître les corrections de pression.

### 3-5.5) EQUATION DE CORRECTION DE PRESSION

Afin de satisfaire, le couplage entre les champs de vitesse et de pression. Nous allons intégrer l'équation de continuité dans un volume de contrôle centré autour du noeud principal P.

si la densité est constante l'équation de continuité est:

$$\left( A_e \cdot (\rho U_e) - A_w \cdot (\rho U_w) \right) + \left( A_n \cdot (\rho V_n) - A_s \cdot (\rho V_s) \right) = 0 \quad (3-68)$$

En Remplaçant les expressions des vitesses données par les équations (3-67) dans l'équation (3-68), on obtient l'équation de correction suivante.

$$a_P P'_P = a_E P'_E + a_W P'_W + a_S P'_S + a_N P'_N + b \quad (3-69)$$

Les coefficients de l'équation (3-69) sont donnés comme suit :

$$\left\{ \begin{array}{l} a_E = \rho_e \cdot d_e \cdot \Delta r \cdot r_e \\ a_W = \rho_w \cdot d_w \cdot \Delta r \cdot r_w \\ a_N = \rho_n \cdot d_n \cdot \Delta z \cdot r_m \\ a_S = \rho_s \cdot d_s \cdot \Delta z \cdot r_m \end{array} \right. \quad (3-70)$$

(  $r_m$  est le rayon moyen )

$$b = \left( A_w \cdot (\rho U^*)_w - A_e \cdot (\rho U^*)_e \right) + \left( A_s \cdot (\rho V^*)_s - A_n \cdot (\rho V^*)_n \right)$$

On remarque que le terme b n'est autre que l'équation de continuité discretisée à un signe près. Ce dernier représente le défaut de masse dû au champ de vitesse estimé, ainsi une correction successive de la pression entrainera une diminution du terme source jusqu'à satisfaction du critère de convergence. On obtient alors les champs de vitesse et de pression désirés.

### 3-5.6) EQUATION DE PRESSION

L'approximation introduite dans l'équation de correction de vitesse (3-64) entraine une certaine erreur qui se manifeste par un nombre d'itération élevé pour satisfaire le critère de convergence, alors que la solution du champ de vitesse est déjà atteinte. Pour cette raison l'équation de correction de pression est nécessaire seulement pour corriger la vitesse.

Si on suppose que :

$$\left\{ \begin{array}{l} U_e = \frac{\sum a_{e, nb} \cdot U_{e, nb} + b}{a_e} + d_e \cdot (P_P - P_E) \\ V_n = \frac{\sum a_{n, nb} \cdot U_{n, nb} + b}{a_n} + d_n \cdot (P_P - P_N) \end{array} \right. \quad (3-71)$$

Avec :

$$\left\{ \begin{array}{l} \hat{U}_e = \frac{\sum a_{e, nb} \cdot U_{e, nb} + b}{a_e} \\ \hat{V}_n = \frac{\sum a_{n, nb} \cdot U_{n, nb} + b}{a_n} \end{array} \right. \quad (3-72)$$

Où  $\hat{U}$  et  $\hat{V}$  sont les pseudo-vitesses, de la même manière que l'équation de correction de pression, l'injection de ces expressions dans l'équation de continuité discretisée nous ramène à l'équation donnant cette fois ci les valeurs de la pression aux noeuds considerés.

$$a_P P_P = a_E P_E + a_W P_W + a_S P_S + a_N P_N + b \quad (3-73)$$

on remarque que les équations (3-69) et (3-70) sont identiques excepté le terme source b. Cependant si le champ de pseudo-vitesses est solution des équations de quantité de mouvement, alors le champ de pression est obtenue de l'équation (3-73) directement; ceci n'est pas le cas pour l'équation de correction de pression (3-69).

3-5.7) ALGORITHME " SIMPLER "

les différents étapes qui constituent l'algorithme SIMPLER sont données comme suit :

■ 1 Etape :

Introduction des caractéristiques physiques et géométriques du domaine à étudier et construction de la grille décalée pour le champ de vitesse .

■ 2 Etape :

Introduction du champ de vitesse estimé de départ

■ 3 Etape :

Calcul du champ des pseudo-vitesses en substituant les valeurs estimées dans l'équation (3-72)

■ 4 Etape :

Détermination des coefficients  $a_{nb}$  ( $a_{nb} = W, E, N, S$ ) de l'équation de pression et résolution de l'équation (3-73) pour obtenir le champ de pression .

■ 5 Etape :

En utilisant le champ de pression calculé dans l'étape précédente comme un champ estimé  $P^*$  on résout les équations de mouvement (3-59) afin d'obtenir les vitesses  $U^*$  et  $V^*$

■ 6 Etape :

Détermination du terme source  $b$  de l'équation (3-70) et résolution de l'équation (3-69) pour calculer les corrections de pression.



■ 7 Etape :

Correction de la vitesse à partir des equations (3-67)

■ 8 Etape :

Résoudre l'équation discrétisée pour actualiser les autres variables indépendantes  $\phi$  si c'est nécessaire.

■ 9 Etape :

Verifier si le critère de convergence est satisfait si non on reprend le champ de vitesses trouvés comme pseudo-vitesse et on repete les étapes de 2 à 9.

3-6) RESOLUTION DU SYSTEME D'EQUATIONS

Le système d'équations algébriques obtenu est résolu par des méthodes itératives. on peut citer la méthode de résolution ligne par ligne.

Dans cette méthode l'équation algébrique à la (K+1) ième itération est:

$$a_P \phi_P^{(k+1)} - a_E \phi_E^{(k+1)} - a_W \phi_W^{(k+1)} = a_S \phi_S^{(k)} + a_N \phi_N^{(k)} + b \quad (3-74)$$

où les valeurs des variables  $\phi_m^{(k)}$  seront les valeurs calculées à l'itération précédente. Alors, dans ce cas le système d'équations relatif à l'ensemble des noeuds devient tridiagonal suivant l'une des directions considérée.

On pourra donc écrire sous forme indiciel:

$$\beta_i \phi_i^{(k+1)} - \alpha_i \phi_{i+1}^{(k+1)} - \gamma_{i-1} \phi_{i-1}^{(k+1)} = \lambda_i \quad (3-75)$$

(i=1,2,.....n)



Avec :

$$\begin{cases} * \beta_i = a_p \\ * \alpha_i = a_E \\ * \gamma_i = - a_W \\ * \lambda_i = a \phi_S^{(k)} + a_N \phi_N^{(k)} + b \end{cases} \quad (3-76)$$

L'ensemble de ces équations constitue donc un système d'équations qui peut s'écrire sous forme matricielle .

$$\begin{bmatrix} \beta_1 & \alpha_1 & & & & & & & & & \\ \gamma_2 & \beta_2 & & & & & & & & & \\ & & \alpha_2 & & & & & & & & \\ & & & \cdot & & & & & & & \\ & & & & \gamma_i & \beta_i & \alpha_i & & & & \\ & & & & & & & \cdot & & & \\ & & & & & & & & \gamma_n & \beta_n & \\ & & & & & & & & & & \phi_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \\ \cdot \\ \phi_i \\ \cdot \\ \phi_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \cdot \\ \lambda_i \\ \cdot \\ \lambda_n \end{bmatrix} \quad (3-77)$$

n : Nombre d'inconnues dans la direction donnée

Le système ainsi obtenu, est tridiagonal il peut être résolu par la methode T D M A de thomas donnée dans l'annexe [A]. Pour une position j la variable  $\phi$  est déterminée dans la direction i pour les différents noeuds, puis on passe à la ligne suivante en appliquant la même procedure, tout en considérant les variables suivant l'autre direction connues. On obtient donc au bout de chaque itération, les valeurs approchées de toutes les variables dépendantes. Pour accélérer ce processus itératif, on utilise la technique de RELAXATION dont les détails sont donnés dans l'annexe [B].

### 3-7) STABILITE ET CONVERGENCE

En vue d'assurer la stabilité et la convergence du système d'équations discrétisées, il est nécessaire de respecter les quatre règles de base suivantes :

- 1° REGLE : Compatibilités aux frontières des volumes de contrôle

Lorsque une face est commune à deux volumes de contrôle adjacents, le flux qui les traverse doit être représenté par la même expression dans les équations discrétisées pour chacun des deux volumes de contrôle.

- 2° REGLE : Coefficients positifs.

La valeur de la variable  $\phi$  en un point donné est influencée par les valeurs des  $\phi$  aux noeuds voisins. Dans les mêmes conditions, l'augmentation de la valeur de  $\phi$  en un point doit provoquer une augmentation de  $\phi$  aux noeuds voisins. Pour cela, les coefficients  $a_M$  ( $M = P, E, W, S, N$ ) doivent tous avoir le même signe (positif ou négatif).

- 3° REGLE : Linéarisation des termes sources

Dans l'équation (3-23) le coefficient  $a_p$  peut devenir négatif à travers le terme  $S_p$  entraînant ainsi des instabilités numériques. Pour cette raison le terme  $S_p$  doit être négatif ou nul.

- 4° REGLE : Somme des coefficients voisins.

Les équations différentielles gouvernantes contiennent uniquement les dérivées de la variable dépendante  $\phi$ . Si c'est une constante arbitraire, la fonction  $\phi + c$  vérifie aussi les équations différentielles.



cette propriété est aussi valable pour les équations discretisées ceci conduit à :

$$a_p = \sum_{nb} a_{nb}$$

### 3-8) CRITERE DE CONVERGENCE

on dit qu'un processus itératif a atteint la convergence l'orsque les itérations ultérieures ne produisent aucun changement significatif dans les valeurs de la variables  $\phi$ . Pratiquement, on exprime cette convergence par un test d'arrêt du processus itératif appelé aussi "critère de convergence " qui dépend de la nature du problème et des objectifs du calcul.

Un critère approprié est celui qui porte sur les résidus de quantité de mouvement, de la masse et de la temperature. Ces résidus sont définis par :

$$R_\phi = \sum_{nb} a_{nb} \phi_{nb} + b - a_p \phi_p$$

Evidemment, quand l'équation discretisée est satisfaite,  $R_\phi$  tend vers zero mathématiquement, on traduit cela par l'inégalité suivante :

$$\sum_{\Omega} |R_\phi| < \epsilon_\phi$$

$\Omega$  : domaine de calcul

$\epsilon_\phi$  : valeur infiniment petite caractérisant l'erreursur la solution obtenue.

---



## PRESENTATION DU CODE "SIMPLER"

### 4-1) INTRODUCTION

Le code " SIMPLER ", n'est en effet qu'une traduction intégrale en langage FORTRAN de l'algorithme présenté et développé par PATANKAR en (1980), Pour la résolution des équations bidimensionnelles aux dérivées partielles issues des problèmes de mécanique des fluides et de transfert de chaleur. En effet le code à été mis au point sous forme généralisée d'une variable physique  $\phi(NF)$ , pour permettre à l'utilisateur d'effectuer une adaptation étendue du code à la résolution de son problème.

La variable physique  $\phi(NF)$  peut avoir dix significations possibles selon la valeur de NF dans le code. Les quatres premières seront réservées pour exprimer les variables des équations de mouvement telles-que (U,V,P,P'), pour les valeurs de  $NF > 4$  la variable physique  $\phi(NF)$  peut exprimer éventuellement la temperature, la concentration ou autre.

Le code " SIMPLER ", est composé essentiellement de quatres sous-programmes permettant chacun d'effectuer une tâche précise nécessaire au déroulement et d'un autre sous-programme externe appelé " USER " destiné à l'utilisateur pour l'adaptaion du code à son problème. Ces derniers sont gérés par un programme principal a l'aide d'une succession de branchements ordonnés à chaque partie des sous programmes voir figure (4-1).

PRESENTATION DU CODE DE CALCUL

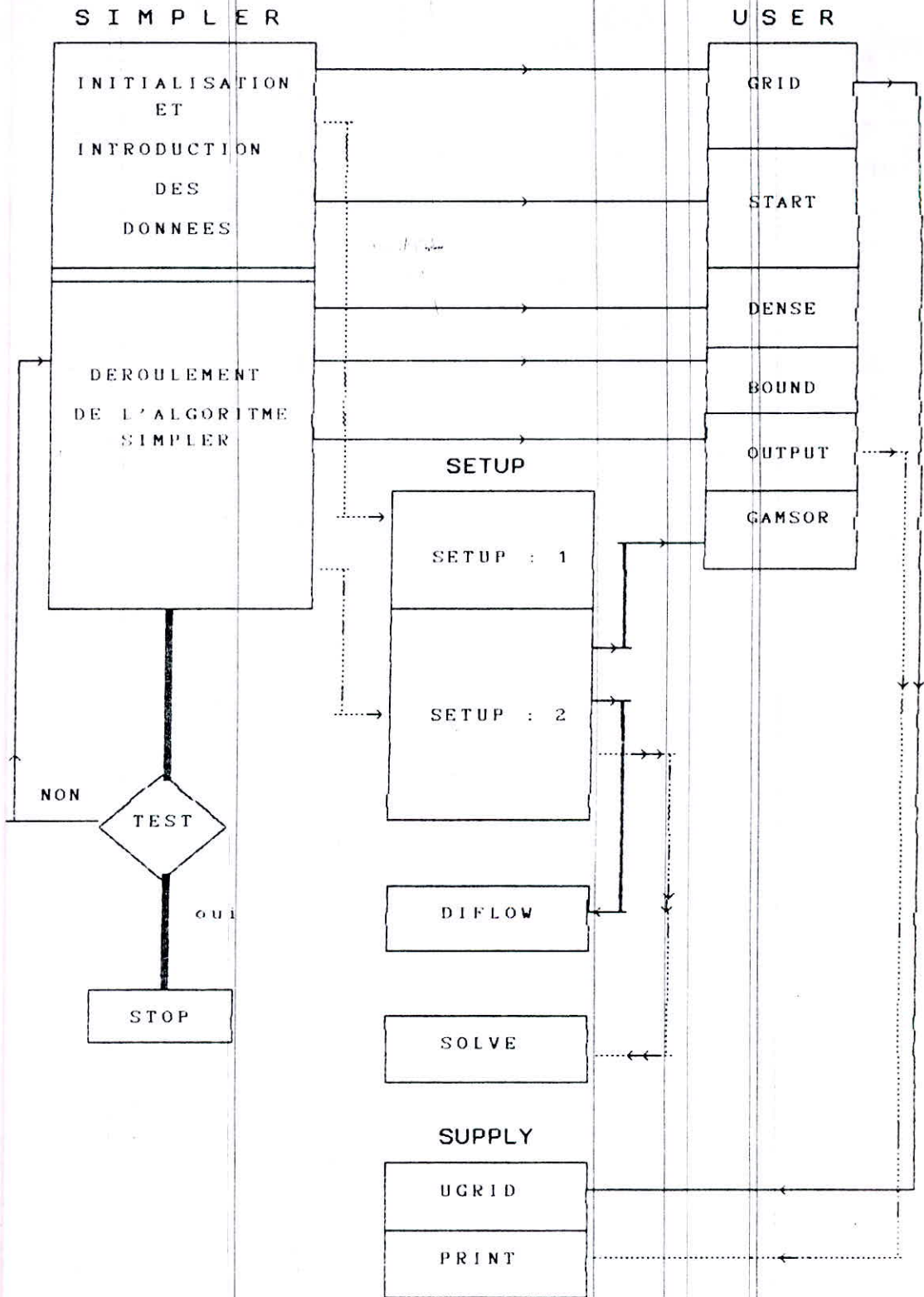


Figure (4-1) Organigramme du code "SIMPLER"

#### 4-2) SOUS-PROGRAMME " SETUP "

C'est une routine composée de deux parties importantes SETUP 1 et SETUP 2. Après, la lecture des données, s'effectue la déclaration par défaut des variables logiques et arithmétiques. la première partie se charge donc de la détermination des caractéristiques géométriques du domaine de calcul pour le maillage centré et décalé. Parmi elles, les distances inter-nodales, les dimensions des volumes de contrôle centré et décalé et les sections de passage dans les deux directions. La seconde se charge du calcul des coefficients  $a_M$  ( $M = e, w, n, s$ ) et du terme source pour chaque variable physique concernée par la résolution. C'est aussi dans cette partie que les étapes de résolution de l'algorithme sont assurées puis on fait appel à la routine de résolution.

#### 4-3) SOUS-PROGRAMME " SOLVE "

Le sous-programme " SOLVE " se charge essentiellement de la résolution du système d'équations algébriques établi dans la routine " SETUP 2 ". Cette résolution est assurée par la méthode itérative ligne par ligne dans les deux directions du domaine de calcul. La méthode de sous relaxation ensuite utilisée pour chaque valeur dépendante  $\phi$  de la procédure afin d'accélérer la convergence.

#### 4-4) SOUS-PROGRAMME " SUPPLY "

Il est composé de deux parties, " UGRID " et " PRINT ". La première consiste à calculer les positions des interfaces des différents volumes de contrôle centrés et décalé du domaine de calcul.

Cette partie peut être aussi accommodée et modifiée par l'utilisateur pour la génération d'un maillage spécifique au problème à résoudre.



La deuxième partie permet d'afficher les résultats des variables  $\phi(NF)$  désirées par l'utilisateur; Telles que les vitesses, la pression ou la température en tout point du maillage.

#### 4-5) SOUS-PROGRAMME " DIFLOW "

Cette routine contient la fonction  $A(|P|)$  du schéma d'interpolation choisi, dans notre cas on a choisi la fonction du schéma en loi-puissance. Cette routine est à chaque fois appelée par le sous-programme " SETUP 2 ", pour la détermination des coefficients  $a_m$  des équations des vitesses U et V ou pour les autres  $\phi(NF)$  avec  $NF > 4$ . On note que cette partie peut être spécifiée par l'utilisateur pour un autre schéma.

#### 4-6) SOUS-PROGRAMME " USER "

Le sous-programme " USER " est une routine externe qui est destinée à l'utilisateur pour spécifier les données géométriques et physiques des variables  $\phi(NF)$  concernées par la résolution d'un problème donné. Elle comporte six parties de branchement secondaire avec les autres sous-programmes qui sont:

##### ■ Branchement " GRID "

Dans cette partie après l'introduction des dimensions géométriques du domaine, la routine fait appel à la partie " UGRID " pour la génération des interfaces constituant les volumes de contrôles. Dans cette partie, on spécifiera aussi le mode concerné par la résolution par la variable " MODE ", qui prend trois valeurs selon le type de systèmes de coordonnées.



MODE = 1 pour un problème en coordonnées cartésiennes (x,y)

MODE = 2 pour un problème en coordonnées cylindriques (r,z)

MODE = 3 pour un problème en coordonnées polaires (r, $\theta$ )

#### ■ Branchement " START "

Dans cette partie on effectue l'initialisation tel-que :

- Nombre d'itérations MAXIMUM (LAST)
- Déclaration des fonctions  $\phi(NF)$  concernées
- Coefficients de relaxation pour chaque  $\phi(NF)$
- Les données physiques du problème ( $Re, Pr, \mu, Cp, Pe, \dots$ )
- Conditions initiales des variables  $\phi(NF)$

#### ■ Branchement " DENSE "

Elle permet de spécifier la densité en chaque point. Cette dernière est appelée durant chaque itérations.

#### ■ Branchement " BOUND "

Dans cette partie on peut déclarer les conditions aux limites du problème et effectuer d'autres calculs s'il y a lieu.

#### ■ Branchement " OUTPUT "

Dans cette partie, on peut effectuer l'affichage des variables voulues durant l'itération et aussi c'est ici que s'effectue l'appel de l'affichage " PRINT " .

#### ■ Branchement " GAMSOR "

Cette partie concerne la déclaration du terme de diffusion désigné par " GAM " dans chaque point du domaine et pour chaque variable physique  $\phi(NF)$  concernée par la résolution. C'est aussi dans cette partie que les coefficients du terme source sont introduites et explicités en chaque point du maillage. Elles sont désignées par " CON " pour  $S_c$  et " a<sub>p</sub> " pour  $S_p$ .

## CHAPITRE : 5

# ETUDE NUMERIQUE DE LA CONVECTION FORCEE

### 5-1) INTRODUCTION

Après avoir consacré une bonne partie de notre étude à la maîtrise de la méthode des volumes finis, nous avons adapté un programme de calcul [25] afin de résoudre les équations aux dérivées partielles régissant le phénomène de la convection forcée dans les conduites circulaire et annulaire. La combinaison de ces deux configurations géométriques nous permet par la suite d'étudier les échangeurs de chaleur en tenant compte des effets d'entrée. Le programme de calcul utilisé pour résoudre les problèmes physiques décrits précédemment est basé essentiellement sur l'algorithme SIMPLER. Les résultats de cette simulation numérique sont exposés et analysés dans ce présent chapitre.

### 5-2) ETUDE DE LA CONVECTION THERMIQUE DANS LE TUBE

#### 5-2.1) Présentation du problème :

Il s'agit d'étudier la convection forcée en régime laminaire ( $Re \leq 2300$ ) dans une conduite circulaire et horizontale de diamètre  $D$ , cette dernière est soumise à une température uniforme à la paroi. Les conditions aux limites relatives aux grandeurs adimensionnelles pour ce problème sont indiquées sur la figure (5-1a).

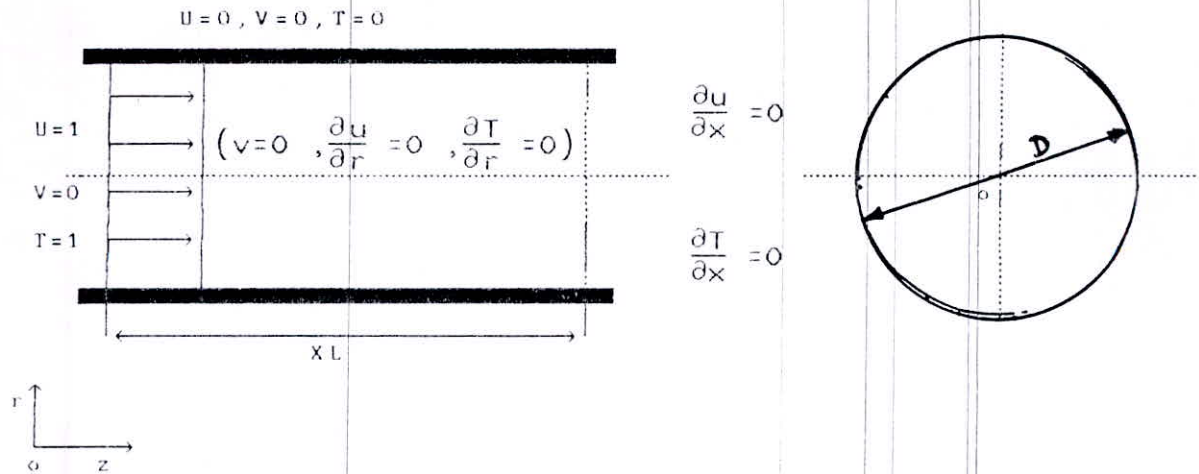


FIGURE (5-1a) Conditions aux limites pour le tube

### 5-2.2) Résultats et discussions :

Avant de présenter les résultats concernant les quatre types de fluides considérés ( $Pr=0.7, Pr=20, Pr=70, Pr=100$ ). Nous avons examiné l'influence du maillage sur la solution.

#### 1°) Choix du maillage :

Nous avons considéré, à cet effet le cas d'un écoulement de fluide dont les nombres de PRANDTL et de REYNOLDS sont respectivement 7 et 50. Pour étudier l'influence du maillage sur la solution, plusieurs tests sont pris en compte ( $10 \times 10$ ,  $20, 20$ ,  $50 \times 20$ ,  $50 \times 25$ ). L'existence de forts gradients de vitesse près de l'entrée et des parois nous incite à utiliser dans les deux derniers tests un maillage à pas spatial variable, raffiné dans ces zones à fort gradient (voir figure 5-1b). Les résultats obtenus sont illustrés par les figures (5-A), (5-B), (5-C), et (5-D). Ces figures nous montrent l'évolution des profils de vitesse aux différentes stations considérées.



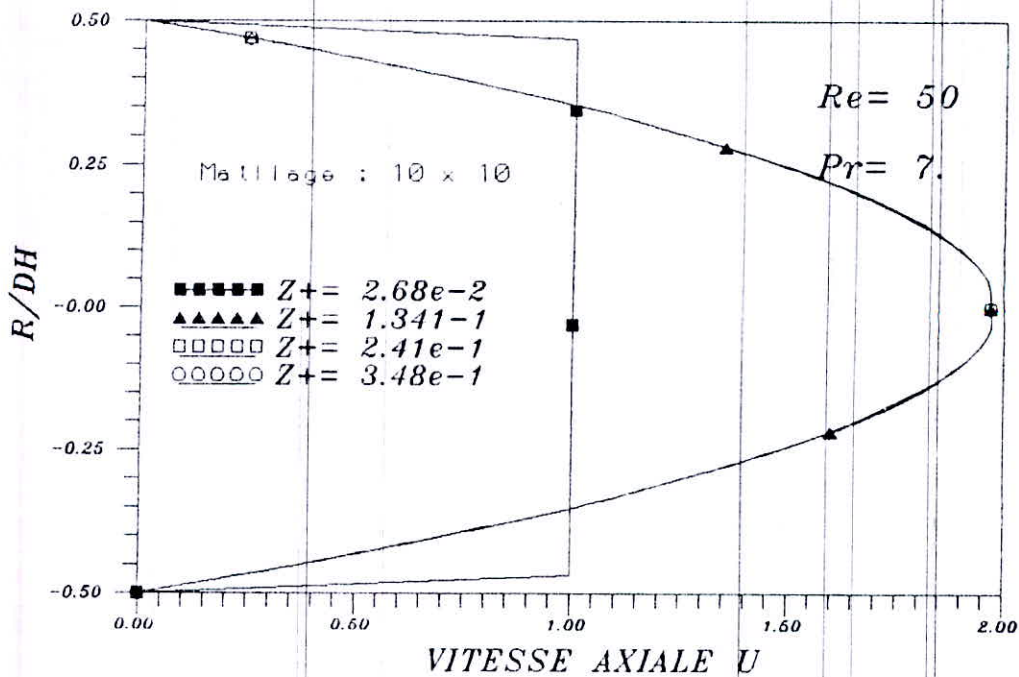


FIG (5-A ) Profils de vitesse adimensionnelle correspondants aux differentes stations axiales  $Z+$

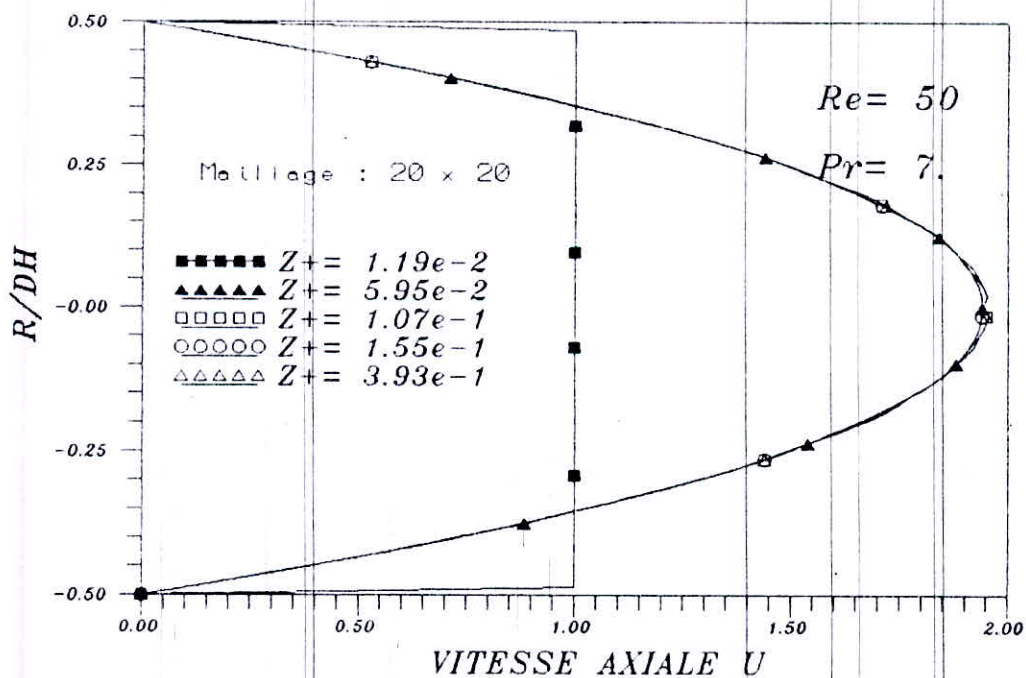


FIG (5-B ) Profils de vitesse adimensionnelle correspondants aux differentes stations axiales  $Z+$



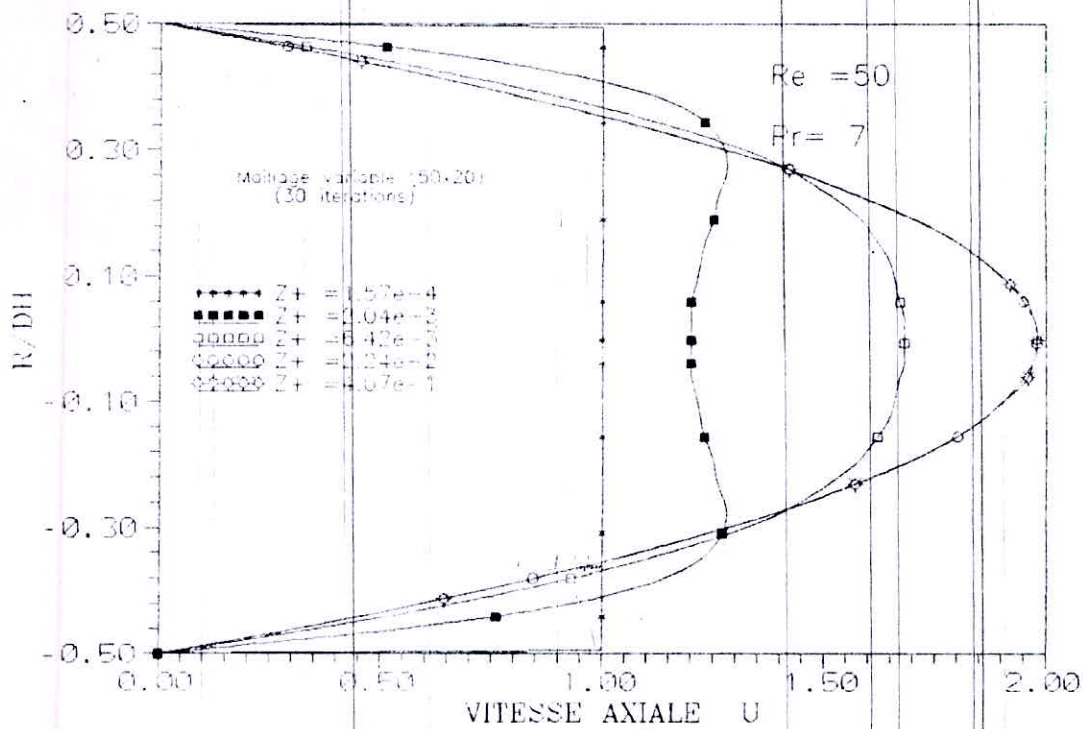


FIG (5-C) profils de vitesse adimensionnelle correspondants aux differentes stations axiales  $Z+$

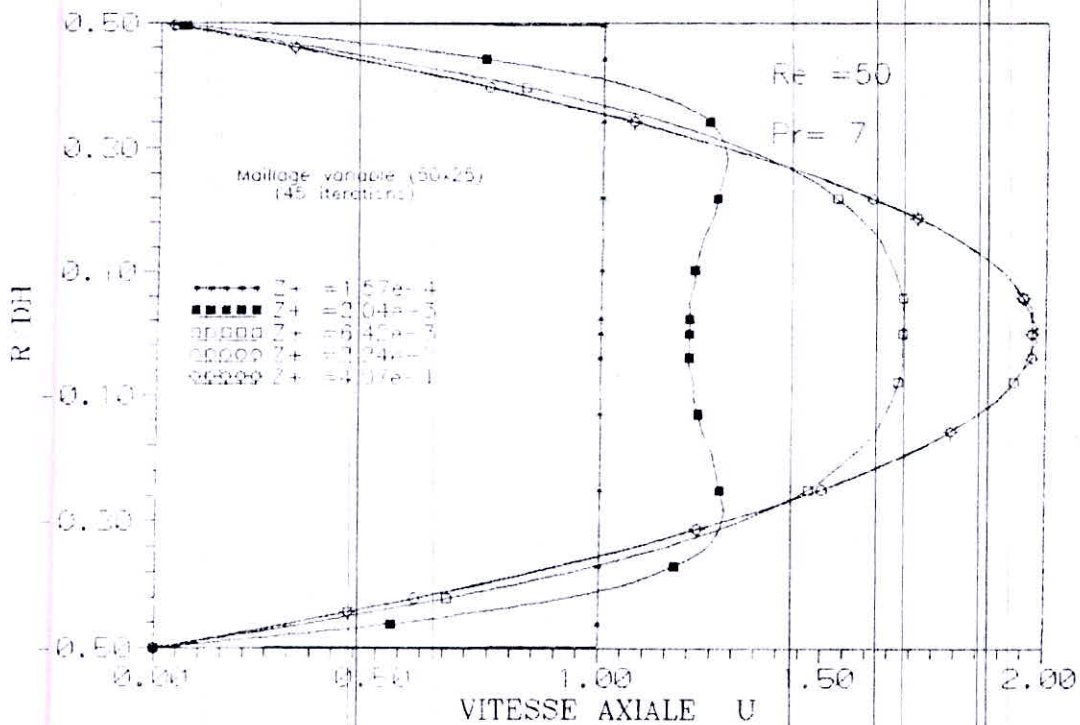


FIG (5-D) profils de vitesse adimensionnelle correspondants aux differentes stations axiales  $Z+$

L'examen de ces courbes nous permet de conclure que c'est assurément les grilles (5-C) et (5-D) qui nous permettent d'avoir une meilleure information sur la nature de l'écoulement près de l'entrée de la conduite. Ces résultats ont orienté le choix du maillage définitif vers la grille (50x20) vu que les profils de vitesse obtenus avec ce maillage et le maillage (50x25) sont presque identiques.

