

République Algérienne Démocratique & Populaire
Ministère de l'enseignement supérieur
et de la recherche scientifique

Université de SAAD DAHLEB de Blida
Faculté des sciences d'ingénieurs
Département d'aéronautique



Projet de fin d'études
en vue de l'obtention du
diplôme d'ingénieur d'Etat en aéronautique
Option propulsion

Thème:

LA PREDICTION DU COMPORTEMENT
VIBRATOIRE DES LIGNES D'ARBRE
EN TORSION ET EN FLEXION



Proposé et dirigé par: BADER-EDDINE AIMAD-EDDINE

Réalisé par: BAILA FAOUZI

Promotion: 2002/2003

REMERCIEMENTS DEDICACE

Je remercie tout d'abord le bon Dieu, le tout puissant de m'avoir aidé à achever à temps ce travail.

Je formule l'expression de mes profonds remerciements à mon promoteur *M. Badr-eddine Aimad-eddine*.

Je remercie aussi mes parents, et spécialement ma mère, la famille et tous les amis, ainsi que tous les enseignants qui ont contribué à ma formation pendant le cursus universitaire.

Je remercie tout le personnel du département d'aéronautique, et tous ceux qui ont participé de près ou de loin à la réalisation de ce mémoire.

Résumé

Quand une ligne d'arbre fonctionne au voisinage d'une vitesse dangereuse, elle est le siège d'un phénomène de résonance qui est, très souvent, destructeur. Pour éviter ce caractère dynamique gênant dans le régime permanent, nous avons étudiés le comportement vibratoire des rotors en torsion et en flexion.

Abstract

When a line of trees functions in the vicinity of a dangerous speed, it is the seat of the resonance phenomenon which is, very often, destructor. To avoid this awkward dynamic character in the permanent mode, we studied the vibratory behavior of the rotors in torsion and flexion.

ملخص

عندما يكون عمود المحرك في حالة اشتغال بالقرب من سرعة خطيرة، يصبح مقر ظاهرة الرنين، التي تكون في أغلب حالاتها مخربة، لتجنب هذا الطابع في النظام الدائم، قمنا بدراسة السلوك الاهتزازي للتوارات في حالة الالتواء و حالة الانحناء.

TABLE DES MATIERES

NOMENCLATURE

INTRODUCTION

Chapitre n°I

GENERALITE

I.1 Phénomènes vibratoires	1
I.2 Vibrations longitudinales d'une barre prismatique	2
I.3 Vibrations de torsion d'une pièce cylindrique	3
I.4 Vibrations de flexion d'une barre prismatique	4
I.4 Excitations permanentes	5
I.4.1 Balourds	6
I.4.2 Engrenage	7

Chapitre n°II

DYNAMIQUE DES ROTORS EN TORSION

II.1 La modélisation en torsion	8
II.1.1 Hypothèses	8
II.1.2 Principe de la modélisation en torsion	9
II.1.3 Modélisation d'un tronçon axisymétrique cylindrique plein de diamètre constant	11
II.1.3.1 Représentation de la raideur répartie	11

II.1.3.2	Représentation de l'inertie répartie	12
II.1.3.3	Précautions à prendre dans la modélisation	12
II.1.3.4	Longueur équivalente d'un tronçon	12
II.1.4	Modélisation d'un tronçon axisymétrique cylindrique de diamètre constant avec alésage centré	13
II.1.5	Modélisation d'un tronçon axisymétrique conique	13
II.1.5.1	Représentation de la raideur et l'inertie réparties	13
II.1.1.5	Modélisation des hélices	14
II.2	Mise en équation	15
II.2.1	Equations de mouvement	15
II.2.1	Résolution numérique du système aux valeurs propres	19

Chapitre n°III

DYNAMIQUE DES ROTORS EN FLEXION

III.1	Détermination des caractéristiques des éléments de rotor	21
III.1.1	Disque	22
III.1.2	Arbre	24
III.1.2.1	Energie cinétique	24
III.1.2.2	Energie de déformation	25
III.1.2	Palier	27
III.1.4	Balourd	28
III.2	La méthode de Rayleigh-Ritz	30
III.3	La méthode des éléments finis	30
III.3.1	Modélisation par éléments finis	30
III.3.1.1	Disque	31
III.3.1.2	Arbre	31

- Fonction de forme et les matrices élémentaires 32
 - a). Elément finis (barre libre-encastree) 33
 - b). Elément finis (barre encastree -encastree) 38
 - c). Elément finis (barre encastree -libre) 41
- III.3.1.3 Paliers 43
- III.3.1.4 Balourds 43
- III.3.1.4 Equations de mouvement 44

Chapitre n°IV

***DYNAMIQUE DES ROTORS
EN TORSION (APPLICATION)***

- IV.1 Modélisation du turboréacteur en torsion 45
 - IV.1.1 Présentation du turboréacteur 45
 - IV.1.2 Première étape de modélisation en torsion (*Etape initiale*) 47
 - IV.1.2.1 Moment d'inertie équivalent pour les deux compresseurs 48
 - IV.1.2.2 Moment d'inertie équivalent pour la turbine 51
 - IV.1.3 Deuxième étape de modélisation en torsion (*Etape finale*) 53
 - IV.1.4 Résultats de la modélisation (Tableau IV.1) 55
- IV.2 Le comportement vibratoire en torsion 56
 - IV.2.1 Exemple teste 56
 - IV.2.1.1 Les données 58
 - IV.2.1.2 Les Résultats 60
 - IV.2.2 Comportement vibratoire du turboréacteur 62

IV.2.2.1 Les données	62
IV.2.2.2 Les Résultats	63
IV.3 Interprétation des résultats	65

Chapitre n°V

**DYNAMIQUE DES ROTORS
EN FLEXION (APPLICATION)**

V.1 Modèle avec un seul disque	66
V.1.1 La méthode de Rayleigh-Ritz	68
V.1.1.1 Fréquences naturelles en fonction de la vitesse de rotation (diagramme de Campbell)	73
V.1.1.2 Réponse aux forces d'excitation	73
V.1.1 La méthode des éléments finis	75
V.2 Modèle à deux disques (<i>M. E. F.</i>)	77
V.3 Turboréacteur (<i>M. E. F.</i>)	79
V.4 Interprétation des résultats	81
 CONCLUSION GENERALE	 83

LES ANNEXES

BIBLIOGRAPHIE

NOMENCLATURE

E	<i>Module d'Young</i>
f	<i>Fréquence</i>
F	<i>Force</i>
G	<i>Module de cisaillement, centre de gravité</i>
g	<i>Accélération de la pesanteur</i>
I_{10}	<i>Tenseur d'inertie</i>
I	<i>Inertie diamétrale</i>
K	<i>Rigidité</i>
L, l	<i>Longueur</i>
M, m	<i>Masses</i>
N	<i>Vitesse de rotation, nombre de degrés de liberté</i>
Q_1, Q_2	<i>Amplitudes</i>
S	<i>Section</i>
T	<i>Energie cinétique</i>
U	<i>Energie de déformation</i>
δW	<i>Travail virtuel des forces extérieures</i>

δ	<i>Facteurs des déplacements nodaux</i>
ν	<i>Coefficient de poisson</i>
ρ	<i>Masse volumique</i>
σ	<i>Contrainte</i>
ω	<i>Pulsation, fréquences</i>
Ω	<i>Vitesses de rotation</i>
$[M]$	<i>Matrice des masses</i>
$[C]$	<i>Matrice des amortissements</i>
$[K]$	<i>Matrice des raideurs</i>
a	<i>Arbre</i>
b	<i>Balourd</i>
c	<i>Critique</i>
d	<i>Disque</i>

INTRODUCTION

Les machines tournantes sont présentes dans de nombreux secteurs d'activité. Elles sont très diverses : compresseur, turbine, moteur d'avion, pompes, alternateur..., et lorsqu'elles sont soumises à des sollicitations dynamiques créées par des forces ou des déplacements, il peut apparaître des phénomènes vibratoires le plus souvent préjudiciables. L'amplitude des déplacements engendrés est souvent beaucoup plus importante que lors de sollicitations statiques et les contraintes induites peuvent entraîner la rupture. Afin d'éviter ces inconvénients, on ne se contente plus de renforcer les parties de la structure les plus exposées à une dégradation car le souci actuel de compétitivité pousse les constructeurs à l'allègement tout en améliorant les performances. Il n'est donc plus possible d'ignorer les phénomènes vibratoires et il faut essayer de les prévoir pour dimensionner les structures au stade du bureau d'études ou pour les modifier judicieusement si une fois construites elles ont des caractéristiques dynamiques gênantes.

Dans ce mémoire on s'intéresse au comportement dynamique des lignes d'arbre en torsion et en flexion, un rappel de notions fondamentales les phénomènes vibratoires et quelques définitions nécessaires sont introduits dans le premier chapitre, le second chapitre concerne l'étude des vibrations en torsion considérées isolément, c'est-à-dire qu'elles sont découplées vis-à-vis des vibrations axiales et transversales. La dynamique des rotors en flexion est effectuée dans troisième chapitre, deux méthodes numériques; *la méthode de Rayleigh-Ritz* afin de permettre un développement analytique mettant en évidence les phénomènes de base et la méthode des *éléments finis* lorsqu'il s'agit de prévoir le comportement vibratoire des machines réelles, dans les deux derniers chapitres on traite des applications sur la torsion et la flexion respectivement, et on termine par une conclusion générale suivie de deux annexes, et une bibliographie.

Chapitre n°1

GENERALITE

I.1 Phénomènes vibratoires

On dit qu'un ensemble mécanique est le siège de vibrations s'il est animé de petits mouvements au voisinage d'une *position d'équilibre*. Une vibration est définie à l'aide d'une ou de plusieurs *fréquences*; elle est également caractérisée par son *amplitude*.

La vibration la plus simple peut être traduite mathématiquement à l'aide de la fonction sinusoïdale $A\cos(\omega t + \varphi)$; la fréquence f est le nombre de fois que le phénomène se reproduit en une seconde :

$$f = \frac{1}{T} = \frac{\omega}{2\pi} \dots\dots\dots (I.1)$$

où T est appelée *période* de la vibration; l'amplitude est la valeur maximale $|A|$ prise par la fonction sinusoïdale et ω est la *pulsation* de cette fonction sinusoïdale.

De manière générale, les vibrations rencontrées dans la pratique ne sont pas représentables par une seule fonction sinusoïdale : souvent, ce sont des sommes de plusieurs fonctions de ce type ayant chacune une fréquence et une amplitude; ces fonctions sinusoïdales sont les *composantes* de la vibration étudiée.

Le problème des vibrations d'ensembles mécaniques complexes doit être rattaché à certains schémas simplificateurs : le plus simple d'entre eux est constitué d'une masse et d'un ressort; la vibration de ce modèle peut être *libre* ou *forcée*.

Si la vibration est libre, aucun apport d'énergie n'est fourni à l'ensemble mécanique au cours de son évolution, et la vibration résulte de perturbations initiales telles que celles qui seront décrites dans les essais

élémentaires. Si ce modèle élémentaire n'est l'objet d'aucun *amortissement*, la vibration est périodique, ce qui constitue un schéma idéal de la réalité (l'échelle moléculaire des phénomènes naturels en fournit toutefois quelques exemples). Dans la plupart des ensembles mécaniques concrètement rencontrés, l'amortissement a pour effet une décroissance de l'amplitude de la vibration qui tend, en un délai plus ou moins long, vers une valeur nulle; de telles vibrations, qui disparaissent ainsi au bout d'un certain temps, sont dites *vibrations transitoires*.

Par opposition aux vibrations libres qui viennent d'être définies, les vibrations forcées se répètent de manière périodique par apport extérieur d'une énergie qui se substitue dans l'ensemble mécanique à l'énergie dissipée par amortissement. En général, la fréquence de la vibration forcée est liée de manière simple à la fréquence de distribution de l'énergie par le réservoir extérieur.

Le plus souvent, les chocs ou toute autre excitation entraînent des vibrations qui peuvent être considérées comme parasites et qu'il y a donc lieu d'éliminer ou de réduire de manière à les rendre supportables ou non dangereuses. Cette élimination ou cette réduction peut se faire soit à la source même des vibrations, soit dans un environnement plus ou moins proche de cette source, le choix de l'emplacement du système antivibratoire étant une question d'opportunité technologique.

I.2 Vibrations longitudinales d'une barre prismatique

Le déplacement $u(x,t)$ de la section droite d'une barre prismatique (figure I.1) qui a pour abscisse x à l'équilibre, est régi par l'équation aux dérivées partielles :

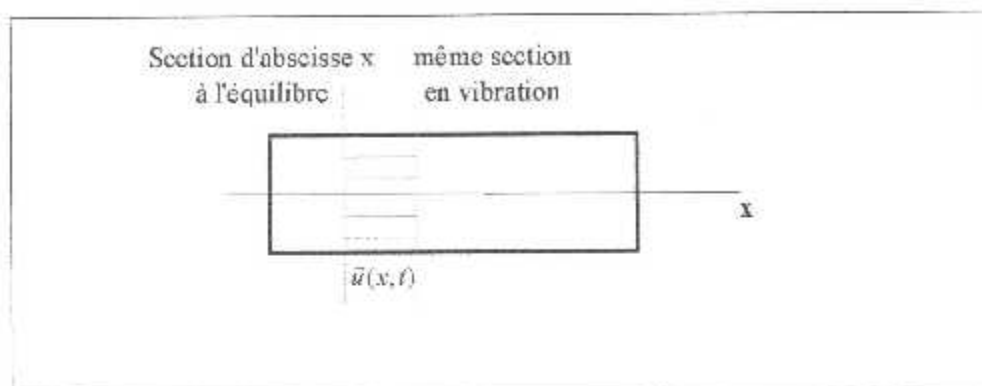


Figure I.1 Barre prismatique : déplacement

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{E}{\rho} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad (1.2)$$

Le matériau dont la barre est constituée a pour *module de Young* E et pour masse spécifique volumique ρ .

1.3 Vibrations de torsion d'une pièce cylindrique

L'angle α dont tourne une section d'abscisse x au cours des vibrations de torsion d'une pièce cylindrique (figure I.2) est une fonction $\alpha(x, t)$ dont les variations sont régi par l'équation aux dérivées partielles :

$$\frac{\partial^2 \alpha}{\partial t^2} = \frac{G}{\rho} \frac{\partial^2 \alpha}{\partial x^2} \quad (1.3)$$

dans laquelle $G = \frac{E}{2(1 + \nu)}$ est le *module de Coulomb (cisaillement)* et

ν le *coefficient de Poisson* du matériau dont est constituée la barre.

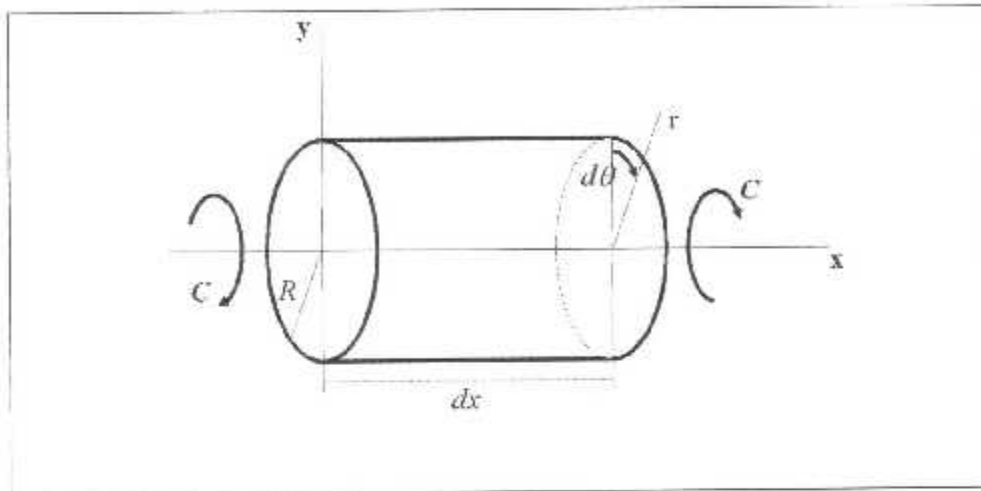


Figure I.2 Torsion pure d'une poutre

I.4 Vibrations de flexion d'une barre prismatique

Les vibrations de flexion d'une barre prismatique sont représentées sur la figure I.3. L'équation aux dérivées partielles des vibrations correspondantes est :

$$\frac{\partial^4 y(x,t)}{\partial x^4} + \frac{\rho S}{EI} \frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial t^2} = 0 \dots\dots\dots (I.4)$$

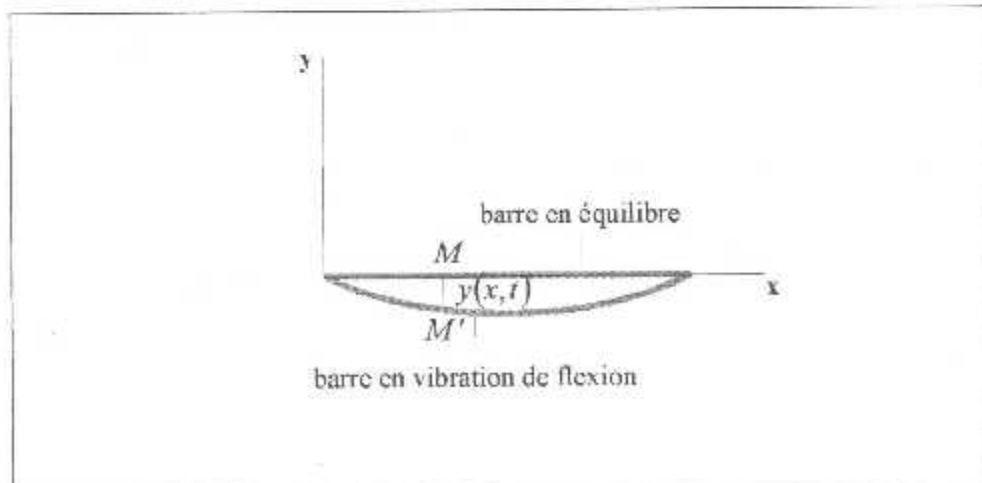


Figure I.3 Barre prismatique : vibration en flexion

On cherche une solution de la forme : $y(x,t) = X(x)T(t)$, et l'on trouve

$$\frac{d^2 T(t)}{dt^2} + \omega^2 T(t) = 0, \quad \frac{d^4 X(x)}{dx^4} = \omega^2 \frac{\rho S}{EI} X(x)$$

Dans beaucoup de questions, on se contente de représenter un système continu par une équation pendulaire, ce qui permet déjà d'en déterminer la pulsation propre fondamentale (*méthode de Rayleigh*). Ce résultat n'est qu'approché, mais permet d'obtenir rapidement une solution simple et justifie les développements effectués. [6] et [9]

I.4 Excitations permanentes

Il est bon de rappeler l'évidence suivant laquelle, si un système réel vibre de manière permanente, c'est qu'il est excité. Nous nous intéressons dans ce paragraphe, aux *excitations permanentes* dont la variation au cours du temps est périodique. Par rapport à la partie de l'installation modélisée, ces excitations sont extérieures et, elles doivent apporter de manière périodique une quantité d'énergie mécanique qui sera, dans le même temps, transformée en chaleur par les phénomènes dissipatifs. Ces derniers sont toujours présents dans la réalité, aussi faibles soient-ils.

Par un modèle linéaire, toute excitation peut donc être représentée par une somme d'excitations sinusoïdales élémentaires ou harmoniques. Chacune d'elle, noté F_q est définie par sa pulsation Ω_q , son amplitude C_q et, sa phase ϕ_q mesurée par rapport à une origine des temps donnée.

Elle s'écrit sous la forme :

$$F_q = C_q \cos(\Omega_q t + \phi_q) \dots \dots \dots (1.5)$$

avec $\Omega_g = q\Omega$

Ω (rad/s) vitesse de rotation du rotor,

q Ordre de l'harmonique.

Parmi ces trois caractéristiques, la pulsation est de loin la plus importante dans la pratique. Il est assez facile de l'identifier et, sa valeur sera définie dans chaque cas abordé. [1]

I.4.1 Balourds

L'équilibrage imparfait des rotors peut être représenté par une excentration du centre de gravité G d'un tronçon de masse m . Cette excentration de valeur e est mesurée par rapport à l'axe géométrique de révolution matérialisé en générale par la droite passant par les centres géométrique des deux liaisons supportant le rotor. Pour une vitesse de rotation N donnée, les effets d'inertie centrifuge s'appliquant en G font fléchir le rotor. La combinaison de ces effets conduit à une excitation périodique due au moment du poids mg par rapport à l'axe de rotation.

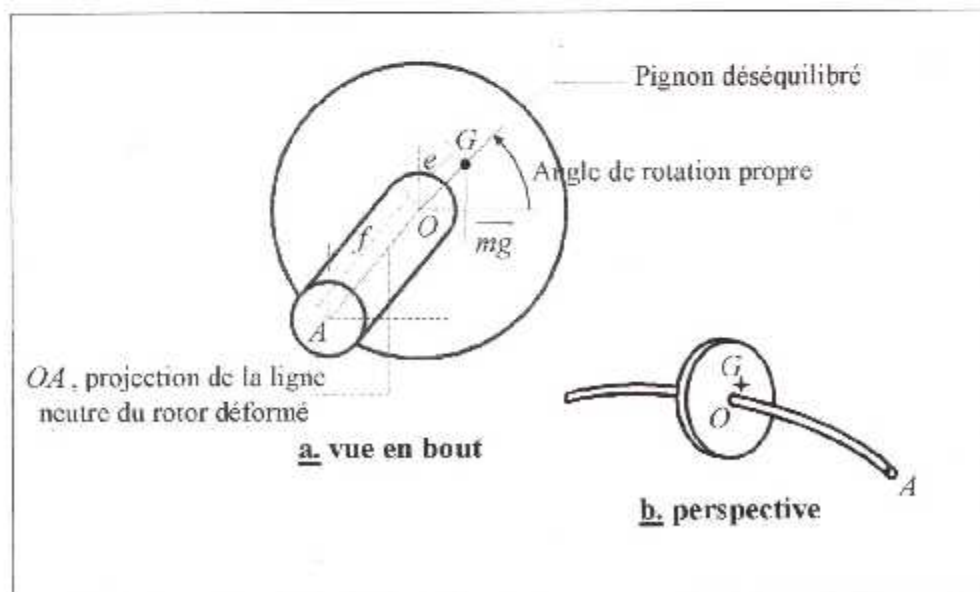


Figure 1.4 Rotor fléchi sous l'effet d'un balourd

La figure I.4 représente, vue en bout, un rotor à axe horizontal, fléchi sous l'effet des forces d'inertie centrifuge s'appliquant au centre de gravité G d'un pignon déséquilibré de masse m .

