

REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE  
MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR ET DE LA RECHERCHE

SCIENTIFIQUE

UNIVERSITE SAAD DAHLEB DE BLIDA

DEPARTEMENT D'AERONAUTIQUE



## MEMOIRE DE FIN D'ETUDES

En vue de l'obtention du diplôme d'ingénieur d'état en aéronautique

option :

propulsion - structure

THEME

# ETUDE VIBRATOIRE D'UNE PALE D'HELICOPTERE EN BATTEMENT VERTICAL

Encadré par :

Mr : KIRAD Abdelkader

Présenté par :

BEDERINA Belmechri  
ABDULHAMID Hassan

2002/2003

## Remerciements

Nous tenons à remercier tous ceux et celles qui ont contribués de près ou de loin à l'élaboration de ce modeste mémoire et en particulier notre promoteur Mr : KIRAD Adk

*Je dédie ce travail à tous ceux qui m'ont aidé pendant toutes mes études surtout mes chers parents, mes frères houssam et alaa , à ma sœur rina et à tous mes amis .  
Sans oublier notre promoteur monsieur k̄irad abdelk̄ader qui nous a dirigé pour terminer notre travail.*

*hassan*

*Je dédie ce modeste mémoire à mes parents, mes frères et sœurs et à tous mes amis .*

*belmechri*

## ملخص :

يهدف هذا العمل إلى دراسة اهتزازات شفرة الهليكوبتر وإيجاد الحالات التي يمكن أن يحدث بها تجاوز بين النبض الذاتي للشفرة مع سرعة دوران قرص الدوار التي تؤدي إلى إنكسار الشفرة , ومحاولة تفادي حالات التجاوب وذلك عن طريق تغيير ثوابت شفرة الهليكوبتر المدمجة مع محور الدوران , كتغيير الصلابة أو تغيير التوزيع المنتظم للكتلة أو تغيير سرعة الدوران أو تغيير نوع الارتباط بين الشفرة ومحور الدوران بجعله إرتباط مفصلي .

## Résumé :

Le but de ce travail est l'étude des vibrations d'une pale d'hélicoptère et de trouver les cas de résonance qui signifie l'égalité entre les fréquences propres de la pale et les multiples du régime de rotation, et essayons d'éviter la résonance par la variation des paramètres d'action représentant par la rigidité et la répartition des masses et le régime de rotation ou bien la variation de type d'articulation.

## Summary:

The goal of this work is the study of the vibrations of a blade of helicopter and to find the cases of resonance which to mean the equality between the Eigen frequencies of the blade and the multiples of the mode of rotation, and try to avoid resonance by the variation of the parameters of action representing by the rigidity and the distribution of the masses and the mode of rotation or the variation of the type of hinge.

## SOMMAIRE

Introduction

### Chapitre I : Notions fondamentales de la mécanique des vibrations

Historique.....	2
I - QUELQUES DEFINITIONS .....	3
II - ORIGINE DES VIBRATIONS DES STRUCTURES EN AERONAUTIQUES.....	4
II - 1 Vibration d'origine mécanique .....	4
II - 2 Vibration d'origine aérodynamique (aéro -vibration).....	5
III - conséquences des vibrations sur un système mécanique .....	5
IV - Comportement vibratoire d'un système mécanique .....	6
IV - 1 Types des efforts excitateurs appliqués à la structure .....	6
IV - 2 Caractéristiques dynamiques d'une structure .....	7
a ) Fréquences Propres .....	7
b ) Modes Propres .....	8
c ) Facteur d'amortissement .....	8
IV - 3 Réponse vibratoire d'une structure .....	8
V - ATTENUATION DES EFFETS DES VIBRATIONS .....	9
Vibrations sur l'hélicoptère.....	10
Le problème des vibrations forcées .....	10

### Chapitre II : Généralités sur l'hélicoptère

Généralités sur l'hélicoptère.....	12
I - Description d'un hélicoptère.....	13
II - Mouvements de l'hélicoptère .....	13
- Le vol vertical .....	13
- La translation.....	14
III - Le rotor principal .....	14
Différents types de rotors .....	15
a ) Rotor articulé .....	15
b ) Rotor rigide .....	15

GENERALITES SUR LES PALES .....	16
I - Technologie d'une pale .....	16
II - influence de la répartition massique en corde .....	16
III - conception technologique d'une pale .....	17
IV - Types des pales .....	18
IV - 1 Selon la matière constituante .....	18
IV - 1 - 1 Pales métalliques.....	18
IV - 1 - 2 Pales en matériaux composites.....	18
IV - 1 - 3 Pales en bois .....	19
IV - 1 - 4 Pales en plastique armé .....	20
IV - 2 Selon la forme .....	20
V - contrôle et réglage des pales .....	22
V - 1 contrôle des pales .....	22
V - 2 Réglages (statique et dynamique) des pales .....	22
V - 2 - 1 Réglages statiques .....	22
V - 2 - 2 Réglage dynamique.....	23
IV - Les articulations des pâles et leurs rôles .....	25
IV - 1 L'articulation de battement .....	25
IV - 2 L'articulation de traînée .....	26
IV - 3 Articulation de pas .....	27
V - Moment de flexion .....	28
V - 1 Dans l'articulation de battement .....	28
V - 2 Dans l'articulation de traînée .....	29
VI - Les forces AGISSANTES sur une pôle en rotation .....	31

### **Chapitre III : Etude du battement**

Equation du battement .....	33
I - Rotor sans efforts aérodynamiques.....	33
I - 1 Le moment cinétique de la pôle par rapport à '0' en fonction du temps .....	33
I - 2 Le moment dynamique en projection dans le repère lié à la pale .....	35
Comparaison des inerties.....	36
II - L'influence des efforts aérodynamiques .....	40

## Chapitre IV : Méthode de calcul

I – Méthode de calcul pour déterminer Les fréquences propres du battement .....	46
- Méthode de MYKLESTAD .....	47
I – 1 Sans tenir compte de l'effort normal .....	51
I – 2 En tenir compte l'effort normal .....	54

## Chapitre V : Résultats et Discussions

<u>PARTIE (A)</u> : étude d'une pale encastrée.....	61
I – Schéma discrétisation de la pale .....	61
I – 1 Organigramme de calcul .....	62
I – 2 Résultats et diagramme de résonance .....	64
I – 3 Discussion des résultats .....	67
II – Influence de variation des paramètres d'action .....	68
II – 1 L'influence du régime de rotation .....	68
II – 2 L'influence d'une masse ponctuelle .....	68
II – 3 L'influence de la rigidité $EI$ .....	72
III – Allure des déformées modales .....	76
IV - Précision de la méthode.....	83
<u>PARTIE (b)</u> : Etude d'une pale articulée .....	87
I – Résultats et diagramme de résonance .....	88
II – Allures des déformées modales .....	90

## Conclusion

## La liste des symboles

$EI_B$  : raideurs de battement

$EI_T$  : raideurs de traînée

$GJ$  : raideurs de torsion

$C_{m0}$  : le coefficient de moment a portance nulle

$F_R$  : résultante aérodynamique

$F_C$  : force centrifuge

$\omega$  : fréquence de battement

$\Omega$  : régime de rotation du rotor

$F_i$  : force d'inertie

$V_R$  : vitesse de vent relatif

$F_Z$  : la portance

$F_x$  : la traînée

$\rho$  : la masse volumique

$C_Z$  : coefficient de portance

$C_x$  : coefficient de traînée

$s$  : la surface de la pale

$\vec{\mu}_{C/R(O,X,Y,Z)}$  : moment cinétique d'un solide par rapport au point (C) quelconque liés au repère

fixe  $R(O,X,Y,Z)$

$\vec{\Omega}_S^0$  : la rotation angulaire d'un solide (S) autour d'un repère fixe  $R(O,X,Y,Z)$ .

$I_{S/R(O,X,Y,Z)}$  : moment d'inertie d'un solide (s) par rapport un son repère qui est mobile  $R_s(O_s, X_s, Y_s, Z_s)$ .

$V_s^0$  : vitesse linéaire du solide (S) par rapport un repère fixe  $R(O,X,Y,Z)$ .

$\vec{\mu}_{Pale/R_0(O,X_0,Y_0,Z_0)}$  : moment cinétique de la pale par rapport au repère  $R_0(O,X_0,Y_0,Z_0)$

$I_{pale/R_2(O,X_2,Y_2,Z_2)}$  : me moment d'inertie de la pale par rapport a son repère  $R_2(O,X_2,Y_2,Z_2)$

$\vec{\Omega}_2^0$  : vecteur rotation de repère (2) / (0) .

$\vec{\Omega}_2^1$  : vecteur rotation de repère (2) / (1) .

$\vec{\Omega}_1^0$  : vecteur rotation de repère (1) / (0) .

$R_0(O,X_0,Y_0,Z_0)$  : repère fixe



$R_2(O, X_2, Y_2, Z_2)$  : repère lié à la pale

$R_1(O, X_1, Y_1, Z_1)$  : repère de projection de repère (2) sur le repère (0)

$\overline{\delta}_{\text{pale}/R_0(0, x_0, y_0, z_0, t)}$  : le moment dynamique de la pale par rapport à  $R_0$ .

$\frac{d}{dt} \overline{\mu}_{\text{pale}/R_0(0, x_0, y_0, z_0, t)}$  : dérivé du moment cinétique de la pale par rapport à  $R_0$ .

$\overline{V}_p$  : vitesse de point (P) de la pale par rapport au référentiel ( $R_0$ ) exprimé en ( $R_2$ ).

$i$  : angle d'incidence est l'angle que fait  $V_r$  avec la corde.

$\theta$  : angle de pas est l'angle que fait la corde avec un plan de référence (plan  $\perp$  à  $\overline{Z}_0, \overline{Z}_1$ )

$M_\theta$  : moment aérodynamique qui se produirait sur la pale s'il n'y avait pas de battement.

$R_0(O, X_0, Y_0, Z_0)$  : lié à l'arbre rotor

$R_g(O, X_g, Y_g, Z_g)$  : lié à l'hélicoptère

$\overline{\Omega}_g^0$  : vitesse angulaire de (g) par rapport à (0).

$\overline{\Gamma}_g^0$  : accélération angulaire de (g) par rapport à (0).

$\overline{V}^0(n)$  : le vecteur vitesse du point  $n$  par rapport à (0)

$\frac{d}{dt} \overline{ON}$  : la dérivée de  $\overline{ON}$  par rapport à (t) dans le repère (1).

$a$  : excentricité de battement

$\overline{F}_{ext}$  : est la résultante dynamique

$\omega$  : la pulsation du mouvement

$\lambda_i$  : les solutions dont leurs conditions définissent les modes de vibration

$\mu$  : la masse linéaire

## La liste des graphes

page

Graphe (V – 1 ) Influence du régime de rotation du rotor sur les fréquences propres d'une pale encastrée .....	66
Graphe (V – 2 ) Influence du régime de rotation du rotor sur les fréquences propres d'une pale encastrée avec deux masses ponctuelles .....	70
Graphe( V – 3 ) Influence du régime de rotation du rotor sur les fréquences propres d'une pale encastrée sans masses ponctuelles ( $EI = 3000N.m^2$ ) .....	73
Graphe( V – 4 ) Influence du régime de rotation du rotor sur les fréquences propres d'une pale encastrée avec 2 masses ponctuelles ( $EI = 3000N.m^2$ ).....	75
Graphe (V – 5 ) Les déformées d'une pale encastrée avec ( $EI = 3000 N.m^2$ et deux masses ponctuelles ) pour le régime de rotation $\Omega = 0$ rd/s.....	79
Graphe (V – 6 ) Les déformées d'une pale encastrée avec ( $EI = 3000 N.m^2$ et deux masses ponctuelles ) pour le régime de rotation $\Omega = 50$ rd/s .....	80
Graphe( V – 7 ) Comparaison des résultats obtenus par la méthode avec le calcul analytique pour le régime de rotation " 0 rd/s " correspondant aux 4 premières pulsations propres.....	86
Graphe( V – 8 ) Influence du régime de rotation du rotor sur les fréquences propres d'une pale articulée avec $EI=2300N.m^2$ .....	89
Graphe (V – 9 ) Les déformées d'une pale articulée ( $EI = 2300 N.m^2$ ) pour le régime de rotation $\Omega = 50$ rd/s.....	92



**INTRODUCTION**

## Introduction

L'hélicoptère comme tous les appareils à voilures tournantes, il subit des problèmes spécifiques (aérodynamique, vibrations, fatigue, stabilité, bruit...). Parmi ces problèmes on s'intéresse dans ce sujet sur le problème de vibrations. Les problèmes de vibration sur l'hélicoptère se présentent de façon très particulière, en effet, le rotor constitue un puissant générateur de vibrations dans ce type de machine.

Les pales pendant sa rotation sont soumises à des excitations périodiques d'origine aérodynamiques, ce qui a pour effet de soumettre le rotor à des efforts alternés de fréquence fondamentale :  $F = \Omega/2\pi$ ,  $\Omega$  désignant le régime de rotation du rotor principal exprimé en (rd/s)

Ces efforts d'excitation se transfèrent au mât rotor, à la boîte de transmission et, par le biais de ses liaisons sur le fuselage, à l'ensemble de la structure. Les fréquences propres de tous ces éléments doivent être choisies, dès la conception, éloignées des multiples de la fréquence de rotations des pales ( $1\Omega, 2\Omega, 3\Omega, \dots, n\Omega$ ). À un instant 't' et à une position déterminée la pale est soumise à des efforts déterminés, au temps  $t+T$  ( $T=2\pi/\Omega$  étant le temps que met la pale pour faire un tour) la pale se trouve dans le même état qu'à l'instant 't', donc soumise aux mêmes efforts. La question est très complexe, et on se bornera ici à indiquer : **comment on peut résoudre le problème dans le seul cas des pales ?**

En effet, l'exemple des vibrations des pales est relativement simple à formuler, et est de plus déterminant dans la conception même de la voilure tournante. Les répartitions de masse et de raideurs doivent alors être choisies de façon à éviter qu'au régime nominal de fonctionnement il y ait risque de résonance, au moins sur les fréquences les plus basses. À cet effet, on calcule, en fonction du régime rotor ( $\Omega$ ), les fréquences propres issues des mouvements du battement, tout cela constitue notre but de ce modeste travail. Les notions fondamentales de la mécanique des vibrations sont introduites dans le chapitre I, elles suivent par généralités sur l'hélicoptère et sur les pales dans le chapitre II. Les équations des vibrations du battement des pales en vide et en présence des efforts aérodynamiques dans le chapitre III. La méthode du calcul des fréquences propres des pales dans le chapitre IV. Le chapitre V se compose en deux parties (la première partie concernant l'étude d'une pale encastree et la deuxième pour l'étude d'une pale articulée) et est consacré à la mise en œuvre de calcul des fréquences propres en fonction du régime de rotation et leurs variations avec la distribution des masses et de la rigidité. De plus l'étude de l'allure de la déformée. À la fin une comparaison avec la méthode (analytique) et on termine par une conclusion générale.



# CHAPITRE I

## NOTIONS FONDAMENTALES DE LA MECANIQUE DES VIBRATIONS

Afin de traiter le phénomène vibratoire dans n'importe quel système mécanique, il est nécessaire de prendre une idée globale sur les vibrations .

## HISTORIQUE :

Les phénomènes vibratoires jouent un rôle déterminant dans presque toutes les branches de la physique (mécanique, électricité, optique, acoustique, ...etc), malgré leurs grande diversité, ils sont régis, en tout cas dans le domaine linéaire, par les mêmes lois de comportement et peuvent être étudiés au moyen du même outil mathématique.

L'homme s'est intéressé aux phénomènes vibratoires lorsqu'il à construit les premiers instruments de musique. Les musiciens et les philosophes cherchent les lois de la production du son et les appliquèrent à la construction des instruments de musique. Par exemple, Pythagore (507-582) à prouvé expérimentalement que si deux cordes sont tendues, les tons qu'elles produisent diffères d'un octave, quand la longueur de l'une est le double de la longueur de l'autre. Malgré les connaissances acquises par les anciens, il faut attendre le début du 17<sup>ème</sup> siècle pour que Galilée (1564-1642) démontre que le ton d'un son est déterminé par la fréquence des vibrations. Le phénomène de battement fût mis en évidence par Sauveur en (1653-1716) à la fin du même siècle. C'est Bruck Taylor (1685-1731) qui à pour la première fois, retrouvé par voie mathématique les résultats expérimentaux de Galilée et d'autres chercheurs. Plusieurs mathématiciens renommés ont étudiés le problème de la corde vibrante. Citons Bernouli (1700-1782), D'alembert (1717-1783), Euler(1 707-1783), Lagrange (1736-1813) et Fourier (1768-1830). Leurs études ont montrés qu'une corde peut vibrer latéralement de différentes façons appelées modes de vibration. Le premier mode correspond à la fréquence la plus basse. La déformée de la corde correspond à une demi sinusoïde. Le second mode correspond à une fréquence double de celle du premier et à une déformation sinusoïdale de la corde qui présente un nœud en son milieu. Sauveur donna le nom de fondamentale à la plus basse fréquence et celui d'harmonique à la fréquence la plus élevée. La superposition linéaire des harmoniques fût proposée pour la première fois par Bernouli. Enfin Fourier présenta en (1822) son mémoire célèbre sur la théorie des séries harmoniques; D'alembert établissait vers (1750) l'équation différentielle régissant les vibrations d'une corde. On à reconnus plus tard le caractère ondulatoire de cette équation qui porta dès lors le nom d'équation d'onde, à partir de la loi de Hooke (énoncé en 1676), Euler et Bernouli ont étudiés les vibrations des poutres. Leurs calculs

étaient basés sur la conservation de l'énergie, cette méthode a été développée plus tard par Lord Rayleigh (1842-1919) et porte depuis son nom.

L'étude des vibrations des plaques et des membranes a été abordé beaucoup plus tard, en particulier par Khirchoff (1842-1887) et Poisson (1781-1840). [1]

## I - QUELQUES DEFINITIONS :

Lorsque les structures sont soumises à des sollicitations dynamiques créées par des forces ou des déplacements, il peut apparaître des phénomènes vibratoires le plus souvent préjudiciables. L'amplitude des déplacements engendrés est souvent beaucoup plus importante que lors de sollicitations statiques et les contraintes induites peuvent entraîner la rupture. Afin d'éviter ces inconvénients, on ne se contente plus de renforcer les parties de la structure les plus exposées à une dégradation car le souci actuel de compétitivité pousse les constructeurs à l'allégement tout en améliorant les performances. Il n'est donc plus possible d'ignorer les phénomènes vibratoires et il faut essayer de les prévoir pour dimensionner les structures au stade du bureau d'études ou pour les modifier judicieusement si une fois construites elles ont des caractéristiques dynamiques gênantes.

Une **oscillation** est un phénomène qui se caractérise par la répétition successive d'un même état.

Un système qui est le siège d'une oscillation est appelé **système oscillant**.

La **mécanique vibratoire** est l'étude des oscillations d'un système mécanique autour d'une position d'équilibre stable, éventuellement en mouvement relatif (les vibrations d'une ailette de turbine, d'une pale éolienne, par exemple).

Un **mode vibratoire conservatif** est un état privilégié de la structure dans lequel le travail de déformation élastique et la variation d'énergie potentielle sont exactement compensés par la variation d'énergie cinétique créée par le mouvement des masses.

Un **Amortissement** est une propriété d'un système mécanique à contenir l'amplitude du mouvement d'un cycle à l'autre .

Un **amplitude** est l'importance du mouvement dynamique ou de la vibration.

Un **déplacement** est un changement de position d'un objet relativement à une référence. Il

s'exprime généralement en millièmes ou en microns.

Un **excentricité** est un variation du diamètre externe d'un arbre, rotor, poulie par rapport à son centre géométrique.

Une **fréquence** est un nombre d'événements périodiques en fonction du temps. La fréquence est généralement exprimée en cycles/seconde (Hertz) ou en multiples de la vitesses de rotation (ordres).

Un **harmonique** est une fréquence correspondant à un multiple entier d'une fréquence fondamentale .

Une **fréquence propre** est la fréquence libre d'un système. La fréquence est fonction de la rigidité et de la masse du système.

Une **période** est le temps requis pour compléter un cycle d'événements. La période s'exprime en seconde .

Une **phase** est une mesure de la synchronisation entre deux signaux ou entre un signal vibratoire et une référence.

Une **Résonance** est une condition vibratoire de l'amplitude et la phase d'un système causée par la sensibilité d'un système à une fréquence d'excitation.

## **II - ORIGINE DES VIBRATIONS DES STRUCTURES EN AERONAUTIQUES :**

Les vibrations qui affectent parfois divers éléments des structures ont en générales deux sources principales :

- 1) les vibrations d'origine mécanique .
- 2) les vibrations d'origine aérodynamique (aéro-vibration).

### **II - 1 Vibration d'origine mécanique :**

L'équilibrage imparfait de certains ensembles mécaniques, constitue une première cause d'excitation dont l'effet sur les divers éléments dépend naturellement des caractéristiques



vibratoires propres à ceux-ci. Les vibrations qui en résultent sont souvent d'amplitude assez faible (micro-vibration) et elles n'ont en général d'autres inconvénients que d'augmenter le niveau du bruit à l'intérieur de la cabine. Cependant dans quelques cas particuliers, elles peuvent provoquer par fatigue, des criques sur les tôles insuffisamment raidies ou même exceptionnellement, et cela peut-être alors très grave (des ruptures de pièces très importantes).

## **II – 2 Vibration d'origine aérodynamique (aéro-vibration) :**

Les sillages et les décollements aérodynamiques peuvent constituer des excitations qui provoquent des vibrations communément appelées "buffeting". Les cas suivants se rencontrent assez fréquemment :

- Les tourbillons liés aux pâles d'hélices peuvent faire vibrer aussi bien les tôles du fuselage dans le plan des hélices que l'empennage situé en arrière de l'hélice et dont la fréquence propre serait voisine de la fréquence de passage des pâles.
- L'écoulement turbulent derrière un "karman" mal dessiné ou une hypersustentation trop braquée, peut provoquer des vibrations en arrivant sur une gouverne .
- L'apparition des vibrations sur un profil donné dépend souvent de l'incidence, mais parfois aussi du nombre de Mach (décollement de la couche limite). Le caractère non stationnaire de tels écoulements peut dans certains cas être suffisamment violent pour compromettre le contrôle de l'appareil. [10]

## **III – CONSEQUENCES DES VIBRATIONS SUR UN SYSTEME**

### **MECANIQUE :**

La réponse vibratoire est une déformation du système matériel qui se traduit par l'apparition de contraintes mécaniques dans les éléments de ce système et peut conduire à :

- La rupture de pièces (amplitude importante), ou la rupture par fatigue (courbes de Wohler); en particulier, près de la résonance, les contraintes dynamiques sont élevées (employer la contrainte dynamique pour le calcul).
- La corrosion de contact (*fretting*), qui se produit lorsque deux pièces en contact sont soumises à des déplacements sous charge de faibles amplitudes (action des vibrations, par exemple). Le

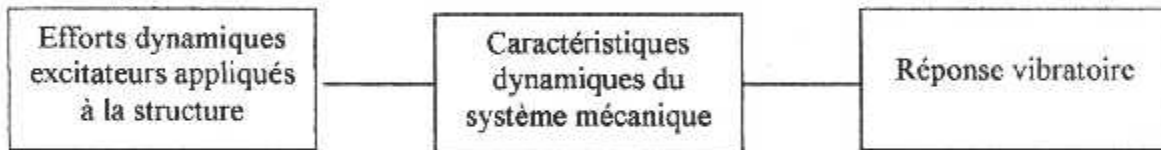
mécanisme qui en résulte est le suivant :

- rupture des films d'oxyde due à l'action mécanique et réoxydation rapide en présence d'air,
- effet d'abrasion ou de cisaillement,
- création d'une poudre abrasive, responsable majeure de la corrosion.

- La détérioration de pièces soumises à une pression l'une contre l'autre « écaillage (*pitting*) pour les engrenages ». [2]

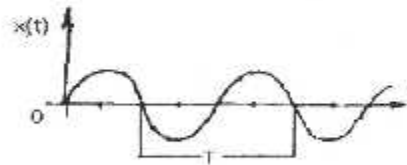
#### IV - Comportement vibratoire d'un système mécanique :

Toute structure, qui est le siège d'une oscillation, peut être ainsi schématisée : [2]



#### IV - 1 Types des efforts excitateurs appliqués à la structure :

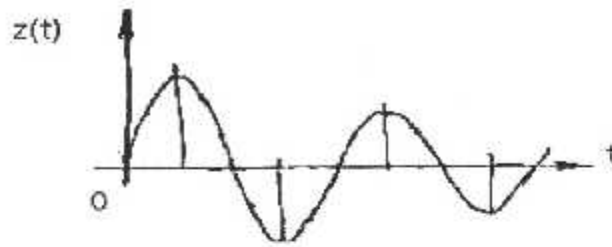
1 – **effort sinusoïdal** : engendre une vibration harmoniques qu'est une fonction trigonométrique.



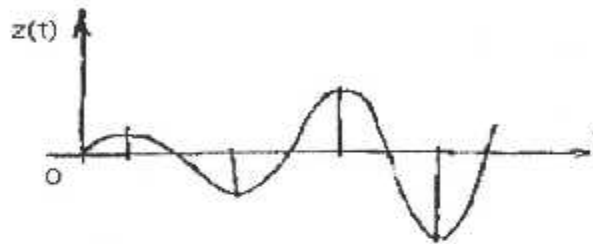
2 – **effort sinusoïdal complexe périodique** : engendre une vibration périodique , de période T appelé période de vibration .



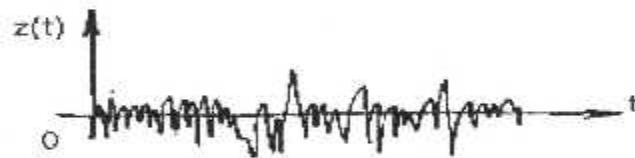
**3 – effort d'intensité décroissante :** engendre une vibration décroissante dont l'amplitude décroissante dans le temps .



**4 – effort d'intensité croissante :** engendre une vibration croissante dont l'amplitude décroissante dans le temps .



**5 – effort aléatoire :** engendre une vibration quelconque qui peuvent résulter de la superposition de plusieurs mouvements sinusoïdaux simples



#### IV – 2 Caractéristiques dynamiques d'une structure :

Généralement l'étude des vibrations est basée sur la détermination des Caractéristiques dynamiques de la structure . Ces caractéristiques peuvent être énoncées comme suit :

- Les fréquences propres - les modes propres - les facteurs d'amortissements .

##### a) Fréquences Propres :

Pour un système libre et non amorti, les fréquences propres ou bien (fréquences naturelles) sont les fréquences dans lesquelles le système est susceptible de vibrer sous l'effet de son inertie seule. La détermination des fréquences propres est nécessaire lors de tout projet d'étude de vibration des structures à cause surtout des graves dommages que pourrait causer le phénomène de résonance.

### **b) Modes Propres :**

C'est les modes de base sous lesquels la structure libre et non amortie, est susceptible de vibrer, sous l'effet de sa propre inertie chacun de ces modes se caractérise par sa "déformée", et sa fréquence de vibration propre équivalente. Lors de rétablissement de l'avant projet, dès que la définition structurale est achevée, les modes propres de vibration sont calculés. Tout mode de vibration quelconque de cette structure peut être considéré comme une combinaison linéaire des modes propres de vibration.

### **c) Facteur d'amortissement :**

Dans les cas réels, on a toujours une dissipation d'énergie pendant la vibration de la structure, lorsque cette énergie est négligeable, l'analyse d'une structure peut être faite sans tenir compte de l'amortissement. mais quand ce dernier est significatif, son effet doit être inclus dans l'analyse, particulièrement quand l'amplitude de vibration est demandée.

## **IV – 3 Réponse vibratoire d'une structure :**

La réponse vibratoire est fonction :

- des caractéristiques des efforts excitateurs.
- des caractéristiques dynamiques de la structure.

En régime permanent, la fréquence de la réponse vibratoire est la même que celle des efforts excitateurs; l'amplitude de la réponse vibratoire dépend des caractéristiques dynamiques de l'ensemble et de celles des efforts excitateurs, à savoir l'amplitude et la fréquence.

Il est donc capital de déterminer :

- les fréquences propres du système et les modes vibratoires qui donnent l'image du système en vibration sur chaque fréquence propre particulière,
- la réponse vibratoire, afin de prévoir la tenue mécanique des matériaux employés et les déformations dynamiques.

Une structure peut vibrer à l'**état de résonance**. Son mode de vibration est alors un mode vibratoire caractérisé par :

- la fréquence de résonance (ou fréquence propre),
- la déformée vibratoire.

**Phénomène de résonance et son effet :** Comme on l'a déjà précisé auparavant, il est nécessaire d'analyser les vibrations des structures afin de prédire les fréquences naturelles ou propres et la réponse à l'excitation envisagée, Ceci parce que si la fréquence de la force excitatrice ou perturbatrice coïncide exactement avec la fréquence de vibration libre du système structural, on aura le phénomène de résonance qui se caractérise par de très hautes amplitudes de vibration. Le phénomène de résonance peut avoir des conséquences fâcheuses, notamment lorsque la structure subit en certains cas plusieurs centaines de cycles de contraintes de fatigue. Pour cela dans plusieurs situations d'étude de structure, il n'est pas seulement nécessaire de considérer la résistance à la fatigue sous une charge statique donnée, mais il est aussi important de déterminer la capacité de ces composantes structurale. La structure peut être analysée seulement en dehors de la plage de fréquence d'excitation où la résonance peut être évitée. Il n'est pas toujours nécessaire de trouver toutes les fréquences naturelles de la structure. Ceci parce que plusieurs de ces fréquences ne seront pas excitées et dans n'importe quel cas, elles vont donner des amplitudes faibles de résonance. La structure devient de plus en plus rigide à la déformation a mesure qu'on atteint les modes de vibration propre correspondant aux fréquences propres supérieures de vibration. En conséquence la fréquence fondamentale est souvent d'un plus grand intérêt que les fréquences élevés , puisque sa réponse forcée dans la plus part des cas la plus large.

## V – ATTENUATION DES EFFETS DES VIBRATIONS :

Cette atténuation est obtenue en réduisant l'amplitude vibratoire via :

- Une modification des efforts excitateurs réalisée :

- en diminuant l'amplitude (équilibrage d'une pièce en rotation, par exemple),
- en modifiant la nature des efforts (rendre aléatoire un phénomène périodique, par exemple).

- Une modification des caractéristiques modales de la structure réalisée :

- en raidissant ou allégeant la structure, en assouplissant ou alourdissant la structure,
- en adjoignant un absorbeur de vibrations (*dampers* pour les arbres en rotation, par exemple).

- La création d'un amortissement ou une augmentation de sa valeur. Cet amortissement peut être

- ponctuel (utilisation de plots en caoutchouc pour suspendre les moteurs, d'un accouplement hydraulique ou convertisseur de couple de torsion, par exemple),

- réparti (modification du matériau, colle d'un matériau visco-élastique sur une structure à amortir, par exemple).

En modifiant les caractéristiques de raideur, de masse, ou d'amortissement, on change également les caractéristiques modales de la structure.

ce dernier doit se trouver entre deux éléments massiques qui se rapprochent, c'est-à-dire deux éléments situés de part et d'autre d'un nœud de vibration.

## **VIBRATIONS SUR L'HELICOPTERE :**

Les problèmes de vibration sur hélicoptère se présentent de façon très particulière. En effet, le rotor constitue un puissant générateur de vibrations et sa présence crée des problèmes spécifiques à ce type de machine.

Il y a deux types de phénomènes propre à l'hélicoptère.

### **Le problème des vibrations forcées :**

C'est un problème très important puisqu'il provoque:

- Des contraintes alternées dans toute la machine, d'où des problèmes de fatigue.
- Des Vibration dans la cabine qui sont un des éléments importants du confort de la machine.

### **Le problème de la résonance au sol :**

Il conditionne la stabilité de l'appareil au sol, donc peut conduire dans les cas critiques à la destruction de l'appareil.