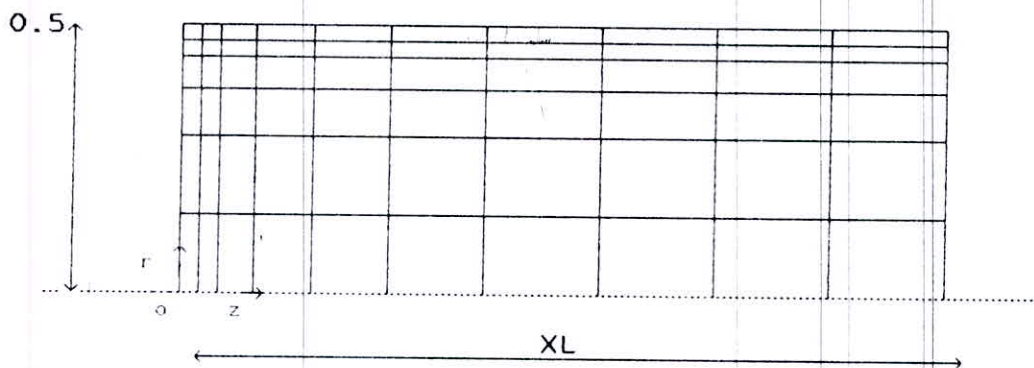


FIGURE (5-1b) MAILLAGE A PAS SPATIAL VARIABLE DANS LE TUBE

## 2°) Effet du nombre de Prandlt

Les tests de simulation sont effectués pour 4 types de fluide dont les résultats sont donnés comme suit.

### - Test 1: Fluide ayant un nombre de PRANDTL $Pr=0.7$

les figures (5-1) et (5-2) nous montrent en grandeurs adimensionnelles l'évolution des profils de vitesse et de température le long de la conduite pour  $Pr=0.7$  et  $Re=50$ . L'examen qualitatif de ces courbes aux différentes stations indiquées  $Z+$ , nous révèle que l'évolution du champ dynamique est presque identique à celui du champ thermique et ce depuis l'entrée de la conduite. Les mêmes constatations peuvent être déduites des figures (5-3) et (5-4) pour un nombre de Reynolds plus élevé ( $Re=100$ ).

- Test 2: Fluide ayant un nombre de PRANDTL Pr=7

Par contre lorsque Pr=7, on remarque d'après les figures (5-5) et (5-8) que l'établissement dynamique s'effectue plus rapidement que l'établissement thermique. En effet, si on observe les profils de vitesse et de température à la troisième station ( $z^+ = 1.32 \cdot 10^{-2}$ ). On constate sur la figure (5-7) que le profil de vitesse se rapproche de celui du régime établi alors que le profil de température (figure (5-8)) est encore proche de la répartition initiale de température à la première station.

- Test 3: Fluide ayant un nombre de PRANDTL Pr=20

Sur les figures (5-9) à (5-12), lorsque Pr=20, on remarque une fois de plus que le champ dynamique se développe beaucoup plus rapidement que le champ thermique.

- Test 4: Fluide ayant un nombre PRANDTL Pr=100

Les observations précédentes sont d'autant plus vraies lorsque le nombre de PRANDTL devient plus élevé. En effet on constate d'après les figures (5-13) à (5-16) que l'établissement dynamique apparaît immédiatement à partir de l'entrée de la conduite alors que les profils de température se développent beaucoup plus lentement.

- Test 5: Fluides ayant un même nombre de REYNOLDS

Sur les figures (5-17a) à (5-17d), on a tracé l'évolution des profils de vitesse aux différentes stations indiquées pour Re=10 et pour plusieurs valeurs du nombre de PRANDTL (Pr=0.7, Pr=7, Pr=20, Pr=100). En examinant ces courbes, on peut conclure qu'à partir de Pr≥7 le champ dynamique se développe plus rapidement que le champ thermique.



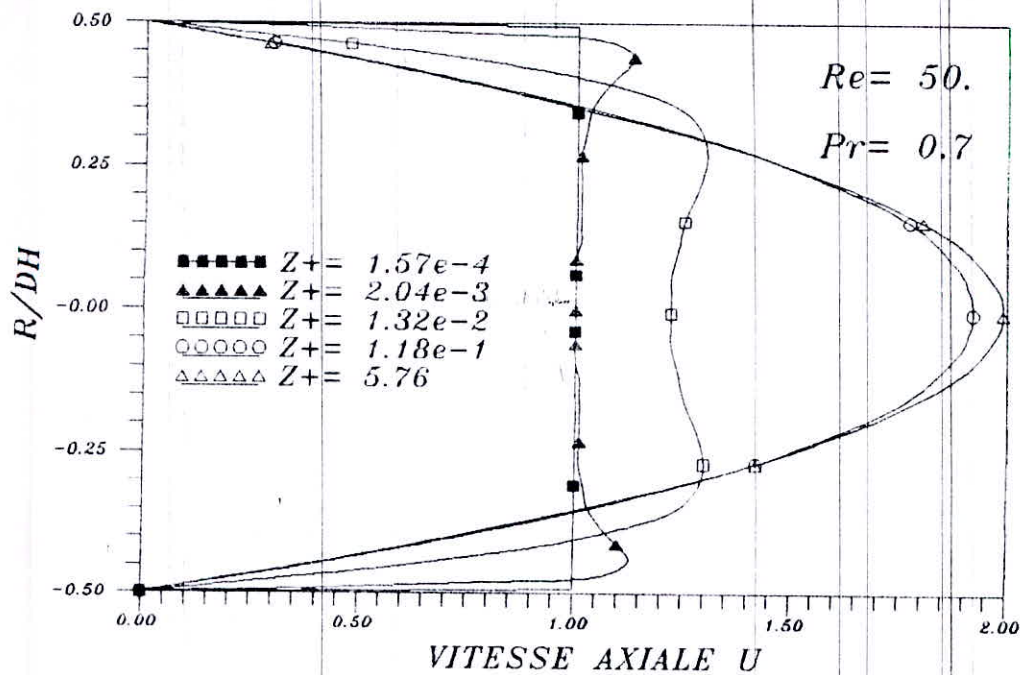


FIG (5-1) Profils de vitesse adimensionnelle correspondants aux differentes stations axiales  $Z+$

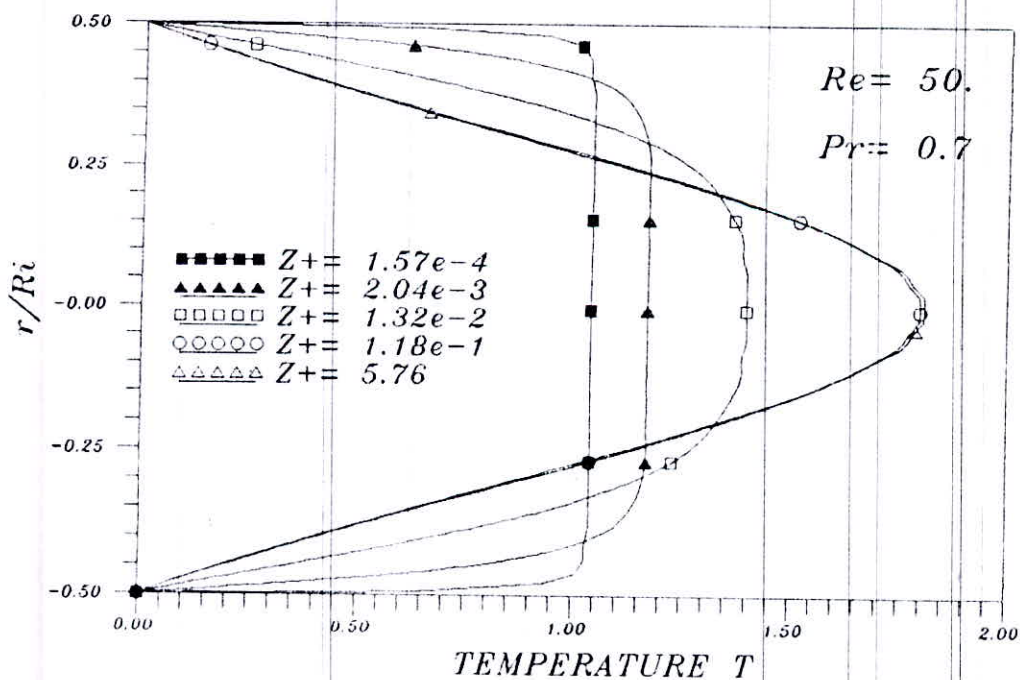


FIG (5-2) Profils de temperatures adimensionnelle correspondants aux differentes stations axiales  $Z+$



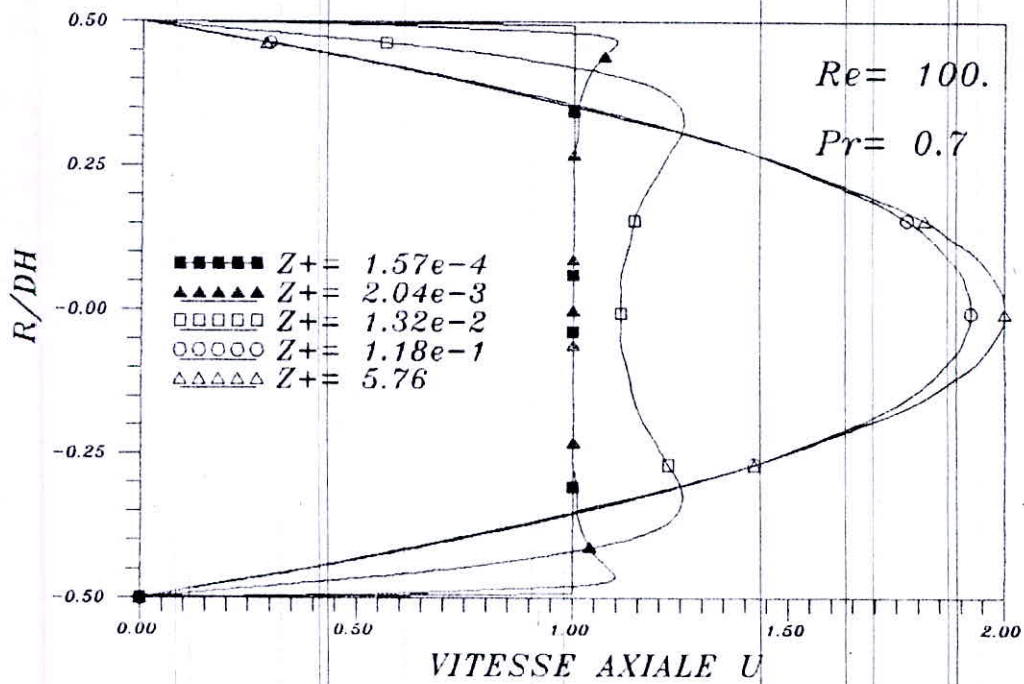


FIG (5-3) Profils de vitesse adimensionnelle correspondants aux differentes stations axiales  $Z+$

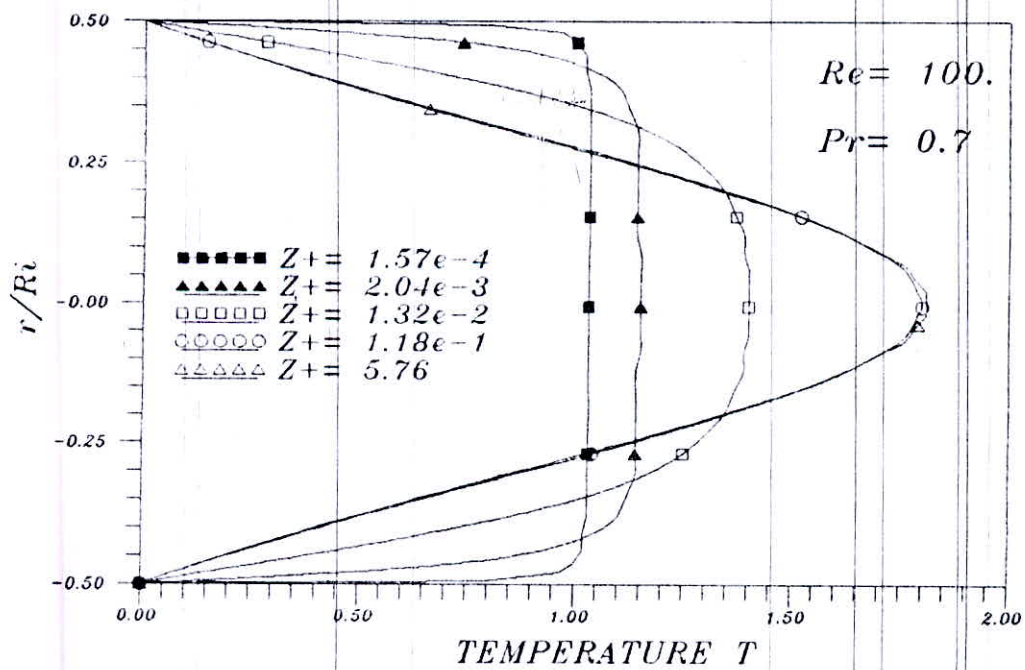


FIG (5-4) Profils de temperatures adimensionnelle correspondants aux differentes stations axials  $Z+$

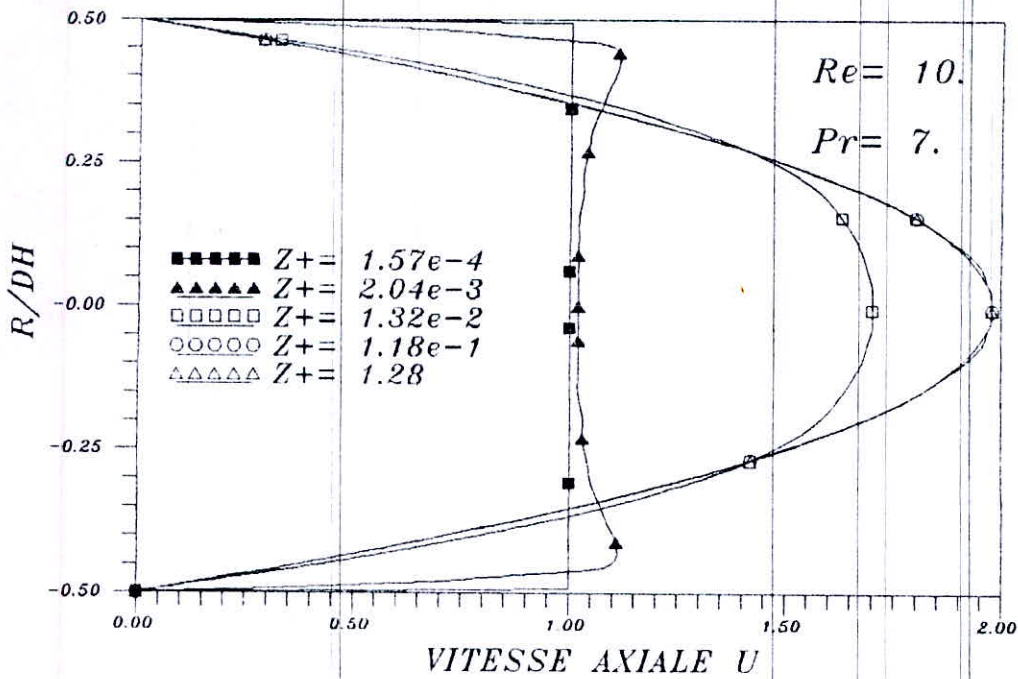


FIG (5-5) Profils de vitesse adimensionnelle correspondants aux differentes stations axiales  $Z+$

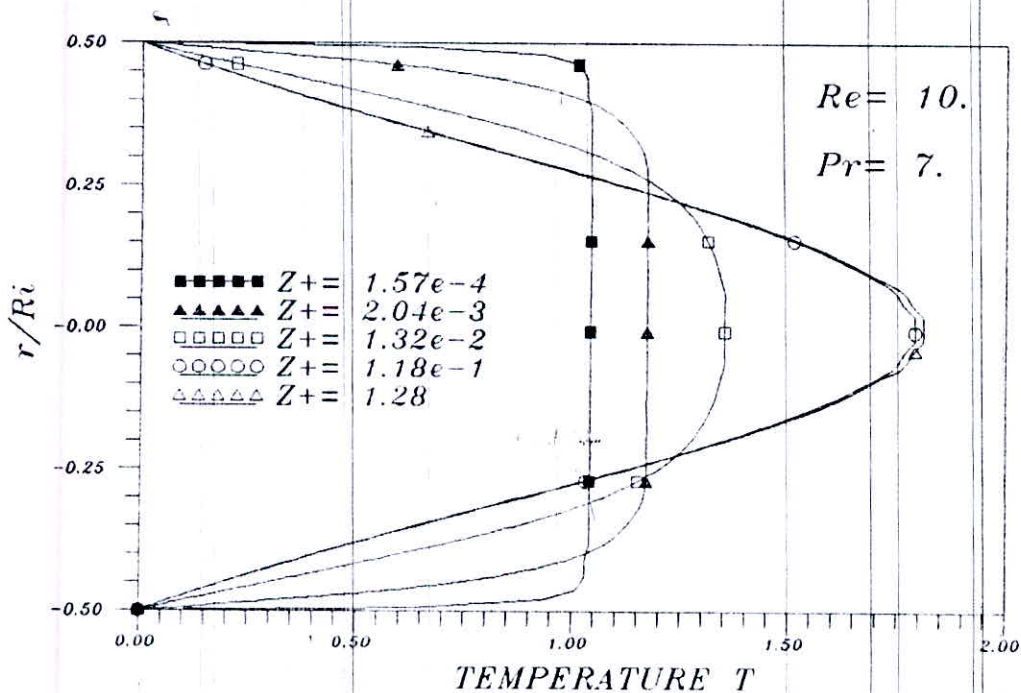


FIG (5-6) Profils de temperatures adimensionnelle correspondants aux differentes stations axiales  $Z+$

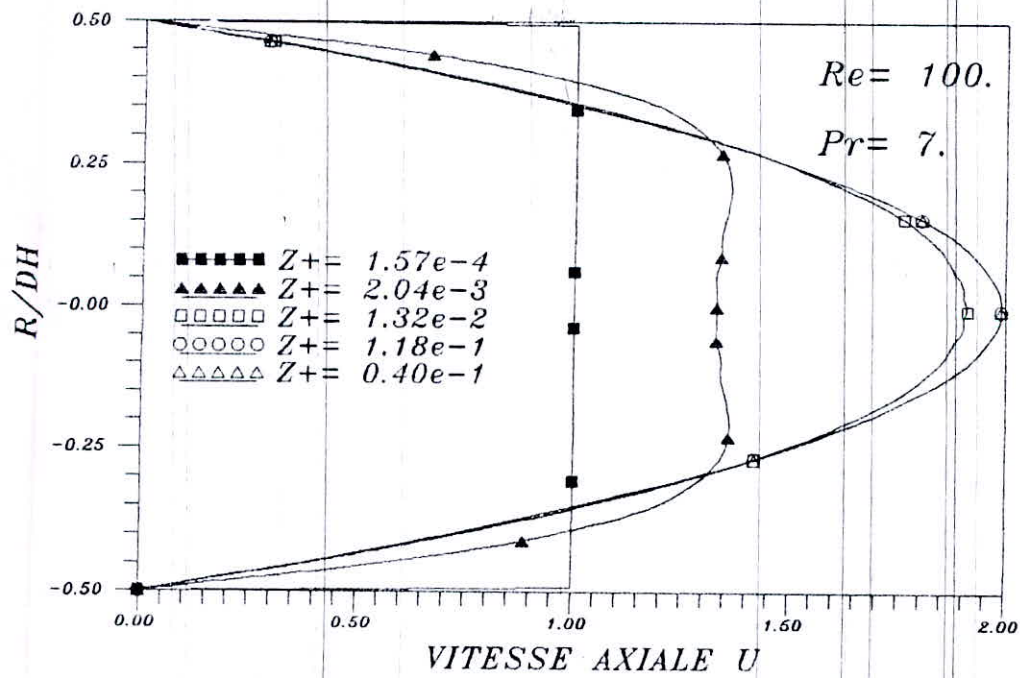


FIG (5-7) Profils de vitesse adimensionnelle correspondants aux differentes stations axiales  $Z+$

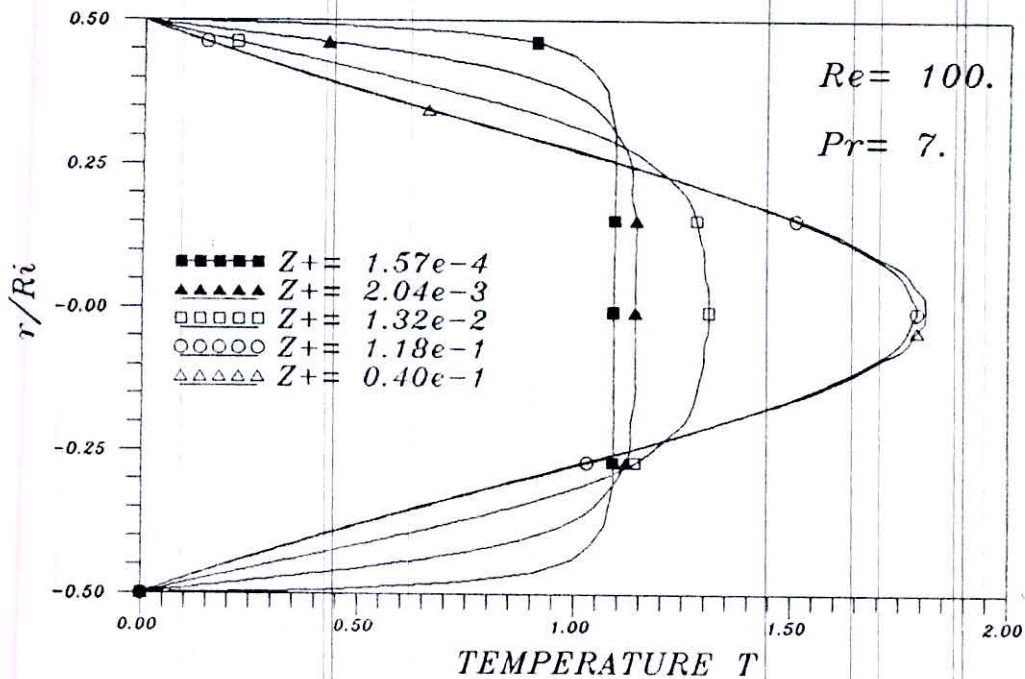


FIG (5-8) Profils de temperatures adimensionnelle correspondants aux differentes stations axials  $Z+$



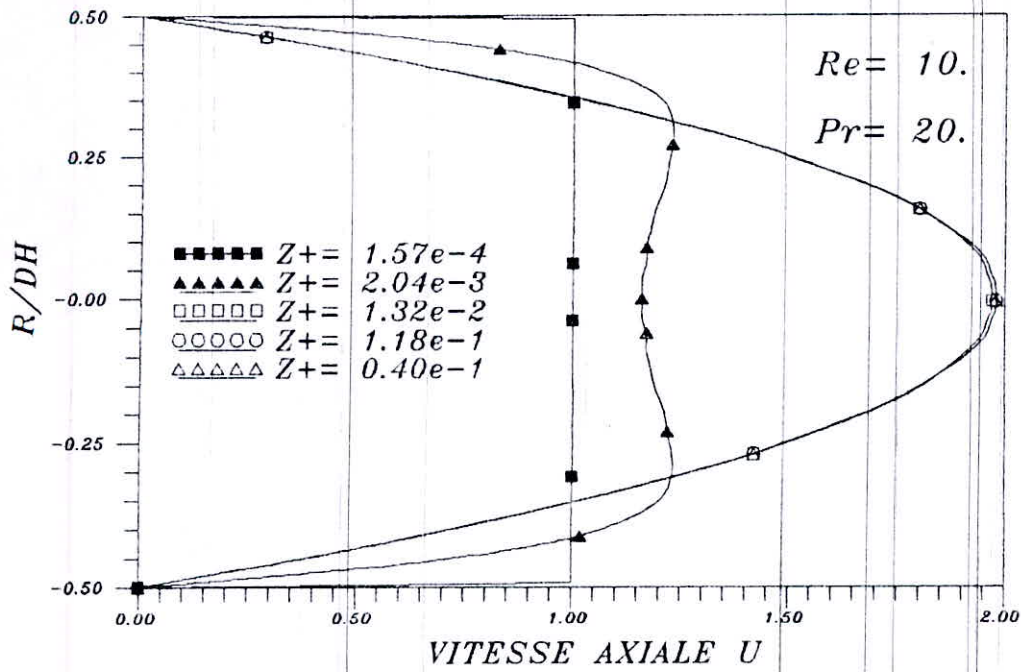


FIG (5-9) Profils de vitesse adimensionnelle correspondants aux differentes stations axiales  $Z+$

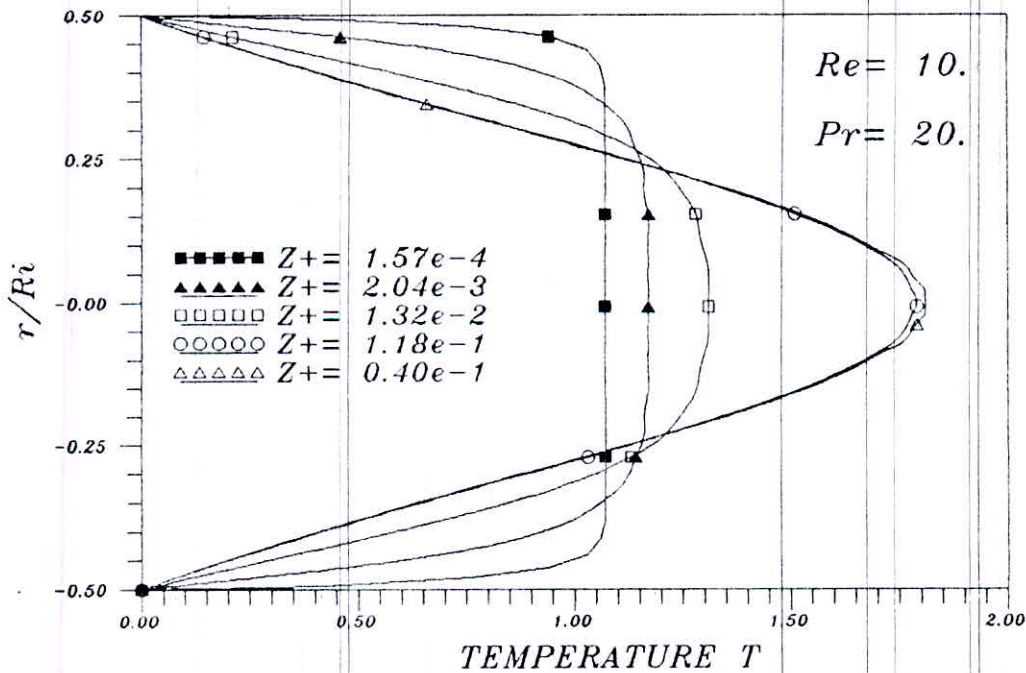


FIG (5-10) Profils de temperatures adimensionnelle correspondants aux differentes stations axiales  $Z+$

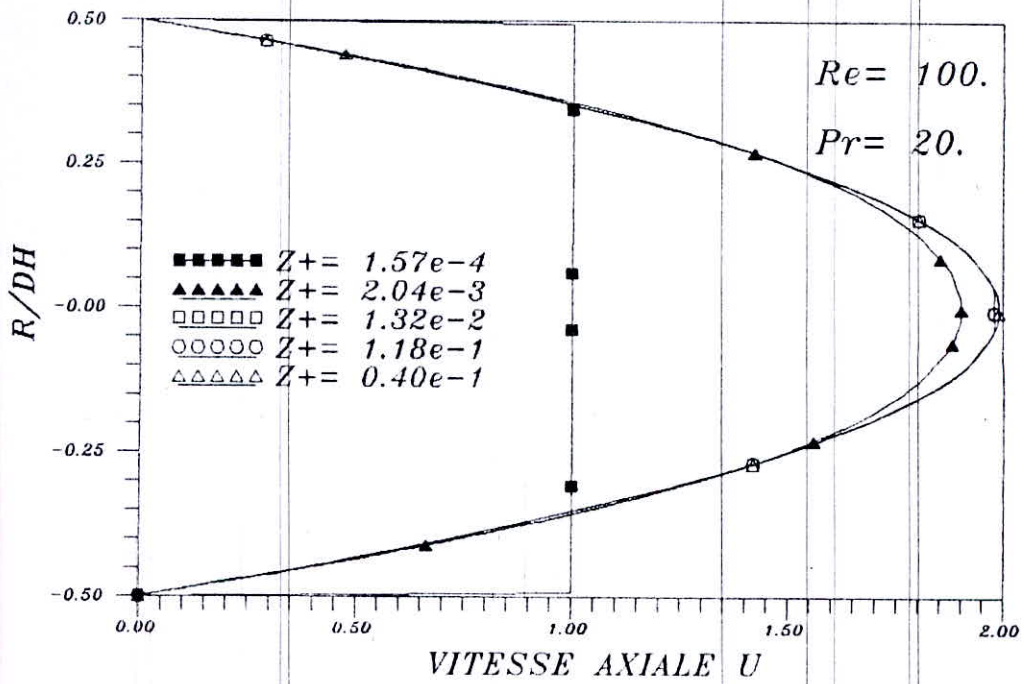


FIG (5-11) Profils de vitesse adimensionnelle correspondants aux differentes stations axiales  $Z+$