I.4.2 Engrenage

L'engrènement d'une roue portant Z dents et tournant à la vitesse N (tr/min) produit sur son axe une excitation en vibration de torsion dont la pulsation fondamentale exprimée en radian par seconde est telle que [1]

$$\Omega_e = Z \frac{\pi N}{30} \dots\dots\dots (I.6)$$

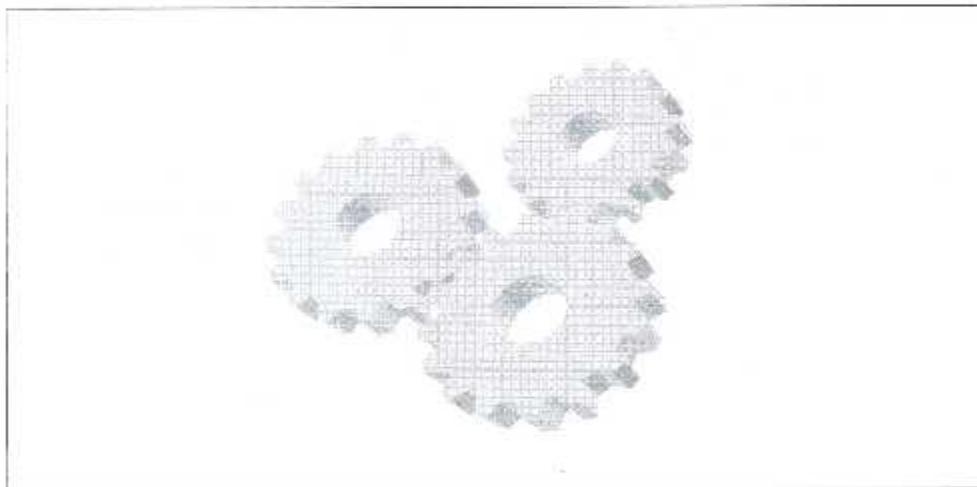


Figure I.5 Les engrenages

La transmission du couple par contact entre les dentures s'effectue avec un nombre de dents en prise qui n'est pas constant dans le temps, ce qui entraîne une excitation d'engrènement périodique à chaque changement du nombre de contacts. Les harmoniques de cette excitation ont pour pulsations $\Omega_e, 2\Omega_e, 3\Omega_e, \dots$

Chapitre n°III

DYNAMIQUE DES ROTORS EN TORSION

L'objet de ce chapitre est l'étude des vibrations en torsion considérées isolément, c'est-à-dire qu'elles sont découplées vis-à-vis des vibrations axiales et transversales.

II.1 La modélisation en torsion

La modélisation géométrique est un aspect très important, en effet, c'est le point de départ de nombreuses autres fonctions, tant au niveau des études qu'au niveau de la fabrication, elle aussi délicate et doit être abordée avec rigueur et méthode. L'article qui suit a pour objectif la présentation des différentes règles à mettre en œuvre dans le but de modéliser en torsion une installation complexe par un simple modèle, constitué de disques indéformables placés aux extrémités de ressorts de torsion sans masse, (on se limite sur les cas qui nous intéressent dans notre projet seulement).

II.1.1 Hypothèses

- Le système obéit à la loi de Hooke (les déformations sont proportionnelles aux efforts).
- Seules les déformations de torsion sont prises en compte.
- Le système est conservatif.
- L'axe de rotation est un axe de référentiel fixe.
- les centres de gravité des disques appartiennent à l'axe de rotation.

II.1.2 Principe de la modélisation en torsion

Une ligne d'arbre est constituée d'un ensemble de pièces en liaison, soit entre elle -liaison rotor-rotor- soit, entre le bâti et un rotor – liaison rotor-bâti -. On représente de *manière discrète* la répartition réelle de la raideur en torsion et de l'inertie par rapport à l'axe de rotation. *Le modèle est constitué d'une succession de disques indéformables placés aux extrémités de ressorts de torsion sans masse.* La ligne d'arbre est découpée suivant un ensemble de tronçons en nombre et taille adaptés en fonction de ce que l'on cherche et, de la complexité de la géométrie des rotors. Pour chaque tronçon, on identifie sa rigidité *torsionnelle équivalente* et son *moment d'inertie équivalent* par rapport à l'axe de rotation. Le modèle de chaque rotor est obtenu par assemblage des éléments précédents ; une *liaison rotor-rotor* peut être représentée que par un ressort de torsion, son moment d'inertie étant nul, c'est l'exemple d'un compact entre deux roues dentées élastiques (on suppose que le contact est permanent). De manière symétrique, une *roue dentée* est remplacée par un disque d'inertie seule, sa rigidité en torsion étant très grande par rapport à celle des arbres.

La figure **II.1** montre un exemple de modélisation d'un réducteur en supposant que les dentures des roues dentées sont souples. En rigueur, les bagues intérieures des roulements sont aussi à intégrer au niveau des inerties. Leur influence sur la rigidité du tronçon est à quantifier en fonction de l'ajustement prévu.

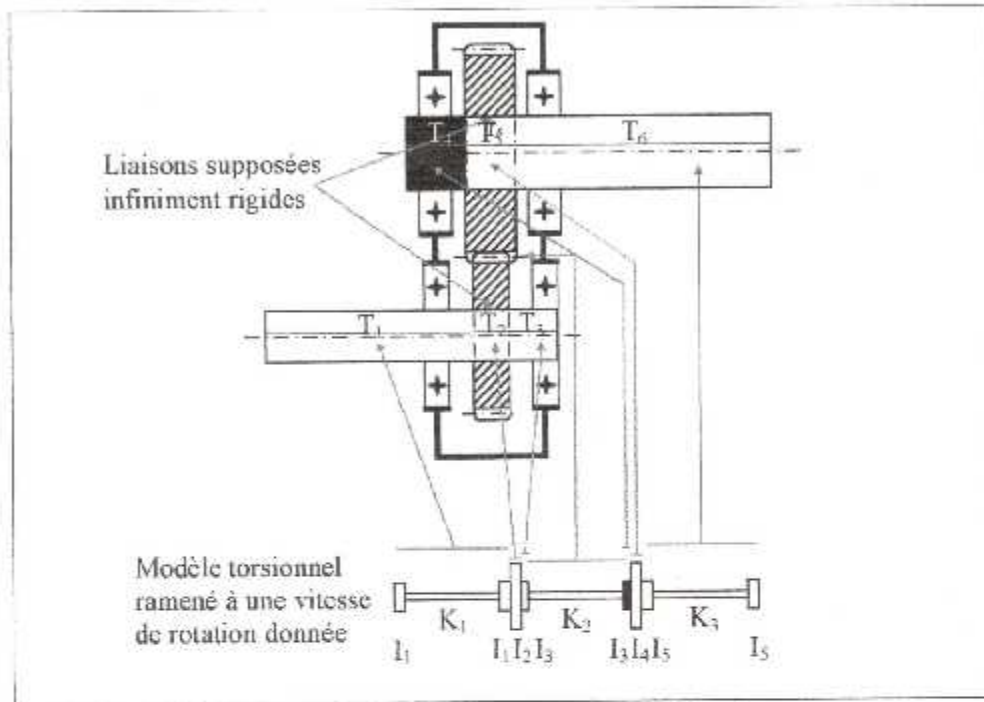


Figure II.1 Modèle d'un réducteur de vitesse pour l'étude des vibrations de torsion

Tronçons réels	Moment d'inertie équivalent	Rigidité équivalente en torsion
T_1	$2I_1$	K_1
T_2	I_2	Infinie
T_3	I_3	Non déformé
Liaison entre dents	Nul	K_2
T_4	I_4	Non déformé
T_5	I_5	Infinie
T_6	$2I_6$	K_3

II.1.3 Modélisation d'un tronçon axisymétrique cylindrique plein de diamètre constant

II.1.3.1 Représentation de la raideur répartie

Elle est prise en compte par un ressort de torsion sans masse dont la rigidité est calculée à partir des résultats de la résistance des matériaux qui suppose que toute section reste plane après déformation. Dans la mesure où aucun couple extérieur n'est appliqué en cours de tronçon, le moment de torsion M_t dans le tronçon est constant ainsi que l'angle de torsion unitaire θ , on a :

$$M_t = G \times J \times \theta \dots\dots\dots (II.1)$$

ou $M_t = G \times J \times \frac{\alpha}{L}$

G (Pa) module de cisaillement transversal du matériau du tronçon,

$J = \frac{\pi \times D^4}{32}$ (m^4) moment quadratique polaire de la section de diamètre D par rapport à l'axe de rotation,

L (m) longueur du tronçon,

α (rd) Angle de rotation relatif entre les deux sections limitant le tronçon.

La rigidité équivalente K_{eq} en $N.m/rd$ s'écrit donc :

$$K_{eq} = \frac{G \times J}{L} \dots\dots\dots (II.2)$$

de sorte que $M_t = K_{eq} \times \alpha$

II.1.3.2 Représentation de l'inertie répartie

L'inertie répartie du tronçon est représentée par deux disques indéformables identiques placés aux extrémités du ressort de torsion. Si ρ (kg/m^3) est la masse volumique du tronçon et $D(m)$ son diamètre constant, ces inerties ponctuelles I_{eq} , exprimées en $kg.m^2$ ou $N.m.s^2$, se calculent ainsi :

$$I_{eq} = \frac{1}{2} \left(\rho \times \frac{\pi \times D^3}{4} \times L \times \frac{D^2}{8} \right) \dots \dots \dots (II.3)$$

II.1.3.3 Précautions à prendre dans la modélisation

Le nombre de tronçons choisi doit permettre une représentation satisfaisante de l'inertie réelle répartie. Un critère pratique applicable impose que la valeur moment d'inertie concentré obtenu pour chaque tronçon soit plus petite ou égale au plus petit moment d'inertie concentré modélisé dans l'installation.

En outre, plus le nombre de nœuds de la déformée, module à prendre en compte, est grand, plus la discrétisation sera fine.

II.1.3.4 Longueur équivalente d'un tronçon

La valeur numérique K ($N.m/rd$) de la rigidité torsionnelle d'un tronçon peut s'exprimer comme la longueur l_{eq} (m) d'un tronçon cylindrique de diamètre D_{eq} (m) et de module de cisaillement transversal G_{eq} (Pa) qui aurait une rigidité égale. Cette longueur équivalente l_{eq} permet de contrôler plus facilement les ordres de grandeur relatifs aux rigidités trouvées numériquement. Son calcul est aisé et on a :

$$l_{eq} = \frac{G_{eq} \times J_{eq}}{K} \dots \dots \dots (II.4)$$

$$J_{eq} = \frac{\pi \times D_{eq}^4}{32} \quad (m^4)$$

moment quadratique polaire de torsion de la section circulaire équivalente.

II.1.4 Modélisation d'un tronçon axisymétrique cylindrique de diamètre constant avec alésage centré

Par combinaison de sections comme le présente la figure II.2, il est possible de déterminer les caractéristiques cherchées en « retranchant » l'inertie ou la rigidité de l'alésage à l'inertie ou la rigidité du tronçon cylindrique plein.

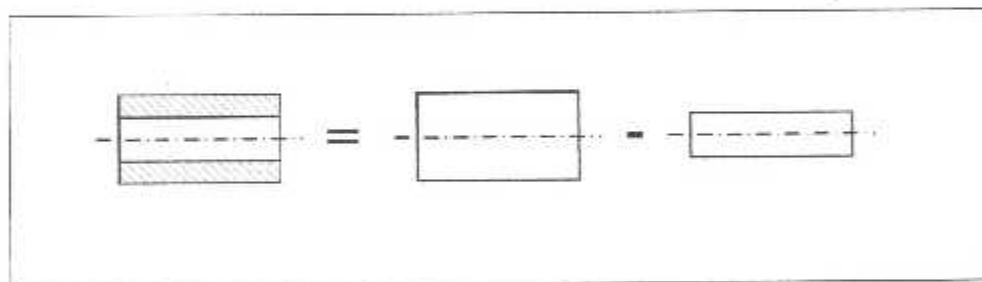


Figure II.2 Calcul des caractéristiques d'un tronçon alésé

II.1.5 Modélisation d'un tronçon axisymétrique conique

II.1.5.1 Représentation de la raideur et l'inertie réparties

De manière usuelle, la discrétisation d'un arbre conique conduit à des tronçons dans la longueur l est choisi pour que la variation relative entre les diamètres limites ne dépasse pas 15% (soit $D_2/D_1 \leq 1,15$) (figure II.3).

La rigidité et l'inertie sont calculées en considérant le tronçon cylindrique de même longueur et le diamètre moyen $D_m = (D_1 + D_2)/2$.

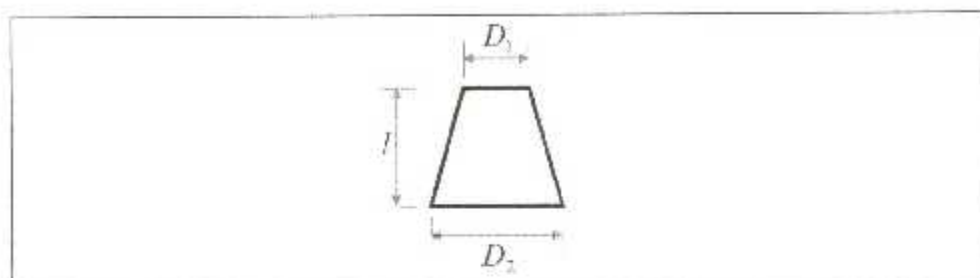


Figure II.3 Géométrie d'un tronçon conique

Remarque

Il est possible de calculer exactement la rigidité torsionnelle d'un arbre conique d'un arbre sans avoir la nécessité de la découper en tronçons. Si l est sa longueur, D_1 et D_2 ses diamètres minimal et maximal, on obtient :

$$l_{eq} = l \times \frac{G_{eq}}{G} \times \frac{D_{eq}^4}{3(D_1 - D_2)} \times \left(\frac{1}{D_1^3} - \frac{1}{D_2^3} \right) \dots\dots\dots (II.5)$$

La rigidité est exprimée en terme de longueur équivalente l_{eq} d'un tronçon d'arbre cylindrique de diamètre D_{eq} dont le module de cisaillement transversal est G_{eq} . Toutes les longueurs sont exprimées en mètre et les modules de cisaillement en pascal.

Par contre, la longueur du tronçon considéré doit permettre une représentation satisfaisante de la répartition de l'inertie.

II.1.1.5 Modélisation des hélices

A cause du type de modélisation choisie, on ne peut pas prendre en compte les vibrations éventuelles des pales. On suppose donc l'hélice

indéformable.

L'hélice est discrétisée suivant une succession d'éléments dm dont la masse est située à une distance r constante de l'axe de rotation (figure II.4). L'inertie élémentaire de chaque élément est donc $r^2 dm$. L'inertie de l'hélice est calculée en sommant la contribution de chacun de ces éléments. [1]

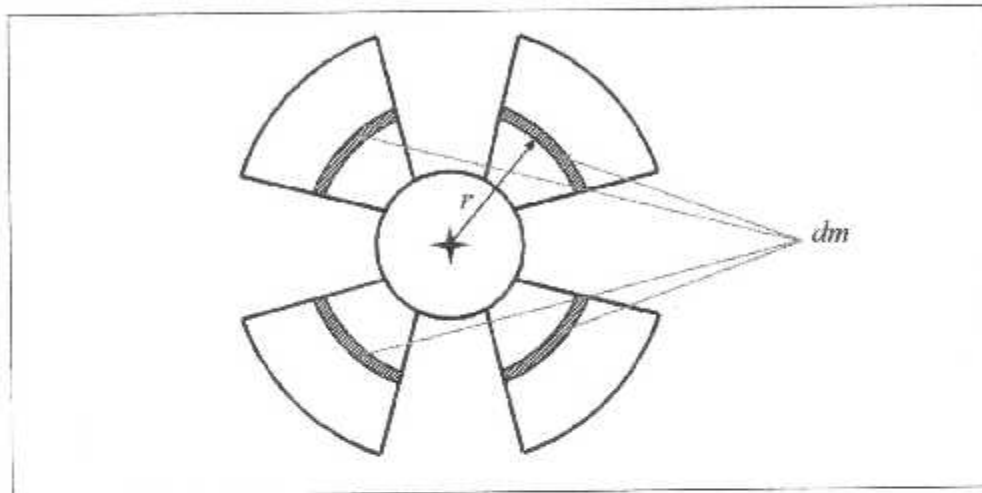


Figure II.4 Méthode de calcul du moment d'inertie d'une hélice

II.2 Mise en équation

II.2.1 Equations de mouvement

Dans la majorité des cas, le modèle final obtenu peut être représenté simplement comme l'assemblage de ressorts de torsion sans masse dont on connaît la rigidité K et la connectivité. Les extrémités de chacun d'eux sont liées à des disques d'inertie indéformables dont on a identifié le moment d'inertie I . Le paramétrage caractérise la position et la vitesse angulaire de chaque disque du modèle. A partir des expressions de l'énergie cinétique et de la fonction de la force écrites en fonction des paramètres de vitesse et de déplacement indépendants, le formalisme de Lagrange permet d'obtenir le

système différentiel représentant les vibrations libres de torsion.

Pour illustrer le propos, on se place dans le cas d'un modèle non ramifié composé de n disques (figure II.5).

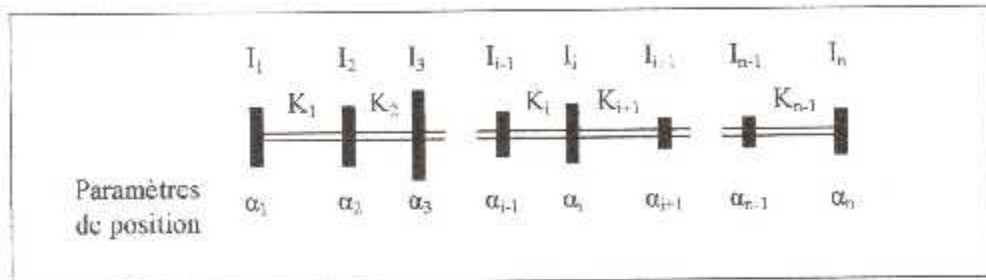


Figure II.5 Modèle torsionnel générique d'une ligne d'arbre

L'énergie cinétique E_C et la fonction de force U s'écrivent :

$$E_C = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n I_i \dot{\alpha}_i^2 \dots\dots\dots (II.6)$$

$$U = - \sum_{i=1}^{n-1} \frac{1}{2} K_i (\alpha_i - \alpha_{i+1})^2 \dots\dots\dots (II.7)$$

L'équation différentielle obtenue pour les paramètres $\alpha_i, \dot{\alpha}_i$ est :

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial E_C}{\partial \dot{\alpha}_i} \right) - \frac{\partial E_C}{\partial \alpha_i} = \frac{\partial U}{\partial \alpha_i} \dots\dots\dots (II.8)$$

Si $i = 1$

$$I_1 \ddot{\alpha}_1 + K_1 \alpha_1 - K_1 \alpha_2 = 0$$

Si $1 < i < n$

$$I_i \ddot{\alpha}_i - K_{i-1} \alpha_{i-1} + (K_{i-1} + K_i) \alpha_i - K_i \alpha_{i+1} = 0$$

Si $i = n$

$$I_n \ddot{\alpha}_n - K_{n-1} \alpha_{n-1} + K_{n-1} \alpha_n = 0$$

L'écriture du système différentiel sous forme matricielle conduit à :

$$[M]\{\ddot{\alpha}\} + [K]\{\alpha\} = 0 \quad \text{(II.9)}$$

avec

$\{\ddot{\alpha}\}$ vecteur des accélérations $\ddot{\alpha}_i$,

$\{\alpha\}$ vecteur des déplacements α_i ,

$[M]$ matrice de masse diagonale (figure II.6),

$[K]$ matrice de rigidité symétrique (figure II.7).

I_1					
	I_2				
					I_n

Figure II.6 – structure de la matrice de masse du modèle de la figure II.5

K_1	$-K_1$					
$-K_1$	$K_1 + K_2$	$-K_2$				
	$-K_2$	$K_2 + K_3$	$-K_3$			
				$-K_{n-2}$	$K_{n-2} + K_{n-1}$	K_{n-1}
					$-K_{n-1}$	$-K_{n-1}$

Figure II.6 – structure de la matrice de rigidité du modèle de la figure II.5

Remarque

Dans la mesure où modèle est ramifié, la démarche de mise en équations reste identique. La matrice de rigidité $[K]$ obtenue n'est plus tridiagonale mais, dans tous les cas, elle reste symétrique.

II.2.2 Résolution numérique du système aux valeurs propres

On cherche des solutions non identiquement nulles représentant à partir des conditions initiales données les vibrations possibles des disques du modèle soumis à aucune excitation extérieure permanente. Ces solutions sont de la forme :

$$\{\alpha\} = \{a\} \cos \omega t \dots\dots\dots (II.10)$$

ω (rad / s) Pulsation du mouvement libre.

