

الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية
وزارة التعليم العالي و البحث العلمي
جامعة سعد دحلب - البليدة
معهد الطيران

REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE
Ministère de l'enseignement supérieur et de la recherche scientifique

UNIVERSITE SAAD DAHLEB-BLIDA-
Institut National d'Aéronautique

Mémoire de fin d'étude

En vue de l'obtention du Diplôme des Etudes Universitaires en aéronautique
Option : PROPULSION

THEME

**CALCULS DES PARAMETRES THERMODYNAMIQUE D'UN GAZ REEL
EN UTILISANT L'EQUATION DE VAN DER WAALS**

Présenté par :

- M^r MENANI ABDERRAHIM
- M^{lle} TADJER LAMIA

Dirigé par :

- M^r ZEBICHE TOUFIK

promotion 2003

➤ Résumé :

CE travail consiste a faire une étude sur les différentes équations du gaz réel , en s'intericent a l'équation de VAN DER WAALS ,on devlloppant un algorithme qui a pour but de déterminer les différents paramètres ainsi que les différents rapports thermodynamique concernent cette équation ,afin de la transmettre en programme informatique par le langage FORTRAN pour le mettre en service des utilisateurs .

➤ Summary

This travel's consist to make the study in the various reels equation a interesting with VAN DER WAALS equat^{ion} , we growth a algorithm ,his object is to definite the diferente thermodynamiquel parameter , wan consistant this equat^{ion} .

In order to trosmie in the informatiquel program with language of FORTRAN .

➤ التلخيص

يستخلص عملنا هذا على إجراء دراسة لمختلف المعادلات المتعلقة بالغاز الحقيقي . موجهينا اهتمامنا من معادلات فان دير وول بعد الدراسة المعتمدة على المعادلات الرياضية نقوم بإجراء القرئم بهدف الحصول على مختلف الوسائط والنسب الترموديناميكية التابعة هذه المعادلة . و ذلك لتكوين برنامج بلغة الفور ترون لجعله في خدمة المستعمل

Dédicaces

Je dédie ce modeste travail :

A mon très cher père qui n'a pas cessé de me prodiguer ces soins et ces conseils.

A ma très chère mère qui a tout sacrifié et tant souffert pour moi.

A mes très chères sœurs : SARAH, MOUNIRA et KOULOUD.

A mon frère FARID.

A mon beau-frère KADER.

A mon binôme RAHM

A mes copines : MERIEM, SAIDA, WAHIBA, LILA, DALILA.

A mes amies les Etudiants, plus particulier ceux de la promotion 00/01.

A toutes ces personnes je dis :

Vous avez a jamais ma gratitude.

LAMIA

Dédicaces

Je dédie ce modeste travail :

A mon très cher père qui n'a pas cessé de me prodiguer ces soins et ces conseils.

A ma très chère mère qui a tout sacrifié et tant souffert pour moi.

A mes très chères sœurs : ZOLA, SIHAM.

A mon frère ADLANE.

A ma belle sœur HASSINA et mon beau-frère AZIZ.

*A mon très cher neveu *ABDELKAYOUM*.*

A mon binôme LAMIA et sa famille

A mes amis : NACER, BELKACEM, ISHAK, FOUZI, ADLANE, YOUSSEF.

A mes amies : ABLA, SOUHILA, NAWEL, MERJEM, NASSIMA, MANEL.

A toute la promotion 2002/2003

RAHIM

REMERCIEMENTS

Nos premiers remerciements vont d'abord à dieu qui a permit la réalisation de ce manuscrit couronnant une formation de trois (3) ans dans la filière d'aéronautique option : PROPULSION.

Notre remerciement va en suite en particulier à : Mr .ZEBICHE et Mr BENOUD nos encadreurs de l'Institut d'Aéronautique de Blida qu'ils ont Etaiet pour nous un guide bien qualifier à chaque fois que nous avons besoin de leurs orientations.

Nous remercions vivement nos enseignants et enseignantes qui nous ont prodigué le savoir et la méthodologie du travail a tous les membres du jury qui ont acceptent d'examiner et d'évaluer ce travail.

En fin nous tenons à remercier du fond du cœur toutes les personnes qui ont contribue de près ou de loin à l'élaborations de ce modeste travail.

SOMMAIRE

Introduction	01
--------------	----

CHAPITRE I

RAPPEL THEORIQUE

I-1 Historique de la Thermodynamique	03
I-2 Introduction	04
I-3 Equation caractéristique des fluides réels	05
I-3-1 Equation générale	05
I-3-2 Equation de Van der waals	05
I-3-3 Equation de BERTHELOT	05
I-3-4 Autre équation des gaz réels	06
I-3-4-1 Equation de Clausius	06
I-3-4-2 Equation de REDLICH – KWONG (1949)	06
I-3-4-3-Equation de BEATTIE – BRIDGEMAN (1928)	07
I-3-4-4-Equation de BENIDICT – WEBB- RUBIN (1951)	07
I-4 Coordonnées du point critique – équation réduite	07
I-4-1 Equation de VAN DER WAALS	07
I-4-2 Equation de BERTHELOT	11
I-5 Calcule des grandeurs Thermodynamiques	12
I-5-1 Expression mathématique des principes	12
I-5-2 Application physique	13
I-5-3 Calcule de l'énergie interne massique	14

I-5-3-1 - Gaz de VAN DER WAALS	14
I-5-3-2- Gaz de BERTHELOT	14
I-5-4 - Calculs de l'entropie massique	15
I-6-Equation de Viriel et facteur de compressibilité	17
I-6-1 1 Equation de viriel	17
I-6-1-2-EQUATION DE VAN DER WAALS	17
I-6-1-3-Equation de BERTHELOT	20
I-6-2- Facteur de compressibilité	20

CHAPITRE II

FORMULATION MATHEMATIQUE

II-1 Equation d'état de VAN DER WAALS	21
II-1-1 Effet du volume exclu	21
II-1-2 effet des forces d'attraction intermoléculaires	22
II-2 Application pour l'équation d'Etat de Van der walls	24
II-2-1- Equation d'Energie	24
II-3- Détermination de la valeur de la fonction de Prantl - Meyer..	35
II-4-Détermination du rapport des sections $\frac{A}{A^*}$ d'un écoulement uniformes	39
II-5-L'expression du débit massique	41
II-6-Méthode des Caractéristiques pour les cas axisymétriques à effet de Pression	43
II-6-1-Résumé (Point-interne) (Gaz Réel) (Van Der Walls) Axisymétriques	52

II-6-2-Le point particulier	54
II-6-3-Résumé Point-sur l'axe de symétrie (Gaz Réel)	
(VanDerWalls) Axisymétriques	56
II-6-4-Résumé Point-sur une paroi rigide(Gaz Réel)	
(VanDerWalls) Axisymétriques.....	59
II-6-5-Equation adiabatique pour gaz réel de Van Der Waals	61

CHAPITRE III

MISE EN ŒUVRE INFORMATIQUE ET PROGRAMMATION

III-1 Les Algorithmes	64
III- 2 Les Organigrammes	70
III- 3 Les Programmes	72

CHAPITRE IV

RESULTATS ET INTERPRETATIONS

IV -1 Les résultats	80
VI -2 Les graphes	91
VI -3 Interprétations	102

CHAPITRE V

CONCLUSION

V -1 Conclusion générale	104
--------------------------------	-----

LISTE DES SYMBOLES

des symboles	Leurs noms
A,b	Constantes suivants le type de gaz
P	Pression
R	Canstantes de gaz
AM	Nombre de mach
T	Temperature
VDW	Gaz de Van der Waals
GP	Gaz Parfait
M	Masse molaire
V	Volume molaire
μ	Vitesse des molécules
K	Canstante de boltzmon
N	Nombre des molécules
\emptyset	Diamètre des molécules
Tc	Température critique
Pc	Pression critique
Vc	Volume critique
ω	Pression réduite
ϕ	Volume réduit
θ	Température reduite
S	L'entropie
U	Energie interne massique
H	L'enthalpie massique
Z	Facteur de compressibilité
Cp	Chaleur spécifique a pression constante
Cv	Chaleur specific a volume constant
Gamma	Cp/Cv
A	La section
\dot{q}	Débit massique

Introduction

Introduction

Introduction :

Lorsqu'un corps subit une transformation physique ou chimique, elle est accompagnée souvent d'effets thermiques tel que le refroidissement ou l'échauffement, et d'effets mécaniques tel que le déplacement du corps et la dilatation.

Cette approche a poussé la transformation à établir des équations reliant les effets thermiques et les actions mécaniques. Et celles-ci constituent l'objet de la thermodynamique.

La thermodynamique est donc la science qui relie les phénomènes thermiques (calorifiques) et mécaniques.

Le gaz parfait est souvent utilisé dans la thermodynamique (malgré qu'il n'existe pas dans la nature).

Grâce à la manipulation avancée des équations du gaz parfait. Ainsi que la simplicité apportée par les différentes hypothèses qui gèrent ce gaz, l'évolution de la physique et de la chimie a poussé les physiciens à prendre en considération les effets intermoléculaires d'un gaz.

L'existence des différents travaux concernant le gaz parfait, ainsi que l'évolution technologique et le besoin d'industrie, rend l'étude de cas réel du gaz utile et indispensable.

La manipulation des équations des gaz réels n'est pas toujours évidente, elle est toute fois difficile, pour cela plusieurs physiciens ont développé des équations pour s'approcher du cas du gaz réel parmi eux on cite : VAN DER WAALS, VIRIÉL, BERTHELOT ... etc.

Dans notre étude on se base sur les équations de VAN DER WAALS le physicien hollandais qui a développé une équation d'un gaz parfait en ajoutant les termes des effets internes comme :

b : pour le covolume.

na / v^2 : pour la pression interne

Il a obtenu l'équation suivante qui porte son nom :

$$\left(p + \frac{na}{v^2} \right) (v - nb) = RT$$

A l'aide de cette équation et des principes de la thermodynamique, on peut trouver les paramètres d'un gaz réel (w, s, h, p, u, q).

Introduction

W : le travail.

S:entropie.

H:enthalpie.

ρ :masse volumique.

U:énergie interne .

Q :quantité de chaleur .

Mais, malheureusement on ne peut pas trouver tous les paramètres thermodynamiques à partir d'un calcul analytique simple.

On remarque que les rapports $Tt/T0$; $Pt/P0$;.... Etc. ; Pour un gaz réel sont souvent données par des courbes expérimentales. C'est pour quoi on a choisi ce thème pour notre travail qui a pour but de déterminer ces rapports à l'aide d'un programme informatique.

En utilisant les paramètres d'un gaz réel donné par l'approche de VAN DER WAALS, et d'autres notions mathématiques on obtient des équations, à partir de ces équations on a élaboré un programme en Fortran qui calcule les différents paramètres thermodynamiques d'un gaz réel.

À partir des résultats d'exécutions on essaye d'obtenir des courbes et des graphes destinés aux utilisateurs.

Chapitre:1

Rappel Théorique

I-1-HISTORIQUE DE LA THERMODYNAMIQUE :

Dès le 17^{ème} siècle la mécanique a connu un développement important, la science de la chaleur, prend corps au 18^{ème} siècle, la science de l'électricité au 19^{ème} siècle.

L'étude des phénomènes chimiques conduit à établir vers la fin du 19^{ème} siècle le tableau périodique des éléments, suggérant l'idée de l'une de la matière, la physique nucléaire né avec le 20^{ème} siècle.

Ces différentes branches de la physique sont liées, et des liaisons existent entre eux, ces développements montrent que l'étude de l'électrolyse et la découverte de l'électron établissent des liens entre les phénomènes chimiques et les phénomènes électriques.

Au début de l'industrie ou l'invention de la machine à vapeur (JAMES WATT), conduit au 18^{ème} siècle à l'étude approfondie des relations entre les phénomènes calorifiques de transformation de la chaleur en travail, de cette étude la thermodynamique trouve naissance au début de 19^{ème} siècle, les deux premiers principes ont été énoncés pratiquement au même temps, dans le premier énoncés par J MAYER, on généralise le concept d'énergie mécanique et on postule l'existence d'une grandeur conservatoire « l'énergie totale d'un système » dans le deuxième, énoncé sous divers formes par S CARNOT, R. CLAUSIUS, et J THOMSON, on introduit une nouvelle grandeur non conservatoire (l'entropie).

La thermodynamique a pour but principal, l'étude des relation entre la mécanique et la chaleur, mais son domaine est l'étudier les phénomènes calorifiques interviennent dans tout les domaine de la physique, dans les phénomènes électriques il y a apparition de chaleur, c'est l'effet JOULE ; il existe comme aussi deux autres effet calorifique liées aux phénomènes électriques l'effet Peltier et l'effet Thomson .

La lumière se transforme en chaleur lorsqu'elle est absorbée par un écran et réciproquement la chaleur donne naissance à la lumière; un corps très chaud devint incandescent, illettré de la lumière, l'étude de l'incandescence ou du « rayonnement » fait l'objet d'un chapitre spécial de la thermodynamique, en fin dans la réaction chimique il y a production ou absorption de chaleur, la thermodynamique étudie tous les phénomènes physiques et chimiques où intervient la chaleur.

I-2-Introduction :

L'étude de la compressibilité d'un gaz a été faite en premier lieu par BOYLES (1622) et MARIOTTE(1667) et fait complétée au cours du XIX siècle par de nouveau expérimentations REGNAULT, NATTERA, ANAGA...

La compressibilité des gaz réels conduits à penser qu'ils sont formés de molécules de petites dimensions séparées par des espaces relativement très grands.

Il y'a $6.023 \cdot 10^{23}$ (*) molécules dans 22.4 L à 0°C et 760 mm Hg. le diamètre de ces molécules est de quelques angstrœm ($1 \text{ \AA} = 10^{-10} \text{ m}$).

Dans le domaine de basse pression et température, un gaz réel se comporte comme un gaz parfait.

La théorie cinétique des gaz nous apprend :

Dans un gaz parfait - il y'a moins de molécules par unité de volume que dans un gaz réel. et on fera l'hypothèse que les molécules d'un gaz parfait sont ponctuels et les forces d'attraction mutuelles des molécules même très voisines sont faibles, voir même nulles. Alors la pression du gaz (parfait) est uniquement due au choc des molécules sur les parois. Cette pression est appelée pression cinétique. dans le cas d'un gaz parfait, la pression macroscopique est égale à la pression cinétique.

Cette pression est donnée par :

$$p = \frac{1}{3} M \frac{U^2}{V} \quad \text{ou} \quad pV = \frac{1}{3} MU^2 \tag{I-1}$$

Avec :

M = masse molaire du gaz

V = volume molaire

U = vitesse des molécules

L'énergie cinétique moyenne de translation des molécules du gaz est :

$$p = \frac{1}{3} M \frac{U^2}{V} \quad \text{or} \quad pV = \frac{1}{3} MU^2 \quad \rightarrow \quad pV = \frac{2}{3} E_c$$

En comparant avec l'équation d'état d'un gaz parfait ($PV = RT$) on obtient l'énergie cinétique d'une mole :

$$\left. \begin{array}{l} pV = RT \\ pV = \frac{2}{3} E_c \end{array} \right\} \rightarrow \boxed{E_c = \frac{3}{2} RT} \tag{I-2}$$

* ($6.023 \cdot 10^{23}$) Nombre d'Avogadro

celle d'une molécule est :

$$E_c = \frac{3}{2} \frac{RT}{A} = \frac{3}{2} KT$$

K : constante de BOLTZMAN $K = \frac{R}{A}$

A : nombre d'Avogadro = $6.023 \cdot 10^{23}$ molécules

Pour un gaz réel, la pression macroscopique totale est la somme de deux termes :

-la pression cinétique due à l'agitation thermique.

-la pression moléculaire due aux forces intermoléculaires (que l'on note π)

I-3-Equations caractéristiques des fluides réels

I-3-1- Equation générale :

la théorie cinétique des gaz amène à remplacer l'équation caractéristique des gaz parfait $PV = RT$ par une équation générale.

$$(P + \pi)(V - b) = RT$$

(I-3)

avec

b : le covolume. c'est le volume minimum que peut occuper l'unité de masse du gaz considéré (tient compte du volume propre des molécules ≈ 4 fois)

$$\text{c.a.d : } b \approx \frac{4\pi N}{\sigma} \left\{ \begin{array}{l} x : \text{ nombres des molécules} \\ \sigma : \text{ diamètre des molécules} \\ \sigma \approx \frac{2}{3} \Lambda^{\circ} \end{array} \right.$$

I-3-2 – Equation de VAN DER WAALS :

A la suite des considérations théorique VAN DER WAALS à été conduit à pauser $\pi = \frac{a}{v^2}$

Cette pression π est proportionnelle a la masse spécifique (a) des molécules attirantes et celles des molécules altérées. Elle est inversement proportionnelle au carré du volume.

L'équation de VAN DER WAALS devient donc :

$$\left(P + \frac{a}{v^2} \right) (v - b) = RT$$

(I-4)

I-3-3 – Equation de BERTHELOT :

Elle s'écrit :

$$\left(p + \frac{a'}{v^2} \right) (v - b) = rT$$

(I-5)

avec : $\frac{a'}{T} = a$ ou $a' = aT$

I-3-4 – Autres équations des gaz réels : (par ordre de complexité)

- **I-3-4-1-Equation de CLAUSIUS (1880) :**

S'exprime par :

$$\boxed{(v-b) \left[p + \frac{a}{T(v+c)^2} \right] = rT} \quad (1-6)$$

$$\text{Avec } \begin{cases} a = \frac{27r^2T_c^3}{64P_c} \\ b = \frac{3rT_c}{8P_c} - v_c \\ c = v_c - \frac{rT_c}{4P_c} \end{cases}$$

P_c , T_c , V_c respectivement pression critique, température critique, volume critique

Cette équation constitue une amélioration de l'équation de VAN DER WAALS. Elle donne une approximation assez bonne dans le domaine correspondant à :

$$\begin{aligned} V &> 1 V_c \\ P &< 4 P_c \\ T &< 2 T_c \end{aligned}$$

Mauvaise approximation dans le domaine de gaz à pression et température élevée et dans le domaine des liquides

- **I-3-4-2-Equation de REDLICH – KWONG (1949)**

$$\boxed{(v-b) \left(p + \frac{a}{T^{0.5}v(v+b)} \right) = rT} \quad (1-7)$$

$$\text{avec } \begin{cases} a = \frac{0.42748r^2T_c^{2.5}}{P_c} \\ b = 0.08664 \frac{rT_c}{P_c} \end{cases}$$

Basée pour des considérations théoriques et pratiques, fourni une bonne approximation pour les température $T > T_c$.

Dans les domaines des liquides et du gaz a masse volumique élevée, les résultats quoi que moins bon, soient satisfaisant.

• **1-3-4-3-Equation de BEATTIE – BRIDGEMAN (1928)**

Elle s'exprime par :

$$P = \frac{rT}{v^2} \left(1 - \frac{c}{vT^3} \right) \left(v - B_0 \left(1 - \frac{b}{v} \right) \right) - \frac{A_0}{v^2} \left(1 - \frac{a}{v} \right) \tag{1-8}$$

Les constantes a,b,c,A₀ et B₀ sont déterminés empiriquement a partir des données expérimentales P, V, T.

En générale, elle peut être appliquée pour $V > 2V_c, T > 1.5T_c$, elle est meilleure que les équations de VAN DER WAALS et CLAUSIUS.

Inapplicable dans la région située au voisinage du point critique.

• **1-3-4-4-Equation de BENIDICT – WEBB- RUBIN (1951)**

Equation entièrement empirique qui s'exprime par :

$$P = \frac{rT}{v} + \left(B_0 rT - A_0 - \frac{C_0}{T^2} \right) \frac{1}{v^2} + (brT - a) \frac{1}{v^3} + \frac{a\alpha}{v^6} + c \frac{\left(1 + \frac{\gamma}{v^2} \right)}{T^2} \frac{1}{v^3} e^{-\frac{\gamma}{v^2}} \tag{1-9}$$

Les huit constantes a,b,c,Λ₀, B₀, C₀, α et γ sont déterminées empiriquement a partir des données expérimentales (P, V, T), destinées a être utilisées pour les hydrocarbures.

Valable pour les volumes massiques $V > 0.56 V_c$

1-4- Coordonnées du point critique – équation réduite :

• **1-4-1 – Equation de VAN DER WAALS :**

- { C : point d'inflexion
- { P_c : pression critique
- { T_c : température critique
- { V_c : volume critique

L'équation de VAN DER WAALS :

$$\left(P + \frac{a}{v^2} \right) (v - b) = rT \quad \text{peut s'écrire :}$$

$$v^3 - \left(\frac{rT}{P} + b \right) v^2 + \frac{a}{P} v - \frac{ab}{P} = 0$$

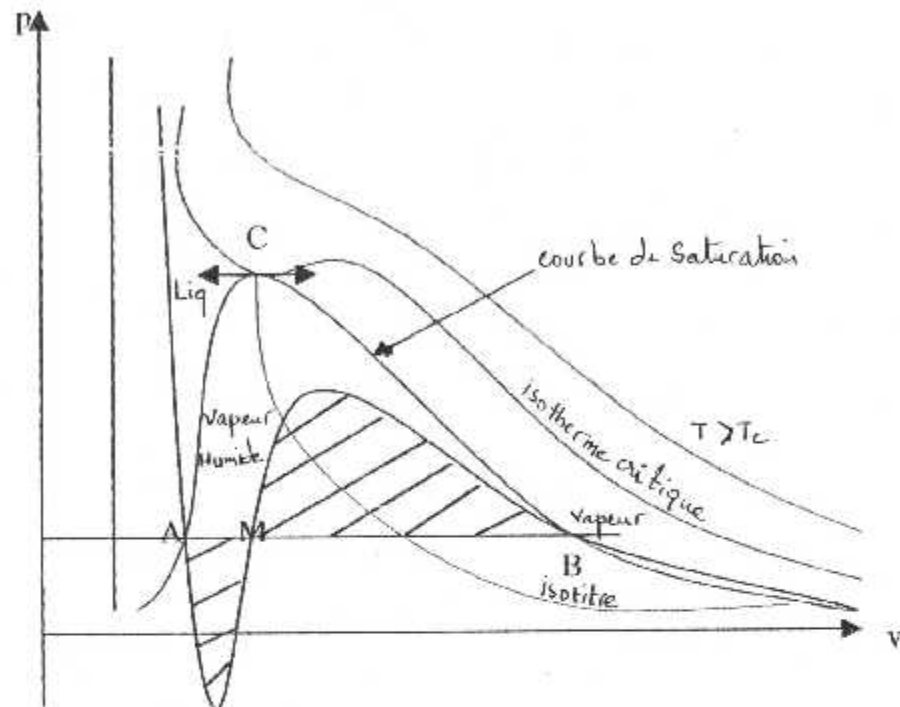


Fig (I-1) : L'évolution de la fonction $p=f(v)$ des gaz réels (voir cours Gaz réel M^r HANNY)

Cette équation indique que pour une même valeur de pression et une température donnée on obtient trois valeurs de V : (Trois points A, M, B) aux températures élevées deux des trois racines deviennent imaginaire, aux températures plus basses seules les racines extrêmes (point A et B) du diagramme ont un sens physique et déterminent la courbe de saturation.

A mesure de l'accroissement de la température, les trois racines se confondent finissant un point d'inflexion sur l'isotherme correspondante ou la tangente et parallèle à l'axe des abscisses.

Ce point est caractérisé par une pression critique P_c , une température critique T_c et un volume critique V_c .

Cette équation s'applique en principe à l'état gazeux comme à l'état liquide. Elle est du troisième degré en V . il est à remarquer que les seuls points ayant un sens physique seront tel que :

$$\begin{aligned} P &\geq 0 \\ V &\geq 0 \end{aligned}$$

Calculons les coordonnées du point critique C (P_c, V_c, T_c) en fonction de (a, b et r)

- l'équation caractéristique

$$p = \frac{rT}{v-b} - \frac{a}{v^2}$$

- tangente horizontale en

$$c \rightarrow \left(\frac{\partial p}{\partial v} \right)_{T_c} = 0$$

- point d'inflexion en

$$c \rightarrow \left(\frac{\partial^2 p}{\partial v^2} \right)_{T_c} = 0$$

$$\left. \begin{aligned}
 \text{d'où } \left(\frac{\partial p}{\partial v} \right)_{T_c} = -\frac{r}{(v-b)^2} T_c + \frac{2a}{v^3} = 0 \\
 \left(\frac{\partial^2 p}{\partial v^2} \right)_{T_c} = \frac{2rT_c}{(v-b)^3} - \frac{6a}{v^4} = 0
 \end{aligned} \right\} \text{ en c on a : }
 \begin{aligned}
 p_c &= \frac{rT_c}{v_c-b} - \frac{a}{v_c^2} \\
 \frac{rT_c}{(v_c-b)^2} &= \frac{2a}{v_c^3} \\
 \frac{rT_c}{(v_c-b)^3} &= \frac{3a}{v_c^4}
 \end{aligned}$$

divisons (1-2) par (1-3) on obtient :

$$v_c - b = \frac{2v_c}{3} \rightarrow v_c = 3b$$

$$(1-3) \rightarrow \frac{rT_c}{8b^3} = \frac{3a}{81b^4} \rightarrow \frac{rT_c}{8b^3} = \frac{a}{27b^4} \rightarrow T_c = \frac{8}{27} \frac{a}{rb}$$

$$(1-1) \rightarrow p_c = \frac{8a}{27rb} - \frac{r}{2b} - \frac{a}{9b^2} \rightarrow p_c = \frac{a}{27b^2}$$

en c, on a

$v_c = 3b$	→	$b = \frac{v_c}{3}$
$T_c = \frac{8}{27} \frac{a}{rb}$	→	$r = \frac{8}{3} \frac{p_c v_c}{T_c}$
$p_c = \frac{a}{27b^2}$	→	$a = 3p_c v_c$

(1-10)

-les caractéristiques critique de l'air sont :

$$T_c = 132.6^\circ \text{ K}, \quad P_c = 377.105 \text{ Pa} \quad V_c = 0.0029 \text{ mm}^3/\text{Hg}$$

Corps	Masse molaire (mm ³ /Hg)	Température critique(°k)	Pression critique (pa)
Air	28.97	133	37.4
CO2	44.01	304.3	73
CO	28.01	133	34.5
H2	4.002	5.3	2.26
N2	28.02	128.1	33.5
O2	32.00	154.4	49.7
H2O	18.016	647.3	218.5
CH4	16.04	190.7	40.80
C2H6	30.06	305.4	48.7
C3H8	58.12	369	43.3
C4H10	58.12	407	38.25

Équation réduite de VAN DER WAALS :

Remplaçant dans l'équation de VAN DER WAALS les coefficients a ,b et r En fonction des coordonnées critique P_c V_c T_c nous obtenons :

$$\left(p + \frac{3p_c v_c^2}{v^2} \right) \left(\frac{v - v_c}{3} \right) = \frac{8}{3} p_c v_c \frac{T}{T_c}$$

Divisons les deux membres par P_c, V_c :

$$\left(\frac{P}{p_c} + \frac{3v_c^2}{v^2} \right) \left(\frac{v}{v_c} - \frac{1}{3} \right) = \frac{8T}{3v_c} \frac{T_c}{T_c}$$

$$\frac{P}{p_c} = \omega : \text{ pression réduite}$$

$$\frac{v}{v_c} = \rho : \text{ volume réduit}$$

$$\frac{T}{T_c} = \theta : \text{ température réduite}$$

L'équation réduite de VAN DER WAALS devient :

$$\boxed{\left(\omega + \frac{3}{\rho^2} \right) \left(\rho - \frac{1}{3} \right) = \frac{8\theta}{3}} \quad (I-11)$$

• **1-4-2 – Equation de BERTHELOT**

On peut calculé a' , b et r en fonction (P_c, V_c, T_c)

$$\boxed{b = \frac{V_c}{3} \quad a' = a'c = 3P_c V_c^2 T_c \quad r = \frac{8 P_c V_c}{3 T_c}} \quad (I-12)$$

En remplaçant de l'équation de BERTHELOT :

$$\left(P + \frac{a'}{V^2} \right) (V - b) = rT \quad \text{on obtient :}$$

$$\left(P + \frac{3P_c V_c T_c}{V^2} \right) \left(V - \frac{V_c}{3} \right) = \frac{8}{3} P_c V_c \frac{T}{T_c}$$

Divisons par P_c, V_c , ça donne :

$$\left[\frac{P}{P_c} + \frac{3V_c^2 T_c}{V^2 T} \right] \left(\frac{V}{V_c} - \frac{1}{3} \right) = \frac{8 T}{3 T_c} \quad \text{ou}$$

$$\boxed{\left(\omega + 3 \frac{1}{\rho^2 \theta} \right) \left(\rho - \frac{1}{3} \right) = \frac{8 \theta}{3}} \quad \text{Equation réduite de BERTHELOT} \quad (I-13)$$

Ce pendant, a la suite d'expérience, BERTHELOT a trouvé une meilleure représentation des résultats expérimentaux pour les gaz réels en dehors du point critique, par l'équation modifiée suivante :

$$\boxed{\left(\omega + \frac{16}{3} \frac{1}{\rho^2 \theta} \right) \left(\rho - \frac{1}{4} \right) = \frac{32}{9} \theta} \quad \text{Equation réduite modifiée de BERTHELOT} \quad (I-14)$$

Avec cette équation, les constantes a' , b et r auront pour valeurs dans l'équation de BERTHELOT

$$\boxed{a' = \frac{16}{3} P_c V_c T_c \quad b = \frac{V_c}{4} \quad r = \frac{32}{9} P_c \frac{V_c}{T_c}} \quad (I-15)$$

Il est rappeler que l'équation réduite modifié de BERTHELOT à l'encontre de celle de VAN DER WAALS, n'est pas applicable au point critique et en sont voisinages. Par ailleurs, l'équation réduite de BERTHELOT est la plus précise que celle de VAN DER WAALS. elle servira en particulier pour les calculs des corrections à apportées au grandeur thermodynamiques des gaz parfait.