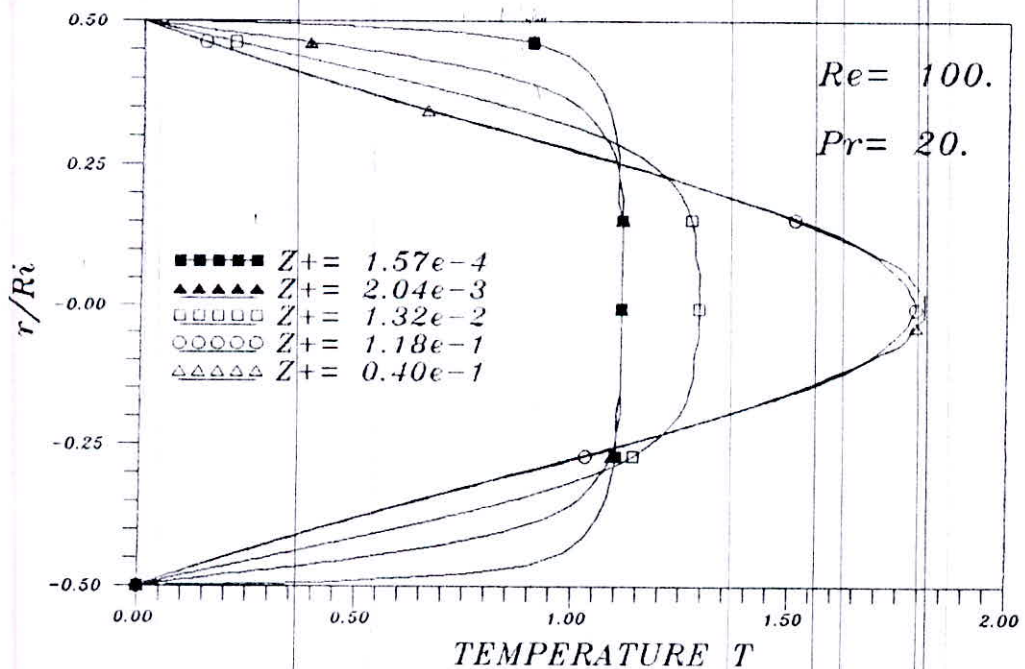


FIG (5-12) Profils de temperatures adimensionnelle correspondants aux differentes stations axials  $Z+$

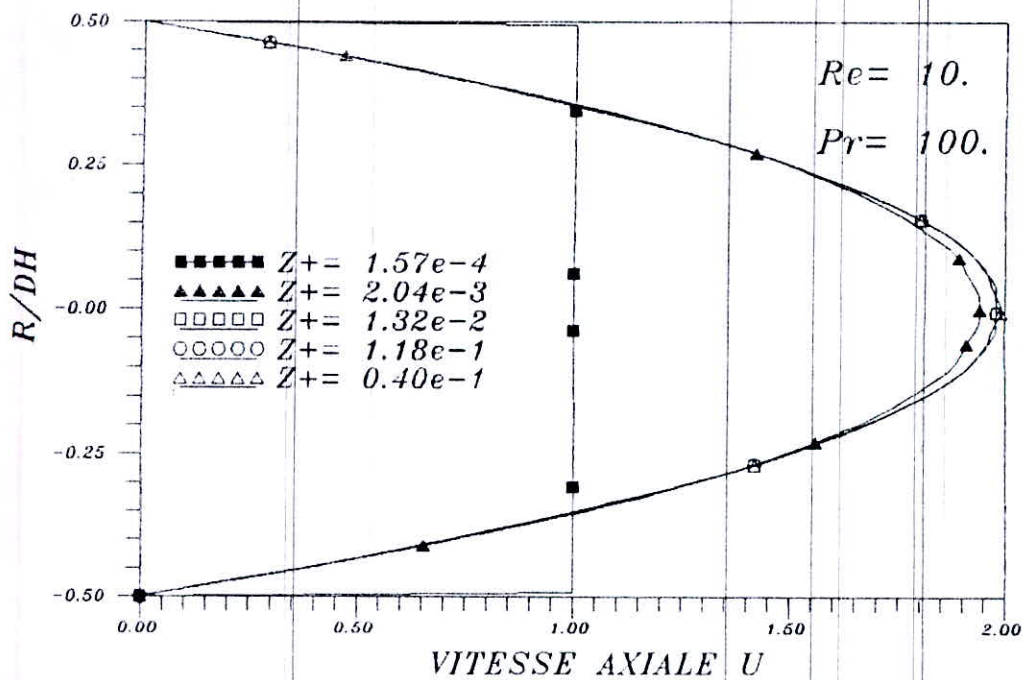


FIG (5-13) Profils de vitesse adimensionnelle correspondants aux differentes stations axiales  $Z+$

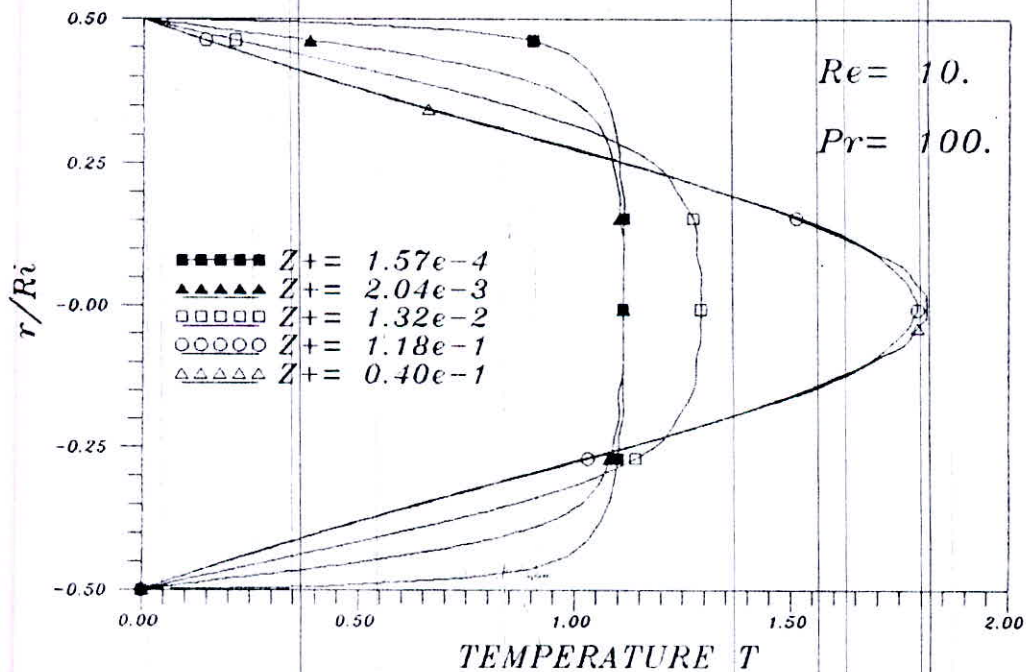


FIG (5-14) Profils de temperatures adimensionnelle correspondants aux differentes stations axials  $Z+$



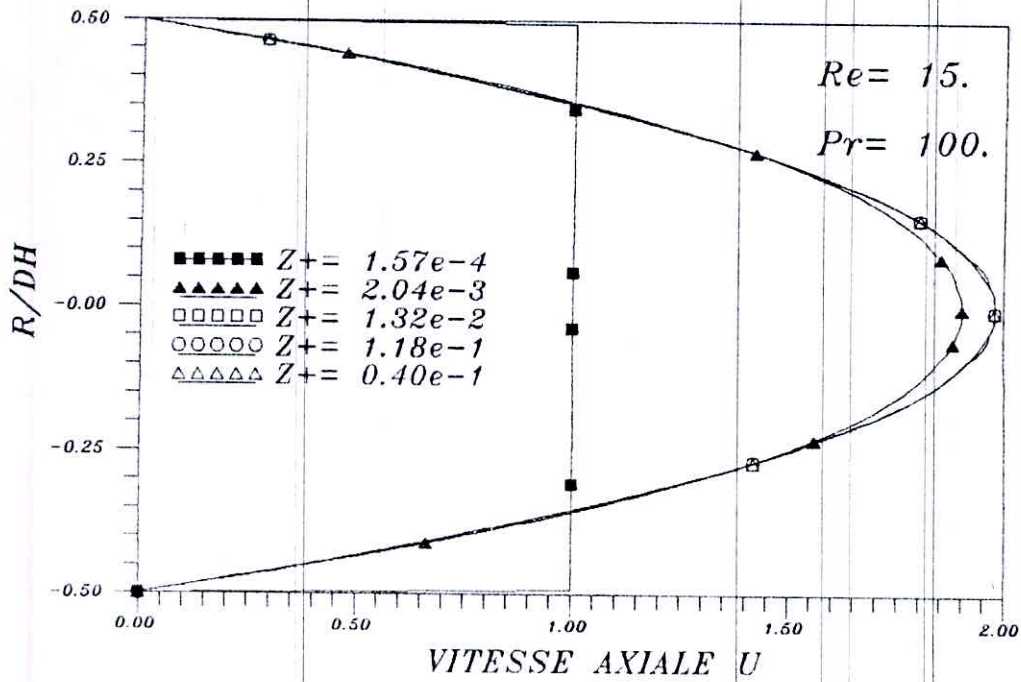


FIG (5-15) Profils de vitesse adimensionnelle correspondants aux differentes stations axiales  $Z+$

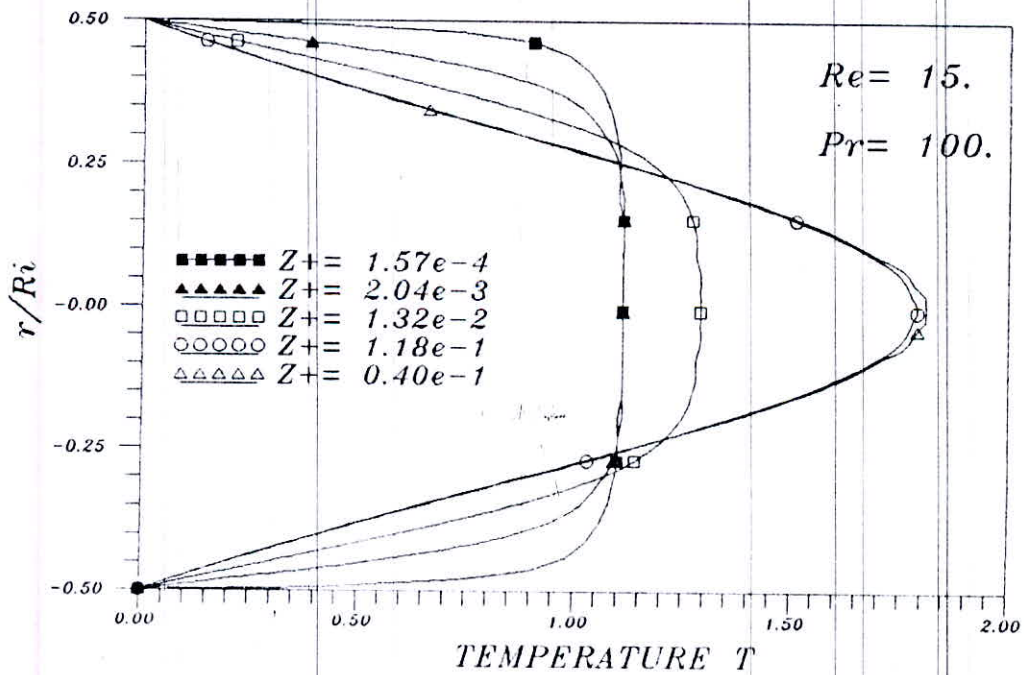


FIG (5-16) Profils de temperatures adimensionnelle correspondants aux differentes stations axials  $Z+$

CONCLUSION :

Ces premiers résultats nous permettent de conclure que l'établissement dynamique s'effectue en même temps que l'établissement thermique pour les fluides dont le nombre de Prandlt est proche de l'unité. Alors que, pour des valeurs du nombre de prandlt  $Pr \geq 7$ , l'établissement dynamique est beaucoup plus rapide. Ceci confirme les résultats théoriques obtenus à partir des équations de couche limite, des références [1] et [14], valables pour des nombres de Prandlt  $Pr \geq 7$ . La comparaison des courbes des profils des vitesses représentés sur les figures (5-18a) et (5-18b) et obtenus pour  $Re=1200$  et  $Pr=1$  avec ceux de la référence [6], nous montre qu'il y a une bonne concordance entre nos résultats et ceux de la référence. Ceci nous conduit à valider notre model mathématique pour la résolution du phénomène de convection forcée dans la région d'entrée de la conduite.

3°) Effet de la diffusion axiale de quantité de mouvement

L'effet de la diffusion axiale sur le profil des vitesses se caractérise par l'apparition de deux maximums près des parois et d'une forme concave au niveau du centre. Pour les fluides dont le nombre de prandlt est proche de l'unité  $Pr=0.7$ , on constate que la concavité est d'autant plus importante lorsque le nombre de Reynolds devient plus élevé (5-1) et (5-3).

Cependant, pour les nombres de Prandlt compris entre 7 et 20, l'effet de la diffusion axiale semble disparaître pour des valeurs élevées du nombre de Reynolds (figures (5-5), (5-7), (5-9) et (5-11)). Par contre, pour les fluides ayant un nombre de Prandlt très élevé ( $Pr=100$ ), l'effet de la diffusion est complètement absent, le profil de vitesse est alors immédiatement identique à celui du profil établi.

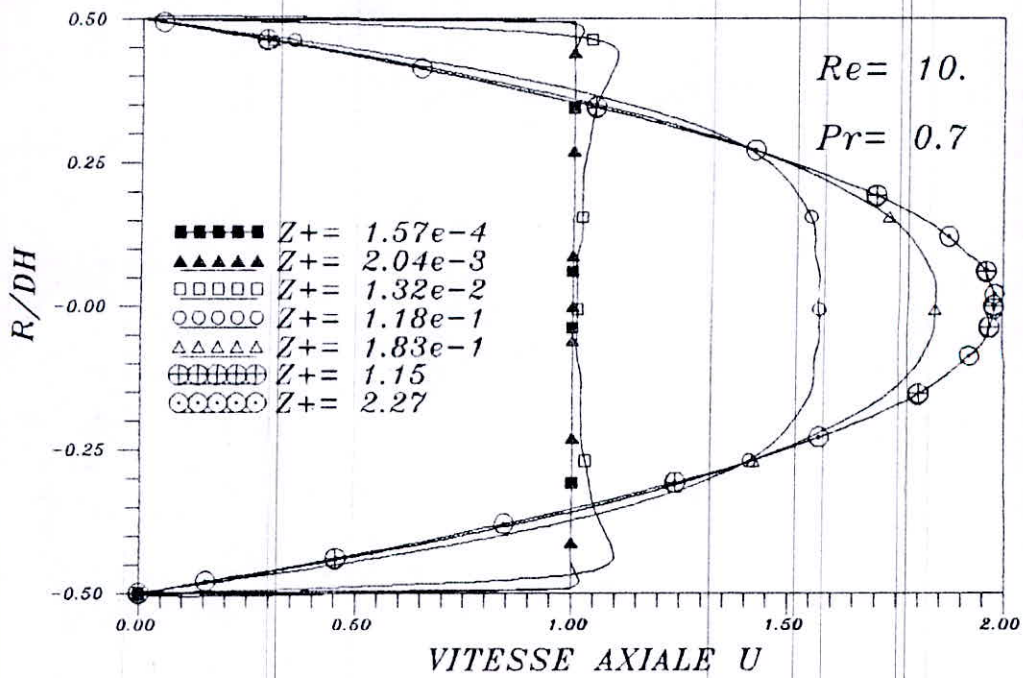


FIG (5-17a) Profils de vitesse adimensionnelle correspondants aux differentes stations axiales  $Z+$

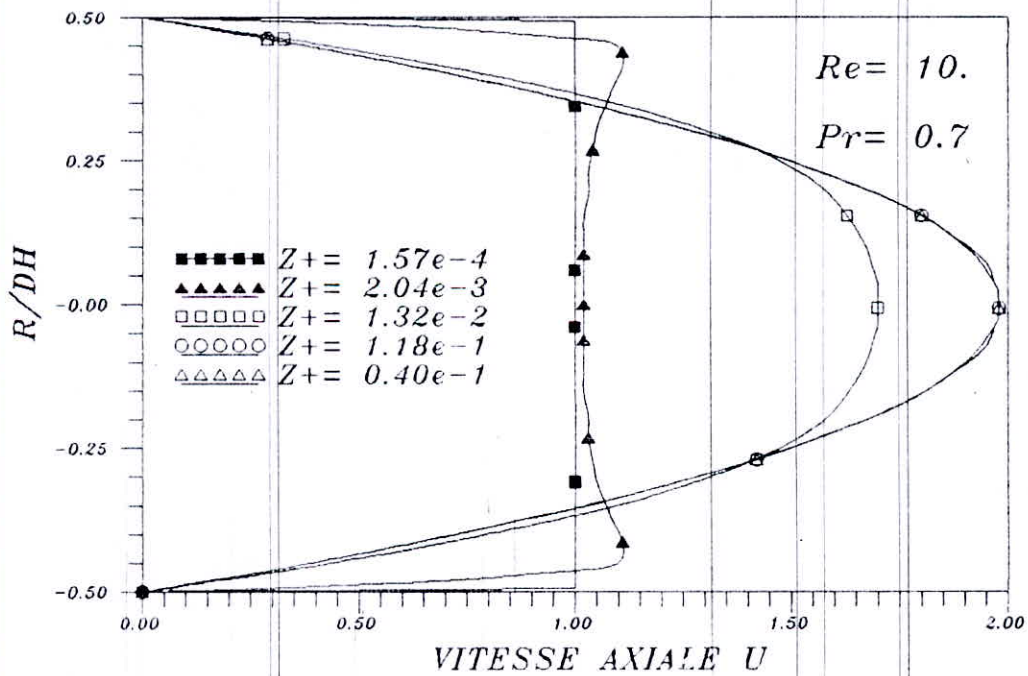


FIG (5-17b) Profils de vitesse adimensionnelle correspondants aux differentes stations axiales  $Z+$



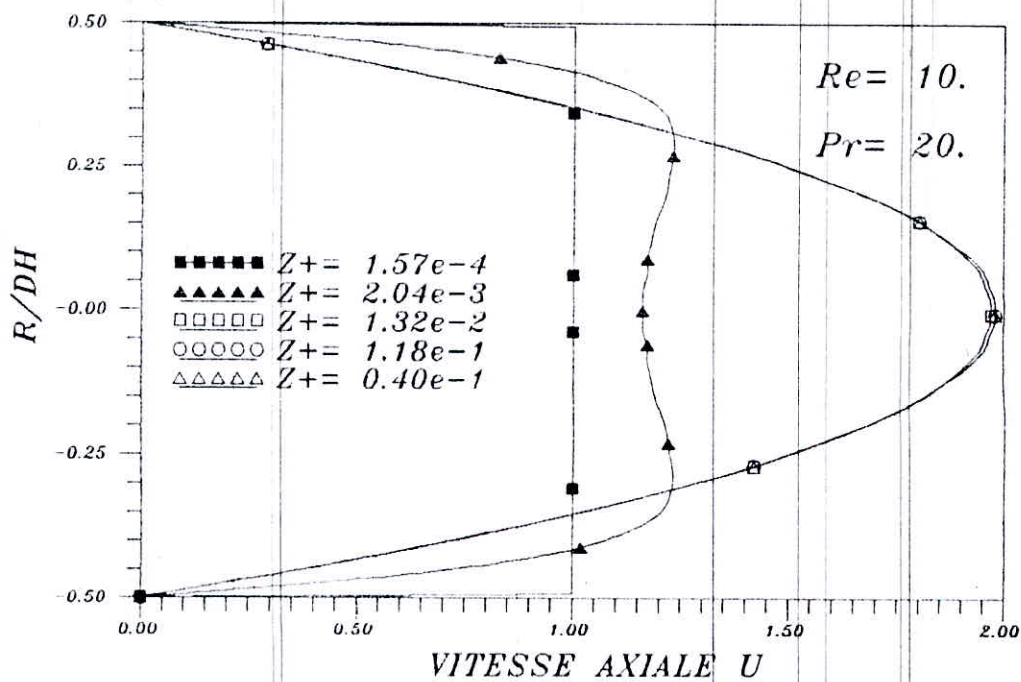


FIG (5-17c) Profils de vitesse adimensionnelle correspondants aux differentes stations axiales  $Z+$

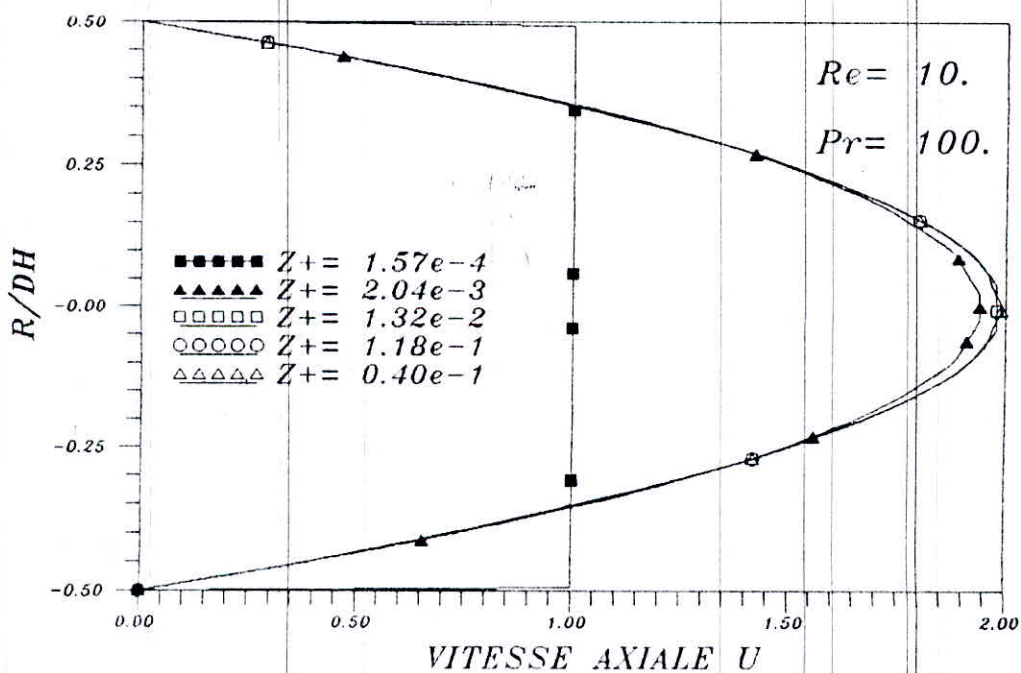


FIG (5-17d) Profils de vitesse adimensionnelle correspondants aux differentes stations axiales  $Z+$

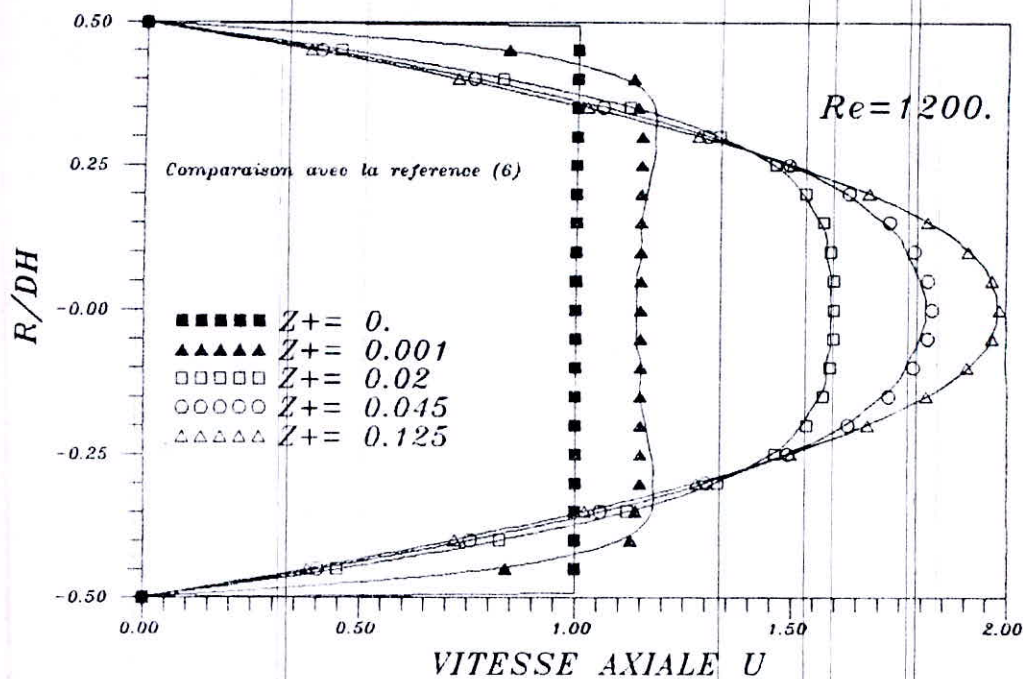


FIG (5-18a) Profils de vitesse adimensionnelle correspondants aux differentes stations axiales  $Z+$

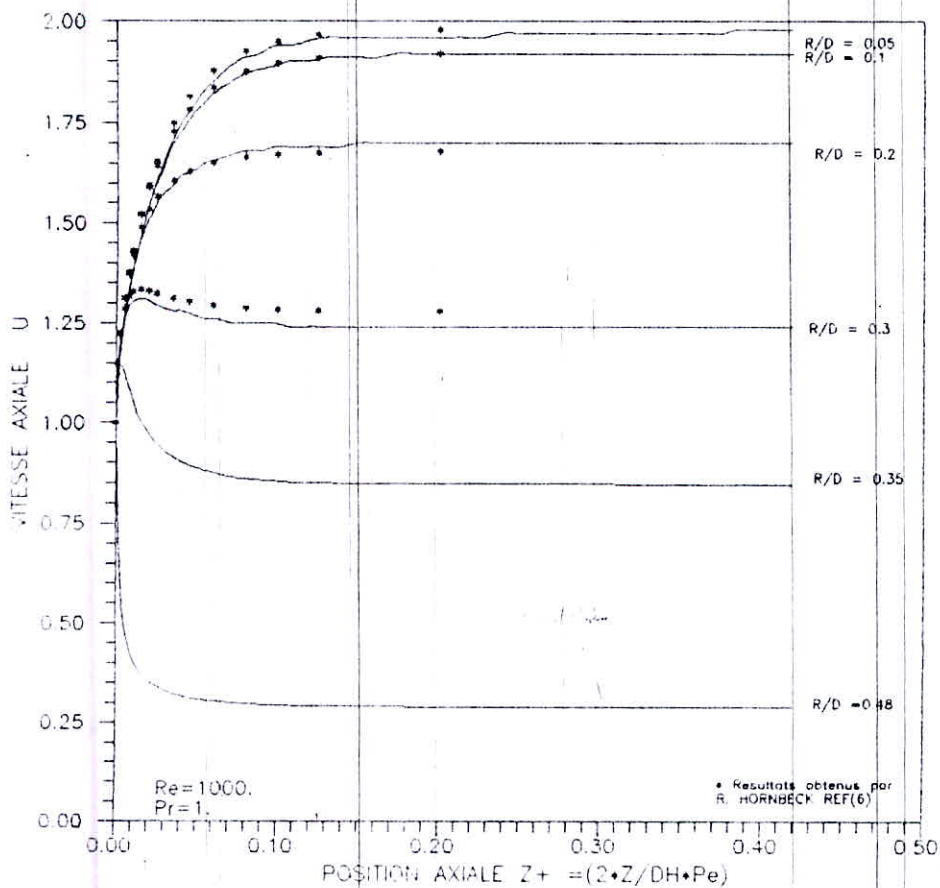


FIG (5-18b) Vitesse axiale adimensionnelle correspondants aux differentes stations radiales

4°) Effet de la diffusion axiale de la chaleur

D'après les résultats présentés dans la figure (5-19a), on constate que l'effet de la diffusion axiale de chaleur est lié à la valeur du nombre de Peclet. En effet, les courbes qui expriment la variation axiale du nombre de Nusselt ( $Nu$ ), tendent à se confondre pour des valeurs de Peclet  $Pe \geq 100$ . Ceci s'explique par le fait que l'effet de la conduction axiale devient négligeable pour des valeurs élevées du nombre de Peclet ( $Pe > 100$ ). Cependant, pour des valeurs faibles du nombre de Peclet on remarque que le nombre de Nusselt est plus important dans la zone d'entrée puis diminue pour atteindre une valeur constante à partir d'une position appelée longueur d'établissement. Cette dernière est d'autant plus importante pour des valeurs de Peclet  $Pe \leq 10$ . La figure (5-19a), nous montre qu'il y'a un bon accord entre les courbes exprimant la variation du nombre de Nusselt avec ceux de la référence [4]. On remarque dans ce cas que nos résultats présentent un décalage au niveau de l'entrée par rapport à ceux de la référence, mais ils se confondent au delà. Ceci s'explique par le fait que dans la référence on a supposé un profil de vitesse déjà établi et la diffusion axiale de quantité de mouvement négligeable.

5°/ Coefficient de friction :

La connaissance du coefficient de frottement nous permet de déterminer les pertes de charges dans la conduite. En effet l'examen des courbes de la figure (5-19b) nous montre l'évolution axiale du coefficient de frottement ( $4 \cdot C_f \cdot Re$ ) en fonction du nombre de PECLET. On constate alors que les frottements sont très importants dans la zone d'entrée de la conduite puis diminuent au fur et à mesure pour atteindre une valeur constante ( $4 \cdot C_f \cdot Re = 64$ ). Cette valeur est bien connue pour un régime établi en écoulement laminaire.