En insérant ces solutions (II.10) dans le système différentiel (II.9), on obtient le système aux valeurs propres suivant :

$$-\omega^2 [M] \{a\} + [K] \{a\} = 0 \dots\dots\dots (II.11)$$

Les solutions obtenues définissent les pulsations propres ω_i telles que :

$$\det([K] - \omega_i^2 [M]) = 0 \dots\dots\dots (II.12)$$

Pour chaque pulsation propre ω_i , le vecteur propre associé $\{\Phi_i\}$ est déterminé. Il est solution du système linéaire :

$$(-\omega_i^2 [M] + [K]) \{\Phi_i\} = 0 \dots\dots\dots (II.12)$$

Remarque

La première pulsation propre trouvée est nulle, car elle correspond au mouvement de rotation de corps solide pour les rotors composant la ligne d'arbre. [1]

Chapitre n° VIII

DYNAMIQUE DES ROTORS EN FLEXION

Pour prédire correctement le comportement vibratoire en flexion, nous avons utilisé deux méthodes numériques : la méthode de *Rayleigh-Ritz* afin de permettre un développement analytique mettant en évidence les phénomènes de base et la méthode des *éléments finis* lorsqu'il s'agit de prévoir le comportement dynamique des machines réelles.

III.1 Détermination des caractéristiques des éléments de rotor

Les éléments de base d'un rotor sont : disque, arbre et palier. Le balourd qui ne peut pas être complètement évité doit aussi être pris en compte. Les expressions de l'énergie cinétique sont nécessaires pour caractériser disque, arbre et balourd. L'énergie de déformation est nécessaire pour caractériser l'arbre. L'expression du travail virtuel des forces dues aux paliers permet de déterminer les forces généralisées. Les équations générales du mouvement d'un rotor sont obtenues à partir des étapes suivantes :

- L'énergie cinétique T , l'énergie de déformation U et le travail virtuel des forces extérieures δW sont calculés pour tous les éléments du système ;
- Les équations de Lagrange sont appliquées sous la forme suivante :

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_i} + \frac{\partial U}{\partial q_i} = Fq_i \dots \dots \dots (III.1)$$

où $N(1 \leq i \leq N)$ est le nombre de degrés de liberté, q_i sont les coordonnées généralisées et où $\left(\frac{\partial}{\partial t} \right)$: par rapport aux temps.

- Deux méthodes numériques sont choisies : la *méthode de Rayleigh-Ritz* pour mettre en évidence les phénomènes ou la *méthode des éléments finis* pour les applications industrielles ;

III.1.1 Disque

Le disque est supposé rigide et donc caractérisé par son énergie cinétique. $R_0(XYZ)$ est un repère galiléen et $R(xyz)$ un repère fixé au disque (figure III.1). Le système de coordonnées XYZ par l'intermédiaire des angles ψ , θ , ϕ . Pour déterminer la position du disque, on tourne initialement d'un angle ψ autour de l'axe Z , puis d'un angle θ autour du nouvel axe x , noté x_1 ; enfin d'un angle ϕ autour de l'axe de rotation propre du disque y . Le vecteur de rotation instantanée traduisant la position du repère xyz est :

$$\overline{\omega_{R/R_0}} = \dot{\psi}Z + \dot{\theta}x_1 + \dot{\phi}y \dots\dots\dots (III.2)$$

où Z , x_1 et y sont les vecteurs unitaires des axes \overline{OZ} , $\overline{Ox_1}$, \overline{Oy} . L'énergie cinétique du disque correspondant à son mouvement autour du centre de masse O est calculée en utilisant le repère R . Dans ce repère, le vecteur rotation instantanée est :

$$\overline{\omega_{R/R_0}} = \begin{bmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\dot{\psi} \cos \theta \sin \phi + \dot{\theta} \cos \phi \\ \dot{\phi} + \dot{\psi} \sin \phi \\ \dot{\psi} \cos \theta \cos \phi + \dot{\theta} \sin \phi \end{bmatrix} \dots\dots\dots (III.3)$$

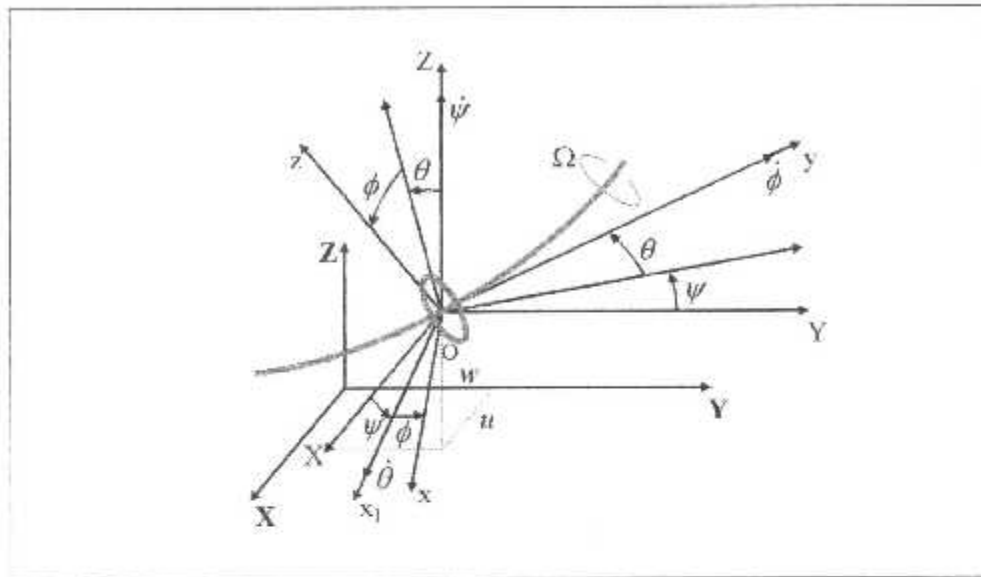


Figure III.1 Repère de référence du disque sur l'arbre flexible

Soient u et w les coordonnées suivant X , Z de O dans R_0 , la coordonnée suivant Y est constante. Par ailleurs, la masse du disque est M_d et son tenseur d'inertie en O , comme xyz sont les directions principales d'inertie, a comme expression :

$$I_{IO} = \begin{bmatrix} I_{dx} & 0 & 0 \\ 0 & I_{dy} & 0 \\ 0 & 0 & I_{dz} \end{bmatrix} \dots\dots\dots (III.4)$$

L'expression générale de l'énergie cinétique du disque s'écrit alors :

$$T_d = \frac{1}{2} M_d (\dot{u}^2 + \dot{w}^2) + \frac{1}{2} (I_{dx} \omega_x^2 + I_{dy} \omega_y^2 + I_{dz} \omega_z^2) \dots\dots\dots (III.5)$$

et peut être simplifiée car le disque est symétrique ($I_{dx} = I_{dy}$) ; les angles θ et ψ petits et la vitesse angulaire constante ($\dot{\phi} = \Omega$). L'équation (III.5) devient alors

$$T_d = \frac{1}{2} M_d (\dot{u}^2 + \dot{w}^2) + \frac{1}{2} I_{dx} (\dot{\theta}^2 + \dot{\psi}^2) + \frac{1}{2} I_{dy} (\Omega^2 + 2\Omega\dot{\psi}\theta) \dots \dots \text{(III.6)}$$

où le terme $\frac{1}{2} I_{dy} \Omega^2$, qui est constant, n'a pas d'influence sur les équations du mouvement et représente l'énergie cinétique du disque tournant à la vitesse Ω , dans le cas où tous les autres déplacements sont nuls. Le dernier terme, $I_{dy} \Omega \dot{\psi} \theta$ représente l'effet gyroscopique, (Coriolis).

III.1.2 Arbre

L'arbre est représenté par une poutre de section circulaire, il est caractérisé par l'énergie de cinétique et l'énergie de déformation.

III.1.2.1 Energie cinétique

La formulation générale de l'énergie cinétique de l'arbre est une extension de celle du disque (III.6). Pour un élément de longueur L , de section droite constante, l'expression de l'énergie cinétique est :

$$T_a = \frac{\rho S}{2} \int_0^L (\dot{u}^2 + \dot{w}^2) dy + \frac{\rho I}{2} \int_0^L (\dot{\psi}^2 + \dot{\theta}^2) dy + \rho L \Omega^2 + 2\rho I \Omega \int_0^L \dot{\psi} \theta dy \dots \dots \dots \text{(III.7)}$$

Où ρ est la masse par unité de volume, S est l'aire de la section droite de la poutre et I le moment d'inertie diamétral.

La première intégrale de (III.7) est l'expression classique d'une poutre de flexion ; la seconde intégrale correspond à l'effet secondaire d'inertie de rotation (poutre de Timoshenko) ; le terme $\rho L \Omega^2$ est constant et a une contribution nulle dans les équations du mouvement, enfin la dernière intégrale représente l'effet gyroscopique.

III.1.2.2 Energie de déformation

Le point C est le centre géométrique de la poutre, $B(x, z)$ est un point de la section droite (figure III.2), E est le module d'Young, ε et σ sont les déformations et les contraintes, u^* et w^* sont les déplacements du centre géométrique par rapport aux axes x, z . Si les termes du second ordre ne sont pas pris en compte, la *déformation longitudinale du point B* s'écrit :

$$\varepsilon = -x \frac{\partial^2 u^*}{\partial y^2} + -z \frac{\partial^2 w^*}{\partial y^2} \dots\dots\dots (III.8)$$

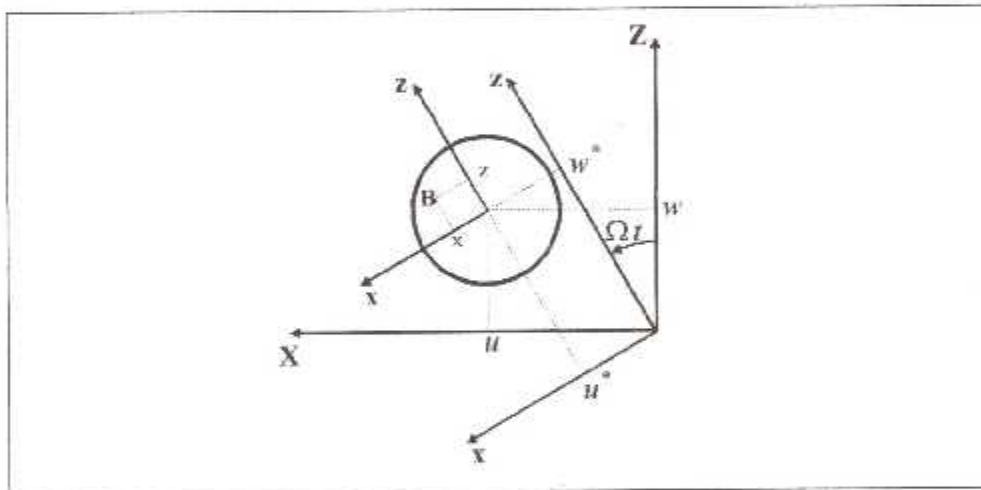


Figure III.2 Section droite de l'arbre

L'énergie de déformation à comme expression :

$$U_\sigma = \frac{1}{2} \int_V \sigma^t \sigma d\tau \dots\dots\dots (III.9)$$

Où « t » est le symbole matriciel de transposition.

La relation entre contraintes et déformations est :

$$\sigma = E\varepsilon \dots\dots\dots (III.10)$$

Alors :

$$U_d = \frac{E}{2} \int_0^L \varepsilon^2 d\tau \dots\dots\dots (III.11)$$

Compte tenu de (III.8) l'énergie de déformation s'écrit :

$$U_d = \frac{E}{2} \int_0^L \int_S \left(-x \frac{\partial^2 u^*}{\partial y^2} + -z \frac{\partial^2 w^*}{\partial y^2} \right)^2 dS dy \dots\dots\dots (III.12)$$

$$= \frac{E}{2} \int_0^L \int_S \left[x^2 \left(\frac{\partial^2 u^*}{\partial y^2} \right)^2 + z^2 \left(\frac{\partial^2 w^*}{\partial y^2} \right)^2 + 2 \times x z \frac{\partial^2 u^*}{\partial y^2} \frac{\partial^2 w^*}{\partial y^2} \right] dS dy \dots (III.13)$$

Par suite de la symétrie de la section d'intégrale correspondant au troisième terme de (III.13) est nulle. En introduisant les inerties diamétrales de la section droite par rapport à x et z on a :

$$I_x = \int_S z^2 dS \dots\dots\dots (III.14)$$

$$I_z = \int_S x^2 dS \dots\dots\dots (III.15)$$

et l'énergie de déformation a donc comme expression :

$$U_d = \frac{E}{2} \int_0^L \left[I_z \left(\frac{\partial^2 u^*}{\partial y^2} \right)^2 + I_x \left(\frac{\partial^2 w^*}{\partial y^2} \right)^2 \right] dy \dots\dots\dots (III.16)$$

Pour éviter des termes périodiques, explicitement en fonction du temps,

il est nécessaire compte tenu des propriétés des paliers (§ III.1.3), d'exprimer l'énergie de déformation en fonction de u et w composantes du déplacement dans R_y . Le passage de u, w à u^*, w^* s'écrit (figure III.2) :

$$u^* = u \cos \Omega t - w \sin \Omega t \dots\dots\dots (III.17)$$

$$w^* = u \sin \Omega t + w \cos \Omega t \dots\dots\dots (III.18)$$

L'équation (III.16) devient alors :

$$U_a = \frac{EI}{2} \int_0^L \left[I_y \left(\cos \Omega t \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - \sin \Omega t \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)^2 + I_x \left(\sin \Omega t \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \cos \Omega t \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)^2 \right] dy \dots\dots\dots (III.19)$$

Finalement, pour le cas le plus courant d'un arbre symétrique (où $I = I_x = I_y$), l'énergie de déformation s'écrit :

$$U_a = \frac{EI}{2} \int_0^L \left[\left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)^2 \right] dy \dots\dots\dots (III.20)$$

III.1.2 Palier

Les caractéristiques de raideur et d'amortissement sont supposées connues. Le travail virtuel δW des forces extérieures agissant sur l'arbre se met sous la forme (figure III.3) :

$$\delta W = -k_{xx} u \delta u - k_{yy} w \delta w - k_{xy} w \delta u - k_{yx} u \delta w - c_{xx} \dot{u} \delta u - c_{yy} \dot{w} \delta w - c_{xy} \dot{w} \delta u - c_{yx} \dot{u} \delta w \dots\dots\dots (III.21)$$

ou sous une forme plus compacte :

$$\delta W = F_u \delta u + F_w \delta w \dots\dots\dots (III.22)$$

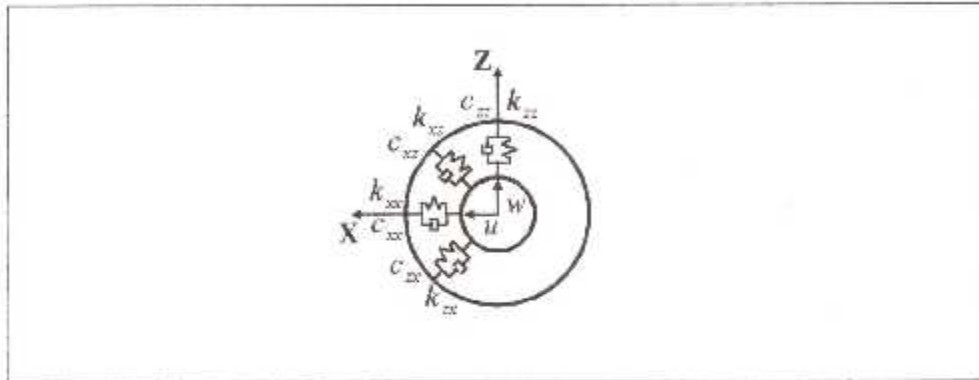


Figure III.3 Amortissement et raideur d'un palier

F_u et F_w sont les composantes de la force généralisée et s'expriment sous la forme matricielle suivante :

$$\begin{bmatrix} F_u \\ F_w \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} k_{xx} & k_{xz} \\ k_{zx} & k_{zz} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ w \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} c_{xx} & c_{xz} \\ c_{zx} & c_{zz} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{u} \\ \dot{w} \end{bmatrix} \dots\dots\dots (III.23)$$

Fréquemment en particulier dans le cas de palier hydrodynamique : $k_{xx} \neq k_{zz}$; $c_{xx} \neq c_{zz}$, et $k_{xz} \neq k_{zx}$; $c_{xz} \neq c_{zx}$.

III.1.4 Balourd

Le balourd (figure III.4) est dû à une masse m_b située à la distance d du centre géométrique de l'arbre et son énergie cinétique doit être calculée. La masse reste dans un plan perpendiculaire à l'axe y et sa coordonnée selon l'axe y est constante.

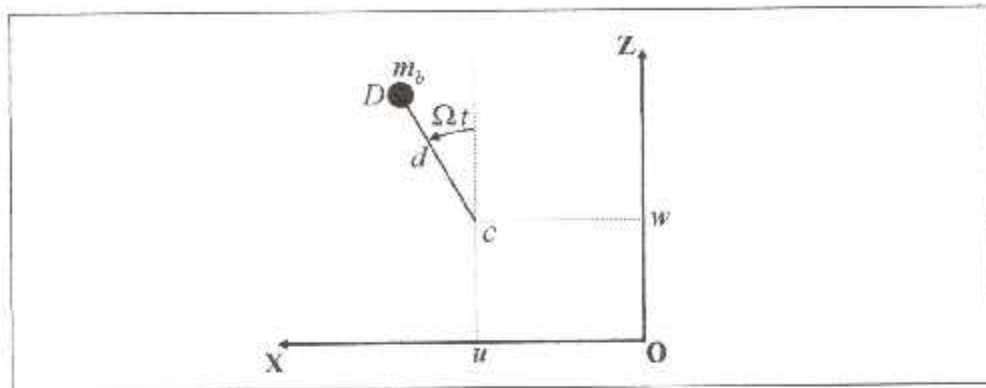


Figure III.4 Balourd

Dans le repère R_c les coordonnées de la masse sont :

$$\overrightarrow{OD} = \begin{pmatrix} u + d \sin \Omega t \\ \text{Cte} \\ w + d \cos \Omega t \end{pmatrix} \dots\dots\dots (III.24)$$

d'où la vitesse :

$$V = \frac{d\overrightarrow{OD}}{dt} = \begin{pmatrix} \dot{u} + d\Omega \cos \Omega t \\ 0 \\ \dot{w} - d\Omega \sin \Omega t \end{pmatrix} \dots\dots\dots (III.25)$$

et l'énergie cinétique :

$$T_b = \frac{m_b}{2} (\dot{u}^2 + \dot{w}^2 + \Omega^2 d^2 + 2\Omega \dot{u} \cos \Omega t - 2\Omega \dot{w} \sin \Omega t) \dots\dots\dots (III.26)$$

Le terme $m_b \Omega^2 d^2 / 2$ est constant et donc sans influence sur les équations du mouvement. La masse m_b est sans commune mesure avec celle du rotor, alors l'énergie cinétique peut se mettre sous la forme :

$$T_i \approx m_b \Omega d (\dot{w} \cos \Omega t - \dot{w} \sin \Omega t) \dots \dots \dots (III.27)$$

L'application des équations de Lagrange fournit la force tournante due au balourd.

III.2 La méthode de Rayleigh-Ritz

Elle est utilisée pour réduire le nombre de degrés de liberté n du système, et permet de déterminer simplement une valeur approchée de la plus basse fréquence de résonance d'un système avec une précision satisfaisante.

Le principe de la méthode est le suivant : à partir d'une hypothèse raisonnable sur les déplacements des points du système (vérifiant essentiellement les conditions de la cinématique), on déduit une expression de l'énergie cinétique et de l'énergie potentielle. L'application des équations de Lagrange conduit alors aux équations du mouvement. [6]

III.3 La méthode des éléments finis

La détermination du comportement statique ou dynamique de structures réelles ne peut s'effectuer que numériquement à cause de la complexité des géométries et de certaines conditions aux limites. Dans ce cas la méthode des éléments finis est très utilisée, est également efficace en dynamique des rotors.

III.3.1 Modélisation par éléments finis

Il est nécessaire de définir les éléments finis permettant de modéliser les rotors : disques, arbres, paliers et de représenter les forces extérieures, en particulier celles dues aux balourds.

III.3.1.1 Disque

Chaque nœud possède quatre degrés de liberté : deux déplacements u , w , suivant X et Z , et deux pentes θ et ψ autour de X et Z . Le vecteur $\{\delta\}$ des déplacements nodaux du centre du disque est :

$$\{\delta\} = \{u, w, \theta, \psi\} \dots\dots\dots (III.28)$$

L'application des équations de Lagrange à l'expression (III.6) :

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\delta}} \right) - \frac{\partial T}{\partial \delta} = \begin{bmatrix} M_d & 0 & 0 & 0 \\ 0 & M_d & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I_{dx} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I_{dz} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{u} \\ \ddot{w} \\ \ddot{\theta} \\ \ddot{\psi} \end{bmatrix} + \Omega \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -J_{dy} \\ 0 & 0 & J_{dy} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{u} \\ \dot{w} \\ \dot{\theta} \\ \dot{\psi} \end{bmatrix} \dots\dots\dots (III.29)$$

la première matrice est la matrice de masse et la seconde la matrice gyroscopique.