I-5-Calcul des grandeurs thermodynamiques :

• **I-5-1 – Expression mathématique des principes :**

la différentielle de l'énergie interne d'un système s'écrit donc sous la forme
la différentielle de l'entropie s'écrit sous la forme

$$\left\{ \begin{aligned} du &= \delta\omega + \delta q = \sum A_i dx_i = A_1 dx_1 + A_2 dx_2 + \dots & (I-16) \\ du &= \frac{\partial u}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial u}{\partial x_2} dx_2 + \dots & (I-17) \end{aligned} \right.$$

(I-16) et (I-17) donnent $A_1 = \frac{\partial u}{\partial x_1}$ $A_2 = \frac{\partial u}{\partial x_2}$

de la $\left\{ \begin{aligned} \frac{\partial A_1}{\partial x_2} &= \frac{\partial^2 u}{\partial x_1 \partial x_2} \\ \frac{\partial A_2}{\partial x_1} &= \frac{\partial^2 u}{\partial x_2 \partial x_1} \end{aligned} \right. \longrightarrow \boxed{\frac{\partial A_1}{\partial x_2} = \frac{\partial A_2}{\partial x_1}}$ (I-18)

la différentielle de l'entropie s'écrit sous la forme

$$ds = \frac{\delta q}{T} = B_1 dx_1 + B_2 dx_2 + \dots \quad (I-19)$$

$$ds = \frac{\partial s}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial s}{\partial x_2} dx_2 + \dots \quad (I-20)$$

(I-19) et (I-20) $\longrightarrow B_1 = \frac{\partial s}{\partial x_1}$ $B_2 = \frac{\partial s}{\partial x_2}$

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial B_1}{\partial x_2} &= \frac{\partial^2 s}{\partial x_1 \partial x_2} \\ \frac{\partial B_2}{\partial x_1} &= \frac{\partial^2 s}{\partial x_2 \partial x_1} \end{aligned} \right\} \longrightarrow \boxed{\frac{\partial B_1}{\partial x_2} = \frac{\partial B_2}{\partial x_1}} \quad (I-21)$$

I-5-2 – Application physique

$$\begin{cases}
 \delta\omega = -p dv \\
 \delta q = cv dT + l dv \\
 du = \delta\omega + \delta q \\
 du = cv dT + (1-p) dv
 \end{cases}
 \rightarrow cv = \left(\frac{\partial u}{\partial T}\right)_v, \quad \left(\frac{\partial p}{\partial v}\right)_T = -\frac{r}{(v-b)^2}$$

$$\rightarrow \left(\frac{\partial cv}{\partial v}\right)_T = \left(\frac{\partial(1-p)}{\partial T}\right)_v$$

$$\text{ou } \left(\frac{\partial cv}{\partial v}\right)_T = \left(\frac{\partial l}{\partial T}\right)_v - \left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_v$$

(1-22)

$$\begin{cases}
 ds = \frac{\delta q}{T} = \frac{cv}{T} dT + \frac{l}{T} dv \\
 ds = \left(\frac{\partial s}{\partial T}\right)_v dT + \left(\frac{\partial s}{\partial v}\right)_T dv
 \end{cases}
 \rightarrow \frac{cv}{T} = \left(\frac{\partial u}{\partial T}\right)_v, \quad \frac{l}{T} = \left(\frac{\partial u}{\partial v}\right)_T$$

$$\rightarrow \left(\frac{\partial \left(\frac{cv}{T}\right)}{\partial v}\right)_T = \left(\frac{\partial \left(\frac{l}{T}\right)}{\partial T}\right)_v \rightarrow \frac{1}{T} \left(\frac{\partial cv}{\partial v}\right)_T = \left(\frac{\partial l}{\partial T}\right)_v \frac{T-1}{T^2} - \left(\frac{\partial l}{\partial T}\right)_T \frac{1}{T^2}$$

En simplifiant par T, on obtient :

$$\left(\frac{\partial cv}{\partial v}\right)_T = \left(\frac{\partial l}{\partial T}\right)_v - \frac{l}{T}$$

(1-23)

En comparant (1-22) et (1-23), on obtient :

$$\left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_T = \frac{l}{T}$$

$$\text{ou } l = T \left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_T$$

(1-24)

$h = T \left(\frac{\partial v}{\partial p}\right)_T$ ce qui donne :

$$h = T \left(\frac{\partial p}{\partial T} \right)_v \left(\frac{\partial v}{\partial p} \right)_T$$

$$\text{or } \left(\frac{\partial p}{\partial T} \right)_v \left(\frac{\partial v}{\partial p} \right)_T = \left(\frac{-1}{\left(\frac{\partial T}{\partial v} \right)_p} \right) = \left(\frac{\partial v}{\partial T} \right)_p$$

$$\text{Ce qui donne : } h = -T \left(\frac{\partial v}{\partial T} \right)_p \quad (1-25)$$

I-5-3 – Calcul de l'énergie interne massique :

- I-5-3-1 - Gaz de VAN DER WAALS :

$$\left\{ \begin{array}{l} du = c_v dT + (T - P) dv \\ T = T \left(\frac{\partial p}{\partial T} \right)_v \end{array} \right. \longrightarrow du = c_v dT + \left(T \left(\frac{\partial p}{\partial T} \right)_v - p \right) dv \quad (1-26)$$

Or d'après van der waals $\left(\frac{\partial p}{\partial T} \right)_v = \frac{r}{v - b}$

d'où

$$du = c_v dT + \left(\frac{rT}{v - b} - p \right) dv = c_v dT + a \frac{dv}{v^2}$$

$$du = c_v dT + a \frac{dv}{v^2}$$

en supposant $c_v \approx cte$

$$u = c_v T - \frac{a}{v} + cte$$

(1-27)

Energie interne pour un gaz de van der waals .

- I-5-3-2 – Gaz de BERTHELOT

$$\text{Equation de BERTHELOT : } \left(p + \frac{a'}{Tv^2} \right) (v - b) = rT$$

$$\longrightarrow p = \frac{rT}{v - b} - \frac{a'}{Tv^2}$$

De la relation de CLAPYRON $l = T \left(\frac{\partial p}{\partial T} \right)_v$ donne :

$$l = T \left(\frac{\frac{r}{v-b} + \frac{a'}{T^2 v^2}}{v-b} \right) = \frac{rT}{v-b} + \frac{a'}{Tv^2} \quad (I-28)$$

$$du = cvdT + (l-p)dv$$

remplaçons (I-27) dans (I-28), on obtient :

$$du = cvdT + \left(\frac{rT}{v-b} - p + \frac{a}{Tv^2} \right) dv$$

$$du = cvdT + \frac{2a'}{Tv^2} dv$$

$$u = \int cvdT + \int \frac{2a'}{Tv^2} + cte \quad \text{si } cv \approx cte \text{ on obtient :}$$

$$U = CvT - \frac{2a}{Tv} + cte \quad (I-29)$$

• **I-5-4 – Calculs de l'entropie massique :**

$$\delta Q = c_v dT + l dv = c_v dT + T \left(\frac{\partial p}{\partial T} \right)_v dv$$

pour tous fluide homogène

$$ds = \frac{\delta q}{T} = c_v \frac{dT}{T} + \left(\frac{\partial p}{\partial T} \right)_v dv \quad (I-30)$$

cas de VAN DER WAALS :

$$\left(p + \frac{a}{v^2} \right) (v-b) = rT \rightarrow p = \frac{rT}{v-b} - \frac{a}{v^2}$$

$$\left(\frac{\partial p}{\partial T} \right)_v dv = \frac{r}{v-b} dv$$

D'où (I-21) donne : $ds = c_v \frac{dT}{T} + \frac{r}{v-b} dv$

Si $c_v \approx cte$

$$s = cv \ln T + r \ln(v-b) + cte \quad (I-31)$$

Evolution isentropique $\rightarrow S = cte \rightarrow c_v \ln T + r \ln (v - b) = cte$ ou

$\ln T^{c_v} + \ln (v - b)^r = \ln T^{c_v} (v - b)^r = cte \rightarrow T^{c_v} (v - b)^r = cte$ ou

$$\boxed{T(v-b)^{\frac{r}{c_v}} = cte} \quad (I-32)$$

Ainsi, toutes évolutions isentropiques satisferont pour un gaz de VAN DER WAALS la relation (I-23)

↳

$$dH = c_p dT + (h + v) dp$$

$$dH = \left(\frac{\partial H}{\partial T}\right)_p dT + \left(\frac{\partial H}{\partial p}\right)_T dp \quad \text{et} \quad \left(\frac{\partial H}{\partial p}\right)_T = h + v$$

$$\text{or } h = -T \left(\frac{\partial v}{\partial T}\right)_p \rightarrow \left(\frac{\partial H}{\partial p}\right)_T = v - T \left(\frac{\partial v}{\partial T}\right)_p$$

L'équation de VAN DER WAALS s'écrit :

$$\left(p + \frac{a}{v^2}\right)(v - b) = rT \rightarrow v - b = \frac{rT}{p + \frac{a}{v^2}}$$

$$\text{ou } v = \frac{rT}{p + \frac{a}{v^2}} + b = \frac{rT}{p \left(1 + \frac{a}{pv^2}\right)} + b = \frac{rT}{p} \frac{1}{\left(1 + \frac{a}{pv^2}\right)} + b$$

or d'après la relation approchée : $\frac{1}{1+\varepsilon} = 1 - \varepsilon$ si ε petit

$$\rightarrow v = \frac{rT}{p} \left(1 - \frac{a}{pv^2}\right) + b$$

$$\text{or } \frac{a}{pv^2} = \frac{ap}{p^2v^2} \quad \text{et} \quad p^2v^2 \approx r^2T^2 \rightarrow v = \frac{rT}{p} \left(1 - \frac{ap}{r^2T^2}\right) + b = \frac{rT}{p} + b$$

$$\boxed{v = \frac{rT}{p} - \frac{a}{rT} + b} \quad (I-33)$$

$$\rightarrow \left(\frac{\partial v}{\partial T} \right)_p = \frac{r}{p} + \frac{a}{rT^2} \quad (I-34)$$

$$\rightarrow \left(\frac{\partial H}{\partial p} \right)_T = \frac{rT}{p} - \frac{a}{rT} + b - \frac{rT}{p} - \frac{aT}{rT^2}$$

$$\rightarrow \left(\frac{\partial H}{\partial p} \right)_T = b - \frac{2a}{rT}$$

$$\rightarrow dH = cpdT + \left(b - \frac{2a}{rT} \right) dp$$

$$\Delta H = \int_{T_0}^T cpdT + \int_{p_0}^p \left(b - \frac{2a}{rT} \right) dp$$

$$\text{ou } H = cpT + \left(b - \frac{2a}{rT} \right) p + \text{cte} \quad (I-35)$$

I-6-Equation de Viriel et facteur de compressibilité :

I-6-1 Equation de viriel :

L'équation d'état relative à une mole de gaz réel peut être représentée par un développement du produit $\frac{pv}{rT}$

- en fonction du volume V du gaz :

$$\frac{pv}{rT} = 1 + \frac{a}{v} + \frac{b}{v^2} + \frac{c}{v^3} + \dots \quad (I-36)$$

- en fonction de la pression P de gaz :

$$\frac{pv}{rT} = 1 + a'p + b'p^2 + c'p^3 + \dots \quad (I-37)$$

Ces deux équations $pv = f(1/v)$ et $pv = f(p)$ portent le nom d'équation de VIRIEL, généralement on se limitera aux trois premières termes du développement, il est à noter que les coefficients a, a', b, b', c et c' Sont en fonction de la température seulement.

I-6-1-1-EQUATION DE VAN DER WAALS:

$$\frac{pv}{rT} = f\left(\frac{1}{v}\right)$$

L'équation de VAN DER WAALS s'écrit :

$$\left(p + \frac{a}{v^2}\right)(v-b) = RT \longrightarrow \boxed{p = \frac{RT}{v-b} - \frac{a}{v^2} \dots} \quad (1-38)$$

Le développement de l'équation de VAN DER WAALS donne :

$$\boxed{pv = \frac{RT}{v} - \frac{a}{v} + pb + \frac{ab}{v^2} \dots} \quad (1-39)$$

Remplaçant (1-38) dans (1-39)

$$pv = RT - \frac{a}{v} + \left(\frac{RTb}{v-b} - \frac{ab}{v^2}\right) + \frac{ab}{v^2}$$

$$pv = RT - \frac{a}{v} + \frac{RTb}{v-b} \quad \text{ou}$$

$$pv = RT \left(1 + \frac{b}{v-b} - \frac{a}{RTv}\right)$$

$$\frac{b}{v-b} = \frac{b}{v} \frac{1}{1 - \frac{b}{v}} \quad \text{Or d'après la relation approchée : } 1 - \frac{1-\varepsilon}{1+\varepsilon} \quad \text{petit}$$

$$\longrightarrow \boxed{\frac{b}{v-b} \approx \frac{b}{v} \left(1 + \frac{b}{v}\right) = \frac{b}{v} + \frac{b^2}{v^2} \dots} \quad (1-40)$$

remplaçant (1-40) dans (1-39)

$$pv = RT \left(1 + \frac{b}{v} + \frac{b^2}{v^2} - \frac{a}{RTv}\right) = RT \left(1 + \left(b - \frac{a}{RT}\right) \frac{1}{v} + \frac{b^2}{v^2}\right)$$

$$\text{ou } \boxed{\frac{pv}{RT} = 1 + \left(b - \frac{a}{RT}\right) \frac{1}{v} + b^2 \frac{1}{v^2}} \quad (1-41)$$

Les coefficients de VIRIEL sont donc :

$$* \frac{pv}{RT} = f(p)$$

$$\text{VAN DER WAALS} \longrightarrow \left(p + \frac{a}{v}\right)(v-b) = RT \longrightarrow v-b = \frac{RT}{p + \frac{a}{v^2}} \longrightarrow v = RT = \frac{b}{p + \frac{a}{v^2}}$$

$$v = \frac{RT}{p \left(1 + \frac{a}{pv^2}\right)} + b = \frac{RT}{p} \frac{1}{1 + \frac{a}{pv^2}} + b = \frac{RT}{p \left(1 - \frac{a}{pv^2}\right)} + b$$

$$v = \frac{RT}{p} \left(1 - \frac{a}{pv^2} + \frac{bp}{RT}\right) \quad \text{or} \quad \frac{a}{pv^2} = \frac{ap}{p^2v^2} \quad \text{et en première approximation} \quad p^2v^2 = RT^2$$

$$v = \frac{RT}{p} \left(1 - \frac{ap}{RT^2} + \frac{bp}{RT}\right) \rightarrow \frac{1}{v} = \frac{p}{RT} \left(\frac{1}{1 - \frac{ap}{RT^2} + \frac{bp}{RT}} \right) = \frac{p}{RT} \left(1 + \frac{ap}{RT^2} - \frac{bp}{RT}\right)$$

$$\text{soit } \boxed{\frac{1}{v} = \frac{p}{RT} \left(1 + \frac{ap}{RT^2} - \frac{bp}{RT}\right)}$$

(1-42)

En remplaçant (1-42) dans (1-39), on obtient :

$$pv = RT - \frac{ap}{RT} \left(1 + \frac{ap}{RT^2} - \frac{bp}{RT}\right) + pb + \frac{abp^2}{RT^2} \left(1 + \frac{ap}{RT^2} - \frac{bp}{RT}\right)$$

En se limitant au terme de second degré en P, on obtient :

$$pv = RT - \frac{ap}{RT} - \frac{a^2p^2}{RT^3} + \frac{abp^2}{RT^2} + bp + \frac{ab}{RT^2}p^2$$

$$pv = RT + \left(b - \frac{a}{RT}\right)p + \frac{2ab}{RT^2}p^2 - \frac{a^2}{RT^3}p^2$$

$$pv = RT + \left(b - \frac{a}{RT}\right)p + \frac{2a}{RT^2} \left(b - \frac{a}{2RT}\right)p^2$$

$$pv = RT \left(1 + \frac{1}{RT} \left(b - \frac{a}{RT}\right)p + \frac{2a}{RT^3} \left(b - \frac{a}{2RT}\right)p^2\right)$$

$$\text{ou } \frac{pv}{RT} = 1 + \frac{\left(b - \frac{a}{RT}\right)}{RT}p + \frac{2a}{RT^3} \left(b - \frac{a}{2RT}\right)p^2$$

Les coefficients de VIRIEEL sont donc :

$$A' = \frac{1}{RT} \left(b - \frac{a}{RT}\right) \quad \text{et} \quad B' = \frac{2a}{RT^3} \left(b - \frac{a}{2RT}\right)$$

I-6-1-2-Equation de BERTHELOT :

A partir de l'équation : $\left(p + \frac{a'}{v^2}\right)(v-b) = rt$

Et en faisant le même raisonnement que pour le cas de l'équation de VAN DER WAALS, on obtient :

$$\begin{aligned} * \frac{pv}{RT} &= 1 + \left(b - \frac{a'}{RT^2}\right) \frac{1}{v} + \frac{b^2}{v^2} \\ * \frac{pv}{RT} &= 1 + \frac{b - \frac{a'}{RT^2}}{RT} p + \frac{2a'}{R^2 T^4} \left(b - \frac{a'}{2RT^2}\right) p^2 \end{aligned} \quad (I-43)$$

Les coefficients de VIRIEL sont donc :

$$A' = b - \frac{a'}{RT^2}, \quad B = b^2, \quad A'' = \frac{1}{RT} \left(b - \frac{a'}{RT^2}\right) \quad \text{et} \quad B'' = \frac{2a'}{R^2 T^4} \left(b - \frac{a'}{2RT^2}\right)$$

I-6-2- Facteur de compressibilité :

L'équation d'état des gaz réels peut également être utilisée sous la forme très générale

$$P V = Z r T$$

Z : est appelé coefficient ou facteur de compressibilité

$$\text{soit } p_c v_c \left(\frac{p}{p_c}\right) \left(\frac{v}{v_c}\right) = Z r T \left(\frac{T}{T_c}\right) \rightarrow$$

$$\frac{p_c v_c}{RT_c} = Z_c \frac{\theta}{\omega \rho} = Z_c \rightarrow Z = Z_c \frac{\omega \rho}{\theta} \quad (I-44)$$

D'après la loi des états correspondants, la valeur de Z_c devrait être la même pour tout le gaz.

En réalité, cette propriété n'est pas rigoureusement vérifiée, né amont, dans la plupart des applications pratiques, l'équation donne une approximation suffisante.

Chapitre:II

Formulation Mathématique

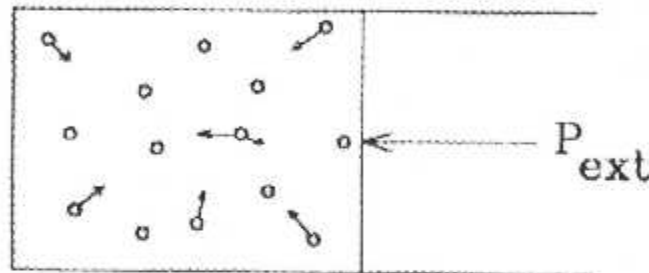
D'après l'étude du premier chapitre : une généralité des gaz réels , on a remarqué que ce gaz est défini par plusieurs équations différentes chaque une est basée sur un théorème différent des autres , en comparant entre ces différents théorèmes on remarque que l'équation de VAN DER WAALS est la plus proche à la réalité de déroulement des faits , pour cela on a choisi cette équation pour notre étude malgré qu'elle est plus difficile d'après le graphe chapitre :I,(FIG -I :l'évolution de la fonction $p=f(v)$ des gaz réels), car il existe des différents points critiques

Le but de ce chapitre est d'avoir une idée Mathématique sur les équations qui gèrent cette approche.

II.1 ÉQUATION D'ÉTAT DE VAN DER WAALS:

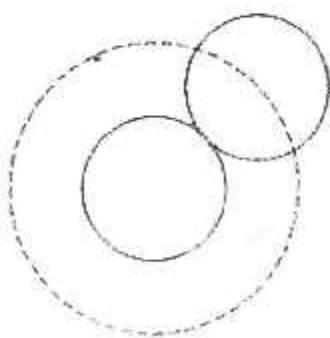
L'équation de Van der Waals introduit deux corrections dans la loi des gaz parfaits:

1. les molécules ont un volume non nul et incompressible (volume exclu).
2. il existe des forces d'attraction entre les molécules.



II-1.1 EFFET DU VOLUME EXCLU :

N molécules, placées dans un récipient de volume V peuvent se déplacer dans le volume total V seulement si le volume occupé par les molécules elles-mêmes est nul. En fait, les molécules occupent un volume non-nul et il existe dans le récipient un certain volume exclu, non-disponible. Soient deux molécules supposées sphériques et de diamètre d . Le volume exclu pour cette paire de molécules, c'est-à-dire le volume inaccessible à chacun des deux centres de gravité est une sphère de rayon d :



$$\text{volume exclu par paire} = \frac{4}{3} \pi d^3$$

$$\text{volume exclu par molécule} = \frac{1}{2} \left(\frac{4}{3} \pi d^3 \right)$$

$$\text{volume exclu par mole} = b = 4 N_A \left(\frac{4}{3} \pi \left(\frac{d}{2} \right)^3 \right)$$

On remarque que le volume exclu représente 4 fois le volume occupé par les molécules. Le volume réellement disponible dans un récipient de volume V contenant n moles de gaz est:

$$V_{\text{disponible}} = V_{\text{récipient}} - n b$$

L'équation d'état, basée sur l'équation des gaz parfaits corrigée pour la taille des molécules, s'écrit donc:

$$\left(P + \frac{a n^2}{V^2} \right) (V - n b) = n R T$$

$$\left(P + \frac{a}{\bar{V}^2} \right) (\bar{V} - b) = R T$$

si \bar{V} est le volume total exprimé par mole de gaz.

Prédictions concernant la taille des molécules:

On peut calculer pour chaque gaz les paramètres a et b de l'équation de Van der Waals qui reproduisent le mieux les observations expérimentales de P et V en fonction de T . Quelques valeurs sont données dans les première et deuxième colonnes du tableau suivant:

GAZ	a (atm.L ² .mol ⁻²)	b (L.mol ⁻¹)	d (Å) calculé
N ₂	1.39	0.0391	3.14
O ₂	1.36	0.0318	2.93
CO ₂	3.59	0.0427	3.23
H ₂	0.244	0.0266	2.76

II-2 Application pour l'équation d'Etat de Van der walls :**II-2-1- Equation d'Energie:**

$$dH + dv = 0$$

(II-1)

D'autre parte on a : $dH = c_p \cdot dT + (H+u) dp$ V: vitesse
u: volume

$$dh = \left(\frac{\partial h}{\partial T}\right)_p dT + \left(\frac{\partial h}{\partial p}\right)_T dp$$

(II-2)

Avec : $\left(\frac{\partial h}{\partial p}\right)_T = h + v$

Avec : $h = -T \left(\frac{\partial v}{\partial T}\right)_p$

alors $\left(\frac{\partial h}{\partial p}\right)_T = v - T \left(\frac{\partial v}{\partial T}\right)_p$

On a $\left(\frac{\partial v}{\partial T}\right)_p = \frac{Rv^3(v-b)}{RTv^3 - 2a(v-b)^2}$

pour un gaz de van der walls

(II-3)

D'où : $\left(\frac{\partial h}{\partial p}\right)_T = v - \frac{TRv^3(v-b)}{RTv^3 - 2a(v-b)^2}$

(II-4)

Posons : $c = \left(\frac{\partial h}{\partial p}\right)_T$

(II-5)

alors :

$$c = v - \frac{TRv^3(v-b)}{RTv^3 - 2a(v-b)^2}$$

(II-6)

Connaissons : $v = \frac{1}{\rho}$

(II-7)

Remplaçons (II-7) dans (II-6), on obtient :

$$c = \frac{1}{\rho} \frac{TR \frac{1}{\rho^3} \left(\frac{1-b}{\rho} \right)}{RT \frac{1}{\rho^3} - 2a \left(\frac{1}{\rho} \right) b^2} \quad (\text{II-8})$$

on simplifie (II-8) on obtient :

$$\begin{aligned} c &= \frac{1}{\rho} \frac{TR(1-b\rho)}{\frac{RT}{\rho^3} - \frac{2a\rho(1-b\rho)^2}{\rho^3}} \\ &= \frac{1}{\rho} \frac{RT(1-b\rho)}{\rho^3} \frac{\rho^3}{RT - 2a\rho(1-b\rho)^2} \\ &= \frac{1}{\rho} \frac{RT(-b\rho)}{\rho [RT - 2a\rho(1-b\rho)^2]} \\ c &= \frac{1}{\rho} \left\{ 1 - \frac{RT(1-b\rho)}{RT - 2a\rho(1-b\rho)^2} \right\} \quad (\text{II-9}) \end{aligned}$$

Détermination de c_p :

$$c_p = \left(\frac{\partial h}{\partial T} \right)_p \quad (\text{II-10})$$

$$\text{on a : } \frac{c_p}{c_v} = \gamma \longrightarrow c_v = \frac{c_p}{\gamma} \quad (\text{II-11})$$

Pour Van der Waals :

$$c_p - c_v = \frac{R}{1 - \frac{2a(v-b)}{\left(p + \frac{a}{v^2}\right)v^3}} \quad (\text{II-12})$$

$$c_p - c_v = c_p - \frac{c_p}{\gamma} = c_p \left(1 - \frac{1}{\gamma} \right) = c_p \left(\frac{\gamma - 1}{\gamma} \right) \quad (\text{II-13})$$

alors:

$$cp = \frac{\left(\frac{\gamma}{\gamma-1}\right)R}{1 - \frac{2a(v-b)}{\left(p + \frac{a}{v^2}\right)v^3}} \quad (\text{II-14})$$

Remplaçons (II-7) dans (II-14), on obtient :

$$cp = \frac{\left(\frac{\gamma}{\gamma-1}\right)R}{1 - \frac{2a\left(\frac{1-b}{\rho}\right)}{\left(p + a\rho^2\right)\frac{1}{\rho^3}}} \quad (\text{II-15})$$

L'équation d'Etat de Van der Waals s'écrit :

$$\left(p + \frac{a}{v^2}\right)(v-b) = RT$$

alors : $\left(p + a\rho^2\right)\left(\frac{1-b}{\rho}\right) = RT$

$$\left(p + a\rho^2\right)(1-b\rho) = \rho RT$$

$$p + a\rho^2 = \frac{\rho RT}{1-b\rho} \quad (\text{II-16})$$

Remplaçons (II-16) dans (II-15) on aura:

$$cp = \frac{\left(\frac{\gamma}{\gamma-1}\right)R}{1 - \frac{2a\left(\frac{1-b}{\rho}\right)}{\left(\frac{\rho RT}{1-b\rho}\right)\frac{1}{\rho^3}}} \quad (\text{II-17})$$

$$= \frac{\left(\frac{\gamma}{\gamma-1}\right)R}{1 - \frac{2a(1-b\rho)^2 \frac{1}{\rho^2} \rho^3}{RT}}$$

$$= \frac{\left(\frac{\gamma}{\gamma-1}\right)R}{1 - \frac{2a(1-b\rho)^2 \frac{1}{\rho^2} \rho^3}{RT}}$$

$$= \frac{\left(\frac{\gamma}{\gamma-1}\right)R}{1 - \frac{2a(1-b\rho)^2}{RT}}$$

$$= \left(\frac{\gamma}{\gamma-1}\right)R \frac{RT}{RT - 2a(1-b\rho)^2 \rho}$$

alors:

$$\boxed{cp(T, \rho) = \left(\frac{\gamma R}{\gamma-1}\right) \frac{RT}{RT - 2a(1-b\rho)^2 \rho}} \quad (\text{II-18})$$

Rappelons :

$$c(T, \rho) = \frac{1}{\rho} \left\{ 1 - \frac{RT(1-b\rho)}{RT - 2a\rho(1-b\rho)^2} \right\} \quad (\text{II-19})$$

alors, la relation (II-2) s'écrit :

$$\boxed{dh = cp dT + c dp} \quad (\text{II-20})$$

On va déterminer la différentielle dp en fonction de ds lorsque la température T sera Constante :

l'équation (II-16) donne :

$$\boxed{p = \frac{\rho RT}{1-b\rho} - a\rho^2} \quad (\text{II-21})$$

$$\text{alors : } dp = d \left\{ \frac{\rho RT}{1-b\rho} - a\rho^2 \right\}_{T=cte}$$

$$= \left(\frac{\rho RT}{1-b\rho} - a\rho^2 \right)_{T=cte} dp$$

$$\left(\frac{RT(1-b\rho) - \rho RT(-b) - 2a\rho}{(1-b\rho)^2} \right)_{T=cte} d\rho$$

$$= \left(\frac{RT - RTb\rho + \rho a\rho}{(1-b\rho)^2} - 2a\rho \right)_{T=cte} d\rho$$

$$\boxed{dp = \left(\frac{RT}{(1-b\rho)^2} - 2a\rho \right)_{T=cte} d\rho} \quad (II-22)$$

Remplaçons (II-22) dans (II-20), on obtient :

$$dh = cpdT + cv \left(\frac{RT - 2a\rho(1-b\rho)^2}{(1-b\rho)^2} \right)_{T=cte} d\rho$$

alors :

$$\begin{aligned} \alpha &= \left(\frac{RT - 2a\rho(1-b\rho)^2}{(1-b\rho)^2} \right)_{T=cte} \\ &= \frac{1}{\rho} \left[1 - \frac{RT(1-b\rho)}{RT - 2a\rho(1-b\rho)^2} \right] \left[\frac{RT - 2a\rho(1-b\rho)^2}{(1-b\rho)^2} \right] \\ &= \frac{1}{\rho} \left[\frac{RT - 2a\rho(1-b\rho)^2 - RT(1-b\rho)}{RT - 2a\rho(1-b\rho)^2} \right] \left[\frac{RT - 2a\rho(1-b\rho)^2}{(1-b\rho)^2} \right] \\ &= \frac{1}{\rho} \left[\frac{RT - 2a\rho(1-b\rho)^2 - RT + RTb\rho}{(1-b\rho)^2} \right] \end{aligned}$$

Simplifions par ρ on aura :

$$\boxed{cv(T, \rho) = \frac{RTb - 2a(1-b\rho)^2}{(1-b\rho)^2}} \quad (II-23)$$

pour raison de calcul, on pose :

$$\boxed{cp = c_p} \quad (II-24)$$

Alors:

$$\boxed{c_p = \left(\frac{\gamma R}{\gamma - 1} \right) \frac{RT}{(1-b\rho)^2 \rho}} \quad (II-25)$$

La relation (II-20) devient:

$$\boxed{dH = C_p(T, \rho) dT + C_T(T, \rho) d\rho} \quad (\text{II-26})$$

Entre les relations (II-1) et (II-26) on a :

$$v dv = - dH$$

$$= - C_p(T, \rho) dT - C_T(T, \rho) d\rho$$

à l'Etat (0) on a :

$$\boxed{T_0, \rho_0, v_0 = 0} \quad (\text{II-27})$$

Substituant (II-27) entre l'état (0) générateur et (1) quelconque donné par (T1, P1, ρ1, V1) on obtient :

$$\int_{v_0}^{v_1} v dv = - \int_{T_0}^{T_1} C_p(T, \rho)_{\rho=\rho} dT - \int_{\rho_0}^{\rho_1} C_T(T, \rho)_{T=T} d\rho$$

$$\boxed{v_1^2 = -2 \int_{T_0}^{T_1} C_p(T, \rho)_{\rho=\rho} dT - 2 \int_{\rho_0}^{\rho_1} C_T(T, \rho)_{T=T} d\rho} \quad (\text{II-28})$$

Connaissons :

$$\boxed{M = \frac{V}{c_s}} \quad (\text{II-29})$$

avec c_s = vitesse du son

Alors :

$$\boxed{M_1^2 = \frac{v_1^2}{c_{s1}^2}} \quad (\text{II-30})$$

Avec :

$$\boxed{C_s^2(T, \rho) = \text{donné}} \quad \text{pour le gaz de Van der Waals} \quad (\text{II-31})$$

Alors :

$$\boxed{C_{s1}^2 = C_s^2(T_1, \rho_1)} \quad (\text{II-32})$$

Remplaçant (II-32), (II-30) dans (II-28), on obtient :

$$M_1^2 = \frac{-2 \int_{T_0}^{T_1} c_p(T, \rho) \rho^{-\rho} dT - 2 \int_{\rho_0}^{\rho_1} c_l(T, \rho) T^{-n} d\rho}{c_w(T_1, \rho_1)} \quad (\text{II-33})$$

L'équation de Bernoulli donne:

$$V dV + \frac{dp}{\rho} = 0 \quad (\text{II-34})$$

$$V dV + \left(\frac{dp}{d\rho} \right)_{s=cte} \frac{d\rho}{\rho} = 0 \quad (\text{II-35})$$

connaissions :

$$c_s^2 = \left(\frac{dp}{d\rho} \right)_{s=cte} \quad (\text{II-36})$$

La relation (II-35) devient:

$$V dV + c_s^2 \frac{d\rho}{\rho} = 0 \quad (\text{II-37})$$

Remplaçons (II-27) dans (II-37) on obtient :

$$\left[-c_p(T, \rho) T - CT(T, \rho) \right] \frac{d\rho}{\rho} + c_s^2 \frac{d\rho}{\rho} = 0 \quad (\text{II-38})$$

Alors :

$$\frac{d\rho}{\rho} = \frac{c_p(T, \rho) T + CT(T, \rho)}{c_s^2(T, \rho)} \frac{d\rho}{\rho} \quad (\text{II-39})$$

$$\frac{d\rho}{\rho} = \frac{c_p(T, \rho)}{c_s^2(T, \rho)} dT + \frac{CT(T, \rho)}{c_s^2(T, \rho)} d\rho \quad (\text{II-40})$$

Substituant la relation (II-40) entre l'état 0 et l'état 1, on obtient :

$$\int_{\rho^0}^{\rho^1} \frac{d\rho}{\rho} = \int_{T_0}^{T_1} \frac{C_p(T, \rho)}{C_s^2(T, \rho)} \Big|_{\rho=\rho^1} dT + \int_{\rho^0}^{\rho^1} \frac{C_T(T, \rho)}{C_s(T, \rho)} \Big|_{T=T_1} d\rho$$

Alors :

$$\log\left(\frac{\rho^1}{\rho^0}\right) = \int_{T_0}^{T_1} \frac{C_p(T, \rho)}{C_s^2(T, \rho)} \Big|_{\rho=\rho^1} dT + \int_{\rho^0}^{\rho^1} \frac{C_T(T, \rho)}{C_s(T, \rho)} \Big|_{T=T_1} d\rho \quad (\text{II-41})$$

Les paramètres T_1 , ρ^1 et P_1 sont reliés par la relation suivante :

$$P_1 = \frac{\rho^1 R T_1}{1 - b \rho^1} - a \rho^1 \quad (\text{II-42})$$

Les relations (II-33), (II-41) et (II-42) forment trois équations à trois inconnues T_1 , ρ^1 et P_1 .