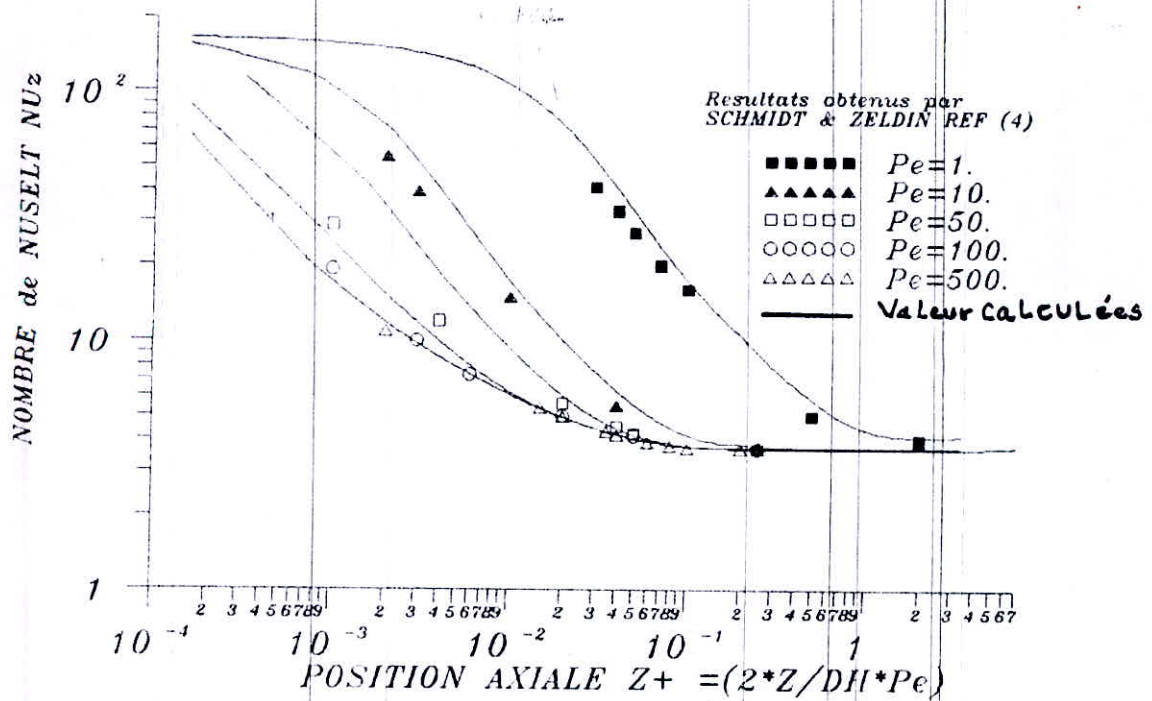
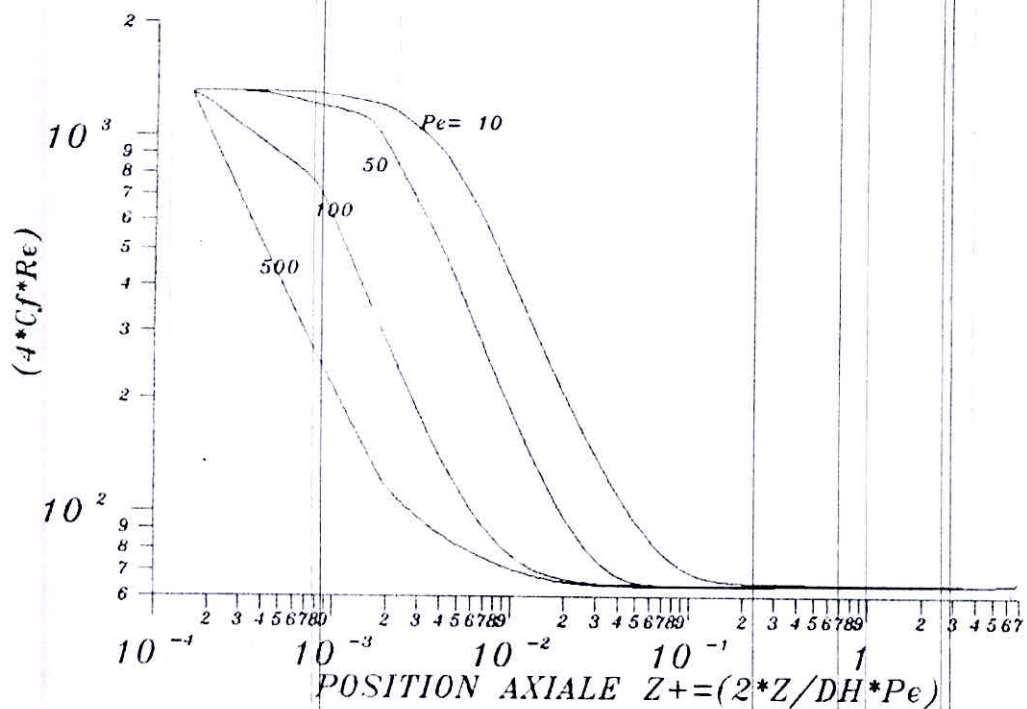


FIG (5-19a) Variation axiale du nombre de NUSSELT pour differentes valeurs du nombre de PECLET



FIG(5-18b) coefficient de frottement local correspondants aux differentes stations axials  $Z+$

6°/ Longueurs d'établissement :

La détermination de la longueur d'établissement thermique est d'une importance Pratique pour le dimensionnement des échangeurs de chaleur. Car cette dernière nous permet de connaître la distance qu'il faut pour que tout le fluide participe à l'échange de chaleur. Les longueurs d'établissement pour différents nombres de PECLET sont déterminées à partir des courbes de la figure (5-19a). Ces dernières sont présentées et comparées à ceux des références dans le tableau ci dessous :

TABLEAU (5-1) : LONGUEURS D'ETABLISSEMENT THERMIQUE

Pe	$L_{Th}^+$ REF(4)	$L_{Th}^+$ REF(5)	PRESENTE ETUDE	ECART %
1	2	2	2.5	20
10	0.2	0.2	0.25	20
50	0.1	0.1	0.12	16
100	0.1	0.1	0.12	16
500	0.1	--	0.12	16

On constate alors que la longueur d'établissement thermique augmente si le nombre de PECLET tend vers des valeurs faibles mais devient constante et est égale à  $L_{Th}^+ = 0.12$  à partir de  $Pe \geq 50$ .

5-3) ETUDE DE LA CONVECTION THERMIQUE DANS L'ESPACE ANNULAIRE

5-3.1) Présentation du problème :

Pour cette deuxième partie, on s'intéresse à la simulation du phénomène de convection forcée dans la zone d'entrée d'un espace annulaire de diamètre hydraulique  $D_H$  et de rapport de rayons  $R$ . Ce dernier est disposé horizontalement et soumis une température uniforme à la paroi interne. Tandis-que la paroi externe est isolée. Les conditions aux limites adimensionnelles spécifiques à ce problème sont résumées dans la figure (5-20).

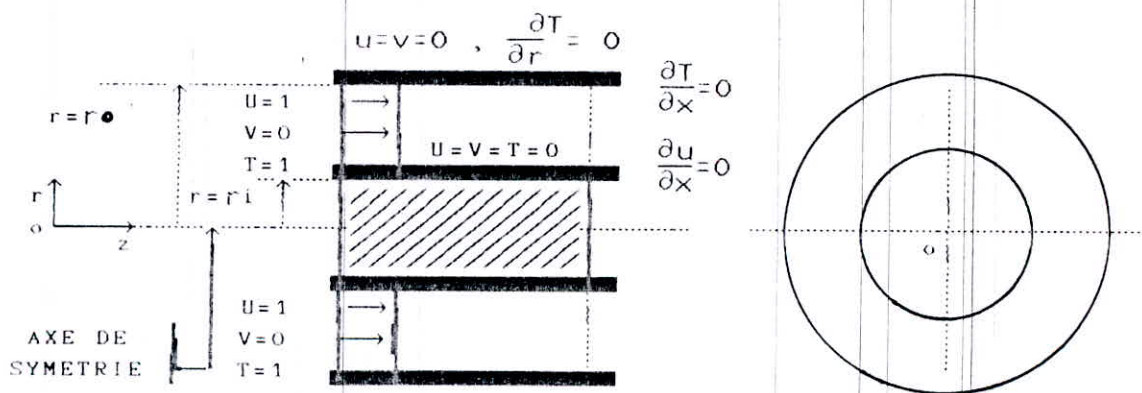


FIGURE (5-20): CONDITIONS AUX LIMITES ( ESPACE ANNULAIRE )

La symétrie du problème permet d'apporter des simplifications et de considérer juste la moitié du domaine à partir de l'axe. Le maillage adopté dans cette partie sera variable (50x20), raffiné près de l'entrée et des parois de l'espace annulaire. Voir figure (5-21a).



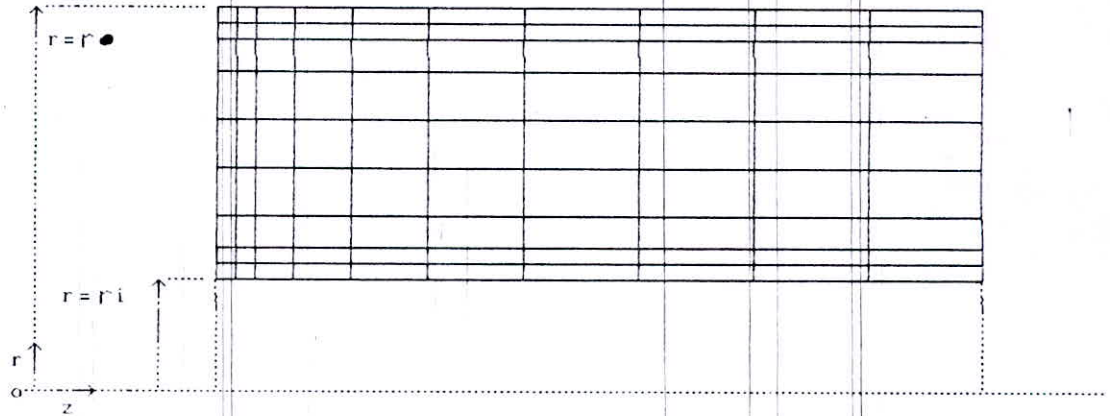


FIGURE (5-21a): GRILLE DE CALCUL

Dans cette étude trois types de configurations géométriques sont considérés pour les différents rapports de rayons  $R=(r_o/r_i)$  (Voir figure (5-21b)).

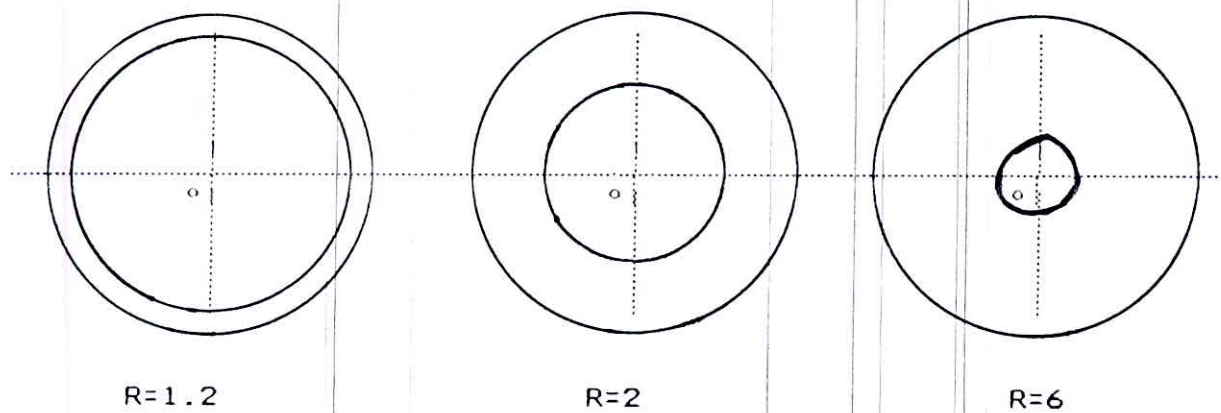


FIGURE (5-21b): DIFFERENTES CONFIGURATIONS GEOMETRIQUES DE L'ESPACE ANNULAIRE

### 5-3.2) RESULTATS ET DISCUSSION

Dans cette partie nous allons etudier l'influence du nombre de PRANDTL, de la diffusion axiale et de l'établissement thermique pour les trois configurations géométriques considérées.

#### 1°/ Effet du nombre de Prandlt sur l'établissement dynamique et thermique:

L'évolution des profils de vitesse et de température pour l'espace annulaire est similaire à celui de la conduite circulaire. En effet, pour les trois cas de figures étudiés ( $R=1.2, R=1.5, R=6$ ) on constate que l'établissement dynamique s'effectue en même temps que l'établissement thermique pour le cas des fluides dont le nombre de PRANDTL est proche de l'unité (figures (5-23)et(5-24)).

Alors que pour le cas des fluides dont le nombre de PRANDTL est compris entre 7et 20, tels que c'est indiqué dans les figures (5-25),(5-26),(5-27)et(5-28). Le profil de vitesse s'etablit plus rapidement que le profil de température, ceci est d'autant plus rapide si le nombres de REYNOLDS et de PRANDTL devienent plus élevés.

Ceci nous conduit dans ce cas à considerer le profil de vitesse établi près de l'entrée, cela est d'ailleurs confirmé par la comparaison avec le profil analytique établi de la reference [7].

l'orsque le régime dynamique est établi, l'influence du rapport des rayons  $R$  se traduit par un déplacement de la position du maximum du profil de la vitesse vers la paroi interne quand  $R$  augmente. Par contre on observe que la position du maximum du profil de temperature tend à se rapprocher du profil d'entrée de la conduite lorsque le rapport des rayons augmente.



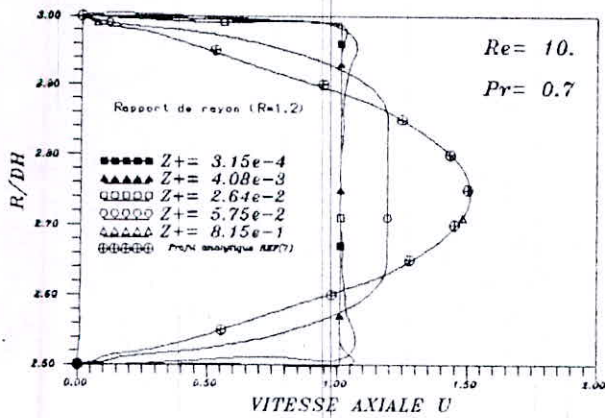


FIG (5-23a) Profils de vitesse adimensionnelle correspondants aux différentes stations axiales  $Z+$

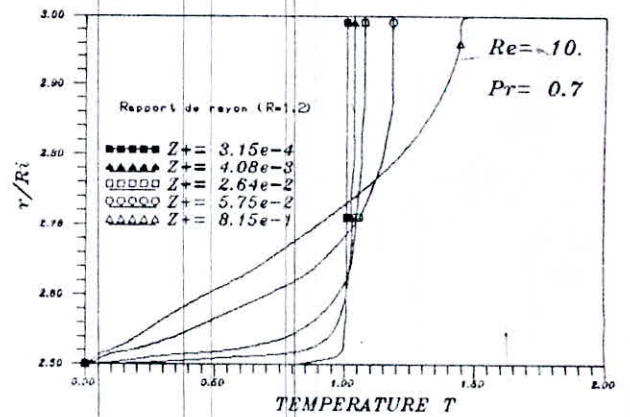


FIG (5-23b) Profils de températures adimensionnelle correspondants aux différentes stations axiales  $Z+$

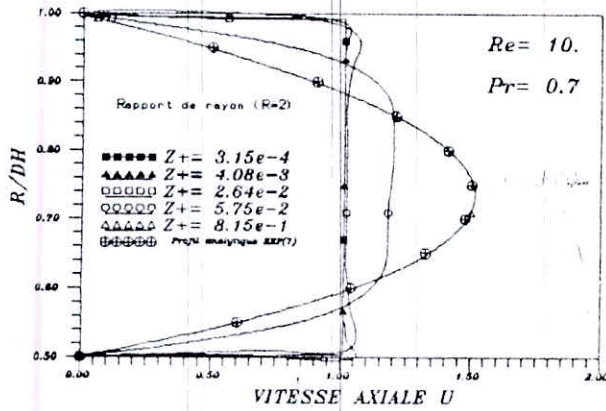


FIG (5-23c) Profils de vitesse adimensionnelle correspondants aux différentes stations axiales  $Z+$

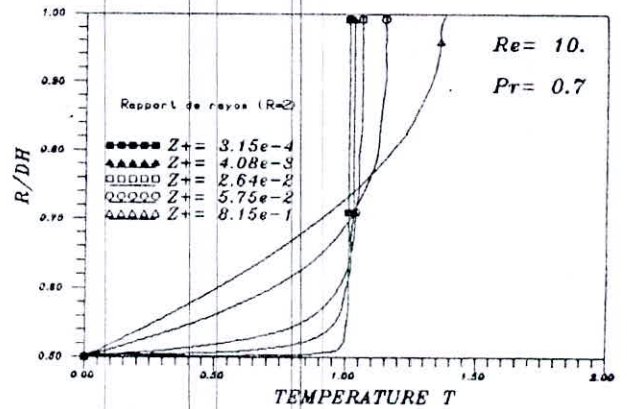


FIG (5-23d) Profils de températures adimensionnelle correspondants aux différentes stations axiales  $Z+$

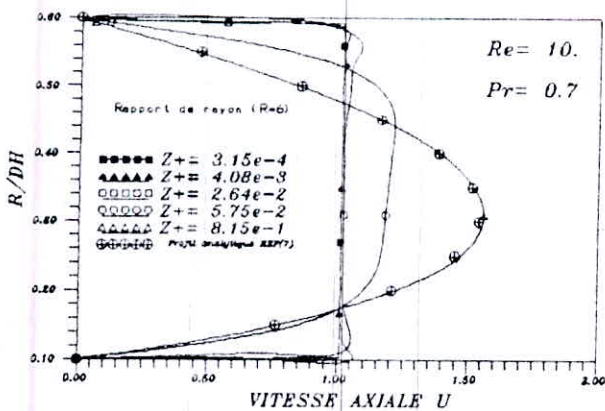


FIG (5-23e) Profils de vitesse adimensionnelle correspondants aux différentes stations axiales  $Z+$

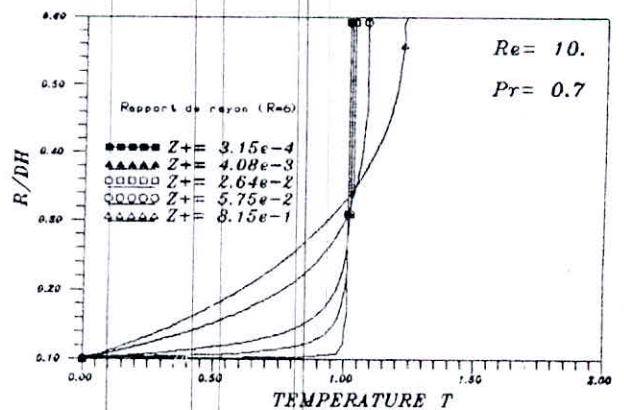


FIG (5-23f) Profils de températures adimensionnelle correspondants aux différentes stations axiales  $Z+$



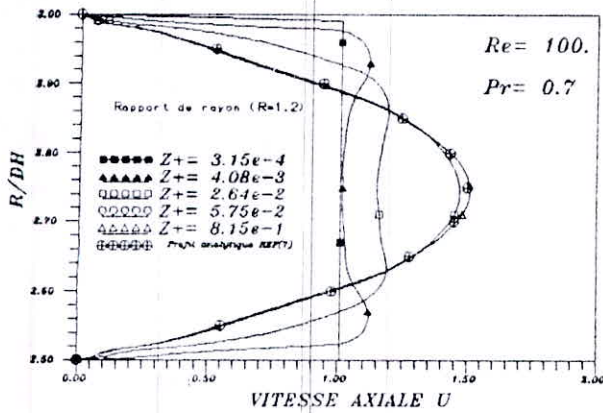


FIG (5-24a) Profils de vitesse adimensionnelle correspondants aux différentes stations axiales  $Z+$

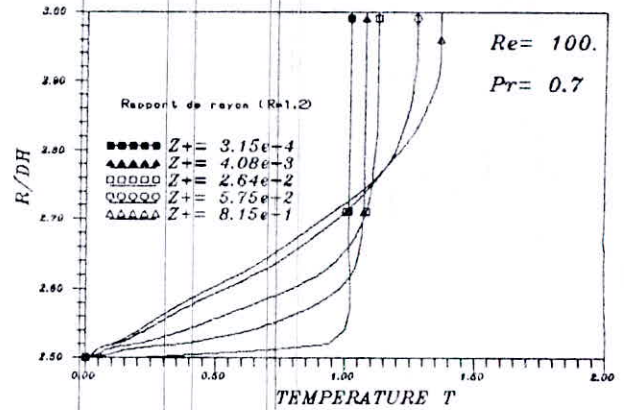


FIG (5-24b) Profils de températures adimensionnelles correspondants aux différentes stations axiales  $Z+$

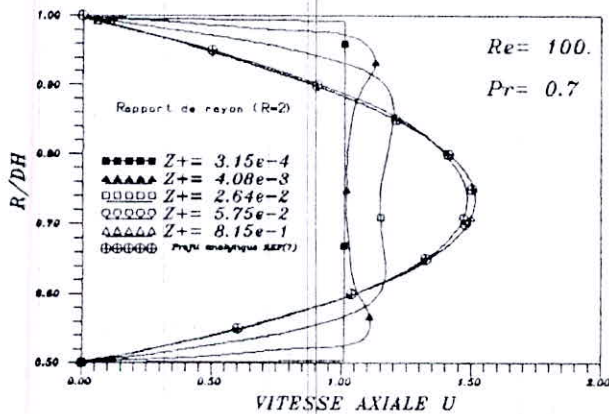


FIG (5-24c) Profils de vitesse adimensionnelle correspondants aux différentes stations axiales  $Z+$

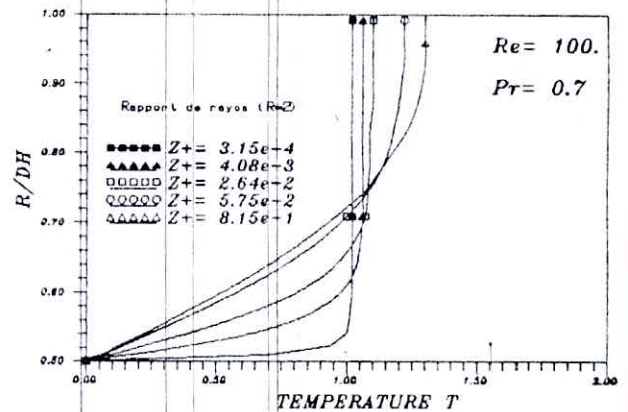


FIG (5-24d) Profils de températures adimensionnelles correspondants aux différentes stations axiales  $Z+$

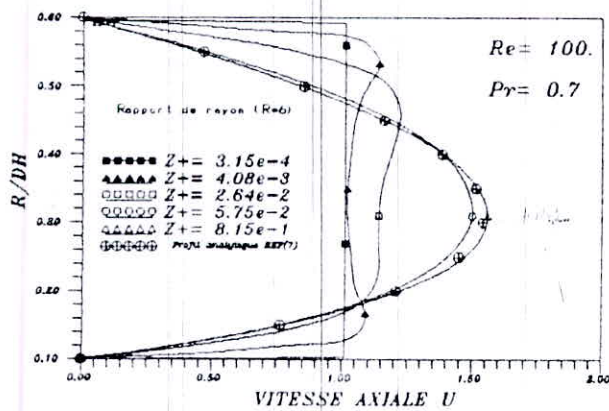


FIG (5-24e) Profils de vitesse adimensionnelle correspondants aux différentes stations axiales  $Z+$

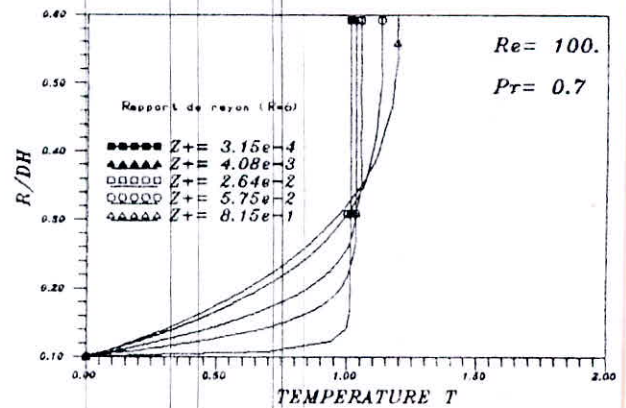


FIG (5-24f) Profils de températures adimensionnelles correspondants aux différentes stations axiales  $Z+$

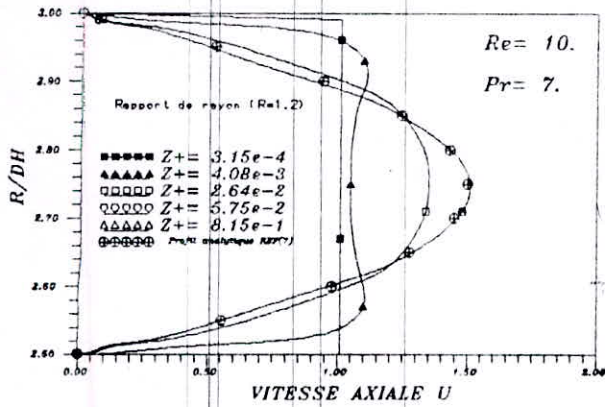


FIG (5-25a) Profils de vitesse adimensionnelle correspondants aux différentes stations axiales  $Z+$

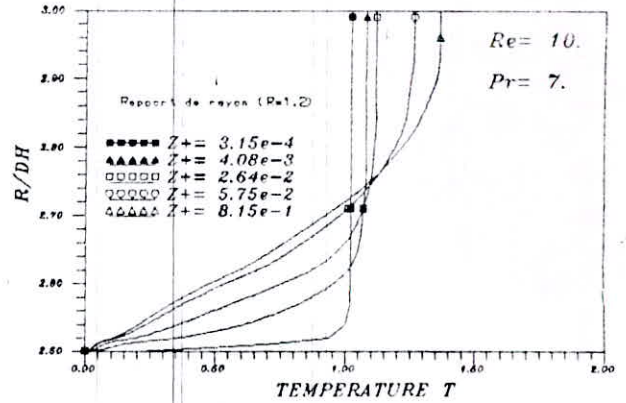


FIG (5-25b) Profils de températures adimensionnelle correspondants aux différentes stations axiales  $Z+$

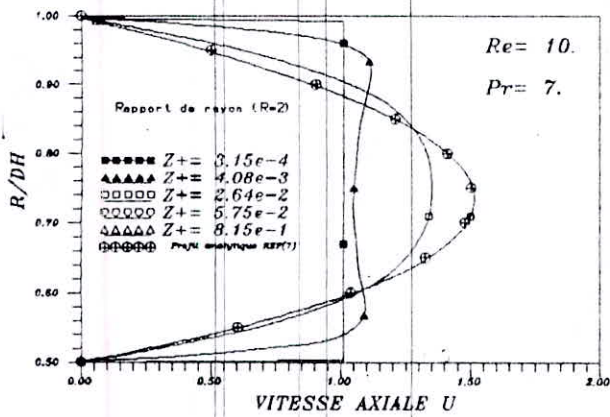


FIG (5-25c) Profils de vitesse adimensionnelle correspondants aux différentes stations axiales  $Z+$

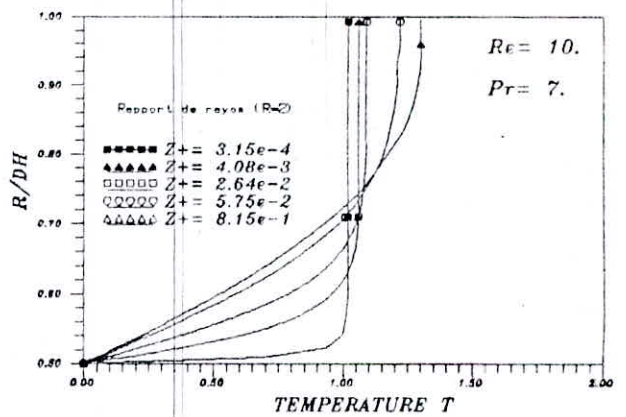


FIG (5-25d) Profils de températures adimensionnelle correspondants aux différentes stations axiales  $Z+$

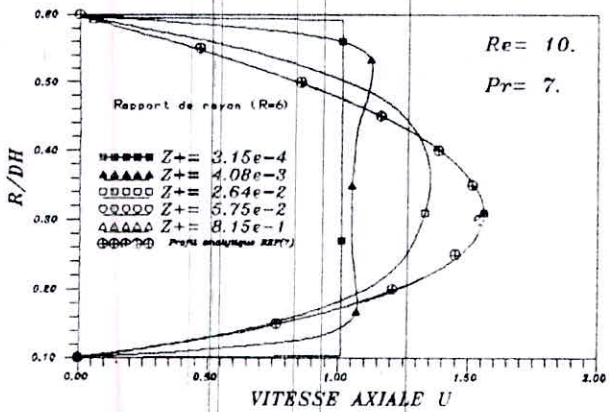


FIG (5-25e) Profils de vitesse adimensionnelle correspondants aux différentes stations axiales  $Z+$

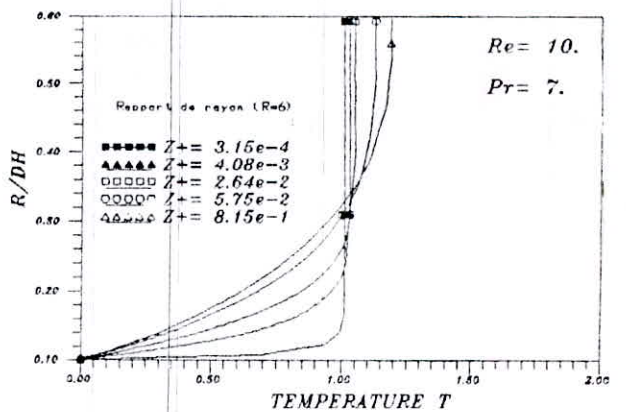


FIG (5-25f) Profils de températures adimensionnelle correspondants aux différentes stations axiales  $Z+$



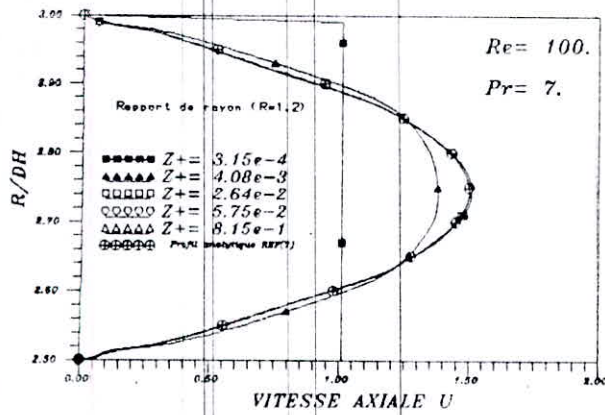


FIG (5-26a) Profils de vitesse adimensionnelle correspondants aux differentes stations axiales Z+

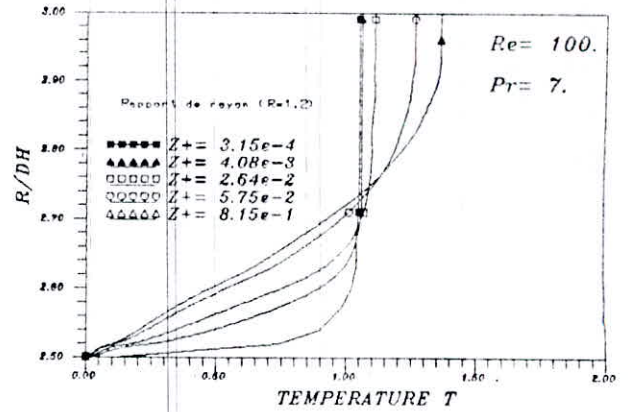


FIG (5-26b) Profils de temperatures adimensionnelle correspondants aux differentes stations axials Z+

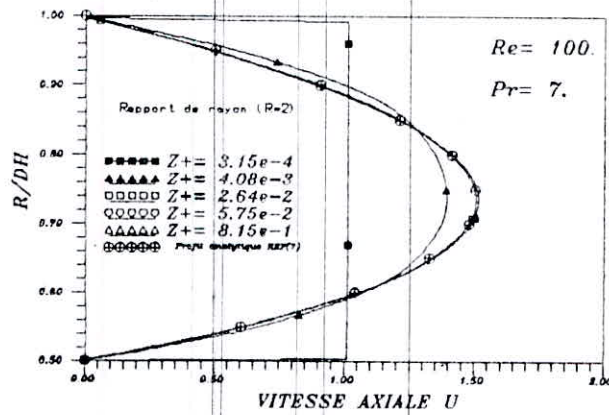


FIG (5-26c) Profils de vitesse adimensionnelle correspondants aux differentes stations axiales Z+