III.3.1.2 Arbre

L'arbre est modélisé par des éléments de poutre de section circulaire constante. L'élément fini classique utilisé a 2 nœuds et 4 degrés de liberté par nœuds ; les matrices élémentaires ont donc 8 degrés de liberté. Les relations pentes-déplacements sont :

$$\theta = \frac{\partial w}{\partial y} \dots\dots\dots (III.30)$$

$$\psi = -\frac{\partial u}{\partial y} \dots\dots\dots (III.31)$$

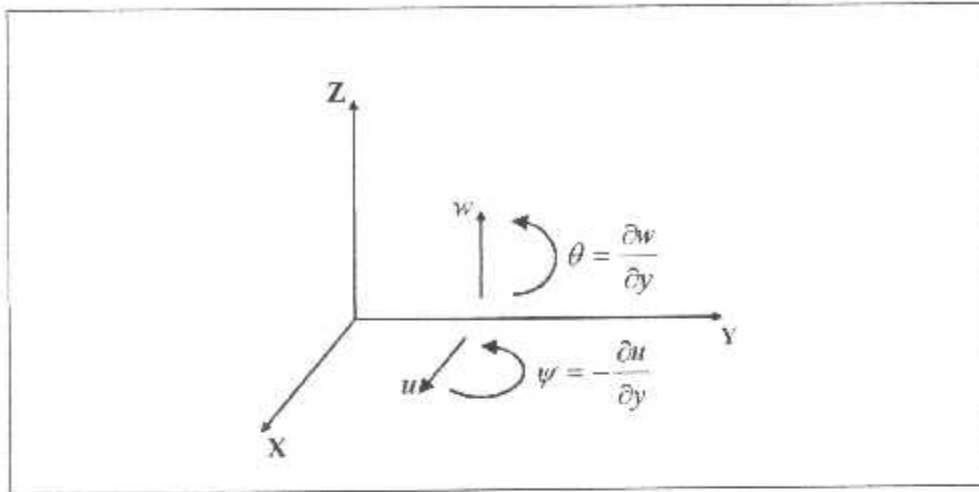


Figure III.5 Degrés de liberté

et le vecteur des déplacements nodaux est :

$$\{\delta\} = \{u_1, w_1, \theta_1, \psi_1, u_2, w_2, \theta_2, \psi_2\}^T \dots\dots\dots (III.32)$$

De plus, on définit les vecteurs δu , δw tels que :

$$\{\delta u\} = \{u_1, \psi_1, u_2, \psi_2\}^T \dots\dots\dots (III.33)$$

$$\{\delta w\} = \{w_1, \theta_1, w_2, \theta_2\}^T \dots\dots\dots (III.34)$$

• **Fonction de forme et les matrices élémentaires**

On va présenter les fonctions de forme et les matrices élémentaires pour les différents éléments finis (barres) utilisés dans notre projet.

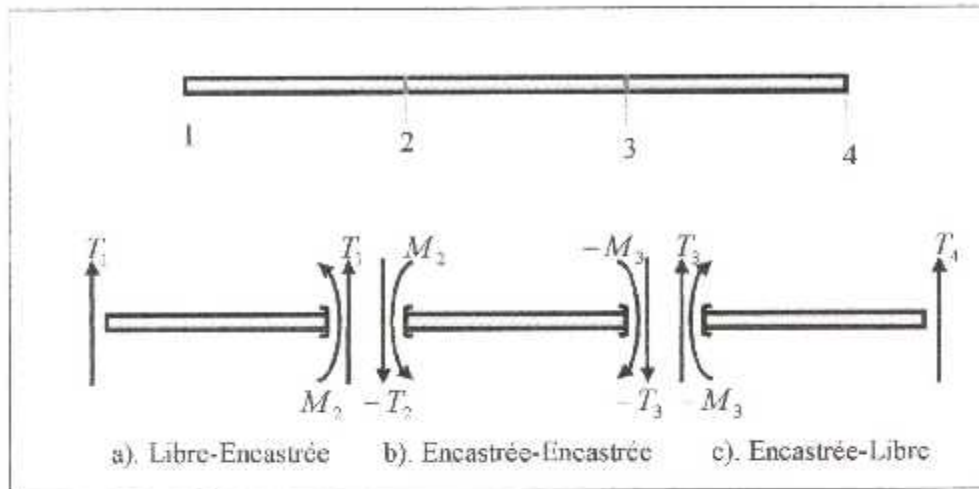


Figure III.8 Les différents éléments finis (barres)

a). Élément finis (barre libre-encastree)

Comme il y a quatre déplacements nodaux par plan la fonction de déplacement choisie pour w est :

$$w(y) = \alpha_1 + \alpha_2 y + \alpha_3 y^2 + \alpha_4 y^3 \dots\dots\dots (III.35)$$

et la pente a comme expression :

$$\theta(y) = \frac{\partial w(y)}{\partial y} = \alpha_2 + 2\alpha_3 y + 3\alpha_4 y^2 \dots\dots\dots (III.36)$$

Conditions aux limites :

$$y = 0$$

$$w(0) = \alpha_1 = w_1$$

Nœud 1: $M_f(0) = 0 \Rightarrow \frac{d^2 w(y)}{dy^2} \Big|_{y=0} = 0$

$$\Rightarrow \alpha_3 = 0$$

$$y = L$$

$$\text{Nœud 2 : } w(L) = \alpha_1 + \alpha_2 L + \alpha_3 L^2 + \alpha_4 L^3 = w_2$$

$$\theta(L) = \alpha_2 + 2\alpha_3 L + 3\alpha_4 L^2 = \theta_2$$

D'où $w(y) = N_{21}(y)w_1 + N_{22}(y)\theta_1 + N_{23}(y)w_2 + N_{24}(y)\theta_2 - N_2(y)\delta w$

avec

$$N_{21}(y) = 1 - \frac{3y}{2L} + \frac{y^3}{2L^3}$$

$$N_{22}(y) = 0$$

$$N_{23}(y) = \frac{3y}{2L} - \frac{y^3}{2L^3}$$

$$N_{24}(y) = -\frac{y}{2} + \frac{y^3}{2L^2}$$

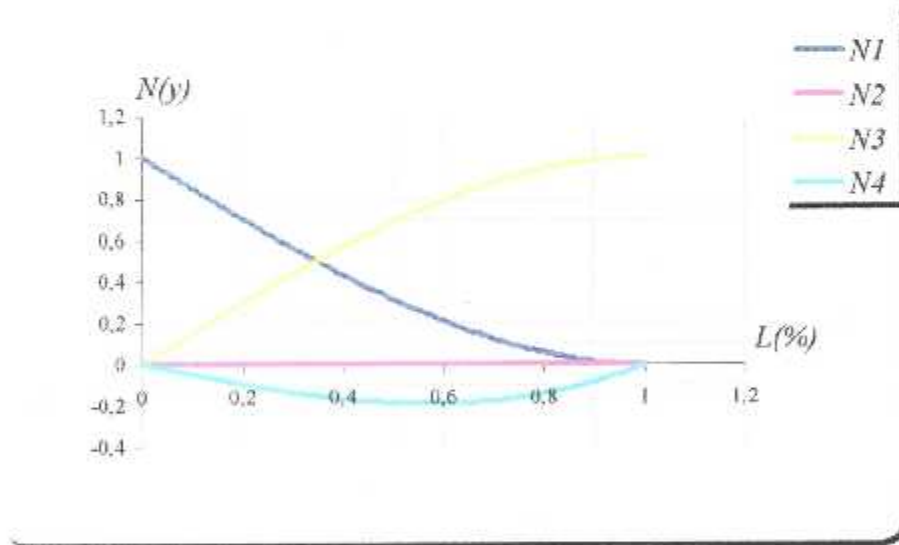


Figure III.9 Les fonctions d'interpolation pour un élément finis (barre libre-encastree)

$$N_2(y) = \left[1 - \frac{3y}{2L} + \frac{y^3}{2L^3}; 0; \frac{3y}{2L} - \frac{y^3}{2L^3}; -\frac{y}{2} + \frac{y^3}{2L^2} \right] \dots \dots \dots \text{(III.37)}$$

De la même façon on obtient :

$$N_1(y) = \left[1 - \frac{3y}{2L} + \frac{y^3}{2L^3}; 0; \frac{3y}{2L} - \frac{y^3}{2L^3}; \frac{y}{2} - \frac{y^3}{2L^2} \right] \dots \dots \dots \text{(III.38)}$$

où $N_1(y)$ et $N_2(y)$ sont les fonctions de forme d'une poutre en flexion (libre-encastree).

L'énergie cinétique est obtenue à partir de l'expression (III.7) qui donne :

$$T_s = \frac{\rho S}{2} \int_0^l \left[[\delta \dot{u}] N_1' N_1 [\delta \dot{u}] + [\delta \dot{w}] N_2' N_2 [\delta \dot{w}] \right] dy + \frac{\rho I}{2} \int_0^l \left[[\delta \dot{u}] \frac{dN_1'}{dy} \frac{dN_1}{dy} [\delta \dot{u}] + [\delta \dot{w}] \frac{dN_2'}{dy} \frac{dN_2}{dy} [\delta \dot{w}] \right] dy - 2\rho I \Omega \int_0^l \left[[\delta \dot{u}] \frac{dN_1'}{dy} \frac{dN_2}{dy} [\delta \dot{w}] \right] dy + \rho I L \Omega^2 \dots \dots \dots \text{(III.39)}$$

et en substituant (III.37) et (III.38) ainsi que leurs dérivées dans (III.39) on aboutit à la forme compacte :

$$T_s = \frac{1}{2} [\delta \dot{u}] M_1 [\delta \dot{u}] + \frac{1}{2} [\delta \dot{w}] M_2 [\delta \dot{w}] + \frac{1}{2} [\delta \dot{u}] M_3 [\delta \dot{u}] + \frac{1}{2} [\delta \dot{w}] M_4 [\delta \dot{w}] + \frac{1}{2} [\delta \dot{u}] M_5 [\delta \dot{w}] + \rho I L \Omega^2 \dots \dots \dots \text{(III.40)}$$

où les matrices $[M_1]$ et $[M_2]$ sont les matrices classiques de masse, $[M_3]$ et $[M_4]$ représentent l'effet secondaire d'inertie de rotation de la section par rapport à un diamètre et $[M_5]$ l'effet gyroscopique. Le dernier terme qui est une constante a une contribution nulle lors de l'application des équations de Lagrange à (III.40) ; alors :

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T_a}{\partial \dot{\delta}} \right) - \frac{\partial T_a}{\partial \delta} - ([M] + [M_s]) \{\ddot{\delta}\} + [C] \{\dot{\delta}\} \dots \dots \dots \text{(III.41)}$$

où $[M]$ et $[M_s]$ sont déduites respectivement de $[M_1]$, $[M_2]$ et $[M_3]$,

$[M_4]$ où $[C]$ vient de $[M_s]$. Les matrices sont :

$$[C] = \frac{\rho I \Omega}{5I} \begin{bmatrix} 0 & -6 & 0 & 0 & 0 & 6 & -L & 0 \\ 6 & 0 & 0 & 0 & -6 & 0 & 0 & -L \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 & 0 & 0 & -6 & L & 0 \\ -6 & 0 & 0 & 0 & 6 & 0 & 0 & L \\ L & 0 & 0 & 0 & -L & 0 & 0 & -L^2 \\ 0 & L & 0 & 0 & 0 & -L & L^2 & 0 \end{bmatrix} \dots \dots \dots \text{(III.42)}$$

$$[M_s] = \frac{\rho I}{5I} \begin{bmatrix} 6 & 0 & 0 & 0 & -6 & 0 & 0 & -L \\ 0 & 6 & 0 & 0 & 0 & -6 & L & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -6 & 0 & 0 & 0 & 6 & 0 & 0 & L \\ 0 & -6 & 0 & 0 & 0 & 6 & -L & 0 \\ 0 & L & 0 & 0 & 0 & -L & L^2 & 0 \\ -L & 0 & 0 & 0 & L & 0 & 0 & L^2 \end{bmatrix} \dots \dots \dots \text{(III.43)}$$

$$[M] = \frac{\rho S L}{420} \begin{bmatrix} 99 & 0 & 0 & 0 & 58.5 & 0 & 0 & 16.5L \\ 0 & 99 & 0 & 0 & 0 & 58.5 & -16.5L & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 58.5 & 0 & 0 & 0 & 204 & 0 & 0 & 36L \\ 0 & 58.5 & 0 & 0 & 0 & 204 & -36L & 0 \\ 0 & -16.5L & 0 & 0 & 0 & -36L & 8L^2 & 0 \\ 16.5L & 0 & 0 & 0 & 36L & 0 & 0 & 8L^2 \end{bmatrix} \dots \dots \dots \text{(III.44)}$$

L'énergie de déformation est obtenue à partir de l'expression (20) qui donne :

$$U_a = \frac{EI}{2} \int_0^L \left[[\delta u]^T \frac{d^2 N_1'}{dy^2} \frac{d^2 N_1}{dy^2} [\delta u] + [\delta w]^T \frac{d^2 N_2'}{dy^2} \frac{d^2 N_2}{dy^2} [\delta w] \right] dy \dots\dots\dots (III.45)$$

Après intégration, on a sous une forme compacte :

$$U_a = \frac{1}{2} [\delta u]^T K_1 [\delta u] + \frac{1}{2} [\delta w]^T K_2 [\delta w] \dots\dots\dots (III.46)$$

où $[K_1]$ et $[K_2]$ sont les matrices classiques de raideur.

Il est fréquemment nécessaire de prendre en compte l'effet de cisaillement qui est caractérisé par la quantité

$$\bar{a} = \frac{12EI}{GS_r L^2} \dots\dots\dots (III.47)$$

où G le module de cisaillement est

$$G = \frac{E}{2(1+\nu)} \dots\dots\dots (III.48)$$

ν le coefficient de Poisson et $S_r \approx S$, la section réduite.

L'effet de cisaillement modifie évidemment la matrice classique qui peut être transformée pour inclure aussi le cisaillement. La matrice de raideur a alors comme expression :

$$[K] = \frac{EI}{(1+a)L^3} \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 & -3 & 0 & 0 & -3L \\ 0 & 3 & 0 & 0 & 0 & -3 & 3L & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -3 & 0 & 0 & 0 & 3 & 0 & 0 & 3L \\ 0 & -3 & 0 & 0 & 0 & 3 & -3L & 0 \\ 0 & 3L & 0 & 0 & 0 & -3L & (3+a)L^2 & 0 \\ -3L & 0 & 0 & 0 & 3L & 0 & 0 & (3+a)L^2 \end{bmatrix} \dots\dots\dots \text{(III.49)}$$

Lorsque l'effet de cisaillement n'est pas pris en compte, $a = 0$.

b). Élément finis (barre encastree -encastree)

Conditions aux limites :

$$y = 0$$

$$\text{Nœud 1 : } w(0) = \alpha_1 = w_1$$

$$\theta(0) = \alpha_2 = \theta_1$$

$$y = L$$

$$\text{Nœud 2 : } w(L) = \alpha_1 + \alpha_2 L + \alpha_3 L^2 + \alpha_4 L^3 = w_2$$

$$\theta(L) = \alpha_2 + 2\alpha_3 L + 3\alpha_4 L^2 = \theta_2$$

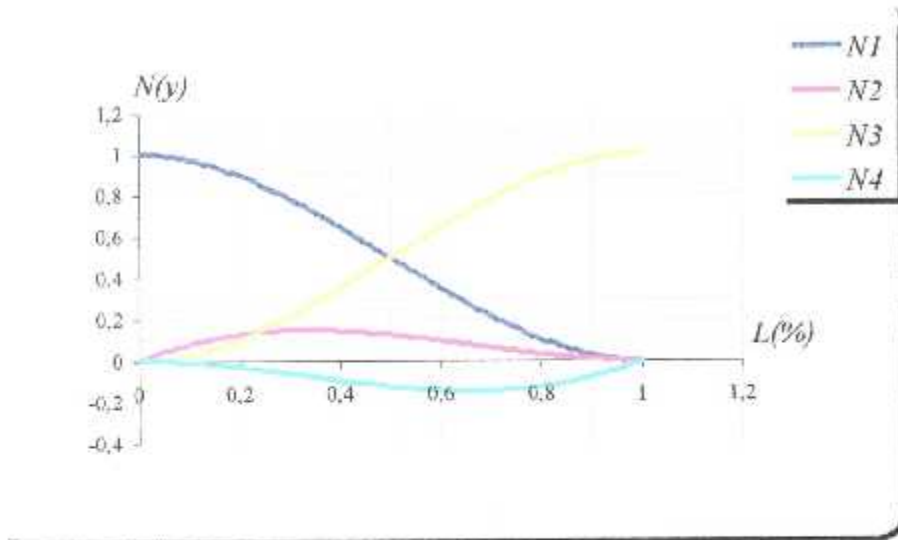


Figure III.10 Les fonctions d'interpolation pour un élément finis (barre encastée -encastée)

$$N_2(y) = \left[1 - \frac{3y^2}{L^2} + \frac{2y^3}{L^3}; y - \frac{2y^2}{L} + \frac{y^3}{L^2}; \frac{3y^2}{L^2} - \frac{2y^3}{L^3}; -\frac{y^2}{L} + \frac{y^3}{L^2} \right] \dots (III.50)$$

$$N_1(y) = \left[1 - \frac{3y^2}{L^2} + \frac{2y^3}{L^3}; -y + \frac{2y^2}{L} - \frac{y^3}{L^2}; \frac{3y^2}{L^2} - \frac{2y^3}{L^3}; \frac{y^2}{L} - \frac{2y^3}{L^2} \right] \dots (III.51)$$

$$[C] = \frac{\rho I \Omega}{30L} \begin{bmatrix} 0 & -36 & -3L & 0 & 0 & 36 & -3L & 0 \\ 36 & 0 & 0 & -3L & 36 & 0 & 0 & -3L \\ 3L & 0 & 0 & -4L^2 & -3L & 0 & 0 & L^2 \\ 0 & 3L & 4L^2 & 0 & 0 & -3L & -L^2 & 0 \\ 0 & 36 & 3L & 0 & 0 & -36 & 3L & 0 \\ -36 & 0 & 0 & 3L & 36 & 0 & 0 & 3L \\ 3L & 0 & 0 & L^2 & -3L & 0 & 0 & -4L^2 \\ 0 & 3L & -L^2 & 0 & 0 & -3L & 4L^2 & 0 \end{bmatrix} \dots (III.52)$$

$$[M_s] = \frac{\rho I}{30L} \begin{bmatrix} 36 & 0 & 0 & -3L & -36 & 0 & 0 & -3L \\ 0 & 36 & 3L & 0 & 0 & -36 & 3L & 0 \\ 0 & 3L & 4L^2 & 0 & 0 & -3L & -L^2 & 0 \\ -3L & 0 & 0 & 4L^2 & 3L & 0 & 0 & -L^2 \\ -36 & 0 & 0 & 3L & 36 & 0 & 0 & 3L \\ 0 & -36 & -3L & 0 & 0 & 36 & -3L & 0 \\ 0 & 3L & -L^2 & 0 & 0 & -3L & 4L^2 & 0 \\ -3L & 0 & 0 & -L^2 & 3L & 0 & 0 & 4L^2 \end{bmatrix} \dots\dots\dots (III.52)$$

$$[M] = \frac{\rho s L}{420L} \begin{bmatrix} 156 & 0 & 0 & -22L & 54 & 0 & 0 & 13L \\ 0 & 156 & 22L & 0 & 0 & 54 & -13L & 0 \\ 0 & 22L & 4L^2 & 0 & 0 & 13L & -3L^2 & 0 \\ -22L & 0 & 0 & 4L^2 & -13L & 0 & 0 & -3L^2 \\ 54 & 0 & 0 & -13L & 156 & 0 & 0 & 22L \\ 0 & 54 & 13L & 0 & 0 & 156 & -22L & 0 \\ 0 & -13L & -3L^2 & 0 & 0 & -22L & 4L^2 & 0 \\ 13L & 0 & 0 & -3L^2 & 22L & 0 & 0 & 4L^2 \end{bmatrix} \dots\dots\dots (III.53)$$

$$[K] = \frac{EI}{(1+a)L^3} \begin{bmatrix} 12 & 0 & 0 & -6L & -12 & 0 & 0 & -6L \\ 0 & 12 & 6L & 0 & 0 & 12 & 6L & 0 \\ 0 & 6L & (4+a)L^2 & 0 & 0 & -6L & (2-a)L^2 & 0 \\ -6L & 0 & 0 & (4+a)L^2 & 6L & 0 & 0 & (2-a)L^2 \\ -12 & 0 & 0 & 6L & 12 & 0 & 0 & 6L \\ 0 & 12 & -6L & 0 & 0 & 12 & -6L & 0 \\ 0 & 6L & (2-a)L^2 & 0 & 0 & -6L & (4+a)L^2 & 0 \\ -6L & 0 & 0 & (2-a)L^2 & 6L & 0 & 0 & (4+a)L^2 \end{bmatrix} \dots\dots\dots (III.54)$$

c). Élément finis (barre encastrée -libre)

Conditions aux limites :

$$y = 0$$

Nœud 1 : $w(0) = \alpha_1 = w_1$
 $\theta(0) = \alpha_2 = \theta_1$

$$y = L$$

$$w(L) = \alpha_1 + \alpha_2 L + \alpha_3 L^2 + \alpha_4 L^3 = w_2$$

Nœud 2 : $M_f(L) = 0 \rightarrow \left. \frac{d^2 w(y)}{dy^2} \right|_{y=L} = 0$
 $\Rightarrow 2\alpha_3 + 6\alpha_4 L = 0$