Le système est récapitulé par :

$$2 \int_{T_0}^{T_1} \frac{C_p(T, \rho)}{C_s^2(T, \rho)} \Big|_{\rho=\rho^1} dT + 2 \int_{\rho^0}^{\rho^1} \frac{C_T(T, \rho)}{C_s(T, \rho)} \Big|_{T=T_1} d\rho + M_1^2 C_s^2(T_1, \rho) = 0 \quad (\text{II-43})$$

$$\log\left(\frac{\rho^1}{\rho^0}\right) = \int_{T_0}^{T_1} \frac{c_p(T, \rho)}{c_s^2(T, \rho)} \Big|_{\rho=\rho^1} dT + \int_{\rho^0}^{\rho^1} \frac{C_T(T, \rho)}{c_s^2(T, \rho)} \Big|_{T=T_1} d\rho \quad (\text{II-44})$$

$$P_1 = \frac{\rho^1 R T_1}{1 - b \rho^1} - a \rho^1 \quad (\text{II-45})$$

$$\text{avec : } C_i(T, \rho) = \frac{RTb - 2a(1 - b\rho)}{(1 - b\rho)^2}$$

$$\text{et : } c_p(T, \rho) = \frac{\gamma R}{\gamma - 1} \frac{RT}{RT - 2a(1 - b\rho)^2 \rho}$$

$$c_s^2(T, \rho) = \text{Déjà trouvé.}$$

Evaluation de : $\int_{T_0}^{T_1} C_p(T, \rho) |_{\rho=\rho_0} dT$

Alors : $\int_{T_0}^{T_1} C_p(T, \rho) |_{\rho=\rho_0} dT = \int_{T_0}^{T_1} \frac{\gamma R}{\gamma-1} \frac{RT}{RT-2a(1-b\rho)^2 \rho} |_{\rho=\rho_0} dT$

$$= \frac{\gamma R}{\gamma-1} \int_{T_0}^{T_1} \left\{ \frac{RT-2a(1-b\rho)^2 \rho + 2a(1-b\rho)^2 \rho}{RT-2a(1-b\rho)^2 \rho} \right\} |_{\rho=\rho_0} dT$$

$$= \frac{\gamma R}{\gamma-1} \int_{T_0}^{T_1} \left\{ 1 + \frac{2a(1-b\rho)}{RT-2a(1-b\rho)^2 \rho} \right\} |_{\rho=\rho_0} dT$$

$$= \frac{\gamma}{\gamma-1} \int_{T_0}^{T_1} \left\{ R + \frac{2a(1-b\rho)^2 \rho}{RT-2a(1-b\rho)^2 \rho} \right\} |_{\rho=\rho_0} dT$$

$$= \frac{\gamma}{\gamma-1} \left\{ \int_{T_0}^{T_1} R dT + \int_{T_0}^{T_1} \frac{2a(1-b\rho)^2 \rho}{RT-2a(1-b\rho)^2 \rho} |_{\rho=\rho_0} d(RT) \right\}$$

$$= \frac{\gamma}{\gamma-1} \left\{ R(T_1 - T_0) + \left[2a(1-b\rho)^2 \rho \operatorname{Log} \left(\frac{RT_1 - 2a(1-b\rho)^2 \rho}{RT_0 - 2a(1-b\rho)^2 \rho} \right) \right] |_{\rho=\rho_0} \right\}$$

alors:

$$\boxed{\int_{T_0}^{T_1} C_p(T, \rho) |_{\rho=\rho_0} dT = \frac{\gamma}{\gamma-1} \left\{ R(T_1 - T_0) + 2a(1-b\rho)^2 \rho \operatorname{Log} \left(\frac{RT_1 - 2a(1-b\rho)^2 \rho}{RT_0 - 2a(1-b\rho)^2 \rho} \right) \right\}} \quad (\text{II-46})$$

Evaluation de : $\int_{\rho_0}^{\rho_1} C_v(T, \rho) |_{r=T} d\rho$

Alors : $\int_{\rho_0}^{\rho_1} C_v(T, \rho) |_{r=T} d\rho = \int_{\rho_0}^{\rho_1} \frac{RTb-2a(1-b\rho)^2}{(1-b\rho)^2} |_{r=T} d\rho$

$$\int_{\rho_0}^{\rho_1} \frac{RTb}{(1-b\rho)^2} d\rho - 2a \int_{\rho_0}^{\rho_1} d\rho$$

$$= RTb \int_{\rho_0}^{\rho_1} \frac{d\rho}{(1-b\rho)^2} - 2a(\rho_1 - \rho_0)$$

Changement de variable pour l'intégrale:

$$1 - b\rho = Z$$

$$d(1 - b\rho) = dZ$$

$$d\rho = \frac{-1}{b} dZ$$

Lorsque: $\rho = \rho_0 \longrightarrow Z_0 = 1 - b\rho_0$
 $\rho = \rho_1 \longrightarrow Z_1 = 1 - b\rho_1$

$$\text{alors: } \int_{\rho_0}^{\rho_1} \frac{d\rho}{(1 - b\rho)^2} = \int_{Z_0}^{Z_1} \frac{\left(\frac{-1}{b}\right) dZ}{Z^2} = \frac{-1}{b} \int_{Z_0}^{Z_1} Z^{-2} dZ = \frac{-1}{b} \left[\frac{Z^{-1}}{-1} \right]_{Z_0}^{Z_1}$$

$$= \frac{-1}{b} \left\{ \frac{1}{Z_1} - \frac{1}{Z_0} \right\} = \frac{1}{b} \left\{ \frac{1}{1 - b\rho_0} - \frac{1}{1 - b\rho_1} \right\}$$

alors :

$$\int_{\rho_0}^{\rho_1} C_T(T, \rho) r = n d\rho = RTib \frac{1}{b} \left\{ \frac{1}{1 - b\rho_0} - \frac{1}{1 - b\rho_1} \right\} - 2a(\rho_1 - \rho_0)$$

$$= RTi \left\{ \frac{1 - b\rho_0 - (1 - b\rho_1)}{(1 - b\rho_0)(1 - b\rho_1)} \right\} - 2a(\rho_1 - \rho_0)$$

$$= RTib \frac{\rho_1 - \rho_0}{(1 - b\rho_0)(1 - b\rho_1)} - 2a(\rho_1 - \rho_0)$$

$$= (\rho_1 - \rho_0) \left\{ \frac{RTib}{(1 - b\rho_0)(1 - b\rho_1)} - 2a \right\}$$

alors:

$$\int_{\rho_0}^{\rho_1} C_T(T, \rho) r = n d\rho = (\rho_1 - \rho_0) \left\{ \frac{RTib}{(1 - b\rho_0)(1 - b\rho_1)} - 2a \right\} \quad (\text{II-47})$$

Alors le système (II-43), (II-44) et (II-45) devient :

$$\frac{2\gamma}{\gamma} R(T_1 - T_0) + 2D(T_1, \rho) + 2Q(T_1, \rho) + M^2 C^2 (T_1 - \rho) = 0 \quad (\text{II-48})$$

$$\text{Log} \left(\frac{\rho}{\rho^*} \right) = F(T_1, \rho) G(T_1, \rho) \quad (\text{II-49})$$

$$\rho^* = \frac{\rho RT_1}{1 - b\rho} - 2a\rho^2 \quad (\text{II-50})$$

avec

$$D(T, \rho) = \frac{\gamma}{\gamma-1} \left\{ 2a(1-b\rho)^2 \rho \operatorname{Log} \left(\frac{RT_i - 2a(1-b\rho)^2 \rho}{RT_0 - 2a(1-b\rho)^2 \rho} \right) \right\}$$

$$Q(T, \rho) = (\rho - \rho_0) \left\{ \frac{RT_0 b}{(1-b\rho)(1-b\rho_0)} - 2a \right\}$$

Cs (T₁ , ρ₁) = donnée (déjà trouvée)

$$F(T, \rho) = \int_{T_0}^{T_1} \frac{C_s(T, \rho)}{C_p^2(T, \rho)} \rho^{-\rho} dT$$

$$G(T, \rho) = \int_{\rho_0}^{\rho} \frac{C_v(T, \rho)}{C_p^2(T, \rho)} T^{-\rho} d\rho$$

On peut écrire le système forme par les équations (II-48), (II-49) et (II-50) Comme suit :

$$T = T_0 \frac{(\gamma-1)}{2\gamma R} \{ 2D(T, \rho) + 2Q(T, \rho) + 2M_1^2 C_p^2(T, \rho) \} \quad (\text{II-51})$$

$$\rho = \rho_0 e^{F(T, \rho) + G(T, \rho)} \quad (\text{II-52})$$

$$\rho = \frac{\rho RT_i}{1-b\rho} - a\rho^2 \quad (\text{II-53})$$

avec:

Cs (T₁ , ρ₁) = célérité du son à l'état 1

$$D(T, \rho) = \frac{2\gamma}{\gamma-1} a\rho(1-b\rho)^2 \operatorname{Log} \left(\frac{RT_i - 2a(1-b\rho)^2 \rho}{RT_0 - 2a(1-b\rho)^2 \rho} \right) \quad (\text{II-54})$$

$$Q(T, \rho) = (\rho - \rho_0) \left\{ \frac{RT_0 b}{(1-b\rho)(1-b\rho_0)} - 2a \right\} \quad (\text{II-55})$$

$$F(T_i, \rho) = \int_{T_0}^{T_i} \frac{C_p(T, \rho)}{C_v^2(T, \rho)} \Big|_{\rho=\rho} dT \quad (\text{II-56})$$

$$G(T_i, \rho) = \int_{\rho_0}^{\rho} \frac{C_v(T, \rho)}{C_v^2(T, \rho)} \Big|_{T=T_i} d\rho \quad (\text{II-57})$$

$$\text{et} \begin{cases} C_p(T, \rho) = \frac{\gamma R}{\gamma - 1} \frac{RT}{Ri - 2a(1-b\rho)^2 \rho} \\ C_v(T, \rho) = \frac{RTb - 2a(1-b\rho)^2}{(1-b\rho)^2} \end{cases}$$

II-3- Détermination de la valeur de la fonction de Prantl – Meyer v correspondant au Nombre de Mach M_1 pour T_0, P_0, ρ_0 données ;

Connaissions :
$$-d\theta = \sqrt{M^2 - 1} \frac{dv}{v} \quad (\text{II-58})$$

D'après la relation (II-37), on peut écrire :

$$v dv = -C_v^2 \frac{d\rho}{\rho} \quad (\text{II-59})$$

Divisons la relation (II-59) par V^2 on obtient :

$$\frac{v dv}{v^2} = \frac{C_v^2 d\rho}{v^2 \rho} \quad (\text{II-60})$$

$$\frac{dv}{v} = \frac{1}{M^2} \frac{d\rho}{\rho}$$

Remplaçons (II-56) dans (II-54), on aura :

$$-d\theta = \frac{1}{M^2} \sqrt{M^2 - 1} \frac{d\rho}{\rho} \quad (\text{II-61})$$

Remplaçons (II-40) dans (II-57) on obtient :

$$-d\theta = \frac{1}{M^2(T, \rho)} \sqrt{M^2(T, \rho) - 1} \left(\frac{C_p(T, \rho)}{C_v^2} dT + \frac{C_v(T, \rho)}{C_v^2(T, \rho)} d\rho \right) \quad (\text{II-62})$$

Il faut déterminer l'expression de $M^2(T, \rho)$

Remplaçons (II-46) et (II-47) dans (II-33), on obtient :

$$M^2(T, \rho) C_p^2(T, \rho) = -2 \left(\int_{T_0}^T C_p(T, \rho) e^{-ct} dT + \int_{\rho_0}^{\rho} C_T(T, \rho) e^{-ct} d\rho \right) \quad (\text{II-63})$$

On a :

$$\int_{T_0}^T C_p(T, \rho) e^{-ct} dT = \frac{\gamma}{\gamma-1} R(T-T_0) + D(T, \rho) \quad (\text{II-64})$$

$$\int_{\rho_0}^{\rho} C_T(T, \rho) e^{-ct} d\rho = Q(T, \rho) \quad (\text{II-65})$$

Avec :

$$D(T, \rho) = \frac{2\gamma}{\gamma-1} a \rho (1-b\rho)^{\gamma} \text{Log} \left(\frac{RT - 2a(1-b\rho)^{\gamma} \rho}{RT_0 - 2a(1-b\rho_0)^{\gamma} \rho_0} \right) \quad (\text{II-66})$$

$$Q(T, \rho) = (\rho - \rho_0) \left(\frac{RTb}{(1-b\rho)(1-b\rho_0)} - 2a \right) \quad (\text{II-67})$$

Remplaçons (II-64) et (II-65) dans (II-63), on obtient :

$$M^2(T, \rho) C_p^2(T, \rho) = -2 \left(\frac{\gamma R}{\gamma-1} (T-T_0) + D(T, \rho) + Q(T, \rho) \right) \quad (\text{II-68})$$

alors :

$$M^2(T, \rho) = -2 \frac{\left(\frac{\gamma R}{\gamma-1} (T-T_0) + D(T, \rho) + Q(T, \rho) \right)}{C_p^2(T, \rho)} \quad (\text{II-69})$$

Alors :

$$\frac{1}{M^2(T, \rho)} = \frac{C_p(T, \rho)}{2 \left(\frac{\gamma R}{\gamma - 1} (T - T_0) + D(T, \rho) + Q(T, \rho) \right)} \quad (\text{II-70})$$

Remplaçons (II-70) dans (II-62) on obtient :

$$-d\theta = \frac{C_p(T, \rho) \sqrt{M^2(T, \rho)} - 1}{2 \left(\frac{\gamma R}{\gamma - 1} (T - T_0) + D(T, \rho) + Q(T, \rho) \right)} \left(\frac{C_p(T, \rho)}{C_p(T, \rho)} dT + \frac{C_p(T, \rho)}{C_p(T, \rho)} d\rho \right)$$

après simplification on obtient :

$$-d\theta = \sqrt{M^2(T, \rho)} - 1 \left(\frac{C_p(T, \rho)}{2 \left(\frac{\gamma R}{\gamma - 1} (T - T_0) + D(T, \rho) + Q(T, \rho) \right)} dT + \frac{C_p(T, \rho)}{2 \left(\frac{\gamma R}{\gamma - 1} (T - T_0) + D(T, \rho) + Q(T, \rho) \right)} d\rho \right) \quad (\text{II-71})$$

connaissions : $M^2(T, \rho) = \frac{v^2(T, \rho)}{c^2(T, \rho)}$ (II-72)

Alors entre (II-69) et (II-72) on peut écrire :

$$v^2(T, \rho) = -2 \left\{ \frac{\gamma R}{\gamma - 1} (T - T_0) + D(T, \rho) + Q(T, \rho) \right\} \quad (\text{II-73})$$

Remplaçons (II-73) et (II-71), on peut écrire :

$$-d\theta = \frac{\sqrt{M^2(T, \rho)} - 1 C_p(T, \rho)}{V^2(T, \rho)} dT - \frac{\sqrt{M^2(T, \rho)} - 1 C_p(T, \rho) d\rho}{V^2(T, \rho)} \quad (\text{II-74})$$

Alors, la valeur e la fonction e Prandtl - Meyer à l'état 1 donné par $T_1, P_1,$ ρ_1, M_1 Est :

$$dv = -d\theta$$

$$dv = \frac{\sqrt{M^2(T,P)-1} C_p(T,\rho)}{V^2(T,\rho)} dT - \frac{\sqrt{M^2(T,\rho)-1} C_T(T,\rho)}{V^2(T,\rho)} d\rho \quad (\text{II-75})$$

Substituant la relation (II-75) entre l'état critique * donné par ($T^*, \rho^*, P^*, S^*, M^* = 1, v^* = 0$)

et l'état 1 supersonique donné par ($T_1, \rho^*, P_1, S_1, M_1, v_1$) on trouve :

$$\int_{v^*}^{v_1} dv = v_1 - v^* = v_1 - 0$$

$$= v$$

alors :

$$v = \int_{T^*}^{T_1} \frac{\sqrt{M^2(T,\rho)-1} C_p(T,\rho)}{V^2(T,\rho)} dT - \int_{\rho^*}^{\rho_1} \frac{\sqrt{M^2(T,\rho)-1} C_T(T,\rho)}{V^2(T,\rho)} d\rho \quad (\text{II-76})$$

Avec :

$$V^2(T,\rho) = 2 \left\{ \frac{\gamma R}{\gamma-1} (T-T_0) + D(T,\rho) + Q(T,\rho) \right\}$$

$$C_p(T,\rho) = \text{donne} \quad (\text{II-77})$$

$$M^2(T,\rho) = \frac{V^2(T,\rho)}{C_p(T,\rho)}$$

$$C_p(T,\rho) = \frac{\gamma R}{\gamma-1} \frac{RT}{RT - 2a(1-b\rho)^2 \rho}$$

$$C_T(T,\rho) = \frac{RTb - 2a(1-b\rho)^2}{(1-b\rho)^2}$$

et :

$$D(T, \rho) = \frac{2\gamma}{\gamma-1} a \rho (1-b) \rho^2 \text{Log} \left(\frac{RT - 2a(1-b\rho)^2 \rho}{RT_0 - 2a(1-b\rho)^2 \rho} \right) \quad (\text{II-78})$$

$$Q(T, \rho) = (\rho - \rho_0) \left(\frac{RTb}{(1-b\rho)(1-b\rho_0)} - 2a \right)$$

II-4-Détermination du rapport des sections $\frac{A_1}{A_2}$ d'un écoulement 1D uniforme

D'après l'équation du débit on a :

$$\boxed{(\rho V A) = cte} \quad (\text{II-79})$$

$$\text{Log}(\rho V A) = \text{Log}(cte)$$

$$\frac{d\rho}{\rho} + \frac{dV}{V} + \frac{dA}{A} = 0$$

$$\boxed{\frac{dA}{A} = - \left\{ \frac{dV}{V} + \frac{d\rho}{\rho} \right\}} \quad (\text{II-80})$$

Remplaçons (II-60) dans (II-80) on obtient:

$$\frac{dA}{A} = - \left\{ \frac{-1}{M^2} \frac{d\rho}{\rho} + \frac{d\rho}{\rho} \right\}$$

$$= - \left(1 - \frac{1}{M^2} \right) \frac{d\rho}{\rho}$$

$$= - \left(\frac{1}{M^2} - 1 \right) \frac{d\rho}{\rho}$$

$$\boxed{\frac{dA}{A} = \frac{1-M^2}{M^2} \frac{d\rho}{\rho}} \quad (\text{II-81})$$

Remplaçons (II-40) dans (II-81) on obtient :

$$\frac{dA}{A} = \frac{1 - M^2(T, \rho)}{M^2(T, \rho)} \left\{ \frac{C_p(T, \rho)}{C^2_s(T, \rho)} dT + \frac{C_T(T, \rho)}{C^2_s(T, \rho)} d\rho \right\} \quad (II-82)$$

Remplaçons (II-72) dans (II-82) on obtient :

$$\begin{aligned} \frac{dA}{A} &= \frac{(1 - M^2(T, \rho))}{V^2(T, \rho)} \left(\frac{C_p(T, \rho)}{C^2_s(T, \rho)} dT + \frac{C_T(T, \rho)}{C^2_s(T, \rho)} d\rho \right) \\ &= \frac{1 - M^2(T, \rho)}{V^2(T, \rho)} (C_p(T, \rho) dT + C_T(T, \rho) d\rho) \end{aligned}$$

$$\frac{dA}{A} = \left(\frac{1 - M^2(T, \rho)}{V^2(T, \rho)} \right) C_p(T, \rho) dT + \left(\frac{1 - M^2(T, \rho)}{V^2(T, \rho)} \right) C_T(T, \rho) d\rho \quad (II-83)$$

substituant la relation (II-83) entre l'état critique (*) donné par (T*, P*, ρ*, M* = 1, A*) et l'état 1 supersonique donne par (T₁, P₁, ρ₁, M₁, A₁) on trouve :

$$\int_{A^*}^{A_1} \frac{dA}{A} = \int_{T^*}^{T_1} \left(\frac{1 - M^2(T, \rho)}{V^2(T, \rho)} C_p(T, \rho) \right)_{\rho = \rho^*} dT + \int_{\rho^*}^{\rho_1} \left(\frac{1 - M^2(T, \rho)}{V^2(T, \rho)} C_T(T, \rho) \right) d\rho$$

Alors:

$$\frac{A_1}{A^*} = e^{\int_{T^*}^{T_1} \left(\frac{1 - M^2(T, \rho)}{V^2(T, \rho)} C_p(T, \rho) \right)_{\rho = \rho^*} dT + \int_{\rho^*}^{\rho_1} \left(\frac{1 - M^2(T, \rho)}{V^2(T, \rho)} C_T(T, \rho) \right) d\rho} \quad (II-84)$$

avec :

$$V^2(T, \rho) = 2 \left(\frac{\gamma R}{\gamma - 1} (T - T_0) + D(T, \rho) + Q(T, \rho) \right)$$

$$C^2_s(T, \rho) = \text{doné}$$

$$M^2(T, \rho) = \frac{V^2(T, \rho)}{C^2_s(T, \rho)}$$

$$C_p(T, \rho) = \frac{\rho R}{\gamma - 1} \frac{RT}{RT - 2a(1 - b\rho)^2 \rho}$$

$$C_T(T, \rho) = \frac{RTb - 2a(1 - b\rho)^2}{(1 - \rho)^2}$$

$$\text{et } D(T, \rho) = \frac{2\gamma}{\gamma - 1} \rho (1 - b\rho)^2 \log \left(\frac{RT - 2a(1 - b\rho)^2 \rho}{RT_0 - 2a(1 - b\rho)^2 \rho} \right)$$

$$Q(T, \rho) = (\rho - \rho_0) \left(\frac{RTb}{(1 - b\rho)(1 - b\rho_0)} - 2a \right)$$

II-5-L'expression du débit massique:

A une section donnée, le débit massique peut être calculé par :

$$\boxed{\eta = \int_A \rho V_n dA} \quad (\text{II-85})$$

avec: V_n : vitesse normale à la section

comme le débit est constant, on peut le calculer au niveau de la section du col, Dans cette section on a un écoulement uniforme, parallèle et horizontale ainsi critique ($M = 1, \theta = 0$)

alors :

$$\boxed{\eta = \int_{A^*} \rho V dA} \quad (\text{II-86})$$

$$\boxed{\frac{\eta}{\rho_0 C_{s0} A^*} = \int_{A^*} \frac{\rho V dA}{\rho_0 C_{s0} A^*}} \quad (\text{II-87})$$

C_{s0} : Vitesse du son génératrice.

Comme : $M = \frac{V}{C_s}$

$$\text{Alors : } \boxed{\frac{\eta}{\rho_0 C_{s0} A^*} = \int_{A^*} \frac{(M \cdot C_s)}{\rho_0 C_{s0} A^*} dA} \quad (\text{II-88})$$

Avec: C_s : vitesse du son

$$\frac{\eta}{\rho_0 C_{s0} A^*} = \int_{A^*}^{\rho} \frac{\rho}{\rho_0} M \frac{C_s}{C_{s0}} \frac{dA}{A^*} \quad (\text{II-89})$$

Au col on a :

$$\frac{\rho}{\rho_0} = \frac{\rho^*}{\rho_0}$$

$$M = M^* = 1.00$$

$$\frac{C_s}{C_{s0}} = \frac{C_{s^*}}{C_{s0}}$$

Alors (II-89) devient:

$$\frac{\eta}{\rho_0 C_{s0} A^*} = \frac{\rho^* C_{s^*}}{\rho_0 C_{s0}}$$

$$\frac{\eta}{\rho_0 C_{s0} A^*} = \left(\frac{\rho}{\rho_0} \right)_* \left(\frac{C_s(T, \rho)}{C_s(T_0, \rho_0)} \right)_* \quad (\text{II-90})$$

II-6-Méthode des Caractéristiques pour les cas axisymétriques à effet de Pression (Equation de Van Der Walls)

En chaque point on s'intéresse au calcul de $(x, y, \theta, T, P, \rho)$
Les équations sont :

$$\begin{aligned} \text{suivant } \xi (1-3) & \left\{ \begin{aligned} d(v + \theta) &= \delta \frac{\sin \theta \sin \mu}{y} d\xi \\ \frac{dy}{dx} &= \operatorname{tg}(\theta - \mu) \end{aligned} \right. \\ \text{suivant } \eta (2-3) & \left\{ \begin{aligned} d(v - \theta) &= \delta \frac{\sin \theta \sin \mu}{y} d\eta \\ \frac{dy}{dx} &= \operatorname{tg}(\theta + \mu) \end{aligned} \right. \end{aligned}$$

Avec :

$$dv = -\frac{\sqrt{M^2(T, \rho) - 1}}{V^2(T, \rho)} C_v(T, \rho) dT - \frac{\sqrt{M^2(T, \rho) - 1}}{V^2(T, \rho)} C_T(T, \rho) d\rho$$

$$V^2(T, \rho) = -2 \left\{ \frac{\gamma R}{\gamma - 1} (T - T_0) + D(T, \rho) + Q(T, \rho) \right\}$$

$$M^2(T, \rho) = \frac{V^2(T, \rho)}{C_s^2(T, \rho)}$$

$C_s^2(T, \rho)$ donnée

$$\mu(T, \rho) = \arcsin \left(\frac{1}{M(T, \rho)} \right)$$

$$C_v^2(T, \rho) = \frac{\gamma R}{\gamma - 1} \frac{RT}{RT_0 - 2a(1 - b\rho)^2 \rho}$$

$$C_T(T, \rho) = \frac{RTb - 2a(1 - b\rho)^2}{(1 - b\rho)^2}$$

avec :

$$d\xi = \frac{dx}{\cos(\theta - \mu)}; d\eta = \frac{dy}{\sin(\theta + \mu)}$$

$\delta=0$; le cas plan

$\delta=1$; le cas axisymétrique

$$P = \frac{\rho RT}{(1 - b\rho)} - a\rho^2$$

$$\text{et } D(T, \rho) = \frac{2\gamma}{\gamma - 1} a\rho(1 - b\rho)^2 \operatorname{Log} \left\{ \frac{RTb - 2a(1 - b\rho)^2 \rho}{RT_0 - 2a(1 - b\rho)^2 \rho} \right\}$$

$$Q(T, \rho) = (\rho - \rho_0) \left\{ \frac{RTb}{(1 - b\rho)(1 - b\rho_0)} - 2a \right\}$$

$$\frac{d\rho}{\rho} = \frac{C_v(T, \rho)}{C_s^2(T, \rho)} dT + \frac{C_T(T, \rho)}{C_s^2(T, \rho)} d\rho$$

On peut considérer le système comme suit :

Suivant ξ (1-3) :

$$\begin{cases} -\frac{\sqrt{M^2(T, \rho)-1}}{V^2(T, \rho)} C_p(T, \rho) dT - \frac{\sqrt{M^2(T, \rho)-1}}{V^2(T, \rho)} C_r(T, \rho) d\rho + d\theta = \delta \frac{\sin \theta \sin \mu}{y} \frac{dx}{\cos(\theta - \mu)} \\ dy = \operatorname{tg}(\theta - \mu) dx \end{cases}$$

suivant η (2-3):

$$\begin{cases} \frac{\sqrt{M^2(T, \rho)-1}}{V^2(T, \rho)} C_p(T, \rho) dT - \frac{\sqrt{M^2(T, \rho)-1}}{V^2(T, \rho)} C_r(T, \rho) d\rho - d\theta = \delta \frac{\sin \theta \sin \mu}{y} \frac{dy}{\sin \theta + \mu} \text{ avec} \\ dy = \operatorname{tg}(\theta - \mu) dx \end{cases}$$

$$\left\{ \frac{1}{\rho} \frac{C_r(T, \rho)}{C_s^2(T, \rho)} \right\} d\rho = \frac{C_p(T, \rho)}{C_s^2(T, \rho)} dT \rightarrow \text{Entre le point 3 et n'importe quel autre point de}$$

préférence, il doit être proche du point 3, on note ce point par 4 dont les propriétés en ce point sont connues ($x_4, y_4, T_4, \theta_4, \rho_4$) sont données. On choisit plus tard soit le point 1 ou 2 comme le point 4.

$$\mu(T, \rho) = \arcsin\left(\frac{1}{M(T, \rho)}\right)$$

$$M(T, \rho) = \frac{V(T, \rho)}{C_s(T, \rho)}$$

$C_s(T, \rho)$ donnée

$$V(T, \rho) = \sqrt{-2 \left\{ \frac{\gamma R}{\gamma - 1} (T - T_0) + D(T, \rho) + Q(T, \rho) \right\}}$$

$$C_p(T, \rho) = \frac{\gamma R}{\gamma - 1} \frac{RT}{RT - 2a(1 - b\rho)^2 \rho}$$

$$C_r(T, \rho) = \frac{RTb - 2a(1 - b\rho)^2}{(1 - b\rho)^2}$$

$$D(T, \rho) = \frac{2\gamma}{\gamma - 1} a\rho(1 - b\rho)^2 \operatorname{Log} \left(\frac{RT - 2a(1 - b\rho)^2 \rho}{RT_0 - 2a(1 - b\rho)^2 \rho} \right)$$

$$Q(T, \rho) = (\rho - \rho_0) \left\{ \frac{RTb}{(1 - b\rho)(1 - b\rho_0)} - 2a \right\}$$

$\delta=0$ le cas plan

$\delta=1$ le cas axisymétrique

Et à la fin on peut calculer, la pression par : $P = \frac{\rho RT}{(1 - b\rho)} - a\rho^2$

L'intégration des équations suivantes ξ entre 1 et 3 et les équations suivant η entre 2 et 3 ainsi la 5eme équation entre 4 et 3 donne :

$$\int_1^3 \frac{\sqrt{M^2(T, \rho) - 1}}{V^2(T, \rho)} C_\rho(T, \rho) dT - \int_1^3 \frac{\sqrt{M^2(T, \rho) - 1}}{V^2(T, \rho)} C_T(T, \rho) d\rho + \int_1^3 d\theta = \int_2^3 \delta \frac{\sin \theta \sin \mu}{y \cos(\theta - \mu)} dx$$

$$\int_1^3 dy = \int_1^3 \operatorname{tg}(\theta - \mu) dx$$

$$\int_2^3 \frac{\sqrt{M^2(T, \rho) - 1}}{V^2(T, \rho)} C_\rho(T, \rho) dT - \int_2^3 \frac{\sqrt{M^2(T, \rho) - 1}}{V^2(T, \rho)} C_T(T, \rho) d\rho - \int_2^3 d\theta = \int_2^3 \delta \frac{\sin \theta \sin \mu}{y \sin(\theta + \mu)} dy$$

$$\int_2^3 dy = \int_2^3 \operatorname{tg}(\theta + \mu) dx$$

$$\int \left\{ \frac{1}{\rho} - \frac{C_T(T, \rho)}{C_s^2(T, \rho)} \right\} d\rho = \int_3^4 \frac{C_\rho(T, \rho)}{C_s^2(T, \rho)} dT$$