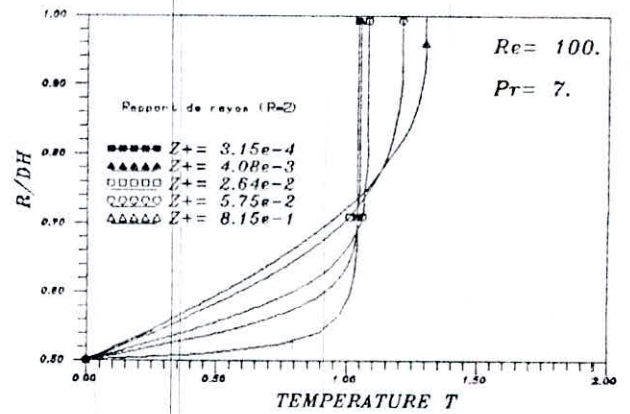


FIG (5-26d) Profils de temperatures adimensionnelle correspondants aux differentes stations axials Z+

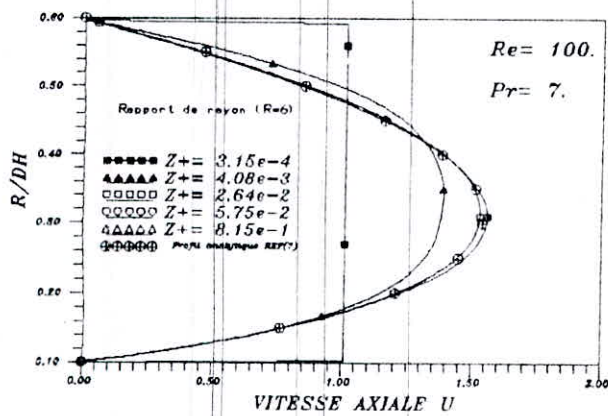


FIG (5-26e) Profils de vitesse adimensionnelle correspondants aux differentes stations axiales Z+

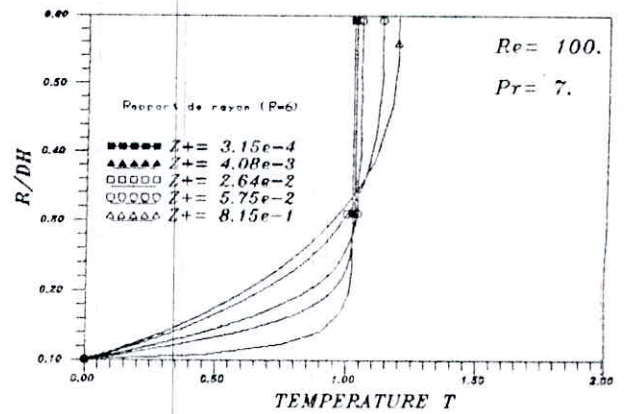


FIG (5-26f) Profils de temperatures adimensionnelle correspondants aux differentes stations axials Z+



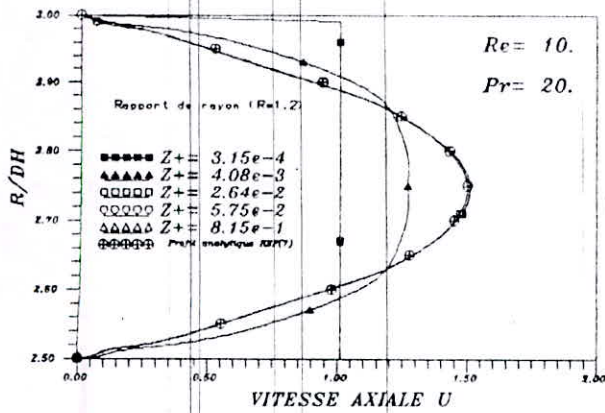


FIG (5-27a) Profils de vitesse adimensionnelle correspondants aux différentes stations axiales  $Z+$

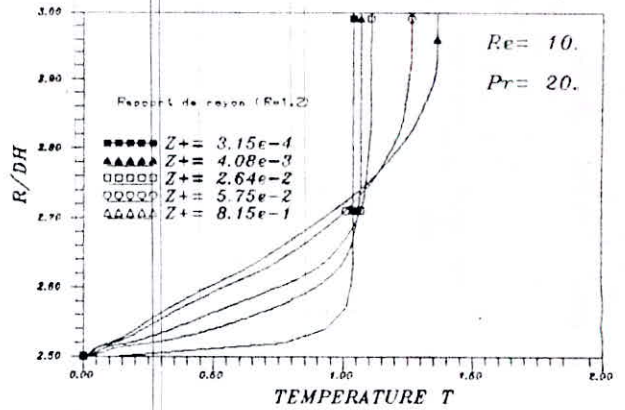


FIG (5-27b) Profils de températures adimensionnelle correspondants aux différentes stations axiales  $Z+$

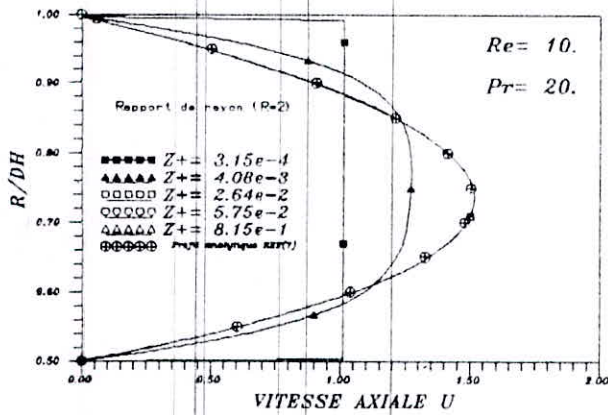


FIG (5-27c) Profils de vitesse adimensionnelle correspondants aux différentes stations axiales  $Z+$

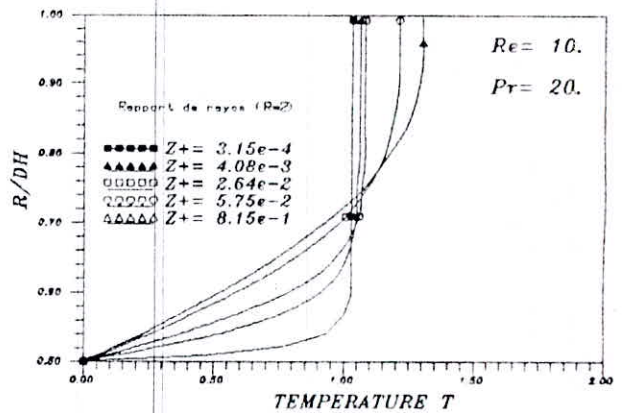


FIG (5-27d) Profils de températures adimensionnelle correspondants aux différentes stations axiales  $Z+$

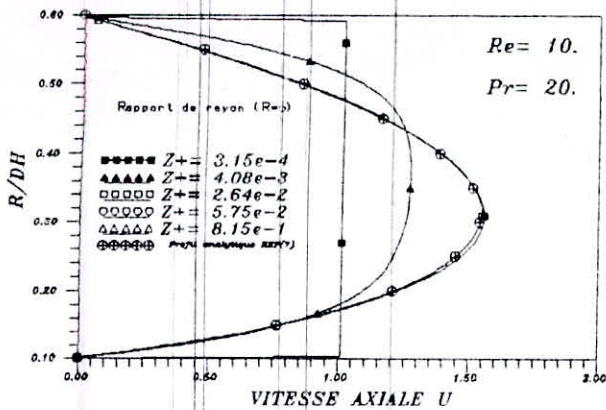


FIG (5-27e) Profils de vitesse adimensionnelle correspondants aux différentes stations axiales  $Z+$

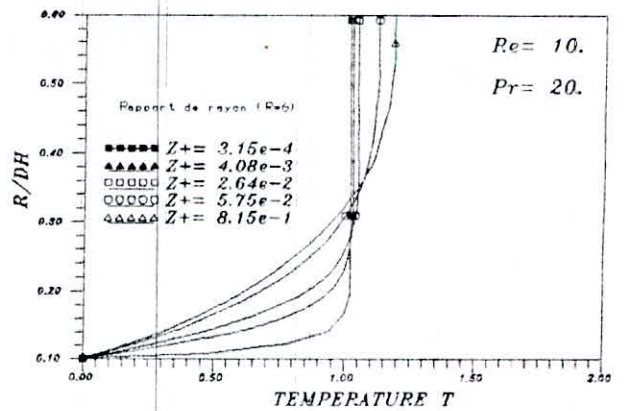


FIG (5-27f) Profils de températures adimensionnelle correspondants aux différentes stations axiales  $Z+$

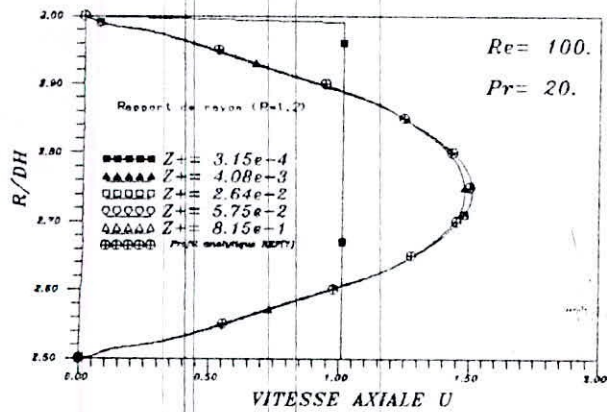


FIG (5-28a) Profils de vitesse adimensionnelle correspondants aux differentes stations axiales  $Z+$

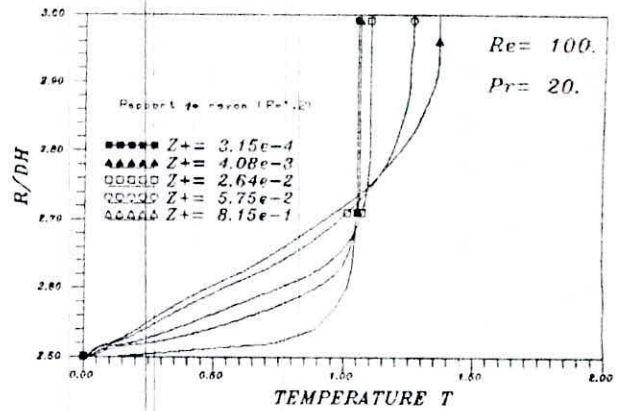


FIG (5-28b) Profils de temperatures adimensionnelle correspondants aux differentes stations axials  $Z+$

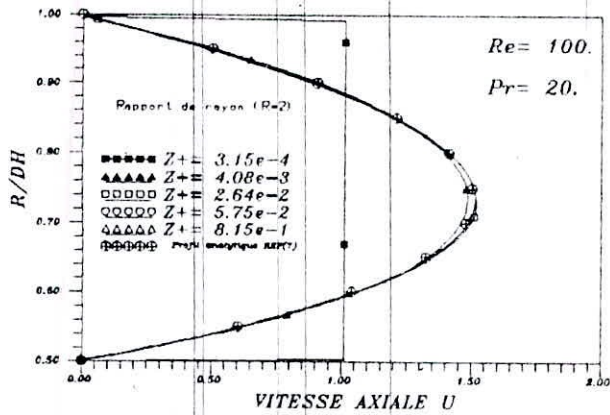


FIG (5-28c) Profils de vitesse adimensionnelle correspondants aux differentes stations axiales  $Z+$

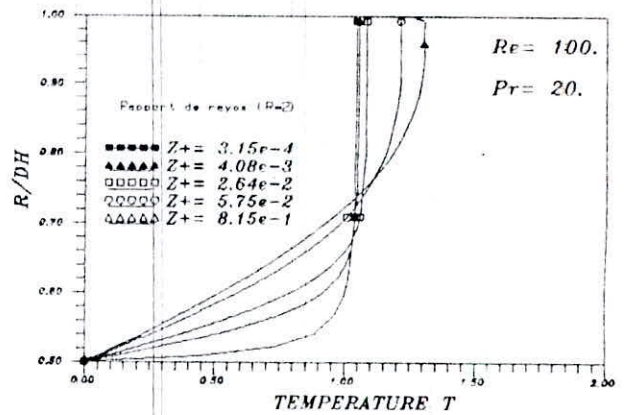


FIG (5-28d) Profils de temperatures adimensionnelle correspondants aux differentes stations axials  $Z+$

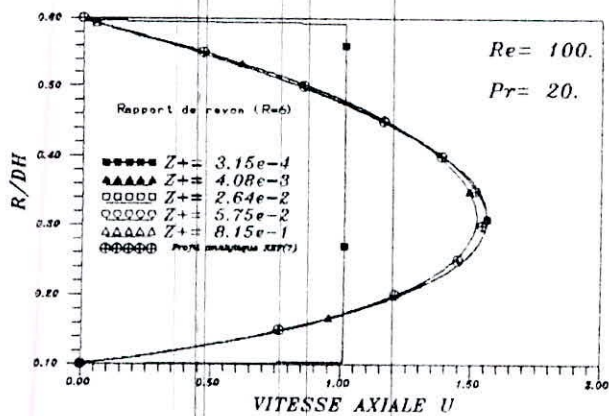


FIG (5-28e) Profils de vitesse adimensionnelle correspondants aux differentes stations axiales  $Z+$

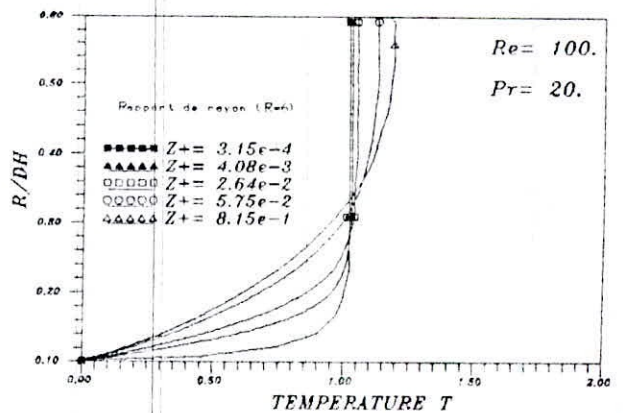


FIG (5-28f) Profils de temperatures adimensionnelle correspondants aux differentes stations axials  $Z+$



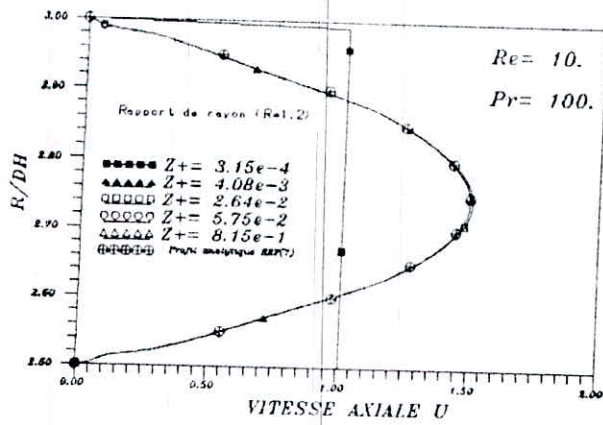


FIG (5-29a) Profils de vitesse adimensionnelle correspondants aux différentes stations axiales  $Z+$

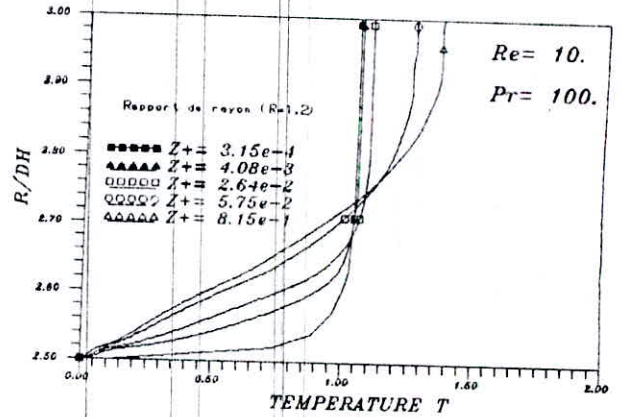


FIG (5-29b) Profils de températures adimensionnelle correspondants aux différentes stations axiales  $Z+$

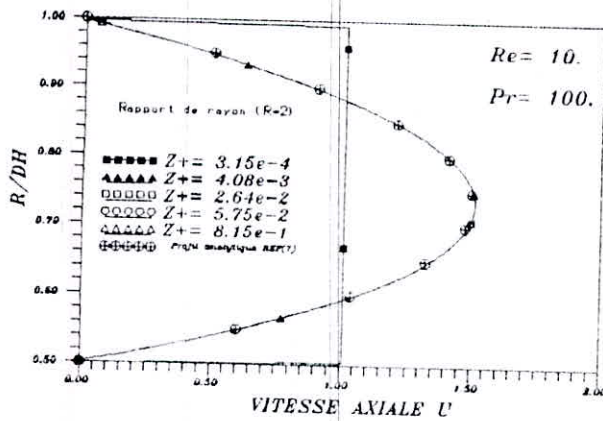


FIG (5-29c) Profils de vitesse adimensionnelle correspondants aux différentes stations axiales  $Z+$

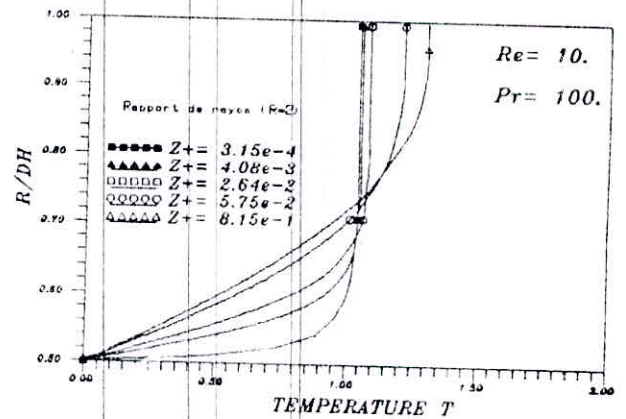


FIG (5-29d) Profils de températures adimensionnelle correspondants aux différentes stations axiales  $Z+$

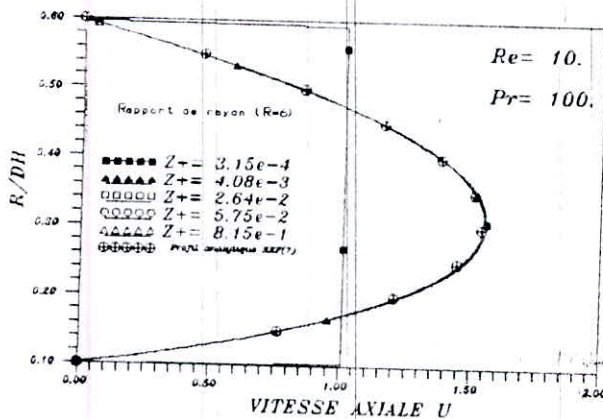


FIG (5-29e) Profils de vitesse adimensionnelle correspondants aux différentes stations axiales  $Z+$

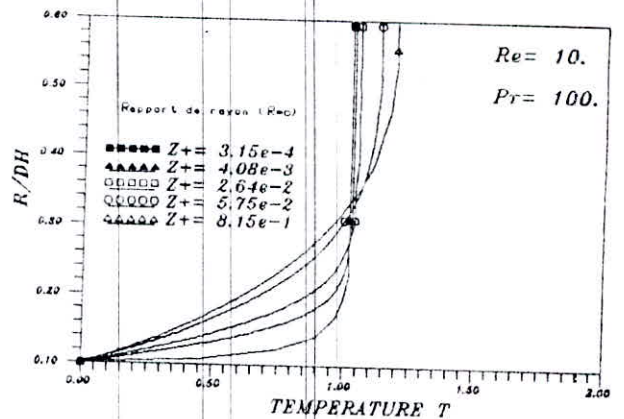


FIG (5-29f) Profils de températures adimensionnelle correspondants aux différentes stations axiales  $Z+$



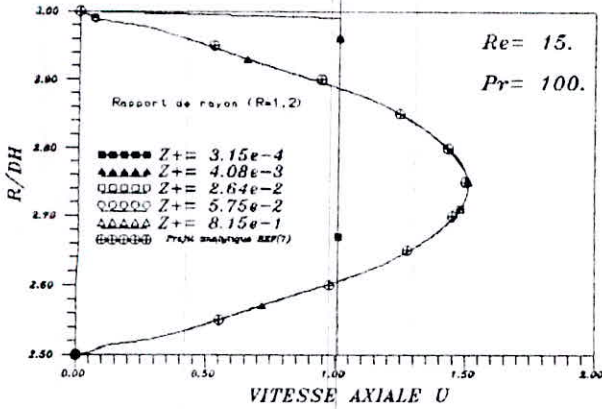


FIG (5-30a) Profils de vitesse adimensionnelle correspondants aux différentes stations axiales  $Z+$

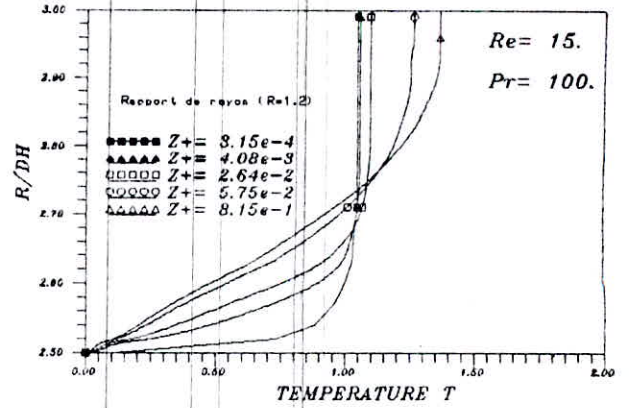


FIG (5-30b) Profils de températures adimensionnelles correspondants aux différentes stations axiales  $Z+$

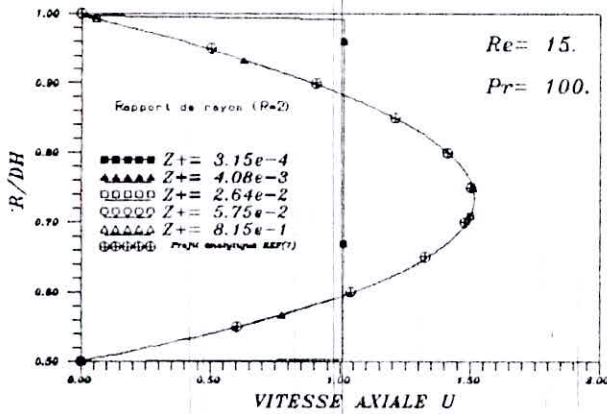


FIG (5-30c) Profils de vitesse adimensionnelle correspondants aux différentes stations axiales  $Z+$

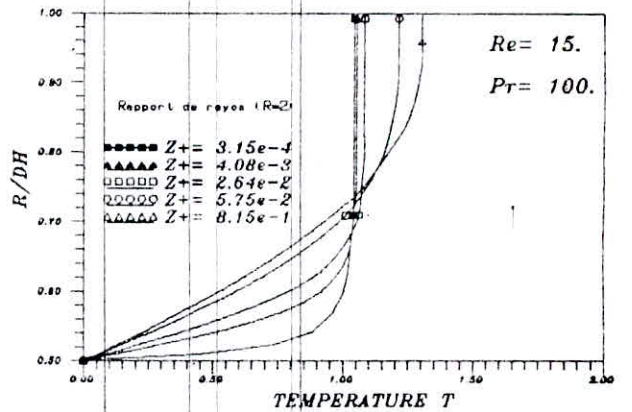


FIG (5-30d) Profils de températures adimensionnelles correspondants aux différentes stations axiales  $Z+$

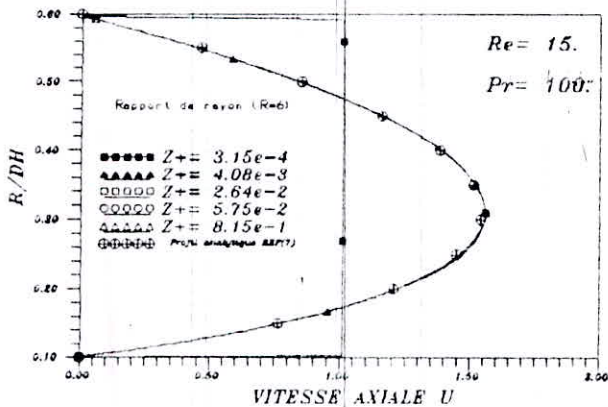


FIG (5-30e) Profils de vitesse adimensionnelle correspondants aux différentes stations axiales  $Z+$

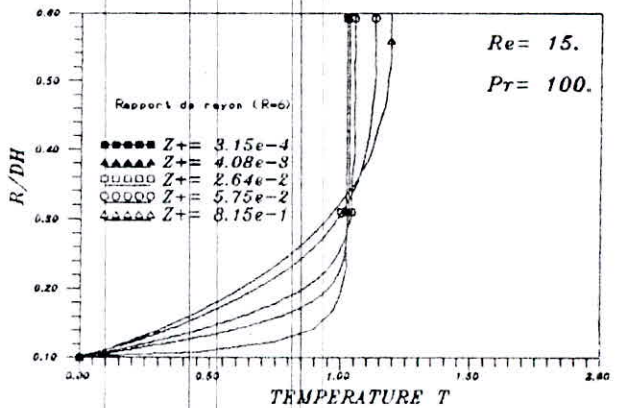


FIG (5-30f) Profils de températures adimensionnelles correspondants aux différentes stations axiales  $Z+$

2°/ Effet de la diffusion axiale de quantité de mouvement :

La prise en compte de la diffusion axiale de quantité de mouvement, se traduit par l'apparition d'une concavité au centre de l'écoulement, et de deux maximums au voisinage des parois, ce phénomène a déjà été observé par d'autres auteurs [11] et [14], puis à tendance à disparaître pour des nombres de  $Re > 100$  et  $Pr \geq 7$  (voir figures (5-23) à (5-30)).

D'autre part lorsque le rapport  $R$  augmente on constate que les profils de vitesse en cours de développement ne sont plus symétriques et que l'effet de la diffusion axiale devient plus important dans la partie supérieure de l'espace annulaire (voir figures (5-24a), (5-24b) et (5-24c)).

3°/ Effet de la diffusion axiale de chaleur :

Les figures (5-31) à (5-34) nous montrent l'évolution du nombre de Nusselt rapporté à la surface interne en fonction de la position axiale et pour différents rapports de rayons  $R$  ( $R=1.2, R=1.5, R=6$ ).

Dans la figure (5-31a) on constate que nos résultats établis pour  $Pe=7$  présentent un écart important avec ceux de la référence [7]. Ceci s'explique bien sûr par le fait que notre modèle tient compte de l'effet de la diffusion axiale.

Par contre l'examen des courbes données dans les figures (5-31b), (5-32b), (5-33) et (5-34) nous révèle, que si le nombre de PECLET est élevé, l'effet de la diffusion axiale tend à s'atténuer puis disparaître à partir d'une valeur du nombre de PECLET  $Pe \geq 70$ . On remarque dans ce cas que nos résultats approchent en majeure partie les résultats analytiques de la référence [7].