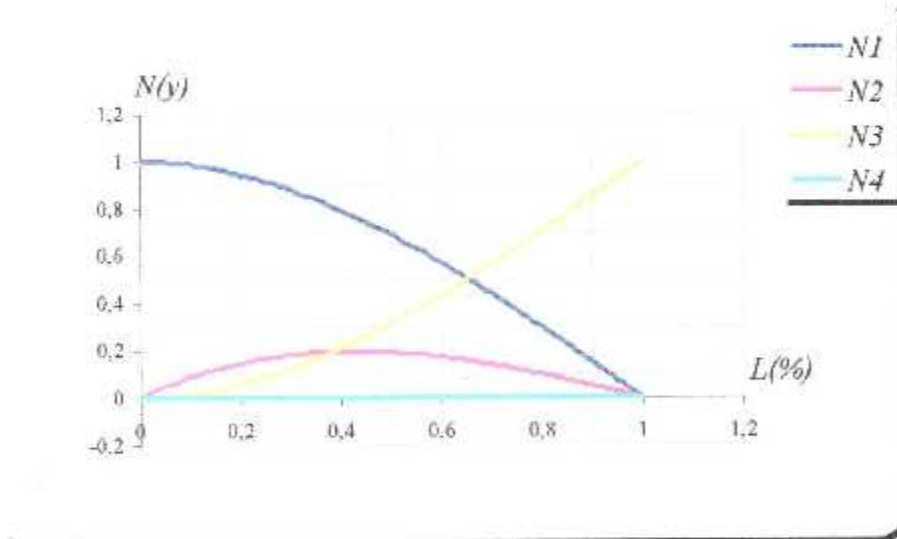


Figure III.11 Les fonctions d'interpolation pour un élément finis (barre encastrée -libre)

$$N_2(y) = \left[1 - \frac{3y^2}{2L^3} + \frac{y^3}{2L^3}; y - \frac{3y^2}{2L} + \frac{y^3}{2L^2}; \frac{3y^2}{2L^2} - \frac{y^3}{2L^3}; 0 \right] \dots \dots \dots \text{(III.55)}$$

$$N_1(y) = \left[1 - \frac{3y^2}{2L^2} + \frac{y^3}{2L^3}; -y + \frac{3y^2}{2L} - \frac{y^3}{2L^2}; \frac{3y^2}{2L^2} - \frac{y^3}{2L^3}; 0 \right] \dots \dots \dots \text{(III.56)}$$

$$[C] = \frac{\rho I \Omega}{5L} \begin{bmatrix} 0 & -6 & -L & 0 & 0 & 6 & 0 & 0 \\ 6 & 0 & 0 & -L & -6 & 0 & 0 & 0 \\ L & 0 & 0 & -L^2 & -L & 0 & 0 & 0 \\ 0 & L & L^2 & 0 & 0 & -L & 0 & 0 \\ 0 & 6 & L & 0 & 0 & -6 & 0 & 0 \\ -6 & 0 & 0 & L & 6 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \dots\dots\dots (III.57)$$

$$[M_s] = \frac{\rho I}{5L} \begin{bmatrix} 6 & 0 & 0 & -L & -6 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & L & 0 & 0 & -6 & 0 & 0 \\ 0 & L & L^2 & 0 & 0 & -L & 0 & 0 \\ -L & 0 & 0 & L^2 & L & 0 & 0 & 0 \\ -6 & 0 & 0 & L & 6 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -6 & -L & 0 & 0 & 6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \dots\dots\dots (III.58)$$

$$[M] = \frac{\rho S L}{420} \begin{bmatrix} 204 & 0 & 0 & -36L & 58.5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 204 & 36L & 0 & 0 & 58.5 & 0 & 0 \\ 0 & 36L & 8L^2 & 0 & 0 & 16.5L & 0 & 0 \\ -36L & 0 & 0 & 8L^2 & -16.5L & 0 & 0 & 0 \\ 58.5 & 0 & 0 & -16.5L & 99 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 58.5 & 16.5L & 0 & 0 & 99 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \dots\dots\dots (III.59)$$

$$[K] = \frac{EI}{(1+a)L^3} \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 & -3L & -3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 3L & 0 & 0 & -3 & 0 & 0 \\ 0 & 3L & (3+a)L^2 & 0 & 0 & -3L & 0 & 0 \\ -3L & 0 & 0 & (3+a)L^2 & 3L & 0 & 0 & 0 \\ -3 & 0 & 0 & 3L & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & -3L & 0 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \dots\dots\dots \text{(III.60)}$$

III.3.1.3 Paliers

Les caractéristiques de raideur et d'amortissement relient les forces aux déplacements et vitesses. L'influence des pentes et des moments habituellement négligée et compte tenu de (III.23) on a :

$$\begin{Bmatrix} F_u \\ F_v \\ F_w \\ F_\theta \end{Bmatrix} = - \begin{bmatrix} k_{xx} & 0 & k_{xz} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ k_{zx} & 0 & k_{zz} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u \\ \psi \\ w \\ \theta \end{Bmatrix} - \begin{bmatrix} c_{xx} & 0 & c_{xz} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ c_{zx} & 0 & c_{zz} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{u} \\ \dot{\psi} \\ \dot{w} \\ \dot{\theta} \end{Bmatrix} \dots\dots\dots$$

(III.61)

La première matrice est une matrice de raideur, La seconde une matrice de d'amortissement visqueux.

III.3.1.4 Balourds

L'expression générale de l'énergie cinétique due à un balourd est donnée par l'équation (III.27), l'application des équations de Lagrange donne :

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\delta}} \right) - \left(\frac{\partial T}{\partial \delta} \right) = -m_s d \Omega^2 \begin{bmatrix} \sin \Omega t \\ \cos \Omega t \end{bmatrix} \dots\dots\dots \text{(III.62)}$$

$$\text{avec } \{\delta\} = \{u, w\} \dots\dots\dots \text{(III.63)}$$

III.3.1.4 Equations de mouvement

L'application des équations de Lagrange donne l'équation générale du mouvement :

$$[M]\{\ddot{\delta}\} + [C(\Omega)]\{\dot{\delta}\} + [K]\{\delta\} = \{F(t)\} \dots\dots\dots \text{(III.64)}$$

où $\{\delta\}$ est le vecteur contenant maintenant tous les déplacements nodaux. $[M]$ est la matrice de masse symétrique, $[C(\Omega)]$ est une matrice non symétrique, fonction de Ω , incluant l'effet gyroscopique (antisymétrique), et les caractéristiques d'amortissement des paliers fréquemment non symétrique. $\{F(t)\}$ est le vecteur de forces.

Chapitre n°IV

DYNAMIQUE DES ROTORS
EN TORSION (APPLICATION)

IV.1 Modélisation du turboréacteur en torsion

L'application des règles de la modélisation qu'on a vue dans le deuxième chapitre afin de produire un modèle représentatif du comportement torsionnel de la ligne d'arbre du turboréacteur que l'on souhaite étudier, c'est bien l'objectif de cette étape.

IV.1.1 Présentation du turboréacteur

La ligne d'arbre (figure IV.1), est celle d'un petit turboréacteur prototype d'origine anglais, qui existe dans notre atelier de propulsion, conçu pour prélèvement de puissance, il est composé de deux compresseurs, le premier axial de deux étages, le deuxième centrifuge, et d'une turbine axiale de deux étages aussi.

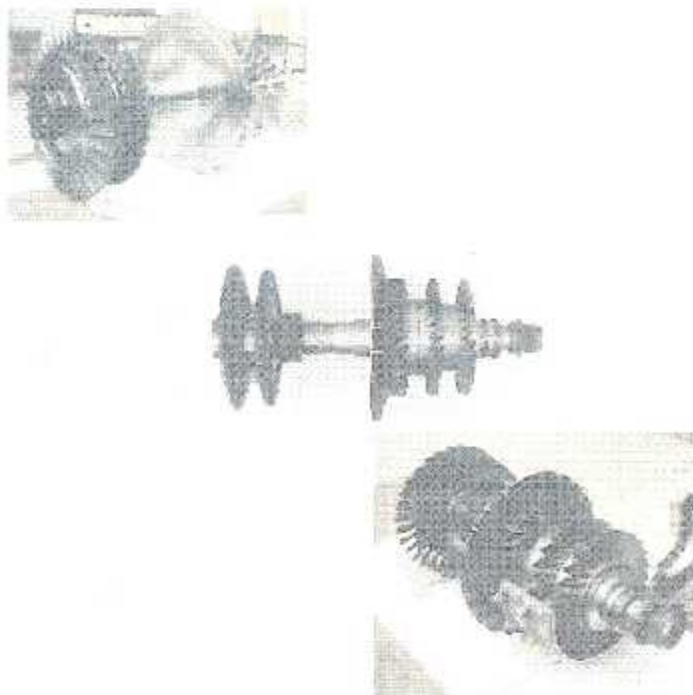


Figure IV.1 Photos réelles de la ligne d'arbre du turboréacteur prise dans l'atelier de propulsion

Nous présentons, sur la figure IV.4 un schéma éclaté de notre moteur, avec toutes les mesures nécessaire.

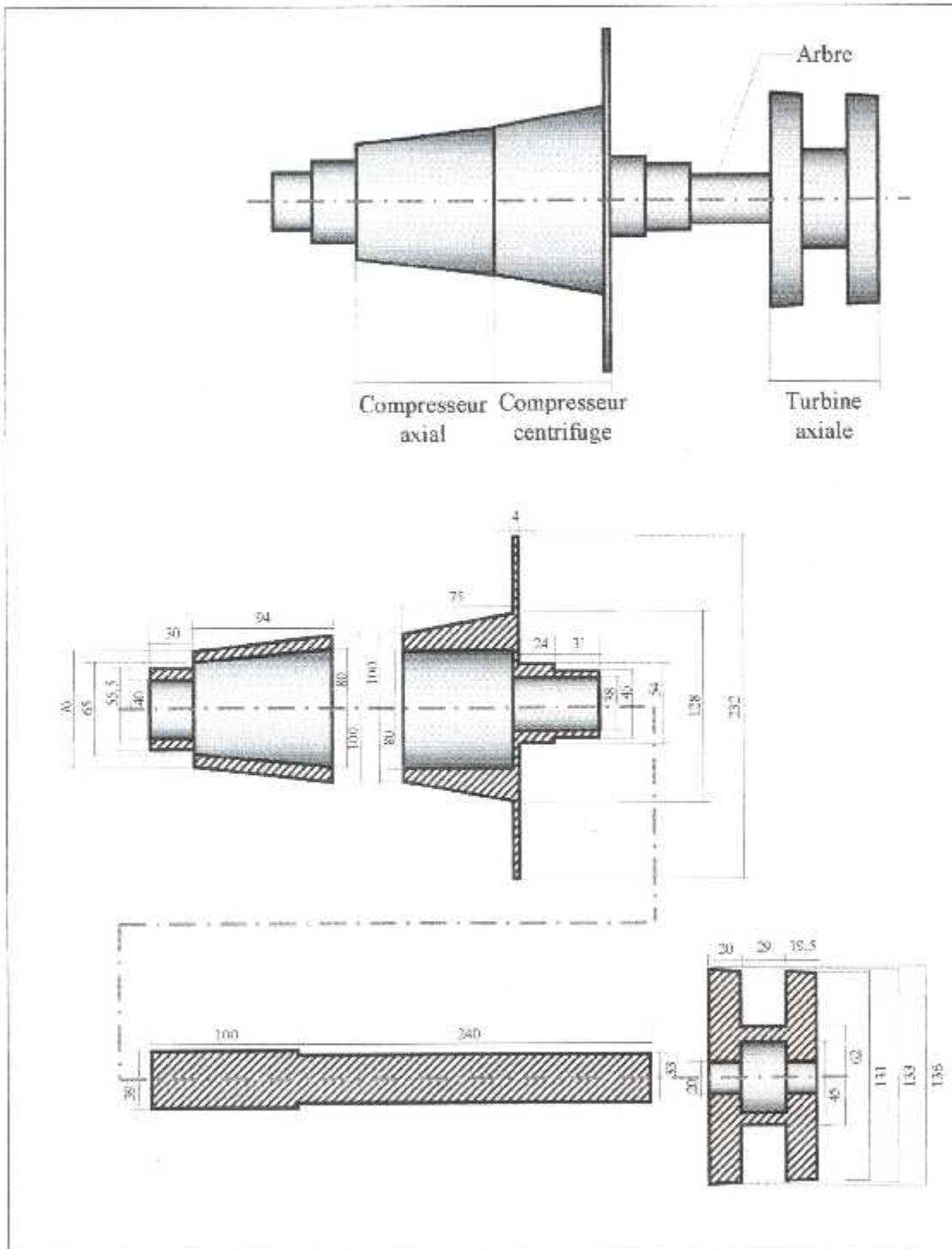


Figure IV.2 Schéma représentatif de ligne d'arbre avec toutes les mesures nécessaires

IV.1.2 Première étape de modélisation en torsion

(Etape initiale)

Puisque les deux compresseurs sont liés à l'arbre dans un même point, dans une première étape de modélisation, on va les représenter par un disque indéformable avec un moment d'inertie équivalent, c'est pareil pour la turbine.

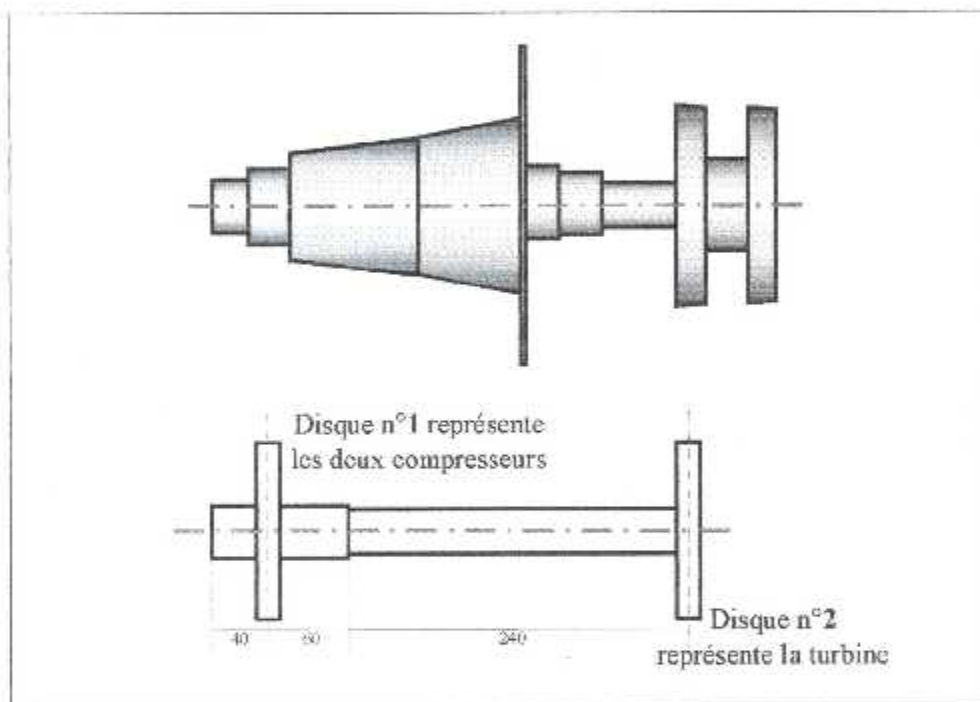


Figure IV.3 première étape de la modélisation (Etape initiale)

IV.1.2.1 Moment d'inertie équivalent pour les deux compresseurs

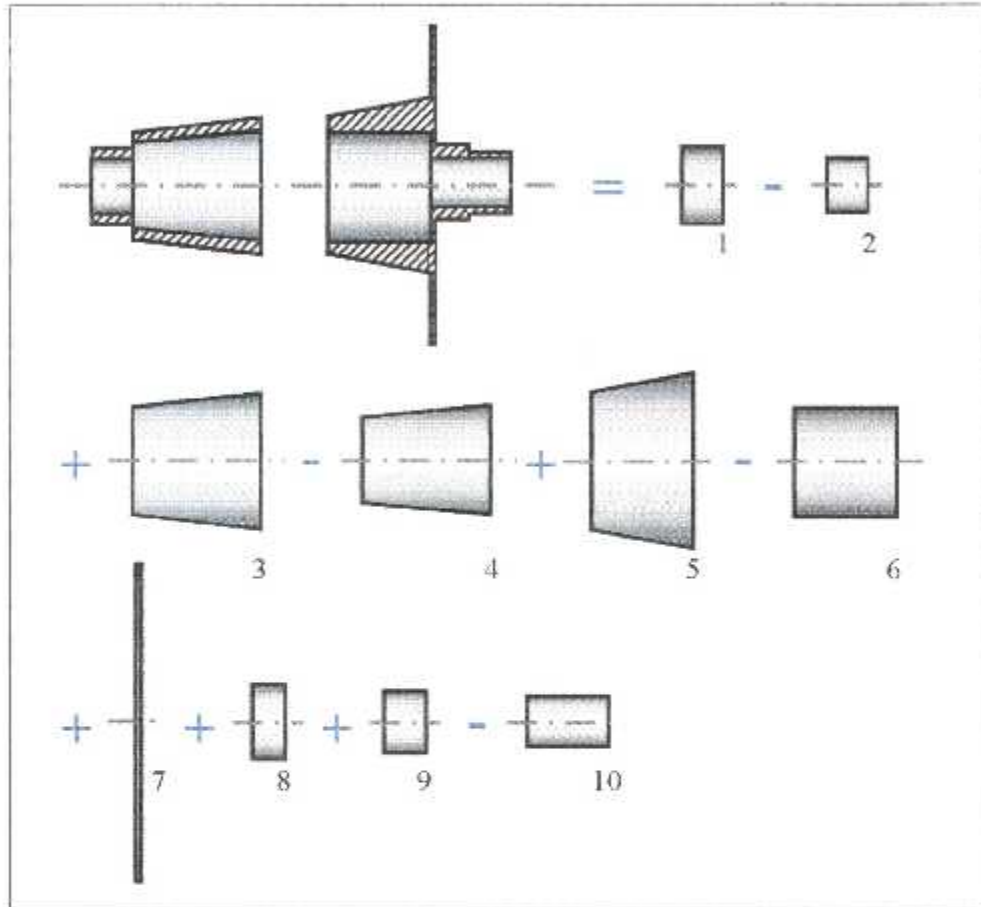


Figure IV.4 Calcul du moment d'inertie équivalent pour les compresseurs

La masse volumique du matériau des compresseurs :

$$\rho = 7800 \text{ (kg/m}^3\text{)}$$

$$I_{SC} = (I_{C1} - I_{C3}) + (I_{C3} - I_{C4}) + (I_{C5} - I_{C6}) + (I_{C7} + I_{C8} + I_{C9} - I_{C10}) \dots \dots \dots \text{(IV.1)}$$

$$I_{C1} = \left(\rho \times \frac{\pi \times D_{C1}^2}{4} \times L_{C1} \times \frac{D_{C1}^2}{8} \right)$$

$$= \left(7800 \times \frac{3.14 \times 0.055^2}{4} \times 0.03 \times \frac{0.055^2}{8} \right) = 1.10 \times 10^{-4} \text{ N.m.s}^2$$

$$I_{C2} = \left(\rho \times \frac{\pi \times D_{C2}^2}{4} \times L_{C2} \times \frac{D_{C2}^2}{8} \right)$$

$$= \left(7800 \times \frac{3.14 \times 0.04^2}{4} \times 0.03 \times \frac{0.04^2}{8} \right) = 5.88 \times 10^{-5} \text{ N.m.s}^2$$

$$D_{mC3} = (D_{1C3} + D_{2C3}) / 2 = (76 + 100) / 2 = 88 \text{ mm}$$

$$I_{C3} = \left(\rho \times \frac{\pi \times D_{mC3}^2}{4} \times L_{C2} \times \frac{D_{mC3}^2}{8} \right)$$

$$= \left(7800 \times \frac{3.14 \times 0.088^2}{4} \times 0.094 \times \frac{0.088^2}{8} \right) = 4.315 \times 10^{-3} \text{ N.m.s}^2$$

$$D_{mC4} = (D_{1C4} + D_{2C4}) / 2 = (65 + 80) / 2 = 72.5 \text{ mm}$$

$$I_{C4} = \left(\rho \times \frac{\pi \times D_{mC4}^2}{4} \times L_{C2} \times \frac{D_{mC4}^2}{8} \right)$$

$$= \left(7800 \times \frac{3.14 \times 0.072^2}{4} \times 0.094 \times \frac{0.072^2}{8} \right) = 1.933 \times 10^{-4} \text{ N.m.s}^2$$

$$D_{mC5} = (D_{1C5} + D_{2C5}) / 2 = (80 + 128) / 2 = 104 \text{ mm}$$

$$I_{C5} = \left(\rho \times \frac{\pi \times D_{mC5}^2}{4} \times L_{C2} \times \frac{D_{mC5}^2}{8} \right)$$

$$= \left(7800 \times \frac{3.14 \times 0.104^2}{4} \times 0.075 \times \frac{0.104^2}{8} \right) = 6.715 \times 10^{-3} \text{ N.m.s}^2$$

$$I_{C6} = \left(\rho \times \frac{\pi \times D_{C6}^2}{4} \times L_{C6} \times \frac{D_{C6}^2}{8} \right)$$

$$= \left(7800 \times \frac{3.14 \times 0.08^2}{4} \times 0.075 \times \frac{0.08^2}{8} \right) = 2.351 \times 10^{-3} \text{ N.m.s}^2$$

$$I_{C7} = \left(\rho \times \frac{\pi \times D_{C7}^2}{4} \times L_{C7} \times \frac{D_{C7}^2}{8} \right)$$

$$= \left(7800 \times \frac{3.14 \times 0.232^2}{4} \times 0.004 \times \frac{0.232^2}{8} \right) = 8.869 \times 10^{-3} \text{ N.m.s}^2$$

$$I_{C8} = \left(\rho \times \frac{\pi \times D_{C8}^2}{4} \times L_{C8} \times \frac{D_{C8}^2}{8} \right)$$

$$= \left(7800 \times \frac{3.14 \times 0.054^2}{4} \times 0.024 \times \frac{0.054^2}{8} \right) = 1.56 \times 10^{-4} \text{ N.m.s}^2$$

$$I_{C9} = \left(\rho \times \frac{\pi \times D_{C9}^2}{4} \times L_{C9} \times \frac{D_{C9}^2}{8} \right)$$

$$= \left(7800 \times \frac{3.14 \times 0.045^2}{4} \times 0.031 \times \frac{0.045^2}{8} \right) = 9.73 \times 10^{-5} \text{ N.m.s}^2$$

$$I_{C10} = \left(\rho \times \frac{\pi \times D_{C10}^2}{4} \times L_{C10} \times \frac{D_{C10}^2}{8} \right)$$

$$= \left(7800 \times \frac{3.14 \times 0.038^2}{4} \times 0.059 \times \frac{0.038^2}{8} \right) = 9.42 \times 10^{-5} \text{ N.m.s}^2$$