Dans le premier type on distingue :

- Vibrations des pâles.
- Vibrations du fuselage.

En vol de translation, les pâles sont soumises à des charges aérodynamiques dissymétriques, ce qui a pour effet de soumettre le rotor à des efforts alternés de fréquence fondamentale  $f = \Omega/2\pi$ ,  $\Omega$  : désignant le régime de rotation du rotor principal.

D'une façon très général, tout l'appareil se trouve soumis à ces excitations, et le problème préalable qui se pose est de concevoir les constituants de la machine de façon telle qu'ils amplifient le moins possible ces vibrations.

L'hélicoptère, de par la rotation du rotor, il est soumis à des excitations en  $\Omega, 2\Omega, 3\Omega, \dots, n\Omega$  il faut éviter que les fréquences propres de ses constituants soient multiple de  $\Omega$ .

La question est très complexe, et on se bornera ici à indiquer comment on peut résoudre le problème dans le seul cas de pâles en mouvement de battement.

En effet l'exemple des vibrations des pâles est relativement simple à formuler, et est de plus déterminant dans la conception même de la voilure tournante. Les répartitions de masse et de raideur doivent alors être choisies de façon à éviter que, au régime nominal de fonctionnement, il y ait risque de résonance, au moins sur les fréquences les plus basses. [6]



**CHAPITRE II**

**GENERALITES SUR  
L'HELICOPTERE**



## GENERALITES SUR L'HELICOPTERE

Un aéronef se compose en deux catégories :

- aérostat : qui est le plus léger que l'air (ex : dirigeable).
- aérodyne : qui est le plus lourd que l'air (ex : avion, giravion, ...).

L'hélicoptère Appartient à la famille des giravions.

Un giravion est un aéronef entraîné par un ou plusieurs moteurs et dont la sustentation en vol est obtenue par la réaction de l'air sur un ou plusieurs rotors.

Dans la famille des giravions, nous trouvons plusieurs catégories : [7]

- **L'hélicoptère** fig. (a): Le rotor assure la sustentation et la propulsion à la fois. la puissance du rotor fournie permet de créer une portance perpendiculaire au disque rotor.

L'inclinaison du rotor implique : composante de propulsion parallèle à la vitesse de déplacement pour équilibrer la traînée et composante de portance pour équilibre le poids.

Le rotor arrière par sa portance équilibre la machine en mouvement de lacet ( pour opposer le couple de réaction ).

- **Autogire** : Le rotor n'assure que la sustentation, son mouvement de rotation n'est possible qu'en vol de translation ( ce qui nécessite un lancement spécial lors du décollage.

Cette translation est assurée par un moyen indépendant du rotor (turbopropulseur ), ou bien une hélice entraînée par un moteur classique.

- **Girodyne** fig (b) : Son rotor n'assure que la sustentation, il reste maintenu sans translation. la propulsion est assurée par des moyens différents du rotor ( hélices, turbopropulseur, ... )

- **Combinée** : Le rotor n'assure la totalité de la sustentation qu'aux vitesses faibles ou nulles.

L'aile assure une partie de la sustentation lorsque la vitesse est suffisante ainsi le rotor. on équilibre la traînée par une hélice propulsive. en grande vitesse on réduire le régime du rotor pour éviter la compressibilité du l'air sur le rotor.

- **Convertible** fig (c) : Le rotor ressemble à une grande hélice pour assurer la propulsion si son axe basculer de  $90^\circ$  vers l'avant, est aussi la sustentation est assurée quand son axe se revenir à  $0^\circ$



## I – Description d'un hélicoptère :

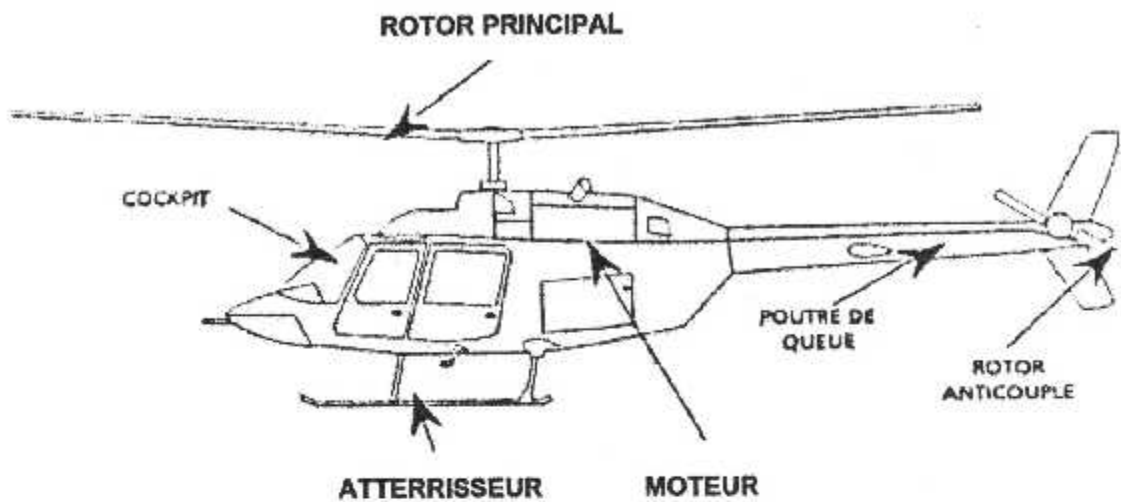


Fig (II - 1) : Différents éléments d'un hélicoptère

Un hélicoptère comprend toujours les éléments suivants :

- un rotor principal, composé de deux pales (ou plus), assure la sustentation et la translation de l'appareil ;
- un cockpit qui abrite le pilote et une cabine pour les passagers ;
- un moteur qui peut être à explosion (hélicoptères légers) ou à turbine ;
- un rotor anticouple qui permet à la fois d'annuler le couple de réaction du rotor principale et de contrôler l'appareil sur son axe de lacet ;
- une poutre de queue qui supporte le rotor anticouple et sa transmission. Ce peut être un tube ou un treillis ;
- des atterrisseurs qui peuvent être à patins, à roues ou à flotteurs (pour atterrissage sur l'eau).

La partie fixe, par opposition aux rotors, est nommée la cellule. [7]

## II – Mouvements de l'hélicoptère :

### - Le vol vertical :

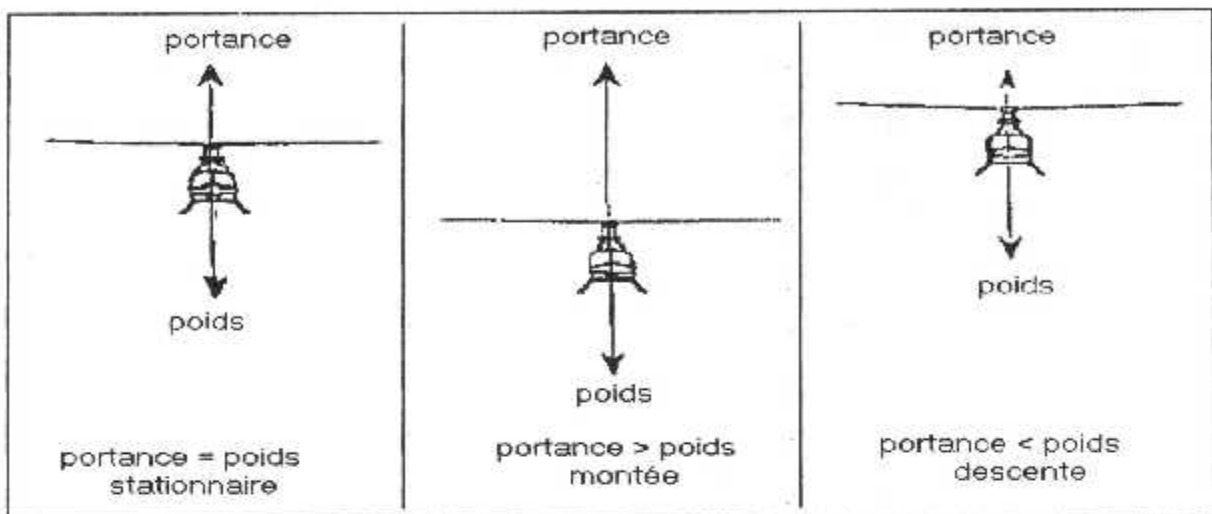
Le rotor en rotation fournit une force verticale, la résultante aérodynamique qui assure la sustentation.

La composante verticale de la résultante est la portance.

Si la portance est supérieure au poids, l'hélicoptère monte.

Si la portance est inférieure au poids, l'hélicoptère descend.

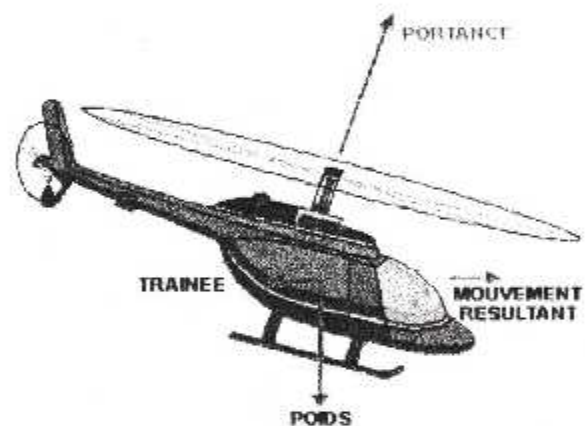
Si la portance est égale au poids, l'hélicoptère est stationnaire (immobile).



**- La translation :**

Grâce à une gouverne appropriée ( décrite plus loin ), le pilote peut incliner la résultante et créer ainsi une force horizontale qui met l'hélicoptère en translation.

Cette force nommée traction, est la composante horizontale de la résultante.



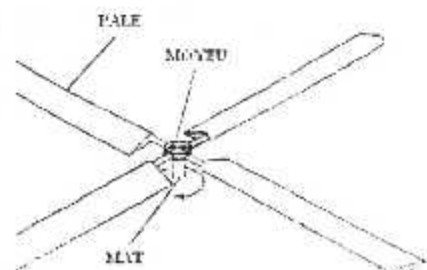
**- Le disque rotor :**

Le rotor principal nommé « disque rotor » génère la sustentation et la vitesse horizontale. Si on veut comparer l'hélicoptère à l'avion, on constate que le disque rotor remplace les ailes et l'hélice de l'avion.

**III – Le rotor principal :**

Le rotor est le constituant principal de l'hélicoptère à pour rôle d'assurer la sustentation et la translation de l'appareil et qui est comprend essentiellement :

- Un MAT entraîné par une installation motrice.
- Un MOYEU assurant la liaison entre mat et pales.
- Des PALES (deux ou plus).



**Différents types de rotors :**

Pour tenter d'atténuer les problèmes de vibrations, différentes modifications ont été apportées au rotor. C'est ainsi qu'on distingue plusieurs catégories de rotors. Parmi ceux qui sont souvent utilisés citons les rotors articulés ; rigides.

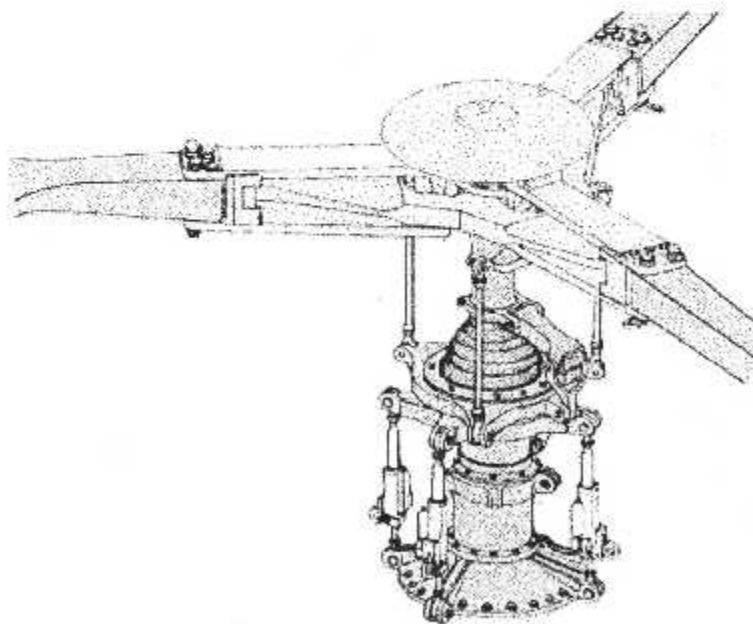
**a ) Rotor articulé:**

Le rotor articulé permet à la pale de se déplacer librement en battement et en traînée. Ce type de rotor, fait en acier ou en alliage léger est équipé de charnières qui diminuent considérablement les effets au niveau de l'équilibre.

Le principe de ce rotor conduit à une technologie assez complexe des organes de liaison niveau du moyeu en raison des nombres d'articulations équipées de roulements. Ces dernières, permettent la rotation du moyeu autour du mat.

**b ) Rotor rigide :**

Le rotor rigide constitue un grand progrès puisqu'il permet de supprimer les articulations de battement et de traînée. Elles sont remplacées par une souplesse au niveau de l'emplanture de la pale grâce aux nouvelles techniques des matériaux composites. . Notons également au nombre de ses avantages une simplicité de construction, un gain très intéressant sur la masse, une économie sur le prix et la possibilité d'aller à des vitesses jusqu'alors interdites. Cependant les rotors infiniment rigides n'existent pas puisqu'on a repoussé les déformations dans une zone privilégiée du col de la pale. [6]



**Fig (II - 2 ) Rotor rigide**

Il en résulte des couplages battement traînée torsion de la pale qui facilitent les instabilités diverses, augmentent le niveau vibratoire et risquent d'être particulièrement gênantes à grandes vitesses. Pour toutes ces raisons, l'application du rotor rigide est limitée à un domaine de vol relativement restreint en vitesse et en évolution jusqu'à présent.

## GENERALITES SUR LES PALES :

### I - Technologie d'une pale :

Un rotor principal est essentiellement constitué d'un ensemble de pale associé à un moyeu, ces pales en rotation assurent la sustentation et la traction nécessaire au vol d'hélicoptère.

Les efforts sollicitant une pale sont :

- force centrifuge, aérodynamique, d'inertie et de pesanteur.

Toutes ces sollicitations engendrent des forces internes et des moments le long de la pale, et déterminent des états de contraintes normales et de cisaillement.

La répartition massique de la pale a son importance, elle a une influence sur la répartition des contraintes. De plus les raideurs de battement  $EI_B$ , de traînée  $EI_T$  et de torsion  $GJ$  ont aussi leur importance vis-à-vis des différents modes de vibration ; c'est ainsi que le premier mode de traînée conditionne la résonance au sol, tandis que ceux de battements et de torsion conditionnent respectivement la puissance de commande et la sensibilité à la vibration. [5]

### II - INFLUENCE DE LA REPARTITION MASSIQUE EN CORDE :

Le centre de gravité en corde d'une pale est généralement situé à 25% de la corde du profil à partir du bord d'attaque.

Pour un profil aérodynamique le coefficient de moment aérodynamique  $C_{MA}$  rapporté au bord d'attaque, a pour expression  $C_{MA} = C_{m0} + 0.25C_z$ .

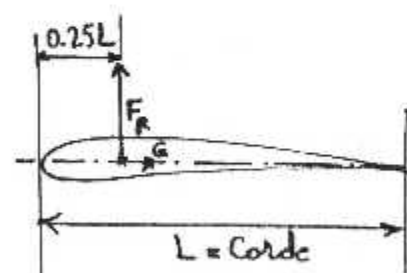


Fig (II - 3 ) Profil d'une pale

Le foyer d'un profil est le point pour lequel le moment aérodynamique est constant quelle que soit l'incidence du profil  $C_{mf} = C_{m0}$

Généralement la position relative du foyer est située aux environs de 25% de la corde à partir du bord d'attaque.

Pour un profil symétrique le coefficient  $C_{m0}$  est nul et le foyer est situé à 25% .

- si **G** coïncide avec **F**, on évite tout risque d'instabilité.
- si **G** en arrière du **F**, les forces d'inerties et les forces centrifuges induisent un moment cabreur qui augmente l'incidence du profil, engendrant ainsi une augmentation de portance.

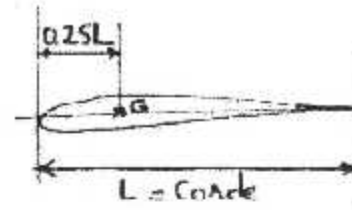


Fig (II - 4) Pale centrée en arrière du foyer

- Si **G** était placé trop en avant du foyer **F**, la pale s'effacerait au fur et à mesure de l'augmentation du pas, et le décollage de l'hélicoptère serait pratiquement impossible.

### III - CONCEPTION TECHNOLOGIQUE D'UNE PALE :

Les différents composants d'une pale sont :

- Un longeron ;
  - Un revêtement d'épaisseur  $e$  ;
  - Un remplissage ;
  - Un arêtier.
- **Le longeron** : contribue pour une grande part à la flexion de battement ainsi qu'à la flexion de traînée.
  - **L'arêtier** : par sa position au bord de fuite, a au moins deux fonctions :
    - Il permet d'augmenter la corde du profil, et par la même la surface portante.
    - Il permet d'accroître considérablement l'inertie de traînée (assure avec le longeron la raideur en traînée nécessaire).
  - **Revêtement** : il contribue à transmettre les charges aérodynamiques, et il participe aux flexions de battement et de traînée et il lui revient la plus grande participation à la raideur en torsion.
  - **Remplissage** : est nécessaire afin d'obtenir une stabilisation contre tout flambage induit par la torsion ; ce remplissage est constitué par un matériau le plus léger possible afin de diminuer son effet sur le centrage général de la pale.

Ce remplissage constitue à former de ce que l'on appelle (nid d'abeille) qui assemblés par collage à chaud.

Enfin, la pale évolue dans un environnement climatique qui n'est pas parfait (poussières, sable, pluie, etc.), si ce dernier est fortement dégradé, il s'ensuit des conséquences aérodynamiques telles qu'une augmentation du coefficient de moment  $C_m$  et une variation de la

position du foyer. C'est la raison pour laquelle on protège cette zone à l'aide de feuilles d'inox, qui se comporte très bien vis-à-vis de la pluie, par contre le polyuréthane a un meilleur comportement contre le sable. [5]

#### **IV - TYPES DES PALES :**

##### **IV - 1 Selon la matière constituante :**

##### **IV - 1 - 1 Pales métalliques :**

Les pales métalliques ont succédé aux premières pales en bois. Elles sont généralement en alliage léger, bien que l'acier et le titane aient aussi été utilisés.

Les matériaux métalliques sont très sensibles à l'entaille, aux évolutions brutales et à la corrosion.

Il existe deux types de pales l'une à longeron plein qui sont complétés par un revêtement enveloppant, l'autre creux a une forme de **D** (alliage léger), convenant très bien pour transmettre toutes les sollicitations (effort centrifuge, flexion de battement et traînée, torsion) et assure toutes les raideurs.

##### **IV - 1 - 2 Pales en matériaux composites :**

L'utilisation des matériaux composites pour la fabrication des pales offre les avantages suivants :

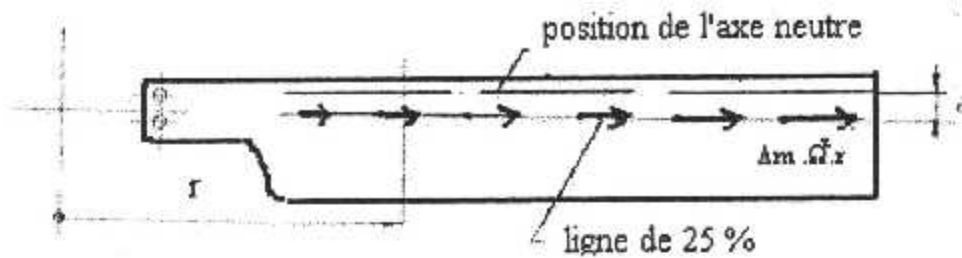
- insensibilité quasi totale à l'entaille et aux phénomènes de fatigue et corrosion
- très bonne résistance aux impacts avec une tenue résiduelle à la fatigue très supérieure à celle des matériaux métalliques.
- rapport de la résistance en fatigue à la masse spécifique : trois fois plus élevées que pour l'acier et quatre fois plus que pour les alliages légers.

En outre, on note une grande facilité de maintenance, avec possibilité de réparations par l'utilisateur.

La conséquence de ces avantages c'est que les matériaux composites augmentent la durée de vie (20000 heures ou plus).

La pale composite constituée généralement par des composants dont les matériaux ont des modules d'élasticité différents.

La position du centre neutre des sections travaillantes est différente de la position du centre de gravité en corde. Cette particularité engendre donc un moment de traînée supplémentaire par le fait que les effets centrifuges agissent au centre de gravité comme le montre la figure.



Fig( II – 5 ) Pale composite

On distingue deux technologies différentes :

- Pale constituée d'un longeron et d'un caisson de torsion matérialisé un revêtement enveloppant.
- Pale constituée d'un longeron et de plusieurs caisson.

#### IV – 1 – 3 Pales en bois :

Ce type de pale présente de nombreux avantages et inconvénients.

**Les avantages :**

- Une simplicité de fabrication qui demande un outillage classique.
- Une technique aisée.
- Leurs légèretés par rapport aux pales métalliques.
- Leur résistance aux phénomènes de phatique.

**Les inconvénients:**

- Se résultant en un gaspillage de matières premières. (Bois)
- Leur sensibilité à l'humidité.
- Difficultés de réparation.



#### IV - 1 - 4 Pales en plastique armé :

Les constructeurs utilisent des pales entièrement en plastique armé de fibre de verre ou de longeron en acier.

L'inconvénient dépend de la capacité d'accumulation des charges électriques sur la surface. Ce qui entraîne une certaine tension entre les éléments de pale.

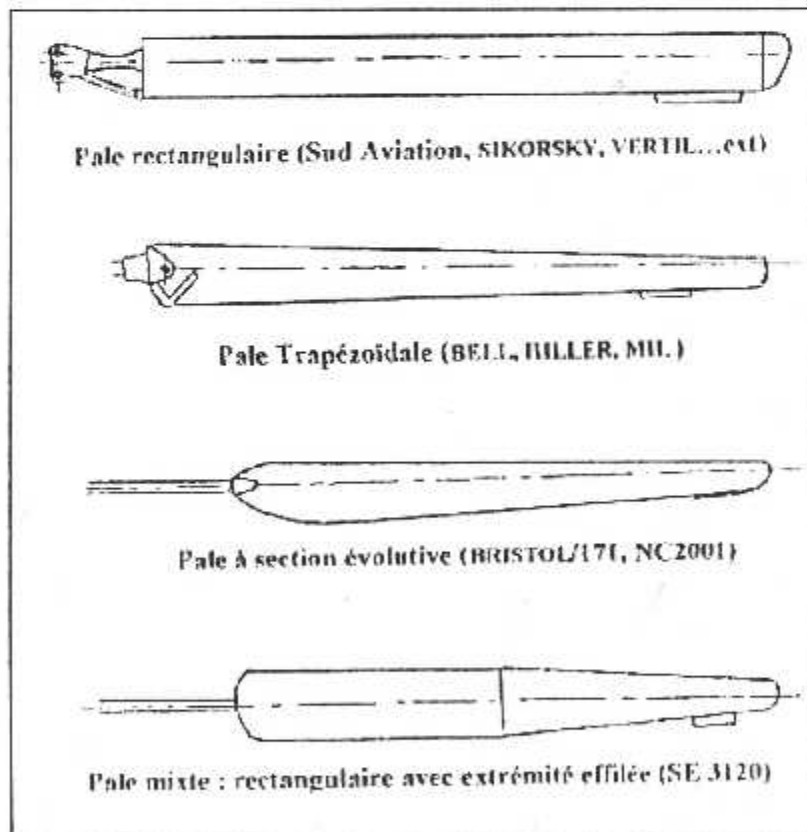
Ces mêmes matériaux soient utilisés en tant qu'éléments résistants.

#### IV - 2 Selon la forme :

##### Les différentes formes des pales :

Les formes des pales peuvent différer selon les appareils :

- Les pales rectangulaires.
- Les pales trapézoïdales.
- Les pales elliptiques, ou des formes plus compliquées.



Fig(II - 6) Différentes formes en plan des pales

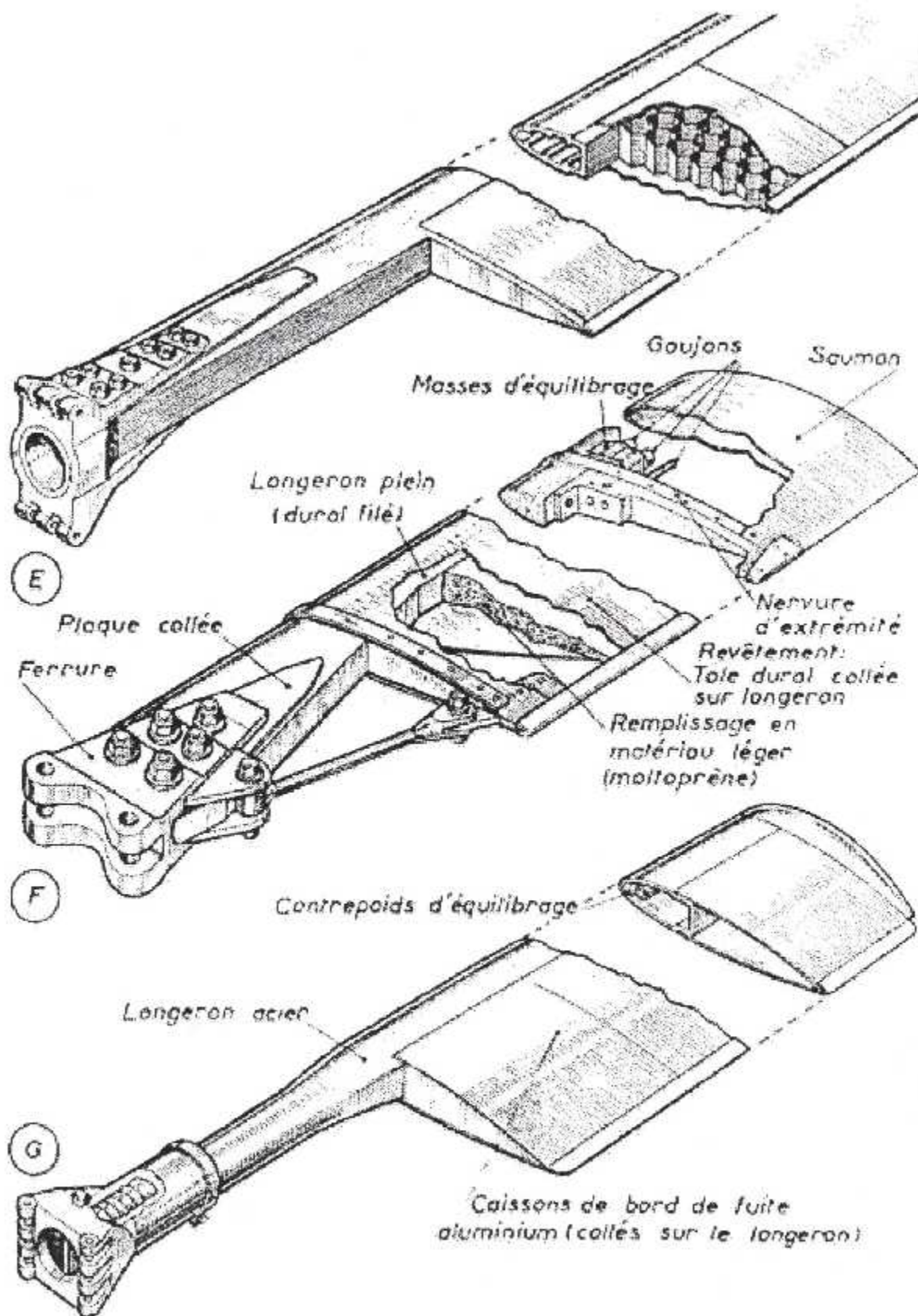


Fig (II - 7) Différents types des Pales du rotor principal

## V – CONTROLE ET REGLAGE DES PALES :

### V – 1 Contrôle des pales :

Les opérations de contrôle comprennent :

- Contrôles de réception des matériaux (module de Young, résistance à la traction et au cisaillement, masse surfacique, taux d'imprégnation, etc.) ;
- Contrôles par des opérations de moulage et d'étuvage, vérification du collage par contrôle acoustique, éprouvettes de fatigue justifiant les matériaux de base, etc) ;
- Contrôles complètes des pales. En effet, les pales complètes sont essayées sur des bancs de fatigue où l'on reproduit les efforts alternés (battement et traînée, parfois même la torsion) et les efforts permanents (battement, traînée, efforts centrifuges), et cela pour un niveau de charge correspondant à 2,5 ou 3 fois les charges maximales de vol. Ces essais sont conduits jusqu'à la rupture, après que la pale ait effectué un million de cycles de ces charges. L'exploitation de ces résultats permet un calcul de durée de vie qui détermine généralement une valeur infinie pour les pales en composites.

### V – 2 Réglages (statique et dynamique) des pales:

#### V – 2 – 1 Réglages statiques:

Concernant le réglage statique, bien que de multiples précautions soient prises au cours de la fabrication pour le suivi des masses de chaque composant, il existe des dispersions, ne serait-ce qu'au niveau des tolérances de fabrication et des masses des produits. Ainsi, toute pale fabriquée n'a pas la même masse que sa voisine, ni le même centre de gravité en corde.

C'est pourquoi chaque pale est identifiée en moment statique vis-à-vis d'un moment statique de référence, qui l'on obtient par l'addition des masses sur l'extrémité de la pale.

L'équilibre de la pale s'écrit donc :

$$M \cdot X_G + m \cdot R = \text{moment statique de référence}$$
$$m = \frac{\text{moment statique de référence} - M \cdot X_G}{R}$$

Ce réglage garantit que toutes les pales auront le même moment statique ; par conséquent, en rotation chaque pale développera la même force centrifuge sur le moyeu et l'arbre rotor.

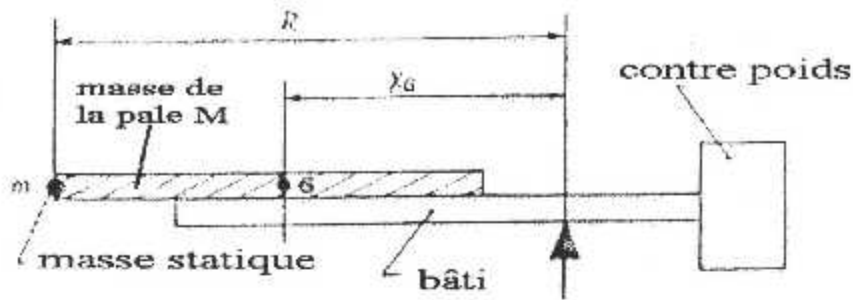


Fig (II - 8 ) Réglage statique

V - 2 - 2 Réglage dynamique:

Le réglage dynamique sera effectué sur des pales en rotation en utilisant un banc spécialement conçu à cet effet.

Il est bien évident que chaque pale fabriquée en série n'a pas la même répartition massique sur toute son envergure. De plus, les caractéristiques géométriques peuvent être légèrement différentes d'une pale à l'autre, ce qui, compte tenu des tolérances admises, engendre ainsi des comportements différents en rotation.

Trois types de réglage doivent être exécutés :

- **Le premier réglage :** Consiste à faire tourner les pales au régime nominal du rotor avec une valeur du pas correspondant à une portance nulle. Si la pale d'essai n'est pas dans le même plan que les deux autres, cela signifie globalement que le calage de la pale sur le manchon doit être corrigé. Cette correction se fait en agissant sur la longueur de la biellette de pas, laquelle est réglable.

On vérifie si les pales tournent au même plan.

Supposons que la pale d'essai soit montante par rapport aux autres pales.

On voit que la pale d'essai définie par  $\beta_E$  à une portance supérieure aux autres. Ceci se caractérise par une hauteur  $\Delta h$ .