Avec ;

$$\mu(T, \rho) = \arcsin \left(\frac{1}{M(T, \rho)} \right)$$

$$M(T, \rho) = \frac{V(T, \rho)}{C_s(T, \rho)}$$

$C_s(T, \rho)$ donnée

$$V(T, \rho) = \sqrt{-2 \left\{ \frac{\gamma R}{\gamma - 1} (T - T_0) + D(T, \rho) + Q(T, \rho) \right\}}$$

$$C_\rho(T, \rho) = \frac{\gamma R}{\gamma - 1} \frac{RT}{RT - 2a(1 - b\rho)^2 \rho}$$

$$C_T(T, \rho) = \frac{RTb - 2a(1 - b\rho)^2}{(1 - b\rho)^2}$$

$$D(T, \rho) = \frac{2\gamma}{\gamma - 1} a\rho(1 - b\rho)^2 \operatorname{Log} \left(\frac{RT - 2a(1 - b\rho)^2 \rho}{RT_0 - 2a(1 - b\rho)^2 \rho} \right)$$

$$Q(T, \rho) = (\rho - \rho_0) \left\{ \frac{RTb}{(1 - b\rho)(1 - b\rho_0)} - 2a \right\}$$

$$\delta = \begin{cases} 0 & \text{le cas plan} \\ 1 & \text{le cas axisymétrique} \end{cases}$$

$$\text{et à la fin } P = \frac{\rho RT}{(1 - b\rho)} - a\rho^2$$

On Approxime les paramètres x, y, θ, T, ρ dans chaque intervalle par :

$$\theta_{13} = \alpha\theta_{13}\theta_1 + (1-\alpha\theta_{13})\theta_3; \theta_{23} = \alpha\theta_{23}\theta_2 + (1-\alpha\theta_{23})\theta_3$$

$$T_{13} = \alpha T_{13}T_1 + (1-\alpha T_{13})T_3; T_{23} = \alpha T_{23}T_2 + (1-\alpha T_{23})T_3; T_{43} = \alpha T_{43}T_4 + (1-\alpha T_{43})T_3$$

$$\rho_{13} = \alpha\rho_{13}\rho_1 + (1-\alpha\rho_{13})\rho_3; \rho_{23} = \alpha\rho_{23}\rho_2 + (1-\alpha\rho_{23})\rho_3; \rho_{43} = \alpha\rho_{43}\rho_4 + (1-\alpha\rho_{43})\rho_3$$

$$y_{13} = \alpha y_{13}y_1 + (1-\alpha y_{13})y_3; y_{23} = \alpha y_{23}y_2 + (1-\alpha y_{23})y_3$$

Les fonctions sous les signes intégrales sont approximés par (en posons) :

$$A_{13} = -\frac{\sqrt{M^2(T_{13}, \rho_{13})-1}}{V^2(T_{13}, \rho_{13})} C_\rho(T_{13}, \rho_{13}); A_{23} = -\frac{\sqrt{M^2(T_{23}, \rho_{23})-1}}{V^2(T_{23}, \rho_{23})} C_\rho(T_{23}, \rho_{23})$$

$$G_{13} = -\frac{\sqrt{M^2(T_{13}, \rho_{13})-1}}{V^2(T_{13}, \rho_{13})} C_T(T_{13}, \rho_{13}); G_{23} = -\frac{\sqrt{M^2(T_{23}, \rho_{23})-1}}{V^2(T_{23}, \rho_{23})} C_T(T_{23}, \rho_{23})$$

$$B_{13} = \delta \frac{\sin \theta_{13} \sin \mu_{13}}{y_{13} \cos(\theta_{13} - \mu_{13})}; B_{23} = \delta \frac{\sin \theta_{23} \sin \mu_{23}}{y_{23} \sin(\theta_{23} + \mu_{23})}$$

$$C_{13} = \text{tg}(\theta_{13} - \mu_{13}); C_{23} = \text{tg}(\theta_{23} + \mu_{23})$$

$$F_{43} = \frac{1}{\rho_{43}} \frac{C_T(T_{43}, \rho_{43})}{C_S^2(T_{43}, \rho_{43})}; S_{43} = \frac{C_\rho(T_{43}, \rho_{43})}{C_S^2(T_{43}, \rho_{43})}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} V(T_{13}, \rho_{13}) = \sqrt{-2 \left\{ \frac{\gamma R}{\gamma - 1} (T_{13} - T_0) + D(T_{13}, \rho_{13}) + Q(T_{13}, \rho_{13}) \right\}} \\ V(T_{23}, \rho_{23}) = \sqrt{-2 \left\{ \frac{\gamma R}{\gamma - 1} (T_{23} - T_0) + D(T_{23}, \rho_{23}) + Q(T_{23}, \rho_{23}) \right\}} \\ V(T_{13}, \rho_{13}) = \sqrt{-2 \left\{ \frac{\gamma R}{\gamma - 1} (T_{13} - T_0) + D(T_{13}, \rho_{13}) + Q(T_{13}, \rho_{13}) \right\}} \\ V(T_{23}, \rho_{23}) = \sqrt{-2 \left\{ \frac{\gamma R}{\gamma - 1} (T_{23} - T_0) + D(T_{23}, \rho_{23}) + Q(T_{23}, \rho_{23}) \right\}} \\ V(T_{13}, \rho_{13}) = \sqrt{-2 \left\{ \frac{\gamma R}{\gamma - 1} (T_{13} - T_0) + D(T_{13}, \rho_{13}) + Q(T_{13}, \rho_{13}) \right\}} \\ V(T_{23}, \rho_{23}) = \sqrt{-2 \left\{ \frac{\gamma R}{\gamma - 1} (T_{23} - T_0) + D(T_{23}, \rho_{23}) + Q(T_{23}, \rho_{23}) \right\}} \end{array} \right.$$

Avec :

$$\mu_{13} = \arcsin\left(\frac{1}{M(T_{13}, \rho_{13})}\right) ; \mu_{23} = \arcsin\left(\frac{1}{M(T_{23}, \rho_{23})}\right)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} M(T_{13}, \rho_{13}) = \frac{V(T_{13}, \rho_{13})}{C_s(T_{13}, \rho_{13})} ; M(T_{23}, \rho_{23}) = \frac{V(T_{23}, \rho_{23})}{C_s(T_{23}, \rho_{23})} \\ M(T_3, \rho_{13}) = \frac{V(T_3, \rho_{13})}{C_s(T_3, \rho_{13})} ; M(T_3, \rho_{23}) = \frac{V(T_3, \rho_{23})}{C_s(T_3, \rho_{23})} \\ M(T_{13}, \rho_3) = \frac{V(T_{13}, \rho_3)}{C_s(T_{13}, \rho_3)} ; M(T_{23}, \rho_{23}) = \frac{V(T_{23}, \rho_3)}{C_s(T_{23}, \rho_3)} \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} C_s(T_{13}, \rho_3) = \text{calculée} ; C_s(T_{23}, \rho_3) = \text{calculée} \\ C_s(T_3, \rho_{13}) = \text{calculée} ; C_s(T_3, \rho_{23}) = \text{calculée} \\ C_s(T_{13}, \rho_{13}) = \text{calculée} ; C_s(T_{23}, \rho_{23}) = \text{calculée} \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} C_p(T_{13}, \rho_3) = \frac{\gamma R}{\gamma - 1} \frac{RT_{13}}{RT_{13} - 2a(1 - b\rho_3)^2 \rho_{13}} ; C_p(T_{23}, \rho_3) = \frac{\gamma R}{\gamma - 1} \frac{RT_{23}}{RT_{23} - 2a(1 - b\rho_3)^2 \rho_{23}} \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} C_T(T_3, \rho_{13}) = \frac{RT_3 b - 2a(1 - b\rho_{13})^2}{(1 - b\rho_{13})^2} ; C_T(T_3, \rho_{23}) = \frac{RT_3 b - 2a(1 - b\rho_{23})^2}{(1 - b\rho_{23})^2} \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} Q(T_{13}, \rho_3) = (\rho_3 - \rho_0) \left\{ \frac{RT_{13} b}{(1 - b\rho_3)(1 - b\rho_0)} - 2a \right\} ; Q(T_{23}, \rho_3) = (\rho_3 - \rho_0) \left\{ \frac{RT_{23} b}{(1 - b\rho_3)(1 - b\rho_0)} - 2a \right\} \\ Q(T_3, \rho_{13}) = (\rho_{13} - \rho_0) \left\{ \frac{RT_3 b}{(1 - b\rho_{13})(1 - b\rho_0)} - 2a \right\} ; Q(T_3, \rho_{23}) = (\rho_{23} - \rho_0) \left\{ \frac{RT_3 b}{(1 - b\rho_{23})(1 - b\rho_0)} - 2a \right\} \\ Q(T_{13}, \rho_{13}) = (\rho_{13} - \rho_0) \left\{ \frac{RT_{13} b}{(1 - b\rho_{13})(1 - b\rho_0)} - 2a \right\} ; Q(T_{23}, \rho_{23}) = (\rho_{23} - \rho_0) \left\{ \frac{RT_{23} b}{(1 - b\rho_{23})(1 - b\rho_0)} - 2a \right\} \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} D(T_{13}, \rho_3) = \frac{2\gamma}{\gamma - 1} a \rho_3 (1 - b\rho_3)^2 \text{Log} \left(\frac{RT_{13} - 2a(1 - b\rho_3)^2 \rho_3}{RT_0 - 2a(1 - b\rho_3)^2 \rho_3} \right) \\ D(T_{23}, \rho_3) = \frac{2\gamma}{\gamma - 1} a \rho_3 (1 - b\rho_3)^2 \text{Log} \left(\frac{RT_{23} - 2a(1 - b\rho_3)^2 \rho_3}{RT_0 - 2a(1 - b\rho_3)^2 \rho_3} \right) \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} D(T_3, \rho_{13}) = \frac{2\gamma}{\gamma - 1} a \rho_{13} (1 - b\rho_{13})^2 \text{Log} \left(\frac{RT_3 - 2a(1 - b\rho_{13})^2 \rho_{13}}{RT_0 - 2a(1 - b\rho_{13})^2 \rho_{13}} \right) \\ D(T_3, \rho_{23}) = \frac{2\gamma}{\gamma - 1} a \rho_{23} (1 - b\rho_{23})^2 \text{Log} \left(\frac{RT_3 - 2a(1 - b\rho_{23})^2 \rho_{23}}{RT_0 - 2a(1 - b\rho_{23})^2 \rho_{23}} \right) \end{array} \right. \text{ Le}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} D(T_{13}, \rho_{13}) = \frac{2\gamma}{\gamma - 1} a \rho_{13} (1 - b\rho_{13})^2 \text{Log} \left(\frac{RT_{13} - 2a(1 - b\rho_{13})^2 \rho_{13}}{RT_0 - 2a(1 - b\rho_{13})^2 \rho_{13}} \right) \\ D(T_{23}, \rho_{23}) = \frac{2\gamma}{\gamma - 1} a \rho_{23} (1 - b\rho_{23})^2 \text{Log} \left(\frac{RT_{23} - 2a(1 - b\rho_{23})^2 \rho_{23}}{RT_0 - 2a(1 - b\rho_{23})^2 \rho_{23}} \right) \end{array} \right.$$

Système devient :

Suivant ξ (1-3) :

$$\begin{cases} A_{13}(T_3 - T_1) + G_{13}(\rho_3 - \rho_1) + (\theta_3 - \theta_1) = B_{13}(x_3 - x_1) \\ y_3 - y_1 = C_{13}(x_3 - x_1) \end{cases} \quad \begin{matrix} \text{(II-91)} \\ \text{(II-92)} \end{matrix}$$

Suivant (2-3) :

$$A_{23}(T_3 - T_2) + G_{23}(\rho_3 - \rho_2) - (\theta_3 - \theta_2) = B_{23}(y_3 - y_2) \quad \text{(II-93)}$$

$$y_3 - y_2 = C_{23}(x_3 - x_2) \quad \text{(II-94)}$$

Suivant (4-3)

$$F_{43}(\rho_3 - \rho_4) = S_{43}(T_3 - T_4) \quad \text{(II-95)}$$

On obtient cinq équations à cinq inconnues ($x_3, y_3, \rho_3, T_3, \theta_3$)

L'équation (II-95) donne :

$$\rho_3 = \rho_4 + \frac{S_{43}}{F_{43}}(T_3 - T_4) \quad \square \quad \text{(II-96)}$$

Les équations (II-91) et (II-93) donne :

$$\begin{cases} A_{13}(T_3 - T_1) + \theta_3 - \theta_1 = B_{13}(x_3 - x_1) - G_{13}(\rho_3 - \rho_1) \\ A_{23}(T_3 - T_2) - \theta_3 + \theta_2 = B_{23}(x_3 - x_2) - G_{23}(\rho_3 - \rho_2) \end{cases} \quad \begin{matrix} \square \\ \text{(II-97)} \\ \text{(II-98)} \end{matrix}$$

Qui devient :

$$\begin{cases} A_{13}T_3 - A_{13}T_1 + \theta_3 - \theta_1 = B_{13}x_3 - B_{13}x_1 - G_{13}\rho_3 + G_{13}\rho_1 \\ A_{23}T_3 - A_{23}T_2 - \theta_3 + \theta_2 = B_{23}x_3 - B_{23}x_2 - G_{23}\rho_3 + G_{23}\rho_2 \\ A_{13}T_3 + \theta_3 = \theta_1 + A_{13}T_1 + B_{13}x_3 - B_{13}x_1 - G_{13}\rho_3 + G_{13}\rho_1 \\ A_{23}T_3 - \theta_3 = -\theta_2 + A_{23}T_2 + B_{23}x_3 - B_{23}x_2 - G_{23}\rho_3 + G_{23}\rho_2 \end{cases} \quad \begin{matrix} \text{(II-99)} \\ \text{(II-100)} \\ \text{(II-101)} \\ \text{(II-102)} \end{matrix}$$

On pose :

$$Z_1 = \theta_1 + A_{13}T_1 - B_{13}x_1 + G_{13}\rho_3 \quad \text{(II-103)}$$

$$Z_2 = \theta_2 + A_{23}T_2 - B_{23}x_2 + G_{23}\rho_3 \quad \text{(II-104)}$$

Alors les relations (II-101) et (II-102) deviennent :

$$\begin{cases} A_{13}T_3 + \theta_3 = Z_1 + B_{13}x_3 - G_{13}\rho_3 \\ A_{23}T_3 - \theta_3 = Z_2 + B_{23}x_3 - G_{23}\rho_3 \end{cases} \quad \begin{matrix} \text{(II-105)} \\ \text{(II-106)} \end{matrix}$$

La somme (II-105)(II-106) donne :

$$(A_{13} + A_{23}) T_3 - Z_1 + Z_2 + B_{13}x_3 + B_{23}y_3 - G_{13}\rho_3 - G_{23}\rho_3$$

$$T_3 = \frac{Z_1 + Z_2 + B_{13}x_3 + B_{23}y_3 - (G_{13} + G_{23})\rho_3}{A_{13} + A_{23}} \quad (\text{II-107})$$

Alors (II-105) donne :

$$\theta_3 = Z_1 + B_{13}x_3 - A_{13}T_3 - G_{13}\rho_3 \quad (\text{II-108})$$

Maintenant, considérons les équations (II-92) et (II-94), on aura :

$$\begin{cases} y_3 = y_1 + C_{13}(x_3 - x_1) \\ y_3 = y_2 + C_{23}(x_3 - x_2) \end{cases} \quad \begin{matrix} (\text{II-109}) \\ (\text{II-110}) \end{matrix}$$

Alors :

$$y_1 + C_{13}(x_3 - x_1) = y_2 + C_{23}(x_3 - x_2)$$

$$x_3 \{C_{13} - C_{23}\} = y_2 - y_1 - C_{23}x_2 + C_{13}x_1$$

$$x_3 = \frac{y_2 - y_1 - C_{23}x_2 + C_{13}x_1}{C_{13} - C_{23}} \quad (\text{II-111})$$

$$y_3 = y_1 - C_{13}x_1 + C_{13}x_3$$

on pose :

$$E_1 = y_1 - C_{13}x_1$$

$$E_2 = y_2 - C_{23}x_2$$

$$\text{Alors : } x_3 = \frac{E_2 - E_1}{C_{13} - C_{23}}$$

$$y_3 = E_1 + C_{13}x_3$$

Récapitulatifs des équations :

$$\begin{cases} x_3 = \frac{E_2 - E_1}{C_{13} - C_{23}} \\ y_3 = E_1 + C_{13}x_3 \\ T_3 = \frac{Z_1 + Z_2 + B_{13}x_3 + B_{23}y_3 - (G_{13} + G_{23})\rho_3}{A_{13} + A_{23}} \\ \theta_3 = Z_1 + B_{13}x_3 - A_{13}T_3 - G_{13}\rho_3 \\ \rho_3 = \rho_4 + \frac{S_{43}}{F_{43}}(T_3 - T_4) \end{cases} \quad (\text{II-112})$$

Avec :

$$\begin{aligned}
 E_1 &= y_1 - C_{13}x_1 & , E_2 &= y_2 - C_{23}x_2 \\
 A_{13} &= -\frac{\sqrt{M^2(T_{13}, \rho_3) - 1}}{V^2(T_{13}, \rho_3)} C_\rho(T_{13}, \rho_3) & , A_{23} &= -\frac{\sqrt{M^2(T_{23}, \rho_3) - 1}}{V^2(T_{23}, \rho_3)} C_\rho(T_{23}, \rho_3) \\
 C_{13} &= \operatorname{tg}(\theta_{13} - \mu_{13}) & , C_{23} &= \operatorname{tg}(\theta_{23} + \mu_{23}) \\
 G_{13} &= -\frac{\sqrt{M^2(T_3, \rho_{13}) - 1}}{V^2(T_3, \rho_{13})} C_T(T_3, \rho_{13}) & , G_{23} &= -\frac{\sqrt{M^2(T_3, \rho_{23}) - 1}}{V^2(T_3, \rho_{23})} C_T(T_3, \rho_{23}) \\
 B_{13} &= \delta \frac{\sin \theta_{13} \sin \mu_{13}}{y_{13} \cos(\theta_{13} - \mu_{13})} & , B_{23} &= \delta \frac{\sin \theta_{23} \sin \mu_{23}}{y_{23} \sin(\theta_{23} - \mu_{23})} \\
 \mu_{13} &= \arcsin\left(\frac{1}{M_{13}}\right) & , \mu_{23} &= \arcsin\left(\frac{1}{M_{23}}\right) \\
 M_{13} &= M(T_{13}, \rho_{13}) & , M_{23} &= M(T_{23}, \rho_{23}) \\
 F_{43} &= \frac{1}{\rho_{43}} \frac{C_T(T_3, \rho_{43})}{C_S^2(T_3, \rho_{43})} & , S_{43} &= \frac{C_\rho(T_{43}, \rho_3)}{C_S^2(T_{43}, \rho_3)} \\
 \text{et } C_\rho(T, \rho) &= \frac{\gamma R}{\gamma - 1} \frac{RT - 2a(1 - b\rho)^2 \rho}{RT - 2a(1 - b\rho)^2 \rho} & , C_T(T, \rho) &= \frac{RTb - 2a(1 - b\rho)^2 \rho}{(1 - b\rho)^2 \rho}
 \end{aligned}$$

$$M(T, \rho) = \frac{V(T, \rho)}{C_S(T, \rho)} \quad , C_S(T, \rho) = \text{donné}$$

$$V(T, \rho) = \sqrt{-2 \left\{ \frac{\gamma R}{\gamma - 1} (T - T_0) + D(T, \rho) + Q(T, \rho) \right\}}$$

$$D(T, \rho) = \frac{2\gamma}{\gamma - 1} a\rho(1 - b\rho)^2 \operatorname{Log} \left(\frac{RT - 2a(1 - b\rho)^2 \rho}{RT_0 - 2a(1 - b\rho)^2 \rho} \right)$$

$$Q(T, \rho) = (\rho - \rho_0) \left\{ \frac{RTb}{(1 - b\rho)(1 - b\rho_0)} - 2a \right\}$$

Et :

$$\begin{aligned}
 \theta_{13} &= \alpha\theta_{13}\theta_1 + (1 - \alpha\theta_{13})\theta_3 ; \theta_{23} = \alpha\theta_{23}\theta_2 + (1 - \alpha\theta_{23})\theta_1 \\
 T_{13} &= \alpha T_{13}T_1 + (1 - \alpha T_{13})T_3 ; T_{23} = \alpha T_{23}T_2 + (1 - \alpha T_{23})T_3 ; T_{43} = \alpha T_{43}T_4 + (1 - \alpha T_{43})T_3 \\
 \rho_{13} &= \alpha\rho_{13}\rho_1 + (1 - \alpha\rho_{13})\rho_3 ; \rho_{23} = \alpha\rho_{23}\rho_2 + (1 - \alpha\rho_{23})\rho_3 ; \rho_{43} = \alpha\rho_{43}\rho_4 + (1 - \alpha\rho_{43})\rho_3 \\
 y_{13} &= \alpha y_{13}y_1 + (1 - \alpha y_{13})y_3 ; y_{23} = \alpha y_{23}y_2 + (1 - \alpha y_{23})y_3
 \end{aligned}$$

$$\alpha\rho_{23}, \alpha y_{13}, \alpha y_{23}, \alpha\rho_{43}, \alpha T_{43} \in [0, 1]$$

L'approximation initiale :

Avec :

$$\alpha T_{13},$$

$$\alpha T_{23},$$

$$\alpha\theta_{13},$$

$$\alpha\theta_{23},$$

$$\alpha\rho_{13},$$

$$T_3 = T_3^A = \frac{T_1 + T_2}{2} ; \theta_3 = \theta_3^A = \frac{\theta_1 + \theta_2}{2} ; \rho_3 = \rho_3^A = \frac{\rho_1 + \rho_2}{2}$$

$$y_3 = y_3^A = \frac{y_1 + y_2}{2} ; x_3 = x_3^A = \frac{x_1 + x_2}{2}$$

II-6-1-Résumé (Point-interne) (Gaz Réel) (VanDerWalls) Axisymétriques **$\delta=1$ Plan $\delta=0$**

- 1) **Les données** : $(x_1, y_1, T_1, \theta_1, \rho_1, P_1), (x_2, y_2, T_2, \theta_2, \rho_2, P_2), (x_3, y_3, T_3, \theta_3, \rho_3, P_3)$
 $T_{0L}, \alpha T_{13}, \alpha T_{23}, \alpha \theta_{13}, \alpha \theta_{23}, \alpha \rho_{13}, \alpha \rho_{23}, \alpha y_{13}, \alpha y_{23}, \alpha \rho_{43}, \alpha T_{43}$

$$ITER = 0, T_3^A = \frac{T_1 + T_2}{2}; \theta_3^A = \frac{\theta_1 + \theta_2}{2}; \rho_3^A = \frac{\rho_1 + \rho_2}{2}, y_3^A = \frac{y_1 + y_2}{2}; x_3^A = \frac{x_1 + x_2}{2}$$

- 2) **Approximation initiale** :

- 3) **Calcul de $T_{13}, \theta_{13}, \rho_{13}, x_{13}, y_{13}, T_{23}, \theta_{23}, \rho_{23}, x_{23}, y_{23}, T_{43}, \rho_{43}$**

$$\theta_{13} = \alpha \theta_{13} \theta_1 + (1 - \alpha \theta_{13}) \theta_3^A; \theta_{23} = \alpha \theta_{23} \theta_2 + (1 - \alpha \theta_{23}) \theta_3^A$$

$$T_{13} = \alpha T_{13} T_1 + (1 - \alpha T_{13}) T_3^A; T_{23} = \alpha T_{23} T_2 + (1 - \alpha T_{23}) T_3^A; T_{43} = \alpha T_{43} T_4 + (1 - \alpha T_{43}) T_3^A$$

$$\rho_{13} = \alpha \rho_{13} \rho_1 + (1 - \alpha \rho_{13}) \rho_3^A; \rho_{23} = \alpha \rho_{23} \rho_2 + (1 - \alpha \rho_{23}) \rho_3^A; \rho_{43} = \alpha \rho_{43} \rho_4 + (1 - \alpha \rho_{43}) \rho_3^A$$

$$y_{13} = \alpha y_{13} y_1 + (1 - \alpha y_{13}) y_3^A; y_{23} = \alpha y_{23} y_2 + (1 - \alpha y_{23}) y_3^A$$

- 4) **Calculs les paramètres suivants** :

$$M_{13} = M(T_{13}, \rho_{13}) \quad , M_{23} = M(T_{23}, \rho_{23})$$

$$\mu_{13} = \arcsin\left(\frac{1}{M_{13}}\right) \quad , \mu_{23} = \arcsin\left(\frac{1}{M_{23}}\right)$$

$$C_{13} = \operatorname{tg}(\theta_{13} - \mu_{13}) \quad , C_{23} = \operatorname{tg}(\theta_{23} + \mu_{23})$$

$$E_1 = y_1 - C_{13} x_1 \quad , E_2 = y_2 - C_{23} x_2$$

$$A_{13} = -\frac{\sqrt{M^2(T_{13}, \rho_{13}^A) - 1}}{V^2(T_{13}, \rho_{13}^A)} C_\rho(T_{13}, \rho_{13}^A) \quad , A_{23} = -\frac{\sqrt{M^2(T_{23}, \rho_{23}^A) - 1}}{V^2(T_{23}, \rho_{23}^A)} C_\rho(T_{23}, \rho_{23}^A)$$

$$G_{13} = -\frac{\sqrt{M^2(T_3^A, \rho_{13}) - 1}}{V^2(T_3^A, \rho_{13})} C_T(T_3^A, \rho_{13}) \quad , G_{23} = -\frac{\sqrt{M^2(T_3^A, \rho_{23}) - 1}}{V^2(T_3^A, \rho_{23})} C_T(T_3^A, \rho_{23})$$

$$B_{13} = \delta \frac{\sin \theta_{13} \sin \mu_{13}}{y_{13} \cos(\theta_{13} - \mu_{13})} \quad , B_{23} = \delta \frac{\sin \theta_{23} \sin \mu_{23}}{y_{23} \sin(\theta_{23} - \mu_{23})}$$

$$F_{43} = \frac{1}{\rho_{43}} \frac{C_T(T_{43}, \rho_{43})}{C_S^2(T_{43}, \rho_{43})} \quad , S_{43} = \frac{C_\rho(T_{43}, \rho_{43}^A)}{C_S^2(T_{43}, \rho_{43}^A)}$$

$$Z_1 = \theta_1 + A_{13} T_1 - B_{13} x_1 + G_{13} \rho_1 \quad , Z_2 = -\theta_2 + A_{23} T_2 - B_{23} y_2 + G_{23} \rho_2$$

5) Calcul de $x_3, y_3, T_3, \theta_3, \rho_3$:

$$\begin{cases} x_3 = \frac{E_2 - E_1}{C_{13} - C_{23}} \\ y_3 = E_1 + C_{13}x_3^A \\ T_3 = \frac{Z_1 + Z_2 + B_{13}x_3^A + B_{23}y_3^A - (G_{13} + G_{23})\rho_3^A}{A_{13} + A_{23}} \\ \theta_3 = Z_1 + B_{13}x_3^A - A_{13}T_3^A - G_{13}\rho_3^A \\ \rho_3 = \rho_4 + \frac{S_{43}}{F_{43}}(T_3^A - T_4) \end{cases}$$

6) Calcul de l'erreur et faire le test :

$$ER = \text{MAX}(|y_3 - y_3^A|, |\theta_3 - \theta_3^A|, |\rho_3 - \rho_3^A|, |T_3 - T_3^A|)$$

si $(ER \leq T_0L)$ alors allez à 7

$y_3^A = y_3$, $\theta_3^A = \theta_3$, $\rho_3^A = \rho_3$, $T_3^A = T_3$, ITER = ITER + 1 allez à 3

7) Calcul de la pression P_3 et les rapports $T_3/T_0, \rho_3/\rho_0, P_3/P_0, M_3, V_3, C_{S3}$

$$P_3 = \frac{\rho_3 RT_3}{1 - b\rho_3} - a\rho_3^2 \quad , C_{S3} = C_S(T_3, \rho_3) \quad , V_3 = V(T_3, \rho_3) \quad , M = \frac{V_3}{C_{S3}}$$

$$\frac{T_3}{T_0} \quad , \quad \frac{\rho_3}{\rho_0} \quad , \quad \frac{P_3}{P_0}$$

Avec :

$$C_p(T, \rho) = \frac{\gamma R}{\gamma - 1} \frac{RT}{RT - 2a(1 - b\rho)^2 \rho} \quad , C_T(T, \rho) = \frac{RTb - 2a(1 - b\rho)^2 \rho}{(1 - b\rho)^2 \rho}$$

$$M(T, \rho) = \frac{V(T, \rho)}{C_S(T, \rho)} \quad , C_S(T, \rho) = \text{donné}$$

$$V(T, \rho) = \sqrt{-2 \left\{ \frac{\gamma R}{\gamma - 1} (T - T_0) + D(T, \rho) + Q(T, \rho) \right\}}$$

$$D(T, \rho) = \frac{2\gamma}{\gamma - 1} a\rho(1 - b\rho)^2 \text{Log} \left(\frac{RT - 2a(1 - b\rho)^2 \rho}{RT_0 - 2a(1 - b\rho)^2 \rho} \right)$$

$$Q(T, \rho) = (\rho - \rho_0) \left\{ \frac{RTb}{(1 - b\rho)(1 - b\rho_0)} - 2a \right\}$$

II-6-2-Le point particulier :

On rencontre ce type de point lorsque le point 2 se trouve sur l'axe de symétrie et pour le cas axisymétrique.

Si $\alpha_{23} \neq 1.00$, on peut considérer ce point (point3) comme un point interne et aucun problème ne se pose.

Si $\alpha_{23} = 1.00$, il y a un problème de l'indétermination. B_{23} est indéterminé, pour éviter le problème des cas, on va approximer B_{23} par :

$$\int_2^3 B_{23} dy = \int_2^3 \delta \frac{\sin \theta \sin \mu}{y \sin(\theta + \mu)} dy \approx \delta \frac{\sin \theta_3 \sin \mu_2}{y \sin(\theta_2 + \mu_2)} (y_3 - y_2) \quad \theta_3 \ll \mu, \text{ alors } \sin \theta_3 \approx 0$$

on a : $\theta_2 = 0$; $y_2 = 0$,

$$\text{alors : } \int_2^3 B_{23} dy = \delta \frac{\theta_3}{y_3} y_3 (\delta = 1)$$

La relation (II-93) sera changée par :

$$A_{23}(T_3 - T_2) + G_{23}(\rho_3 - \rho_2) - (\theta_3 - \theta_2) = \frac{\theta_3}{y_3} (y_3 - 0)$$

d'où :

$$A_{23}(T_3 - T_2) + G_{23}(\rho_3 - \rho_2) - (\theta_3 - \theta_2) = \theta_3$$

$$2\theta_3 = A_{23}(T_3 - T_2) + G_{23}(\rho_3 - \rho_2) + \theta_2$$

$$\theta_3 = \frac{1}{2} \{ A_{23}T_3 - A_{23}T_2 + G_{23}\rho_3 - G_{23}\rho_2 + \theta_2 \} \quad (\text{II-113})$$

Remplaçons (II-113) dans (II-91) on obtient :

$$A_{13}(T_3 - T_1) + G_{13}(\rho_3 - \rho_1) + (\theta_3 - \theta_1) = B_{13}(x_3 - x_1) \quad (\text{II-114})$$

$$A_{13}T_3 - A_{13}T_1 + G_{13}(\rho_3 - \rho_1) + \frac{1}{2} \{ A_{23}T_3 - A_{23}T_2 + G_{23}\rho_3 - G_{23}\rho_2 + \theta_2 \} - \theta_1 = B_{13}(x_3 - x_1)$$

$$\left\{ A_{13} + \frac{1}{2} A_{23} \right\} T_3 = B_{13}(x_3 - x_1) + A_{13}T_1 - G_{13}(\rho_3 - \rho_1) + \frac{1}{2} A_{23}T_2 - \frac{1}{2} G_{23}\rho_3 + \frac{1}{2} G_{23}\rho_2 - \frac{1}{2} \theta_2 + \theta_1$$

Comme $\theta_2 = 0$, on obtient :

$$\left\{ A_{13} + \frac{1}{2} A_{23} \right\} T_3 = 2B_{13}x_3 - 2B_{13}x_1 + 2A_{13}T_1 - 2G_{13}\rho_3 + 2G_{13}\rho_1 + A_{23}T_2 - G_{23}\rho_3 + G_{23}\rho_2 + \theta_1$$

comme : $Z_1 = \theta_1 + A_{13}T_1 - B_{13}x_1 + G_{13}\rho_1$

Alors, la relation (II-115) donne :

$$(2A_{13} + A_{23})T_3 = 2Z_1 + 2B_{13}x_3 - 2G_{13}\rho_3 + A_3T_2 - G_{23}(\rho_3 - \rho_2) \quad (\text{II-115})$$

$$T_3 = \frac{2(Z_1 + B_{13}x_3 - G_{13}\rho_3) + A_{23}T_2 - G_{23}(\rho_3 - \rho_2)}{2A_{13} + A_{23}} \quad (\text{II-116})$$

Remarque : Utiliser la même procédure qu'un point interne, où, il faut changer la relation (II-112) par (II-116).