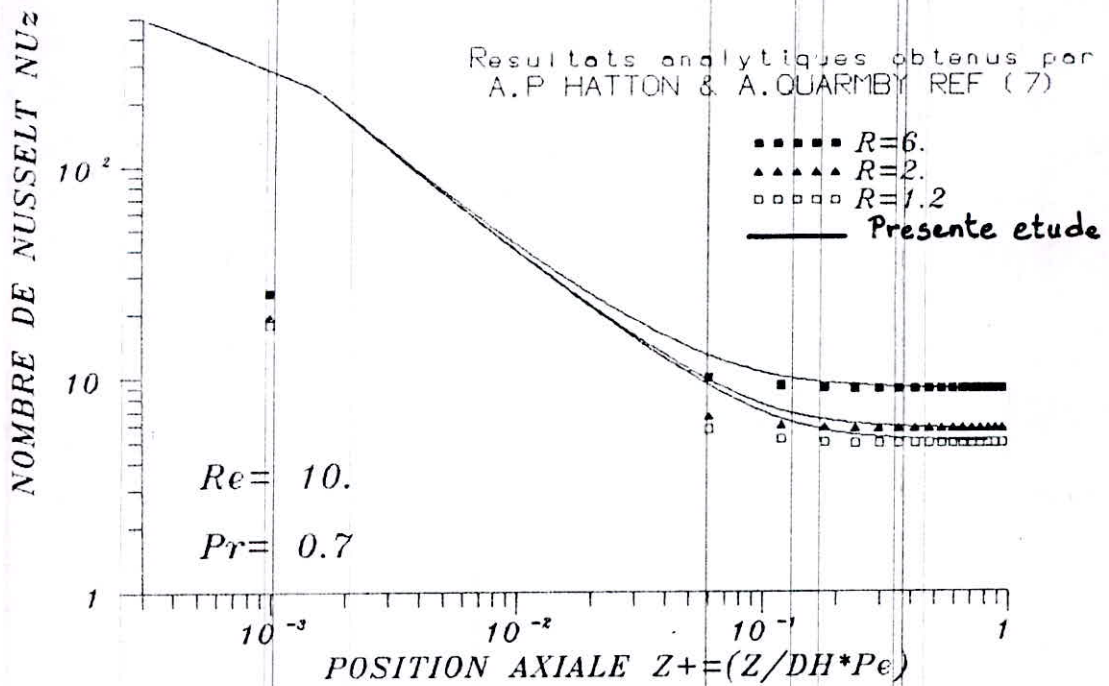


FIG (5-31a) Variation axiale du nombre de NUSSELT pour differentes rapports de rayon de l'espace annulaire

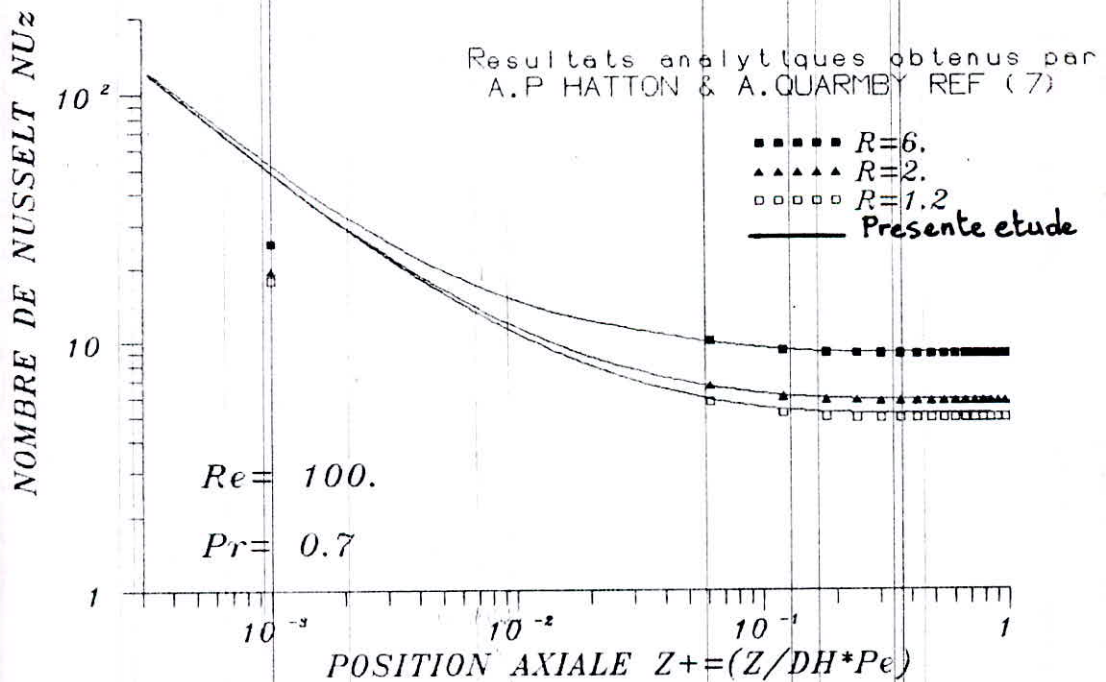


FIG (5-31b) Variation axiale du nombre de NUSSELT pour differentes rapports de rayon de l'espace annulaire



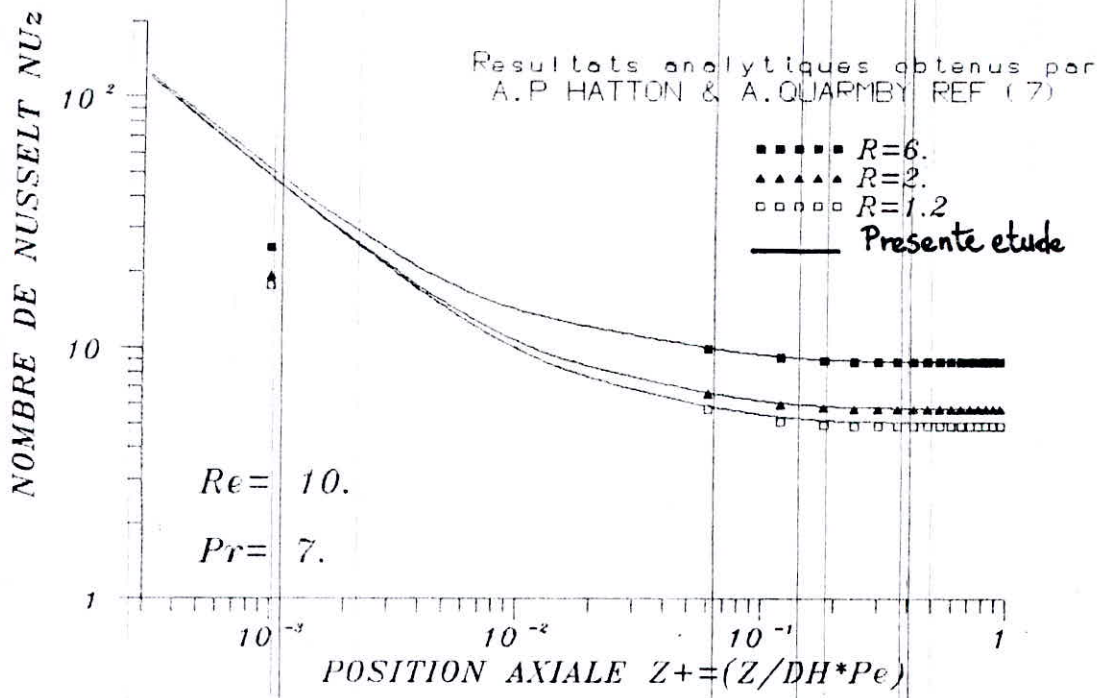


FIG (5-32a) Variation axiale du nombre de NUSSELT pour differentes rapports de rayon de l'espace annulaire

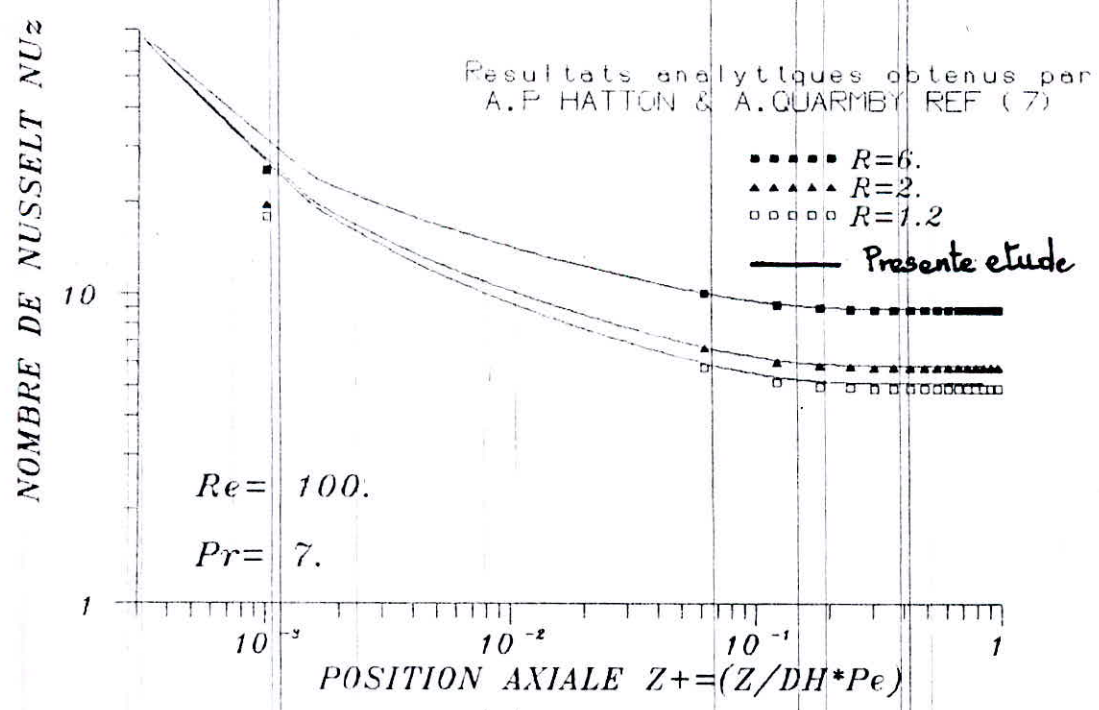


FIG (5-32b) Variation axiale du nombre de NUSSELT pour differentes rapports de rayon de l'espace annulaire

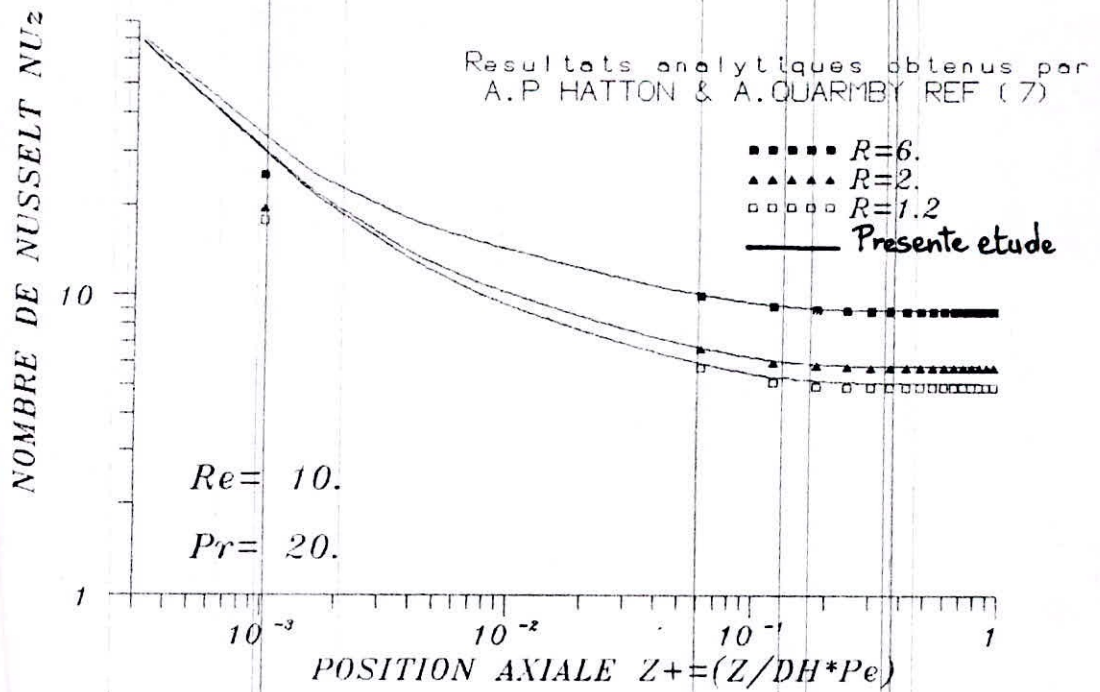


FIG (5-33a) Variation axiale du nombre de NUSSELT pour differentes rapports de rayon de l'espace annulaire

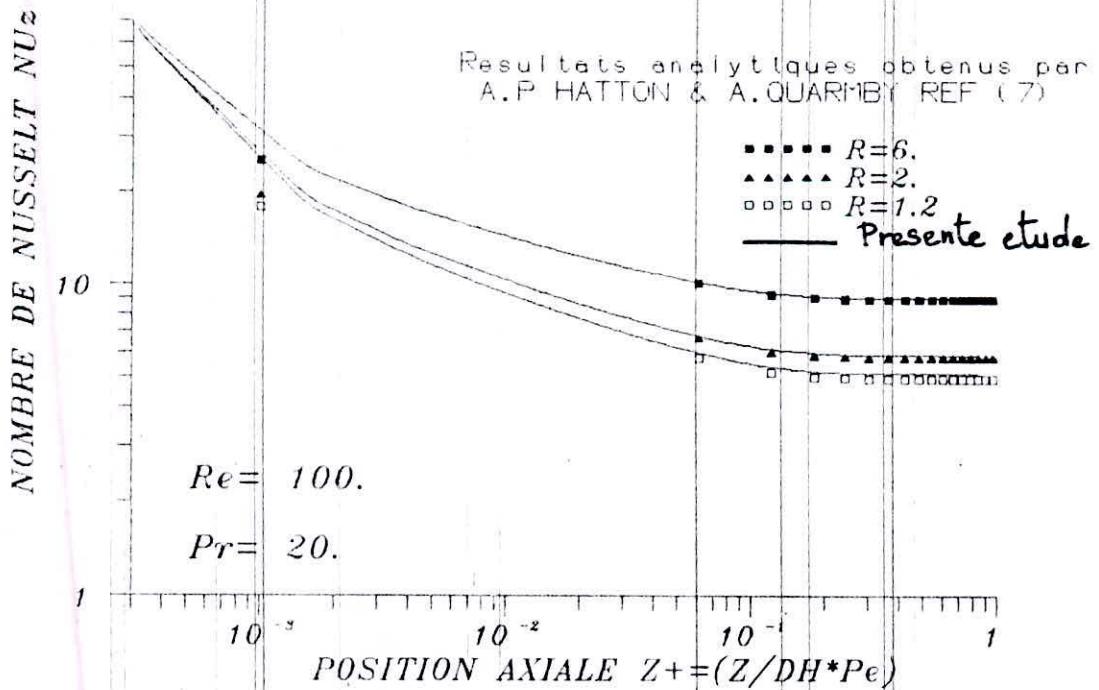


FIG (5-33b) Variation axiale du nombre de NUSSELT pour differentes rapports de rayon de l'espace annulaire

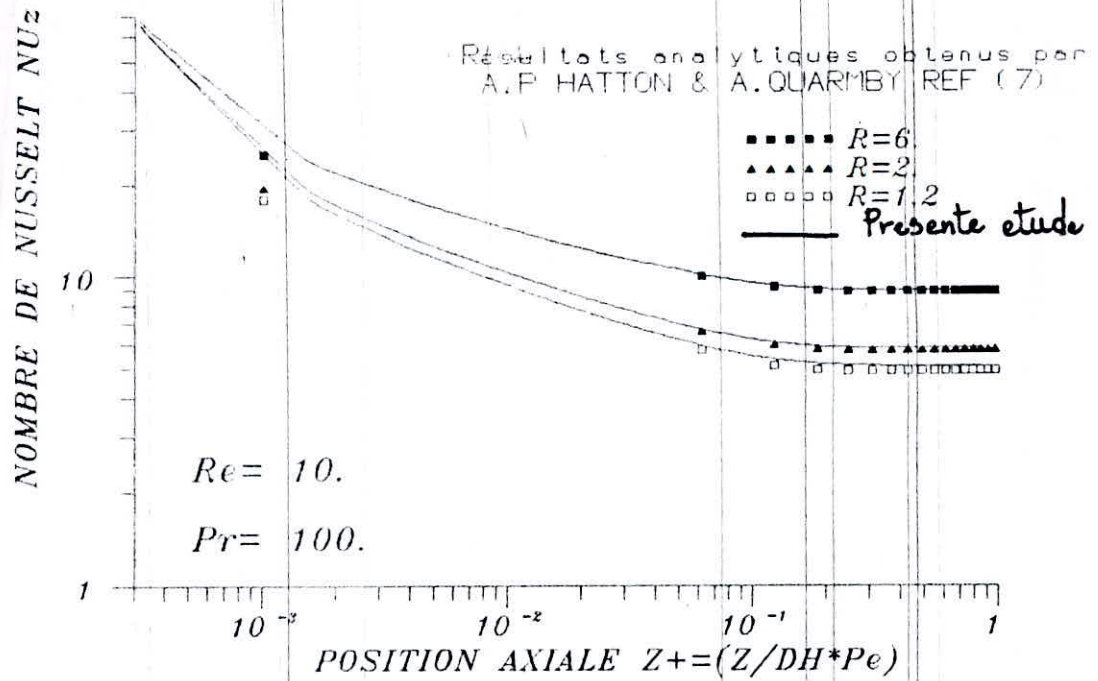


FIG (5-34a) Variation axiale du nombre de NUSSELT pour différentes rapports de rayon de l'espace annulaire

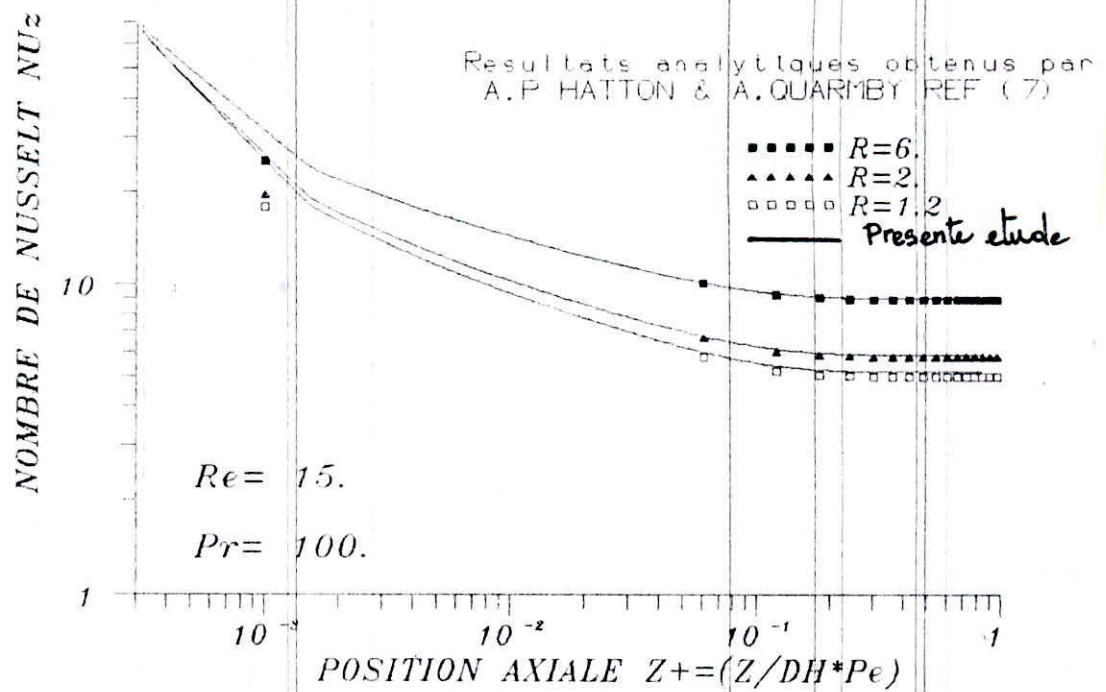


FIG (5-34b) Variation axiale du nombre de NUSSELT pour différentes rapports de rayon de l'espace annulaire



4°/ Longueur d'établissement :

Les longueurs d'établissement thermique pour les trois cas de configurations géométriques étudiées sont déterminées pour les différents nombres de Peclet à partir des figures (5-31), (5-32), (5-33) et (5-34) et résumées dans le tableau ci dessous.

Tableau (5-2): LONGUEUR D'ETABLISSEMENT THERMIQUE  
DANS UN ESPACE ANNULAIRE

Pe	$L_{Th}^+$ REF(7)	PRESENTE ETUDE	ECART (%)
7	.	0.6	--
70	.	0.4	--
200	0.25	0.3	20
700	0.25	0.3	20
1000	0.25	0.3	20

Nous remarquons d'après ces résultats que la longueur d'établissement diminue de 0.6 jusqu'à 0.4 pour les nombres de peclet  $Pe \leq 70$ . Alors que pour des valeurs élevées, la longueur d'établissement demeure constante et égale à 0.3.

Une comparaison de nos résultats avec ceux de la référence [7] montre qu'il y'a un écart maximum de 20%. Ceci se traduit par la prise en compte de la diffusion axiale et de la convection radiale dans notre modélisation. Ces deux paramètres ont tendance à augmenter la longueur d'établissement.

# APPLICATION AUX ECHANGEURS DE CHALEUR

## 6-1) INTRODUCTION

Dans le domaine industriel et plus particulièrement celui des hydrocarbures, l'échangeur de chaleur joue un rôle important au sein d'un processus thermique nécessitant un chauffage ou un refroidissement. En pratique, le dimensionnement d'un échangeur de chaleur se base généralement sur la connaissance des conditions de fonctionnement, ce qui nous permet d'effectuer une estimation sur le coefficient d'échange global et de déterminer la surface d'échange nécessaire.

C'est dans cette optique qu'on s'intéresse dans ce chapitre à étudier le phénomène d'échange de chaleur entre un fluide chaud et un fluide froid circulant dans un échangeur de chaleur à double tubes concentrique. Les résultats de cette simulation sont présentés et commentés pour les échangeurs à co-courants et à contre courants.

## 6-2) PRESENTATION DU PROBLEME

Le système physique à considérer dans la figure (6-1), est constitué de deux tubes concentriques de rayons interne et externe respectivement  $R_1$  et  $R_0$ .

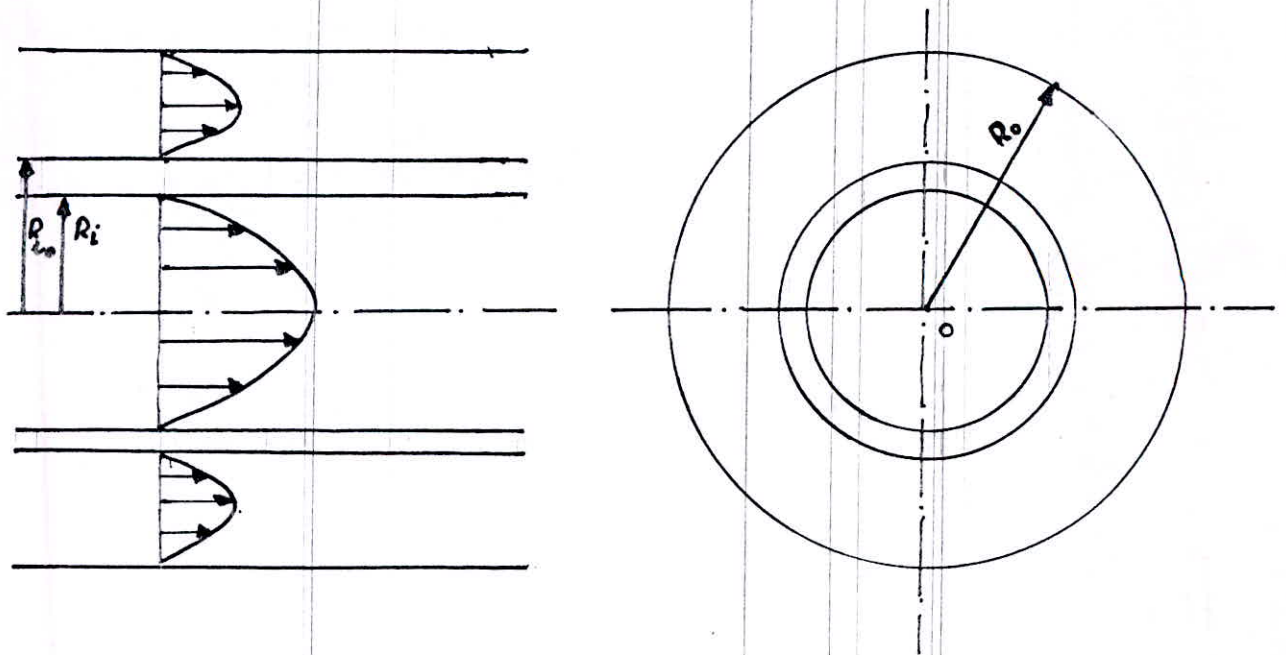


FIGURE (6-1) ECHANGEUR DE CHALEUR

Le fluide froid est donc pris dans le tube intérieur alors que le fluide chaud circule dans l'espace annulaire. On considèrera aussi que les propriétés physiques des deux fluides sont constantes le long de l'échangeur et que l'échange de chaleur avec l'extérieur est négligable.

### 6-3) MODELISATION

Le modèle mathématique adopté dans cette partie n'est autre qu'une combinaison des équations régissant le phénomène de convection forcée établi dans le chapitre deux pour le tube et l'espace annulaire. On notera dans ce cas que le problème hydrodynamique peut être résolu séparément pour le tube et l'espace annulaire, ce qui n'est pas le cas pour l'équation d'énergie dans l'échangeur de chaleur.



En introduisant les nouvelles variables réduites suivantes:

$$\left( \begin{array}{l} r^+ = \frac{r}{R_{i0}} \\ z^+ = \frac{z}{R_{i0}} \end{array} \right. \quad \text{et} \quad \left( \begin{array}{l} U^+ = \frac{u}{U_{m1}} \\ V^+ = \frac{v}{U_{m1}} \\ T^+ = \frac{T - T_{e1}}{T_{e2} - T_{e1}} \end{array} \right. \quad (6-1)$$

L'équation d'énergie sous forme adimensionnelle dans l'échangeur de chaleur se traduit par la forme généralisée suivantes :

$$\frac{\partial}{\partial z} (\rho U \phi) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (\rho V r \phi) = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \Gamma_{\phi} \cdot \frac{\partial \phi}{\partial r} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( \Gamma_{\phi} \cdot r \frac{\partial \phi}{\partial z} \right) \quad (6-2)$$

avec  $\phi$  et  $\Gamma_{\phi}$  données dans le tableau ci dessous.

Equation	$\phi$	$\Gamma_{\phi}$
- TUBE	$T_1^+$	$\frac{2 R}{Re_1 \cdot Pr_1}$
- PAROI	$T_p^+$	1
- ESPACE ANNULAIRE	$T_2^+$	$\frac{2(R-1)}{Re_2 \cdot Pr_2}$

6-4) CONDITIONS AUX LIMITES

Les conditions aux limites relatives au problème décrit par la figure (6-1) pour les deux configurations d'échangeurs à co-courants et à contre courants sont présentées et résumées respectivement dans les figures (6-2a) et (6-2b).

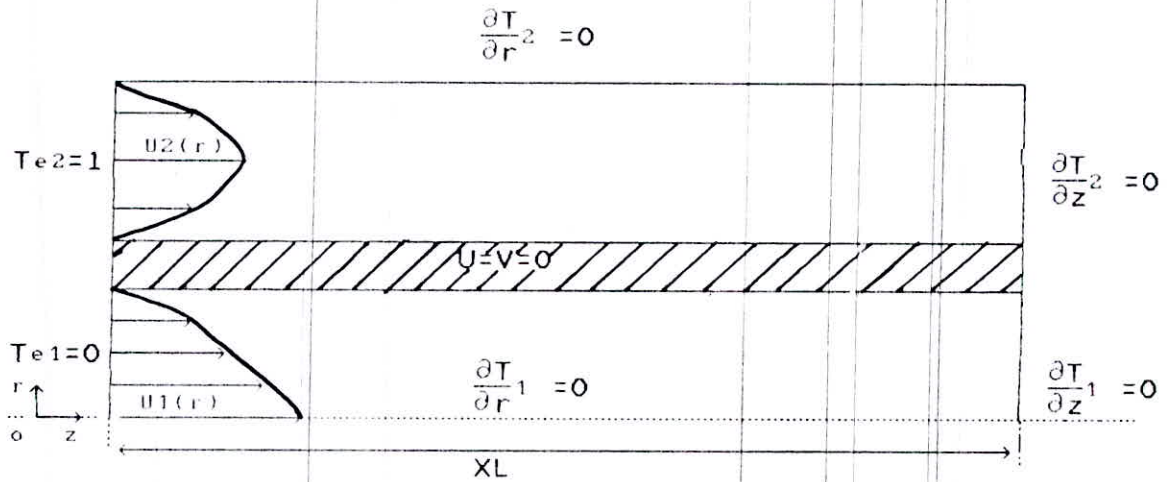


FIGURE (6-2a) CONDITIONS AUX LIMITES DANS L'ECHANGEUR DE CHALEUR A CO-COURANTS

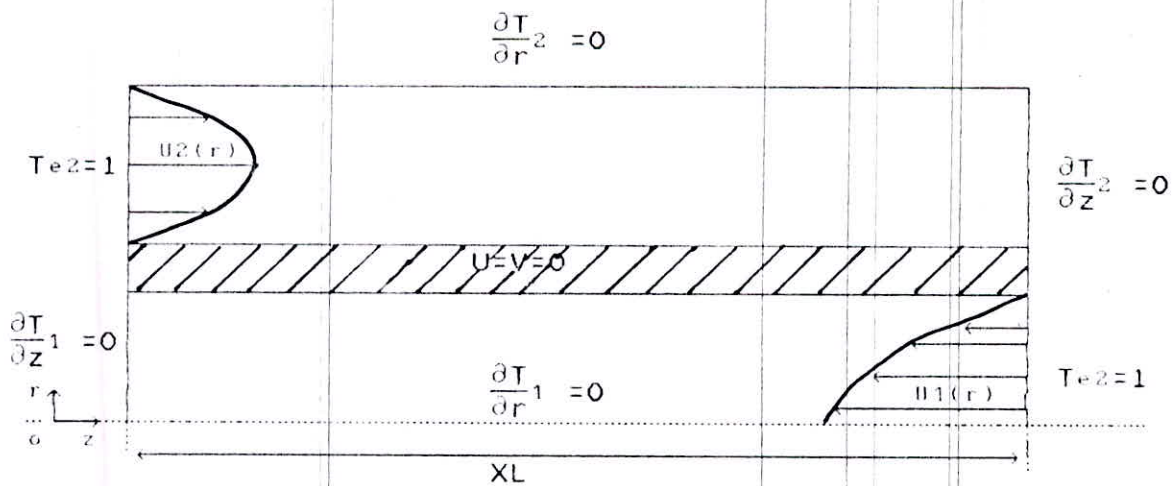


FIGURE (6-2b) CONDITIONS AUX LIMITES DANS L'ECHANGEUR DE CHALEUR A CONTRE COURANTS



6-5) MAILLAGES

Dans le chapitre précédent, on a montré que le maillage variable (50x20) donne de bons résultats, ce qui nous permet donc dans cette partie d'adopter ce maillage raffiné près des parois et à l'entrée pour les trois zones de l'échangeur tube, paroi et espace annulaire (Figure (6-3)). Les dimensions relatives à ces trois parties sont respectivement (50x20) , (50x10) et (50x20) .

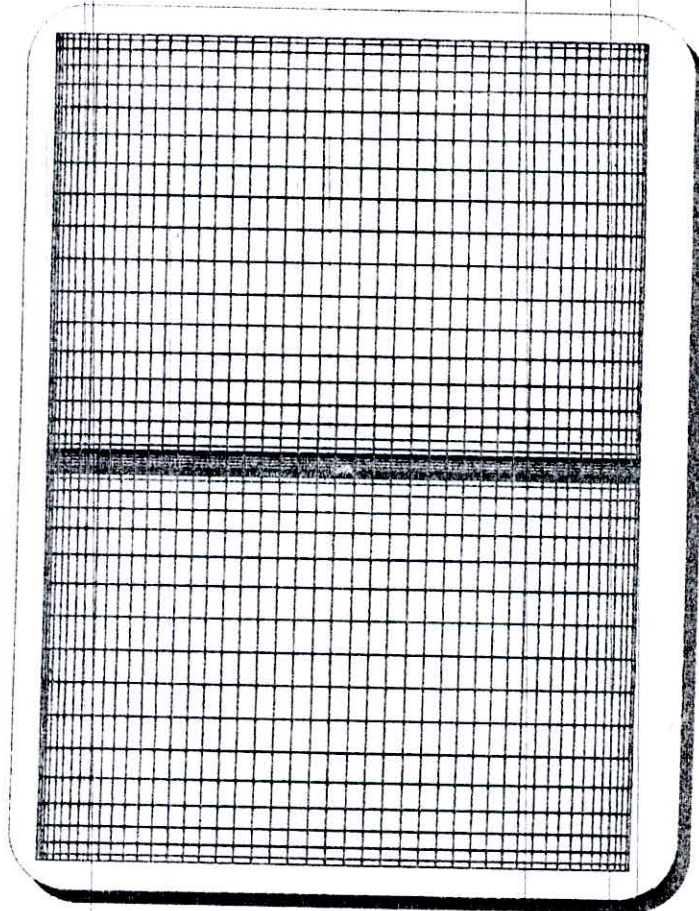


FIGURE (6-3) MAILLAGE DANS L'ECHANGEUR DE CHALEUR



6-6) PARAMETRES D'ECHANGE DE CHALEUR

6-6.1) Nombre de NUSSELT

Les nombres de NUSSELT correspondant aux surfaces d'échange interne du tube ( $A_1$ ) et externe du tube ( $A_{1o}$ ) pour le fluide chaud et froid sont définies comme suit :

$$Nu_1 = \frac{h_1 \cdot 2 \cdot R_i}{K_1} \quad (6-3.1)$$

$$Nu_2 = \frac{h_2 \cdot 2 \cdot (R_o - R_{io})}{K_2} \quad (6-3.2)$$

6-6.2) Coefficient d'échange global

Le coefficient d'échange global rapporté à la surface chaude  $A_{1o}$  est défini comme suit

$$\frac{1}{U_g} = \frac{1}{h_{io}} + \frac{R_{io}}{K_p} \ln \frac{R_{io}}{R_i} + \frac{1}{h_o} \quad (6-4)$$

avec  $h_{io} = h_i \frac{R_i}{R_{io}}$  (6-4.1)

Si le rapport  $\frac{R_i}{R_{io}}$  est proche de l'unité alors l'équation (6-4) devient

$$\frac{1}{U_g} = \frac{1}{h_{io}} + \frac{1}{h_o} \quad (6-5)$$

Le coefficient d'échange global peut être exprimé aussi par la formule suivante :

$$Nu_g = \frac{U_g \cdot 2 \cdot R_{i0}}{K_2} \quad (6-6)$$

Sachant que :

$$q = U_g (T_{m2} - T_{m1}) \quad \text{et} \quad q = - K_2 \left. \frac{\partial T}{\partial r} \right|_{r=r_{i0}}$$

On a

$$Nu_g = \frac{- \left. \frac{\partial T}{\partial r} \right|_{r=r_{i0}} \cdot 2 \cdot R_{i0}}{(T_{m2} - T_{m1})} \quad (6-7)$$

### 6-6.3) Efficacité de l'échangeur de chaleur

L'efficacité de l'échangeur est définie comme étant le rapport de la quantité de chaleur échangée sur l'énergie maximale contenue dans le fluide.