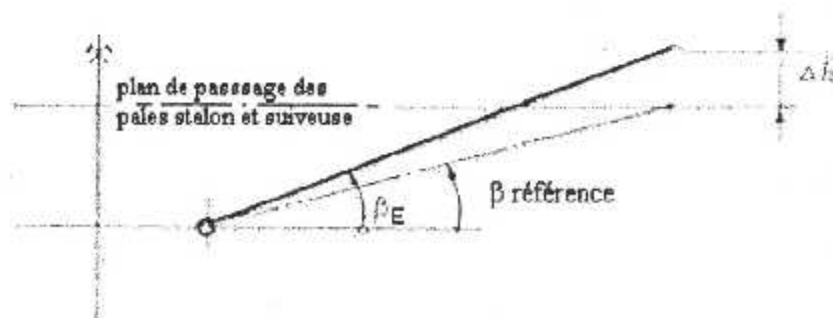


Fig (II - 8 ) Réglage dynamique d'une pale.

Après avoir constaté cette anomalie, il faut en analyser les remèdes qui vont consister en deux autres réglages et, pour cela, on fait appel à deux artifices, d'ailleurs installés sur la pale :

- Un tab situé généralement à  $0,8 R$
- Des masses situées respectivement à l'extrémité de la pale et de part et d'autre de l'axe de pas situé à 25 %.

• **Le second réglage** : S'effectue au petit pas ; on mesure le moment qui est le résultat de l'effort mesuré à partir de la biellette de pas par rapport à l'axe de pas. Si on désire engendrer un moment piqueur  $M$  (le centre de poussée est situé à l'arrière de l'axe d'articulation de pas.  $F_R$  créer un moment à piquer), il faut braquer le tab vers le bas.



Fig (II - 10 ) Création d'un moment piqueur d'une pale

Ce moment a une importance par suite de la souplesse en torsion de la pale.

• **Troisième réglage**, on met des masses d'extrémité de façon symétrique de part et d'autre de 25 %.

Si on veut créer un moment piqueur, on déplace des masses de l'arrière vers l'avant. [5]

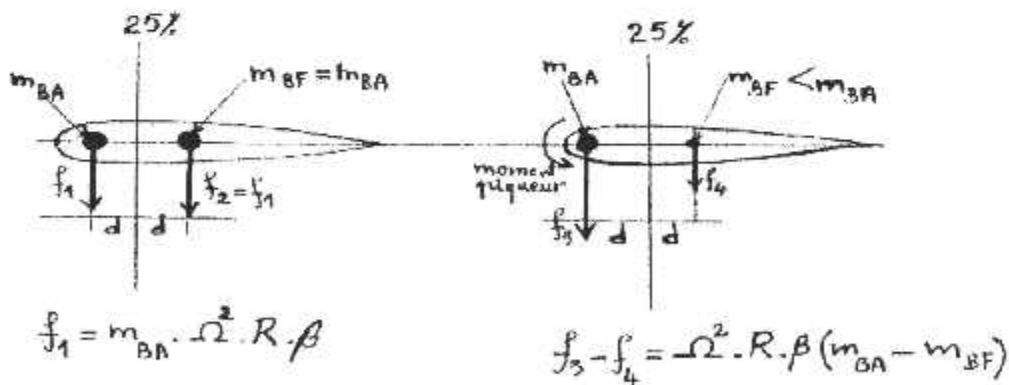


Fig (II - 11 ) Influence des masses d'extrémité de pale

#### IV – LES ARTICULATIONS DES PALES ET LEURS ROLES :

Les conditions de résistance de l'attache et le comportement dynamique du moyeu imposent trois degrés de liberté à la liaison pale / moyeu :

- **Battement** : levée de pale perpendiculaire au plan du disque.
- **Trainée** : mouvement de pale dans le plan rotor.
- **Pas** : rotation de la pale suivant son envergure.

En regroupant ces trois fonctions au centre du rotor, on constitue le moyeu articulé.

Pour démontrer la nécessité de ces articulations on examinera les charges appliquées à un rotor idéal dont le moyeu serait absolument rigide, les pâles indéformables et encastées de façon parfaite sur le moyeu.

##### IV – 1 L'articulation de battement :

- En **vol stationnaire** ou **vertical**, la répartition des charges aérodynamiques sur les pâles est symétrique. Il en résulte que l'effort de portance  $F_N$  est porté par l'axe rotor et que l'emplanture de pale est soumise à un moment statique élevé du fait du grand élanement de la pale.
- En **vole de translation**, la répartition des vitesses est différente suivant qu'une pale est en position "avançante" ou "reculante":

Pale avançante :  $V + \Omega r$

Pale reculante :  $V - \Omega r$

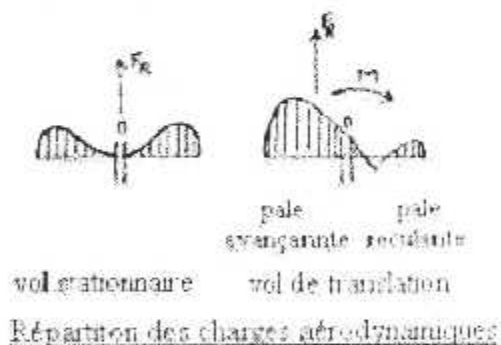
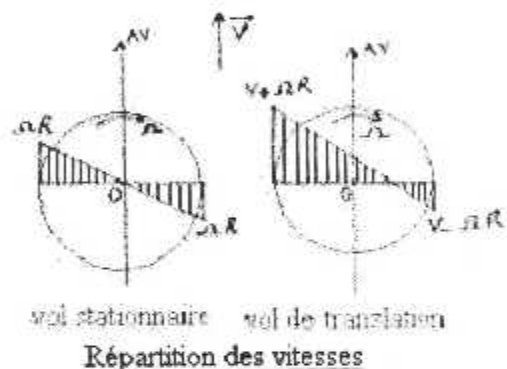


Fig (II – 12 ) Répartition des vitesses et des charges aérodynamiques

Il est en résulte une forte dissymétrie des charges aérodynamiques, la résultante aérodynamique  $F_R$  ne passe plus par le centre rotor et l'appareil soumis à un mouvement de roulis, n'est plus pilotable.

D'autre part, l'emplanture de la pale est soumise à un moment alterné élevé généralement incompatible avec la résistance des pièces de liaison.

Pour éviter ceci ; la solution consiste à articuler la pale sur le moyeu, très près de l'axe rotor, ce qui a pour avantage :

- D'annuler les moments d'encastrement statique et dynamique.
- De ramener le vecteur  $F_R$  très près de l'axe rotor.
- De supprimer le moment de roulis parasite de l'appareil.

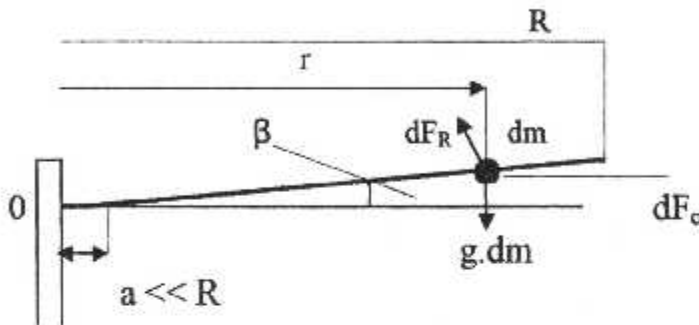


Fig (II - 13 ) Variation de l'angle du battement en fonction des forces d'équilibres

En conséquence, à chaque instant, la pale prend un angle de battement correspondant à l'équilibre entre force de rappel centrifuge et forces aérodynamiques.

La tendance du moyeu articulée est donc à la régularisation des charges aérodynamique, ce qui réduit la dissymétrie pale avançante / pale réculante.

#### IV - 2 L'articulation de traînée :

Du fait de la conicité  $a_0$  du rotor, au cours d'un tour, la pale étant entraînée à vitesse constante serait soumise à des efforts énormes et du fait de sa rigidité ne saurait parcourir dans le même temps des segments curvilignes  $A_1 A_2$ ,  $A_4 A_1$  et  $A_2 A_3$ ,  $A_3 A_4$  de longueur différente.

De longueur différente ; le fonctionnement serait impossible dans le cas où le rotor est rigide (les pales parfaitement encastées).

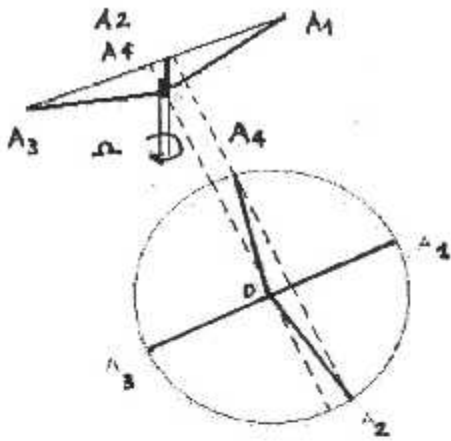


Fig (II - 14) Mouvement de la pale en traînée avec battement cyclique

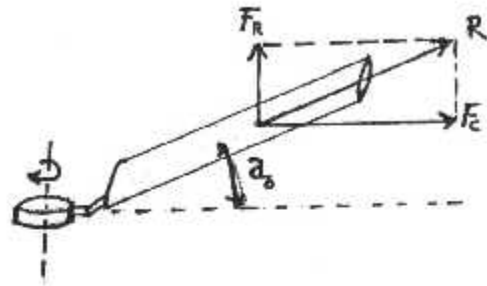


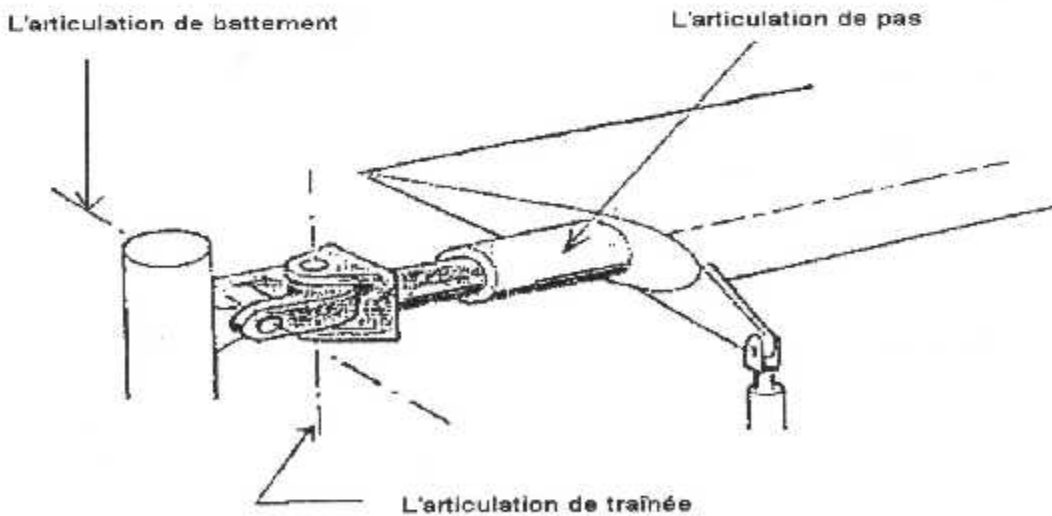
Fig (II - 15) La conicité ( $a_0$ ) de la pale

Pour diminuer les efforts sur la pôle et régulariser le fonctionnement, la solution consiste plane du rotor. La distance entre l'attache de pôle et le centre de rotation est appelée excentricité de traînée  $e$ .

L'angle de conicité c'est lorsque la résultante de  $F_R$  et  $F_C$  est alignée avec la pôle alors le moment de flexion est nul

#### IV - 3 Articulation de pas :

Pour faire évoluer l'hélicoptère, il faut que la portance soit tout d'abord. Variable en module par la variation du pas collective. ( variation collective du pas de toutes les pales ), et en direction par la variation du pas cyclique. [6]





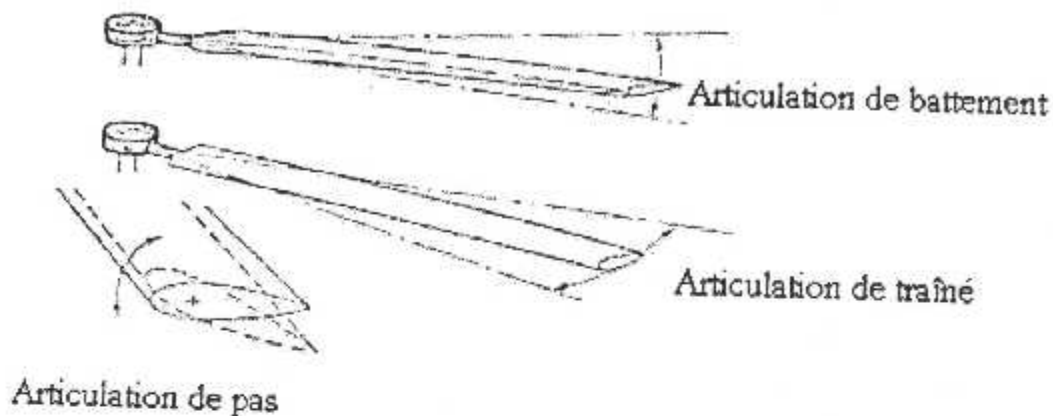


Fig (II - 16) Différents types des articulations

**Pour conclure :**

L'articulation de battement :

- Supprime les contraintes de flexion verticales au niveau du pied de pale ;
- Compense la dissymétrie de portance entre pale avançante et pale reculante en vol de translation ;

Mais le battement des pales crée des contraintes de flexions horizontales en pied de pale.

L'articulation de traînée :

- Supprime les contraintes horizontales provoquées par le battement des pâles.

Mais les oscillations alternées des pâles autour de l'axe de traînée déséquilibrent le rotor ( d'où vibrations ). Pour réduire l'angle de traînée ( $\delta$ ) des pâles ; une solution réduire l'angle de battement ( $\beta$ ) qui en est la cause.

L'articulation de pas permet de faire varier l'angle de pas  $\theta$  . Par rotation de la pôle autour de son axe de variation de pas. Cette articulation est commandée par le pilote. [4]

## V - MOMENT DE FLEXION :

### V - 1 Dans l'articulation de battement :

En pale **encastrée** : la portance sollicitant la pale vers le haut crée un moment de flexion dont la valeur est maximale et très importante au pied de pale.

On comprend que ce moment de flexion engendre des contraintes très élevées au niveau de point de fixation de la pale et que pour les supporter il faudrait dimensionner d'une manière prohibitive les pieds de pale.

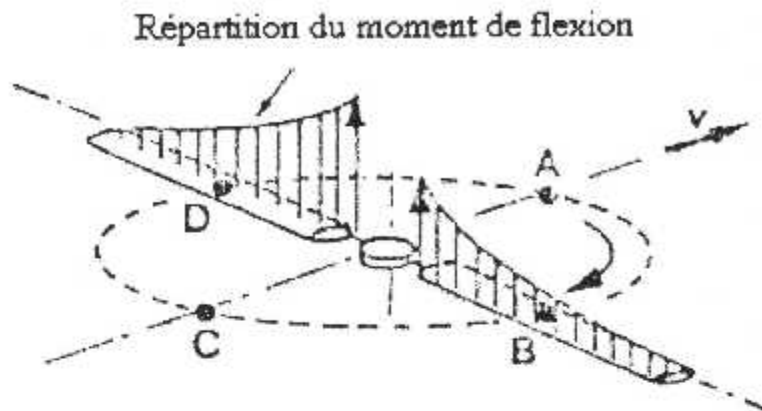


Fig (II - 17) Répartition du moment de flexion verticale

Pour annuler le moment de flexion à l'emplanture (c-à-d pour réduire les contraintes) la pale est articulée dans le plan vertical (notons que l'articulation peut être réelle (axe d'articulation) ou fictive (souplesse : interposition entre pale et moyeu des matériaux à très grande souplesse ex : fibre de verre, résine).

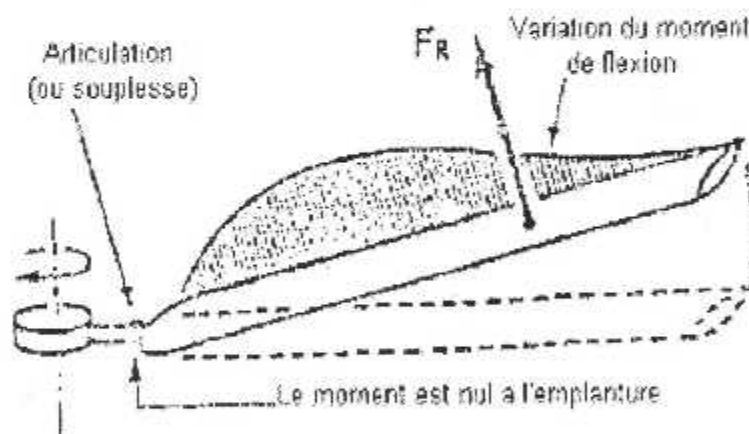


Fig (II - 18) variation du moment de flexion verticale le long d'une pale articulée

On voit qu'une telle articulation qui permet à la pale de se déplacer vers l'haut. (on dit : battre). Supprime le moment de flexion à l'attache de pale en lui substituant un mouvement

## V - 2 Dans l'articulation de traînée :

Pendant la rotation des pâles à  $\omega$  constante la force d'inertie  $F_1$  (qui tend à augmenter la vitesse angulaire) ne pouvant :

- Se manifeste sous forme dynamique.
- Se manifeste sous forme statique créant un moment de flexion maximale à l'emplanture de la pale. ( $M = d \cdot F_i$ )

Chaque élément de pale et ainsi sollicité par une force d'inertie  $F_i$  l'ensemble de ces forces donne un moment de flexion résultant qui tend à tordre la pale dans le sens de rotation.

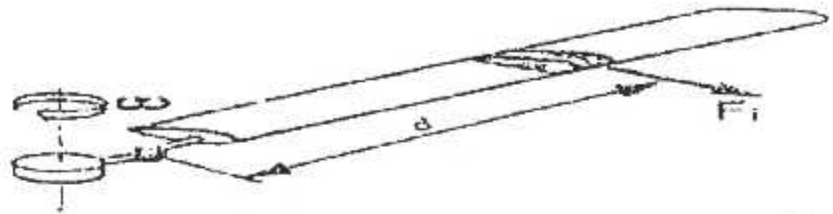


Fig (II - 19) force d'inertie d'un élément de pale

Lorsque la pale descend (le rayon de la trajectoire de l'élément de pale augmentant. (il passe de  $r$  à  $R$ ). Il y a tendance à la diminution de la vitesse angulaire soit  $F_i$  et un moment de flexion qui tend à tordre de la pale dans le sens opposé au sens de rotation. [4]

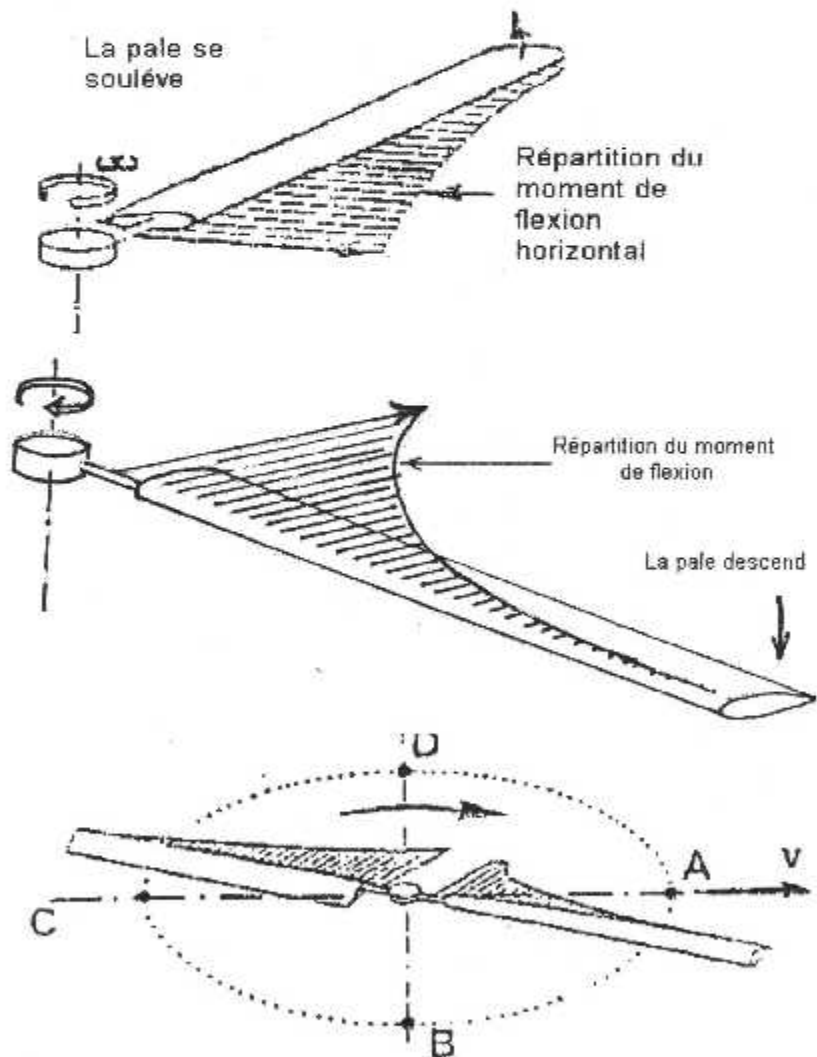


Fig (II - 20) Répartition du moment de flexion horizontale

Ainsi la pale effectuant un tour complet est soumise :

- De ( C ) à ( A ) " pale avançante " lorsqu'elle soulève à un moment de flexion dirigé vers l'avant.
- De ( A ) à ( C ) " pale reculante " lorsqu'elle se descend à un moment de flexion dirigé vers l'arrière.

Il en résulte des efforts de flexion ALTERNES générateurs de fatigue. Notamment au pied de pale où les contraintes sont maximales.

Les forces d'inerties alternées dues au battement vertical des pâles et sollicitant les pâles dans le plan de rotation sont appelées forces de Coriolis, pour supprimer l'effet de ces forces de Coriolis on fait l'articulation de traînée permet à la pale sollicitée par ces forces d'osciller horizontalement autour d'une position moyenne. Ce degré de liberté annule le moment de flexion au niveau du pied de pale. [4] et [6]

## VII – LES FORCES AGISSANTES SUR UNE PALE EN ROTATION :

Les forces sollicitent une pale peuvent se classer comme suite :

- **Le poids ( P )** appliqué au centre de gravité ( G )

$$P = m \cdot g$$

- **La force centrifuge ( F<sub>C</sub> )** appliquée en (G )

Elle résulte de la masse de la pale en rotation telle que :

$$F_C = m \cdot \omega^2 \cdot r$$

La force centrifuge est constante si le régime nominal du rotor est constant. Par conséquent cette force, engendre une traction permanente et chaque fibre de la pale est soumise à une contrainte de tension.

- **Les forces aérodynamiques ( F<sub>Z</sub> , F<sub>X</sub> )**

un profil placé dans le vent relatif ( V<sub>R</sub> ) est soumis :

- Sur sa face supérieure ( extrados ) à des forces de dépression.
- Sur sa face inférieure ( intrados ) à des forces de pression.

Dont la résultante appelée résultante aérodynamique ( F<sub>R</sub> ) se décompose en deux forces que l'on peut mesurer en soufflerie.

- **La portance ( $F_z$ )** perpendiculaire au vent relatif. C'est une force qui travaille dans le bon sens : elle porte le profil.

$$F_z = \frac{1}{2} \rho \cdot V^2 \cdot S \cdot C_z$$

- **La traînée ( $F_x$ )** parallèle au vent relatif. C'est une force nuisible : elle freine le profil et absorbe inutilement de l'énergie.

$$F_x = \frac{1}{2} \rho \cdot V^2 \cdot S \cdot C_x$$

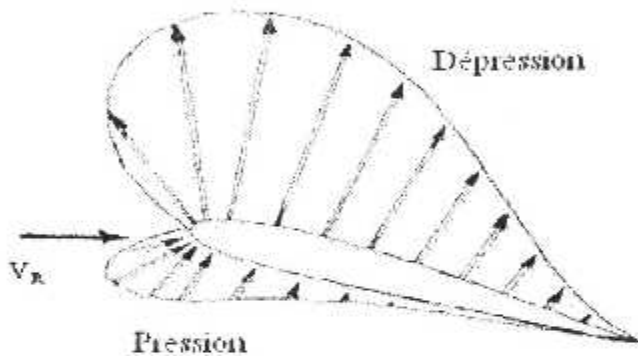


Fig (II - 21) Diagramme des pressions et dépressions agissant sur un profil

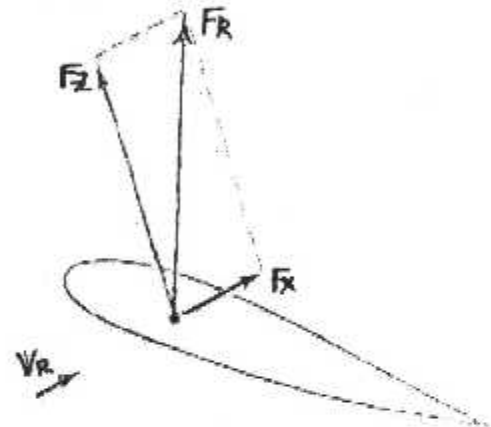


Fig (II - 22) la portance et la traînée d'un profil

- **les forces d'inerties ( $F_i$ )**: Ce sont des forces alternées dues au battement vertical des pâles et sollicitant les pales dans le plan de rotation sont appelées force de CORIOLIS.

Ces forces d'inerties ( $F_i$ ) varient en direction et intensité.

- De C à A, la pôle monte. La force d'inertie  $F_i$  dirigé dans le sens de rotation, fait osciller la pôle vers l'avant.
- De A à C, la pôle descend. La force d'inertie  $F_i$  dirigé en sens contraire du sens de rotation, fait osciller la pôle vers l'arrière.
- En A et C, la pôle occupe une position moyenne ( $F_i = 0 ; \delta = 0$ ). [4]

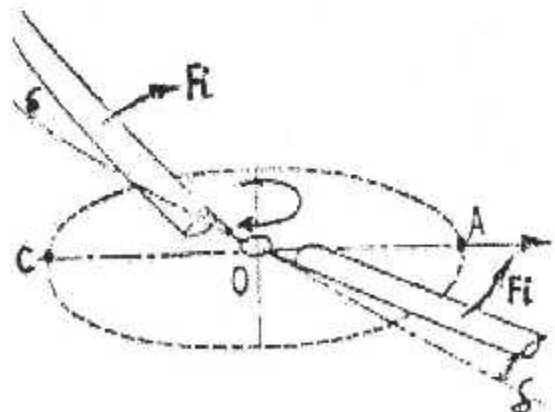


Fig (II - 23) Le sens des forces d'inertie suivant la position de la pale



**CHAPITRE III**

**ETUDE DU BATTEMENT**

**EQUATION DU BATTEMENT :**

**I - ROTOR SANS EFFORTS AERODYNAMIQUES :**

**I - 1 Le moment cinétique de la pôle par rapport à '0' en fonction du temps :**

Le moment cinétique d'un solide (s) par rapport au point (c) quelconque liés au repère fixe R(O,X,Y,Z) est :

$$\vec{\mu}_{C/R(O,X,Y,Z)} = m \cdot \overline{CG} \wedge \vec{V}_s^0 + m \cdot \overline{CO_s} \wedge (\vec{\Omega}_s^0 \wedge \overline{O_sG}) + I_{S/R(O,X,Y,Z)} \cdot \vec{\Omega}_s^0 \quad [8]$$

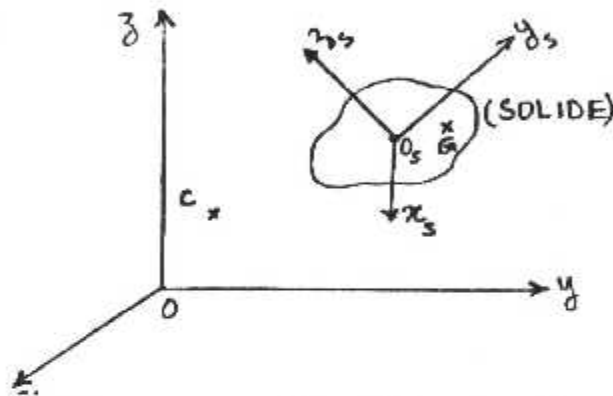


Fig (III - 1) mouvement d'un solide autour d'un axe fixe

- Si  $O_s$  coïncide avec G ( théorème de Koening )

$$\Rightarrow \vec{\mu}_{C/R(O,X,Y,Z)} = \overline{CG} \wedge m \vec{V}_G^0 + I_{G/R(O_s, X_s, Y_s, Z_s)} \cdot \vec{\Omega}_s^0$$

- Si  $O_s$  est fixe et coïncide avec G  $\Rightarrow \vec{\mu}_{C/R(O,X,Y,Z)} = I_{G/R(O_s, X_s, Y_s, Z_s)} \cdot \vec{\Omega}_s^0$

- si C coïncide avec  $O_s$  et G  $\Rightarrow \vec{\mu}_{G/R(O,X,Y,Z)} = I_{G/R(O_s, X_s, Y_s, Z_s)} \cdot \vec{\Omega}_s^0$

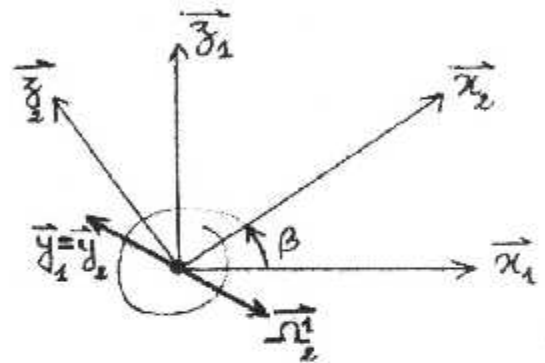
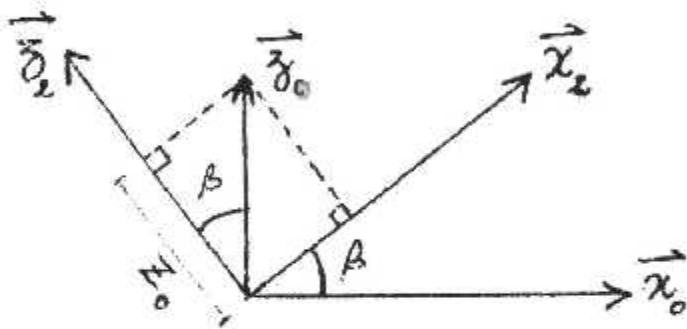
Dans notre cas où le solide représente une pale on a : G et C et  $O_s$  sont coïncides, alors le moment cinétique de cette pale par rapport au repère fixe R(O,X<sub>0</sub>,Y<sub>0</sub>,Z<sub>0</sub>) est :

$$\boxed{\vec{\mu}_{Pale/R_0(O,X_0,Y_0,Z_0)} = I_{pale/R_2(O,X_2,Y_2,Z_2)} \cdot \vec{\Omega}_2^0}$$

$$I_{\text{pale}/R_2(O,X_2,Y_2,Z_2)} = \begin{bmatrix} I_{xx} & 0 & 0 \\ 0 & I_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & I_{zz} \end{bmatrix}_{/R_2}$$

$$\overline{\Omega}_2^0 = \overline{\Omega}_1^0 + \overline{\Omega}_2^1$$

$$\overline{\Omega}_1^0 = \Omega \overline{z}_0 \Rightarrow \overline{\Omega}_1^0 = \Omega (\overline{z}_2 \cos \beta + \overline{x}_2 \sin \beta)$$



$$\overline{\Omega}_2^1 = -\beta' \overline{y}_1 \Rightarrow \overline{\Omega}_2^1 = -\beta' \overline{y}_2$$