Point sur l'axe de symétrie :Au point 3 on a : $\theta_3=0$; $y_3=0$ **Suivant ξ (1-3) on a :**

$$\left\{ \begin{array}{l} A_{13}(T_3 - T_1) + G_{13}(\rho_3 - \rho_1) - (\theta_3 - \theta_1) = B_{13}(x_3 - x_1) \\ y_3 - y_1 = C_{13}(x_3 - x_1) \\ \rho_3 = \rho_1 + \frac{S_{43}}{F_{43}}(T_3 - T_1) \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} \text{(II-117)} \\ \text{(II-118)} \\ \text{(II-119)} \end{array}$$

Alors la relation (II-117) donne :

$$A_{13}(T_3 - T_1) = B_{13}(x_3 - x_1) - \theta_3 + \theta_1 - G_{13}(\rho_3 - \rho_1) \quad \text{(II-120)}$$

Comme $\theta_3=0$,

Alors la relation (II-120) donne :

$$T_3 = T_1 + \frac{\theta_1 + B_{13}(y_3 - y_1) - G_{13}(\rho_3 - \rho_1)}{A_{13}} \quad \text{(II-121)}$$

La relation (II-118) donne :

$$-y_1 = C_{13}x_3 - C_{13}x_1$$

Puisque $y_3=0$

Alors

$$x_3 = x_1 - \frac{y_1}{C_{13}} \quad y_3 = 0 \quad \theta_3 = 0$$

et (II-119) donne :

$$\rho_3 = \rho_1 + \frac{S_{43}}{F_{43}}(T_3 - T_1)$$

II-6-3-Résumé Point-sur l'axe de symétrie (Gaz Réel) (VanDerWalls)**Axisymétriques $\delta=1$ Plan $\delta=0$** **1) Les données :** $(x_1, y_1, T_1, \theta_1, \rho_1, P_1), (x_4, y_4, T_4, \theta_4, \rho_4, P_4)$ T_0L , le point 4 est celui le point 1, $\alpha T_{13}, \alpha \theta_{13}, \alpha \rho_{13}, \alpha y_{13}, \alpha \rho_{43}, \alpha T_{43} \in [0,1]$ **2) Approximation initiale :**

$$ITER = 0, y_3^A = 0.0, \theta_3^A = 0.0, T_3^A = T_1, \rho_3^A = \rho_1, x_3^A = x_1$$

3) Calcul de $T_{13}, \theta_{13}, \rho_{13}, x_{13}, y_{13}, T_{43}, \rho_{43}$

$$T_{13} = \alpha T_{13} T_1 + (1 - \alpha T_{13}) T_3^A; \rho_{13} = \alpha \rho_{13} \rho_1 + (1 - \alpha \rho_{13}) \rho_3^A; \theta_{13} = \alpha \theta_{13} \theta_1 + (1 - \alpha \theta_{13}) \theta_3^A;$$

$$y_{13} = \alpha y_{13} y_1 + (1 - \alpha y_{13}) y_3^A, T_{43} = \alpha T_{43} T_4 + (1 - \alpha T_{43}) T_3^A; \rho_{43} = \alpha \rho_{43} \rho_4 + (1 - \alpha \rho_{43}) \rho_3^A$$

4) Calculs les paramètres suivants :

$$M_{13} = M(T_{13}, \rho_{13}) \quad , \mu_{13} = \arcsin\left(\frac{1}{M_{13}}\right) \quad , C_{13} = \text{tg}(\theta_{13} - \mu_{13})$$

$$A_{13} = -\frac{\sqrt{M^2(T_{13}, \rho_3^A) - 1}}{V^2(T_{13}, \rho_3^A)} C_p(T_{13}, \rho_3^A) \quad , B_{13} = \delta \frac{\sin \theta_{13} \sin \mu_{13}}{y_{13} \cos(\theta_{13} - \mu_{13})}$$

$$F_{43} = \frac{1}{\rho_{43}} \frac{C_T(T_{43}, \rho_{43})}{C_S^2(T_{43}, \rho_{43})} \quad , S_{43} = \frac{C_p(T_{43}, \rho_3^A)}{C_S^2(T_{43}, \rho_3^A)}$$

$$G_{13} = -\frac{\sqrt{M^2(T_3^A, \rho_{13}) - 1}}{V^2(T_3^A, \rho_{13})} C_T(T_3^A, \rho_{13})$$

4) Calcul de $x_3, y_3, \theta_3, T_3, \rho_3$:

$$x_3 = x_1 - \frac{y_1}{C_{13}}$$

$$T_3 = T_1 + \frac{\theta_3 - \theta_1 + B_{13}(x_3^A - x_1) - G_{13}(\rho_3^A - \rho_1)}{A_{13}}$$

$$\rho_3 = \rho_4 + \frac{S_{43}}{F_{43}} (T_3^A - T_4)$$

5) Calcul de l'erreur et faire le test :

$$ER = \text{MAX}\left(|x_3 - x_3^A|, |\rho_3 - \rho_3^A|, |T_3 - T_3^A|\right)$$

si $(ER \leq T_0L)$ alors allez à 7

$$x_3^A = x_3 \quad , \quad \rho_3^A = \rho_3 \quad , \quad T_3^A = T_3 \quad , \quad \text{ITER} = \text{ITER} + 1 \text{ allez à 3}$$

6) Calcul de la pression P_3 et les rapports T_3/T_0 , ρ_3/ρ_0 , P_3/P_0 , M_3 , V_3 , C_{S3} ,

$$P_3 = \frac{\rho_3 R T_3}{1 - b \rho_3} - a \rho_3^2, \quad C_{S3} = C_S(T_3, \rho_3), \quad V_3 = V(T_3, \rho_3), \quad M_3 = \frac{V_3}{C_{S3}}$$

$$\frac{T_3}{T_0}, \quad \frac{\rho_3}{\rho_0}, \quad \frac{P_3}{P_0}$$

Point sur une paroi rigide :

Au point 3 on a :

$$\theta_3 = \text{arctg} \left[\left(\frac{dF}{dx} \right)_{x=x_3} \right]$$

$$y_3 = f(x_3)$$

suitant $\eta(2-3)$:

$$\begin{cases} A_{23}(T_3 - T_2) + G_{23}(\rho_3 - \rho_2) - (\theta_3 - \theta_2) = B_{23}(x_3 - x_2) & (\text{II-122}) \\ y_3 - y_2 = C_{23}(x_3 - x_2) & (\text{II-123}) \\ \rho_3 = \rho_4 + \frac{S_{43}}{F_{43}}(T_3 - T_4) & (\text{II-124}) \end{cases}$$

Alors la relation (II-122) donne :

$$T_3 = T_2 + \frac{\theta_3 - \theta_2 + B_{23}(y_3 - y_2) - G_{23}(\rho_3 - \rho_2)}{A_{23}} \quad (\text{II-125})$$

La relation (II-123) donne :

$$x_3 = x_2 + \frac{y_3 - y_2}{C_{23}} \quad (\text{II-126})$$

Récapitulatif des équations :

$$\begin{cases} \theta_3 = \text{arctg} \left[\left(\frac{dF}{dx} \right)_{x=x_3} \right] \\ y_3 = f(x_3) \\ x_3 = x_2 + \frac{y_3 - y_2}{C_{23}} \\ T_3 = T_2 + \frac{\theta_3 - \theta_2 + B_{23}(y_3 - y_2) - G_{23}(\rho_3 - \rho_2)}{A_{23}} \\ \rho_3 = \rho_4 + \frac{S_{43}}{F_{43}}(T_3 - T_4) \end{cases} \quad (\text{II-127})$$

Dans ce cas, il faut choisir le 4 comme le point 2

II-6-4-Résumé, ... Point-sur une paroi rigide (Gaz Réel) (VanDerWalls) Axisymétriques $\delta=1$ Plan $\delta=0$

1) **Les données** : $(x_2, y_2, T_2, \theta_2, \rho_2, P_2), (x_4, y_4, T_4, \theta_4, \rho_4, P_4)$

$T_0 L$, le point 4 est celui le point 2, $\alpha T_{23}, \alpha \theta_{23}, \alpha \rho_{23}, \alpha y_{23}, \alpha \rho_{43}, \alpha T_{43} \in [0, 1]$

2) **Approximation initiale :**

$$x_3^A = x_2, T_3^A = T_2, \rho_3^A = \rho_2, y_3^A = f(x_3^A), \theta_3 = \text{arctg} \left[\left(\frac{dF}{dx} \right)_{x=x_3^A} \right]$$

3) **calcul de $T_{23}, \theta_{23}, \rho_{23}, x_{23}, y_{23}, T_{43}, \rho_{43}$**

$$T_{23} = \alpha T_{23} T_2 + (1 - \alpha T_{23}) T_3^A; \rho_{23} = \alpha \rho_{23} \rho_2 + (1 - \alpha \rho_{23}) \rho_3^A; \theta_{23} = \alpha \theta_{23} \theta_2 + (1 - \alpha \theta_{23}) \theta_3^A;$$

$$y_{23} = \alpha y_{23} y_2 + (1 - \alpha y_{23}) y_3^A; T_{43} = \alpha T_{43} T_4 + (1 - \alpha T_{43}) T_3^A; \rho_{43} = \alpha \rho_{43} \rho_4 + (1 - \alpha \rho_{43}) \rho_3^A$$

4) **Calculs les paramètres suivants :**

$$M_{23} = M(T_{23}, \rho_{23}), \mu_{23} = \arcsin \left(\frac{1}{M_{23}} \right), C_{23} = \text{tg}(\theta_{23} + \mu_{23})$$

$$A_{23} = - \frac{\sqrt{M^2(T_{23}, \rho_{23}) - 1}}{V^2(T_{23}, \rho_{23})} C_{\rho}(T_{23}, \rho_{23}), B_{23} = \delta \frac{\sin \theta_{23} \sin \mu_{23}}{y_{23} \sin(\theta_{23} + \mu_{23})}$$

$$F_{43} = \frac{1}{\rho_{43}} \frac{C_T(T_{43}, \rho_{43})}{C_S^2(T_{43}, \rho_{43})}, S_{43} = \frac{C_{\rho}(T_{43}, \rho_{43})}{C_S^2(T_{43}, \rho_{43})}$$

$$G_{23} = \frac{\sqrt{M^2(T_{23}, \rho_{23}) - 1}}{V^2(T_{23}, \rho_{23})} C_T(T_{23}, \rho_{23})$$

5) **Calcul de $x_3, y_3, \theta_3, T_3, \rho_3$:**

$$\left\{ \begin{array}{l} \theta_3 = \text{arctg} \left[\left(\frac{dF}{dx} \right)_{x=x_3^A} \right] \\ y_3 = f(x_3) \\ x_3 = x_2 + \frac{y_3^A - y_2}{C_{23}} \\ T_3 = T_2 + \frac{\theta_3^A - \theta_2 + B_{23}(y_3^A - y_2) - G_{23}(\rho_3^A - \rho_2)}{A_{23}} \\ \rho_3 = \rho_4 + \frac{S_{43}}{F_{43}} (T_3^A - T_4) \end{array} \right.$$

6) Calcul de l'erreur et faire le test :

$$ER = \text{MAX}(|x_3 - x_3^A|, |\theta_3 - \theta_3^A|, |\rho_3 - \rho_3^A|, |T_3 - T_3^A|)$$

si $(ER \leq T_0 L)$ alors allez à 7

$$x_3^A = x_3, \theta_3^A = \theta_3, \rho_3^A = \rho_3, T_3^A = T_3, \text{ITER} = \text{ITER} + 1 \text{ allez à 3}$$

7) Calcul de la pression P_3 et les rapports $T_3/T_0, \rho_3/\rho_0, P_3/P_0, M_3, V_3, C_{S3}$,

$$P_3 = \frac{\rho_3 R T_3}{1 - b \rho_3} - a \rho_3^2, C_{S3} = C_S(T_3, \rho_3), V_3 = V(T_3, \rho_3), M_3 = \frac{V_3}{C_{S3}}$$

$$\frac{T_3}{T_0}, \frac{\rho_3}{\rho_0}, \frac{P_3}{P_0}$$

II-6-5-Equation adiabatique pour gaz réel de Van Der Waals

$$dq = C_v dT + l dv \quad (\text{II-128})$$

avec
$$l = T \left(\frac{\partial P}{\partial T} \right)_v = \frac{TR}{v-b} \quad (\text{pour gaz de Van Der Waals}) \quad (\text{II-129})$$

Rappelons l'équation de Van der Waals :

$$(P + a/v^2)(v-b) = RT \quad (\text{II-130})$$

$$P = \frac{RT}{v-b} - \frac{a}{v^2}$$

pour une transformation adiabatique :

$$C_v dT + l dv = 0 \quad (\text{II-131})$$

$$C_v dT + T \frac{R}{v-b} dv = 0 \quad (\text{II-132})$$

Connaissons :

$$\frac{C_p}{C_v} = \gamma$$

Alors :
$$C_v = \frac{C_p}{\gamma}$$

Donc remplaçons dans (II-18), on obtient :

$$C_v = \frac{R}{\gamma-1} \frac{RT}{RT - 2a(1-b\rho)^2 \rho} \quad (\text{II-133})$$

et connaissons encore $v=1/\rho$

Remplaçons (II-133) et (II-134) dans (II-132), on obtient :

$$C_v(T) dT + T \frac{R}{\left(\frac{1}{\rho} - b\right)} \left(\frac{-d\rho}{\rho^2} \right) = 0$$

$$C_v dT - \frac{TR}{\rho(1-b\rho)} d\rho = 0$$

$$\frac{R}{\gamma-1} \frac{RT}{RT - 2a(1-b\rho)^2 \rho} dT - \frac{TR}{\rho(1-b\rho)} d\rho = 0$$

$$\left(\frac{R}{\gamma-1} \right) \frac{dT}{RT - 2a(1-b\rho)^2 \rho} = \frac{d\rho}{\rho(1-b\rho)}$$

$$\frac{d\rho}{dT} = \left(\frac{R}{\gamma-1} \right) \frac{\rho(1-b\rho)}{RT - (2a)(1-b\rho)^2 \rho} \quad (\text{II-135})$$

$T=T_0$ on a : $\rho=\rho_0$

$T=T_1$ on a : $\rho=\rho_1$

ou :

$$\frac{dT}{d\rho} = \frac{(\gamma-1) RT - 2a(1-b\rho)^2 \rho}{R \rho(1-b\rho)}$$

Vitesse du son pour un gaz réel de Van Der Waals :

Pour raison de nomenclature, on pose :

C_s = Vitesse du son

On a par définition :

$$C_s^2 = \left(\frac{dP}{d\rho} \right)_{S=cste} \quad (\text{II-136})$$

Rappelons l'équation de Van Der Waals et son équation adiabatique présentés par :

$$P + a\rho^2 = \frac{\rho RT}{1-b\rho} \quad (\text{II-137})$$

$$\frac{dT}{d\rho} = \frac{\gamma-1}{R} \frac{RT - 2a(1-b\rho)^2 \rho}{\rho(1-b\rho)} \quad (\text{II-138})$$

La différentielle de (II-137) donne :

$$dP = d \left\{ \frac{\rho RT}{1-b\rho} - a\rho^2 \right\}$$

$$dP = \left\{ \frac{\rho RT}{1-b\rho} - a\rho^2 \right\}'_{\rho=cste} dT + \left\{ \frac{\rho RT}{1-b\rho} - a\rho^2 \right\}'_{T=cste} d\rho \quad (\text{II-139})$$

Alors :

$$\left(\frac{\rho RT}{1-b\rho} - a\rho^2 \right)'_{\rho=cste} = \frac{\rho R}{1-b\rho} \quad (\text{II-140})$$

$$\begin{aligned} \left\{ \frac{\rho RT}{1-b\rho} - a\rho^2 \right\}'_{T=cste} &= \frac{RT(1-b\rho) - \rho RT(-b) - 2a\rho}{(1-b\rho)^2} \\ &= \frac{RT - RTb\rho + \rho RTb - 2a\rho}{(1-b\rho)^2} \end{aligned}$$

$$\left\{ \frac{\rho RT}{1-b\rho} - a\rho^2 \right\}'_{T=cste} = \frac{RT}{(1-b\rho)^2} - 2a\rho \quad (\text{II-141})$$

Remplaçons (II-140) et (II-141) dans (II-139), on obtient :

$$dP = \frac{\rho R}{1-b\rho} dT + \left\{ \frac{RT}{(1-b\rho)^2} - 2a\rho \right\} d\rho \quad (\text{II-142})$$

$$\frac{dP}{d\rho} = \frac{\rho R}{(1-b\rho)} \frac{dT}{d\rho} + \frac{RT}{(1-b\rho)^2} - 2a\rho \quad (\text{II-143})$$

Remplaçons (II-138) dans (II-143) on obtient :

$$\begin{aligned}
\frac{dP}{d\rho} &= \frac{\rho R}{(1-b\rho)} \frac{\gamma-1}{R} \frac{RT-2a(1-b\rho)^2 \rho}{\rho(1-b\rho)} + \frac{RT}{(1-b\rho)^2} - 2a\rho \\
&= (\gamma-1) \frac{RT-2a(1-b\rho)^2 \rho}{(1-b\rho)^2} + \frac{RT}{(1-b\rho)^2} - 2a\rho \\
&= \frac{1}{(1-b\rho)^2} \left\{ (\gamma-1)RT - (\gamma-1)2a(1-b\rho)^2 \rho + RT - 2a\rho(1-b\rho)^2 \right\} \\
&= \frac{1}{(1-b\rho)^2} \left\{ \gamma RT - RT - (\gamma-1)2a\rho(1-b\rho)^2 + RT - 2a\rho(1-b\rho)^2 \right\} \\
&= \frac{1}{(1-b\rho)^2} \left\{ \gamma RT - 2a\rho(1-b\rho)^2 [\gamma-1+1] \right\} \\
&= \frac{1}{(1-b\rho)^2} \left\{ \gamma RT - \gamma 2a\rho(1-b\rho)^2 \right\} \\
C_s^2(T, \rho) &= \frac{\gamma RT}{(1-b\rho)^2} \left\{ 1 - \frac{2a\rho(1-b\rho)^2}{RT} \right\}
\end{aligned}$$

Chapitre:III

Mise en oeuvre Informatique et Programmation

Résumé et algorithmie :

1 - les données sont : $a, b, R, T_0, P_0, \gamma, M, \epsilon, \rho$.

2 - détermination de ρ par : $\rho = \frac{\epsilon R T_0}{1 - b \rho}$

3 - approximation initiale : ρ_1^0, T_1^0 en utilisant les relation d'un gaz parfait par :
Iter=0

$$T_1^0 = T_0 \left(1 + \frac{\gamma - 1}{2} M_1^2 \right)^{-1}$$

$$\rho_1^0 = \rho_0 \left(1 + \frac{\gamma - 1}{2} M_1^2 \right)^{-\gamma}$$

4 - détermination de ρ_1^1 en utilisant l'équation d'Etat de Van der Waals par

$$\rho_1^1 = \frac{P_1^0 R T_1^0}{1 - b \rho_1^0} - a \rho_1^0$$

5 - calculs les valeur en utilisant les résultats précédents :

$$A(T_1^0 + \rho_1^0) = \frac{\gamma}{\gamma - 1} a \rho_1^0 (a - b \rho_1^0)^{-2} \left[\frac{R T_1^0 - 2a(1 - b \rho_1^0)^{-2} \rho_1^0}{R T_0 - 2a(1 - b \rho_1^0)^{-2} \rho_1^0} \right]$$

$$C(T_1^0 + \rho_1^0) = (P_1^0 - P_0) \left[\frac{R T_1^0 / b}{(1 - b \rho_1^0)(1 - b \rho_0)} - 2a \right]$$

$$E(T_1^0 + \rho_1^0) = \int_{T_0}^{T_1^0} \frac{C_p(T + \rho)}{C_v(T + \rho)} dT$$

$$G(T_1^0 + \rho) = \int_{P_0}^{P_1^0} \frac{C_v(T + \rho)^{\gamma}}{C_p(T + \rho)} dP$$

6 - Détermination de T_1^N, P_1^N, ρ_1^N

N : nouveau

$$T_1^N = T_0 \frac{(\gamma - 1)}{2 \beta R} \left[2A(T_1^0 + \rho_1^0) + 2G(T_1^0 + \rho_1^0) + M_1^2 C_v(T_1^0 + \rho_1^0) \right]$$

$$\rho_1^N = \rho_0 e^{-\frac{2A(T_1^0 + \rho_1^0) + 2G(T_1^0 + \rho_1^0) + M_1^2 C_v(T_1^0 + \rho_1^0)}{R T_0}}$$

$$P_1^N = \frac{\rho_1^N R T_1^N}{1 - b \rho_1^N} - a \rho_1^N$$

7 - détermination de l'erreur maximale ERM MAX par :

$$\text{ERM MAX} = \text{MAX} \left(|T_1^N - T_1^0| + |P_1^N - P_0| \right)$$

Si ERM MAX $\leq \epsilon$ alors allez à 8

ITER=ITER+1

$$T_1^0 = T_1^N$$

$$\rho_1^0 = \rho_1^N$$

Allez à 4

8 - affichage de : ITER, T_1^N, P_1^N, ρ_1^N

9 - détermination des rapports $\frac{I^u}{I^s}, \frac{T_1}{T_0}, \frac{I^h}{I^s}$ par :

$$\frac{I^u}{I^s} = \frac{I^u}{I^s}$$

$$\frac{T_1}{T_0} = \frac{T_1}{T_0}$$

$$\frac{I^h}{I^s} = \frac{I^h}{I^s}$$

$$\frac{I^h}{I^s} = \frac{I^h}{I^s}$$

Algorithme de détermination des valeurs critiques p^* , ρ^* , T^* ainsi que le débit massique :

1-les données sont : $a, b, R, T_0, p_0, \gamma, \mu, M, M^* = 1,00$

2-détermination de p_0 par : $p_0 = \frac{\rho_0 R T_0}{1 - b \rho_0} - a \rho_0^2$

3-approximation initiale : ρ_1^*, T_1^* en utilisant les relations d'un gaz parfait par :
Iter=0

$$T_1^* = T_0 \left(1 + \frac{\gamma - 1}{2} M^2 \right)^{-1}$$

$$\rho_1^* = \rho_0 \left(1 + \frac{\gamma - 1}{2} M^2 \right)^{\frac{\gamma}{\gamma - 1}}$$

4-détermination de ρ_1^* en utilisant l'équation d'état de Van der Waals par :

$$p_1^* = \frac{\rho_1^* R T_1^*}{1 - b \rho_1^*} - a \rho_1^{*2}$$

5-calculs des valeurs suivantes en utilisant les résultats précédentes :

$$Z(T_1^*, \rho_1^*) = \frac{\gamma}{\gamma - 1} a \rho_1^{*2} (1 - b \rho_1^*) \text{Log} \left(\frac{R T_1^* - 2ab - b \rho_1^* \gamma T_1^*}{R T_1^* - 2ab - b \rho_1^* \gamma T_1^*} \right)$$

$$G(T_1^*, \rho_1^*) = (\rho_1^* R_0) \left(\frac{R T_1^* b}{(1 - b \rho_1^*)(1 - b \rho_0)} - 2a \right)$$

$$H(T_1^*, \rho_1^*) = \int_{T_0}^{T_1^*} \frac{C_p(T, \rho_1^*)}{C_p(T, \rho_1^*)} dT$$

$$G(T_1^*, \rho_1^*) = \int_{p_0}^{p_1^*} \frac{C_p(T_1^*, \rho)}{C_p(T_1^*, \rho)} dp$$

6-Détermination de T^*, ρ^*, ρ^* par :

N : nouveau

$$T_1^* = T_0 - \frac{(\gamma - 1)}{2 \gamma R} (2H(T_1^*, \rho_1^*) + Z(T_1^*, \rho_1^*) + M R^* R(T_1^*, \rho_1^*))$$

$$\rho_1^* = \rho_0 e^{H(T_1^*, \rho_1^*) + G(T_1^*, \rho_1^*)}$$

$$p_1^* = \frac{\rho_1^* R T_1^*}{(1 - b \rho_1^*)} - a \rho_1^{*2}$$

7-Détermination de l'erreur maximale ERR_{MAX} par :

$$ERR_{MAX} = \max \left\{ \left| \frac{T_1^* - T_0}{T_0} \right|, \left| \frac{\rho_1^* - \rho_0}{\rho_0} \right| \right\}$$

si $ERR_{MAX} \leq \epsilon_{ps}$ alors allez à (8)

Iter = Iter + 1

$$T_1^N = T_1^P; A^N = A^P$$

allez à (4)

8-Affichage de : Her, T_1^N, P^N, P^P

9-Détermination des rapports $\frac{P^P}{P^N} \frac{T_1^N}{T_1^P}$ et le débit massique :

$$\frac{P^P}{P^N} \frac{T_1^N}{T_1^P} \frac{P^N}{P^P} \frac{T_1^P}{T_1^N}$$

Algorithme de détermination du rapport des sections $\frac{A^*}{A}$ (supersonique) et la valeur de la fonction de Prandtl-Meyer

- (1) les données sont : $a, b, r, T_0, P_0, \rho_0, \gamma, M^*$ et $T_1, P_1, \rho_1, T, P, \rho$
 (2) calcule les valeurs suivantes :

$$F(T, \rho) = \int_{T_0}^T \frac{\sqrt{M^*(T, \rho) - 1}}{V^*(T, \rho)} C_p(T, \rho) dT$$

$$S(T, \rho) = \int_{P_0}^P \frac{\sqrt{M^*(T, \rho) - 1}}{V^*(T, \rho)} C_p(T, \rho) dp$$

$$G = F(T, \rho) - S(T, \rho)$$

- 3- Calcule des valeurs suivants :

$$U(T, \rho) = \int_{T_0}^T \frac{[1 - M^*(T, \rho)]}{V^*(T, \rho)} C_p(T, \rho) dT$$

$$W(T, \rho) = \int_{P_0}^P \frac{[1 - M^*(T, \rho)]}{V^*(T, \rho)} C_p(T, \rho) dp$$

$$\frac{A}{A^*} = U(T, \rho) + W(T, \rho)$$

avec :

$$V^*(T, \rho) = 2 \left\{ \frac{\gamma R}{\gamma - 1} (1 - T_0) + I(T, \rho) + C(T, \rho) \right\}$$

$$C(T, \rho) \text{ donnée} \quad ; \quad C(T, \rho) \text{ donnée}$$

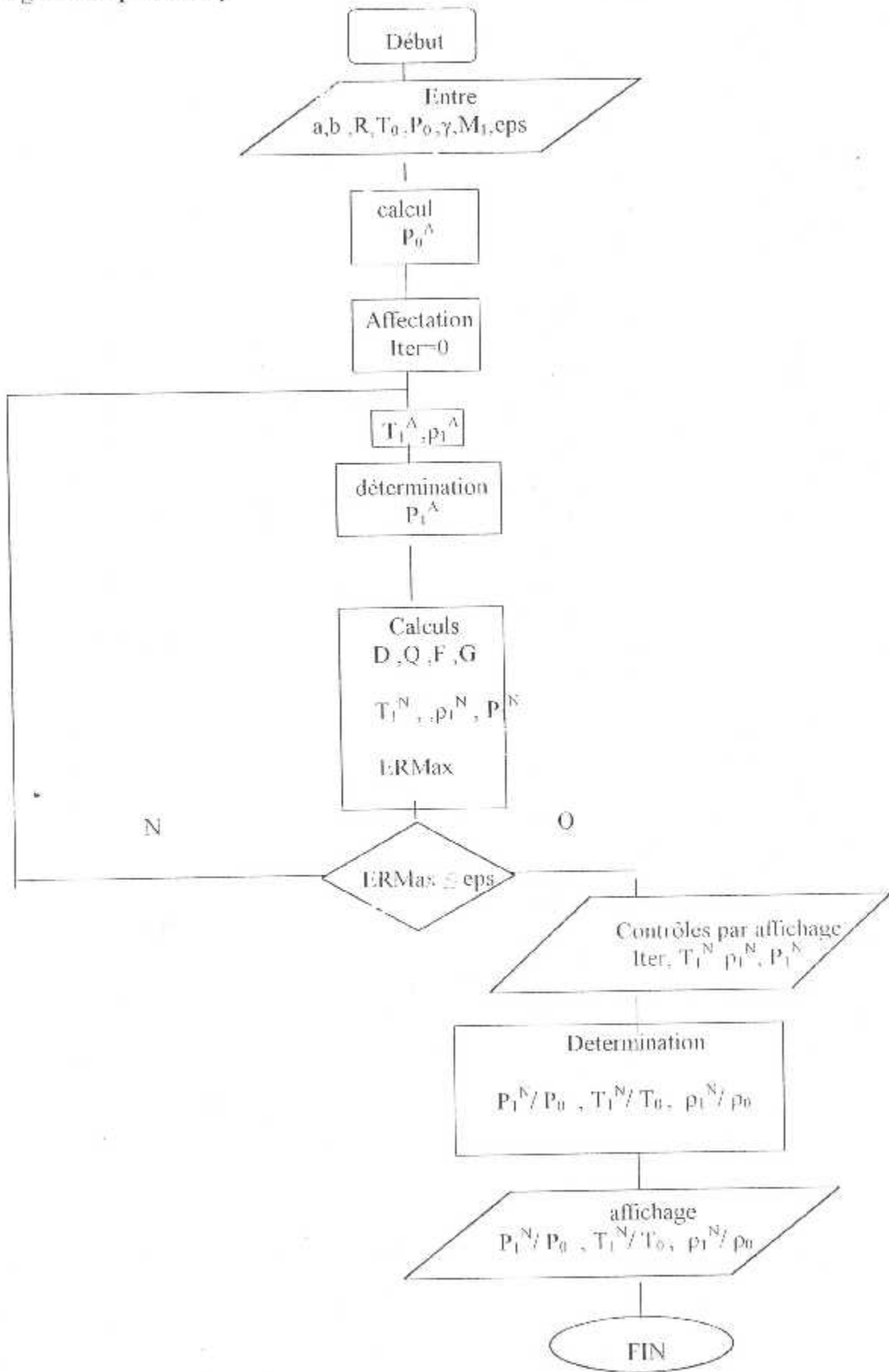
$$M^*(T, \rho) = \frac{V^*(T, \rho)}{C_p(T, \rho)} \quad ; \quad M^*(T, \rho) = \frac{V^*(T, \rho)}{C_p(T, \rho)}$$

$$V^*(T, \rho) = 2 \left\{ \frac{\gamma R}{\gamma - 1} (T - T_0) + I(T, \rho) + C(T, \rho) \right\}$$