La quantité de chaleur maximale qui peut être cédée est définie comme suit :

$$Q_{max} = (M \cdot Cp)_{min} (T_{me2} - T_{me1}) \quad (6-8)$$

La quantité de chaleur échangée entre les fluides chaud et froid est:

$$Q = (M.Cp)_1 (T_{ms1} - T_{me1}) = (M.Cp)_2 (T_{me2} - T_{ms2}) \quad (6-9)$$

L'efficacité peut s'exprimer donc sous la forme suivante:

$$\epsilon = \frac{T_{ms1} - T_{me1}}{T_{me2} - T_{me1}} \quad \text{si } (MCp)_1 < (MCp)_2 \quad (6-10)$$

$$\epsilon = \frac{T_{me2} - T_{ms2}}{T_{me2} - T_{me1}} \quad \text{si } (MCp)_1 > (MCp)_2 \quad (6-11)$$

Si On pose  $C = \frac{(MCp)_1}{(MCp)_2}$

L'efficacité sous forme adimensionnelle s'écrit alors:

$$\epsilon = T_{ms1}^+ \quad \text{si } C < 1$$

$$\epsilon = 1 - T_{ms2}^+ \quad \text{si } C > 1$$

#### 6-6.4) Nombre d'unité de transfert

Le nombre d'unité de transfert est défini comme suit:

$$NTU = \frac{U_g A}{(MCp)_{min}} \quad (6-12)$$



$U_g$ : coefficient d'échange global rapporté à la section d'échange A  
 A: section d'échange

Sachant que ;

$$Q = U_g A \text{ DTLM} \quad (6-13)$$

on a

$$\text{NTU} = \frac{Q}{(M C_p)_{\min} \text{DTLM}} \quad (6-14)$$

D'où sous forme adimensionnelle, on a :

$$\text{NTU} = \frac{T_{ms1}}{\text{DTLM}} \quad \text{si } C < 1 \quad (6-15)$$

$$\text{NTU} = \frac{1 - T_{me2}}{\text{DTLM}} \quad \text{si } C > 1 \quad (6-16)$$

avec ;

$$\text{DTLM} = \frac{1 - (T_{ms2} - T_{ms1})}{\text{Ln} \frac{1}{(T_{ms2} - T_{ms1})}} \quad \text{Echangeur co-courant} \quad (6-17)$$

$$\text{DTLM} = \frac{T_{ms2} - (T_{ms2} - T_{ms1})}{\text{Ln} \frac{T_{ms2}}{(1 - T_{ms1})}} \quad \text{Echangeur contre courant} \quad (6-18)$$

## 6-7) RESULTATS ET INTERPRETATIONS

Pour illustrer le phenomene d'échange de chaleur entre un fluide froid et un fluide chaud, on a traité dans cette partie le cas de quelques exemples de fluides circulant dans les deux configurations d'échangeurs à co-courant et à contre courant.

### 6-7.1) Echangeur à co-courant

Les figures (6-4) et (6-7) nous montrent l'évolution des températures de mélange adimensionnelles le long de l'échangeur pour les fluides chaud et froid. On constate que la température du fluide chaud décroît alors que celle du fluide froid augmente. Nous avons vérifié également à partir d'un bilan de chaleur effectué en plusieurs points que la chaleur cédée par le fluide chaud est identique à celle reçue par le fluide froid.

D'autre part on remarque que la température centrale, au niveau de la paroi du tube augmente très rapidement à l'entrée de l'échangeur pour se maintenir et se rapprocher de la température du fluide ayant le plus petit nombre de Peclet.

Dans les figures (6-5) et (6-8) on a représenté les courbes décrivant l'évolution du nombre de NUSSELT global moyen rapporté à la paroi externe du tube. L'examen de ces dernières nous permet de constater que le nombre de NUSSELT est important à l'entrée puis décroît graduellement le long de l'échangeur pour atteindre une valeur constante.

Ces résultats sont conformes à ceux étudiés dans la première partie de notre étude concernant l'espace annulaire et le tube. Ceci nous permet de conclure, que dans toute conception d'échangeur compact, il est indispensable de tenir compte des effets d'entrée dans l'échangeur de chaleur.

---

L'efficacite de l'echangeur de chaleur à co-courant calculé à partir de l'équation (6-10) est confronté dans les figures (6-6) et (6-9) avec celle obtenue par l'équation (C-1) de l'annexe C. On constate alors qu'il y a une parfaite concordance entre ces deux resultats. On remarque également que l'efficacité de l'echangeur augmente à partir de l'entrée pour se stabiliser ensuite pour des valeurs élevées de NTU.

La variation du rapport de chaleur spécifique  $C$  nous permet d'avoir une famille de courbes de l'efficacite de l'echangeur comprise entre 0.5 et 1. si le rapport diminue de 1 à 0 (voir figure (6-10)).



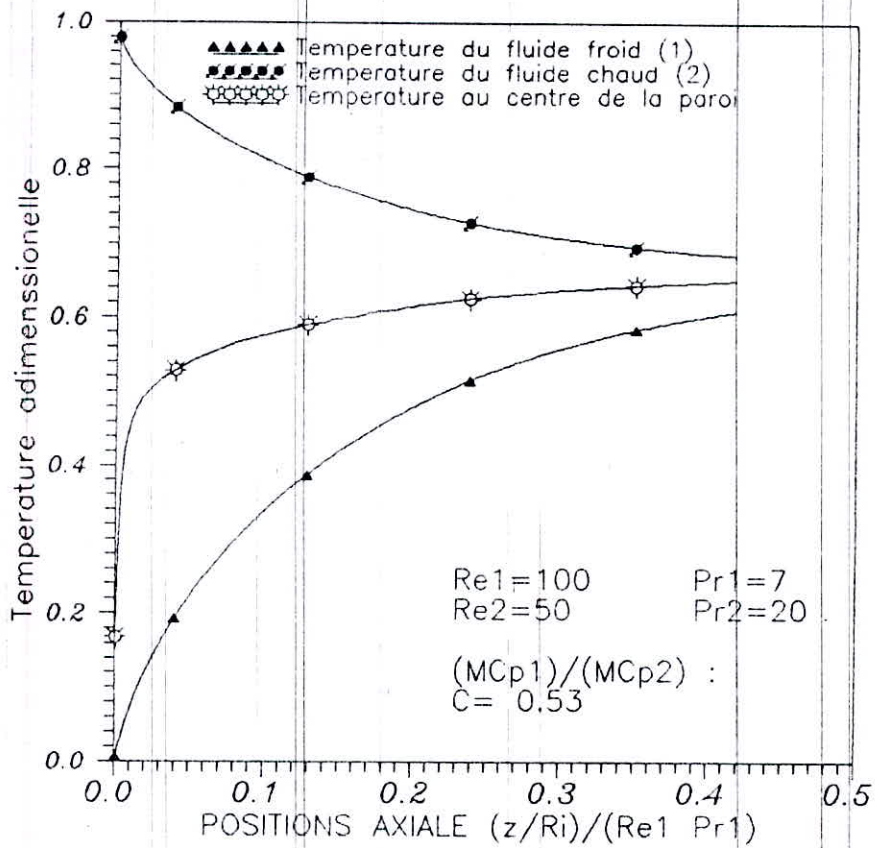


FIG (6-4) DISTRIBUTION DE TEMPERATURE DE MELANGE DANS L'ECHANGEUR DE CHALEUR A CONTRE COURANT

ECHANGEUR A CO-COURANT

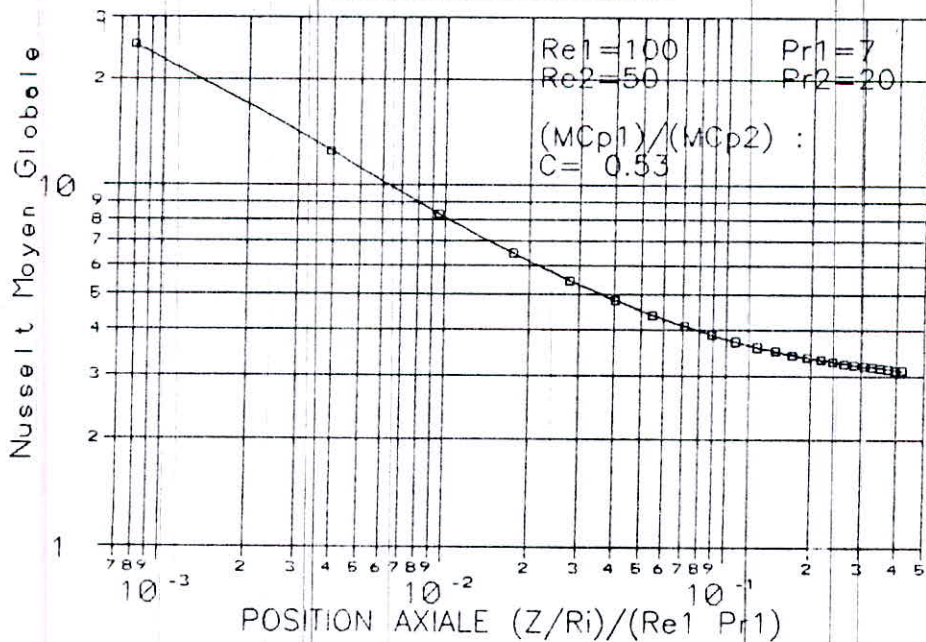


FIG (6-5) VARIATION DU NOMBRE DE NUSSLETT GLOBAL RAPPORTE A LA PAROI EXTERNE DE L'ECHANGEUR

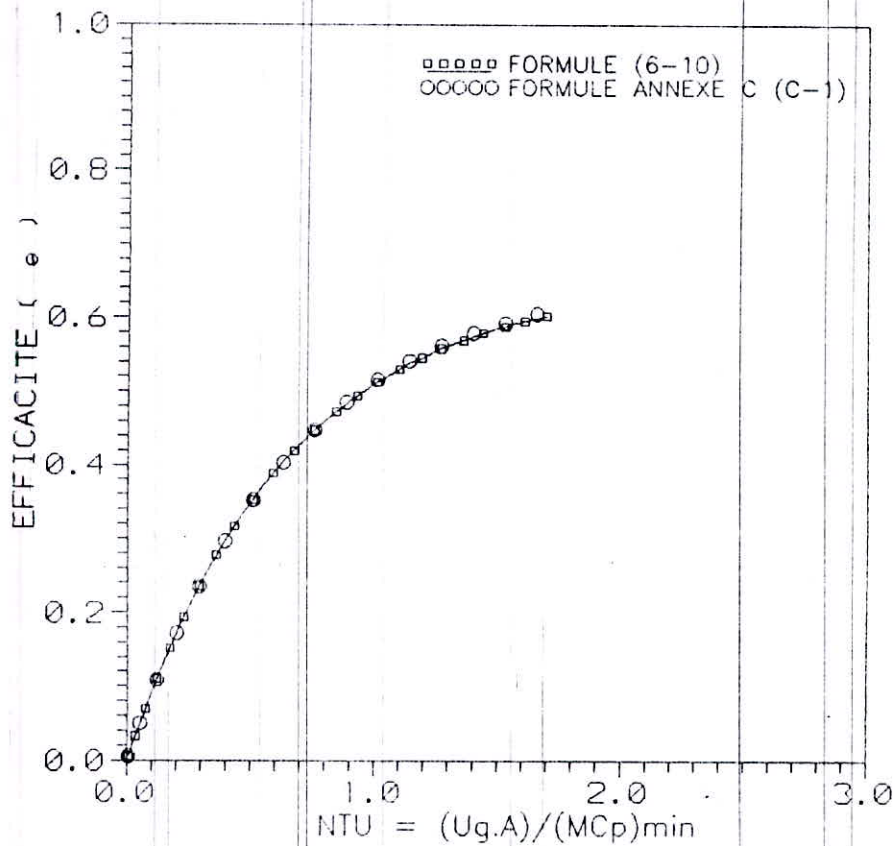


FIG (6-6) REPRESENTATION DE L'EFFICACITE DE L'ECHANGEUR DE CHALEUR

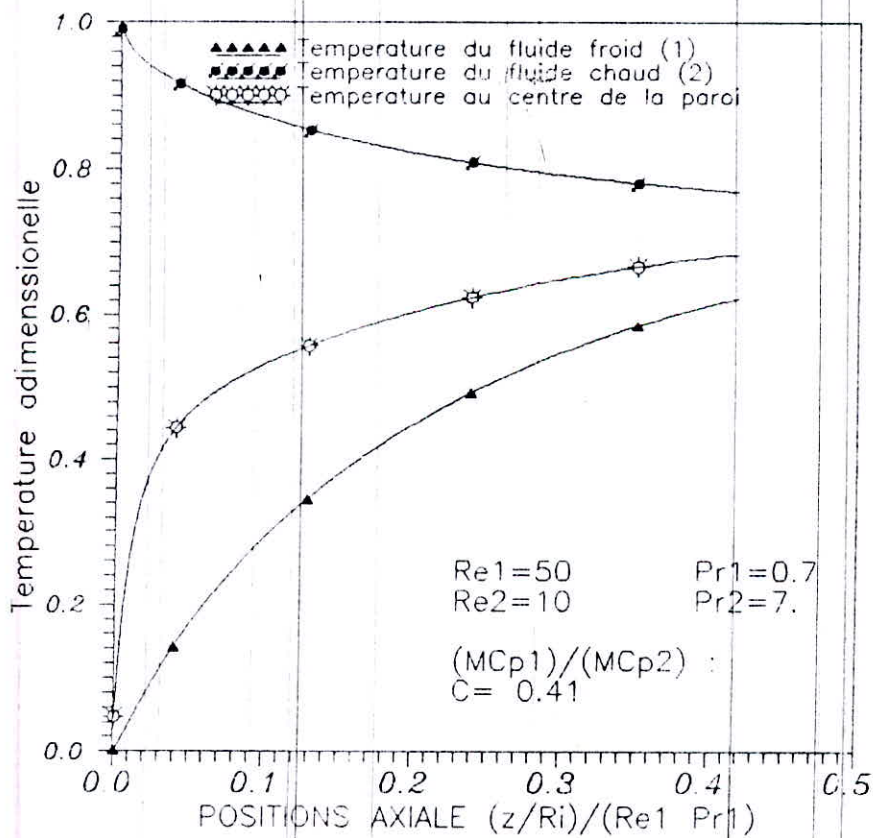


FIG (6-7) DISTRIBUTION DE TEMPERATURE DE MELANGE DANS L'ECHANGEUR DE CHALEUR A COURANT COEURANT

ECHANGEUR A CO-COURANT

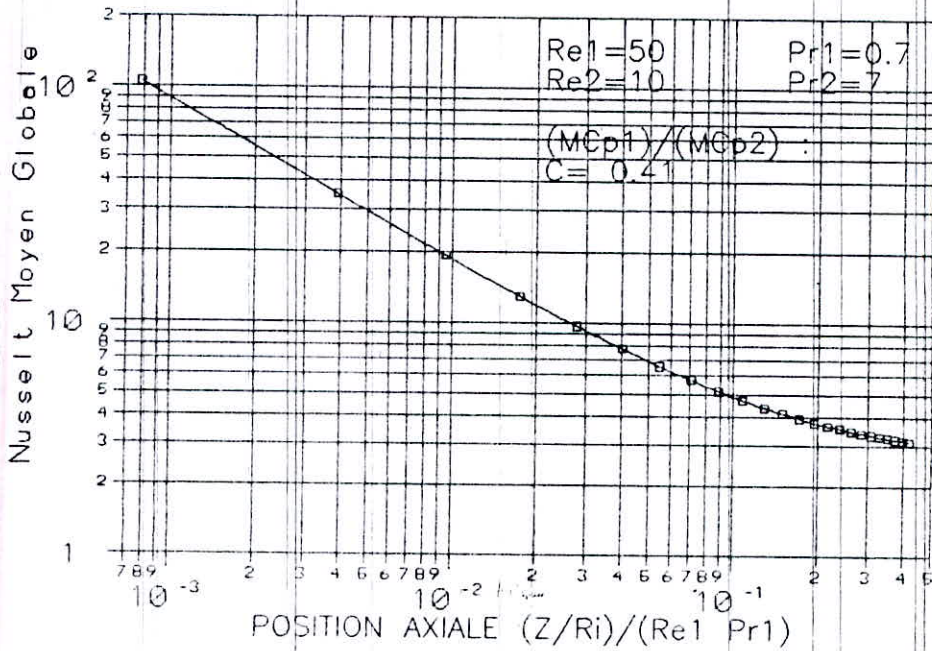


FIG (6-8) VARIATION DU NOMBRE DE NUSSULT GLOBAL RAPPORTE A LA PAROI EXTERNE DE L'ECHANGEUR

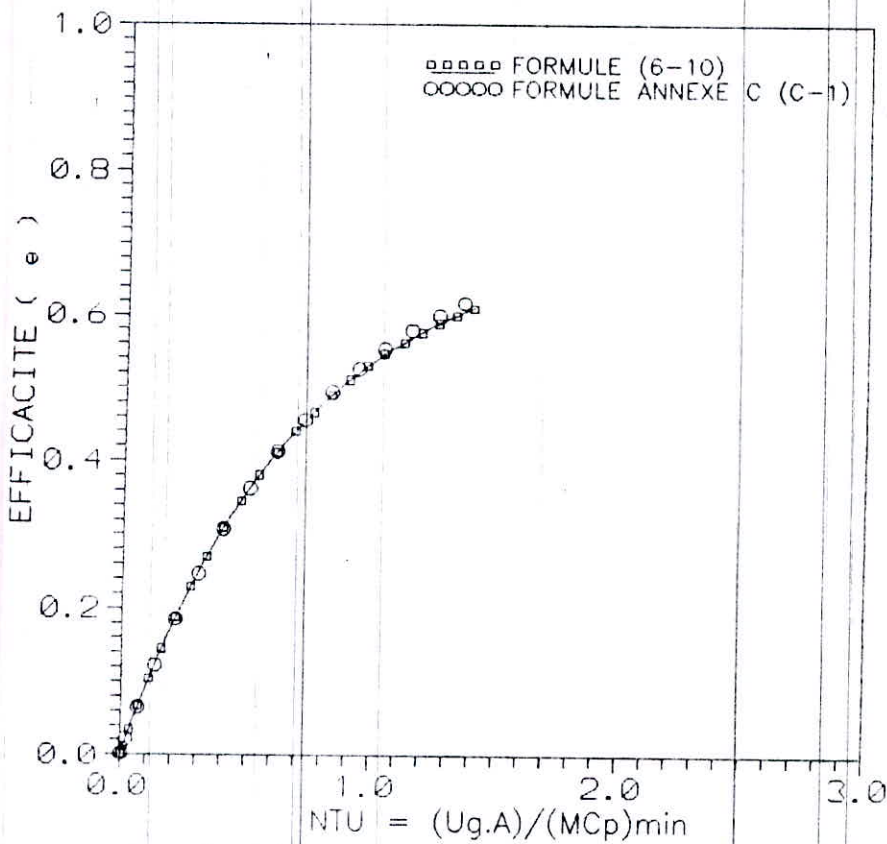


FIG (6-9) REPRESENTATION DE L'EFFICACITE DE L'ECHANGEUR DE CHAUFUR



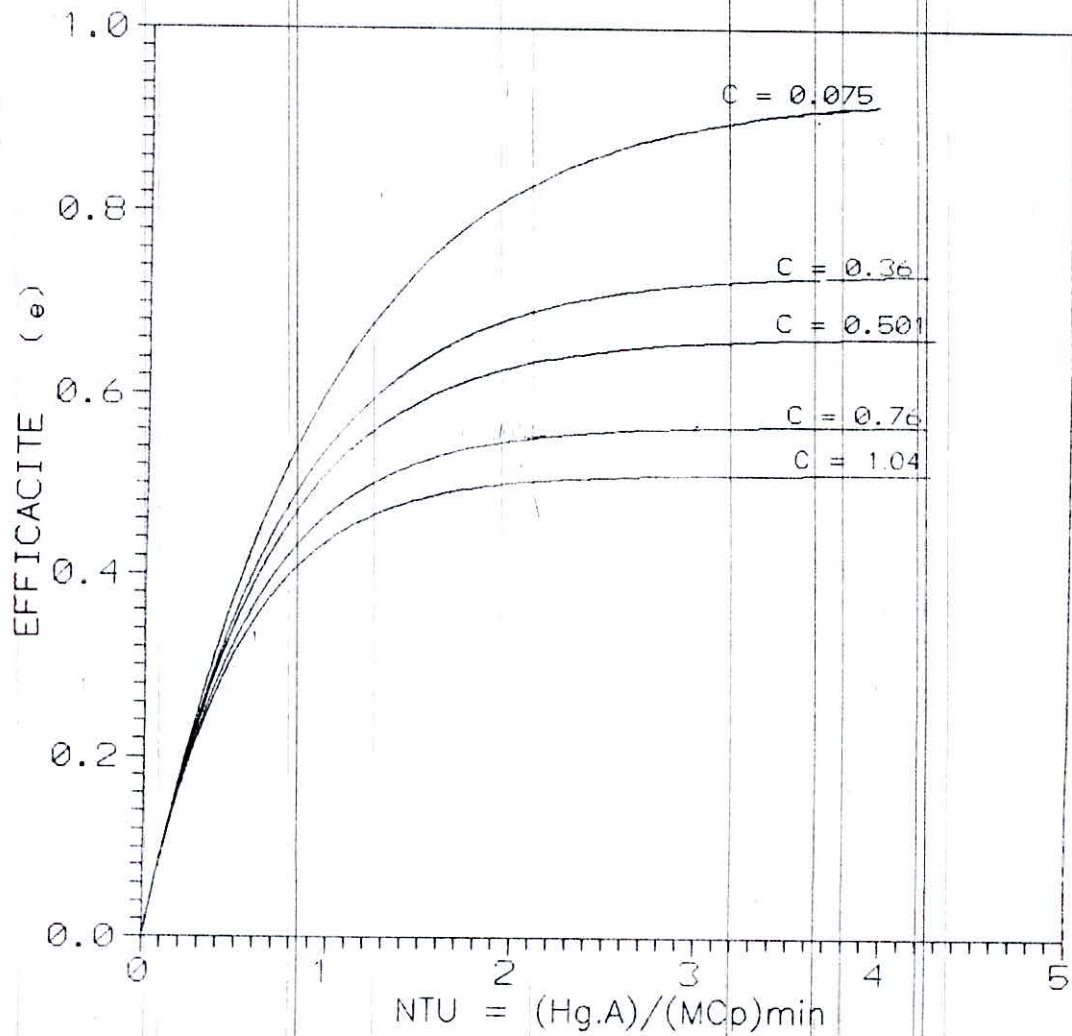


FIG (6-10) EFFICACITE DE L'ECHANGEUR POUR DIFFERNT RAPPORT DE DEBIT

### 6-7.2) Echangeur à contre courant

Pour étudier le transfert de chaleur dans l'échangeur à contre courant. Le fluide froid est alors pris dans le sens inverse du fluide circulant dans l'espace annulaire. Les résultats de cette étude sont présentés dans les figures (6-11) à (6-17).

Les figures (6-11) et (6-14) nous indiquent l'évolution des températures de mélange des fluides chaud et froid circulant le long de l'échangeur à contre courant. L'analyse de ces courbes nous révèle que le fluide froid se réchauffe considérablement et cela immédiatement à partir de l'entrée de l'échangeur de chaleur. Alors que la température de mélange du fluide chaud diminue progressivement de sorte que le bilan de chaleur soit vérifié.

D'autre part, on remarque que la température centrale, au niveau de la paroi du tube augmente tangentielllement aux deux températures de mélange des fluides froid et chaud.

L'évolution du nombre de NUSSELT global moyen rapporté à la paroi externe du tube est représentée dans les figures (6-12) et (6-15). L'examen de ces courbes nous montre que le nombre de Nusselt est important à l'entrée puis diminue le long de la surface d'échange de l'échangeur.

L'efficacité de l'échangeur de chaleur à contre courant calculée à partir de l'équation (6-10) est confrontée dans les figures (6-13) et (6-16) avec celle obtenue par l'équation (C-3) de l'annexe C.

On constate dans ce cas qu'il y a une concordance entre ces deux résultats. De plus, on remarque que l'efficacité de l'échangeur à contre courant augmente similairement à celle de l'échangeur à co-courant.

L'analyse de l'efficacité de l'échangeur pour une variété de rapport de chaleur spécifique est indiquée dans la figure (6-17). On constate alors une famille de courbes comprises entre 0.8 et 1 pour une variation du rapport  $C$  de 1 à 0.