D'où

$$\overline{\Omega}_2^0 = \overline{\Omega}_1^0 + \overline{\Omega}_2^1$$

$$\begin{bmatrix} \Omega \sin \beta \\ 0 \\ \Omega \cos \beta \end{bmatrix}_{R_1/R_0} + \begin{bmatrix} 0 \\ -\beta' \\ 0 \end{bmatrix}_{R_2/R_1} = \begin{bmatrix} \Omega \sin \beta \\ -\beta' \\ \Omega \cos \beta \end{bmatrix}_{R_2/R_0}$$

$$I_{\text{pale}/R_2(O,X_2,Y_2,Z_2)} \cdot \overline{\Omega}_2^0 = \begin{bmatrix} I_{xx} & 0 & 0 \\ 0 & I_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & I_{zz} \end{bmatrix}_{/R_2} \begin{bmatrix} \Omega \sin \beta \\ -\beta' \\ \Omega \cos \beta \end{bmatrix}_{R_2/R_0}$$



$$= \begin{bmatrix} I_{xx} \Omega \sin \beta \\ -I_{yy} \dot{\beta} \\ I_{zz} \cos \beta \\ \text{Pale / R}_0 \end{bmatrix}$$

$\beta$  petit angle  $\Rightarrow \begin{cases} \cos \beta = 1 \\ \sin \beta = \beta \end{cases} \Rightarrow \vec{\mu}_{\text{Pale/R}_0(0, X_0, Y_0, Z_0, t)} = \begin{bmatrix} I_{xx} \Omega \beta \\ -I_{yy} \dot{\beta} \\ I_{zz} \Omega \\ \text{Pale / R}_0 \end{bmatrix}$

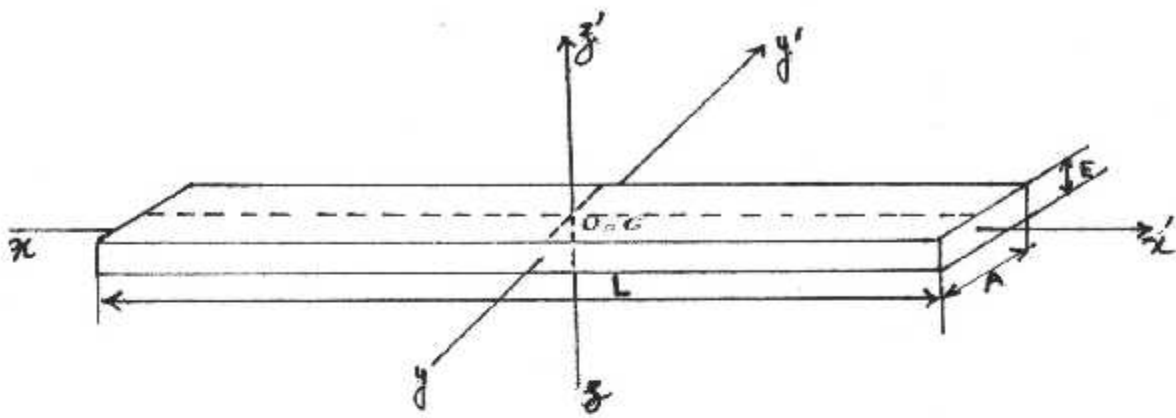
I-2 Le moment dynamique en projection dans (R<sub>2</sub>) :

$$\vec{\delta}_{\text{pale / R}_0(0, x_0, y_0, z_0, t)} = \frac{d}{dt} \vec{\mu}_{\text{pale / R}_0(0, x_0, y_0, z_0, t)} + \vec{\Omega}_2^0 \wedge \vec{\mu}_{\text{pale / R}_0(0, x_0, y_0, z_0, t)}$$

$$\vec{\delta}_{\text{pale / R}_0(0, x_0, y_0, z_0, t)} = \begin{bmatrix} I_{xx} \Omega \dot{\beta} \\ -I_{yy} \dot{\beta}'' \\ 0 \\ \text{Pale / R}_0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \Omega \beta \\ -\dot{\beta}' \\ \Omega \\ \text{Pale / R}_0 \end{bmatrix} \wedge \begin{bmatrix} I_{xx} \Omega \beta \\ -I_{yy} \dot{\beta}' \\ I_{zz} \Omega \\ \text{Pale / R}_0 \end{bmatrix} \quad [8]$$

$$\vec{\delta}_{\text{pale / R}_0(0, x_0, y_0, z_0, t)} = \begin{bmatrix} \Omega \beta [I_{xx} + I_{yy} - I_{zz}] \\ \Omega^2 \beta [I_{xx} - I_{zz}] - I_{yy} \dot{\beta}'' \\ \Omega \dot{\beta}' \beta [I_{xx} - I_{yy}] \\ \text{Pale / R}_0 \end{bmatrix}$$

Comparaison des inerties :



$$\rho = \frac{M}{V} = \frac{dm}{dv} \Rightarrow dm = \rho dv = \rho \cdot dx dy \cdot dz$$

$\frac{e}{a}$  très petit / L

le moment d'inertie /x'x :

$$(2\ell = L)$$

$$(2e = E)$$

$$(2a = A)$$

$$I_x = \int (y^2 + z^2) dm$$

$$= \rho \iiint (y^2 + z^2) dx dy dz$$

$$= \rho \iint \left[ \int_{-l}^{+l} (y^2 + z^2) dx \right] dy dz$$

$$\int_{-l}^{+l} (y^2 + z^2) dx = (y^2 + z^2) \int_{-l}^{+l} dx = (y^2 + z^2) [x]_{-l}^{+l} = (y^2 + z^2) [+l - (-l)]$$

$$I_x = \rho \iint 2\ell (y^2 + z^2) dy dz$$

$$I_x = \rho \int \left[ \int_{-a}^{+a} 2\ell (z^2 + y^2) dy \right] dz$$

$$= \int_{-a}^{+a} 2\ell (z^2 + y^2) dy = \left[ 2\ell \left( \frac{y^3}{3} + yz^2 \right) \right]_{-a}^{+a}$$

$$= 2\ell \left[ \frac{a^3}{3} + z^2 a - \left( -\frac{a^3}{3} - z^2 a \right) \right] = 2\ell \left( \frac{2}{3} a^3 + 2a z^2 \right)$$

$$= \rho \int \int_{-e}^{+e} 2\ell \left( 2a z^2 + \frac{2}{3} a^3 \right) dz$$

$$= \rho \cdot 2 \ell \int_e^{+e} (2a z^2 + \frac{2}{3} a^3) dz = 2 \rho \ell \left[ 2a \frac{z^3}{3} + \frac{2}{3} a^3 z \right]_e^{+e}$$

$$\Rightarrow \boxed{I_x = \frac{8}{3} \rho \ell (a e^3 + e a^3)}$$

$$I_x = \frac{8}{3} \rho \ell (y z^3 + z y^3)$$

le moment d'inertie /y'y :

$$I_y = \int (x^2 + z^2) dm$$

$$= \rho \iiint (x^2 + z^2) dx dy dz$$

$$= \rho \iint \left[ \int_l^l (x^2 + z^2) dx \right] dy dz$$

$$\int_l^l (x^2 + z^2) dx = \int_l^l z^2 dx + \int_l^l x^2 dx = z^2 [x]_{-l}^{+l} + \left[ \frac{x^3}{3} \right]_{-l}^{+l}$$

$$= 2 \ell z^2 + \frac{2}{3} \ell^3$$

$$I_y = \rho \int \left[ \int_{-a}^{+a} (2 \ell z^2 + \frac{2}{3} \ell^3) dy \right] dz$$

$$\left[ 2 \ell z^2 \right]_{-a}^{+a} + \left[ \frac{2}{3} \ell^3 y \right]_{-a}^{+a} = 4 a \left[ \ell z^2 + \frac{1}{3} \ell^3 \right]$$

$$I_y = \rho \cdot 4 a \ell \int_e^e (z^2 + \frac{\ell^2}{3}) dz$$

$$= \rho \cdot 4 a \ell \left[ \frac{z^3}{3} \right]_e^{+e} + \left[ \frac{\ell^2}{3} z \right]_e^{+e}$$

$$\Rightarrow \boxed{I_y = \frac{8}{3} \rho a (\ell e^3 + \ell^3 e)}$$

$$I_y = \frac{8}{3} \rho y (xz^3 + zx^3)$$

Le moment d'inertie /zz' :

$$I_z = \int (x^2 + y^2) dm$$

$$= \rho \iiint (x^2 + y^2) dx dy dz$$

$$= \rho \iint \left[ \int_{-l}^l (x^2 + y^2) dx \right] dy dz$$

$$\begin{aligned} \int_{-l}^l (x^2 + y^2) dx &= \int_{-l}^l y^2 dx + \int_{-l}^l x^2 dx = y^2 [x]_{-l}^l + \left[ \frac{x^3}{3} \right]_{-l}^l \\ &= 2 \ell y^2 + \frac{2}{3} \ell^3 \end{aligned}$$

$$I_z = \rho \int \left[ \int_{-a}^a (2 \ell y^2 + \frac{2}{3} \ell^3) dy \right] dz$$

$$\left[ 2 \ell \frac{y^3}{3} \right]_{-a}^a + \left[ \frac{2}{3} \ell^3 y \right]_{-a}^a = \frac{4}{3} (\ell a^3 + \ell^3 a)$$

$$I_z = \rho \cdot \frac{4}{3} (\ell a^3 + \ell^3 a) \int_e^e dz$$

$$\Rightarrow \boxed{I_z = \frac{8}{3} \rho e (\ell a^3 + \ell^3 a)}$$

$$I_z = \frac{8}{3} \rho z (x y^3 + x^3 y)$$

- Puisque on a  $e$  et  $a$  très faible par rapport à  $\ell$

$$I_x = \frac{8}{3} \rho (\ell a e^3 + \ell e a^3)$$

$$I_y = \frac{8}{3} \rho (a \ell e^3 + a \ell^3 e)$$

$$I_z = \frac{8}{3} \rho (\ell e a^3 + \ell^3 e a)$$

$e^3$  est très faible  $\rightarrow$  le terme  $a e^3$  c'est aussi très faible si on néglige  $L \cdot a \cdot e^3$  et  $L^3 \cdot e \cdot a$   $I_x$  devient négligeable

$$\boxed{I_y = I_z = \frac{8}{3} \rho \ell^3 e \cdot a}$$

on a trouvé le moment dynamique égale à :

$$\overrightarrow{\delta}_{\text{pale}/R_0(0,x_0,y_0,z_0,t)} = \begin{bmatrix} \Omega \beta [I_{xx} + I_{yy} - I_{zz}] \\ \Omega^2 \beta [I_{xx} - I_{zz}] - I_{yy} \beta'' \\ \Omega \beta' \beta [I_{xx} - I_{yy}] \end{bmatrix} \quad \text{Pale}/R_0$$

comme  $I_{xx}$  négligeable  
et  $I_{yy} \approx I_{zz}$

$$\overrightarrow{\delta}_{\text{pale}/R_0(0,x_0,y_0,z_0,t)} = \begin{bmatrix} 0 \\ -I_{yy} \beta'' - I_{zz} \Omega^2 \beta \\ -I_{yy} \Omega \beta' \beta \end{bmatrix} \quad \text{Pale}/R_0$$

On ne gardant que les termes du 1<sup>er</sup> ordre (on négligeant les termes du 2<sup>ème</sup> ordre (ç-a-d infiniment petit du 2<sup>ème</sup> ordre  $\beta$  petit  $\rightarrow \beta' \times \beta$  très petit " de deuxième ordre"  $\Rightarrow$  on le néglige).

$$\overrightarrow{\delta}_{\text{pale}/R_0(0,x_0,y_0,z_0,t)} = \begin{bmatrix} 0 \\ -I_{yy} \beta'' - I_{zz} \Omega^2 \beta \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{Pale}/R_0$$

$$\overrightarrow{\delta}_{\text{pale}/R_0(0,x_0,y_0,z_0,t)} = \text{Moment de toutes les forces extérieures} / 0 = 0.$$

( En projection dans  $R_2$  )

Moment toutes les forces extérieures / 0 = 0 si on considère :

- Le poids de la pale négligeable.
- L'articulation rotoïde parfaite.

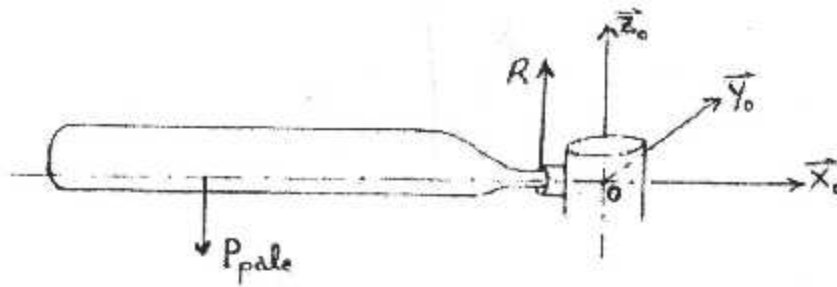


Fig (III - 2 ) La réaction du poids de la pale à l'emplanture

Le poids est négligeable  $\Rightarrow$  pas de moment / 0 ( $X_0, Y_0, Z_0$  référentiel).

$$(P = 0 \Rightarrow R = 0)$$

D'où l'équation du mouvement de battement :  $-I_{yy}\ddot{\beta} - I_{zz}\Omega^2\beta = 0$

Soit avec  $I_{yy} = I_{zz} = I$  :

$$\boxed{-I(\ddot{\beta} + \Omega^2\beta) = 0}$$

Solution générale de la forme :  $\beta = a_1 \cos \omega t - b_1 \sin \omega t$

$\omega$  : fre propre de la pale.

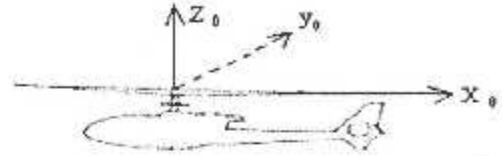
resis  $\rightarrow$   $\omega_{res} = \omega_{ex}$ .

**II - L'INFLUENCE DES EFFORTS AERODYNAMIQUES :**

La vitesse de l'appareil est :  $\vec{V}(\text{app}) = -V \cdot \vec{X}_0$

La vitesse d'écoulement de l'air est donc  $\vec{V}(\text{éclt}) = V \cdot \vec{X}_0$

c-a-d :  $\vec{V}_{\text{écoulement d'air}} = V \cdot \vec{X}_0$



Exprimons  $\vec{V}$  (vitesse d'écoulement d'air) dans le repère (2) :

c-a-d en projetant  $\vec{V}$  dans le repère (2) :

sur  $\vec{X}_2$  :

tout d'abord projetant  $V$  sur  $\vec{X}_1$

$$\frac{a}{V} = \cos \Omega t \Rightarrow a = V \cos \Omega t$$

puis projetant le résultat sur  $\vec{X}_2$

$$\frac{b}{a} = \cos \beta \Rightarrow b = a \cos \beta$$

$$\Rightarrow b = V \cos \Omega t \cdot \cos \beta$$

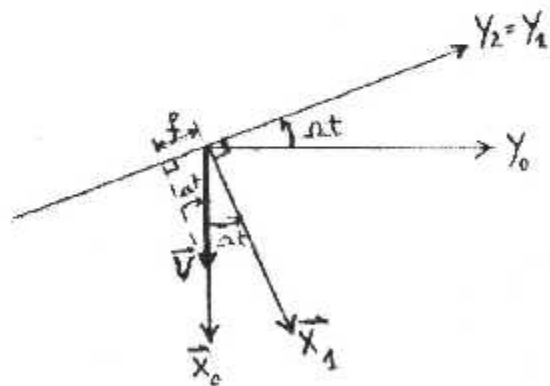
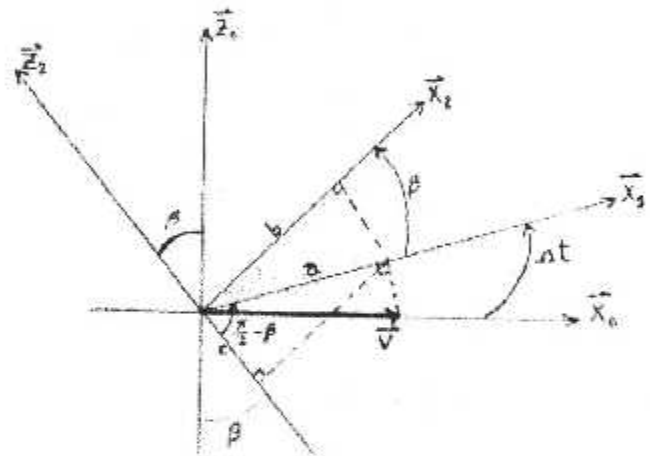
$$\Rightarrow y \approx V \cos \Omega t$$

$$\Rightarrow \vec{V} = V \cos \Omega t \cdot \vec{X}_2$$

sur  $\vec{Y}_2$  :

$$\frac{f}{V} = \sin \Omega t \Rightarrow f = V \sin \Omega t \Rightarrow \vec{V} = -V \sin \Omega t \cdot \vec{Y}_2$$

$\beta$  petit  $\Rightarrow \cos \beta = 1$



sur  $\vec{Z}_2$  :

On projète  $a$  sur  $\vec{Z}_2$  :

$$\frac{c}{a} = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \beta\right) \Rightarrow c = a \cos\left(\frac{\pi}{2} - \beta\right) = a \sin \beta$$

$$= V \cos \Omega t \cdot \sin \beta \approx V \cos \Omega t \cdot \beta$$

$$\Rightarrow \vec{V} = -V \cos \Omega t \cdot \beta \cdot \vec{Z}_2$$

$$\vec{V}_{\text{écoulement d'air}} = V \cdot \vec{X}_0 \text{ s'écrit } \begin{bmatrix} V \cos \Omega t \\ -V \sin \Omega t \\ -V \cos \Omega t \cdot \beta \end{bmatrix} / R_2$$

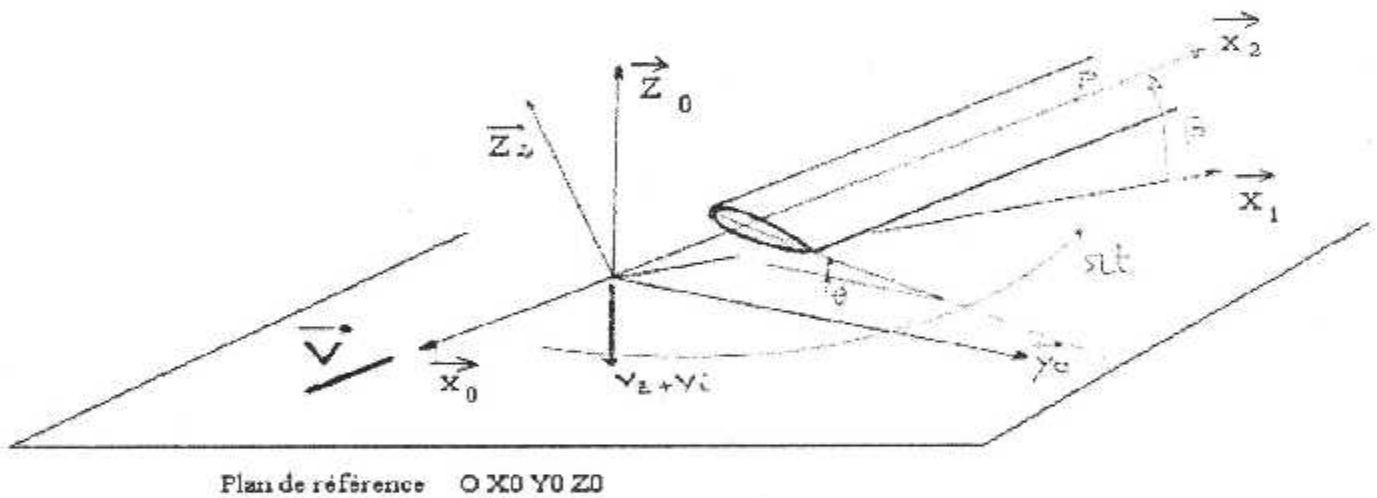
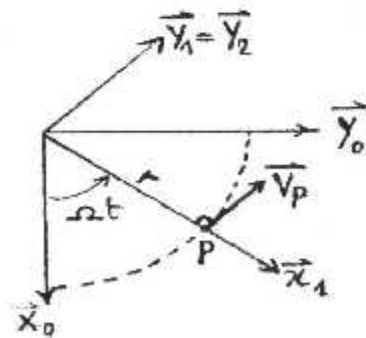


Fig (III - 3 ) Les axes liés au mouvement de la pale

On a  $\vec{Y}_1 = \vec{Y}_2$  ( car la rotation de  $\beta$  autour de  $\vec{Y}_2$  )

$$\vec{V}_p = r \cdot \Omega \cdot \vec{y}_1$$

$$\vec{V}_p = r \cdot \Omega \cdot \vec{y}_2$$

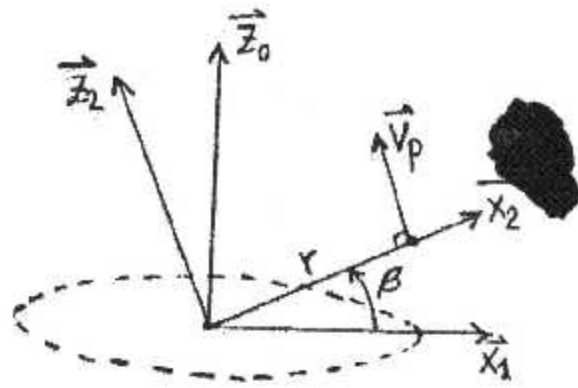




$$\vec{V}_p = r \cdot \dot{\beta} \cdot \vec{z}_2$$

D'où :

$$\vec{V}_p^0 = \begin{bmatrix} 0 \\ r \Omega \\ r \dot{\beta} \end{bmatrix} / R_2$$



Car on a que  $\Omega t = \Omega t \cdot z_0$  et  $\beta' = \beta' y_0$ .

La vitesse d'écoulement d'air au point P sera donc:

$$\vec{V}_p^0 = \begin{bmatrix} 0 \\ -r \Omega \\ -r \dot{\beta} \end{bmatrix} / R_2$$

- Si on a seulement les pâles à une vitesse quelconque : on a comme un disque

qui crée une dépression entre ses deux faces

⇒ écoulement de l'air.

La vitesse relative de l'air au niveau du disque c'est la vitesse de Froude

( $V_F = V_1 - V_0$ ) ou vitesse induite  $V_1$  dirigée vers le bas.

- Quant en plus du mouvement des pâle ; l'appareil en vol ascensionnel à la vitesse  $V_z$  cela suppose que l'air à une vitesse  $-V_z$ .

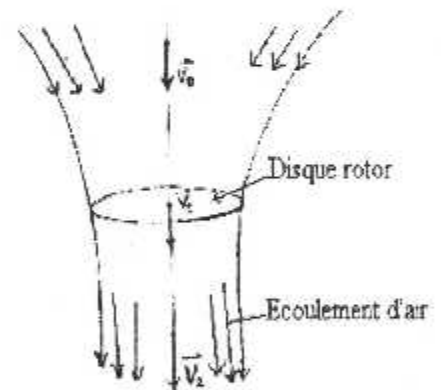


Fig (III - 4 ) Ecoulement d'air à travers le disque rotor

Enfin :

La vitesse d'écoulement de l'air verticale est  $-(V_z + V_1)$ , dirige vers le bas car le référentiel (repère (0) ) à l'axe des Z vers le haut.

Dans  $(R_2)$  cette vitesse s'écrit

$$\begin{bmatrix} -(V_z + V_1) \beta \\ 0 \\ -(V_z + V_1) \end{bmatrix}$$

En considérant une section de la pàle obtenue en coupant la pàle par un plan perpendiculaire à l'envergure ( plan  $\theta Y_2 Z_2$  ) et en considérant que les forces aérodynamiques s'exercent à cette section ne proviennent que de la vitesse  $V_r$  (vitesse du vent relative résultante ) on obtient :

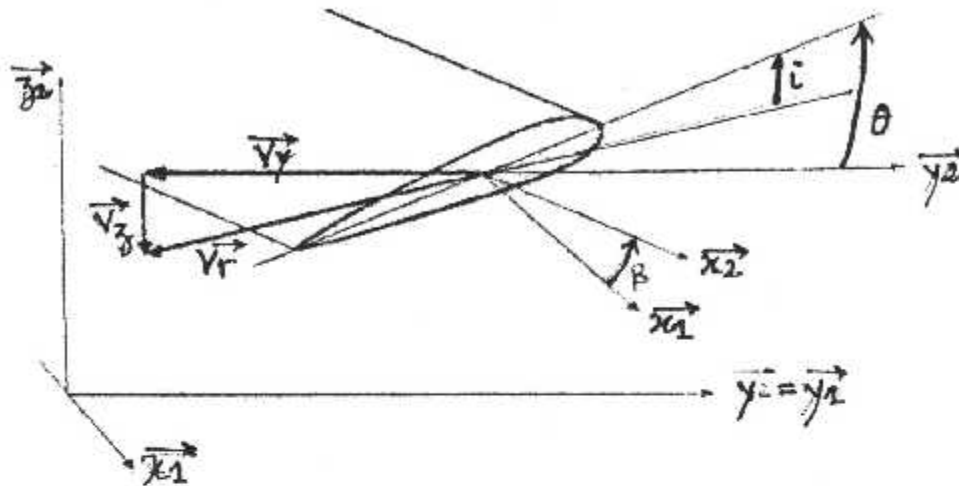


Fig (III - 5) La vitesse du vent relative résultante et leur composantes

**Résultante des vitesses :**

$$\vec{V}_r = \vec{V}_y + \vec{V}_z$$

$$\vec{V}_y = [-r\Omega - V \sin \Omega t] \cdot \vec{y}_2$$

$$\vec{V}_z = [-(V_z + V_i) - V \cos \Omega t \beta - r\beta] \vec{z}_2$$

On peut écrire :

$$\text{tg}(\theta - i) = \frac{V_z}{V_y} = (\theta - i) \quad \text{approximation petit angle}$$

soit 
$$i = \theta - \frac{V_z}{V_y}$$

$$i = \theta - \frac{[(V_z + V_i) + V \cos \Omega t \beta + r\beta]}{[r\Omega + V \sin \Omega t]}$$

qui s'écrit aussi :

$$i = \theta = \frac{r\beta}{[r\Omega + V \sin \Omega t]} - \frac{[(V_z + V_i) + V \cos \Omega t \beta]}{[r\Omega + V \sin \Omega t]}$$

La portance exercée sur un élément de pôle ( $dS$ ) s'écrit :

$$dF_z = \frac{1}{2} \rho ds (V_r)^2 \frac{dC_z}{di} \cdot i$$

et le moment par rapport à l'axe  $oy$  (axe de battement) :

$$dM = \frac{1}{2} \rho ds r (V_r)^2 \frac{dC_x}{di} \cdot i$$

En remplaçant  $i$  par sa valeur on s'aperçoit que le battement se traduit par un moment sur la pôle de terme ( $-\beta'$ )

$$dM = \frac{1}{2} \rho ds r (V_r)^2 \frac{dC_x}{di} \cdot \left[ \theta - \frac{\beta'}{\Omega \left( 1 + \frac{V}{r \Omega} \sin \Omega t \right)} - \frac{(V_z + V_i) + V \cos \Omega t \beta}{r \Omega + V \sin \Omega t} \right]$$

Le moment aérodynamique par rapport à "o" de la résultante de portance ( $F_z$ ) dû au battement

est de la forme :  $-k \frac{\beta'}{\Omega}$  [8]

et on peut donc écrire finalement de façon approchée l'équation de battement de la pôle :

$$\boxed{-I(\ddot{\beta} + \Omega^2 \beta) - K \frac{\beta'}{\Omega} = M_0}$$

A decorative border resembling a scroll, with a shaded, curled-up top-left corner and a shaded, curled-up bottom-left corner. The main body of the border is a simple black line.

## CHAPITRE IV

### METHODE DE CALCUL POUR LA DETERMINATION DES FREQUENCES PROPRES DU BATTEMENT

En vol de translation la pale est soumise à des efforts de flexion verticale alternée , dûs aux variations de portance au cours de la rotation ; ces efforts aérodynamiques excitateurs peuvent être décomposés en série de FOURIER :

$$M = M_0 + M_1 \cos(\Omega t + \varphi_1) + M_2 \cos(2\Omega t + \varphi_2) + \dots + M_n \cos(n\Omega t + \varphi_n)$$

$\Omega$ : régime rotor.

D'une façon générale les harmoniques 1 , 2 , 3 sont de loin les plus importants ; mais la réponse a une harmonique d'ordre supérieur, peut prendre de l'importance s'il correspond à une résonance sur une fréquence propre de la pale .

La pale est soumise à des excitation périodique en  $\Omega , 2\Omega , 3\Omega \dots, n\Omega$  il faut éviter que les fréquences propres de flexion verticale des pales soient égales aux fréquences excitatrices :

$$\left[ \frac{\Omega}{2\pi} , \frac{2\Omega}{2\pi} , \frac{3\Omega}{2\pi} , \dots \dots \frac{n\Omega}{2\pi} \right]$$

## **I – METHODE DE CALCUL POUR DETERMINER LES FREQUENCES PROPRES DE BATTEMENT :**

Généralement le calcul exact des modes propres de vibration d'une structure par les méthodes mathématiques traditionnelles, est extrêmement laborieux. C'est pour cela que des méthodes approchées ont été élaborées, méthode basée sur quelques hypothèses.

La plus part des méthodes ont l'avantage de pouvoir être programmée sur les ordinateurs.

Parmi les méthodes il y a quelques uns qui donnent la possibilité de calculer seulement les caractéristiques propres du mode de vibration. Mais il faut voir qu'elles sont applicables aux problèmes concrets et leurs erreurs peuvent être contrôlées .

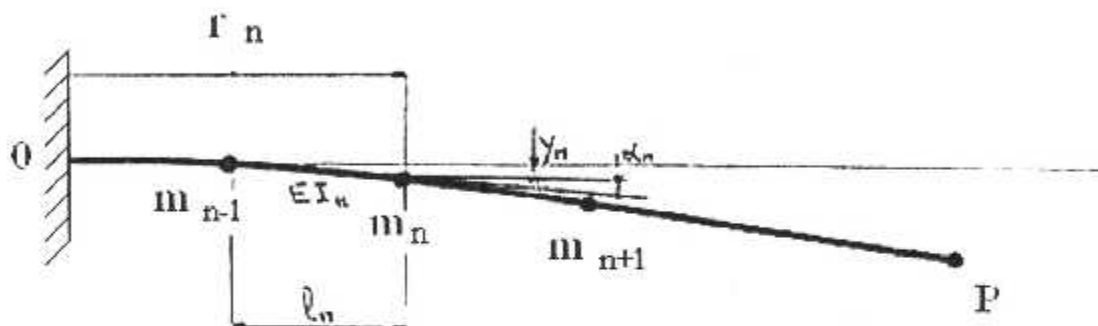
Nous nous bornera ici à donner une méthode approchée de calcul des fréquences propres , particulièrement bien adaptée pour l'étude de l'influence de légères modifications sur une pale d'hélicoptère.

Cette méthode est une méthode matricielle qui s'appelle méthode de **MYKLESTAD** (méthode des poutres discrétisées ) .

Pour valider la précision de cette méthode , on compare les résultats avec la méthode analytique ( la pale est supposée un système conservatif c-a-d sans amortissement, alors sa énergie totale est constante ) .

Le choix de la méthode de **MYKLESTAD** se fait par la technique de calcul dont on dispose , de l'importance et du type de la structure qui représenté en une pale d'hélicoptère et pour la précision qu'on désire ,en plus le nombre de masses qui doivent être déterminées.

**- METHODE DE MYKLESTAD :**



**Fig (IV - 1 ) Idéalisation d'une pale d'hélicoptère pour le calcul des fréquences de battement**

La pale est modélisée à l'aide d'une série de masses ponctuelles  $m_n$  reliées entre elles par des zones souples sans masse . La somme des masses ponctuelles est égale à la masse d'une pale et chaque zone souple est affectée de la rigidité locale , en flexion ,  $EI$  de la pale. [5]

Chaque masse est soumise à un **effort normal** dû à l'accélération centrifuge , ainsi qu'à un **moment de flexion** dû à l'effort centrifuge et aux forces d'inertie .