Moment d'inertie équivalent pour les deux compresseurs :

$$I_{2C} = 1.757 \times 10^{-2} \text{ N.m.s}^2$$

IV.1.2.2 Moment d'inertie équivalent pour la turbine

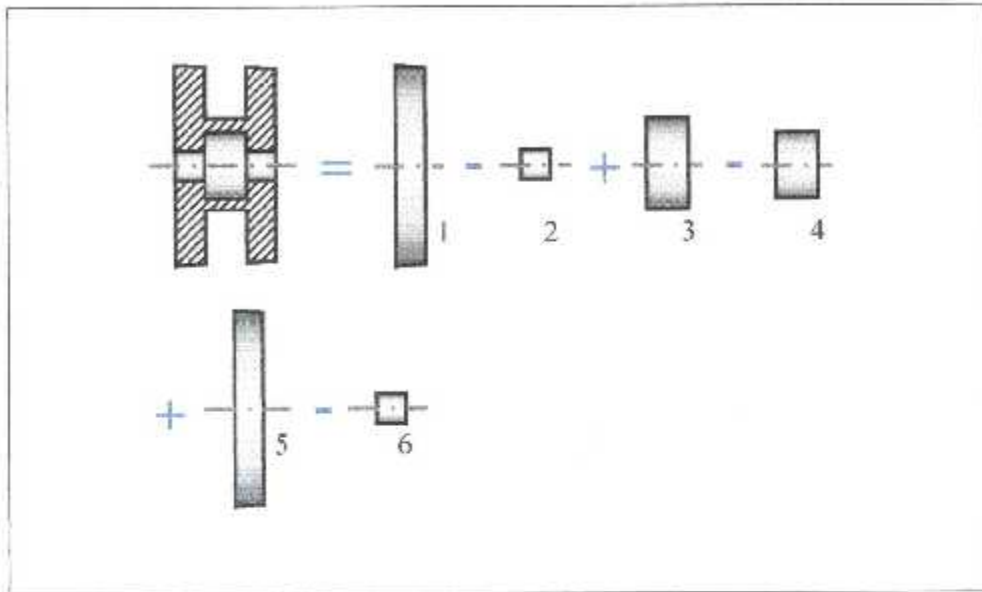


Figure IV.5 Calcul du moment d'inertie équivalent pour la turbine

La masse volumique du matériau de la turbine : $\rho = 7800 \text{ (kg/m}^3\text{)}$

$$I_T = (I_{T1} - I_{T2}) + (I_{T3} - I_{T4}) + (I_{T5} - I_{T6}) \dots \dots \dots \text{(IV.2)}$$

$$D_{mT1} = (D_{IT1} + D_{OT1}) / 2 = (133 + 136) / 2 = 134.5 \text{ mm}$$

$$I_{T1} = \left(\rho \times \frac{\pi \times D_{mT1}^2}{4} \times L_{T1} \times \frac{D_{mT1}^2}{8} \right)$$

$$= \left(7800 \times \frac{3.14 \times 0.1345^2}{4} \times 0.02 \times \frac{0.1345^2}{8} \right) = 5.01 \times 10^{-3} \text{ N.m.s}^2$$

$$I_{T2} = \left(\rho \times \frac{\pi \times D_{T2}^2}{4} \times L_{T2} \times \frac{D_{T2}^2}{8} \right)$$

$$= \left(7800 \times \frac{3.14 \times 0.02^2}{4} \times 0.02 \times \frac{0.02^2}{8} \right) = 2.45 \times 10^{-5} \text{ N.m.s}^2$$

$$I_{T3} = \left(\rho \times \frac{\pi \times D_{T3}^2}{4} \times L_{T3} \times \frac{D_{T3}^2}{8} \right)$$

$$= \left(7800 \times \frac{3.14 \times 0.062^2}{4} \times 0.029 \times \frac{0.062^2}{8} \right) = 3.28 \times 10^{-4} \text{ N.m.s}^2$$

$$I_{T4} = \left(\rho \times \frac{\pi \times D_{T4}^2}{4} \times L_{T4} \times \frac{D_{T4}^2}{8} \right)$$

$$= \left(7800 \times \frac{3.14 \times 0.045^2}{4} \times 0.029 \times \frac{0.045^2}{8} \right) = 9.1 \times 10^{-5} \text{ N.m.s}^2$$

$$D_{mT5} = (D_{1T5} + D_{2T5}) / 2 = (131 + 133) / 2 = 132 \text{ mm}$$

$$I_{T5} = \left(\rho \times \frac{\pi \times D_{mT5}^2}{4} \times L_{T5} \times \frac{D_{mT5}^2}{8} \right)$$

$$= \left(7800 \times \frac{3.14 \times 0.132^2}{4} \times 0.02 \times \frac{0.132^2}{8} \right) = 4.647 \times 10^{-3} \text{ N.m.s}^2$$

$$I_{T6} = \left(\rho \times \frac{\pi \times D_{T6}^2}{4} \times L_{T6} \times \frac{D_{T6}^2}{8} \right)$$

$$= \left(7800 \times \frac{3.14 \times 0.02^2}{4} \times 0.02 \times \frac{0.02^2}{8} \right) = 2.45 \times 10^{-6} \text{ N.m.s}^2$$

Moment d'inertie équivalent pour la turbine :

$$I_T = 9.889 \times 10^{-3} \text{ N.m.s}^2$$

IV.1.3 Deuxième étape de modélisation en torsion

(Etape finale)

Pour obtenir le modèle souhaitable, on peut découper l'arbre en trois tronçons convenables, pour chaque tronçon on évalue sa rigidité torsionnelle équivalente et son moment d'inertie équivalent par rapport à son axe de rotation.

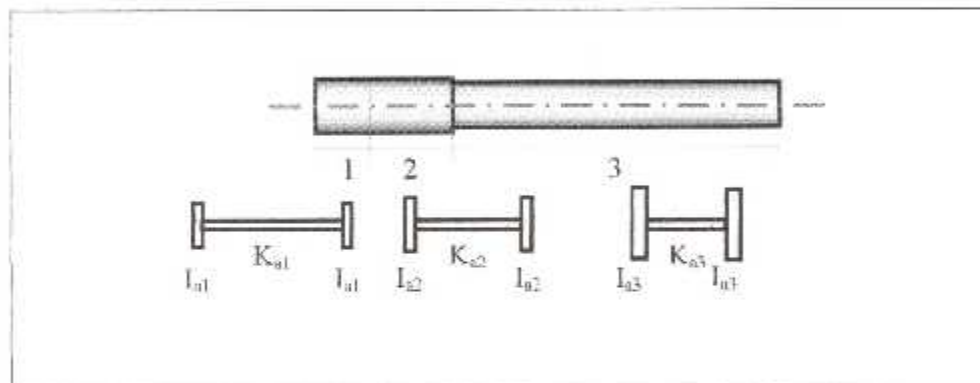


Figure IV.6 Moments d'inertie équivalents et rigidités équivalentes pour les différents tronçons d'arbre

La masse volumique du matériau de l'arbre :

$$\rho = 7800 \text{ (kg/m}^3\text{)}$$

Le module de cisaillement transversal du matériau de l'arbre :

$$G = 8 \times 10^4 \text{ (N/mm}^2\text{)}$$

$$\begin{aligned}
 I_{a1} &= \frac{1}{2} \left(\rho \times \frac{\pi \times D_{a1}^2}{4} \times L_{a1} \times \frac{D_{a1}^2}{8} \right) \\
 &= \frac{1}{2} \left(7800 \times \frac{3.14 \times 0.039^2}{4} \times 0.04 \times \frac{0.039^2}{8} \right) = 3.54 \times 10^{-5} \text{ N.m.s}^2
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 I_{a2} &= \frac{1}{2} \left(\rho \times \frac{\pi \times D_{a2}^2}{4} \times L_{a2} \times \frac{D_{a2}^2}{8} \right) \\
 &= \frac{1}{2} \left(7800 \times \frac{3.14 \times 0.039^2}{4} \times 0.06 \times \frac{0.039^2}{8} \right) = 5.31 \times 10^{-5} \text{ N.m.s}^2
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 I_{a3} &= \frac{1}{2} \left(\rho \times \frac{\pi \times D_{a3}^2}{4} \times L_{a3} \times \frac{D_{a3}^2}{8} \right) \\
 &= \frac{1}{2} \left(7800 \times \frac{3.14 \times 0.033^2}{4} \times 0.24 \times \frac{0.033^2}{8} \right) = 1.09 \times 10^{-4} \text{ N.m.s}^2
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 K_{a1} &= \frac{G \times J_{a1}}{L_{a1}} \\
 J_{a1} &= \frac{\pi \times D_{a1}^4}{32} = \frac{3.14 \times 0.039^4}{32} = 2.27 \times 10^{-7} \text{ m}^4 \\
 K_{a1} &= \frac{8 \times 10^4 \times 2.27 \times 10^{-7}}{0.04} = 4.54 \times 10^{-1} \text{ N.m / rd}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 K_{a2} &= \frac{G \times J_{a2}}{L_{a2}} \\
 J_{a2} &= \frac{\pi \times D_{a2}^4}{32} = \frac{3.14 \times 0.039^4}{32} = 2.27 \times 10^{-7} \text{ m}^4 \\
 K_{a2} &= \frac{8 \times 10^4 \times 2.27 \times 10^{-7}}{0.06} = 3.03 \times 10^{-1} \text{ N.m / rd}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 K_{a3} &= \frac{G \times J_{a3}}{L_{a3}} \\
 J_{a3} &= \frac{\pi \times D_{a3}^4}{32} = \frac{3.14 \times 0.033^4}{32} = 1.16 \times 10^{-7} \text{ m}^4 \\
 K_{a3} &= \frac{8 \times 10^4 \times 1.16 \times 10^{-7}}{0.24} = 3.88 \times 10^{-2} \text{ N.m / rd}
 \end{aligned}$$

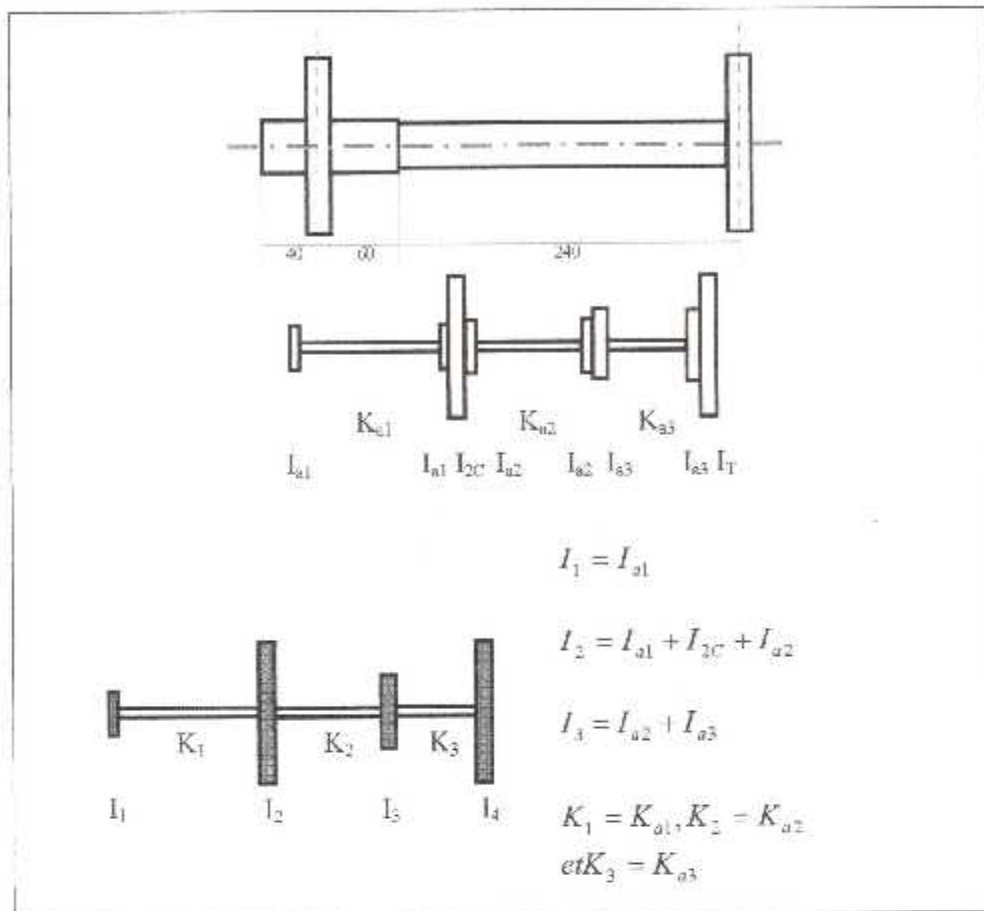


Figure IV.7 – Deuxième étape de la modélisation (Étape finale)

IV.1.4 Résultats de la modélisation (Tableau IV.1)

	Moment d'inertie équivalent ($N.m.s^2$)	Rigidité torsionnelle ($N.m/rd$)
Compresseurs	$I_{2c} = 1.757 \times 10^{-2}$	
Turbine	$I_T = 9.889 \times 10^{-3}$	
Tronçon d'arbre n°1	$2I_{a1} = 2(3.54 \times 10^{-5})$	$K_{a1} = 4.54 \times 10^{-1}$
Tronçon d'arbre n°2	$2I_{a2} = 2(5.31 \times 10^{-5})$	$K_{a2} = 3.03 \times 10^{-1}$
Tronçon d'arbre n°3	$2I_{a3} = 2(1.09 \times 10^{-4})$	$K_{a3} = 3.88 \times 10^{-2}$

IV.2 Le comportement vibratoire en torsion

Comme nous l'avons montré au chapitre II, le modèle torsionnel représentant l'installation étudiée permet le calcul des premières pulsations propres et des déformées modales associées. Pour cela nous avons choisi comme méthode de résolution celle de Ruthishauser (voir annexe n°1), car elle présente l'avantage d'être précise, rapidement convergente et elle dispose des vecteurs au lieu des matrices, permettant la réduction de la réservation en espace mémoire.

IV.2.1 Exemple teste

La figure IV.8 présente un exemple que nous avons pris du livre de *Technique d'ingénieur* [3], afin de tester le programme de *RUTHIS* (voir annexe n°1).

Nous présentons, sur la figure IV.8.a, la ligne d'arbre d'un groupe compresseur composé d'un moteur électrique M de $430kW$, d'un accouplement grande vitesse A_{GV} de moment d'inertie I_{GV} , d'un réducteur à engrenage R, d'un accouplement petite vitesse A_{PV} de moment d'inertie I_{PV} , d'un volant d'inertie V et d'un compresseur d'air bicylindre C . Le moteur tourne à la moyenne vitesse $N_{SO} = 1487tr/min$, et le compresseur à la vitesse $N_{CO} = -425tr/min$.

Le modèle torsionnel de l'installation est constitué de huit disques relié par set ressort de torsion (figure IV.8.a).

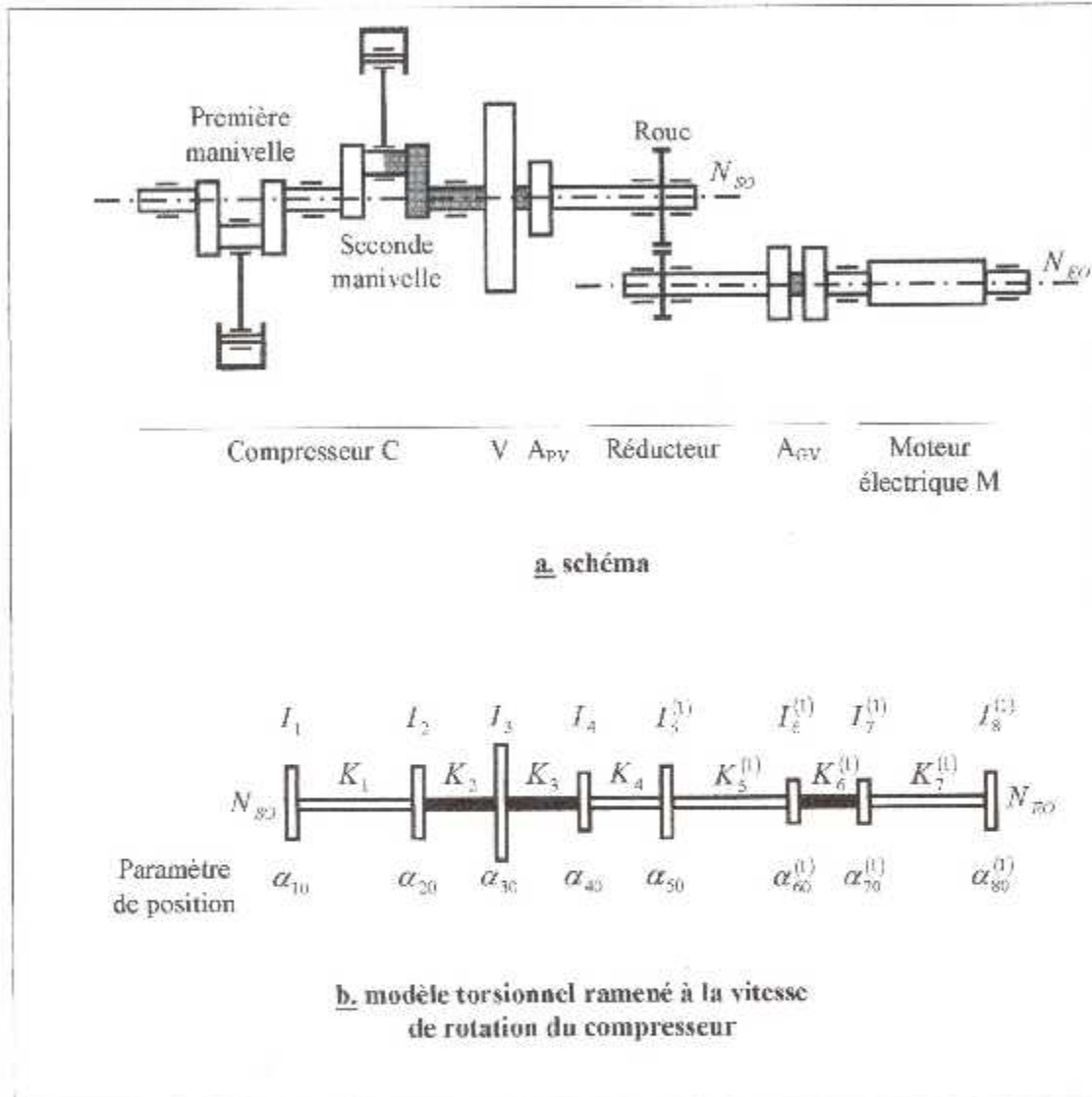


Figure IV.8 Groupe compresseur

IV.2.1.1 Les données

Tableau IV.2 - Valeurs numériques des moments d'inertie des disques du modèle du groupe compresseur (figure IV.8)	
Disque n°	Moment d'inertie ($\text{kg} \cdot \text{m}^2$)
1	8.25
2	8.25
3	549.5
4	2.75
5	20.07
6	3.52
7	3.52
8	116

Tableau IV.3 – Connectivité et valeurs numériques des rigidités des ressorts de torsion du modèle du groupe compresseur (figure IV.8)			
Ressort de torsion n°	Connectivités		Rigidité torsionnelle (N.m / rad)
	1	2	
1	1	2	3.3×10^7
2	2	3	2.78×10^7
3	3	4	3.6×10^6
4	4	5	1.52×10^7
5	5	6	5.86×10^7
6	6	7	6.41×10^6
7	7	8	4.59×10^7

IV.2.1.2 Les Résultats

Tableau IV.4 – Pulsations propres ω_j du modèle du groupe compresseur (figure IV.8)				
N° du mode	(tr / min)		(rad / s)	
	<i>T. I.</i>	<i>Ruthis</i>	<i>T. I.</i>	<i>Ruthis</i>
1	1276	1275.21	133.6	133.54
2	5690	5687.75	595.6	595.62
3	11237	11232.16	1176.2	1176.23
4	25899	25886.61	2710.8	2710.84

Nota :

- *T. I.* : Les résultats qui figurent dans *Technique d'ingénieur* [3].
- *Ruthis* : que nous avons trouvés en appliquant le programme de *RUTHIS*.