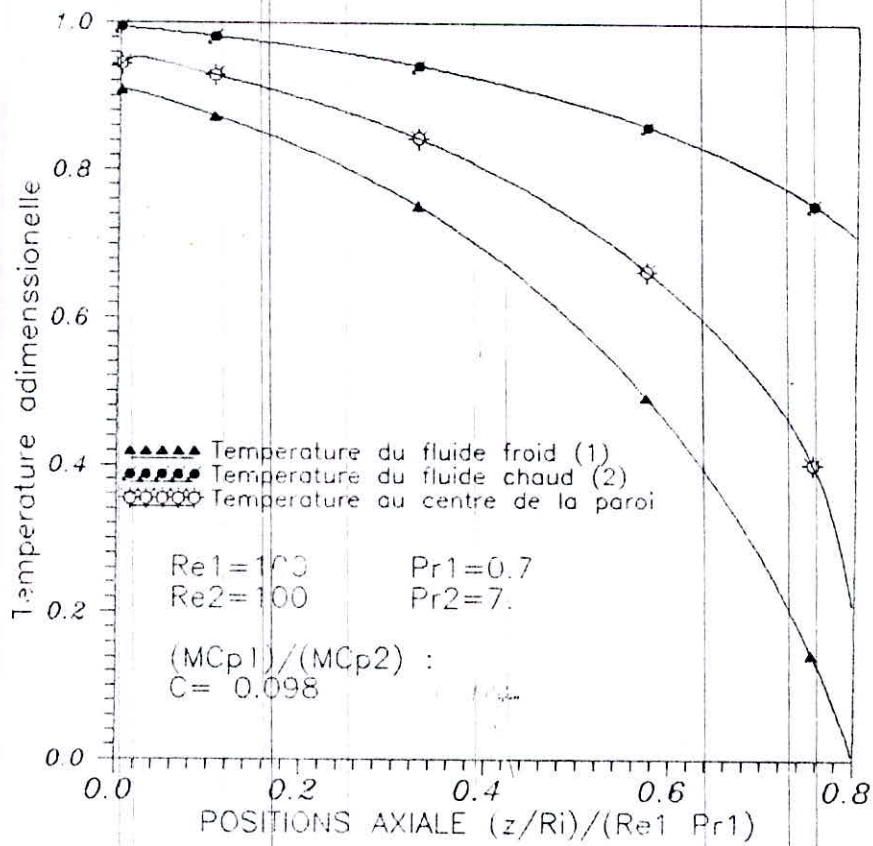


FIG (6-11) DISTRIBUTION DE TEMPERATURE DE MELANGE DANS L'ECHANGEUR DE CHALEUR A CONTRE COURANT

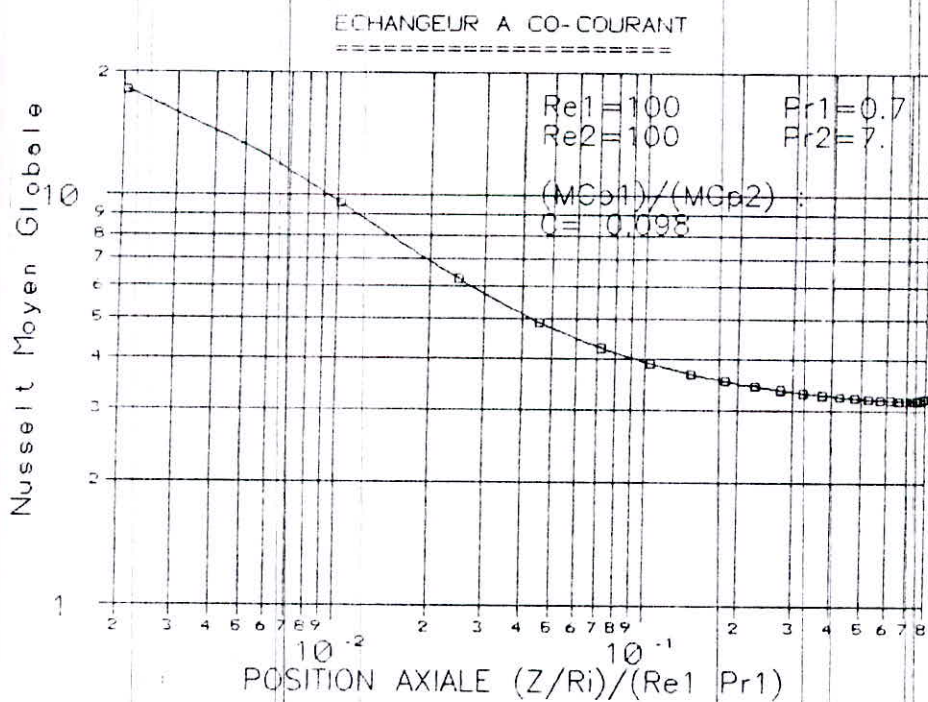


FIG (6-12) VARIATION DU NOMBRE DE NUSSULT GLOBAL RAPPORTE A LA PAROI EXTERNE DE L'ECHANGEUR

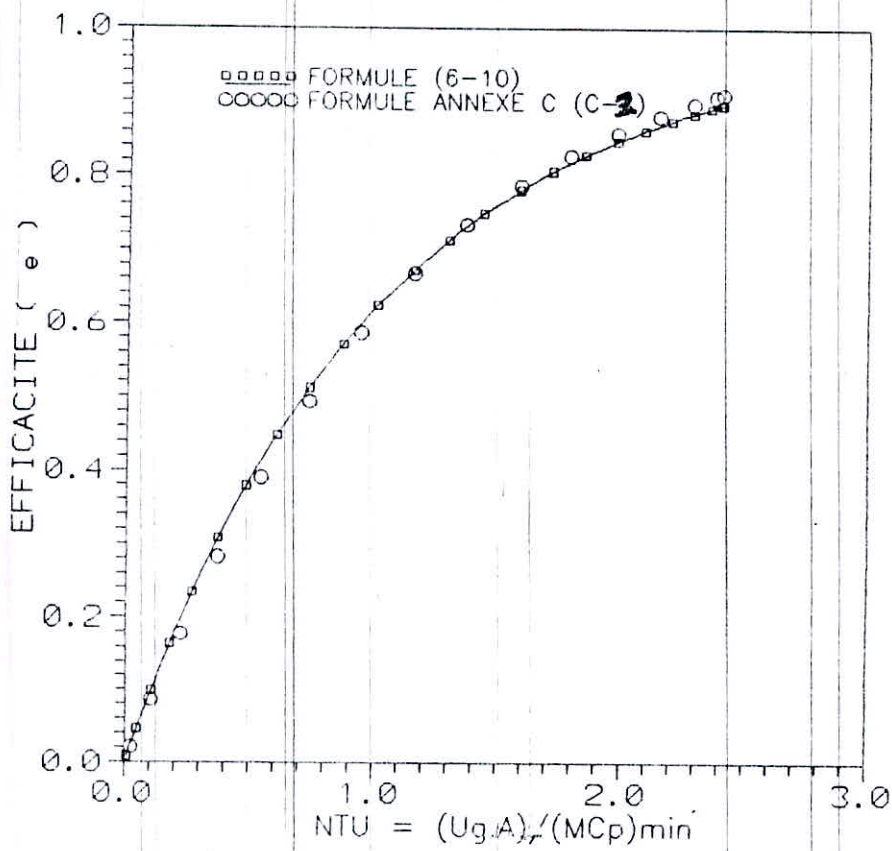


FIG (6-13) REPRESENTATION DE L'EFFICACITE DE L'ECHANGEUR DE CHALEUR

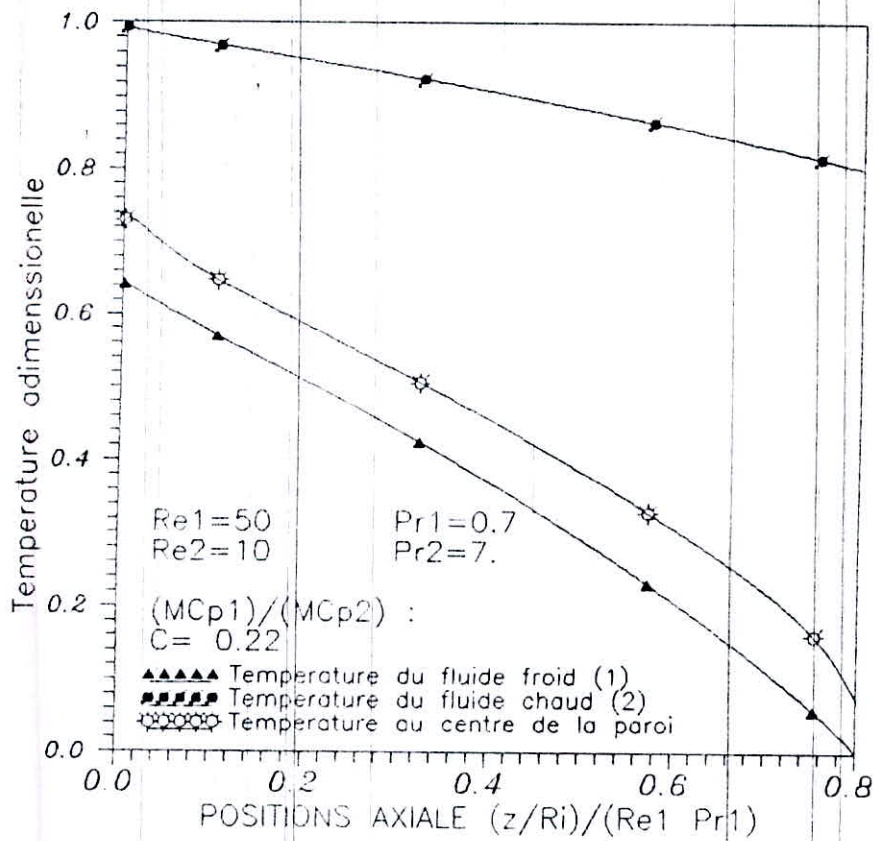


FIG (6-14) DISTRIBUTION DE TEMPERATURE DE MELANGE DANS L'ECHANGEUR DE CHALEUR A CONTRE COURANT

ECHANGEUR A CONTRE-COURANT

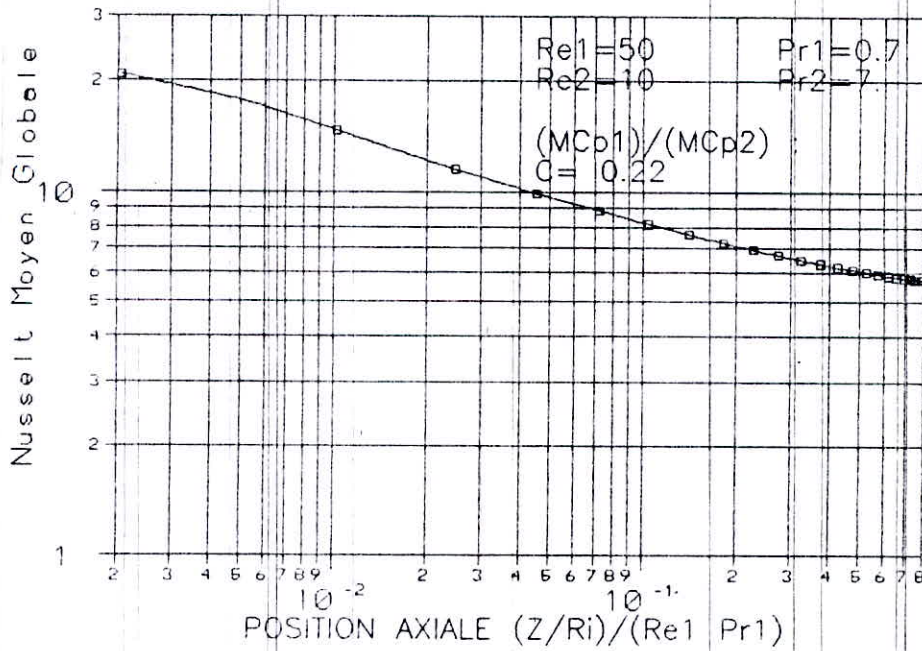


FIG (6-15) VARIATION DU NOMBRE DE NUSSELT GLOBAL RAPPORTE A LA PAROI EXTERNE DE L'ECHANGEUR

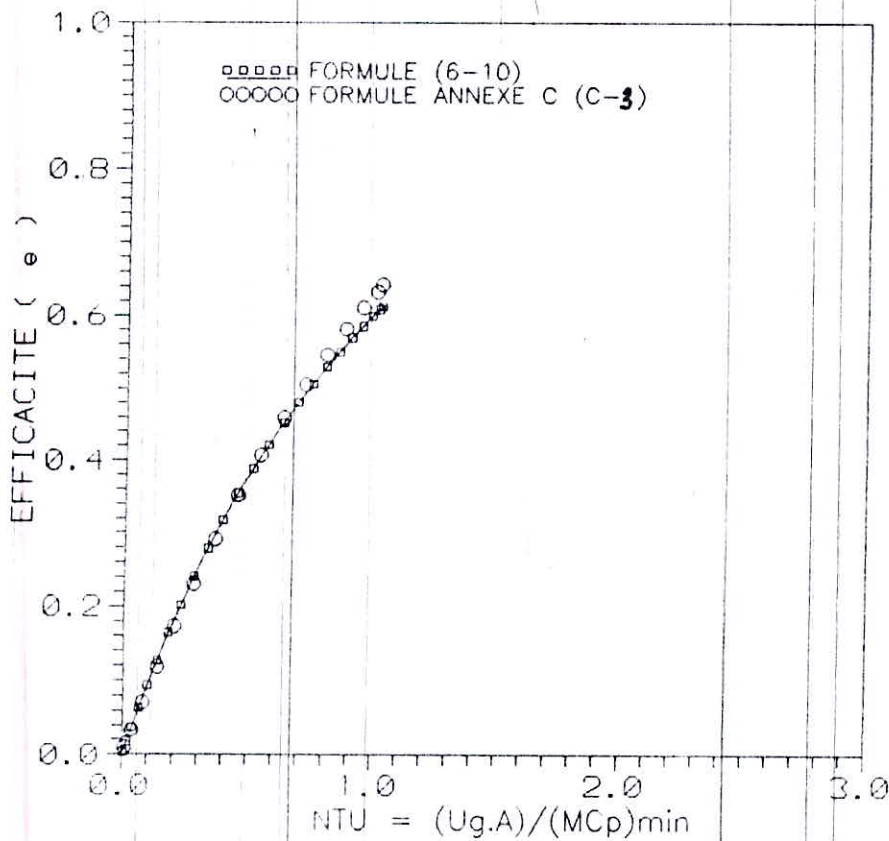
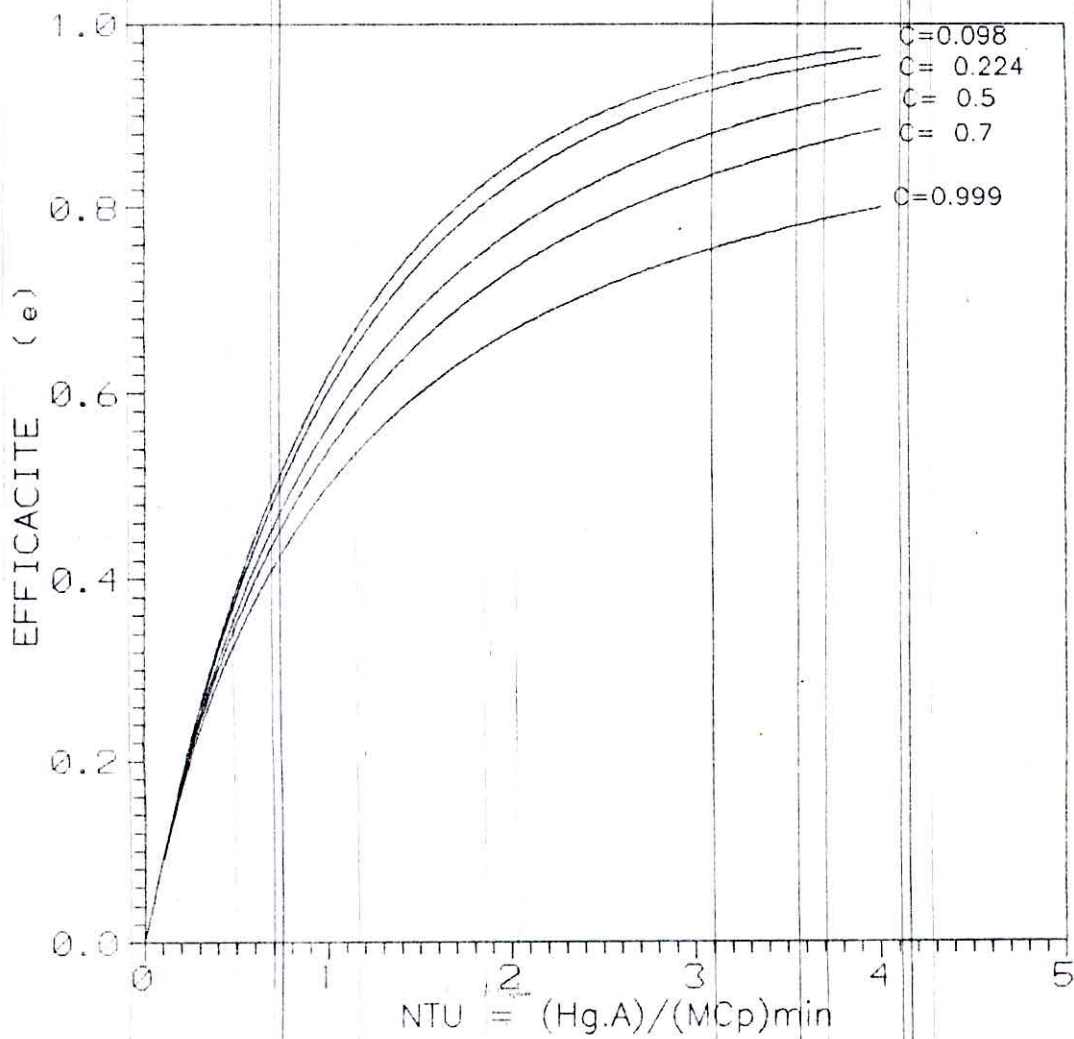


FIG (6-16) REPRESENTATION DE L'EFFICACITE DE L'ECHANGEUR DE CHALEUR





FIG(6-24) EFFICACITE DE L'ECHANGEUR DE CHALEUR POUR DIFFERENTE RAPPORT DE DEBIT

# Conclusion

En conclusion, cette étude nous a permis de prédire l'influence de certains paramètres physiques ( $Re$ ,  $Pr$ ,  $Pe$ ) sur le comportement dynamique et thermique du fluide circulant dans le tube et dans l'espace annulaire et par conséquent sur les performances d'échanges de chaleur.

Concernant l'aspect dynamique dans le tube et l'espace annulaire, il a été constaté que pour des nombres  $Pr < 7$  le profil de vitesse uniforme se développe à partir de l'entrée jusqu'à atteindre un profil parabolique en régime établi. Par contre, pour des valeurs de  $Pr$  plus élevées, l'établissement dynamique est immédiatement atteint à partir de l'entrée. Cependant, on a remarqué que le profil de vitesse est non symétrique par rapport au rayon moyen de l'espace annulaire.

D'autre part, l'effet de la diffusion axiale se traduit par l'apparition de deux maximums près des parois et une concavité au centre. Cette dernière tend à s'affaiblir et à disparaître pour des nombres de Prandtl et de Reynolds élevés ( $Pr > 7$  et  $Re > 100$ ).

Quant à l'aspect thermique dans le tube et l'espace annulaire nous avons constaté que l'échange de chaleur est plus important dans la zone d'entrée puis diminue graduellement et devient constant à partir de l'établissement thermique. De ce fait, on observe alors que les couches limites dynamique et thermique s'effectuent simultanément pour des valeurs faibles du nombre de Prandtl ou proche de l'unité. Par contre, pour des valeurs plus élevées, la couche limite thermique se développe beaucoup plus lentement. L'effet de la diffusion axiale se traduit également par une augmentation substantielle du nombre de Nusselt à l'entrée et une longueur d'établissement plus importante pour des nombres de  $Pe < 70$ .

La méthode numérique des volumes finis a été adoptée dans cette étude en utilisant un schéma de discrétisation en loi puissance. Les résultats de cette simulation ont été obtenus sur un PC - 386 Dx 16

avec un temps de calcul nettement inférieur à ceux des références [20] et [21]. On constate, aussi dans ce cas, que l'utilisation du maillage à pas spatial variable nous a permis de réduire le nombre de noeuds. Cependant pour avoir plus de résolution, il est indispensable de travailler sur des ordinateurs plus performants en capacité mémoire et en temps d'exécution

L'application aux échangeurs de chaleur, nous a permis de déterminer l'évolution des températures de mélange des fluides froid et chaud, le coefficient d'échange global et l'efficacité de l'échangeur. Ces derniers ont une grande utilité dans la conception des échangeurs de chaleur. L'influence du rapport de débit sur les performances de l'échangeur montre que pour un rapport de débit faible l'efficacité approche l'unité. On constate aussi que pour une même longueur d'échange, l'échangeur de chaleur à contre courants présente une efficacité nettement meilleure que celle de l'échangeur de chaleur circulant à co-courants.

En perspective, il est intéressant de continuer ce travail par l'extension du code de calcul au régime turbulent et de considérer les propriétés physiques variables en fonction de la température afin de se rapprocher le plus de la réalité physique du phénomène de la convection de chaleur et améliorer le dimensionnement des échangeurs. D'autre part, une étude expérimentale est aussi nécessaire pour confirmer les prédictions du code de calcul.



## BIBLIOGRAPHIE

- [1] GRATEZ, L., Ann. phys. LP2. 18, 79 (1883) ; 25 337 (1885)
- [2] W.M. KAYS, "Numerical solution for laminaire-flow heat transfer in circulaire tubes"  
Trans. Am. soc. Mech. Engs. , 77, 1265 (1955)
- [3] L. LANGHAAR, "Steady flow in the transition length of straight tube "  
Journal of applied mechanics, Trans. ASME , Vol 64, 1942, P. A-55
- [4] F.W. SCHMIDT & B. ZELDIN, "Laminaire heat transfer in the entrance region of ducts" Appl. Sci. Res Vol 23 october 1970
- [5] D.K. HENNECKE, "Heat transfer by Hagen Poiseuille flow in th entrance thermal development region with axiale conduction" Wärme-und stoffubertragung Bd. (1968)
- [6] R.W HORNBECK, " Laminaire folw in the entrance region of a pipe"  
Appl. Sci. Res. Sectio A, Vol. 13
- [7] A.P HATTON & A. QUARMBY, " Heat transfer in the thermal entry legth with laminair flow in an annulus" Int. J. Heat Mass Transfer. Vol. 5 pp 973-980 (1962)
- [8] A. MOJTABI & J.P. CALTAGIRONE, "Convection entre deux cylindres coaxiaux en regime laminaire permanent" Int. J. Heat Mass Trans. Vol. 21 (1977)
- [9] O. TERHMINA & A. MOJTABI, " Ecoulements de convection forcée en régimes dynamiques et thermique non établis dans un espace annulaire" , Int. J. Heat Mass Transfer. Vol. 31 pp 583-590 (1988)
- [10] R.E FULLER & M.R SAUELS "Simultaneous development of the velocity and temperature fields in the entry region of an annulus" Convective and interfacial heat transfer , chemical engineering progress symposium series No 113, Vol. 67

- [11] C. NOUAR & J. LEGRAND, "Influence de la diffusion axiale de la vorticit  et des conditions d'entrée sur le développement d'un écoulement annulaire" Laboratoire de génie des proc d s, U.I.T Saint-Nazaire 58 rue michel ange Heindex pp 420 -44606 SAINT-NAZAIRE
- [12] G. PAGLIARNI, "Steady laminar heat transfer in the entry region of circular tubes with axial diffusion of heat and momentum", *Int. J. Heat Mass Transfer*. Vol. 32 No 6 PP 1037-1052 (1989)
- [13] S.V PATANKAR , "Numerical heat transfer and fluid flow", Series in computaional methods in mechanics and thermal sciences Mc GRAW-HILL BOOK COMPANY
- [14] KREIT " Heat transfer "  
Jon WILLY and Son
- [15] R.W. HORNBECK, " An all-numerical method for heat transfer in the inlet of a tube"  
An ASME publication 65-WAHT-36
- [16] F.H VERHOFF & FISHER. D. P. "A numerical solution of Graetz probleme with axial conduction included", *Journal of Heat Transfer*. February 1973 pp 132-134
- [17] B. VICK, M.N OZISIK & Y. BAYZITOGLU "A method of analysis of low Peclet number region problems with axial conduction", *Letters in heat and mass transfer* Vol 7, pp. 235-248, (1980) PERGAMON PRESS LTD
- [18] B. VICK & M.N OZISIK "An exact analysis of low pPeclet number heat transfer in laminar flow with axial conduction", *Letters in heat and mass transfer* Vol 8, pp. 1-10, (1981) PERGAMON PRESS LTD
- [19] M.L MICHELSEN & J. VILLADSEN "The Graetz problem with axial heat conduction", *Int. J. Heat Mass Transfer*. Vol. 17 PP 1391-1402 (1974)
- [20] F. BOUKBIR "Etude numerique de l'etablissement thermique en écoulement laminaire par la methode des volumes finis", PFE Genie mécanique USTB Promotion 1994
- [21] F. BENCHIKH, "Etude numerique de l'etablissement thermique en écoulement laminaire par la methode de differences finies".PFE Genie mécanique USTB 1993

- [22] Y. ASAKO, H. NAKAMURA & M FAGHRI "Developing laminar flow and heat transfer in the entrance region of regular polygonal ducts", Int. J. Heat Mass Transfer. Vol. 31 No 12 PP 2590-2591 (1988)
- [23] DIN. VO.NGOC, "Méthode numérique d'intégrale local sur les volumes finis" école de génie Université de Moncton, CANADA
- [24] A.H TAKI, "A numerical study in the entrance region of laminar co-current and counter-current flow double-pipe heat exchangers", University of Salford, UK
- [25] Reference Manuel of "MICRO-COMPACT " (version 2.1)  
" A general purpose computer program for two-dimensional fluid and heat transfer", innovative reserch, Inc 7846. ITHACA Lane N. Maple Grove, MN 55369-8549 CANADA
- [26] H. SCHLICHTING, "Boundary layer theory"; Sixth edition Mc Graw Hill, New York, USA (1968)
- [27] P. INCOPERA & P. DEWITT, "Fundamental of heat and mass transfer" John Wiley and Sons (1990)
- [28] DONALD Q. KERN, "PROCESS HEAT TRANSFER" MC GRAW Hill company (1950)
- [29] EE FELDMAN; RW HORNBECK. JF. OSTERLE "A Numerical solution of Developing Temperature For laminar Developing flow in eccentric Annular Ducts " Intj Heat mass transfer . Vol 25. No 2 PP243-253 (1982).
- [30] R. COMOLET, J. BONNIN "Mécanique expérimentale Des fluides". Tom I, Tome II édition MASSON (1986)
- [31] R. C. PRASAD "Generalized solution and effectiveness for concentric tube heat exchangers", Int. J. Heat Mass Transfer. Vol. 31 No 12 PP 2571-2578 (1988)



# ANNEXE A

## ■ ALGORITHME " T.D.M.A " (TRIDIAGONAL MATRIX ALGORITHM)

Soit le système d'équations algébriques linéaires à matrice tri diagonale donné dans (1).

$$\begin{bmatrix}
 \beta_1 & \gamma_1 & & & & & \\
 \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 & & & & \\
 & \alpha_3 & \beta_3 & \gamma_3 & & & \\
 & & & & \ddots & & \\
 & & & \alpha_i & \beta_i & \gamma_i & \\
 & & & & & & \ddots & \\
 & & & & & & & \alpha_n & \beta_n
 \end{bmatrix}
 \begin{bmatrix}
 \phi_1 \\
 \phi_2 \\
 \phi_3 \\
 \vdots \\
 \phi_i \\
 \vdots \\
 \phi_n
 \end{bmatrix}
 =
 \begin{bmatrix}
 \lambda_1 \\
 \lambda_2 \\
 \lambda_3 \\
 \vdots \\
 \lambda_i \\
 \vdots \\
 \lambda_n
 \end{bmatrix}
 \quad (1)$$

Le principe de l'algorithme " TDMA " consiste tout d'abord, à utiliser la première équation pour éliminer  $\phi_1$  de la seconde équation. La nouvelle équation ainsi obtenue est à son tour utilisée pour éliminer  $\phi_2$  de la troisième équation. Une telle démarche est appliquée pour toutes les équations restantes jusqu'à éliminer  $\phi_{n-1}$  de la n-ième équation. Cette dernière aura alors uniquement une seule inconnue  $\phi_n$ . Les autres inconnues  $\phi_{n-1}, \phi_{n-2}, \dots, \phi_2, \phi_1$  sont donc calculées par substitution successive en faisant le chemin inverse.

Supposons que  $\phi_{i-2}$  a été éliminée de la (i-1)-ième équation. Dans ce cas, on peut écrire :

$$b_{i-1} \phi_{i-1} + c_{i-1} \phi_i = d_{i-1} \quad (2)$$

Cette dernière est utilisée pour éliminer  $\phi_{i-1}$  de la  $i$ -ième équation. D'où:

$$\left( \beta_i - \frac{\alpha_i \cdot c_{i-1}}{b_{i-1}} \right) \phi_i + \gamma_i \cdot \phi_{i+1} = \lambda_i - \frac{\alpha_i \cdot d_{i-1}}{b_{i-1}} \quad (3)$$

En comparant l'équation (3) à (2) on a alors :

$$\text{pour } i = 2, 3, \dots, n \quad b_i = \beta_i - \frac{\alpha_i \cdot c_{i-1}}{b_{i-1}} \quad (4.a)$$

$$c_i = \gamma_i \quad (4.b)$$

$$d_i = \lambda_i - \frac{\alpha_i \cdot d_{i-1}}{b_{i-1}} \quad (4.c)$$

pour  $i=1$

$$b_1 = \beta_1, \quad c_1 = \gamma_1, \quad d_1 = \lambda_1 \quad (4.e)$$

Lorsque  $i=n$ , la  $n$ -ième équation s'écrit:

$$b_n \phi_n = d_n \quad (4.f)$$

donc:

$$\phi_n = \frac{d_n}{b_n} \quad (4.h)$$

Les autres valeurs de  $\phi$  sont calculées à partir de l'équation (3) qui, après transformation, devient:

pour  $i=n, n-1, \dots, 2$

$$\phi_{i-1} = \frac{(d_{i-1} - c_{i-1} \phi_i)}{b_{i-1}} \quad (5)$$

L'algorithme complet se présente alors comme suit:

$$\blacksquare i=1,2,\dots,n$$

$$c_i = \gamma \quad (6)$$

$$\blacksquare b_1 = \beta_1, \quad d_1 = \lambda_1 \quad (7)$$

$$\blacksquare i=2,3,\dots,n$$

$$k = \frac{\alpha_i}{b_{i-1}} \quad (8)$$

$$b_i = \beta_i - k \cdot c_{i-1} \quad (9)$$

$$d_i = \lambda_i - k \cdot d_{i-1} \quad (10)$$

$$\blacksquare \phi_n = \frac{d_n}{b_n} \quad (11)$$

$$\blacksquare i=n,n-1,\dots,2$$

$$\phi_{i-1} = \frac{(d_{i-1} - c_{i-1} \phi_i)}{b_{i-1}} \quad (12)$$



## ANNEXE B

### ■ Technique de relaxation

Soit l'équation discrétisée de la variable  $\phi$  :

$$a_p \phi_p = \sum a_{nb} \phi_{nb} + b \quad (1)$$

où encore

$$\phi_p = \frac{\sum a_{nb} \phi_{nb} + b}{a_p} \quad (2)$$

A l'itération ( K+1 ), on peut écrire :

$$\phi_p^{(k+1)} = \phi_p^{(k)} + \left( \frac{\sum a_{nb} \phi_{nb}^{(k+1)} + b}{a_p} - \phi_p^{(k)} \right) \quad (3)$$

\*  $\phi^{(k)}$  : valeur de  $\phi$  à l'itération (k)

\*  $\phi^{(k+1)}$  : valeur de  $\phi$  à l'itération (K+1)

La quantité entre crochets dans l'équation (3) représente la variation de  $\phi$  produite par une itération courante ou tout simplement le résidu. La technique de relaxation cherche à diminuer les résidu d'une première approximation puisque ces derniers sont nuls pour la solution exacte, ce qui revient à introduire un facteur de relaxation  $\alpha_\phi$  :

$$\phi_P^{(k+1)} = \phi_P^{(k)} + \alpha_\phi \left( \frac{\sum a_{nb} \phi_{nb}^{(k+1)} + b}{a_p} - \phi_P^{(k)} \right) \quad (4)$$

ou bien :

$$\frac{a_p}{\alpha_\phi} \phi_P^{(k+1)} = \sum a_{nb} \phi_{nb}^{(k+1)} + b + (1 - \alpha_\phi) \frac{a_p}{\alpha_\phi} \phi_P^{(k)} \quad (5)$$

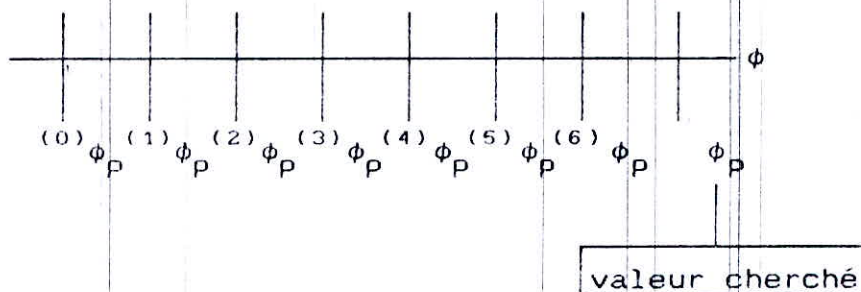
En pratique,  $\alpha_\phi$  est défini tel que :

$$0 < \alpha_\phi < 2$$

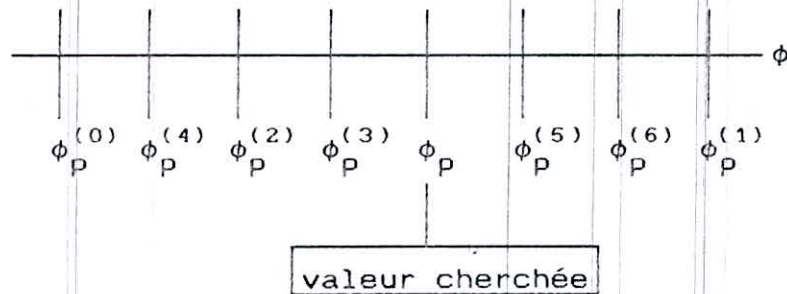
si  $\alpha_\phi$  est plus grand que 2 le processus diverge souvent.

Deux cas sont généralement rencontrés :

■  $1 < \alpha_\phi < 2$ : On est en présence d'une sur relaxation. Cette valeur est utilisée pour accélérer la convergence d'un processus itératif déjà convergent ( voir figure si dessous ).



■  $0 < \alpha < 1$ : Il s'agit d'une sous-relaxation. Dans ce cas, la valeur de  $\alpha_\phi$  permet souvent de faire converger un processus divergent ou encore diminuer les variations des variables dépendantes d'une itération à une autre (voir figure si dessous).



La technique de sous-relaxation est très conseillée pour les problèmes non linéaires afin d'éviter la divergence. dans notre problème les composantes U et V sont soumises à la sous-relaxation.

En résumé, les facteurs de sous relaxation favorisent la stabilité du schéma numérique adopté et permettent d'atteindre l'état de convergence le plus rapidement possible. Les valeurs de  $\alpha_\phi$  apparaissant dans les différentes équations ne sont pas nécessairement les mêmes, elles peuvent varier d'un noeud à l'autre et d'une itération à une autre. En pratique,  $\alpha_\phi$  n'est pas connue à l'avance il faut faire des essais, on peut suivre l'évolution de  $\phi_p^{(k)}$  puis injecter une valeur de  $\alpha_\phi$  et voir comment évoluent les  $\phi^{(k)}$ .



---

## ANNEXE C

### 1) ECHANGEUR A CO-COURANT

$$\epsilon = \frac{1 - \text{Exp}(-\text{NTU} \cdot (1+C))}{1 + C} \quad C < 1 \quad (\text{C-1})$$

$$\epsilon = \frac{1 - \text{Exp}(-\text{NTU} \cdot (1+(1/C)))}{1 + (1/C)} \quad C > 1 \quad (\text{C-2})$$

### 2) ECHANGEUR A CONTRE COURANT

$$\epsilon = \frac{1 - \text{Exp}(-\text{NTU} \cdot (1-C))}{1 + C \text{ Exp}(-\text{NTU} \cdot (1-C))} \quad C < 1 \quad (\text{C-3})$$

$$\epsilon = \frac{1 - \text{Exp}(-\text{NTU} \cdot (1-(1/C)))}{1 + (1/C) \text{ Exp}(-\text{NTU} \cdot (1-(1/C)))} \quad C > 1 \quad (\text{C-4})$$

---

## ANNEXED

### Conditions aux limites à la sortie

Le profil de vitesse à la frontière de droite du domaine, est ajusté en effectuant une correction successive au cours des itérations d'une distribution préalable, et de sorte qu'il y ait satisfaction de la conservation du débit de masse. Ainsi la distribution de vitesse à la frontière de droite est examinée en premier lieu pour une éventuelle valeur négative de l'écoulement sortant ce qui se traduit par :

$$U_{\min} = \text{Max} \left( 0., -U(L1, j) \right) \quad (D-1)$$

La correction de la vitesse est assurée comme suit :

$$U(L, j) = \left[ U(L1, j) + U_{\min} \right] \cdot F \quad (D-2)$$

F est un facteur multiplicatif assurant l'égalité des débits entre l'entrée et la sortie du domaine.

$$F = \frac{M^{\circ}}{\left( \sum \rho U(L1, j) \Delta A + \sum \rho U_{\min} \Delta A \right)}$$

avec;

$$M^{\circ} = \sum \rho U(2, j) \Delta A$$

$\Delta A$  : section de passage

$M^{\circ}$  : Débit à l'entrée