On admet par hypothèse que le mouvement  $y_n$  de chaque masse c-à-d sa flèche est harmonique en fonction du temps . on établit successivement plusieurs relations de récurrence qui donnent les inconnus de la masse de rang  $(n+1)$  si on connaît celles de la masse de rang  $(n)$

<p><u>Les données du problème sont :</u></p> <ul style="list-style-type: none"> <li>- <math>r_n</math> : distance de chaque masse à l'axe rotor .</li> <li>- <math>EI_n</math> : rigidité de battement entre deux masses .</li> <li>- <math>\Omega</math> : régime rotor .</li> <li>- <math>l_n</math> : distance entre deux masses</li> </ul>	<p><u>Les inconnus du problème sont :</u></p> <ul style="list-style-type: none"> <li>- <math>N</math> : effort normal .</li> <li>- <math>T</math> : effort tranchant .</li> <li>- <math>M</math> : moment de flexion .</li> <li>- <math>\alpha</math> : rotation due à la déformation .</li> <li>- <math>y</math> : flèche .</li> </ul>
--	---

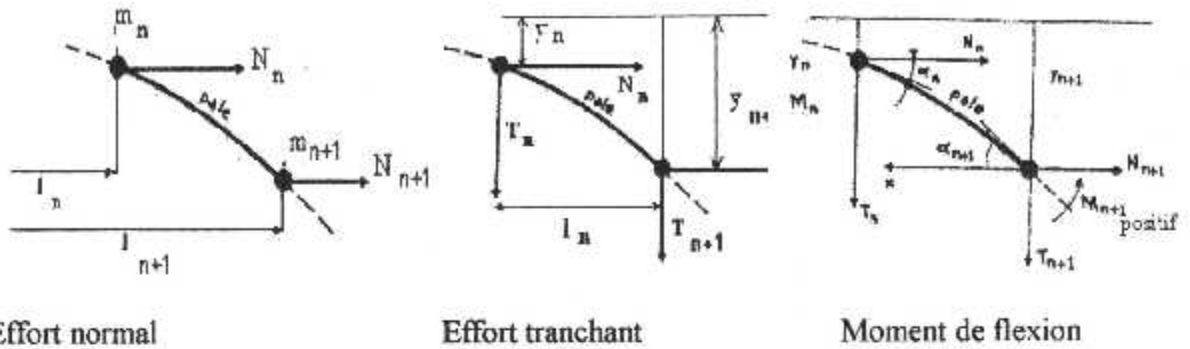


Fig (IV – 2) Elément de la détermination des fréquences propres de battement d'une pale

**Isolons une masse ( m<sub>n</sub> )**

On suppose la translation uniforme (0) et (g) identique .

$\overline{\Omega}_g^0 = 0 \Rightarrow$  ( il n'y a pas de mouvement de rotation de l'hélicoptère ).  
 $\Rightarrow$  mouvement de translation .

$\overline{\Gamma}_g^0 = 0 \Rightarrow$  mouvement uniforme .

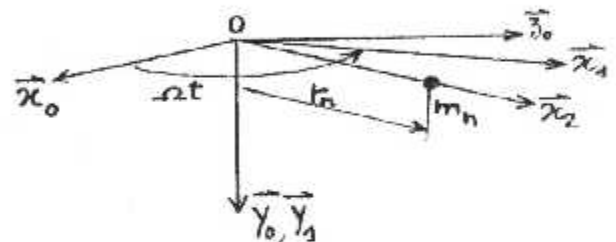


Fig (IV – 3 ) les repères du mouvement de la masse( m<sub>n</sub> )

**Calcul de la résultante dynamique en ( n ) de la masse m<sub>n</sub> :**

$$\overrightarrow{on} = y_n \overrightarrow{y_1} + r_n \overrightarrow{x_1}$$

Avec y<sub>n</sub> de la forme : y<sub>n</sub> = y<sub>0</sub> sin (ωt-φ) .  
 (φ = 0 : oscillation autour de sa position d'équilibre ) .

On suppose que le mouvement de la masse m<sub>n</sub> , dans le repère relatif (0 x<sub>1</sub>,y<sub>1</sub>,z<sub>1</sub>) est **harmonique** en fonction du temps ; ω est la pulsation du mouvement de vibration autour de la position d'équilibre statique défini par y<sub>0</sub> .

La formule de la vitesse du point n par rapport à ( 0 ) est :

$$\boxed{\overline{V}^0(n) = \frac{d^1(\overline{on})}{dt} + \overline{\Omega}_1^0 \wedge (\overline{on})} \quad [9]$$

$$\overline{on} = \begin{bmatrix} r_n \\ y_n = y_0 \sin \omega t \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \frac{d}{dt} (\overline{on}) = \begin{bmatrix} 0 \\ y_0 \omega \cos \omega t \\ 0 \end{bmatrix} \begin{matrix} / R_1 \\ / R_1 \end{matrix}$$

$$\overline{\Omega}_1^0 = \begin{bmatrix} 0 \\ \Omega \\ 0 \end{bmatrix} \begin{matrix} / R_1 / R_0 \end{matrix}$$

$$\overline{V}^0(n) = \frac{d(\overline{on})}{dt} + \overline{\Omega}_1^0 \wedge (\overline{on}) = \begin{bmatrix} 0 \\ y_0 \cos \omega t \cdot \omega \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -r_n \Omega \end{bmatrix} \begin{matrix} / R_1 \\ / R_1 \end{matrix}$$

$$\Rightarrow \overline{V}^0(n) = \begin{bmatrix} 0 \\ y_0 \cos \omega t \cdot \omega \\ -r_n \Omega \end{bmatrix} \begin{matrix} / R_1 \end{matrix}$$

La formule de l'accélération est :

$$\boxed{\overline{\Gamma}^0(n) = \frac{d^1}{dt} [\overline{V}^0(n)] + \overline{\Omega}_1^0 \wedge \overline{V}^0(n)}$$

$$\overline{\Gamma}^0(n) = \frac{d^1}{dt} [\overline{V}^0(n)] + \overline{\Omega}_1^0 \wedge \overline{V}^0(n) = \begin{bmatrix} 0 \\ -y_0 \omega^2 \sin \omega t \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -r_n \Omega^2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \begin{matrix} / R_1 \\ / R_1 \end{matrix}$$



$$\Rightarrow \vec{\Gamma}^0(n) = \begin{bmatrix} -r_n \Omega^2 \\ -y_n \omega^2 \sin \omega t \\ 0 \end{bmatrix} / R_1$$

D'où la résultante dynamique en (n) de la masse  $m_n$  est :

$$\vec{\gamma}^0(m_n, t) = \vec{\Gamma}^0(n) \cdot m_n$$

$$\vec{\gamma}^0(m_n, t) = \begin{bmatrix} -m_n r_n \Omega^2 \\ -m_n y_n \omega^2 \sin \omega t \\ 0 \end{bmatrix} / R_1 = \begin{bmatrix} -m_n r_n \Omega^2 \\ -m_n y_n \omega^2 \\ 0 \end{bmatrix} / R_1$$

- On applique la loi fondamentale en projection dans le repère relatif :

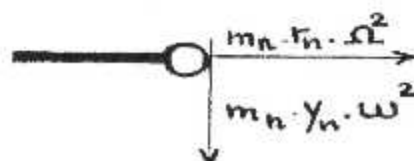
$$\sum \vec{F}_{ext.} = \vec{\gamma}^0(m_n, t)$$

$$\vec{F}_{p\grave{a}te / masse} = \begin{bmatrix} -m_n r_n \Omega^2 \\ -m_n y_n \omega^2 \\ 0 \end{bmatrix} / R_1 \quad (\text{en n\acute{e}gligeant le poids de la p\^a}le)$$

Le système est la masse isolée  $\Rightarrow F_{ext}$  c'est  $F_{p\grave{a}te}$  sur la masse .

D'où l'action de la masse sur la p\^a}le est opposé  $\Rightarrow$  chaque masse  $m_n$  va soumettre la p\^a}le à :

- un effort normal  $m_n \cdot r_n \cdot \Omega^2$
- un effort vertical  $m_n \cdot y_n \cdot \omega^2$




D'une masse  $m_n$  à une masse  $m_{n-1}$  il existe des relations de récurrence qui nous donne :


- l'effort tranchant  $T_n$  si on connaît  $T_{n-1}$
- le moment fléchissant  $M_n$  si on connaît  $M_{n-1}$
- l'effort normal  $N_n$  si on connaît  $N_{n-1}$
- la rotation angulaire  $\alpha_n$  si on connaît  $\alpha_{n-1}$
- la flèche  $y_n$  si on connaît  $y_{n-1}$


Pour établir ces formoles de récurrence , on adoptera les conventions de la résistance des matériaux .

### I-1 Sans tenir compte de l'effort normal :

#### a) Efforts tranchants :

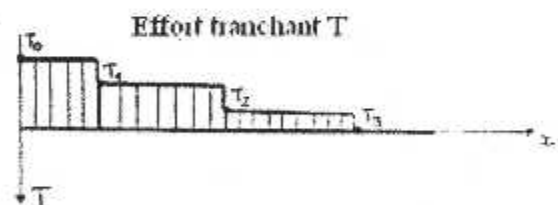
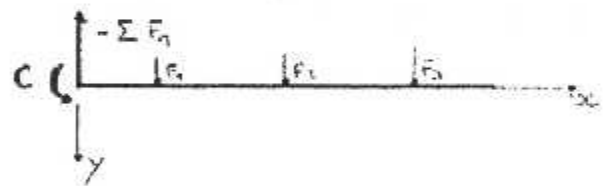
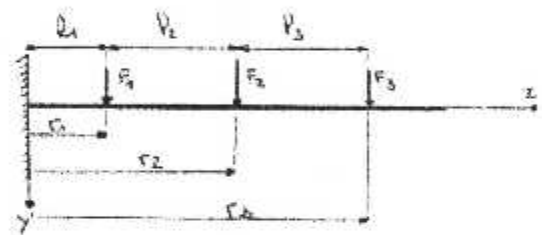
$M > 0$  

$T > 0$  

$y > 0$  

$\alpha > 0$  

$N > 0$  



$$T_0 = -(F_1 + F_2 + F_3)$$

$$T_1 = -(F_2 + F_3)$$

$$T_2 = -(F_3)$$

$$T_0 = -F_1 - F_2 - F_3$$

$$T_0 = -F_1 + T_1 \Rightarrow T_1 = T_0 + F_1$$

$$\Rightarrow \boxed{T_n = T_{n-1} + F_n}$$

**b ) Moments fléchissants :**

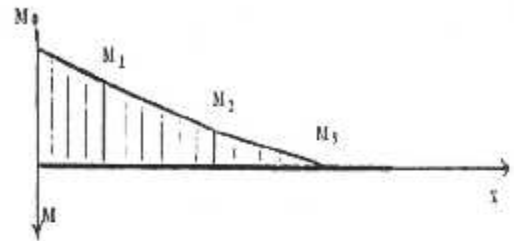
$$\begin{aligned}
 M_0 &= C = -F_1 r_1 - F_2 r_2 - F_3 r_3 \\
 M_1 &= -F_2 (r_2 - r_1) - F_3 (r_3 - r_1) \\
 &= -F_2 r_2 + F_2 r_1 - F_3 r_3 + F_3 r_1 \\
 &= -F_2 r_2 - F_3 r_3 + F_2 r_1 + F_3 r_1 \\
 &= M_0 + F_2 r_1 + F_3 r_1 + F_1 r_1 \\
 &= M_0 + (\sum F_i) \cdot r_1
 \end{aligned}$$

$$= M_0 - (-\sum F_i) \cdot r_1$$

$$= M_0 - T_0 r_1 \quad \Rightarrow$$

$$\boxed{M_n = M_{n-1} - T_{n-1} \cdot l_n}$$

**Moments fléchissants**



**c ) rotation angulaire et flèche :**

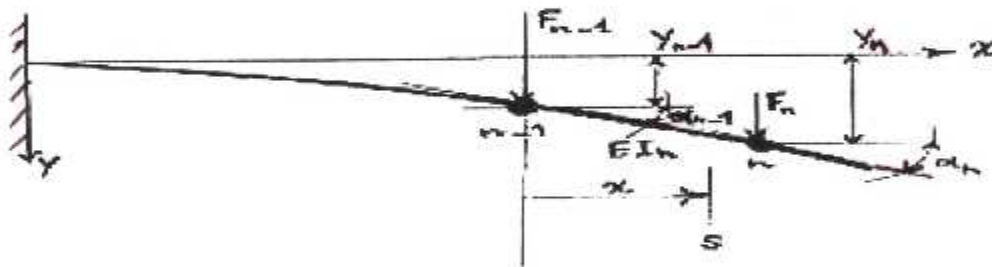


Fig (IV - 4 ) La flèche et la rotation angulaire

A la section S située à la distance x de n - 1 on a d'après les notions de la résistance des matériaux :

$$y''(x) = -\frac{M(x)}{EI}$$

$$EI_n y''(x) = -M(x) = [M_{n-1} - T_{n-1} \cdot x]$$

$$y'(x) = -\frac{1}{EI_n} [M_{n-1} - T_{n-1} \cdot x]$$

$$y(x) = -\frac{1}{EI_n} \left[ M_{n-1} \cdot x - T_{n-1} \frac{x^2}{2} \right] + k_1$$

En section  $n-1$  encastree :  $\Rightarrow x = 0 \quad y' = \alpha_{n-1} = K_1$

$$y(x) = -\frac{1}{EI_n} \left[ M_{n-1} \cdot x - T_{n-1} \frac{x^2}{2} \right] + \alpha_{n-1}$$

$x = l_n : y'(x) = \alpha_n$

$$\alpha_n = -\frac{1}{EI_n} \left[ M_{n-1} \cdot l_n - T_{n-1} \frac{l_n^2}{6} \right] + \alpha_{n-1}$$

$$y(x) = -\frac{1}{EI} \left( M_{n-1} \cdot \frac{x^2}{2} - T_{n-1} \cdot \frac{x^3}{6} \right) + \alpha_{n-1} \cdot x + K_2$$

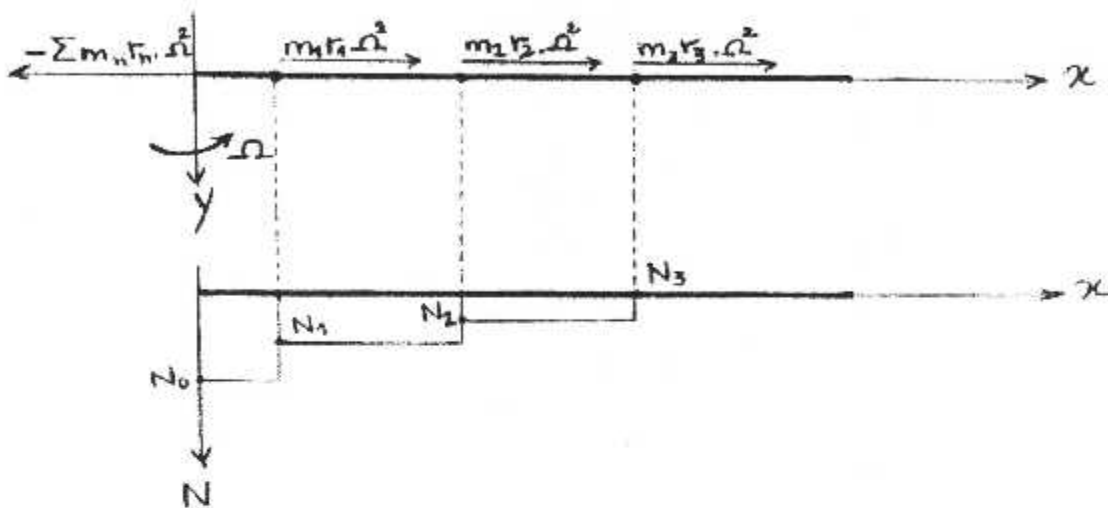
$x = 0 : y(x) = y_{n-1} = k_2$

$x = l_n : y(x) = y_n \quad \text{d'ou :}$

$$y_n = -\frac{1}{EI} \left( M_{n-1} \cdot \frac{l_n^2}{2} - T_{n-1} \cdot \frac{l_n^3}{6} \right) + \alpha_{n-1} \cdot l_n + y_{n-1}$$

**I-2 En tenir compte l'effort normal :**

**I-2-1 Modification apportée par l'effort normal :**



$$N_0 = - \sum m_n r_n \Omega^2$$

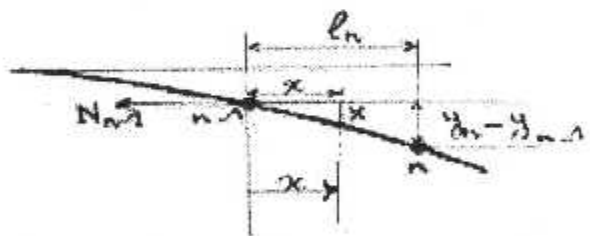
$$N_1 = N_0 - m_1 r_1 \Omega^2 \Rightarrow$$

$$N_n = N_{n-1} - m_n \cdot r_n \cdot \Omega^2$$

$$N_n > 0$$

**I-2-2 Modification du moment fléchissant :**

$$\frac{x}{l_n} = \frac{X}{y_n - y_{n-1}} \Rightarrow X = (y_n - y_{n-1}) \cdot \frac{x}{l_n}$$



$N_{n-1}$  crée un moment en  $m_{n-1}$  égale à :  $-N_{n-1} (y_n - y_{n-1})$

D'où la nouvelle relation :

$$M_n = M_{n-1} - T_{n-1} \cdot J_n - N_{n-1} (y_n - y_{n-1})$$

1-2-3 La flèche et la rotation angulaire sont modifiés :

$$y''(x) = -\frac{M(x)}{EI}$$

à la distance  $x$  :  $M(x) = M_{n-1} - T_{n-1} \cdot x - N_{n-1} \left[ y_n - y_{n-1} \right] \frac{x}{l_n}$

On admet que le moment dû aux efforts normaux varie linéairement entre  $m_{n-1}$  et  $m_n$  ; ce sera d'autant plus vrai que le nombre de masse sera important .

$$y'(x) = -\frac{1}{EI_n} \left[ M_{n-1} \cdot x - T_{n-1} \frac{x^2}{2} \right] + \frac{N_{n-1}}{EI_n} (y_n - y_{n-1}) \frac{x^2}{2l_n} + k_1$$

En  $m_{n-1}$  section encastree :  $x = 0 \Rightarrow y' = \alpha_{n-1} = k_1$

$$x = l_n \Rightarrow y' = \alpha_n$$

$$\alpha_n = -M_{n-1} \cdot \frac{l_n}{EI_n} + T_{n-1} \cdot \left[ \frac{l_n^2}{2EI_n} \right] + N_{n-1} \cdot \frac{l_n^2}{2EI_n} \left( \frac{y_n - y_{n-1}}{l_n} \right) + \alpha_{n-1}$$

on considère que :  $\left( \frac{y_n - y_{n-1}}{l_n} \right) \approx \alpha_{n-1}$

D'où :

$$\alpha_n = -M_{n-1} \cdot \frac{l_n}{EI_n} + T_{n-1} \cdot \left[ \frac{l_n^2}{2EI_n} \right] + \alpha_{n-1} \cdot \left( N_{n-1} \frac{l_n^2}{2EI_n} + 1 \right)$$

$$y(x) = -\frac{1}{EI_n} \left[ M_{n-1} \frac{x^2}{2} - T_{n-1} \frac{x^3}{6} \right] + \frac{N_{n-1}}{EI_n} (y_n - y_{n-1}) \frac{x^3}{6l_n} + \alpha_{n-1} \cdot x + k_2$$

$$x = 0 \Rightarrow y(x) = y_{n-1} \quad \text{d'où : } k_2 = y_{n-1}$$

$$x = l_n \Rightarrow y(x) = y_n \quad \text{et en considérant } \left( \frac{y_n - y_{n-1}}{l_n} \right) \approx \alpha_{n-1}, \text{ on a :}$$

$$y_n = -M_{n-1} \frac{l_n^2}{2 E I_n} + T_{n-1} \frac{l_n^3}{6 E I_n} + \alpha_{n-1} \cdot \left( N_{n-1} \cdot \frac{l_n^3}{6 E I_n} + l_n \right) + y_{n-1}$$

La relation concernant l'effort tranchant ne change pas :

$$T_n = T_{n-1} + F_n$$

On suppose le mouvement vibratoire de la masse harmonique en fonction du temps . On peut écrire :

$$y_n(t) = y_0 \sin \omega t$$

$$y''_n(t) = -y_0 \omega^2 \sin \omega t = -y_n \omega^2 .$$

$$\vec{F}_{\text{pale/masse}} = m_n \cdot (-y_n \omega^2) \quad \text{d'où :}$$

$$\vec{F}_{\text{pale/masse}} = m_n \cdot y_n \omega^2$$

D'où :

$$T_n = T_{n-1} + m_n \cdot y_n \omega^2$$

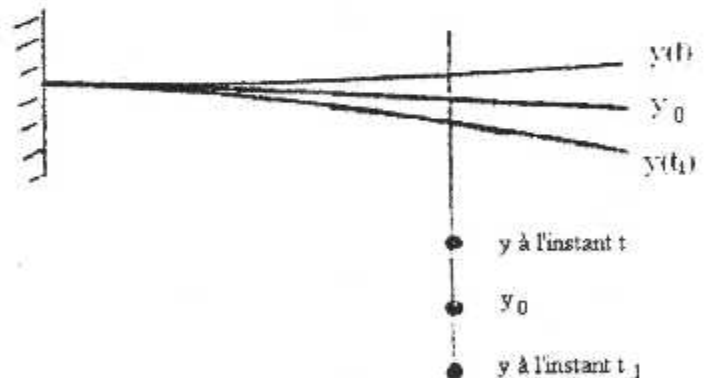


Fig (IV -5) la flèche en fonction du temps

nous avons donc les relation suivantes :

$y_n = y_{n-1} + \alpha_{n-1} \left( N_{n-1} \cdot \frac{l_n^3}{6 E I_n} + l_n \right) - M_{n-1} \cdot \frac{l_n^2}{2 E I_n} + T_{n-1} \cdot \frac{l_n^3}{6 E I_n}$
$\alpha_n = \alpha_{n-1} \left( N_{n-1} \frac{l_n^2}{2 E I_n} + 1 \right) - M_{n-1} \frac{l_n}{E I_n} + T_{n-1} \frac{l_n^2}{2 E I_n}$
$M_n = M_{n-1} - T_{n-1} \cdot l_n - N_{n-1} (y_n - y_{n-1})$
$T_n = T_{n-1} + M_n \cdot \omega^2 \cdot y_n$
$N_n = N_{n-1} - M_n \cdot r_n \cdot \Omega^2$

Nous pouvons écrire les 4 premières relations sous forme matricielles :

$$\begin{bmatrix} y \\ \alpha \\ M \\ T \end{bmatrix}_n = \begin{bmatrix} 1 & N_{n-1} \frac{l_n^3}{6 E I_n} + l_n & -\frac{l_n^2}{2 E I_n} & \frac{l_n^3}{6 E I_n} \\ 0 & N_{n-1} \frac{l_n^2}{2 E I_n} + 1 & \frac{l_n}{E I_n} & \frac{l_n^2}{2 E I_n} \\ 0 & -N_{n-1} \left[ N_{n-1} \frac{l_n^3}{6 E I_n} + l_n \right] & 1 + N_{n-1} \frac{l_n^2}{2 E I_n} & -l_n - N_{n-1} \frac{l_n^3}{6 E I_n} \\ m_n \omega^2 & m_n \omega^2 \left[ N_{n-1} \frac{l_n^3}{6 E I_n} + l_n \right] & -m_n \omega^2 \frac{l_n^2}{2 E I_n} & 1 + m_n \omega^2 \frac{l_n^3}{6 E I_n} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} y \\ \alpha \\ M \\ T \end{bmatrix}_{n-1}$$



$N_n$  qui n'est pas fonction de  $y_{n-1}$ ,  $\alpha_{n-1}$ ,  $M_{n-1}$ ,  $T_{n-1}$  peut être calculé séparément ; il intervient dans la matrice de passage au même titre qu'une donnée relative à la masse  $m_n$ .

On a donc :

$$\begin{bmatrix} y \\ \alpha \\ M \\ T \end{bmatrix}_n = [K_n] \cdot \begin{bmatrix} y \\ \alpha \\ M \\ T \end{bmatrix}_{n-1}$$

soit pour la dernière masse  $p$  :

$$\begin{bmatrix} y \\ \alpha \\ M \\ T \end{bmatrix}_p = [k_p][k_{p-1}] \cdot [k_n][k_{n-1}] \cdot [k_1] \begin{bmatrix} y \\ \alpha \\ M \\ T \end{bmatrix}_0$$

ce qui s'écrit aussi :

$$\begin{bmatrix} y \\ \alpha \\ M \\ T \end{bmatrix}_p = \begin{bmatrix} u_p^{11} & u_p^{12} & u_p^{13} & u_p^{14} \\ u_p^{21} & u_p^{22} & u_p^{23} & u_p^{24} \\ u_p^{31} & u_p^{32} & u_p^{33} & u_p^{34} \\ u_p^{41} & u_p^{42} & u_p^{43} & u_p^{44} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y \\ \alpha \\ M \\ T \end{bmatrix}_0$$

Les conditions de récurrence permettent, en commençant le calcul par l'extrémité libre, de trouver toutes les inconnus et de déterminer si les conditions aux limites sont vérifiées.

En désignant par  $P$  l'indice de l'extrémité libre, on a :

- Pour une **pale encastrée** les conditions aux limites s'écrivent : [9]

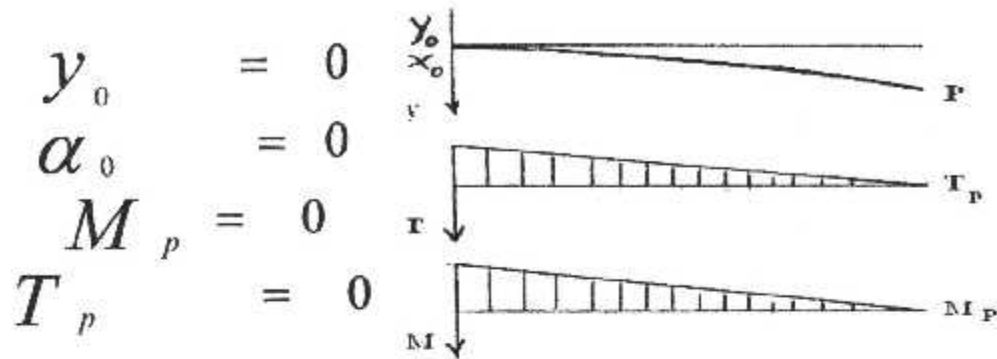


Fig (IV - 6 ) Répartition de l'effort tranchant et le moment de flexion

Ces conditions sont vérifiées si :

$$\Delta = \begin{vmatrix} u_p^{33} & u_p^{34} \\ u_p^{43} & u_p^{44} \end{vmatrix} = 0$$

$$\begin{bmatrix} y \\ \alpha \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}_p = \begin{bmatrix} u_p^{11} & u_p^{12} & u_p^{13} & u_p^{14} \\ u_p^{21} & u_p^{22} & u_p^{23} & u_p^{24} \\ u_p^{31} & u_p^{32} & u_p^{33} & u_p^{34} \\ u_p^{41} & u_p^{42} & u_p^{43} & u_p^{44} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ M \\ T \end{bmatrix}_0 \Rightarrow \begin{cases} 0 = u_p^{33} \cdot M_0 + u_p^{34} \cdot T_0 \\ 0 = u_p^{43} \cdot M_0 + u_p^{44} \cdot T_0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{vmatrix} u_p^{33} & u_p^{34} \\ u_p^{43} & u_p^{44} \end{vmatrix} = 0$$

- Pour une pale articulée les conditions aux limites s'écrivent :

$$\begin{aligned} y_0 &= 0 & T_p &= 0 \\ M_0 &= 0 & M_p &= 0 \end{aligned}$$

On prend  $T_0 = 1$  pour vérifier les conditions parce que pour n'importe qu'elle valeur de  $T_0$  l'allure générale de  $y_n$  ne change pas.

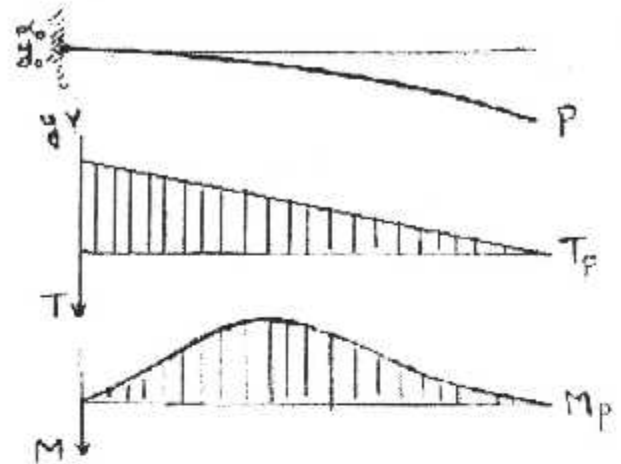


Fig (IV - 7) Répartition de l'effort tranchant et le moment de flexion

Ces conditions sont vérifiées si :

$$\Delta = \begin{vmatrix} u_p^{32} & u_p^{34} \\ u_p^{42} & u_p^{44} \end{vmatrix} = 0$$

$$\begin{bmatrix} y \\ \alpha \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}_p = \begin{bmatrix} u_p^{11} & u_p^{12} & u_p^{13} & u_p^{14} \\ u_p^{21} & u_p^{22} & u_p^{23} & u_p^{24} \\ u_p^{31} & u_p^{32} & u_p^{33} & u_p^{34} \\ u_p^{41} & u_p^{42} & u_p^{43} & u_p^{44} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ \alpha \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}_0 \Rightarrow \begin{cases} 0 = u_{p32} \cdot M_0 + u_{p34} \cdot T_0 \\ 0 = u_{p42} \cdot M_0 + u_{p44} \cdot 1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{vmatrix} u_p^{32} & u_p^{34} \\ u_p^{42} & u_p^{44} \end{vmatrix} = 0$$

On fera le calcul par itération ; on se fixe une valeur de  $\omega = \omega_1$ , et on va vérifier les conditions aux limites en p, c'est-à-dire  $\Delta = 0$  ; on obtiendra ainsi  $\omega_1, \omega_2, \omega_n$  qui vérifieront  $\Delta = 0$ , ce seront les pulsations propres de la pale.



**CHAPITRE V**

**RESULTATS  
ET  
DISCUSSIONS**

## **PARTIE (A) : ETUDE D'UNE PALE ENCASTREE.**

### **I - SCHEMA DISCRETISATION DE LA PALE :**

La pale sera discrétisée en 10 masses égaux + une masse fictive nulle.

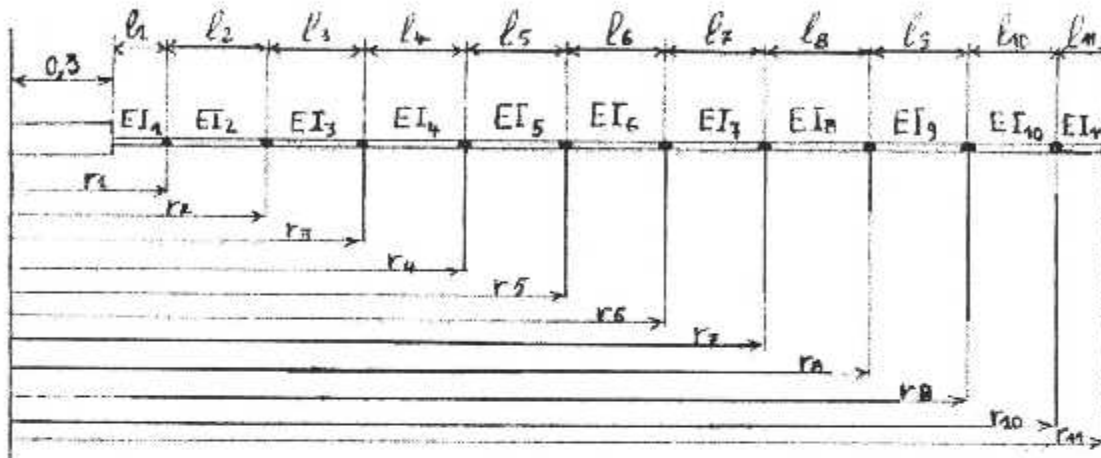


Fig (V - 1) Discrétisation de la pale en 11 masses

**Données :** - rigidité de la pale en flexion :  $EI = 2300 \text{ N} \cdot \text{m}^2$

(Pale en matériaux composites ; pale de l'hélicoptère Ecureuil avec une corde de 200mm).