Tableau IV.5 – Amplitude relatives du modèle du groupe compresseur (figure IV.8) pour les trois premières pulsations propres non nulles

Disque n°	Mode n°2 $\omega_1 = 133.6rad / s$		Mode n°2 $\omega_2 = 595.6rad / s$		Mode n°4 $\omega_3 = 1176.2rad / s$	
	<i>T. I.</i>	<i>Ruthis</i>	<i>T. I.</i>	<i>Ruthis</i>	<i>T. I.</i>	<i>Ruthis</i>
1	1	1	1	1	1	1
2	0.99	0.998	0.91	0.91	0.65	0.651
3	0.98	0.987	0.71	0.702	-0.025	-0.0251
4	-1.78	-1.776	-39.29	-39.25	-0.002	-0.002
5	-2.43	-2.421	-46.24	-46.242	0.0034	0.00343
6	-2.58	-2.58	-42.43	-42.434	0.0033	0.0033
7	-3.96	-3.96	0.63	0.63	0.0001	0.0001
8	-4.14	-4.14	6.69	6.69	-0.002	-0.002

IV.2.2 Comportement vibratoire du turboréacteur

IV.2.2.1 Les données

Tableau IV.6 - Valeurs numériques des moments d'inertie des disques du modèle du turboréacteur (figure IV.7)	
Disque n°	Moment d'inertie ($\text{kg} \cdot \text{m}^2$)
1	3.54×10^{-5}
2	2.116×10^{-2}
3	1.62×10^{-4}
4	9.998×10^{-4}

Tableau IV.7 – Connectivité et valeurs numériques des rigidités des ressorts de torsion du modèle du turboréacteur (figure IV.7)			
Ressort de torsion n°	Connectivités		Rigidité torsionnelle ($N \cdot m / rad$)
1	1	2	4.54×10^{-1}
2	2	3	3.03×10^{-1}
3	3	4	3.88×10^{-2}

IV.2.2.2 Les Résultats

N° du mode	(tr / min)	(rad / s)
1	18.86	1.97
2	440.17	46.07
3	1082.88	113.34

Disque n°	Mode n°2 $\omega_1 = 1.97rad / s$	Mode n°2 $\omega_2 = 46.07rad / s$	Mode n°2 $\omega_3 = 113.34rad / s$
1	1	1	1
2	0.99	- 97.93	- 3.58
3	0.73	14292.6	3204.78
4	- 1.41	9.16	- 143634.5

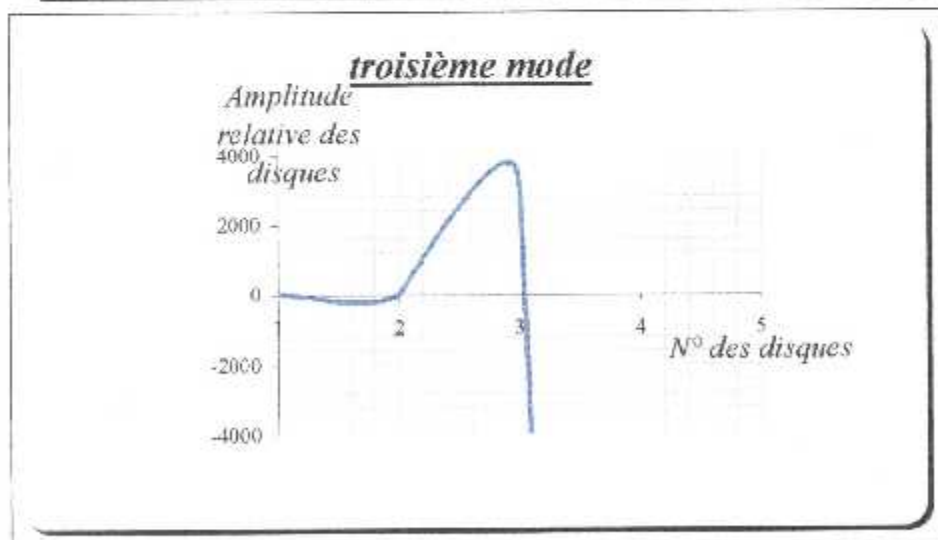
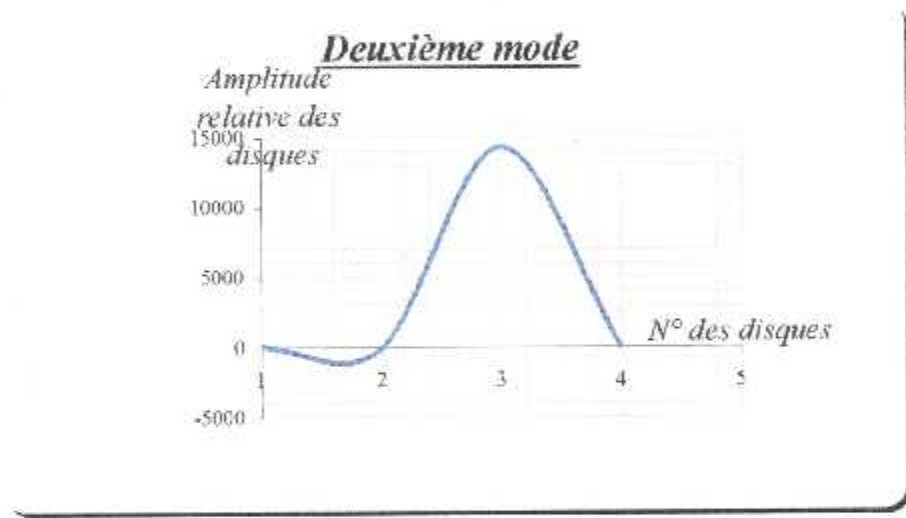
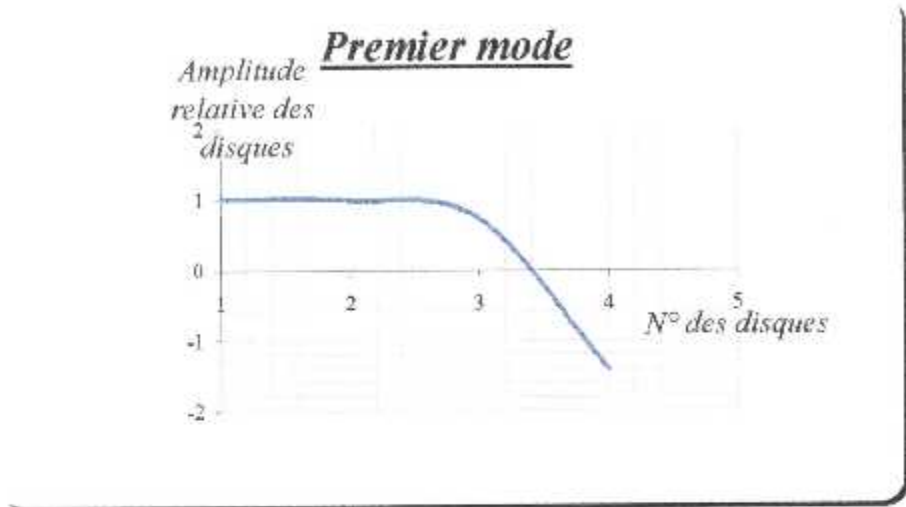


Figure IV.9 Les déformée modale du modèle de la (figure IV.8)

IV.3 Interprétation des résultats

- **Tableau IV.1** : présente les résultats de la modélisation en torsion du turboréacteur de la figure IV.1, on remarque que les valeurs numériques des inerties des différents tronçons d'arbre sont très proches l'une de l'autre, ainsi que pour les rigidités, ce qui peut être considéré comme un signe d'une bonne modélisation.
- **Tableau IV.4 et IV.5** : présente les pulsations propres et les amplitudes relatives de l'installation de la figure IV.8, on remarque que les résultats que nous avons obtenus en appliquant le programme de ruthis, sont convenables avec ceux de la littérature spécialisée [3], ainsi notre programme est bien validé.
- **Tableau IV.8 et IV.9** : présente les pulsations propres et les amplitudes relatives qui permettent une première prévision du comportement vibratoire en torsion de la ligne d'arbre du turboréacteur de la figure IV.1, on remarque que les fréquences propres sont très petites ($< 1100 \text{ tr/min}$) par rapport au point de fonctionnement nominale de notre moteur ($\approx 50000 \text{ tr/min}$), d'où le régime permanent est achevé sans problème.

Chapitre n°V

DYNAMIQUE DES ROTORS
EN FLEXION (APPLICATION)

V.1 Modèle avec un seul disque

Les phénomènes de base principaux, caractéristiques de la dynamique des rotors sont présentés en utilisant un exemple simple mais réaliste modélisé dans une première étape par la méthode de *Rayleigh-Ritz*, ensuite par la méthode de éléments finis.

Il s'agit du modèle présenté sur la figure 1. $R_0(XYZ)$ est le repère galiléen, l'axe du rotor est suivant l'axe Y , le rotor est supposé en appui aux deux extrémités. Il est constitué :

d'un arbre de longueur L et de section circulaire constante ;

d'un disque symétrique comportant un balourd, situé à $y = l_1$;

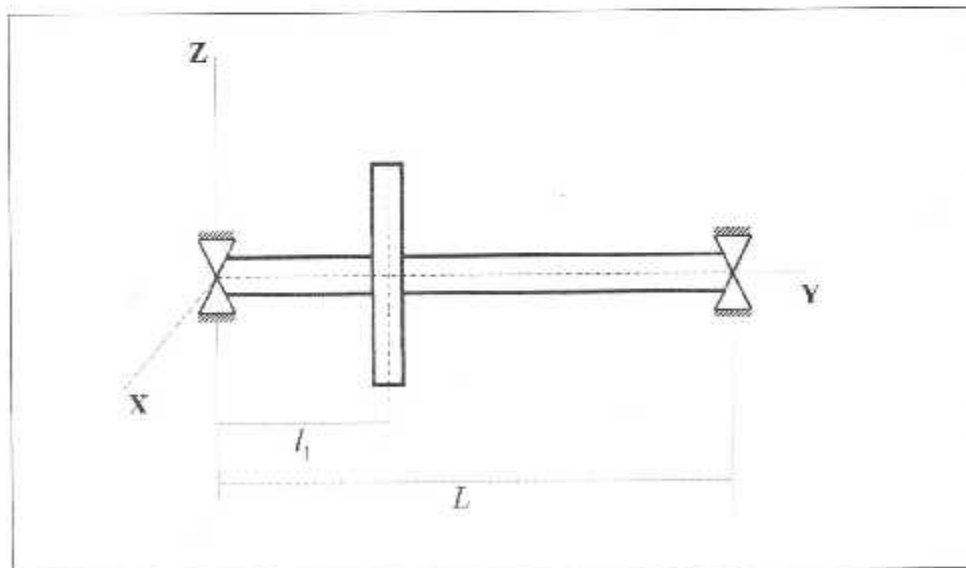


Figure V.1 Modèle avec un disque

Données :**• Disque**

La masse et les inerties du disque sont :

$$M_{(d)} = 16,47 \text{ kg}$$

$$I_{(dx)} = I_{(dy)} = 9,247 \times 10^{-2} \text{ kg.m}^2$$

$$I_{(dz)} = 0,1861 \text{ kg.m}^2$$

$$l_1 = \frac{L}{3}$$

• Arbre

$$\text{Longueur } L = 0,4 \text{ m}$$

$$\text{rayon de section droite } R_1 = 0,01 \text{ m}$$

$$\rho = 7800 \text{ kg / m}^3$$

$$E = 2 \times 10^{11} \text{ N / m}^2$$

L'aire de la section droite et le moment d'inertie diamétral sont :

$$S = \pi \times R_1^2 = 3,142 \times 10^{-4} \text{ m}^2$$

$$I = \frac{\pi \times R_1^4}{4} = 7,854 \times 10^{-9} \text{ m}^4$$

• Balourd

$$\text{masse } m_b = 10^{-4} \text{ kg}$$

$$\text{distance } d = 0,15 \text{ m}$$

V.1.1 La méthode de Rayleigh-Ritz

• **Les fonctions de déplacements** sont celles du premier mode d'une poutre, en flexion et appuyée aux deux extrémités, soit :

$$f(y) = \sin \frac{\pi y}{L} = \sin \frac{\pi y}{0.4} \dots\dots\dots (V.1)$$

Les expressions de l'énergie cinétique, de l'énergie de déformation et du travail virtuel établies dans le chapitre III sont utilisées pour chaque élément et le terme constant apparaissant dans l'expression de l'énergie cinétique est systématiquement omis. Les expressions de déplacements dans les directions X et Z sont :

$$u(y, t) = f(y)q_1(t) = f(y)q_1 = \sin\left(\frac{\pi y}{0.4}\right)q_1 \dots\dots\dots (V.2)$$

$$w(y, t) = f(y)q_2(t) = f(y)q_2 = \sin\left(\frac{\pi y}{0.4}\right)q_2 \dots\dots\dots (V.3)$$

où q_1 et q_2 sont les coordonnées généralisées indépendantes. Comme les pentes ψ et θ sont petites elle sont approximées par :

$$\theta = \frac{\partial w}{\partial y} = \frac{\partial f(y)}{\partial y} q_2 = \frac{\pi}{0.4} \cos\left(\frac{\pi y}{0.4}\right)q_2 \dots\dots\dots (V.4)$$

$$\psi = -\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial f(y)}{\partial y} q_1 = -\frac{\pi}{0.4} \cos\left(\frac{\pi y}{0.4}\right)q_1 \dots\dots\dots (V.5)$$

Les dérivées du second ordre de u et w sont nécessaires pour

exprimer l'énergie de déformation ; leurs expressions sont :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 f(y)}{\partial y^2} q_1 = \left(\frac{\pi}{0.4} \right)^2 \sin \left(\frac{\pi y}{0.4} \right) q_1 \dots \dots \dots (V.6)$$

$$\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 f(y)}{\partial y^2} q_2 = - \left(\frac{\pi}{0.4} \right)^2 \sin \left(\frac{\pi y}{0.4} \right) q_2 \dots \dots \dots (V.7)$$

• Les expressions générales de l'énergie cinétique T , de l'énergie de déformation U et travail virtuel δW peuvent être obtenues.

L'énergie cinétique a comme expression :

$$T = T_d + T_a + T_b \dots \dots \dots (V.8)$$

où T_d , T_a , T_b sont les énergies cinétiques respectives du disque, de l'arbre et du balourd.

$$\begin{aligned}
 T_d &= \frac{1}{2} M_d (\dot{u}^2 + \dot{w}^2) + \frac{1}{2} I_{dx} (\dot{\theta}^2 + \dot{\psi}^2) + \frac{1}{2} I_{dy} (\Omega^2 + 2\Omega\dot{\psi}\theta) \\
 &= \frac{1}{2} M_d \left(\sin\left(\frac{\pi l_1}{0.4}\right) \right)^2 (\dot{q}_1^2 + \dot{q}_2^2) + \frac{1}{2} I_{dx} \left(\frac{\pi}{0.4} \cos\left(\frac{\pi l_1}{0.4}\right) \right)^2 (\dot{q}_1^2 + \dot{q}_2^2) \\
 &\quad + \frac{1}{2} I_{dy} \left(\Omega^2 - 2\Omega \left(\frac{\pi}{0.4} \cos\left(\frac{\pi l_1}{0.4}\right) \right) (\dot{q}_1 q_2) \right) \\
 &= \frac{1}{2} 16.47 \left(\sin\left(\frac{\pi \left(\frac{0.4}{3}\right)}{0.4}\right) \right)^2 (\dot{q}_1^2 + \dot{q}_2^2) + \frac{1}{2} 9.247 \times 10^{-2} \left(\frac{\pi}{0.4} \cos\left(\frac{\pi \left(\frac{0.4}{3}\right)}{0.4}\right) \right)^2 (\dot{q}_1^2 + \dot{q}_2^2) \\
 &\quad + \frac{1}{2} 0.1861 \left(\Omega^2 - 2\Omega \left(\frac{\pi}{0.4} \cos\left(\frac{\pi \left(\frac{0.4}{3}\right)}{0.4}\right) \right) (\dot{q}_1 q_2) \right) \\
 &= \frac{1}{2} 16.47 (0.866)^2 (\dot{q}_1^2 + \dot{q}_2^2) + \frac{1}{2} 9.247 \times 10^{-2} (3.927)^2 (\dot{q}_1^2 + \dot{q}_2^2) \\
 &\quad + \frac{1}{2} 0.1861 (\Omega^2 - 2\Omega (3.927) (\dot{q}_1 q_2)) \\
 &= 6.176 (\dot{q}_1^2 + \dot{q}_2^2) + 0.713 (\dot{q}_1^2 + \dot{q}_2^2) + 9.305 \times 10^{-2} (\Omega^2 - 30.842\Omega (\dot{q}_1 q_2)) \\
 &= 6.889 (\dot{q}_1^2 + \dot{q}_2^2) + 9.305 \times 10^{-2} (\Omega^2 - 30.842\Omega (\dot{q}_1 q_2))
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 T_a &= \frac{\rho S}{2} \int_0^L (\dot{u}^2 + \dot{w}^2) dy - \frac{\rho I}{2} \int_0^L (\dot{\psi}^2 + \dot{\theta}^2) dy + \rho I \Omega^2 + 2\rho I \Omega \int_0^L \dot{\psi} \theta dy \\
 &= \frac{\rho S}{2} \int_0^L \left(\sin\left(\frac{\pi y}{0.4}\right) \right)^2 (\dot{q}_1^2 + \dot{q}_2^2) dy + \frac{\rho I}{2} \int_0^L \left(\frac{\pi}{0.4} \cos\left(\frac{\pi y}{0.4}\right) \right)^2 (\dot{q}_1^2 + \dot{q}_2^2) dy \\
 &\quad - \rho I \Omega^2 + 2\rho I \Omega \int_0^L \left(\frac{\pi}{0.4} \cos\left(\frac{\pi y}{0.4}\right) \right) (\dot{q}_1 q_2) dy \\
 &= \frac{7800 \times 3.142 \times 10^{-4}}{2} 0.2 (\dot{q}_1^2 + \dot{q}_2^2) + \frac{7800 \times 7.854 \times 10^{-9}}{2} 12.337 (\dot{q}_1^2 + \dot{q}_2^2) \\
 &\quad + 7800 \times 7.854 \times 10^{-9} \times 0.4 \times \Omega^2 + 2 \times 7800 \times 7.854 \times 10^{-9} \times \Omega \times 12.337 (\dot{q}_1 q_2) \\
 &= 0.245 (\dot{q}_1^2 + \dot{q}_2^2) + 3.779 \times 10^{-4} (\dot{q}_1^2 + \dot{q}_2^2) + 2.45 \times 10^{-5} \Omega^2 - 1.51 \times 10^{-3} \Omega (\dot{q}_1 q_2) \\
 &= 0.245 (\dot{q}_1^2 + \dot{q}_2^2) + 2.45 \times 10^{-5} \Omega^2 + 1.51 \times 10^{-3} \Omega (\dot{q}_1 q_2)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
T'_b &\approx m_b \Omega t (\dot{u} \cos \Omega t - \dot{w} \sin \Omega t) \\
&= m_b \Omega t \left(\left(\sin \left(\frac{\pi l_1}{0.4} \right) \dot{q}_1 \right) \cos \Omega t - \left(\sin \left(\frac{\pi l_1}{0.4} \right) \dot{q}_2 \right) \sin \Omega t \right) \\
&= 10^{-4} \Omega 0.15 \left(\left(\sin \left(\frac{\pi \begin{pmatrix} 0.4 \\ 3 \end{pmatrix}}{0.4} \right) \dot{q}_1 \right) \cos \Omega t - \left(\sin \left(\frac{\pi \begin{pmatrix} 0.4 \\ 3 \end{pmatrix}}{0.4} \right) \dot{q}_2 \right) \sin \Omega t \right) \\
&= 1.5 \times 10^{-5} \Omega (0.886 \dot{q}_1 \cos \Omega t - 0.866 \dot{q}_2 \sin \Omega t) \\
&= 1.299 \times 10^{-5} \Omega (\dot{q}_1 \cos \Omega t - \dot{q}_2 \sin \Omega t) \\
&= 1.299 \times 10^{-5} \Omega (\dot{q}_1 \cos \Omega t - \dot{q}_2 \sin \Omega t)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
T &= T_s + T_a + T_b \\
&= 6.889 (\dot{q}_1^2 + \dot{q}_2^2) + 9.305 \times 10^{-2} (\Omega^2 - 30.842 \Omega (\dot{q}_1 \dot{q}_2)) \\
&\quad + 0.245 (\dot{q}_1^2 + \dot{q}_2^2) + 2.45 \times 10^{-5} \Omega^2 + 1.51 \times 10^{-3} \Omega (\dot{q}_1 \dot{q}_2) + 1.299 \times 10^{-5} \Omega (\dot{q}_1 \cos \Omega t - \dot{q}_2 \sin \Omega t) \\
&= 7.134 (\dot{q}_1^2 + \dot{q}_2^2) - 2.87 \Omega (\dot{q}_1 \dot{q}_2) - 9.307 \times 10^{-2} \Omega^2 + 1.299 \times 10^{-5} \Omega (\dot{q}_1 \cos \Omega t - \dot{q}_2 \sin \Omega t)
\end{aligned}$$

L'énergie de déformation a comme expression :

$$\begin{aligned}
U_d &= \frac{EI}{2} \int_0^L \left[\left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)^2 \right] dy \\
&= \frac{EI}{2} \int_0^L \left[\left(\left(\frac{\pi}{0.4} \right)^2 \sin \left(\frac{\pi y}{0.4} \right) \right)^2 (q_1^2 + q_2^2) \right] dy \\
&= \frac{2 \times 10^{11} \times 7.854 \times 10^{-5}}{2} \times 761.01 (q_1^2 + q_2^2) = 5.977 \times 10^5 (q_1^2 + q_2^2)
\end{aligned}$$

Les équations du mouvement sont alors déduites des équations de Lagrange.

$$\begin{aligned}
& \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_1} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_1} + \frac{\partial U}{\partial q_1} \\
&= \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial (7.134(\dot{q}_1^2 + \dot{q}_2^2) - 2.87\Omega(\dot{q}_1 q_2) + 9.307 \times 10^{-2} \Omega^2 + 1.299 \times 10^{-5} \Omega(\dot{q}_1 \cos \Omega t - \dot{q}_2 \sin \Omega t))}{\partial \dot{q}_1} \right) \\
& \quad - \frac{\partial (7.134(\dot{q}_1^2 + \dot{q}_2^2) - 2.87\Omega(\dot{q}_1 q_2) + 9.307 \times 10^{-2} \Omega^2 + 1.299 \times 10^{-5} \Omega(\dot{q}_1 \cos \Omega t - \dot{q}_2 \sin \Omega t))}{\partial q_1} \\
& \quad - \frac{\partial (5.977 \times 10^5 (q_1^2 + q_2^2))}{\partial q_1} \\
&= \frac{d}{dt} (7.134 \times 2\dot{q}_1 - 2.87\Omega q_2 - 1.299 \times 10^{-5} \Omega \cos \Omega t) + 5.977 \times 10^5 \times 2q_1 \\
&= 14.27\ddot{q}_1 - 2.87\Omega\dot{q}_2 + 1.195 \times 10^6 q_1 + 1.299 \times 10^{-5} \Omega^2 \sin \Omega t = 0 \\
&\Rightarrow 14.27\ddot{q}_1 - 2.87\Omega\dot{q}_2 + 1.195 \times 10^6 q_1 = -1.299 \times 10^{-5} \Omega^2 \sin \Omega t
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_2} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_2} + \frac{\partial U}{\partial q_2} \\
&= \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial (7.134(\dot{q}_1^2 + \dot{q}_2^2) - 2.87\Omega(\dot{q}_1 q_2) + 9.307 \times 10^{-2} \Omega^2 + 1.299 \times 10^{-5} \Omega(\dot{q}_1 \cos \Omega t - \dot{q}_2 \sin \Omega t))}{\partial \dot{q}_2} \right) \\
& \quad - \frac{\partial (7.134(\dot{q}_1^2 + \dot{q}_2^2) - 2.87\Omega(\dot{q}_1 q_2) + 9.307 \times 10^{-2} \Omega^2 + 1.299 \times 10^{-5} \Omega(\dot{q}_1 \cos \Omega t - \dot{q}_2 \sin \Omega t))}{\partial q_2} \\
& \quad + \frac{\partial (5.977 \times 10^5 (q_1^2 + q_2^2))}{\partial q_2} \\
&= \frac{d}{dt} (7.134 \times 2\dot{q}_2 - 2.87\Omega q_1 - 1.299 \times 10^{-5} \Omega \cos \Omega t) + 5.977 \times 10^5 \times 2q_2 \\
&= 14.27\ddot{q}_2 - 2.87\Omega\dot{q}_1 + 1.195 \times 10^6 q_2 + 1.299 \times 10^{-5} \Omega^2 \sin \Omega t = 0 \\
&\Rightarrow 14.27\ddot{q}_2 - 2.87\Omega\dot{q}_1 + 1.195 \times 10^6 q_2 = -1.299 \times 10^{-5} \Omega^2 \sin \Omega t
\end{aligned}$$

$$14.27\ddot{q}_1 - 2.87\Omega\dot{q}_2 + 1.195 \times 10^6 q_1 = -1.299 \times 10^{-5} \Omega^2 \sin \Omega t \quad \dots \dots \text{(V.9)}$$

$$14.27\ddot{q}_2 - 2.87\Omega\dot{q}_1 + 1.195 \times 10^6 q_2 = -1.299 \times 10^{-5} \Omega^2 \sin \Omega t \quad \dots \dots \text{(V.10)}$$

V.1.1.1 Fréquences naturelles en fonction de la vitesse de rotation (diagramme de Campbell)

Le diagramme de Campbell $[f_1 = f_1(N), f_2 = f_2(N)]$ est présenté sur la figure V.2 Les points A et B correspondent aux intersections de $f_1(N)$, $f_2(N)$ avec la droite $f = N/60$; à ces deux points une fréquence du rotor égale la fréquence de rotation.