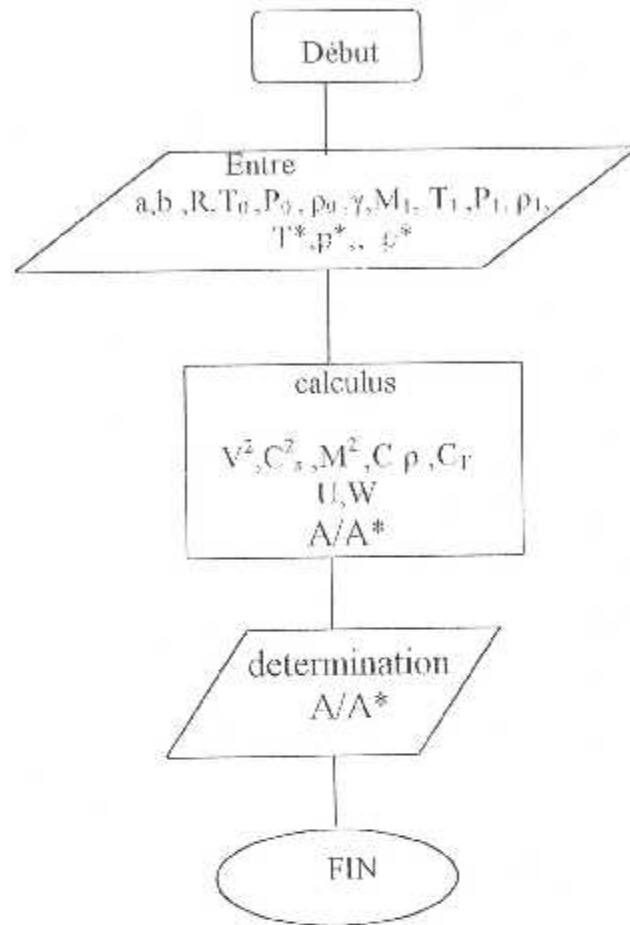
$$C_p(T, \rho) = \frac{\gamma R}{\gamma - 1} \frac{RT}{(RT - 2a) - b\rho} \quad ; \quad C_p(T, \rho) = \frac{\gamma R}{\gamma - 1} \frac{RT}{(RT - 2a) - b\rho}$$

$$C_A(T, \rho) = \frac{RTh - 2d(1 - b\rho)^T}{(1 - b\rho)^T} \quad ; \quad C_B(T, \rho) = \frac{RTh - 2d(1 - b\rho)^T}{(1 - b\rho)^T}$$

Organigramme qui calcul ρ



Organigramme qui calcul les rapports A_1/A^* et la valeur de la fonction de Prandtl-Meyer



```

C      IMPLICIT DOUBLE PRECISION(A-H,O-Z)
COMMON /BK/ a,b,R,

C      OPEN(UNIT=3, FILE='press3.DAT', STATUS='UNKNOWN')
C      initialisation des valeurs
C      write(*,*) 'donner P0= '
C      read(*,*) 'P_0'
C      t_0=300
C      a=161.1
C      b=0.00126

r=8.3135*1000/28.96
GAMA=1.40
AM_1=2.50
EPS=0.00001

C      PAS=0.001

DO 6 t_0=300,1000,50
      write(*,*) 't_C-',t_0
      RO_0_GP=P_0/(R*T_0)

      X1=0.0
      Y1=P_0-VDW(T_0,X1)
10     X2=X1-PAS
      Y2=P_0-VDW(T_0,X2)
      PROD=Y1*Y2
      IF(PROD.LE.0.0) GOTO 20
      X1=X2
      Y1=Y2
      GOTO 10
20     DO 30 KK=1,135
      X3=(X1+X2)/2
      Y3=P_0-VDW(T_0,X3)
      PROD=Y1*Y3
      IF(PROD.LE.0.0) THEN
          X2=X3
          Y2=Y3
      ELSE
          X1=X3
          Y1=Y3
      ENDIF
30     CONTINUE
      RO_0_VW=X3
      ERR=ABS((RO_0_VW-RO_0_GP)/RO_0_GP)*100
      WRITE(*,100) t_0,RO_0_GP,RO_0_VW,ERR
      WRITE(3,100) t_0,RO_0_GP,RO_0_VW,ERR

6      CONTINUE
      faCI=(GAMA-1)/2
      VAL=1+FACT*AM_1*AM_1
      PUIS1=-1

      PUIS2=-1/(GAMA-1)
      STOP
100    FORMAT(5X,F10.1,3X,F20.15,3X,F20.15,5X,F7.3)
      END

```

C
C
C

```
DOUBLE PRECISION FUNCTION VDW(T,RO)
IMPLICIT DOUBLE PRECISION (A-H,C-Z)
COMMON /BK/ a,b,R
VDW=RO*R*T/(1-b*RC)-a*RC*RO
RETURN
END
```

```

C      IMPLICIT DOUBLE PRECISION(A-H,O-Z)
COMMON /BK/ a,b,R, 5)
C
C      OPEN(UNIT=1, FILE='press'.DAT', STATUS='UNKNOWN')
C      initialisation des valeurs
C      write(*,*) 'donner p_0= '
C      read(*,*) p_0
C      t_0=300
C      a=161.1
C      b=0.00126
C
C      z=8.3135*1000/28.96
C      GAMA=1.40
C      AM_1=2.50
C      EPS=0.00001
C
C      PAS=0.001
C
C      DO 6  p_0=q2, 1000000, 10000
C          write(*,*) 'L_0=', t_0
C          RO_0 GP=P_0/(R*T_0)
C
C          X1=0.0
C          Y1=P_0-VDW(T_0, X1)
10      X2=X1+PAS
C          Y2=P_0-VDW(T_0, X2)
C          PROD=Y1*Y2
C          IF(PROD.LE.0.0) GOTO 20
C          X1=X2
C          Y1=Y2
C          GOTO 10
20      DO 30 KK 1, 135
C          X3=(X1+X2)/2
C          Y3=P_0-VDW(T_0, X3)
C          PROD=Y1*Y3
C          IF(PROD.LE.0.0) THEN
C              X2=X3
C              Y2=Y3
C          ELSE
C              X1=X3
C              Y1=Y3
C          ENDIF
30      CONTINUE
C          RO_0 VW=X3
C          ERR=DABS((RO_0 VW-RO_0 GP)/RO_0 GP)*100
C          WRITE(*,100) P_0, RO_0 GP, RO_0 VW, ERR
C          WRITE(1,100) P_0, RO_0 GP, RO_0 VW, ERR
C
C          6      CONTINUE
C          fact=(GAMA-1)/2
C          VAL_1+FACT*AM_1*AM_1
C          PUIS1=-1
C
C          PUIS2=-1/(GAMA-1)
C          STOP
100     FORMAT(5X, F10.1, 3X, F20.15, 3X, F20.15, 5X, F7.3)
C          END
C

```


C
C
C

```
DOUBLE PRECISION FUNCTION VDW(T,RO)
IMPLICIT DOUBLE PRECISION (A-H,O-Z)
COMMON /BK/ a,b,R
VDW=RO*R*T/(1-b*RO)-a*RO*RO
RETURN
END
```

```

C
IMPLICIT DOUBLE PRECISION(A-H,O-Z)
COMMON /BK/ a,b,r,GAMA,T_0,RO_0
COMMON /BK8/ T_1_A,RO_1_A
COMMON /BK2/ NP
EXTERNAL F,T,G,RO

C
a=161.1
b=0.00126
I_0=300
F_0=20000
r=0.3145*1000/28.96
GAMA=1.40
AM_1=2.50
EPS=0.0001
NP=100000

C
PAS=0.001
RO_0 GP=P_0/(R*T_0)

C
C
C
X1=0.0
Y1=P_0-VDW(T_0,X1)
X2=X1+PAS
Y2=P_0-VDW(T_0,X2)
PROD=Y1*Y2
IF (PROD.LE.0.0) GOTO 20
X1=X2
Y1=Y2
GOTO 10

20
DO 30 KK=1,135
X3=(X1+X2)/2
Y3=P_0-VDW(T_0,X3)
PROD=Y1*Y3
IF (PROD.GE.0.0) THEN
X2=X3
Y2=Y3
ELSE
X1=X3
Y1=Y3
ENDIF
30
CONTINUE
RO_0 VW=X3
RO_0=X3

C
WRITE(*,100) RO_0_GP,RO_0_VW

C
C
C
FACT=(GAMA-1)/2
VAL=1+FACT*AM_1**2
PUIS1=-1
PUIS2=-1/(GAMA-1)

C
C
C
T_1_A=T_0*VAL**PUIS1
RO_1_A=RO_0*VAL**PUIS2

C
T_1_GP=T_1_A
RO_1_GP=RO_1_A
D_1_GP=RO_1_GP*R*T_1_GP

C
35 F_1_A=VDW(T_1_A,RO_1_A)
C

```

```

C
C
D1=O(T_1 A,RO_1 A)
Q1=O(T_1 A,RO_1 A)
TERM=(AM_1+C_S(T_1 A,RO_1 A))**2
CALL INTEGRALE(F_1,? 0,T_1 A,F1)
CALL INTEGRALE(G_1,RO_0,RO_1 A,G1)

C
T_1 N=T_0-(GAMA-1)/(2*GAMA*R)+(2*D1+2*Q1+TERM)
RO_1 N=RO_0*DEXP(F1+G1)
P_1 N=VDW(T_1 A,RO_1 A)
write(*,*) iter,T_1 GP,T_1 N
write(*,*) iter,RO_1 GP,RO_1 N
write(*,*)

C
C
ER_T=DABS(T_1 N-T_1 A)
ER_RO=DABS(RO_1 N-RO_1 A)
ERMAX=DMAX1(ER_T,ER_RO)
IF(ERMAX.LE.EPS) GOTO 200
ITER=ITER+1
T_1 A=T_1 N
RO_1 A=RO_1 N
GOTO 30

200 write(*,*) 'ITER=',ITER
write(*,*) 'T_1 N=',T_1 N,' I_1 GP=',I_1 GP
write(*,*) 'RO_1 N=',RO_1 N,' RO_1 GP=',RO_1 GP
write(*,*) 'P_1 N=',P_1 N,' P_1 GP=',P_1 GP

C
STOP
100 FORMAT(5X,'RO_0 GP=',F20.15,5X,'RO_0 VW=',F20.15)
END
PAUSE

C
C
DOUBLE PRECISION FUNCTION VDW(T,RO)
IMPLICIT DOUBLE PRECISION (A-H,O-Z)
COMMON /BK/ a,b,R,GAMA,T_0,RO_0
VDW=R*T/(1-b*RO)-a*RO*RO
RETURN
*

C
C
DOUBLE PRECISION FUNCTION D (T,RO)
IMPLICIT DOUBLE PRECISION (A-H,O-Z)
COMMON /BK/ a,b,R,GAMA,T_0,RO_0
ANOM=R*T-2*a*(1-b*RO)*(1-b*RO)*RO
DENOM=R*T_0-2*a*(1-b*RO)*(1-b*RO)*RO
D=GAMA/(GAMA-1)*a*RO*(1-b*RO)*(1-b*RO)+DLOC(ANOM/DENOM)
RETURN

C
DOUBLE PRECISION FUNCTION Q (T,RO)
IMPLICIT DOUBLE PRECISION (A-H,O-Z)
COMMON /BK/ a,b,R,GAMA,T_0,RO_0
ANOM=R*T*b
DENOM=(1-b*RO)*(1-b*RO_0)
Q=(RO-RO_0)*(ANOM/DENOM-2*a)
RETURN

C
C
DOUBLE PRECISION FUNCTION C RO (T,RO)
IMPLICIT DOUBLE PRECISION (A-H,O-Z)

```

```

COMMON /BK/ a,b,R,GAMA,T_0,RO_0
ANOM=R*T
DENO=R*T-2*a*(1-b*RO)*(1-b*RO)*RO
C_RO=GAMA*R/(GAMA-1)*ANOM/DENO
RETURN

```

C
C
C

```

DOUBLE PRECISION FUNCTION C_T (T,RO)
IMPLICIT DOUBLE PRECISION (A-H,O-Z)
COMMON /BK/ a,b,R,GAMA,T_0,RO_0
ANOM=R*T-b-2*a*(1-b*RO)*(1-b*RO)
DENO=(1-b*RO)*(1-b*RO)
C_T=ANOM/DENO
RETURN

```

C
C
C

```

DOUBLE PRECISION FUNCTION C_S (T,RO)
IMPLICIT DOUBLE PRECISION (A-H,O-Z)
COMMON /BK/ a,b,R,GAMA,T_0,RO_0
ANOM=2*a*RO*(1-b*RO)*(1-b*RO)
DENO=R*T
TERM=1-ANOM/DENO
C_S=GAMA*R*T/(1-b*RO)/(1-b*RO)+TERM
write(*,*) 'C_S=',C_S
C_S=BSQRT(C_S)
RETURN

```

C

C
C
C

```

DOUBLE PRECISION FUNCTION F_T (T)
IMPLICIT DOUBLE PRECISION (A-H,O-Z)
COMMON /BK/ a,b,R,GAMA,T_0,RO_0
COMMON /BK8/ T_1_A,RO_1_A
ANOM=C_RO(T,RO_0)
DENO=C_S(T,RO_1_A)*C_S(T,RO_1_A)
F_T=ANOM/DENO
RETURN

```

C
C
C

```

DOUBLE PRECISION FUNCTION G_RO (RO)
IMPLICIT DOUBLE PRECISION (A-H,O-Z)
COMMON /BK/ a,b,R,GAMA,T_0,RO_0
COMMON /BK8/ T_1_A,RO_1_A
ANOM=C_T(T_1_A,RO)
DENO=C_S(T_1_A,RO)*C_S(T_1_A,RO)
G_RO=ANOM/DENO
RETURN

```

C
C
C
C

CALCUL DE LA VALEUR D'UNE INTEGRALE DEFINIE D'UNE FONCTION
PAR LA METHODE DE TRAPEZE

```

SUBROUTINE INTEGRALE (F,AA,BB,AINTEG)
IMPLICIT DOUBLE PRECISION (A-H,O-Z)
COMMON /BK/ a,b,R,GAMA,T_0,RO_0
COMMON /BK2/ NF
EXTERNAL F

```

```

C      DX=(BB-AA)/NP
      SOME1=0.0
      DO 10 J=1, NP-1, 2
      XJ=AA+J*DX
      SOME1=SOME1+F(XJ)
10     CONTINUE
C
      SOME2=0.0
      DO 20 J=2, NP-2, 2
      XJ=AA+J*DX
      SOME2=SOME2+F(XJ)
20     CONTINUE
      SOME=4*SOME1+2*SOME2+F(AA)+F(BB)
      AINTEG=DX/3*SOME
      RETURN
      END
      subroutine integrale (G,cc,dd,ainteg)
      implicit double precision(a-h,o-z)
      common/bx/a,b,R,gamma,t_0,Rc_0
      common/bx2/np
      external G
      Dx=(dd-cc)/np
      some3=0.0
      do 5 I=1, np-2, 2
      xI=cc+I*Dx
      some3=some3+G(xI)
5     continue
      some4=0.0
      do 6 I=2, np-2, 2
      some4=some4+G(xI)
6     continue
      some5=4*some3+2*some4+G(cc)+G(dd)
      ainteg=DX/3*some5
      return
      end

```

Chapitre:IV

Résultats et Interpretations

Résultats (IV-1) T=300°C

P	p gaz parfait	p réel	erreur
20000.0	0.232232697900363	0.232265620090296	0.014
30000.0	0.346349046850544	0.348423109869140	0.021
40000.0	0.464465395800726	0.464597042184933	0.028
50000.0	0.580581744750907	0.580787409042288	0.035
60000.0	0.696698093701089	0.696994202420782	0.043
70000.0	0.812814442651270	0.813217414274920	0.050
80000.0	0.928930791601451	0.929457036534104	0.057
90000.0	1.0450471140551633	1.045713061102601	0.064
100000.0	1.161163489501814	1.161985479859510	0.071
110000.0	1.277279838451996	1.278274284658730	0.078
120000.0	1.393396187402177	1.394579467328929	0.085
130000.0	1.509512536352358	1.510901019673511	0.092
140000.0	1.625628885302540	1.627238933470580	0.099
150000.0	1.741745234252721	1.743593200472914	0.106
160000.0	1.857861583202903	1.859963812407930	0.113
170000.0	1.973977932153084	1.976350760977649	0.120
180000.0	2.090094281103266	2.092754037858670	0.127
190000.0	2.206210630053447	2.209173634702130	0.134
200000.0	2.322326979003628	2.325609543133678	0.141
210000.0	2.438443327953810	2.442061754753442	0.148
220000.0	2.554559676903991	2.558530261135992	0.155
230000.0	2.670676025854172	2.675015053830317	0.162
240000.0	2.786792374804354	2.791516124359779	0.170
250000.0	2.902908723754535	2.908033464222098	0.177
260000.0	3.019025072704717	3.024567064889303	0.184
270000.0	3.135141421654898	3.141116917807712	0.191
280000.0	3.251257770605079	3.257683014397896	0.198
290000.0	3.367374119555261	3.374265346054644	0.205
300000.0	3.483490468505442	3.490863904146936	0.212
310000.0	3.599606817455623	3.607478680017904	0.219
320000.0	3.715723166405805	3.724109664984810	0.226
330000.0	3.831839515355986	3.840756850339005	0.233
340000.0	3.947955864306168	3.957420227345898	0.240
350000.0	4.064072213256350	4.074099787244930	0.247
360000.0	4.180188562206532	4.190795521249536	0.254
370000.0	4.296304911156713	4.307507420547116	0.261
380000.0	4.412421260106894	4.424235476299001	0.268
390000.0	4.528537609057076	4.540979679640423	0.275
400000.0	4.644653958007257	4.657740021680480	0.282
410000.0	4.760770306957439	4.774516493502110	0.289
420000.0	4.876886655907620	4.891309086162052	0.296
430000.0	4.993003004857802	5.008117790690818	0.303
440000.0	5.109119353807983	5.124942598092659	0.310
450000.0	5.225235702758164	5.241783499345539	0.317
460000.0	5.341352051708345	5.358640485401092	0.324
470000.0	5.457468400658527	5.475513547184603	0.331
480000.0	5.573584749608708	5.592402675594966	0.338
490000.0	5.689701098558890	5.709307861504658	0.345

500000.0	5.805817447509071	5.826229095759702	0.352
510000.0	5.921933796459253	5.943166369179644	0.359
520000.0	6.038050145409434	6.060119672557509	0.366
530000.0	6.154166494359615	6.177088996659781	0.372
540000.0	6.270282843309796	6.294074332226367	0.379
550000.0	6.386399192259978	6.411075669970555	0.386
560000.0	6.502515541210159	6.528093000579003	0.393
570000.0	6.618631890160341	6.645126314711691	0.400
580000.0	6.734748239110522	6.762175603001894	0.407
590000.0	6.850864588060704	6.879240856056151	0.414
600000.0	6.966980937010885	6.996322064454234	0.421
610000.0	7.083097285961067	7.113419218749112	0.428
620000.0	7.199213634911247	7.230532309466929	0.435
630000.0	7.315329983861429	7.347661327106961	0.442
640000.0	7.431446332811610	7.464806262141593	0.449
650000.0	7.547562681761792	7.581967105016278	0.456
660000.0	7.663679030711973	7.699143846149519	0.463
670000.0	7.779795379662155	7.816336475932825	0.470
680000.0	7.895911728612337	7.933544984730690	0.477
690000.0	8.012028077562517	8.050769362880551	0.484
700000.0	8.128144426512700	8.168009600692759	0.490
710000.0	8.244260775462880	8.285265688450559	0.497
720000.0	8.360377124413063	8.402537616410045	0.504
730000.0	8.476493473363243	8.519825374800132	0.511
740000.0	8.592609822313423	8.637128953822530	0.518
750000.0	8.708726171263606	8.754448343651703	0.525
760000.0	8.824842520213787	8.871783534434850	0.532
770000.0	8.940958869163969	8.989134516291865	0.539
780000.0	9.057075218114150	9.106501279315306	0.546
790000.0	9.173191567064332	9.223883813570366	0.553
800000.0	9.289307916014513	9.341282109094842	0.560
810000.0	9.405424264964695	9.458696155899106	0.566
820000.0	9.521540613914876	9.576125943966065	0.573
830000.0	9.637656962865056	9.693571463251140	0.580
840000.0	9.753773311815239	9.811032703682236	0.587
850000.0	9.869889660765419	9.928509655159694	0.594
860000.0	9.986006009715602	10.046002307556278	0.601
870000.0	10.102122358665784	10.163510650717140	0.608
880000.0	10.218238707615964	10.281034674459783	0.615
890000.0	10.334355056566146	10.398574368574034	0.621
900000.0	10.450471405516326	10.516129722822009	0.628
910000.0	10.566587754466509	10.633700726938095	0.635
920000.0	10.682704103416688	10.751287370628903	0.642
930000.0	10.798820452366872	10.868889643573242	0.649
940000.0	10.914936801317051	10.986507535422099	0.656
950000.0	11.031053150267236	11.104141035798587	0.663
960000.0	11.147169499217415	11.221790134297934	0.669
970000.0	11.263285848167599	11.339454820487444	0.676
980000.0	11.379402197117778	11.457135083906466	0.683
990000.0	11.495518546067959	11.574830914066362	0.690
1000000.0	11.611634895018141	11.692542300450481	0.697

Résultats (IV-2) T=600°K

P	ρ gaz parfait	ρ gaz réel	erreur
20000.0	0.116116348950181	0.116111969094203	0.004
30000.0	0.174174523425272	0.174164666324641	0.006
40000.0	0.232232697900363	0.232215169855515	0.008
50000.0	0.290290872375454	0.290263478070623	0.009
60000.0	0.348349046850544	0.348309589353876	0.011
70000.0	0.406407221325635	0.406353502089298	0.013
80000.0	0.464465395800726	0.464395214661027	0.015
90000.0	0.522523570275816	0.522434725453312	0.017
100000.	0.580581744750907	0.580472032850518	0.019
110000.	0.638639919225998	0.638507135237126	0.021
120000.	0.696698093701089	0.696540030997730	0.023
130000.	0.754756268176179	0.754570718517040	0.025
140000.	0.812814442651270	0.812599196179883	0.026
150000.	0.870872617126361	0.870625462371200	0.028
160000.	0.928930791601451	0.928649515476053	0.030
170000.	0.986988966076542	0.986671353879616	0.032
180000.	1.045047140551633	1.044690975967185	0.034
190000.	1.103105315026723	1.102708380124172	0.036
200000.	1.161163489501814	1.160723564736109	0.038
210000.	1.219221663976905	1.218736528189645	0.040
220000.	1.277279838451996	1.276747268867551	0.042
230000.	1.335338012927086	1.334755785158716	0.044
240000.	1.393396187402177	1.392762075448151	0.046
250000.	1.451454361877268	1.450766138121985	0.047
260000.	1.509512536352358	1.508767971566473	0.049
270000.	1.567570710827449	1.566767574167986	0.051
280000.	1.625628885302540	1.624764944313022	0.053
290000.	1.683687059777631	1.682760080388198	0.055
300000.	1.741745234252721	1.740752980780258	0.057
310000.	1.799803408727812	1.798743643876065	0.059
320000.	1.857861583202903	1.856732068062609	0.061
330000.	1.915919757677993	1.914716251727003	0.063
340000.	1.973977932153084	1.972702193256485	0.065
350000.	2.032036106628175	2.030683891038419	0.067
360000.	2.090094281103266	2.088663343460293	0.068
370000.	2.148152455578356	2.146640548909724	0.070
380000.	2.206210630053447	2.204615505774452	0.072
390000.	2.264268804528538	2.262588212442347	0.074
400000.	2.322326979003628	2.320558667301405	0.076
410000.	2.380385153478719	2.378526868739750	0.078
420000.	2.438443327953810	2.436492815145634	0.080
430000.	2.496501502428901	2.494456504907439	0.082
440000.	2.554559676903991	2.552417936413674	0.084
450000.	2.612617851379082	2.610377108052981	0.086
460000.	2.670676025854172	2.668334018214130	0.088
470000.	2.728734200329263	2.726288665286019	0.090
480000.	2.786792374804354	2.784241047657683	0.092
490000.	2.844850549279445	2.842191163718284	0.093
500000.	2.902908723754535	2.900139011857117	0.095

510000.	2.960966898229626	2.958084590463609	0.097
520000.	3.019025072704717	3.016027897927320	0.099
530000.	3.077083247179807	3.073968932637943	0.101
540000.	3.135141421654898	3.131907692985307	0.103
550000.	3.193199596129989	3.189844177359369	0.105
560000.	3.251257770605079	3.247778384150230	0.107
570000.	3.309315945080170	3.305710311748115	0.109
580000.	3.367374119555261	3.363639958543392	0.111
590000.	3.425432294030352	3.421567322926564	0.113
600000.	3.483490468505442	3.479492403288267	0.115
610000.	3.541548642980533	3.537415198019276	0.117
620000.	3.599606817455623	3.595335705510503	0.119
630000.	3.657664991930714	3.653253924152998	0.121
640000.	3.715723166405805	3.711169852337948	0.123
650000.	3.773781340880896	3.769083488456678	0.124
660000.	3.831839515355986	3.826994830900655	0.126
670000.	3.889897689831077	3.884903878061482	0.128
680000.	3.947955864306168	3.942810628330904	0.130
690000.	4.006014038781259	4.000715080100604	0.132
700000.	4.064072213256350	4.058617231763208	0.134
710000.	4.122130387731440	4.116517081710281	0.136
720000.	4.180188562206532	4.174414628334333	0.138
730000.	4.238246736681622	4.232309870027811	0.140
740000.	4.296304931156713	4.290202805183310	0.142
750000.	4.354363085631803	4.348093432193562	0.144
760000.	4.412421260106894	4.405981749451449	0.146
770000.	4.470479434581985	4.463867755349991	0.148
780000.	4.528537609057076	4.521751448282355	0.150
790000.	4.586595783532166	4.579632826641854	0.152
800000.	4.644653958007257	4.637511988821941	0.154
810000.	4.702712132482348	4.695388633216220	0.156
820000.	4.760770306957439	4.753263058218437	0.158
830000.	4.818828481432529	4.811135162222489	0.160
840000.	4.876886655907620	4.869004943622416	0.162
850000.	4.934944830382710	4.926872400812406	0.164
860000.	4.993003004657802	4.984737532186797	0.166
870000.	5.051061179332891	5.042600336140070	0.168
880000.	5.109119353807983	5.100460811066861	0.169
890000.	5.167177528283073	5.158318955361952	0.171
900000.	5.225235702758164	5.216174767420274	0.17
910000.	5.283293877233254	5.274028245636908	0.175
920000.	5.341352051708345	5.331879388407086	0.177
930000.	5.399410226183436	5.389728194126193	0.179
940000.	5.457468400658527	5.447574661189762	0.181
950000.	5.515526575133617	5.505418787993479	0.183
960000.	5.573584749608708	5.563260572933181	0.185
970000.	5.631642924083799	5.621100014404861	0.187
980000.	5.689701098558890	5.678937110804661	0.189
990000.	5.747759273033981	5.736771860528880	0.191
1000000.	5.805817447509071	5.794604261973967	0.193

Résultats (IV-3) avec $T=1000^{\circ}\text{K}$

P	ρ gaz parfait	ρ gaz réel	erreur
20000.	0.069669809370109	0.069666417223434	0.005
30000.	0.104504714055163	0.104497081492844	0.007
40000.	0.139339618740218	0.139326049327647	0.010
50000.	0.174174523425272	0.174153320573123	0.012
60000.	0.209009428110327	0.208978895074616	0.015
70000.	0.243844332795381	0.243802772677535	0.017
80000.	0.278679237480435	0.278624953227355	0.019
90000.	0.313514142165490	0.313445436569617	0.022
100000.	0.348349046850544	0.348264222549923	0.024
110000.	0.383183951535599	0.383081311013945	0.027
120000.	0.418018856220653	0.417896701807418	0.029
130000.	0.452853760905708	0.452710394776140	0.032
140000.	0.487688665590762	0.487522389765978	0.034
150000.	0.522523570275816	0.522332686622861	0.037
160000.	0.557358474960871	0.557141285192785	0.039
170000.	0.592193379645925	0.591948185321809	0.041
180000.	0.627028284330980	0.626753386856060	0.044
190000.	0.661863189016034	0.661556889641728	0.046
200000.	0.696698093701089	0.696358693525067	0.049
210000.	0.731532998386143	0.731158798352400	0.051
220000.	0.766367903071197	0.765957203970112	0.054
230000.	0.801202807756252	0.800753910224654	0.056
240000.	0.836037712441306	0.835548916962540	0.058
250000.	0.870872617126361	0.870342224030354	0.061
260000.	0.905707521811415	0.905133831274741	0.063
270000.	0.940542426496470	0.939923738542412	0.066
280000.	0.975377331181524	0.974711945680144	0.068
290000.	1.010212235866578	1.009498452534778	0.071
300000.	1.045047140551633	1.044283258953221	0.073
310000.	1.079882045236687	1.079066364782445	0.076
320000.	1.114716949921742	1.113847769869487	0.078
330000.	1.149551854606796	1.148627474061449	0.080
340000.	1.184386759291850	1.183405477205497	0.083
350000.	1.219221663976905	1.218181779148866	0.085
360000.	1.254056568661959	1.252956379738851	0.088
370000.	1.288891473347014	1.287729278822816	0.090
380000.	1.323726378032068	1.322500476248189	0.093
390000.	1.358561282717122	1.357269971862462	0.095
400000.	1.393396187402177	1.392037765513192	0.097
410000.	1.428231092087231	1.426803857048005	0.100
420000.	1.463065996772286	1.461568246314589	0.102
430000.	1.497900901457340	1.496330933160695	0.105
440000.	1.532735806142395	1.531091917434144	0.107
450000.	1.567570710827449	1.565851198982819	0.110
460000.	1.602405615512503	1.600608777654670	0.112
470000.	1.637240520197558	1.635364653297710	0.115
480000.	1.672075424882612	1.670118825760020	0.117
490000.	1.706910329567667	1.704871294889742	0.119
500000.	1.741745234252721	1.739622060535088	0.122

510000.	1.776580138937776	1.774371122544332	0.124
520000.	1.811415043622830	1.809118480765815	0.127
530000.	1.846249948307884	1.843864135047941	0.129
540000.	1.881084852992939	1.878608085239181	0.132
550000.	1.915919757677993	1.913350331188071	0.134
560000.	1.950754662363048	1.948090872743212	0.137
570000.	1.985589567048102	1.982829709753269	0.139
580000.	2.020424471733157	2.017566842066975	0.141
590000.	2.055259376418211	2.052302269533125	0.144
600000.	2.090094281103266	2.087035992000580	0.146
610000.	2.124929185788320	2.121768009318269	0.149
620000.	2.159764090473374	2.156498321335184	0.151
630000.	2.194598995158479	2.191226927900379	0.154
640000.	2.229433899843483	2.225953828862981	0.156
650000.	2.264268804528538	2.260679024072175	0.159
660000.	2.299103709213592	2.295402513377214	0.161
670000.	2.333938613898646	2.330174296627417	0.163
680000.	2.368773518583701	2.364844373672167	0.166
690000.	2.403608423268755	2.399562744360913	0.168
700000.	2.438443327953810	2.434279408543168	0.171
710000.	2.473278232638864	2.468994366068512	0.173
720000.	2.508113137323919	2.503707616786589	0.176
730000.	2.542948042008973	2.538419160547107	0.178
740000.	2.577782946694028	2.573128997199843	0.181
750000.	2.612617851379082	2.607837126594637	0.183
760000.	2.647452756064136	2.642543548591392	0.185
770000.	2.682287660749190	2.677248263010081	0.188
780000.	2.717122565434245	2.711951269730737	0.190
790000.	2.751957470119300	2.746652568593465	0.193
800000.	2.786792374804354	2.781352159448428	0.195
810000.	2.821627279489408	2.816050042145857	0.198
820000.	2.856462184174463	2.850746216536051	0.200
830000.	2.891297088859517	2.885440682469371	0.203
840000.	2.926131993544572	2.920133439796244	0.205
850000.	2.960966898229626	2.954824488367163	0.207
860000.	2.995801802914681	2.989513828032687	0.210
870000.	3.030636707599735	3.024201458643436	0.212
880000.	3.0654711612284790	3.058887380050100	0.215
890000.	3.100306516969844	3.093571592103434	0.217
900000.	3.135141421654898	3.128254094654255	0.220
910000.	3.169976326339952	3.162934887553446	0.222
920000.	3.204811231025007	3.197613970651961	0.225
930000.	3.239646135710061	3.232291343800809	0.227
940000.	3.274481040395116	3.266967006851074	0.229
950000.	3.309315945080170	3.301640959653901	0.232
960000.	3.344150849765225	3.336313202060498	0.234
970000.	3.378985754450279	3.370983733922143	0.237
980000.	3.413820659135334	3.405652555090177	0.239
990000.	3.448655563820388	3.440319665416006	0.242
1000000.	3.483490468505442	3.474985064751102	0.244

Résultats (IV-5) $P=1 \text{ bar} = 10^5 \text{ Pascal}$.