- masse de la pale :  $M = 8.5 \text{ Kg}$ .

- longueur de la pale :  $l = 3.5 \text{ m}$ .

Encastrement situé à  $0.3 \text{ m}$  de l'axe rotor .

**hypothèses :**  $m_1 = m_2 \dots \dots = m_{10} = \frac{8.5}{10} = 0.850 \text{ kg}$

$m_{11} = 0$  (masse fictive utilisée pour permettre de tenir compte de  $l_{11}$  et  $EI_{11}$ ).

$$l_1 = l_{11} = 0.175 \text{ m}$$

$$l_2 = l_3 = l_4 = \dots \dots = l_{10} = 0.350 \text{ m}$$

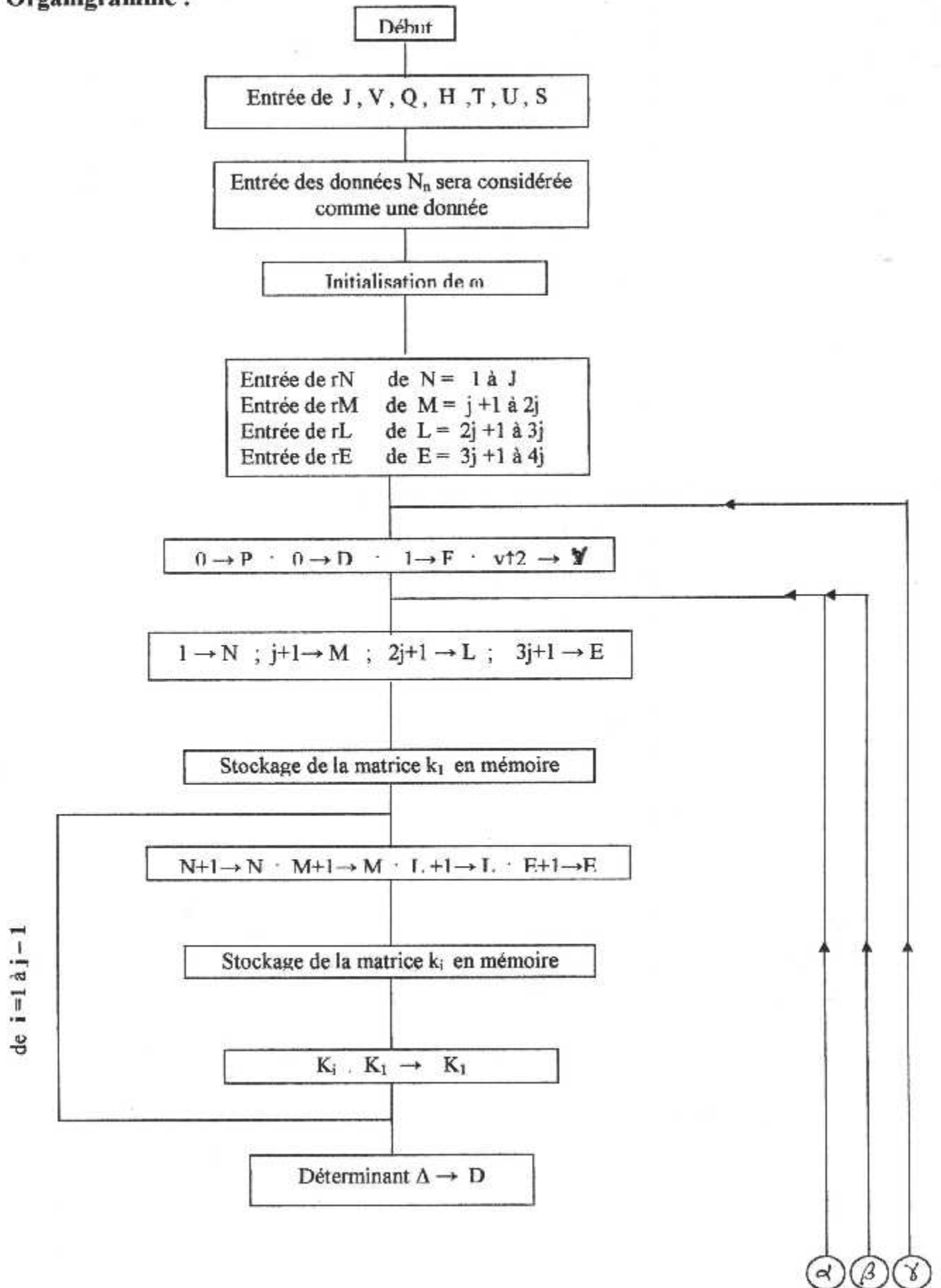
$$EI_1 = EI_2 \dots \dots = EI_{11} = 2300 \text{ N} \cdot \text{m}^2$$

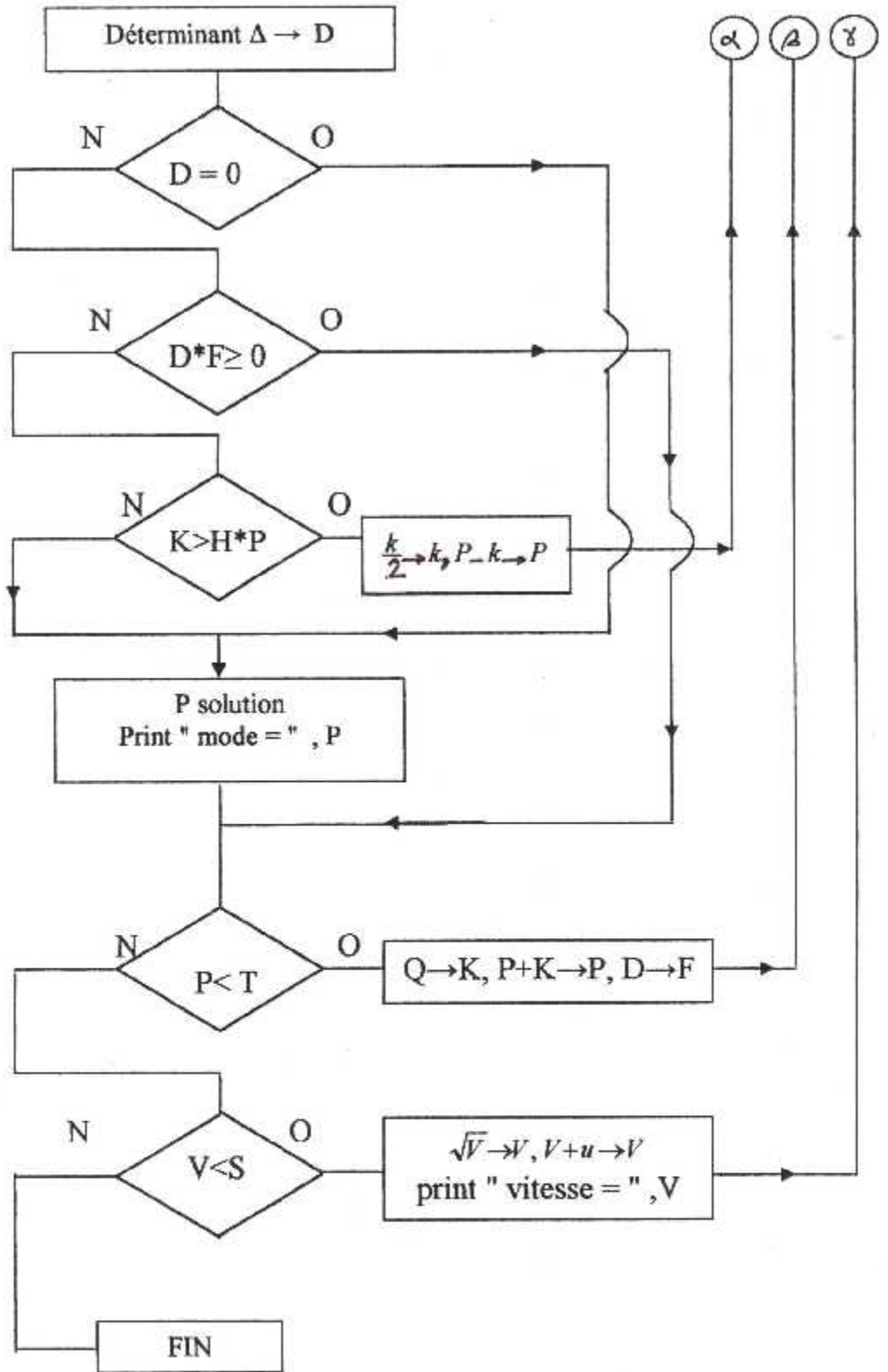
**Calcul de  $N_n$  en fonction de  $\Omega^2$  :**

	$N_0 = N_1 + r_1.m_1 . \Omega^2 = 17.425 \Omega^2$
$r_1 = 0.475$	$N_1 = N_2 + r_2.m_2 . \Omega^2 = 17.0212 \Omega^2$
$r_2 = 0.825$	$N_2 = N_3 + r_3.m_3 . \Omega^2 = 16.32 \Omega^2$
$r_3 = 1.175$	$N_3 = N_4 + r_4.m_4 . \Omega^2 = 15.32125 \Omega^2$
$r_4 = 1.525$	$N_4 = N_5 + r_5.m_5 . \Omega^2 = 14.025 \Omega^2$
$r_5 = 1.875$	$N_5 = N_6 + r_6.m_6 . \Omega^2 = 12.4312 \Omega^2$
$r_6 = 2.225$	$N_6 = N_7 + r_7.m_7 . \Omega^2 = 10.54 \Omega^2$
$r_7 = 2.925$	$N_7 = N_8 + r_8.m_8 . \Omega^2 = 8.35125 \Omega^2$
$r_8 = 3.275$	$N_8 = N_9 + r_9.m_9 . \Omega^2 = 5.865 \Omega^2$
$r_9 = 3.275$	$N_9 = N_{10} + r_{10}.m_{10} . \Omega^2 = 3.08125 \Omega^2$
$r_{10} = 3.625$	$N_{10} = N_{11} + r_{11}.m_{11} . \Omega^2 = 0$
$r_{11} = 3.8$	$N_{11} = 0$

**I-1 ORGANIGRAMME DE CALCUL :**

**Organigramme :**







## I – 2 résultats et diagramme de résonance :

Le régime rotor  $\Omega$  est de 480 tr/mn soit  $16\pi$  rd/s ( 50.265 rd/s) .

Nous calculons les pulsation propres de la pale  $\omega_1$  ,pour  $\Omega$  variant de 0 à 60 rd /s avec une incrémentation de 10rd/s sauf à partir de 40 rd/s où nous donnerons une incrémentation de 5rd/s. la précision demandée sera de 0.005.[pulsation P ] soit 0.5% pulsation cherchée .

Les résultats obtenus sont :

Régime rotor $\Omega$ (rd/s)	1er mode $\omega_1$ (rd/s)	2ème mode $\omega_2$ (rd/s)	3ème mode $\omega_3$ (rd/s)	4ème mode $\omega_4$ (rd/s)	5ème mode $\omega_5$ (rd/s)
0	8.85	55.80	157.02	309.09	512.40
10	30.89	101.32	223.25	390.25	611.25
20	48.25	135.25	270.25	450.58	679.27
30	66.24	171.18	318.93	511.95	747.63
40	80.52	198.45	356.22	556.65	796.29
45	87.84	213.00	376.74	581.76	823.89
50	95.25	228.00	398.22	608.28	853.17
55	102.72	243.30	420.42	635.94	883.77
60	110.12	258.88	443.26	664.48	915.28

La représentation de ces résultats :  $\omega_i = f(\Omega)$  avec les droites  $\omega = 1 \Omega$

$$\omega = 2 \Omega$$

$$\omega = 3 \Omega$$

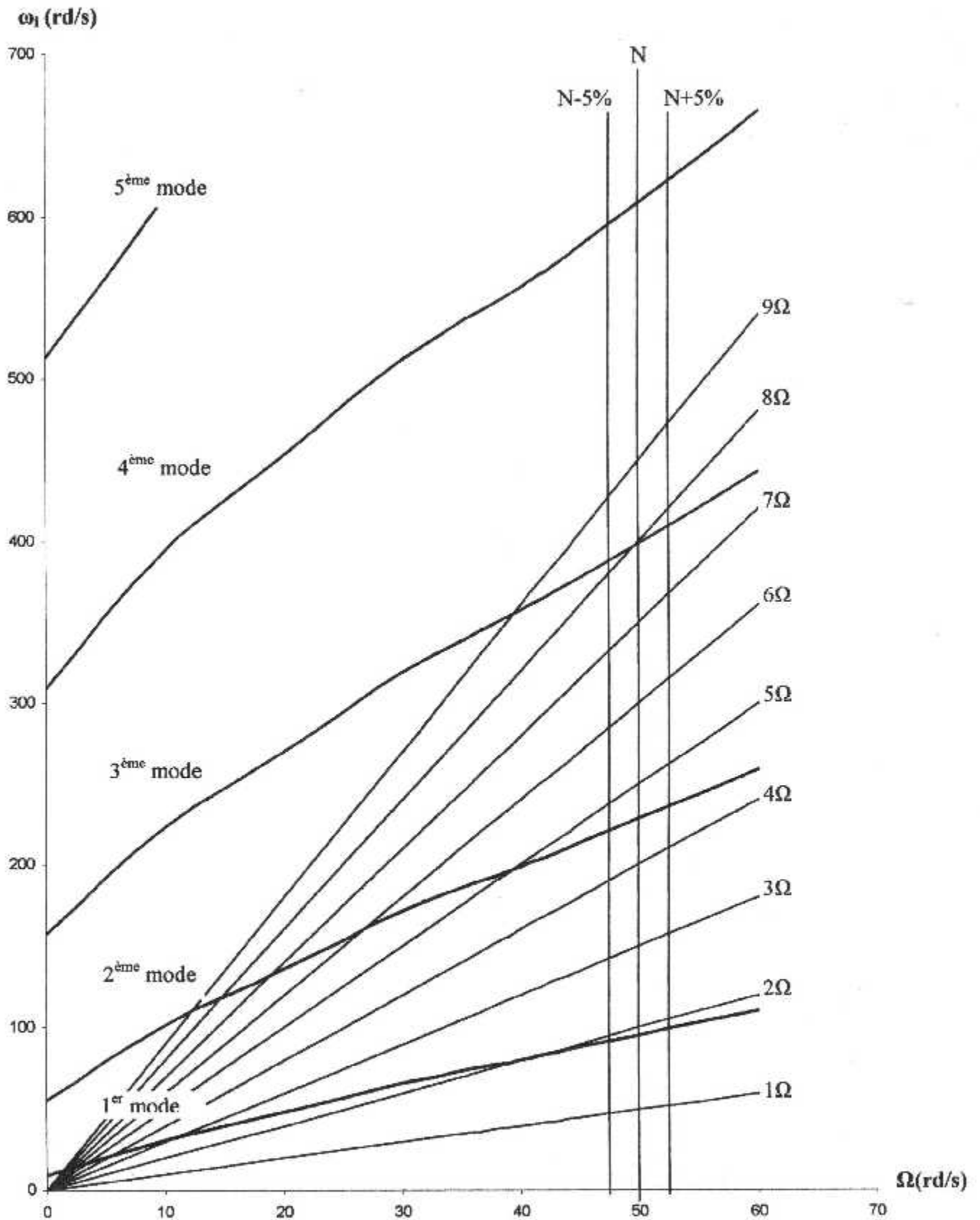
$$\vdots$$

$$\omega = 9 \Omega$$

$$\vdots$$

$$\vdots$$

Ces droites représentant les différents harmoniques des efforts excitateurs .



**Graphe (V - 1 ) Influence du régime de rotation du rotor sur les fréquences propres d'une pale encastree**

### 1 – 3 discussion des résultats :

Le diagramme obtenu est le diagramme de **RESONANCE** qui représente la variation des fréquences propres du battement  $\omega_l$  en fonction du régime de rotation  $\Omega$ .

Lorsque  $\Omega$  du régime rotation = 0  $\Rightarrow$  pas de rotation, mais la pàle reste en vibration de fréquence qui appelé **fréquence propre de la pàle** ( $\omega_0$ ), qui varie selon les modes de cette vibration.

On dit qu'on est devant - le **1<sup>er</sup> mode** lorsque le **1<sup>er</sup> ventre** se forme **sans nœuds**.  
 - le **2<sup>ème</sup> mode** lorsque **les deux ventres** se forment avec **un nœuds**.  
 - le **3<sup>ème</sup> mode** lorsque **les trois ventres** se forment avec **deux nœuds**.

⋮

Autant que la pàle atteint sa vitesse maximum du régime rotation, elle passe par plusieurs vitesses ayant de multiplicateurs : 1, 2, 3, ....., n. qui seront **les harmoniques des efforts excitateurs**.

Puisque le régime du rotor est d'environ **50.26 rd/sec  $\pm$  5 %**, on étudie la variation des fréquences propres du battement pour éviter les fréquences de résonance, en ce régime, dont la pulsation de l'effort exciteur est égale à la pulsation propre de la pàle qui correspond l'intersection des harmoniques des efforts excitatrices avec les pulsation propre du battement de la pàle. (surtout pour les harmoniques d'ordre 1, 2, 3, qui sont les plus importants).

D'après le diagramme de résonance on trouve dans le régime **50.26 rd/sec  $\pm$  5 %** une intersection entre l'harmonique d'ordre **8** des efforts excitatrices et le **3<sup>ème</sup> mode** de vibration c'est ce qui explique un risque de résonance sur la pàle dans ce régime de fonctionnement.

En plus, hors de ce régime on trouve des intersections des harmoniques avec les fréquences propres de la pàle correspondent (par exemple) :

- le **2<sup>ème</sup> mode** avec l'harmonique d'ordre 3 au régime de 40.00 rd/sec.
- et : le **3<sup>ème</sup> mode** avec l'harmonique d'ordre 5 au régime de 39.46 rd/sec.
- et : le **4<sup>ème</sup> mode** avec l'harmonique d'ordre 9 au régime de 40.50 rd/sec.

Les valeurs trouvées du régime exprimées en (rd/s), sont les valeurs de résonance qu'il doit être dépassée rapidement par le pilote.

Dans notre matrice qu'on a obtenue, on constate que la masse (**m**) et la rigidité (**EI**) sont des variables; alors on peut jouer sur ces paramètres pour éviter le phénomène de résonance.

## CONCLUSION :

On conclure que les fréquences propres du battement varient en fonction du régime rotation, et toute intersection entre les harmoniques des efforts excitatrices et les pulsations propres de la pale indique la résonance .

## II – INFLUENCE DE VARIATION DES PARAMETRES D’ACTION :

Au cours de la mise au point d’une pale qui soit optimale du point de vue résonance , poids , résistance et pour éviter les problèmes de niveau vibratoire il est impératif de déplacer correctement les fréquences propres de la pale . Cette modification se fait sur trois paramètres qui sont les suivants :

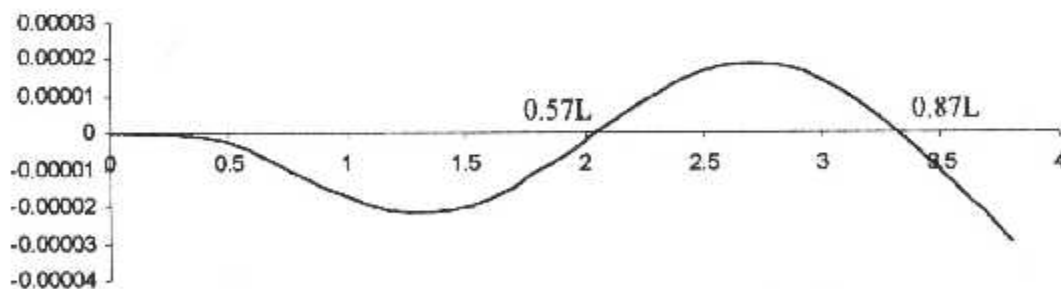
- régime de rotation du rotor .
- répartition des masses .
- rigidité .

### II – 1 L’influence du régime de rotation :

Les fréquences propres augmentent avec le régime de rotation . Cette variation est faible pour les bases fréquences, d’après cette relation il est possible d’agir sur la position des fréquences propres par modification du régime de rotation .

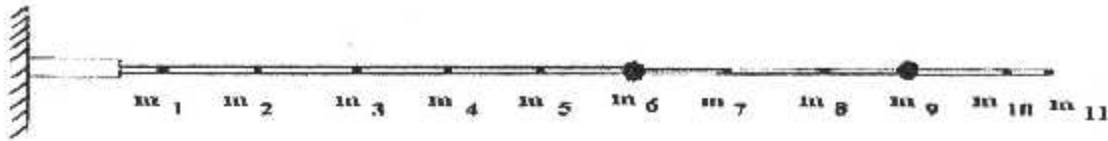
### II – 2 L’influence d’une masse ponctuelle :

Puisque on a une résonance correspond au 3<sup>ème</sup> mode, on va voir la déformée correspondant à ce mode :  $\omega_3 = 157.02 \text{ rd/s}$  :



Dans cette déformée on constate qu’il y a deux nœuds, alors on place deux masses ponctuelle dans ces nœuds car ils sont les positions du risque de rupture les plus sollicité en ce mode qui signifie le risque de résonance

Les valeurs 0.57 et 0.87 sont des points tirés du graphe de la déformée correspondant à  $\omega_3 = 157.02 \text{ rd/s}$  où la courbe coupe l’axe des x ( on prend pour longueur de pale égale à 1 ).



$$m_1 = m_2 = m_3 = m_4 = m_5 = m_7 = m_8 = m_{10} = 0.75 \text{ kg .}$$

$$m_6 = m_9 = 1.25 \text{ kg .}$$

$$m_{11} = 0 .$$

$$\text{Les efforts normaux deviennent : } N_0 = N_1 + r_1 . m_1 . \Omega^2 = 18.125 \Omega^2$$

$$N_1 = N_2 + r_2 . m_2 . \Omega^2 = 17.7687 \Omega^2$$

$$N_2 = N_3 + r_3 . m_3 . \Omega^2 = 17.15 \Omega^2$$

$$N_3 = N_4 + r_4 . m_4 . \Omega^2 = 16.26875 \Omega^2$$

$$N_4 = N_5 + r_5 . m_5 . \Omega^2 = 15.125 \Omega^2$$

$$N_5 = N_6 + r_6 . m_6 . \Omega^2 = 13.7187 \Omega^2$$

$$N_6 = N_7 + r_7 . m_7 . \Omega^2 = 10.9375 . \Omega^2$$

$$N_7 = N_8 + r_8 . m_8 . \Omega^2 = 9.00625 \Omega^2$$

$$N_8 = N_9 + r_9 . m_9 . \Omega^2 = 6.8125 \Omega^2$$

$$N_9 = N_{10} + r_{10} . m_{10} . \Omega^2 = 2.7187 \Omega^2$$

$$N_{10} = N_{11} + r_{11} . m_{11} . \Omega^2 = 0$$

$$N_{11} = 0$$

On se contentera d'un calcul pour  $\Omega$  variant de 40 à 55 rd/s .

On trouve que la position des masses ponctuelles sont situées dans les masse 6 et 9 comme suit :

On a : la longueur de l'extrémité libre à l'encastrement est :  $L = 3.5 + 0.3 = 3.8 \text{ m}$

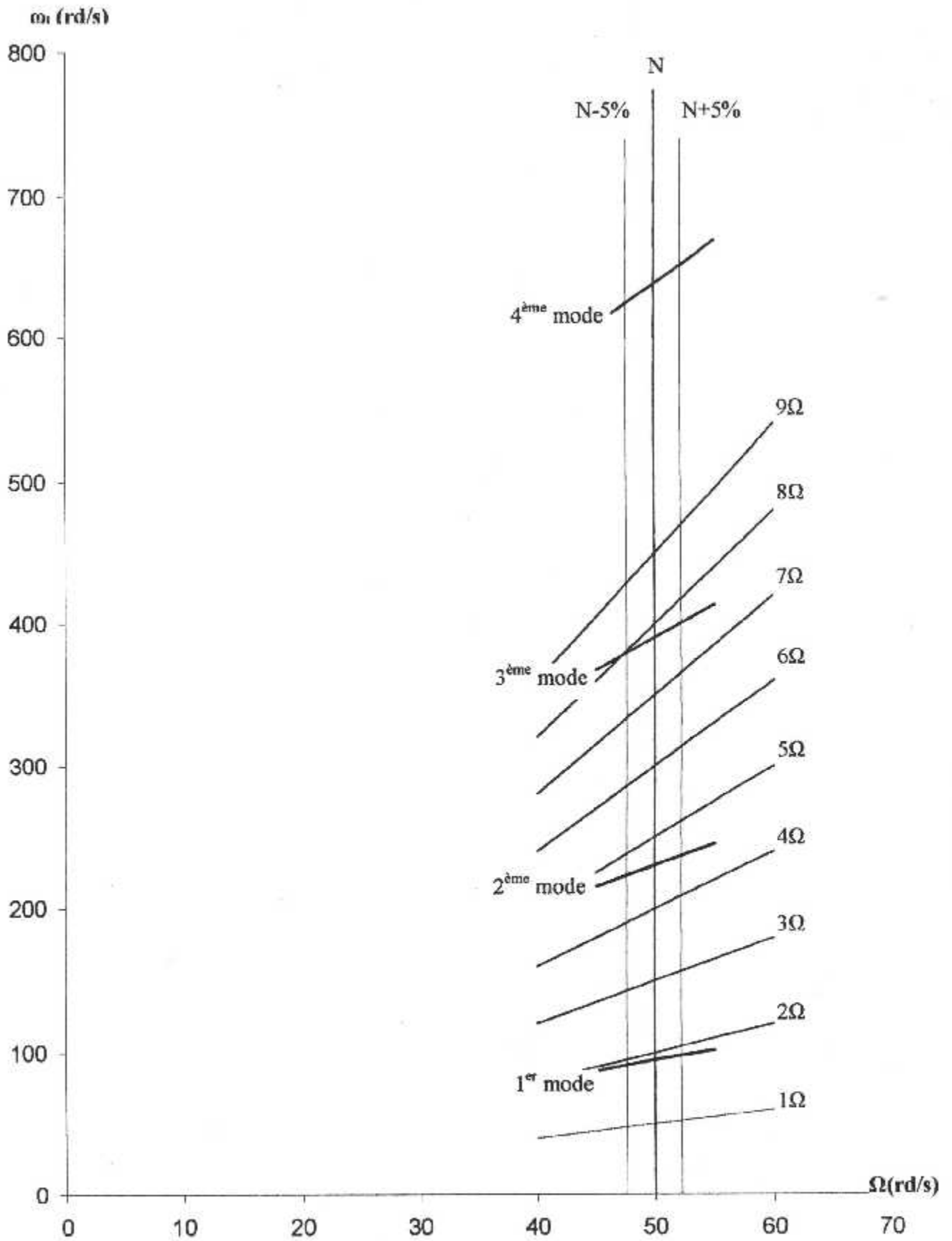
La valeur de  $0.57L$  correspond

$$x = L . 0.57 = 3.8 . 0.57 = 2.17 \text{ m}$$

$$x = L . 0.87 = 3.8 . 0.87 = 3.32 \text{ m}$$

**Résultat et diagramme de résonance :**

Régime rotor $\Omega$ (rd/s)	1er mode $\omega_1$ (rd/s)	2ème mode $\omega_2$ (rd/s)	3ème mode $\omega_3$ (rd/s)	4ème mode $\omega_4$ (rd/s)
45	86.80	215.10	367.45	608.85
50	94.10	229.75	389.75	638.05
55	101.40	244.70	412.85	668.35



**Graphe( V - 2 ) Influence du régime de rotation du rotor sur les fréquences propres d'une pale encastree avec deux masses ponctuelles**

**Discussion des résultats :**

l'effet d'une masse ponctuelle sur la pale a deux ordres :

**a) Action sur l'effort normal :**

on constate que les valeurs des efforts normal augmentent à partir de la position de la masse ponctuelle vers l'encastrement ; par contre ces efforts diminuent vers l'extrémité libre par rapport le cas où la pale a des masses uniformément réparties .

**b) Action sur les forces d'inertie  $F_1$  :**

L'addition d'une masse ponctuelle provoque une augmentation sur les forces d'inertie ce qui implique augmentation d'amplitude dans le plan horizontale alors diminution des fréquences de traînée .

Concernant l'effet de la masse ponctuelle sur les fréquences propres du battement on se contentera d'un calcul pour ( $\Omega$ ) variant de 40 à 55 rd/s .(parce que c'est l'intervalle du régime nominal de rotation ) .

On constate que ces masses concentrées sont permettent d'augmenter les fréquences en 2<sup>ème</sup> mode et 4<sup>ème</sup> mode et diminuer les fréquences en 1<sup>er</sup> mode et 3<sup>ème</sup> mode d'environ 1% .

Grâce à l'addition des deux masses placées aux deux nœuds correspondants le 3<sup>ème</sup> mode, on constate clairement que l'intersection du 3<sup>ème</sup> mode avec l'harmonique d'ordre 8 qui représente la résonance dans le cas où les masses sont uniformément réparties est éloignée hors de la plage de fonctionnement, mais elle reste un peu proche de cette plage .(graphe V - 2 )

**CONCLUSION :**

L'effet de la force centrifuge est équivalent à celui d'une rigidification ,il est d'autant plus efficace que la masse est proche de l'extrémité de la pale .

La répartition massique le long de la pale a une influence importante sur les fréquences on peut la considère comme une solution pratique pour éviter le phénomène de résonance au moins sur les bases fréquences dans la plage de fonctionnement.

### II – 3 L'influence de la rigidité EI :

La rigidification en battement est essentiellement donnée par le longeron et se compose en deux termes qui sont : le module de Young ( E ) exprimé en (Pa) , et le moment d'inertie ( I ) exprimé en ( $\text{mm}^4$ ).

La variation de rigidité se fait :

Soit par la variation du module de Young , soit par la variation du moment d'inertie du longeron.

Dans notre cas on varier la rigidité par la variation des deux termes au même temps , on augmente la rigidité jusqu'à la valeur  $3000 \text{ N.m}^2$  et on voir cette effet sur les fréquences .

#### Résultat et diagramme de résonance :

On calculera les pulsations propres de la pale  $\omega_1$  pour  $\Omega$  variant de 45 à 55 rd/s .

- Rigidité en flexion  $EI = 3000 \text{ N . m}^2$  et Les masses sont uniformément réparties.

Régime rotor $\Omega$ (rd/s)	1er mode $\omega_1$ (rd/s)	2ème mode $\omega_2$ (rd/s)	3ème mode $\omega_3$ (rd/s)	4ème mode $\omega_4$ (rd/s)	5ème mode $\omega_5$ (rd/s)
45	90.95	224.70	404.14	632.45	905.81
50	98.30	239.19	424.44	657.25	933.06
55	105.71	254.06	445.64	683.40	961.97

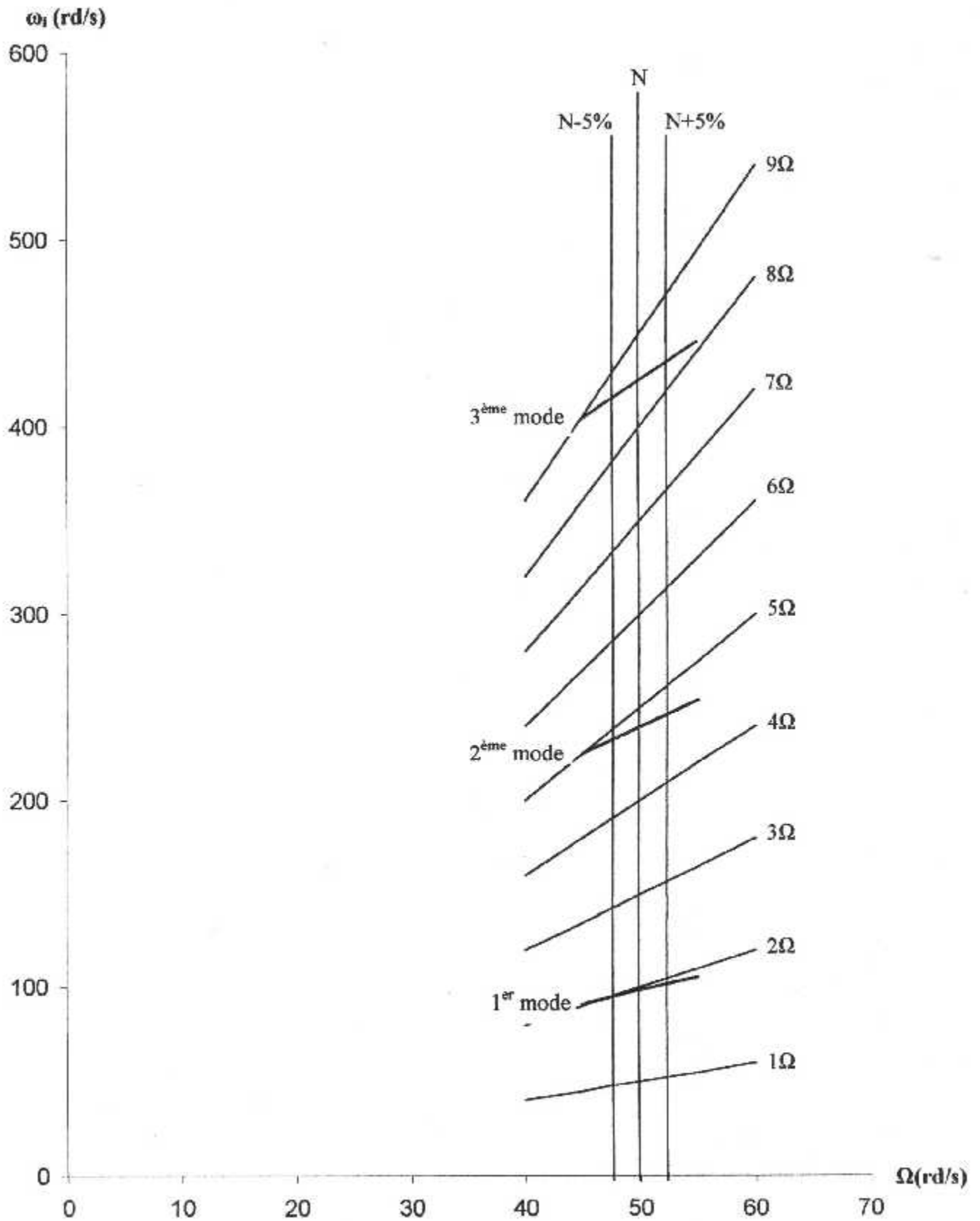
#### Discussion des résultats :

Par comparaison de ces résultats avec les résultats obtenus par  $EI = 2300 \text{ N.m}^2$  , on trouve que les pulsations propres augmentent avec l'augmentation de la rigidité d'environ 5 % et on trouve aussi qu'il n'y a pas de résonance dans la plage de fonctionnement, mais le 1<sup>er</sup> mode se trouve très proche de l'harmonique d'ordre 2 (graphe V-2).

#### Conclusion

La rigidification de la pale a une influence importante sur les fréquences on peut la considère comme une autre solution pratique pour éviter le phénomène de résonance au moins sur les bases fréquences dans la plage de fonctionnement.





Graphe( V – 3 ) Influence du régime de rotation du rotor sur les fréquences propres d'une pale encastrée sans masses ponctuelles ( $EI = 3000N.m^2$ )

Pour éviter l'approche de l'intersection du 3<sup>ème</sup> mode avec l'harmonique d'ordre 8 graphe (V - 2 ) et l'intersection du 1<sup>er</sup> mode avec l'harmonique d'ordre 2 de la plage du fonctionnement graphe (V - 3 ), on recalcule les fréquences propres du battement pour une rigidité  $EI = 3000 \text{ N.m}^2$  et avec deux masses ponctuelles placées en  $m_6$  et  $m_9$

#### Résultats et diagramme de résonance :

- Rigidité en flexion  $EI = 3000 \text{ N . m}^2$  avec 2 masses ponctuelles .

Régime rotor $\Omega$ (rd/s)	1 <sup>er</sup> mode $\omega_1$ (rd/s)	2 <sup>ème</sup> mode $\omega_2$ (rd/s)	3 <sup>ème</sup> mode $\omega_3$ (rd/s)	4 <sup>ème</sup> mode $\omega_4$ (rd/s)	5 <sup>ème</sup> mode $\omega_5$ (rd/s)
45	89.95	227.42	392.59	659.86	911.11
50	97.15	241.64	414.64	687.41	940.06
55	104.41	256.21	435.61	716.26	970.76

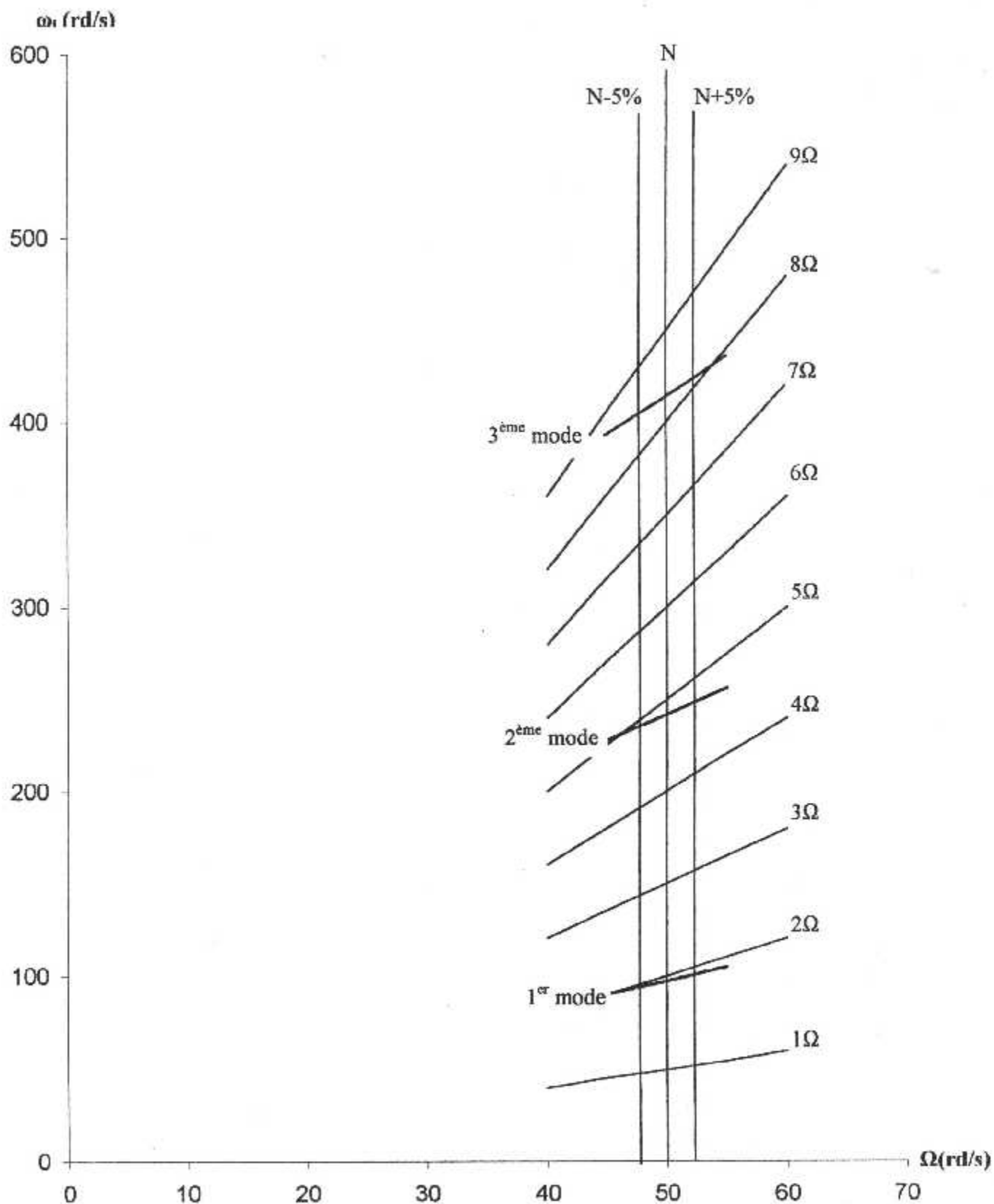
#### Discussion des résultats :

On constate que les approches du 3<sup>ème</sup> et du 1<sup>er</sup> mode sont éloignées de la plage du fonctionnement et les fréquences sont toujours augmentent avec l'augmentation de la rigidité et de la concentration de masses.

#### CONCLUSION :

Avec une pale de rigidité en flexion de  $3000 \text{ N . m}^2$  et deux masses ponctuelles chacune de  $0.5 \text{ kg}$  situées à  $2.17\text{m}$  et à  $3.32\text{m}$  de l'encastrement , on supprime les risques de résonance au régime d'utilisation soit :  $N = 480 \text{ tr/mn} \pm 5 \%$  .

La masse totale de la pale étant toujours de  $8.5 \text{ kg}$  .



Graphe( V - 4 ) Influence du régime de rotation du rotor sur les fréquences propres d'une pale encastrée avec 2 masses ponctuelles ( $EI = 3000N.m^2$ )

### III – ALLURE DES DEFORMEES MODALES :



En chaque point  $n$  on peut connaître en fonction de  $T_0$  la déformée  $y_n$  et la rotation angulaire  $\alpha_n$  correspondant à chaque pulsation  $\omega_i$ .

le calcul de la pulsation propre  $\omega_i$  nous donne aussi  $M_{(0)}$  pour une valeur  $T_{(0)}$ , arbitraire, que l'on choisit égale à 1. un calcul semblable, mais en ayant pour donné  $\omega_i$  et  $M_{(0)}$  pour  $T_{(0)} = 1$ , nous donne en chaque point  $y_n$  et  $\alpha_n$ .

On a pour chaque point  $n$  :

$$\begin{bmatrix} y \\ \alpha \\ M \\ T \end{bmatrix}_n = \begin{bmatrix} u_{n11} & u_{n12} & u_{n13} & u_{n14} \\ u_{n21} & u_{n22} & u_{n23} & u_{n24} \\ u_{n31} & u_{n32} & u_{n33} & u_{n34} \\ u_{n41} & u_{n42} & u_{n43} & u_{n44} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} y \\ \alpha \\ M \\ T \end{bmatrix}_0$$

$$\text{soit : } y_n = u_{n11} \cdot y_0 + u_{n12} \cdot \alpha_0 + u_{n13} \cdot M_0 + u_{n14} \cdot T_0$$

$$\alpha_n = u_{n21} \cdot y_0 + u_{n22} \cdot \alpha_0 + u_{n23} \cdot M_0 + u_{n24} \cdot T_0$$

pale encastree en (0)

$$y_0 = 0 \quad ; \quad \alpha_0 = 0$$

$$y_n = u_{n13} \cdot M_0 + u_{n14} \cdot T_0$$

$$\alpha_n = u_{n23} \cdot M_0 + u_{n24} \cdot T_0$$

Connaissant  $M_0$  et  $T_0$ , nous en déduisons  $y_n$  et  $\alpha_n$

En P nous avons :

$$0 = u_{p33} \cdot M_0 + u_{p34} \cdot T_0$$

$$0 = u_{p43} \cdot M_0 + u_{p44} \cdot T_0$$

On pose :  $T_0 = 1$  et on calcule  $M_0 = -\frac{u_{p34}}{u_{p33}} \cdot T_0 = -\frac{u_{p34}}{u_{p33}}$

En reportant  $M_0$  dans l'expression de  $y_n$  et  $\alpha_n$ , on obtient :

$$y_n = u_{n13} \cdot \left[ \frac{u_{p34}}{u_{p33}} \right] \cdot T_0 + u_{n14} \cdot T_0$$

$$\alpha_n = u_{n23} \cdot \left[ \frac{u_{p34}}{u_{p33}} \right] \cdot T_0 + u_{n24} \cdot T_0$$

qui s'écrivent aussi en posant  $T_0 = 1$

$$y_n = u_{n13} \cdot \left[ \frac{u_{p34}}{u_{p33}} \right] + u_{n14}$$

$$\alpha_n = u_{n23} \cdot \left[ \frac{u_{p34}}{u_{p33}} \right] + u_{n24}$$

Ces deux relations nous donnent en chaque point ( n ) la valeur de la flèche  $y_n$  et de la rotation  $\alpha_n$ .

Pour  $EI = 3000 \text{ N} \cdot \text{m}^2$  avec deux masses ponctuelles placées en  $m_6$  et  $m_9$ , on calcule les fréquences propres du battement pour  $\Omega = 0$  et  $\Omega = 50 \text{ rd/s}$ .

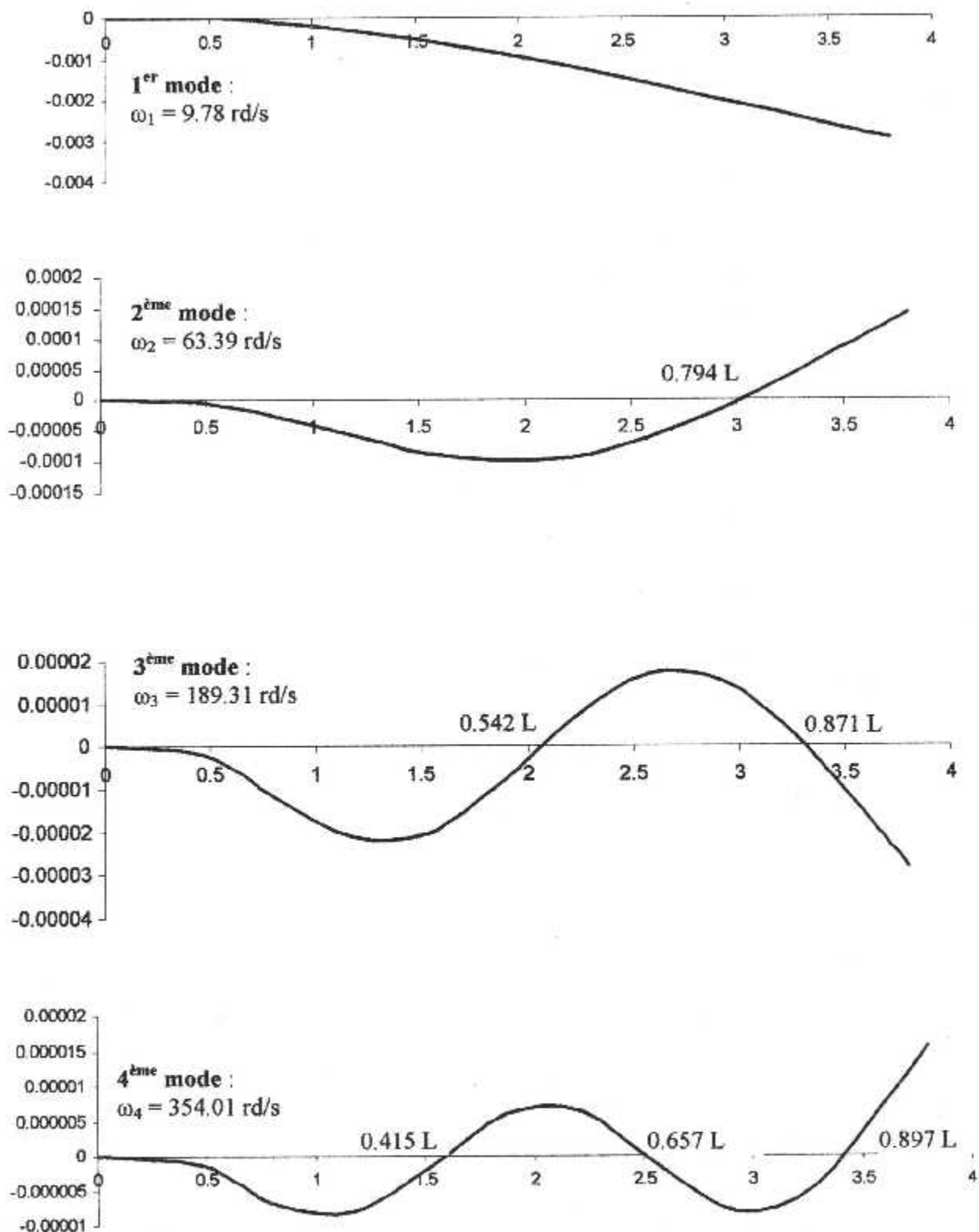
Régime rotor $\Omega$ (rd/s)	1 <sup>er</sup> mode $\omega_1$ (rd/s)	2 <sup>ème</sup> mode $\omega_2$ (rd/s)	3 <sup>ème</sup> mode $\omega_3$ (rd/s)	4 <sup>ème</sup> mode $\omega_4$ (rd/s)
0	9.78	63.39	189.319	354.01
50	97.12	241.63	413.62	687.39

**Calcul de la déformée modale pour  $\Omega = 0$  , correspondant aux 4 premières pulsations propres . (EI = 3000 N.m<sup>2</sup> , deux masses ponctuelles en m<sub>6</sub> et m<sub>9</sub> )**

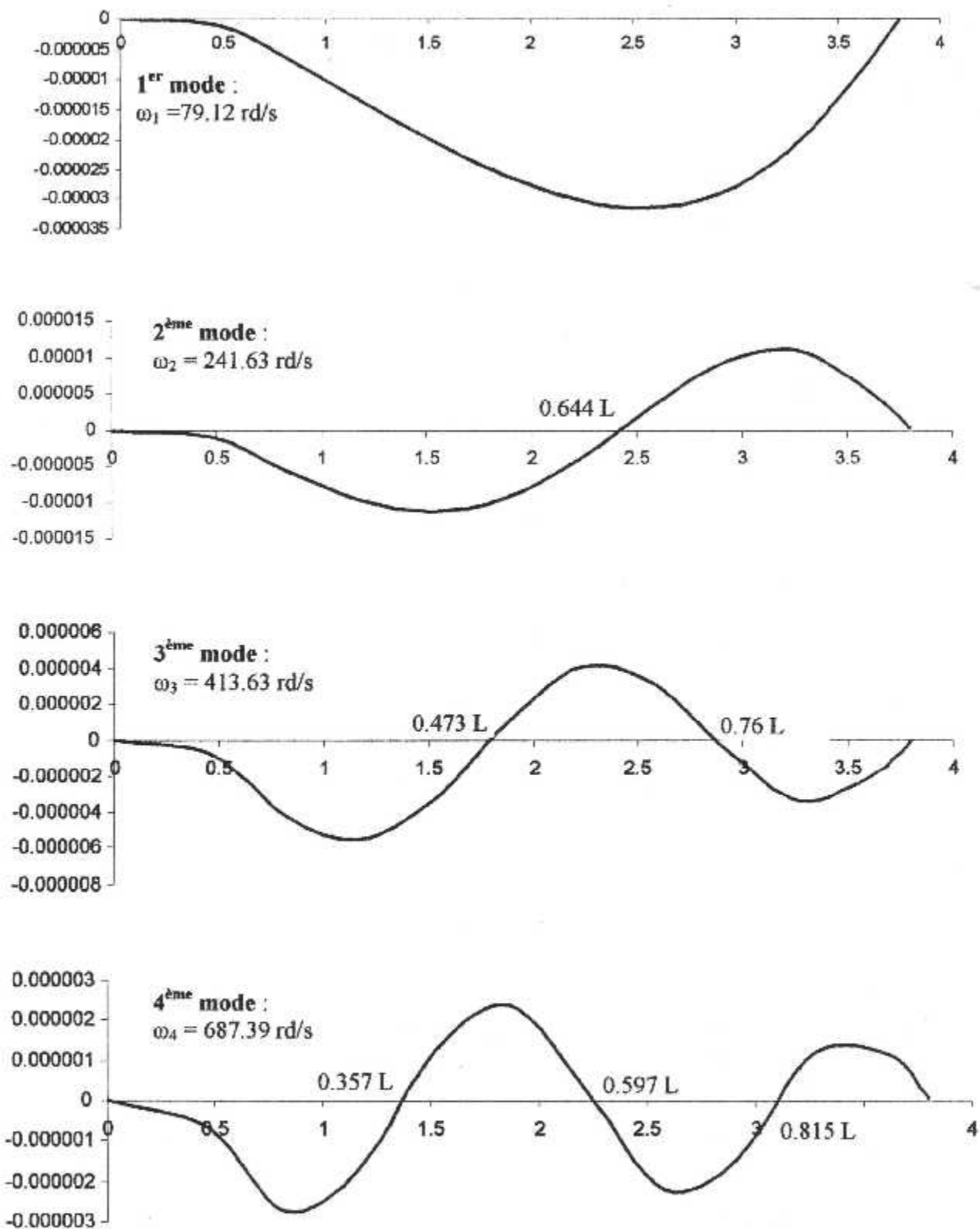
	<b>1<sup>er</sup> mode</b> $\omega_1 = 9.79$ $M_{(0)} = 2,5519$	<b>2<sup>ème</sup> mode</b> $\omega_2 = 63,39$ $M_{(0)} = 0,7422$	<b>3<sup>ème</sup> mode</b> $\omega_3 = 189,31$ $M_{(0)} = 0,4449$	<b>4<sup>ème</sup> mode</b> $\omega_4 = 354,01$ $M_{(0)} = 0,3235$
y <sub>1</sub>	-1.27E-05	-3.49E-06	-1.97E-06	-1.35E-06
y <sub>2</sub>	-1.09E-04	-2.61E-05	-1.25E-05	-7.12E-06
y <sub>3</sub>	-2.88E-04	-5.79E-05	-2.14E-05	-8.08E-06
y <sub>4</sub>	-5.36E-04	-8.61E-05	-2.03E-05	-1.53E-06
y <sub>5</sub>	-8.39E-04	-1.00E-04	-8.83E-06	6.04E-06
y <sub>6</sub>	-1.18E-03	-9.41E-05	6.61E-06	6.32E-06
y <sub>7</sub>	-1.56E-03	-6.51E-05	1.66E-05	-1.58E-06
y <sub>8</sub>	-1.95E-03	-1.70E-05	1.51E-05	-8.11E-06
y <sub>9</sub>	-2.35E-03	4.35E-05	1.87E-06	-4.61E-06
y <sub>10</sub>	-2.76E-03	1.09E-04	-1.81E-05	8.26E-06
y <sub>11</sub>	-2.96E-03	1.42E-04	-2.86E-05	1.56E-05

**Même calcul pour  $\Omega = 50$  rd /s :**

	<b>1<sup>er</sup> mode</b> $\omega_1 = 97.12$ $M_{(0)} = 0,2728$	<b>2<sup>ème</sup> mode</b> $\omega_2 = 241.63$ $M_{(0)} = 0,2536$	<b>3<sup>ème</sup> mode</b> $\omega_3 = 413.62$ $M_{(0)} = 0,26223725$	<b>4<sup>ème</sup> mode</b> $\omega_4 = 687.4$ $M_{(0)} = 0,19340876$
y <sub>1</sub>	-1.10E-06	-9.90E-07	-8.57E-07	-6.89E-07
y <sub>2</sub>	-6.67E-06	-5.59E-06	-4.26E-06	-2.72E-06
y <sub>3</sub>	-1.33E-05	-9.61E-06	-5.53E-06	-1.64E-06
y <sub>4</sub>	-2.00E-05	-1.12E-05	-3.34E-06	1.30E-06
y <sub>5</sub>	-2.58E-05	-9.31E-06	9.27E-07	2.34E-06
y <sub>6</sub>	-3.00E-05	-4.07E-06	4.05E-06	2.04E-07
y <sub>7</sub>	-3.14E-05	3.33E-06	3.14E-06	-2.19E-06
y <sub>8</sub>	-2.91E-05	9.63E-06	-5.92E-07	-1.39E-06
y <sub>9</sub>	-2.16E-05	1.09E-05	-3.42E-06	1.20E-06
y <sub>10</sub>	-8.20E-06	4.87E-06	-1.95E-06	1.10E-06
y <sub>11</sub>	-1.52E-07	3.92E-07	-3.97E-8	7.92E-8



**Graphe (V – 5) Les déformées d'une poutre encastrée avec ( $EI = 3000 \text{ N.m}^2$  et deux masses ponctuelles) pour le régime de rotation  $\Omega = 0 \text{ rd/s}$**



**Graphe (V – 6) Les déformées d'une pale encastrée avec ( $EI = 3000 \text{ N.m}^2$  et deux masses ponctuelles) pour le régime de rotation  $\Omega = 50 \text{ rd/s}$**



Les valeurs de la déformée  $y_n$  est exprimée en mètre pour  $T_{(0)} = 1$ .

Pour obtenir un résultat correct au niveau du 3<sup>ème</sup> et 4<sup>ème</sup> mode, il est nécessaire de donner  $M_{(0)}$  avec une grande précision ( 8 chiffres après la virgule ).

**Discussion des résultats :**

**Pour  $\Omega = 0$  :**

**1<sup>er</sup> mode :**

Aucun nœud et l'allure de la déformée est presque droite, d'après cette allure ce mode ne constitue pas un danger de résistance pour la pale.

**2<sup>ème</sup> mode :**

Un nœud placé dans la seconde moitié de la pale à partir de l'extrémité libre ( $r = 3.02$  m) et un ventre qui constitue la zone dangereuse. Vraisemblablement, ce mode est le plus dangereux, mais dans notre cas le 3<sup>ème</sup> mode constitue le mode le plus dangereux par conséquent on doit placer la fréquence le plus loin possible des harmoniques du régime de rotation.

**3<sup>ème</sup> mode :**

Deux nœuds, le premier est proche de l'extrémité libre ( $r = 3.31$  m), le deuxième dans la seconde moitié de la pale ( $r = 2.06$  m). Deux ventres contenant les zones à fortes amplitudes.

**4<sup>ème</sup> mode :**

trois nœuds et trois ventres, le premier nœud proche de l'extrémité libre ( $r = 3.41$  m) le second dans la deuxième moitié de la pale ( $r = 2.50$  m) et le troisième dans la première moitié ( $r = 1.58$  m).

**Pour  $\Omega = 50$  rd/s :**

**1<sup>er</sup> mode :**

Toujours l'allure de premier mode ne contient pas des nœuds quelque soit le régime de rotation.

**2<sup>ème</sup> mode :**

le nœud est placé en ( $r = 2.45$  m) c.à.d le nœud se déplace à une valeur de ( $0.57$  m) vers l'encastrement.

**3<sup>ème</sup> mode :**

Le premier nœud est placé en ( $r = 1.80$  m) c.à.d ce nœud se déplace vers l'encastrement à une valeur de ( 0.26 m) .

Le deuxième nœud est placé en ( $r = 2.89$  m) c.à.d ce nœud se déplace vers l'encastrement à une valeur de ( 0.42 m).

**4<sup>ème</sup> mode :**

Le premier nœud est placé en ( $r = 1.36$  m) c.à.d ce nœud se déplace vers l'encastrement à une valeur de ( 0.22 m) .

Le deuxième nœud est placé en ( $r = 2.27$  m) c.à.d ce nœud se déplace vers l'encastrement à une valeur de ( 0.23 m).

Le troisième nœud est placé en ( $r = 3.10$  m) c.à.d ce nœud se déplace vers l'encastrement à une valeur de ( 0.31 m) .

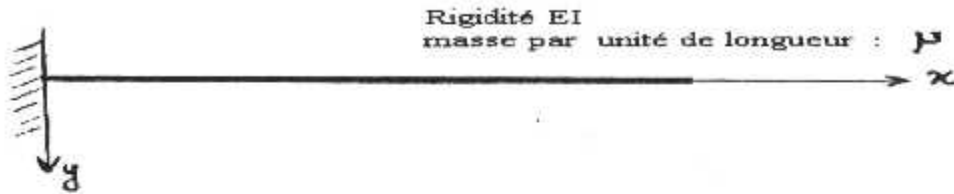
Par comparaison entre les deux déformées correspondants 0 et 50 rd/s , on constate que tous les nœuds déplacent vers l'encastrement avec l'augmentation du régime de rotation.

**Conclusion**

Le régime de rotation à une grande influence sur les fréquences propres et ainsi sur les déformées et ceci par le déplacement des nœuds vers l'encastrement.

#### IV - PRECISION DE LA METHODE :

IV-1 Comparaison des résultats obtenus par la méthode avec le calcul analytique dans le cas ou  $\Omega = 0$  :



On sait dans ce cas les pulsations propres d'une poutre encastree à une extrémite et libre à l'autre sont données par la résolution de l'équation différentielle aux dérivées partielles :

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} \left[ E I \frac{\partial^2 v(x,t)}{\partial x^2} \right] + \mu (x) \frac{\partial^2 v(x,t)}{\partial t^2} = 0 \quad [11]$$

La fonction  $v(x,t)$  a deux variables indépendantes  $(x)$ ,  $(t)$  donc on peut résoudre l'équation obtenue par la méthode de séparation des variables, on obtient des relations qui a une infinité des solutions dont leurs conditions définissent les modes de vibration correspondants à chacune des solutions représentant  $(\lambda_i)$  des ces relations, dont les valeurs approchées sont données par

$$\lambda_i = \left(i - \frac{1}{4}\right) \frac{\pi}{L} \quad \text{tel que } i \text{ indique le mode.}$$

Pour chacune des valeurs  $(\lambda_i)$  correspond une pulsation de la forme :

$$\omega_i = \lambda_i \sqrt{\frac{E I}{m L^3}}$$

Les conditions aux limites étant :

- à l'extrémite encastree, la flèche et la rotation angulaire sont nulles

$$x = 0 \quad , \quad y = 0 \quad , \quad \frac{\partial y}{\partial x} = 0$$

- à l'extrémite libre, le moment de flexion et l'effort tranchant sont nuls

$$x = L \quad , \quad \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = 0 \quad , \quad \frac{\partial^3 y}{\partial x^3} = 0$$

pour une poutre homogène d'inertie constante (  $E, I, \mu = \text{constante}$  )

de masse  $m = 8,5 \text{ kg}$

de longueur  $L = 3,5 \text{ m}$

de rigidité  $EI = 3000 \text{ N m}^2$

On obtient les valeurs suivantes :

$$\omega_1 = (1,875)^2 \sqrt{\frac{EI}{mL^3}} \Rightarrow \omega_1 = 10.08$$

$$\omega_2 = (4,694)^2 \sqrt{\frac{EI}{mL^3}} \Rightarrow \omega_2 = 63.21$$

$$\omega_3 = (7,855)^2 \sqrt{\frac{EI}{mL^3}} \Rightarrow \omega_3 = 177.02$$

$$\omega_4 = (10,996)^2 \sqrt{\frac{EI}{mL^3}} \Rightarrow \omega_4 = 346.91$$

Pour la même poutre, la méthode préconisée donne :

Discretisation en 7 masses

$$l_1 = l_7 = 0,291 \text{ m}$$

$$l_2 = l_3 = \dots = l_6 = 0,583 \text{ m}$$

$$m_1 = m_2 = \dots = m_5 = m_6 = 1,416 \text{ kg}$$

$$m_7 = 0$$

Discretisation en 11 masses :

$$l_1 = l_{11} = 0,175 \text{ m}$$

$$l_2 = l_3 = \dots = l_{10} = 0,35 \text{ m}$$

$$m_1 = m_2 = m_3 \dots = m_{10} = 0.85 \text{ kg}$$

$$m_{11} = 0$$

**Tableau comparatif des résultats pour le régime de rotation 0 rd/s :**

Les modes $\omega_i$ (rd/s)	La solution exacte	Discrétisation en 7 masses	Discrétisation en 11 masses	Erreur de 7 masses %	Erreur de 11 masses %
$\omega_1$	10.08	10.32	10.11	2.3	0.29
$\omega_2$	63.21	64.72	63.73	2.3	0.8
$\omega_3$	177.02	183.40	179.35	3.6	1.31
$\omega_4$	346.91	361.27	352.99	4.13	1.75

**Discussion des résultats :**

On constate, dans le cas particulier où  $\Omega = 0$  cas où les pulsations propres sont connues, que la méthode préconisée donne d'excellents résultats.