T	ρ gaz parfait	ρ gaz réel	erreur
300.0	1.161163489501814	1.161985479859510	0.071
350.0	0.995282991001555	0.995621822748003	0.034
400.0	0.870872617126361	0.870980029320767	0.012
450.0	0.774108993001209	0.774100519521523	0.001
500.0	0.696698093701089	0.696630770590891	0.010
550.0	0.633361903364626	0.633265392610818	0.015
600.0	0.580581744750907	0.580472032850518	0.019
650.0	0.535921610539299	0.535807497698022	0.021
700.0	0.497641495500778	0.497527355147046	0.023
750.0	0.464465395800726	0.464354891219610	0.024
800.0	0.435436308563180	0.435330332484577	0.024
850.0	0.409822408059464	0.409721613309059	0.025
900.0	0.387054496500605	0.386959103348486	0.025
950.0	0.366683207211099	0.366593184932826	0.025
1000.0	0.348349046850544	0.348264222549923	0.024

Résultat (IV-7) $P=10 \text{ bar} = 10^6 \text{ Pascal}$:

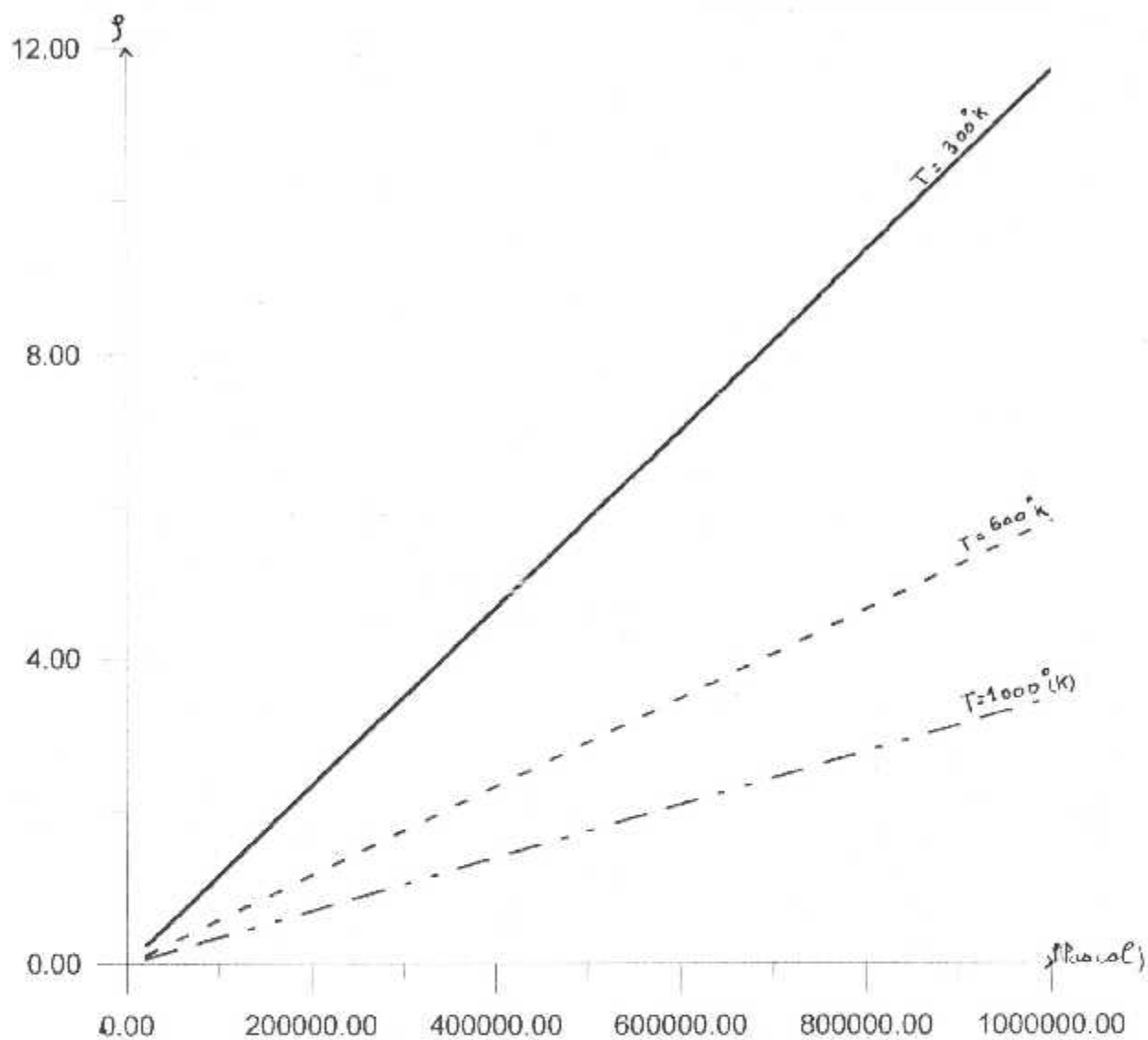
T	ρ gaz parfait	ρ gaz réel	erreur
300.0	11.611634895018141	11.692542300450481	0.697
350.0	9.952829910015550	9.985469446801340	0.328
400.0	8.708726171263606	8.718530337131943	0.113
450.0	7.741089930012094	7.739573310777193	0.020
500.0	6.966980937010885	6.959774917345113	0.103
550.0	6.333619033646259	6.323630993181856	0.158
600.0	5.805817447509071	5.794604261973967	0.193
650.0	5.359216105392989	5.347629180257328	0.216
700.0	4.976414955007776	4.964922137868986	0.231
750.0	4.644653958007257	4.633508213784177	0.240
800.0	4.354363085631803	4.343694428294647	0.245
850.0	4.098224080594639	4.088091297922561	0.247
900.0	3.870544965006047	3.860965470272362	0.247
950.0	3.666832072110992	3.657799474815223	0.246
1000.	3.483490468505442	3.474985064751102	0.244

Résultats (IV-6) $P=5 \text{ bar} = 10^5 \text{ Pascal}$

T	ρ gaz parfait	ρ gaz réel	erreur
300.0	5.805817447509071	5.826229095759702	0.352
350.0	4.976414955007776	4.984749805777205	0.167
400.0	4.354363085631803	4.356945159268549	0.059
450.0	3.870544965006047	3.870259093384636	0.007
500.0	3.483490468505442	3.481754856864812	0.050
550.0	3.166809516823129	3.164359315874568	0.077
600.0	2.902908723754535	2.900139011857117	0.095
650.0	2.679608052696494	2.676735679784695	0.107
700.0	2.488207477503888	2.485352123110534	0.115
750.0	2.322326979003628	2.319553744160457	0.119
800.0	2.177181542815901	2.174524218053321	0.122
850.0	2.049112040297319	2.046586224558545	0.123
900.0	1.935272482503024	1.932883169427819	0.123
950.0	1.833416036055496	1.831162088272863	0.123
1000.0	1.741745234252721	1.739622060535088	0.122

RESULTATS (L, λ)	erre f(p) : $T = 450^\circ \text{K}$		
P	ρ gaz parfait	ρ gaz réel	erreur
20000.0	0.154821798600242	0.154821483248847	0.000
30000.0	0.232232697900363	0.232231981729937	0.000
40000.0	0.309643597200484	0.309642312220152	0.000
50000.0	0.387054496500605	0.387052470295962	0.001
60000.0	0.464465395800726	0.464462451532210	0.001
70000.0	0.541876295100847	0.541872251502112	0.001
80000.0	0.619287194400968	0.619281865777257	0.001
90000.0	0.696698093701089	0.696691289927612	0.001
100000.0	0.774108993001209	0.774100919521523	0.001
110000.0	0.851519892301330	0.851509550128714	0.001
120000.0	0.928930791601451	0.928918377305293	0.001
130000.0	1.006341690901572	1.006326996623749	0.001
140000.0	1.083752590201693	1.083735403642960	0.002
150000.0	1.161163489501814	1.161143593923186	0.002
160000.0	1.238574388801935	1.238551563023081	0.002
170000.0	1.315985288102056	1.315959306499687	0.002
180000.0	1.393396187402177	1.393366819908437	0.002
190000.0	1.470807086702298	1.4707740988803182	0.002
200000.0	1.548217986002419	1.548181138736086	0.002
210000.0	1.625628885302540	1.625587935257831	0.003
220000.0	1.703039784602661	1.702994483917420	0.003
230000.0	1.780450683902781	1.780400780262277	0.003
240000.0	1.857861583202903	1.857806819838227	0.003
250000.0	1.935272482503024	1.935212598189502	0.003
260000.0	2.012683381803145	2.012618110858742	0.003
270000.0	2.090094281103266	2.090023353386990	0.003
280000.0	2.167505180403386	2.167428321313707	0.004
290000.0	2.244916079703507	2.244833010176760	0.004
300000.0	2.322326979003628	2.322237415512432	0.004
310000.0	2.399737878303749	2.399641532855422	0.004
320000.0	2.477148777603870	2.4770453557738648	0.004
330000.0	2.554559676903991	2.554448885694244	0.004
340000.0	2.631970576204112	2.631852112251567	0.005
350000.0	2.709381475504233	2.709255032939197	0.005
360000.0	2.786792374804354	2.786657643283939	0.005
370000.0	2.864203274104475	2.864059936811025	0.005
380000.0	2.941614173404596	2.941461915044115	0.005
390000.0	3.019025072704717	3.018863567505298	0.005
400000.0	3.096435972004837	3.096264881715097	0.006
410000.0	3.173846871304958	3.173665883192470	0.006
420000.0	3.251257770605079	3.251066537454807	0.006
430000.0	3.328668669905200	3.328466850017940	0.006
440000.0	3.406079569205321	3.405866816396137	0.006
450000.0	3.483490468505442	3.483266432102111	0.006
460000.0	3.560901367805563	3.560665692647014	0.007
470000.0	3.638312267105684	3.638064593540448	0.007
480000.0	3.715723166405805	3.715463130290457	0.007
490000.0	3.793134065705926	3.792861298403538	0.007
500000.0	3.870544965006047	3.870259093384636	0.007
510000.0	3.947955864306168	3.947656510737149	0.008
520000.0	4.025366763606290	4.025053545962932	0.008
530000.0	4.102777662906411	4.102450194562291	0.008
540000.0	4.180188562206532	4.179846452033990	0.008
550000.0	4.257599461506652	4.257242313875277	0.008
560000.0	4.335010360806773	4.334637775881818	0.008
570000.0	4.412421260106894	4.412032832647775	0.009
580000.0	4.489832159407015	4.489427480565768	0.009
590000.0	4.567243058707136	4.566821714825883	0.009
600000.0	4.644653958007257	4.644215530920675	0.009

610000,0	4.722064857307378	4.721608924335178	0.010
620000,0	4.799475756607499	4.799001890556870	0.010
630000,0	4.876886655907620	4.876394425070766	0.010
640000,0	4.954297555207741	4.953786523360291	0.010
650000,0	5.031708454507862	5.031178180907304	0.011
660000,0	5.109118353807983	5.108569393192458	0.011
670000,0	5.186530253108104	5.185960155694412	0.011
680000,0	5.263941152408224	5.263350463890623	0.011
690000,0	5.341352051708345	5.340740313256964	0.011
700000,0	5.418762951008466	5.418129699267784	0.012
710000,0	5.496172850308587	5.495518617395936	0.012
720000,0	5.573584749608708	5.572907063112757	0.012
730000,0	5.650995648908829	5.650295031888080	0.012
740000,0	5.728406548208950	5.727682519190235	0.013
750000,0	5.805817447509071	5.805069520486052	0.013
760000,0	5.883228346809192	5.882456031240856	0.013
770000,0	5.960639246109313	5.959842046918483	0.013
780000,0	6.038050145409434	6.037227562981263	0.014
790000,0	6.115461044709555	6.114612574890039	0.014
800000,0	6.192871944009675	6.191997070104156	0.014
810000,0	6.270282843309796	6.269381068081476	0.014
820000,0	6.347693742609917	6.346764540278371	0.015
830000,0	6.425104641910038	6.424147490149720	0.015
840000,0	6.502515541210159	6.501529913148929	0.015
850000,0	6.579926440510280	6.578911804727912	0.015
860000,0	6.657337339810401	6.656293160337108	0.016
870000,0	6.734748239110522	6.733673975425477	0.016
880000,0	6.812159138410643	6.811054245440500	0.016
890000,0	6.889570037710764	6.888433965828187	0.016
900000,0	6.966980937010885	6.965813132033076	0.017
910000,0	7.044391836311006	7.043191739498230	0.017
920000,0	7.121802735611126	7.120569783665249	0.017
930000,0	7.199213634911247	7.197947259974261	0.018
940000,0	7.276624534211368	7.275324163863935	0.018
950000,0	7.354035433511489	7.352700490771475	0.018
960000,0	7.431446332811610	7.430076236132625	0.018
970000,0	7.508857232111731	7.507451395381670	0.019
980000,0	7.586268131411852	7.584825963951439	0.019
990000,0	7.663679030711973	7.662199937273307	0.019
1000000,0	7.741089930012094	7.739573310777193	0.020

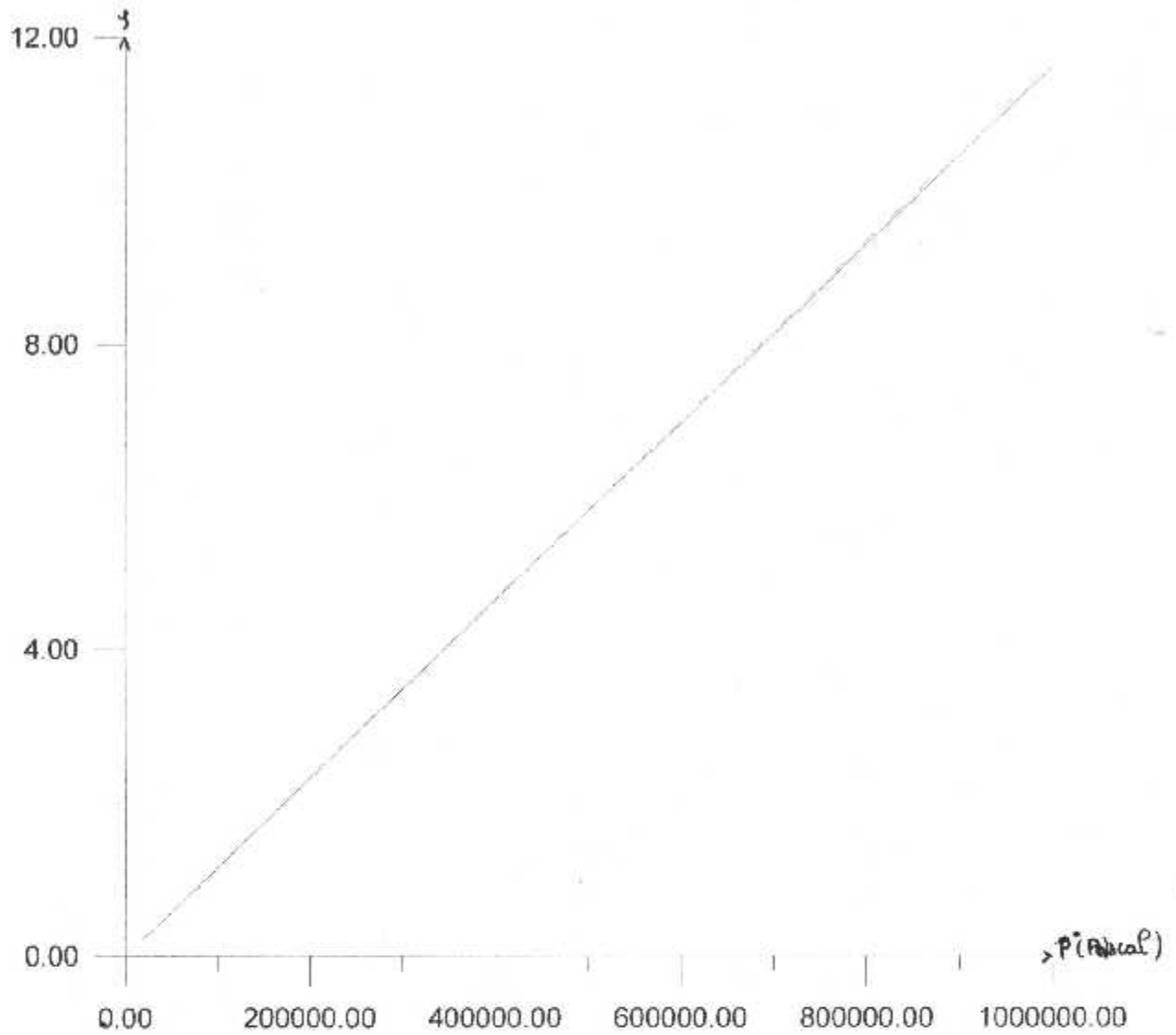


GRAPHE (IV-4) de gaz réel $z = f(p)$ avec $T = cte$

— $T = 300^\circ K$

--- $T = 600^\circ K$ $P = [0.2 - 10] \text{ bar} = [2 \cdot 10^4 - 10^6] \text{ Pascal}$

- · - $T = 1000^\circ K$

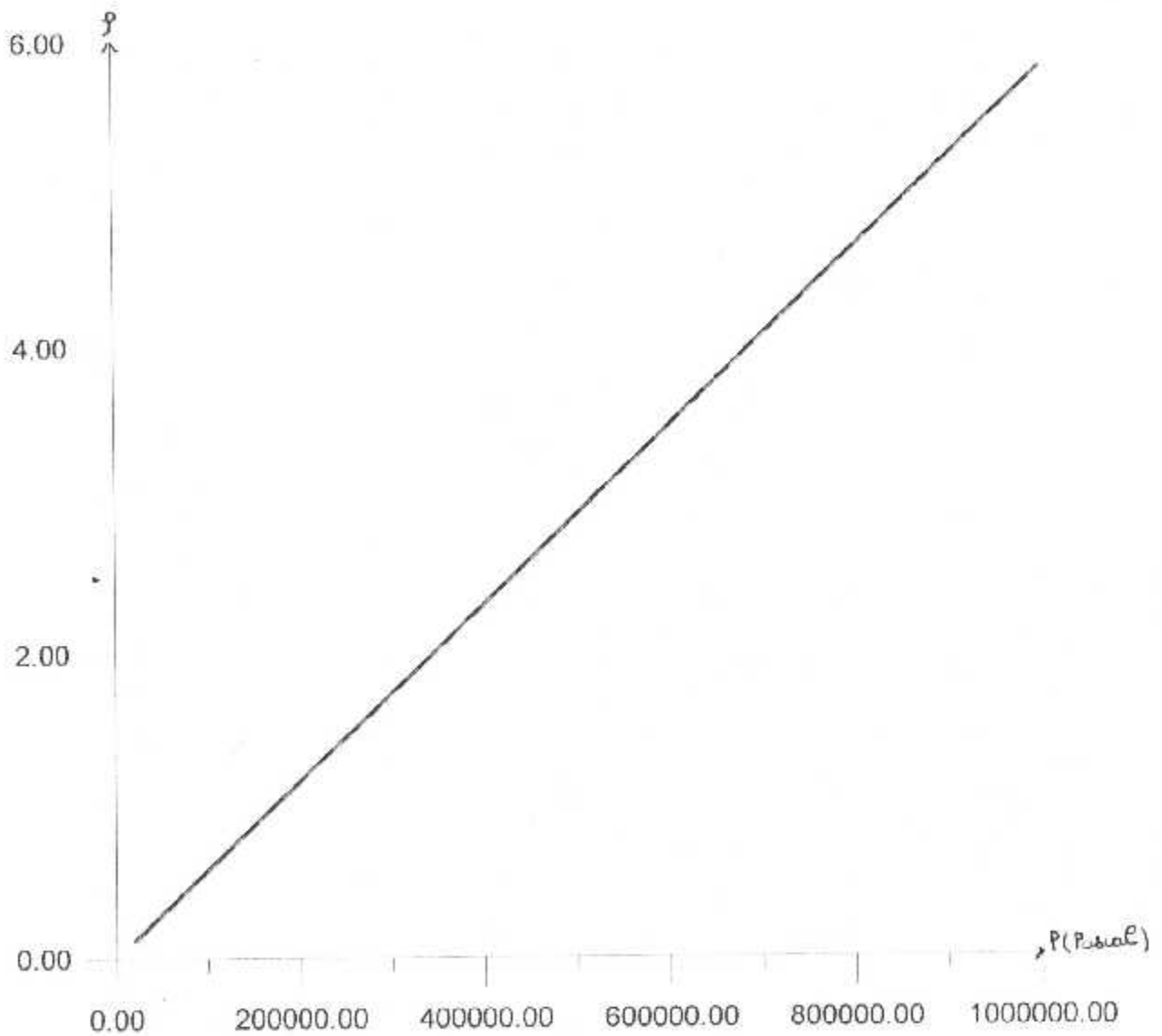


GRAPHE (IV-01) $\rho = f(P)$ avec $T = 300^\circ\text{K}$

— Gaz parfait

$$P = [0.2 - 10] \text{ bar} = [2 \cdot 10^4 - 10^6] \text{ Pascal}$$

— Gaz réel

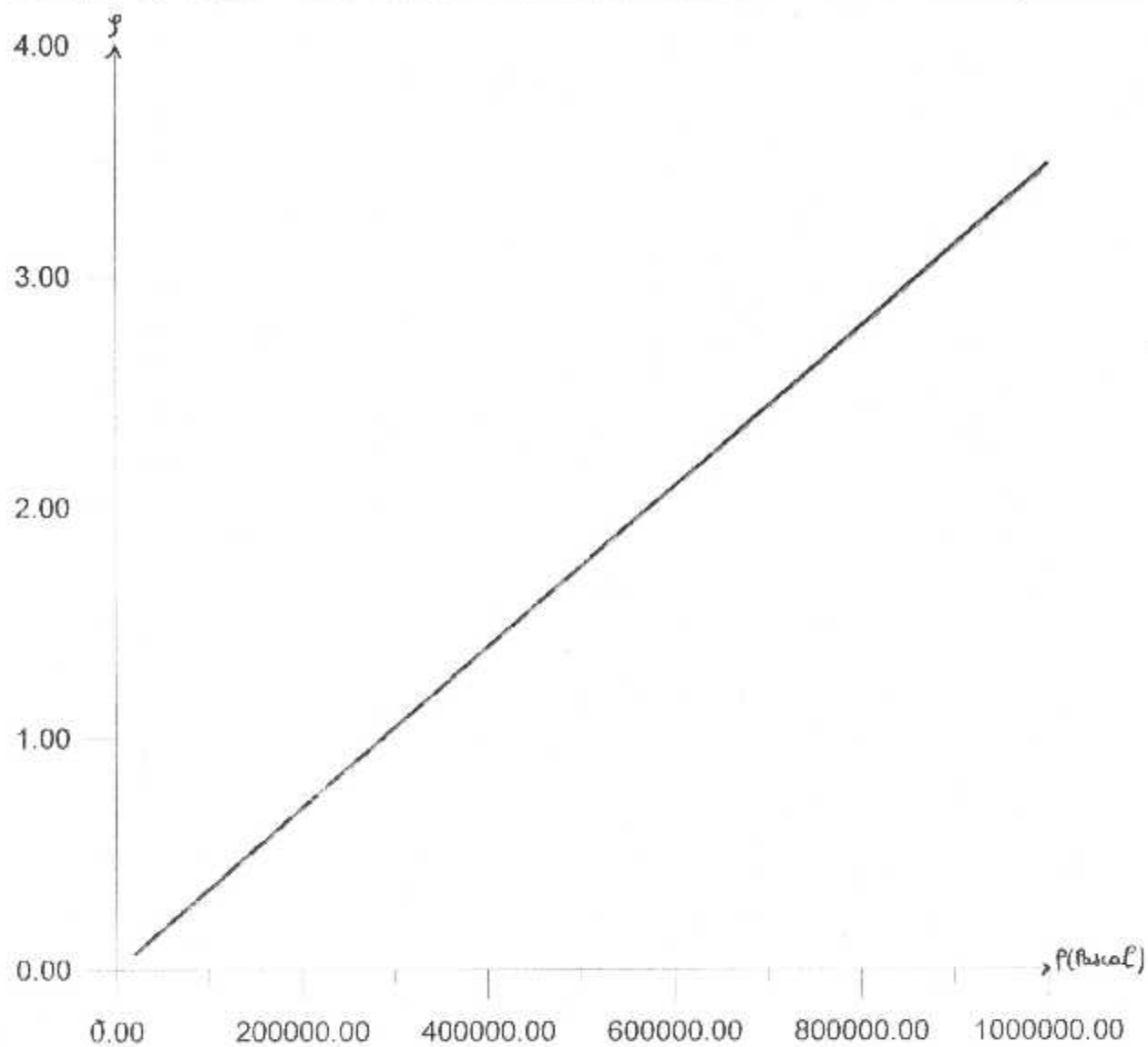


GRAPHE (IV-2) $\rho = f(P)$ avec $T=600^{\circ}\text{K}$

— Gaz parfait

— Gaz réel

$$P = [0.2 - 10] \text{ bar} = [2 \cdot 10^4 - 10^6] \text{ Pascal}$$



GRAPHE (IV-3) $\rho = f(P)$ avec $T=1000^{\circ}\text{K}$

— Gaz parfait

$$P = [0.2 - 10] \text{ bar} = [20000 - 10.0^6] \text{ Pascal}$$

— Gaz réel

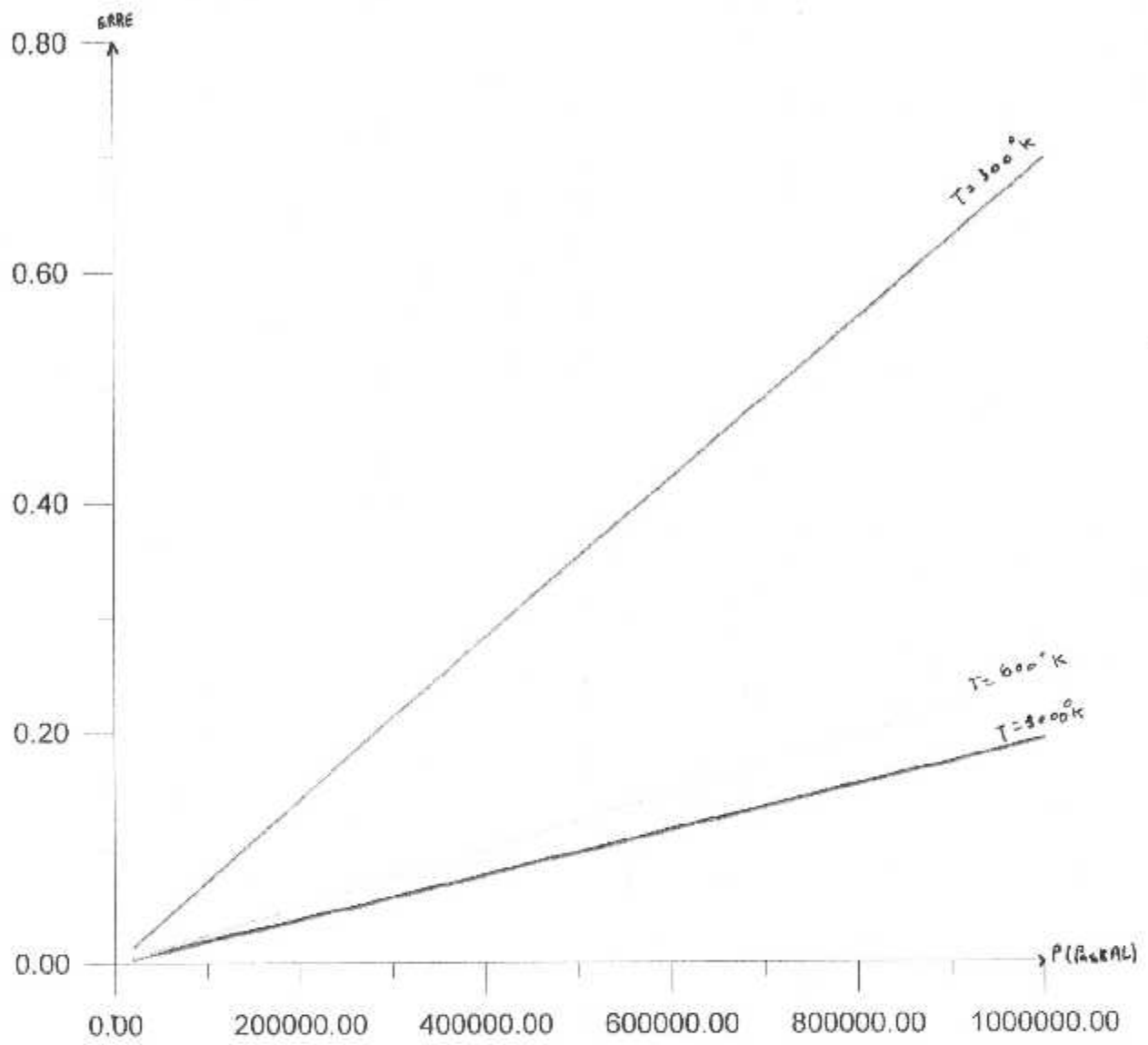


fig.(2,4) : erro = $\Gamma(P)$

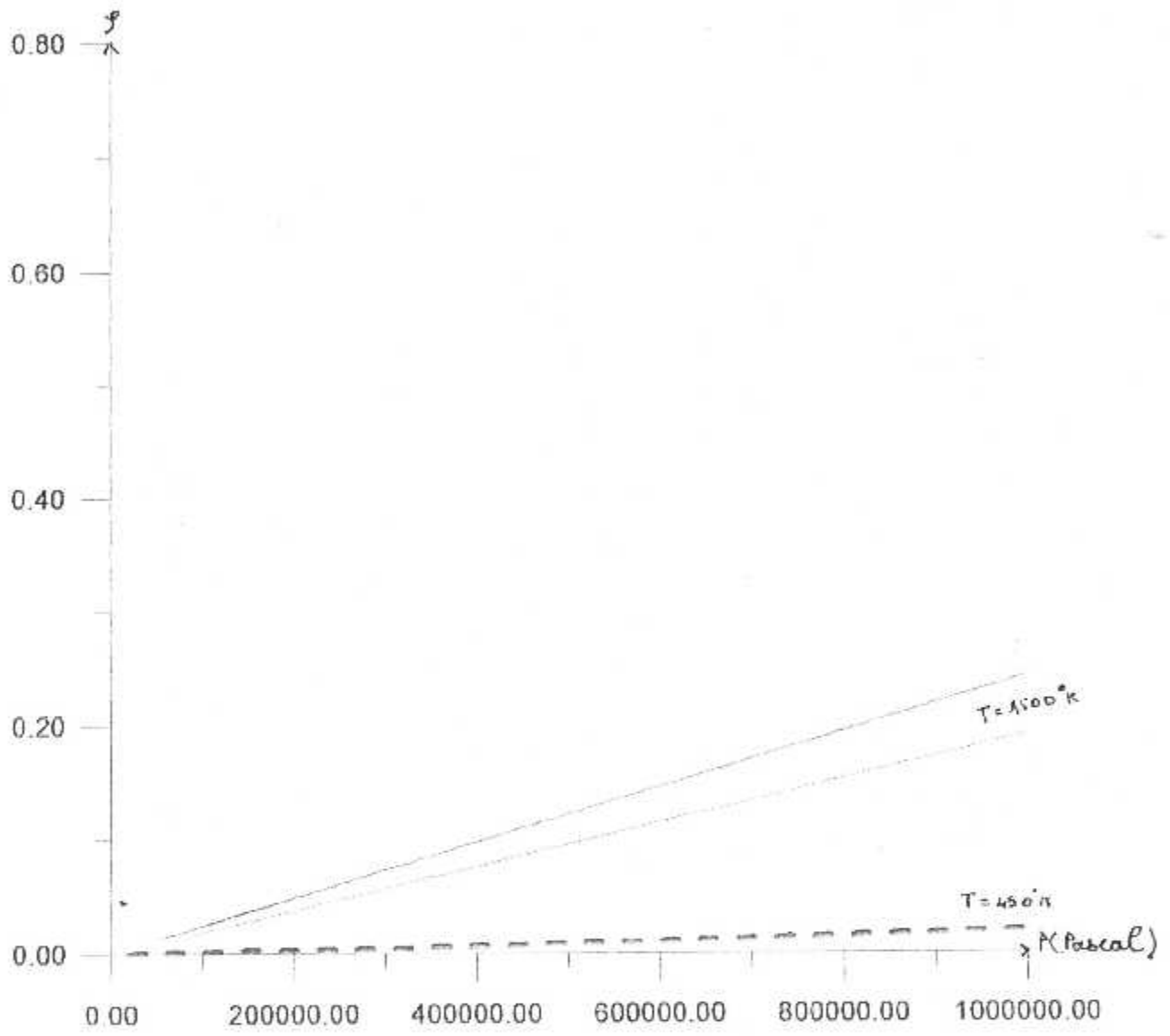
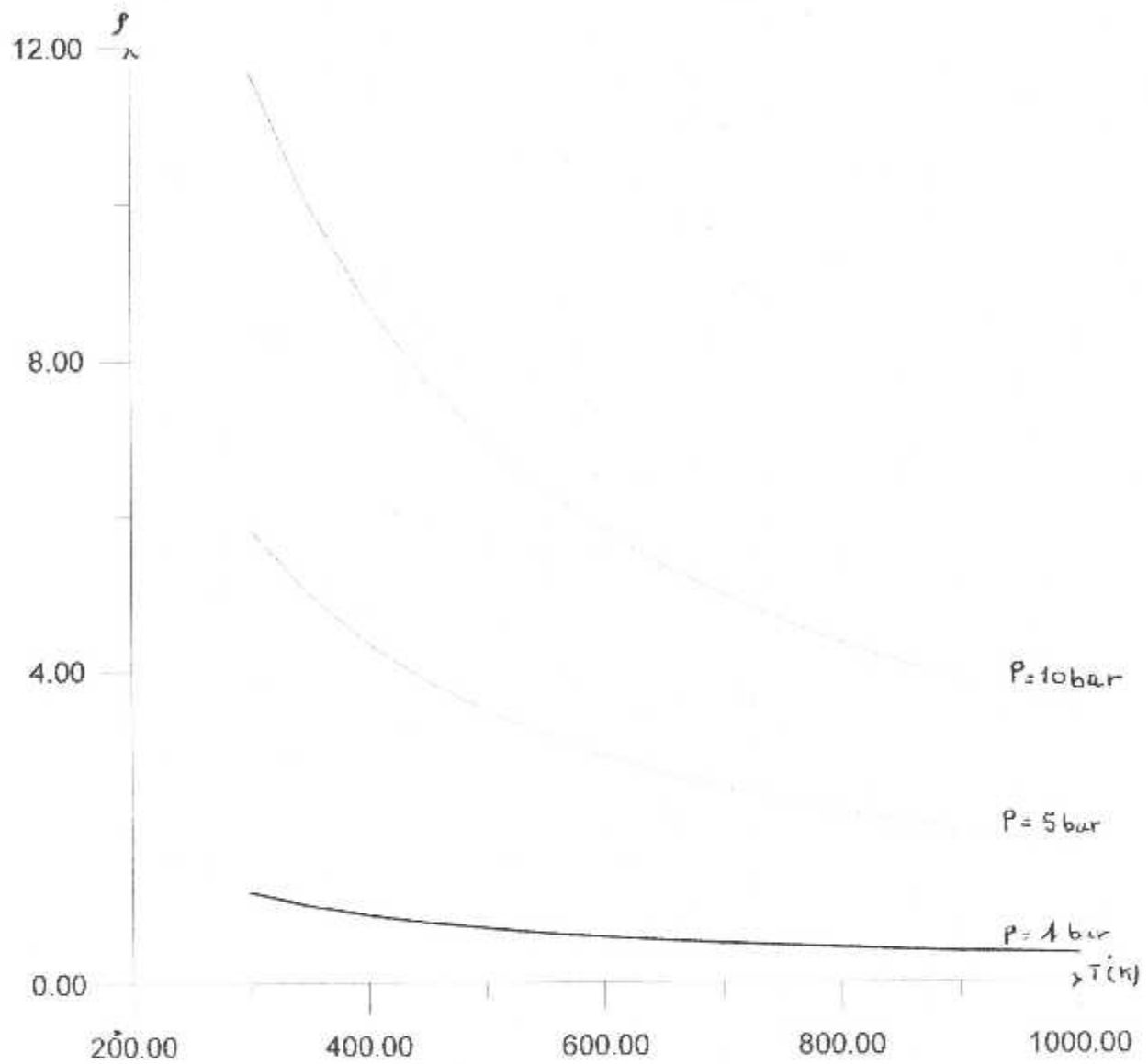


Fig: (3-4) erro = $f(P)$.