Avec une discrétisation de la poutre en 7 masses, on obtient le premier mode  $\omega_1$  avec une bonne précision : erreur de 2.3 %.

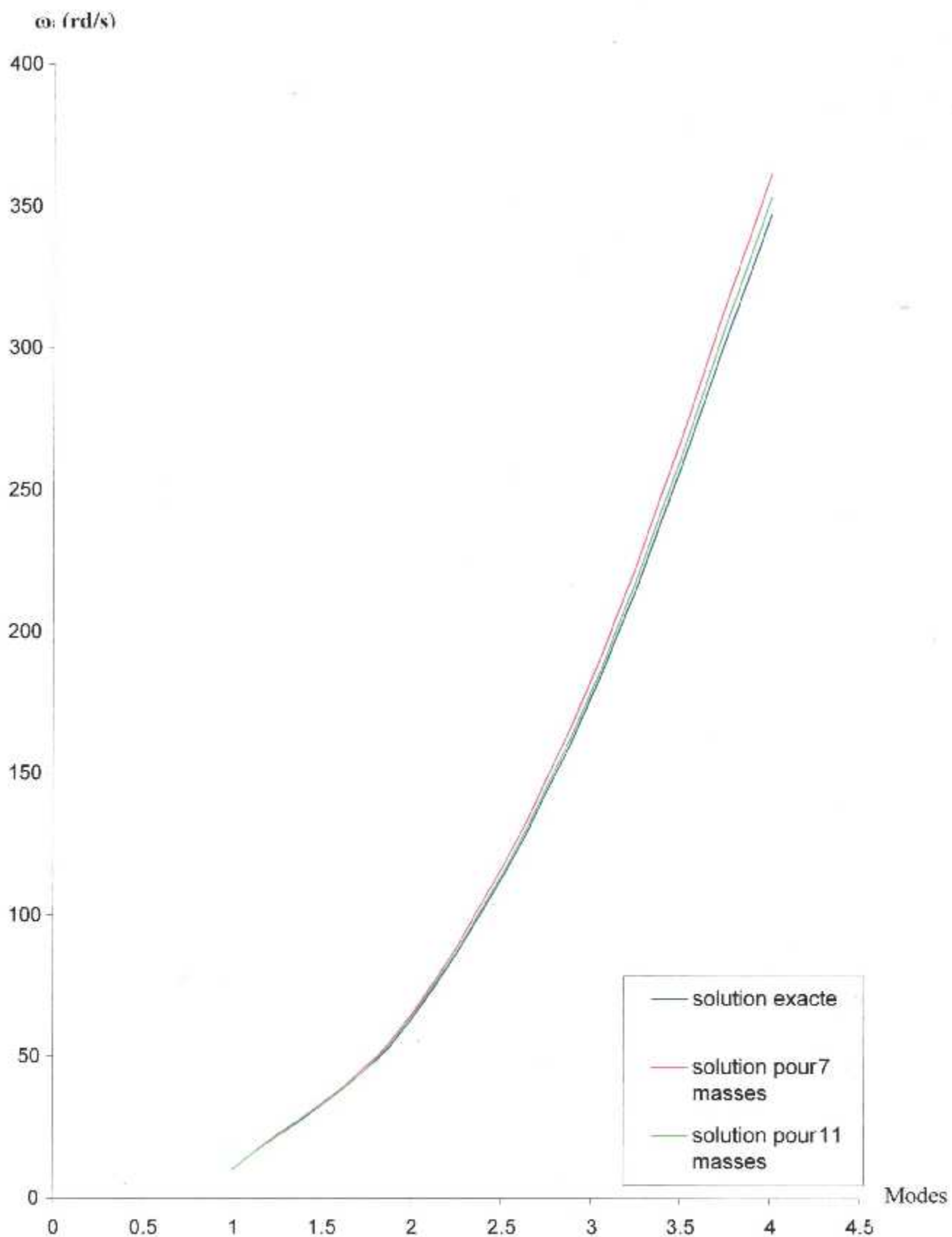
Les résultats du deuxième et troisième mode sont corrects et fournissent une bonne approximation de la valeur de  $\omega_2$  et  $\omega_3$ .

Avec une discrétisation en 11 masses les résultats trouvés jusqu'au cinquième mode (arrêt volontaire) sont excellents.

En générale, on constate que les résultats de la discrétisation en 11 masses est plus proche de la solution exacte que les résultats de la discrétisation en 7 masses.

**CONCLUSION :**

Quand le nombre des masses est grand, la précision de la méthode de discrétisation est assez importante.



Graph (V - 7) Comparaison des résultats obtenus par la méthode avec le calcul analytique pour le régime de rotation " 0 rd/s " correspondant aux 4 premières pulsations propres

## PARTIE (B) : ETUDE D'UNE PALE ARTICULEE :

L'inclinaison du plan rotor est provoquée par une dissymétrie de portance des pales qui est due aux variations de vitesse du vent relatif ( $V_R$ ). cette dissymétrie, pour le moins gênante est compensée automatiquement par le battement vertical des pales.

Nous allons examiner les effets de cette variation de portance sur un rotor rigide (non articulée en battement) ce qui vous permettra de comprendre l'impérative nécessité des articulations de battement. Rappelons qu'une pale qui n'est pas articulée en battement ne peut pas se déplacer (batter) vers le haut sous l'action des forces qui la sollicitent.

En vol stationnaire  $V_R = \text{constante}$

En vole de translation,  $V_R = U + V$  ( pale avançante )

$V_R = U - V$  ( pale reculante )

Les conséquences de variation de la vitesse du vent relatif ( $V_R$ ) dans un rotor rigide crée une variation de portance ( $F_Z$ ) par la relation  $F_Z = \frac{1}{2} \rho V_R^2 S C_Z$ , on comprend que dans ces conditions la résultante ( $F_Z$ ) n'est plus appliquée au centre de rotation "o", ce qui provoque la dissymétrie latérale de la portance. cette dernière crée un mouvement de roulis qui rend impossible de pilotage d'un hélicoptère équipé d'un rotor non articulé en battement comme il est indique dans la figure ( V -2 ).

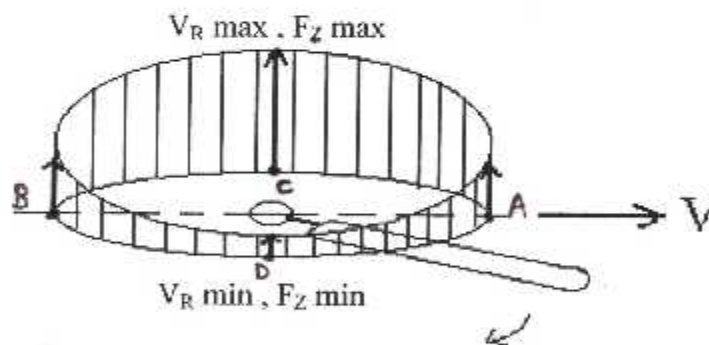


Fig (V - 2) Variation de la portance dans le plan de rotation

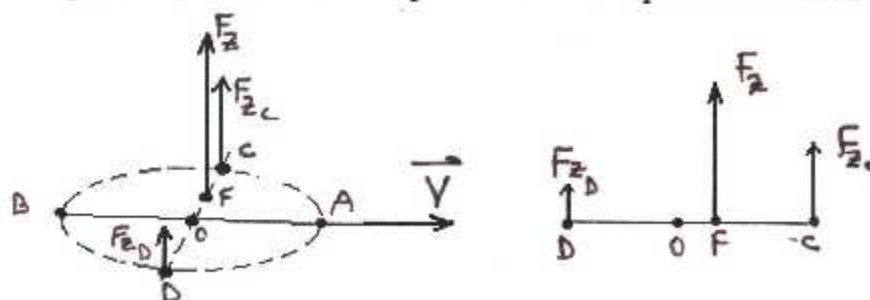


Fig (V - 3) Le moment de  $F_Z$  au point F par rapport à " o " crée un mouvement de roulis

Pour remédier aux effet de la dissymétrie latérale de la portance ; l'articulation de battement est la solution convenable pour les raisons suivants :

- l'articulation de battement permet à la pale de battre verticalement c.à.d de monter ou de descendre sous l'action de la résultante des forces de portance et centrifuge avec laquelle elle s'aligne.
- l'articulation de battement annulait le moment de flexion a l'emplanture de la pale.

Le battement vertical provoque une variation automatique de l'incidence qui compense la variation de la portance latérale

L'augmentation de l'incidence se fait dans le sens contraire de l'augmentation de  $F_z$ .

Toutes les étapes de calcul qu'on a fait pour une pale encastree sont restent les mêmes pour une pale articulée, sauf la seule chose qui change c'est les conditions aux limites qui nous pouvons grâce à elles de déterminer les fréquences propres par le calcul du déterminant correspond à 0 dans la matrice de passage :

Ces conditions sont vérifiées si :

$$\Delta = \begin{vmatrix} u_{p32} & u_{p34} \\ u_{p42} & u_{p44} \end{vmatrix} = 0$$

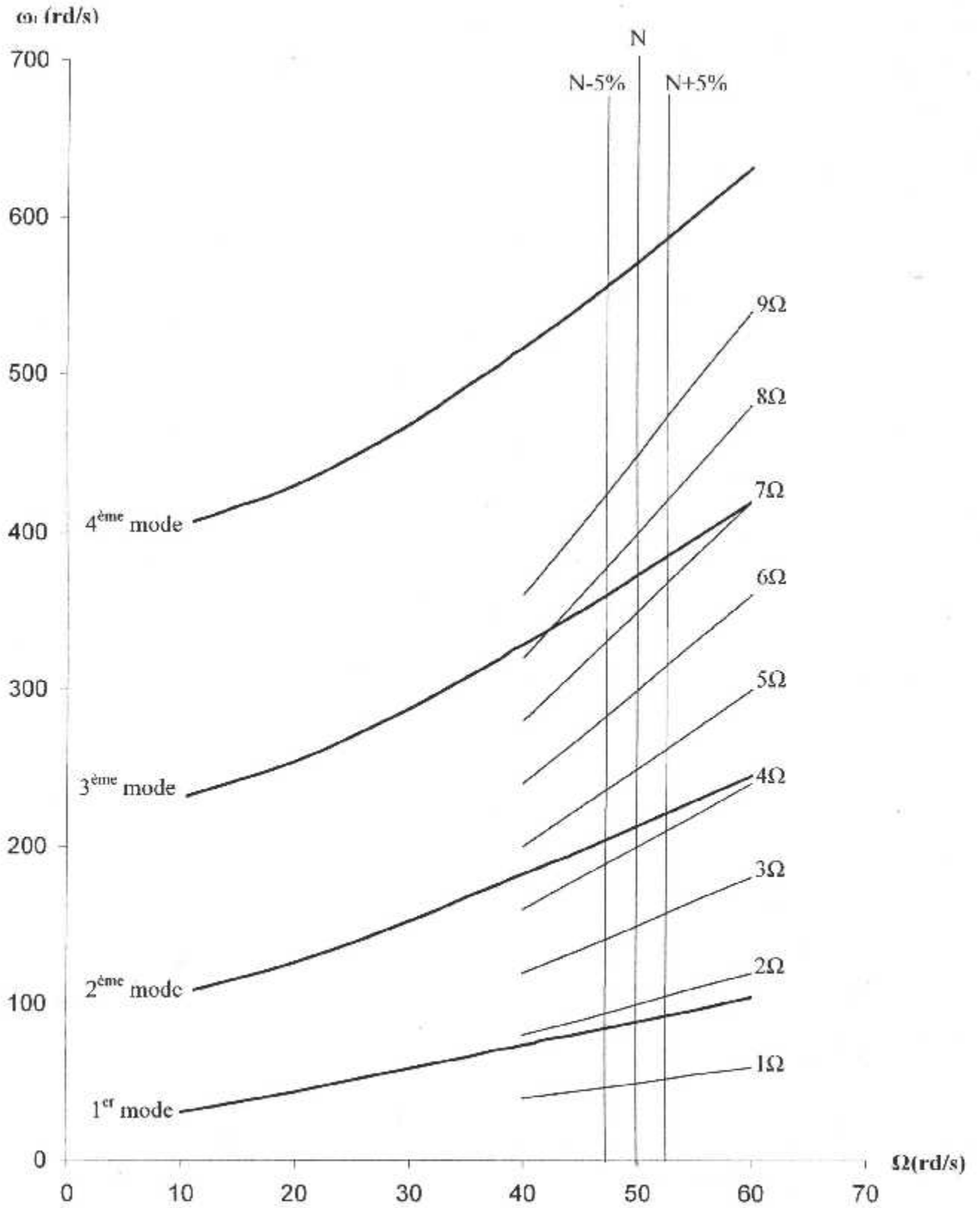
Alors on change simplement dans le programme de calcul les conditions aux limites.

## I – RESULTATS ET DIAGRAMME DE RESONANCE :

Le régime nominal de rotation reste toujours 480 tr/min (50.265 rd/s).

Régime rotor $\Omega$ ( rd/s)	1 <sup>er</sup> mode $\omega_1$ (rd/s)	2 <sup>ème</sup> mode $\omega_2$ (rd/s)	3 <sup>ème</sup> mode $\omega_3$ (rd/s)	4 <sup>ème</sup> mode $\omega_4$ (rd/s)	5 <sup>ème</sup> mode $\omega_5$ (rd/s)
0	39.00	126.99	266.19	456.52	695.85
10	30.99	106.68	231.21	404.55	624.52
20	43.95	126.12	254.07	429.75	651.07
30	58.68	152.31	287.58	468.39	692.59
40	73.83	181.77	328.02	516.96	745.93
45	81.42	197.16	349.92	543.96	775.93
50	89.04	212.85	372.66	572.31	807.64
55	96.66	228.789	396.06	601.74	840.64





Grphe( V - 8 ) Influence du régime de rotation du rotor sur les fréquences propres d'une pale articulée avec  $EI=2300N.m^2$

**Discussion des résultats :**

Par comparaison entre les résultats d'une pale articulée avec une pale encastrée on trouve que les fréquences propres par l'intermédiaire de l'articulation de battement augmente d'environ quatre fois par rapport à une pale encastrée.

Pour les autres régimes, les fréquences diminuent d'environ 10 % , et on constate que la résonance est évitée dans la plage de fonctionnement.

**Conclusion**

L'articulation de battement est une solution efficace pour éviter la résonance dans le cas où la pale est parfaitement encastrée .

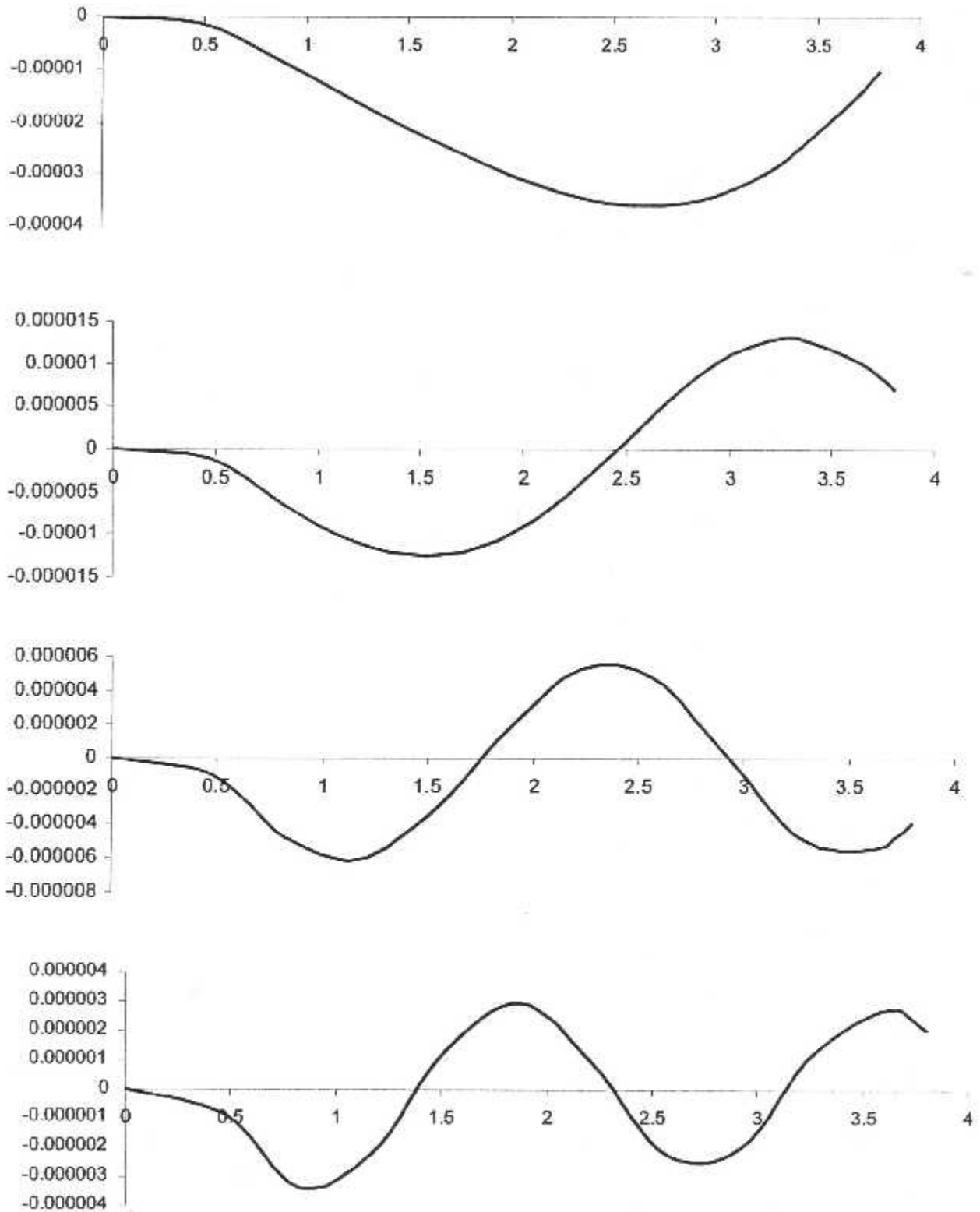
**II – ALLURES DES DEFORMEES MODALES :**

La déformée correspond une pale articulée est :

$$y_n = u_n^{12} \cdot \left[ \frac{u_p^{34}}{u_p^{32}} \right] + u_n^{14}$$

**Calcul de la déformée modale pour  $\Omega = 50$  , correspondant aux 4 premières pulsations propres . (EI = 2300 N.m<sup>2</sup> , masse de la pale uniformément répartie = 8.5 kg )**

Régime rotor $\Omega$ (rd/s)	1 <sup>er</sup> mode $\omega_1$ (rd/s)	2 <sup>ème</sup> mode $\omega_2$ (rd/s)	3 <sup>ème</sup> mode $\omega_3$ (rd/s)	4 <sup>ème</sup> mode $\omega_4$ (rd/s)
0	-1.26E-06	-1.16E-06	-1.01E-06	-8.48E-07
10	-7.41E-06	-6.34E-06	-4.84E-06	-3.35E-06
20	-1.46E-05	-1.08E-05	-6.03E-06	-2.20E-06
30	-2.17E-05	-1.26E-05	-3.35E-06	1.31E-06
40	-2.81E-05	-1.06E-05	1.58E-06	2.95E-06
45	-3.31E-05	-5.11E-06	5.27E-06	8.08E-07
50	-3.58E-05	2.65E-06	4.74E-06	-2.24E-06
55	-3.50E-05	9.90E-06	9.38E-08	-1.98E-06
60	-2.92E-05	1.32E-05	-4.82E-06	1.27E-06



**Graphe (V – 9) Les déformées d’une pale articulée ( $EI = 2300 \text{ N.m}^2$ ) pour le régime de rotation  $\Omega = 50 \text{ rd/s}$**



**CONCLUSION**

## CONCLUSION

Ce modeste travail nous a permis d'une façon simple et claire, de voir comment on peut solutionner le problème de vibration de battement des pales d'hélicoptère, en déterminant les modes propres et en procédant à des modifications sur les paramètres qui peuvent influencer sur les fréquences propres.

La structure des pales doit être choisie d'une façon à éviter que, au régime nominal de fonctionnement, il y ait risque de résonance, au moins sur les fréquences les plus basses. Pour les autres types de vibrations des pales (traînée et torsion), la démarche qui permet de résoudre le problème des fréquences propres est presque la même, si on admet l'hypothèse du centre de gravité et le centre de torsion sont confondus, pour le cas de vibration de torsion.

On conclue pour ce type des pales qu'on a étudié que l'articulation est une solution efficace pour éviter la résonance d'où éviter la rupture de la pale.

Dans notre travail on a étudié les deux types de liaison des pales sans tenir compte les matériaux de ces dernières, il faut rappeler que actuellement les pales sont en matériaux composites qui influent d'une façon très importante sur leurs comportement vibratoire. Nous suggérons alors, par la suite une étude sur les vibration des pale en matériaux composites.

Pour terminer, nous souhaitons vivement que cet exposé serve d'introduction pour ceux qui s'intéressent au sujet.



ANNEXE

MISE AU POINT DU  
PROGRAMME

## ANNEXE

### mise au point du programme :

$\omega$  : La pulsation cherchée est mémorisée dans **P**.

Le résultat  $[k_2]$  .  $[k_1]$  est mémorisé à la place de  $[k_1]$  ;  $[k_3]$  remplace  $[k_2]$  .

On fait une boucle sur les  $k_{(j-1)}$  matrices.

$\Delta$  : Le déterminant représentant les conditions aux limites est mémorisé dans **D** .

Pour une poutre **encastrée** nous aurons :

$$(U_{p33} \times U_{p44}) - (U_{p34} \times U_{p43}) \rightarrow D$$

Pour une poutre **articulée** nous aurons :

$$(U_{p32} \times U_{p44}) - (U_{p34} \times U_{p42}) \rightarrow D$$

Pour obtenir la solution nous aurons besoin du déterminant antérieur  $\Delta^{-1}$  qui sera mémorisé dans **F** .

### Données :

**J** : Nombre de masses fictives .

**V** : Vitesse de rotation soit  $\Omega$  en rd/s .

**Q** : Incrémentation sur la pulsation **P** ( $P + Q \rightarrow P$ ) .

**H** : Précision relative par rapport à **P** sur la valeur trouvée pour la solution **P** .

ex . :  $H = 0,005$  soit une précision de 0,5 % de **P**

(if  $K > H \times P$ ) **H** : écart maximum par excès en % de **P** , sur **P**

**T** : Valeur maxi de la pulsation **P** ( test  $P < P$  maxi )

**U** : Incrémentation sur la vitesse **V** ( $V + U \rightarrow V$ )

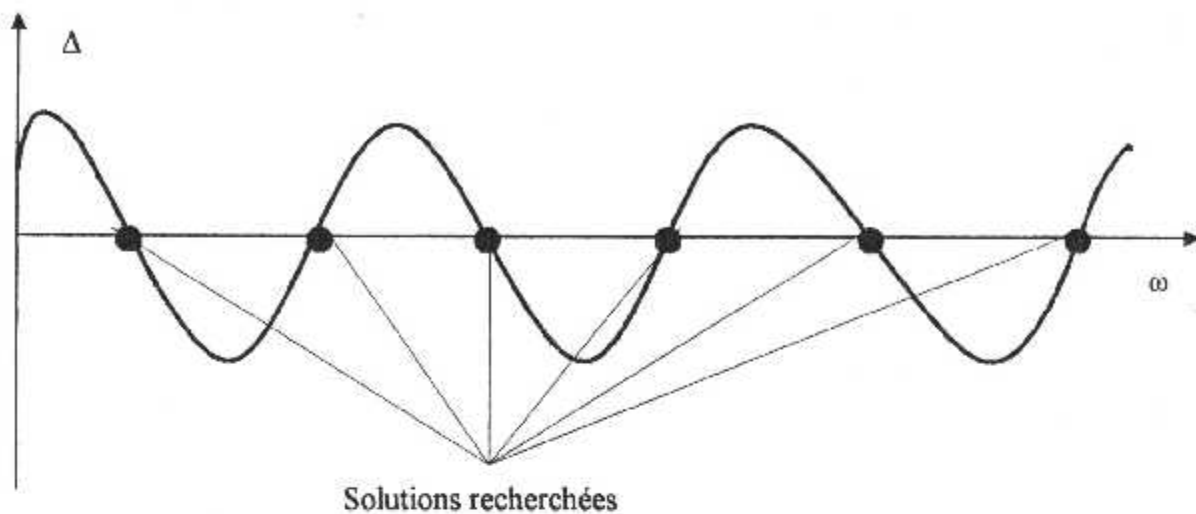
**S** : Valeur maxi de **V** ( test  $V < S$  )

**Z** : Valeur du moment en **0** pour  $T_0 = 1$

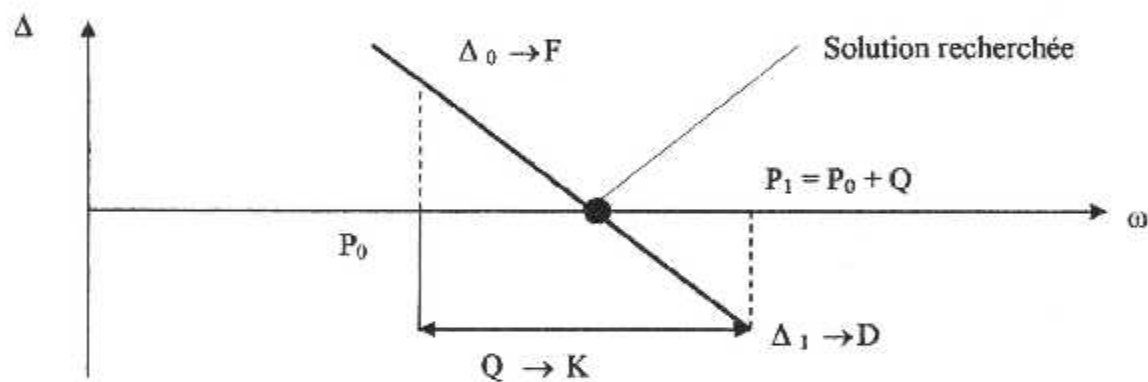


**Recherche de la solution :**

La courbe  $\Delta = f(\omega)$  est de la forme :

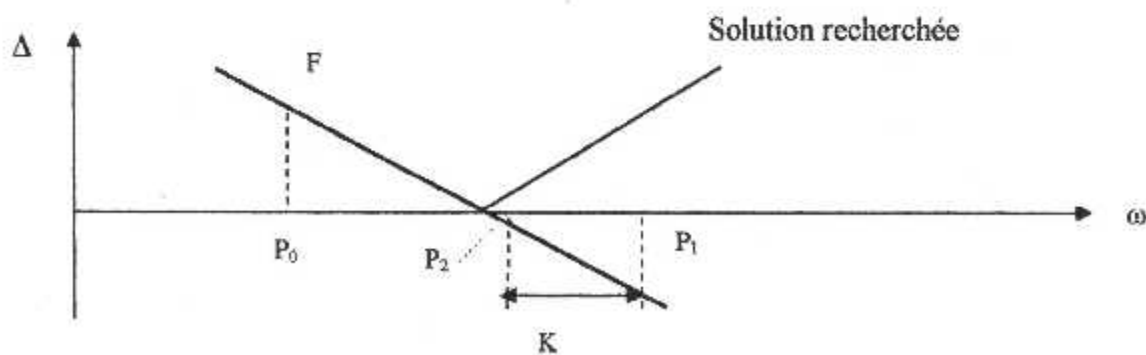


1ere phase : on encadre la solution :  $F \cdot D < 0$



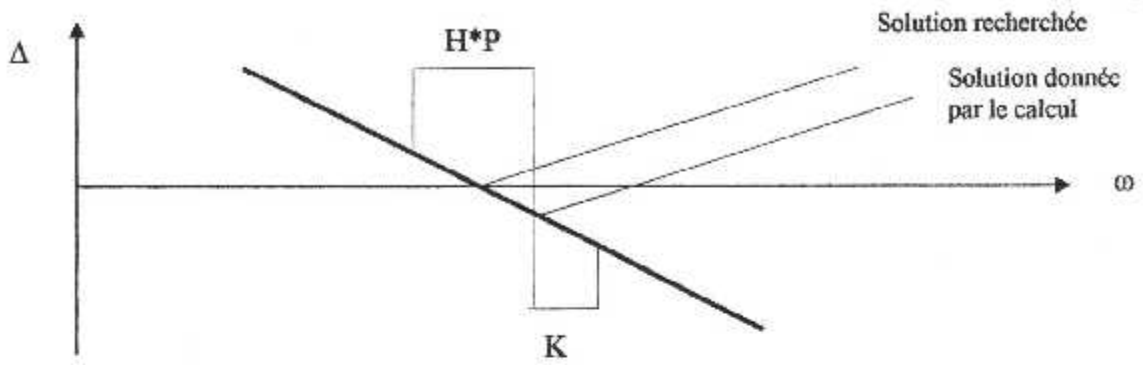
2<sup>ème</sup> phase : on réduit par pas successif l'encastrement de la solution :  $\frac{k}{2} \rightarrow k$  ;

$$P_1 - K \rightarrow P_2$$



3<sup>ème</sup> phase : on obtient la solution avec une précision relative par rapport à **P** :

**H** ( test  $K < H \times P$  )



## Bibliographie

- [1] M. DEL PEDRO , " Mécanique Vibratoire " Edition 1985 .
- [2] B.DROUIN – J . M . SENICOURT – F . LAVASTE – G . SEZANS , " De la mécanique vibratoire classique à la méthode des éléments finis " Edition AFNOR , Volume I , 1993 .
- [3] M . LALANNE – P .BERTHIER – J . DER HAGOPIAN , " Mécanique des vibrations linéaires " Edition MASSON , 1980 .
- [4] R . RALETZ , " Théorie élémentaire de l'hélicoptère " Document aérospatial – Division hélicoptères , Edition 1980 .
- [5] P . LEFORT – J . HAMANN , " L'hélicoptère théorie et pratique " Edition CHIRON, 1980 .
- [6] F . D'AMBRA – G . GENOUX – M . LAFARGUE – J . M . POURADIER , " Cours Hélicoptère " Document de la Société Nationale Industrielle Aérospatiale, Edition 1980 .
- [7] Technique d'Utilisation de l'Hélicoptère " T . U . Hélico " Document Fenwick aviation .
- [8] KIRAD Abdelkader, " Mécanique Générale " , Cours 3<sup>ème</sup> Année Ingénieur, Option Construction , Institut d'Aéronautique , Université de Blida , 2001.
- [9] B . KELLEY – Technique et Science Aéronautique n° 5 – 1951 , " Stabilité des rotors bipales en balancier " Division des Hélicoptères BELL AIRCRAFT CORP .
- [10] H . BARCA – T . BENGHERBIA , " Détermination des modes et fréquences propres d'une aile d'avion par la méthode des éléments finis " encadré par Mr : T . ZEBBICHE , mémoire de fin d'études ( Ingénieur) Institut d'Aéronautique , Université de Blida , 2002 .
- [11] E .HAMADOUCHE , " Théorie des structures " Cours 5<sup>ème</sup> Année Ingénieur, Option Structure , Institut d'Aéronautique , Université de Blida , 2003