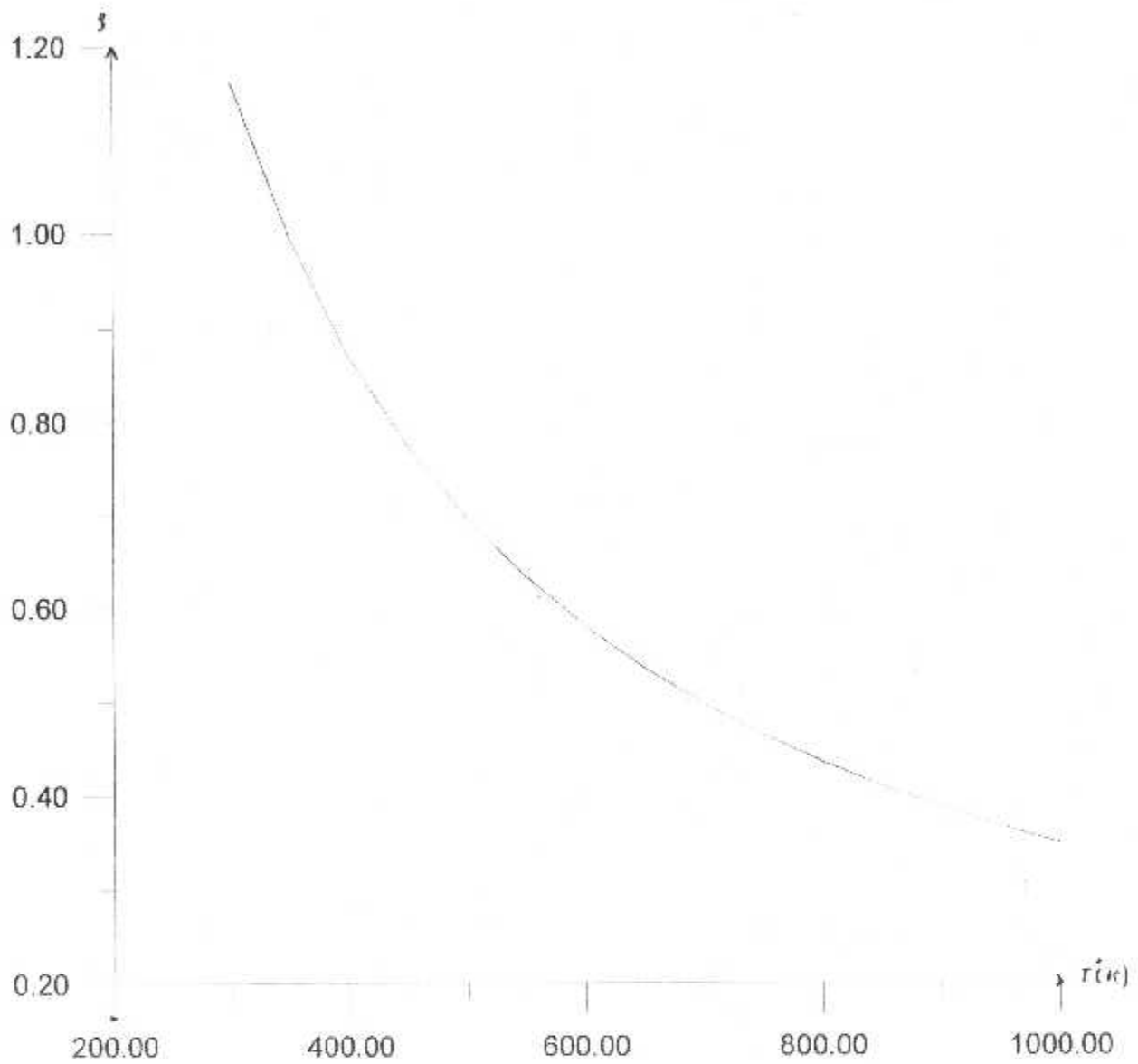


GRAPHE (IV-8) de gaz réel $p_r=f(T_r)$ avec $P=c$:

— $P=1 \text{ bar} = 10^5 \text{ Pascal}$

— $P=5 \text{ bar} = 5 \cdot 10^5 \text{ Pascal}$ $T_r \in [300 - 1000]^\circ\text{K}$

— $P=10 \text{ bar} = 10^6 \text{ Pascal}$

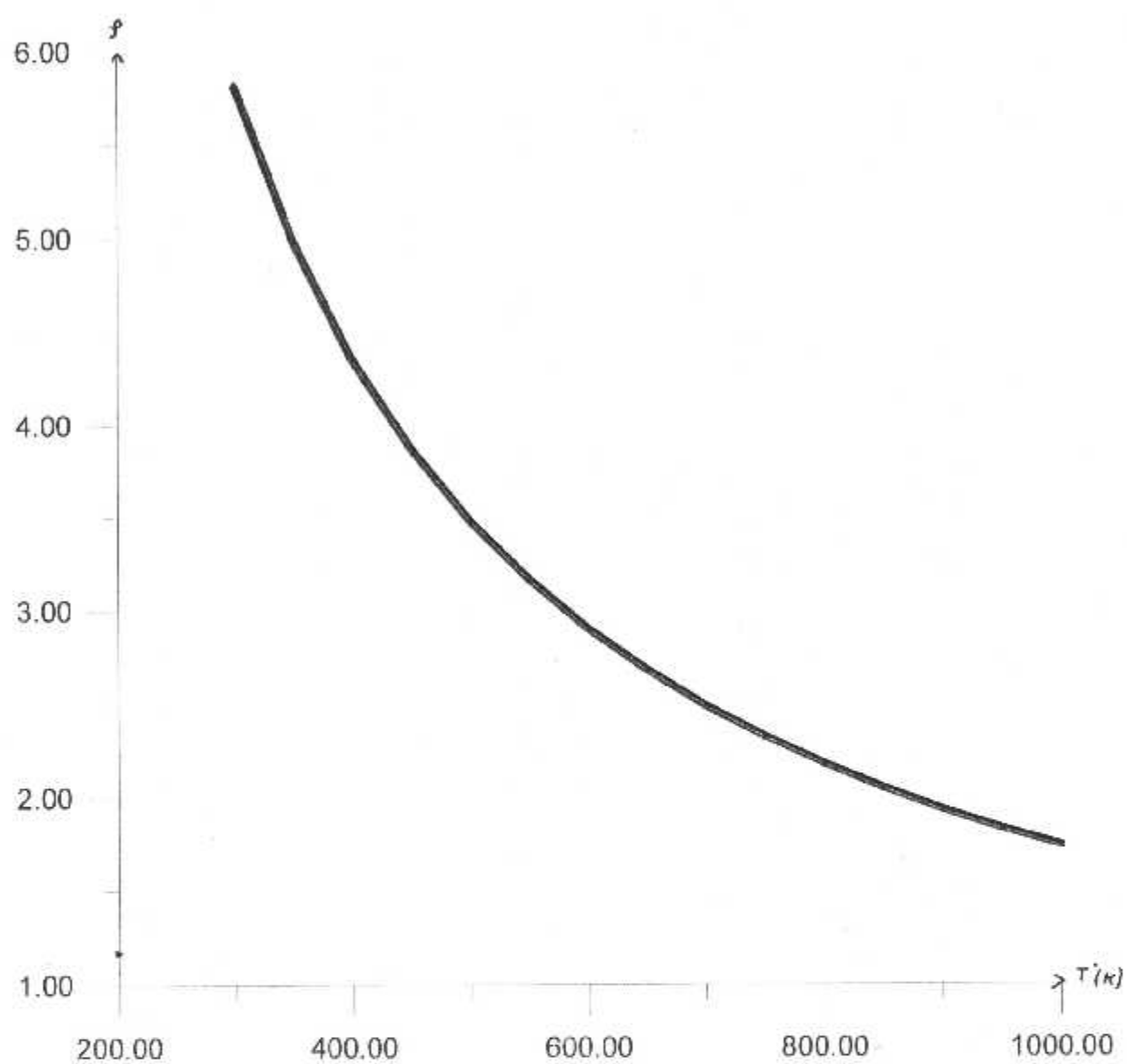


GRAPHE (IV-5) $\rho = R(T)$ avec $P = 1 \text{ bar} = 10^5 \text{ Pascal}$.

— Gaz réel

$T = [300 - 1000]^\circ\text{K}$

— Gaz parfait

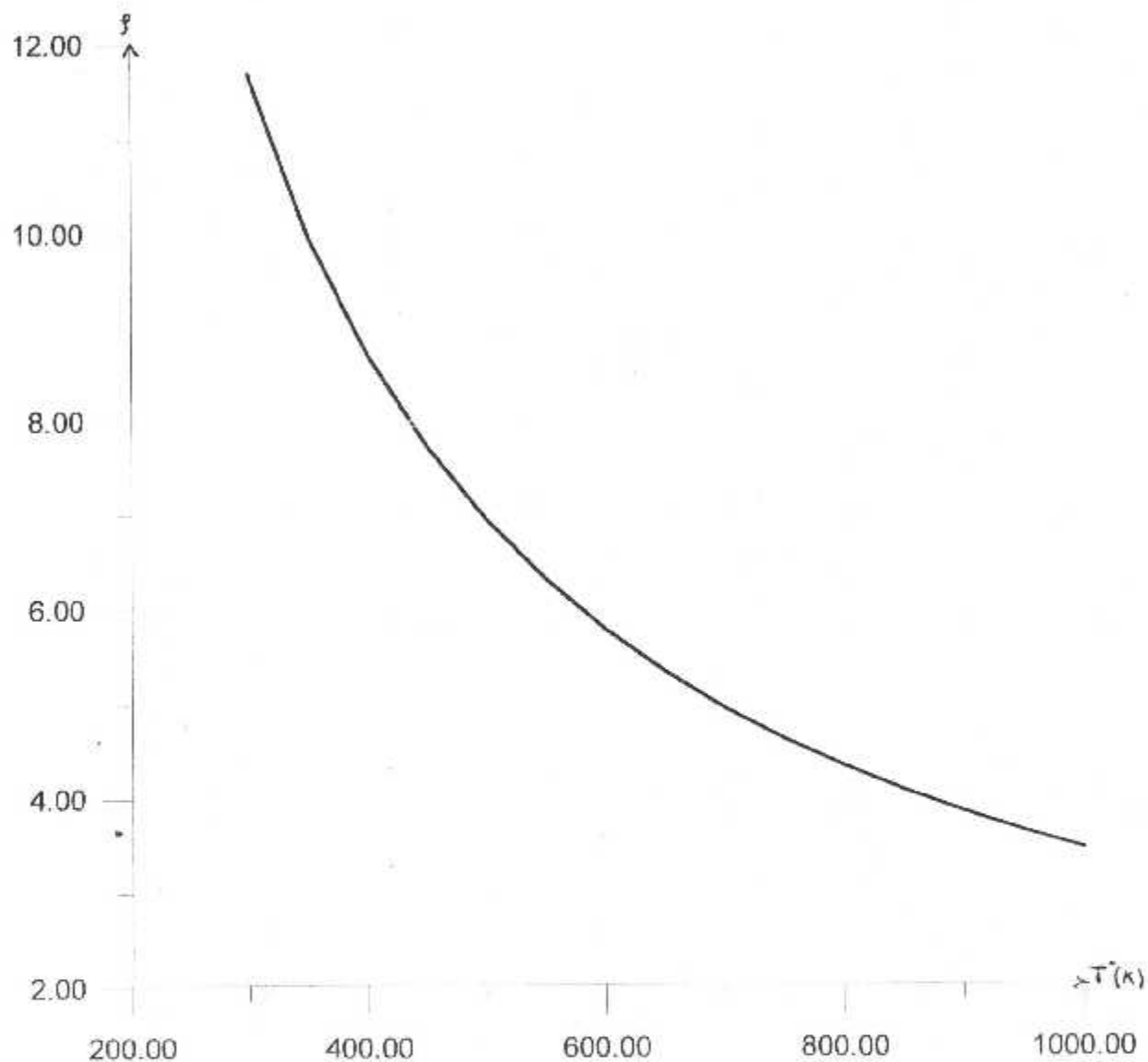


GRAPHE (IV-6) $\rho = f(T)$ avec $P = 5 \text{ bar} = 5 \cdot 10^5 \text{ Pascal}$

— Gaz réel

$T = [300 - 1000]^\circ\text{K}$

— Gaz parfait



GRAPHE (IV-7) $\rho = f(T)$ avec $P = 10 \text{ bar} = 10^6 \text{ Pascal}$.

— Gaz réel

$T = [300 - 1000]^\circ\text{K}$

— Gaz parfait

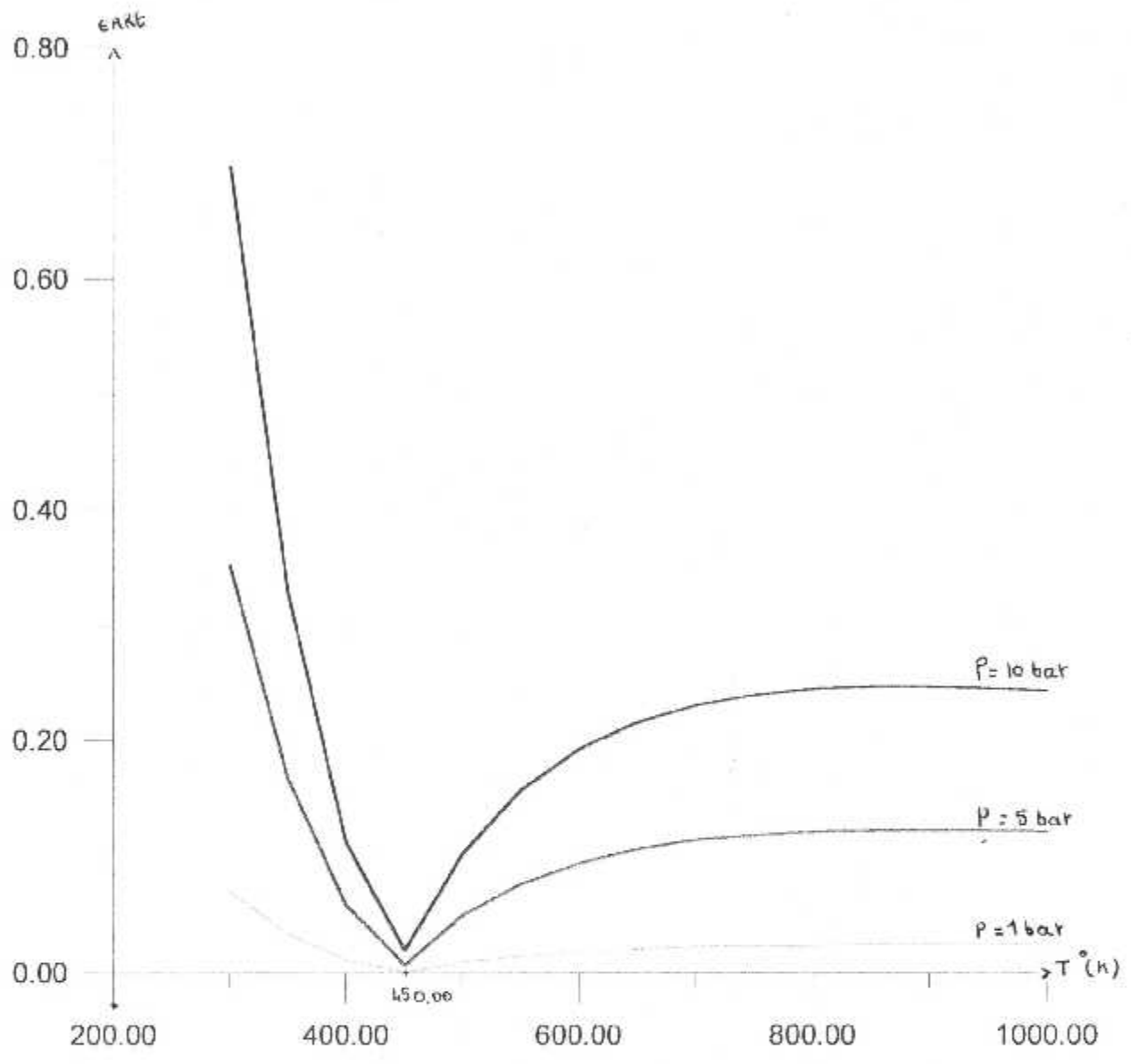


fig. (1,4) : erro = f(T)

Interprétation Et Discussions

1- Graphe 4.4 $\rho = f(P)$ avec $T = Cte$

la variation de la densité moléculaire en fonction de la pression, présente une allure linéaire toute en gardant la température constante.

En augmentant progressivement la pression, la distance entre les molécules diminue, induisant la diminution du volume et par conséquent l'augmentation de la densité.

Si on passe d'un graphe à un autre en changeant simultanément les températures de 300 K°, 600 K° et 1000 K°. On constate que les trois graphes aient des pentes qui décroît avec l'augmentation de la température.

2- Graphe 1.2.3. 2(4) :

On remarque que l'augmentation de la pression nous mène à une diminution en volume, ce qui implique l'augmentation de la densité ($\rho = 1/v$) avec une Température constante ($T = Cte$). Le gaz réel tend vers le gaz parfait, l'erreur est ainsi minimale.

L'erreur augmente d'une façon linéaire, ce qui implique une différence marquée entre les deux gaz.

Passant de 300 K° à 600 K° et puis à 1000 K°. L'erreur diminue toute en gardant sa forme droite. Le gaz réel a tendance d'être un gaz parfait.

3- Graphe 8

le graphe $\rho = f(T)$ présente une allure parabolique. A une pression constante ($P = Cte$), si on augmente la température, les molécules sont plus répulsifs, leurs distances augmente. Et si on augmente aussi le volume, on aura une diminution de la pression.

En faisant changer la pression de 1, 5 et 10 bars, On remarque une augmentation progressive de la température.

4- Graphe 5.6.7. (1.4)

les trois graphes $\rho = f(T)$ avec $P = 1, 5$ et 10 bars représentent une superposition de deux graphes, l'un pour un gaz parfait l'autre pour un gaz réel avec les mêmes allures paraboliques.

Si on revient au graphe $\rho = f(T)$, On constate à chaque fois une convergence où la température est de 450 K°, puis on voit qu'il y'a une divergence vers trois paliers différents où $\rho = Cte$.

Entre $[300\text{K}^\circ - 450 \text{K}^\circ]$, la densité diminue jusqu'à ce qu'elle devienne partout négligeable, le volume à cette effet est à son maximum. Par la suite, les forces intermoléculaires sont négligeables, et le gaz réel est donc considéré comme étant un Gaz Parfait à une température de $T = 450\text{K}^\circ$.

Si on augmente d'avantage la température ($>$ à 450K°), la sur-excitation entre les molécules, provoque la réapparition des forces intramoléculaires induisant à une divergence entre les deux gaz.

Chapitre:V

Conclusion

CONCLUSION GENERALE :

Lorsque nous avons abordé ce travail, notre objectif était d'élaborer des calculs des paramètres thermodynamiques d'un gaz réel en utilisant l'équation de van der Waals pour pouvoir étudier des états réels.

On prenant en considération tous les paramètres influencés sur la molécule gazeuse, on effectue une étude analytique basée sur des équations mathématiques.

La réalisation d'un programme informatique conduit à des valeurs précises et bien étudiées qui influencent selon des graphes sur la convergence et la divergence des deux gaz (réel et parfait).

À des valeurs bien déterminées de température, pression et densité, un gaz réel tend vers un gaz parfait avec toutes les propriétés thermodynamiques.

En perspective, des rapports thermodynamiques d'un gaz réel sont à déterminer afin de bien mener une étude qui soit plus profonde dans des différents domaines de la recherche.

Souhaitant en dernier que ce modeste travail soit pris en conservation par d'autres étudiants et qu'ils l'achèvent.

BIBLIOTHÈQUE Bibliographie

NO	Les livres	L'édition	L'auteurs
01	MECANIQUE EXPERIMENTALE DES FLUIDES	MASSON(1963,1982)	R - COMOLET
02	DYNAMIQUE DES FLUIDES	ETADIEUR	ENGE RYHMING
03	THERMODYNAMIQUE	LIBRAIRIE VUIBER	M-PERYIN ,J-P- FAIOUX ET J8RENAULT
04	THERMODINAMYQUE	LIBRAIRIE VUIBER	JACQUES BUOLIGNY
05	PRINCIPES DE LA THERMODYNAMIQUE	MC GRAW6HILL	JEAN CHARLES SISI
06	THERMODYNAMIQUE GENERALITE ET APPLICATION	ENSAE (1986)	ACARRERE
07	COURS DE PHISICUE GENERALE		A KASILER
08	INTRODUCTION A LA THERMODYNAMIQUE CHIMIQUE	OFFICE DES PUBLICATION UNIVERSITAIRES(1983)	LAUFFENBURGER YVAN
09	COURS SUR LEGAZ REEL	UNIVERSITE DE BLIDA (2003)	DOCTEUR HANNI MANSOUR
10	DOCUM PERSONEL	UNIVERSITE DE BLIDA (2003)	m ^{me} : ZABBICH TOUFIK

Johannes Diderik van der Waals – biographie:



Johannes Diderik van der Waal a été soutenu novembre 23, 1837 à Leyde, Hollandes, fils de Jacobus van der Waal et Elisabeth van dan Burg. Ensuite après avoir fini l'éducation élémentaire à son lieu de naissance il est devenu un schoolteacher. Bien qu'il n'ait eu aucune connaissance des langues classiques, et n'ait pas été laissé ainsi passer les examens scolaires, il a continué d'étudier à l'université de Leyde dans son temps disponible pendant 1862-65. De cette façon il a également obtenu des certificats d'enseignement dans les mathématiques et la physique.

En 1864 il a été nommé professeur à une école secondaire chez Deventer; en 1866 il s'est déplacé à La Hayes, d'abord comme professeur et plus tard comme directeur d'un des écoles secondaires en cette ville.

Nouvelle législation par lequel des étudiants d'université en science aient été exemptés des conditions au sujet de l'éducation classique antérieure Van der Waals permis pour s'asseoir pour des examens d'université. En 1873 il a obtenu le degré de son docteur pour une thèse autorisée *le gaz fini de repaire de fourgon de de Continuïteit - en Vloeistoftoestand* (sur la continuité de l'état de gaz et de liquide), qui l'a mis

immédiatement dans le premier rang des physiciens. Dans cette thèse il propose une "équation d'état" embrassant l'état gazeux et liquide; il pourrait démontrer que ces deux états d'agrégation fusionnent non seulement dans l'un l'autre d'une façon continue, mais qu'ils sont en fait de la même nature. L'importance de cette conclusion Fourgon der Waals tout papier pouvoir être juger remarque faire par James Commis maxwell en nature, "que là pouvoir être aucun doute que nom Fourgon der Waals bientôt être parmi premier dans moléculaire science" et "avoir certain diriger attention plus de un investigateur étude Bas Hollandais langue dans qui être écrire" (maxwell probablement signifier pour indiquer "Bas Allemand", qui aussi être incorrect, puisque néerlandais être un langue à son propre chef). Plus tard, de nombreux papiers sur le ce et sujets relatifs ont été édités dans *les démarches de l'académie royale des Hollandes des sciences* et dans *les archives Néerlandaises*, et ils ont été également traduits en d'autres langues.

Quand, en 1876, on a établi la nouvelle loi sur une éducation plus élevée qui a favorisé le vieil Athenaeum illustre d'Amsterdam au statut d'université, Van der Waals a été nommé le premier professeur de la physique. En même temps que Vane t Hof et Hugo de Vries, le généticien, il a contribué à la renommée de l'université, et est resté fidèle à elle jusqu'à sa retraite, malgré les invitations d'attraction d'ailleurs.

La cause immédiate de l'intérêt de Van der Waals pour le sujet de sa thèse était traité de R. Clausius considérant la chaleur comme phénomène de mouvement, qui l'a mené à rechercher une explication pour les expériences de T. Andrews (1869) indiquant l'existence "des températures critiques" en gaz. C'était le génie de Van der Waals qui l'a incité à voir la nécessité de tenir compte des volumes de molécules et des forces intermoléculaires ("Van der Waals force", car ils s'appellent maintenant généralement) en établissant le rapport entre la pression, le volume et la température des gaz et des liquides.

l'équilibre des substances hétérogènes, il pouvait arriver à une représentation graphique de ses formulations mathématiques sous forme de surface qu'il a appelée "Livre par pouce carré surface" en l'honneur de Gibbs, qui avait choisi la lettre grecque ν livre par pouce carré comme symbole pour l'énergie libre, qui il a réalisé était significatif pour l'équilibre. La théorie de mélanges binaires a provoqué les nombreuses séries d'expériences, un du premier effectué par J. P. Kuenen, qui a trouvé des caractéristiques des phénomènes critiques entièrement prévisibles par la théorie. Des conférences à ce sujet ont été plus tard rassemblées dans *le der Thermodynamique* (manuel de Lehrbuch de la thermodynamique) en Van der Waals et PH Kohnstamm.

Mention devrait également être faite en théorie thermodynamique de Van der Waals de capillarité, qui sous sa forme de base est apparue la première fois en 1893. En cela, il a accepté l'existence d'un progressif, bien que très rapide, de changement de densité à la couche de frontière entre le liquide et de vapeur - une vue qui a différé de celle de Gibbs, qui a assumé une transition soudaine de la densité du fluide dans celle de la vapeur. Contrairement à Laplace, qui plus tôt avait formé une théorie sur ces phénomènes, Van der Waals a également estimé que les molécules sont dans le mouvement permanent et rapide. Les expériences en ce qui concerne des phénomènes à proximité de la température critique ont décidé en faveur des concepts de Van der Waals.

Van der Waals était le destinataire de nombreux honneurs et distinctions, dont ce qui suit devrait être en particulier mentionné. Il a reçu un doctorat honorifique de l'université de Cambridge; a été fait à membre honorifique de la société impériale des naturalistes de Moscou, de l'Académie irlandaise royale et de la société philosophique américaine; membre correspondant de l'Institut De France et l'Académie royale des sciences de Berlin; associez le membre de l'Académie royale des sciences de la Belgique.

Une deuxième grande découverte - atteinte après que travail beaucoup laborieux - a été éditée en 1880, quand il a déclaré la loi des états correspondants. Ceci a prouvé que si de la pression est exprimée comme fonction simple de la pression critique, de volume en tant qu'un du volume critique, et de température en tant qu'une de la température critique, une forme générale de l'équation d'état est obtenue ce qui est applicable à toutes les substances, depuis les trois constantes a , b , et R dans l'équation, qui peut être exprimée en quantités critiques d'une substance particulière, disparaîtra. C'était cette loi qui a servi de guide pendant les expériences qui ont finalement mené à la liquéfaction de l'hydrogène par J. Dewar

en 1898 et de l'hélium par H. Kamerlingh Onnes en 1908. Le dernier, qui dans 1913 a reçu le prix Nobel pour ses études à basse température et sa production d'hélium liquide, a écrit en 1910 "que des études de Van der Waals ont été toujours considérées comme baguette magique magique pour des expériences de mise en oeuvre et que le laboratoire cryogénique à Leyde s'est développé sous l'influence de ses théories".

Dix ans après, en 1890, le premier traité sur la "théorie de solutions binaires" est apparu dans les archives Néerlandaises - un autre grand accomplissement de Van der Waals. En reliant son équation d'état avec la deuxième loi de la thermodynamique, sous la forme d'abord proposée par W. Gibbs dans ses traités sur