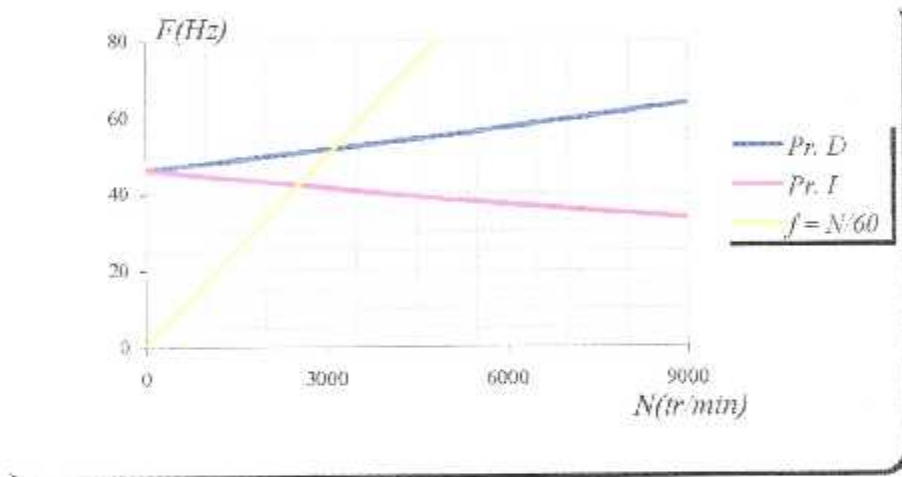


Figure V.2 – Diagramme de Campbell (M. R. R.)

V.1.1.2 Réponse aux forces d'excitation

$$m\ddot{q}_1 - a\Omega\dot{q}_2 + kq_1 = F^* \Omega^2 \sin \Omega t \dots\dots\dots (V.11)$$

$$m\ddot{q}_2 - a\Omega\dot{q}_1 + kq_2 = I^* \Omega^2 \sin \Omega t \dots\dots\dots (V.12)$$

Et comme il n'y a pas d'amortissement, les solutions peuvent être cherchées sous la forme :

$$q_1 = Q_1 \sin \Omega t \dots\dots\dots (V.13)$$

$$q_2 = Q_2 \sin \Omega t \dots\dots\dots (V.14)$$

En reportant (V.13) et (V.14) dans (V.11) et (V.12), il vient :

$$m\Omega^2 Q_1 + a\Omega^2 Q_2 + kQ_1 = F^* \Omega^2 \dots\dots\dots (V.15)$$

$$m\Omega^2 Q_2 + a\Omega^2 Q_1 + kQ_2 = F^* \Omega^2 \dots\dots\dots (V.16)$$

soit :

$$Q_1 = Q_2 = \frac{F^* \Omega^2}{k + (a-m)\Omega^2} \dots\dots\dots (V.16)$$

La vitesse critique Ω_c , correspond à la valeur de la vitesse qui rend les déplacements infinis et l'annulation du dénominateur de (V.16) :

$$\Omega_c = \sqrt{\frac{k}{m-a}} \dots\dots\dots (V.17)$$

$$Q_1 = Q_2 = \frac{1.299 \times 10^{-5} \Omega^2}{1.195 \times 10^6 - 11.4 \Omega^2} \dots\dots\dots (V.16)$$

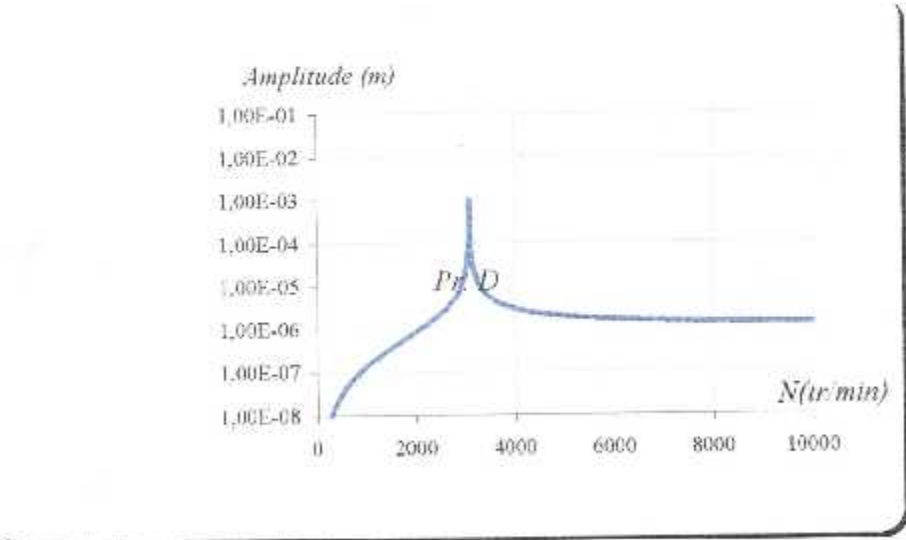


Figure V.3 – Réponse au balourd (Pr. D)

V.1.2 La méthode des éléments finis

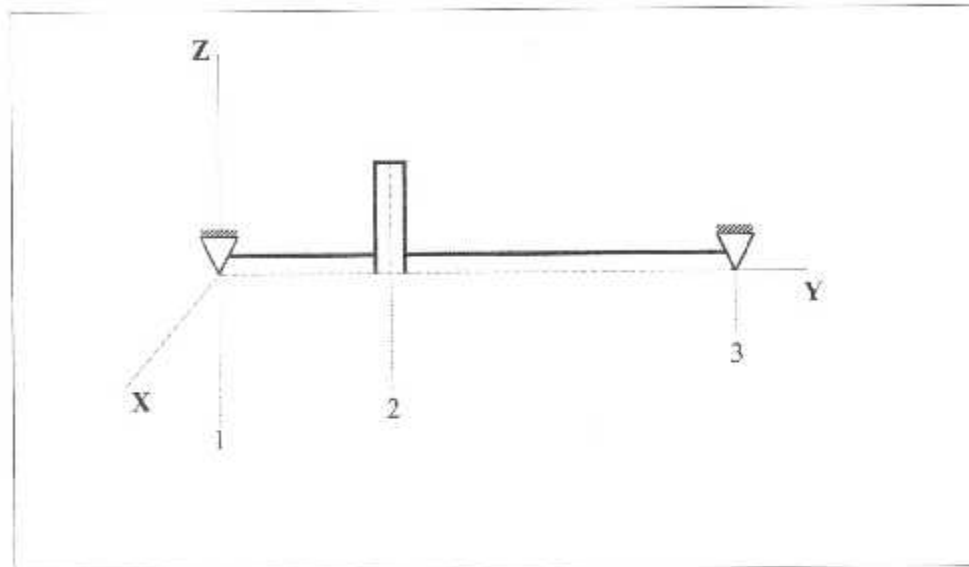


Figure V.4 Modélisation en *M. E. F.* du rotor d'un seul disque réalisé avec 2 éléments

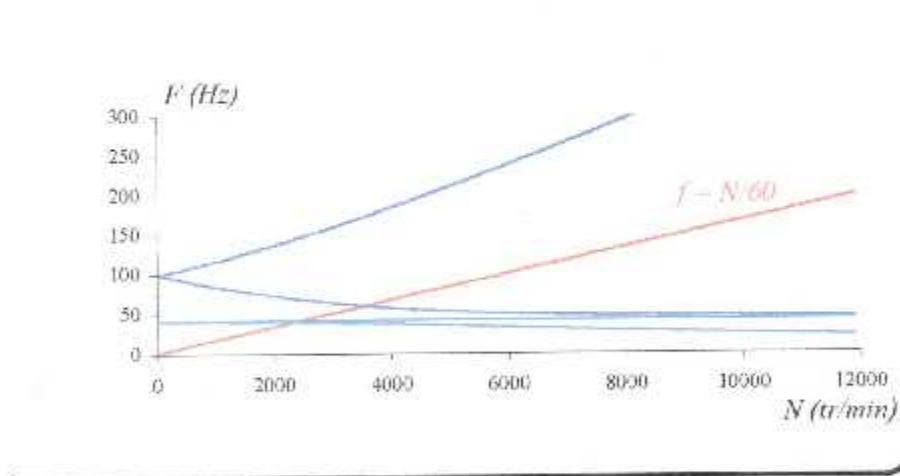


Figure V.5 – Diagramme de Campbell du rotor d'un seul disque modélisé par 2 éléments (*M. E. F.*)

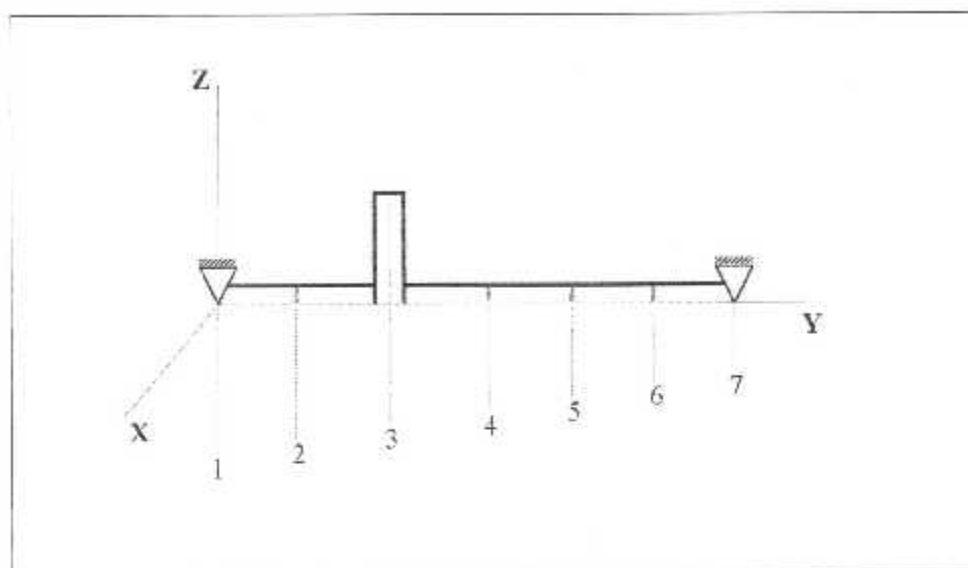


Figure V.6 Modélisation en *M. E. F.* du rotor d'un seul disque réalisé avec 6 éléments

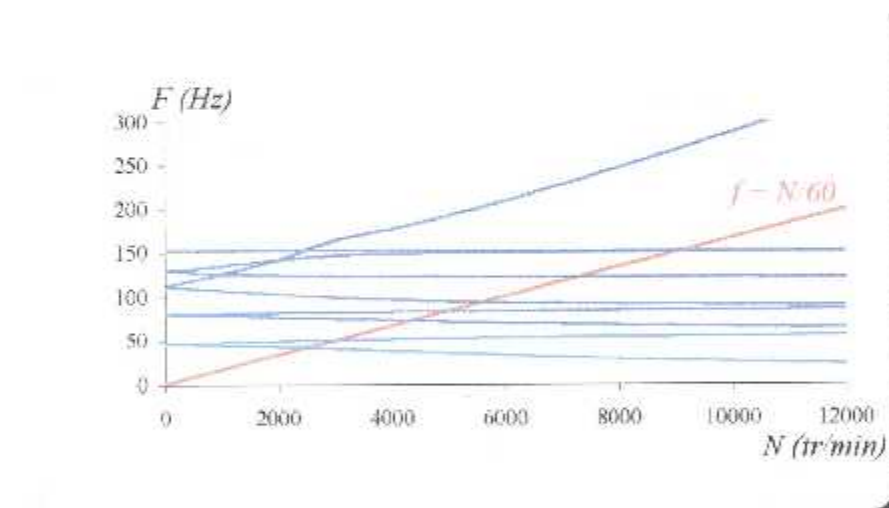


Figure V.7 – Diagramme de Campbell du rotor d'un seul disque modélisé par 6 éléments (*M. E. F.*)

Tableau V.1 – Fréquences naturelles (Hz) en fonctions des vitesses de rotation du premier mode (*Pr.D*) obtenues par la méthode des éléments finis (*M. E. F.*) ou de Rayleigh-Ritz (*M. R. R.*) pour le rotor d'un seul disque.

Points	0	3000	6000	9000
M. R. R.	46.057	51.358	57.158	63.548
M. E. F. (2 éléments)	39.885	40.716	41.131	41.337
M. E. F. (6 éléments)	46.095	50.133	52.496	53.932
% M. R. R. et M. E. F. (6 éléments)	-0.08	2.39	8.16	15.13

V.2 Modèle à deux disques (*M. E. F.*)

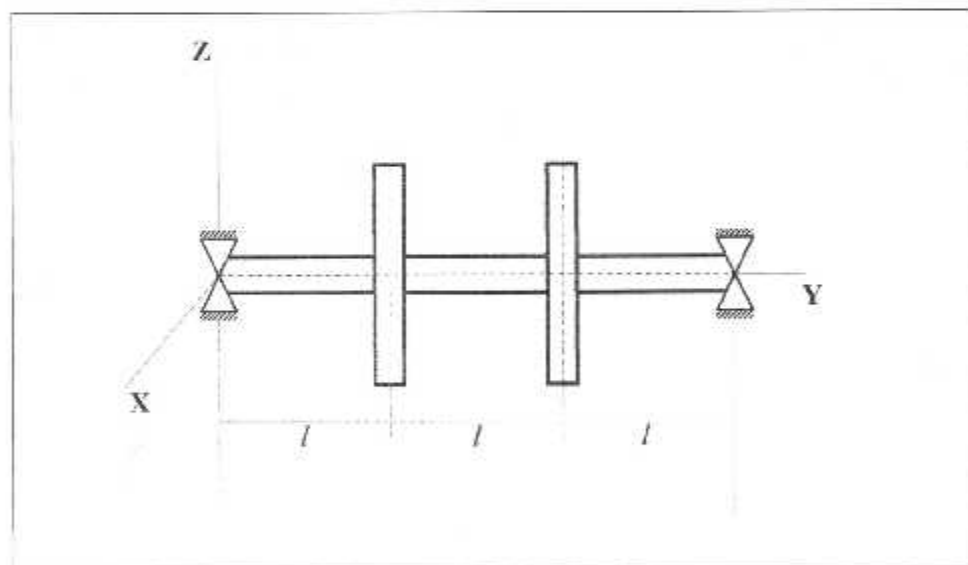


Figure V.8 Modèle à deux disques

Données :

Arbre : Acier : $E = 2 \times 10^{11} \text{ N/m}^2$; $\rho = 7800 \text{ kg/m}^3$; $\nu = 0.3$

$l = 0.12 \text{ m}$; $R_s = 0.005 \text{ m}$

Disque : D_1 : $M = 0.7 \text{ kg}$; $I_d = 10^{-3} \text{ kg m}^2$; $I_p = 2 \times 10^{-4} \text{ kg m}^2$

D_2 : $M = 0.7 \text{ kg}$; $I_d = 10^{-3} \text{ kg m}^2$; $I_p = 2 \times 10^{-3} \text{ kg m}^2$

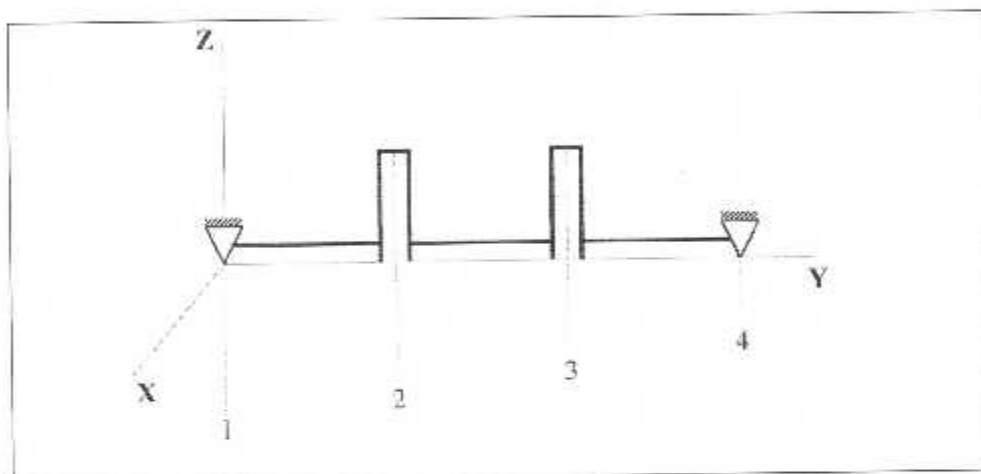


Figure V.9 Modélisation en *M. E. F.* du rotor à deux disques réalisé avec 3 éléments

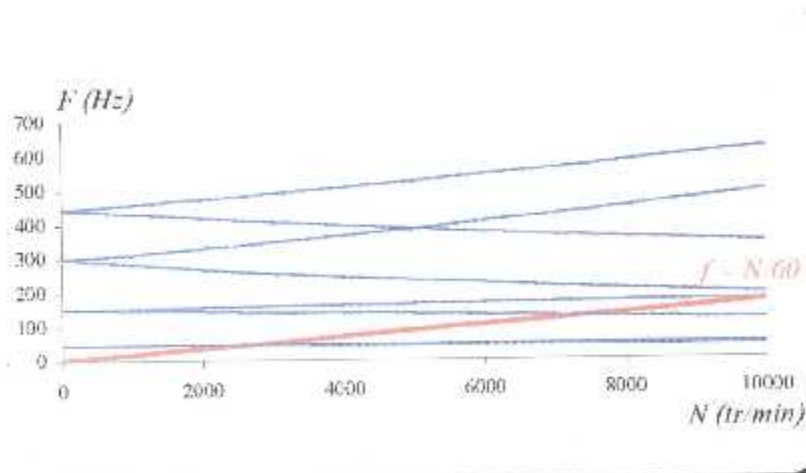


Figure V.10 – Diagramme de Campbell du modèle avec deux disques modélisé par 3 éléments (*M. E. F.*)

V.3 Turboréacteur (M. E. F.)

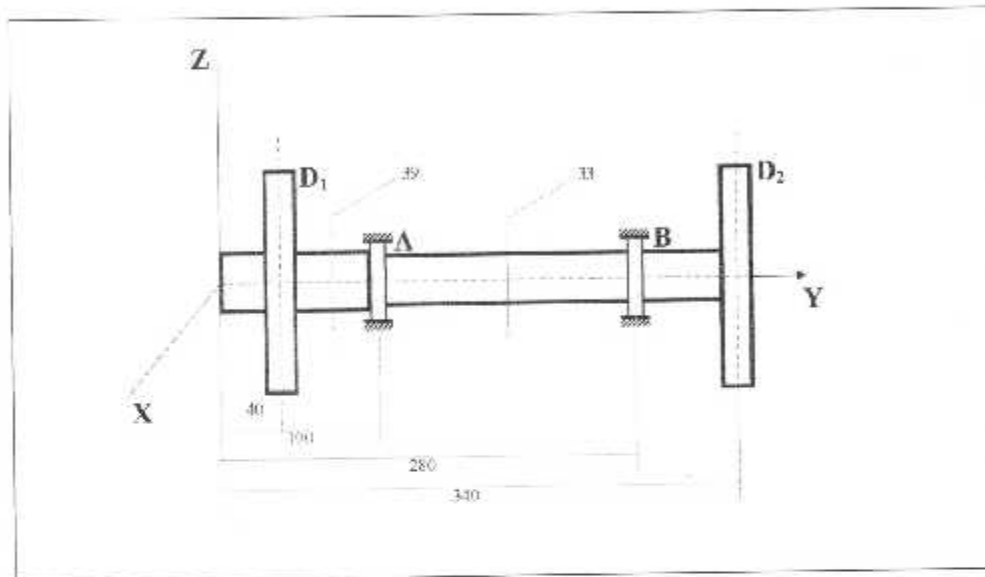


Figure V.11 Modèle simplifié de l'arbre du turboréacteur

Données :

Arbre : Acier : $E = 2 \times 10^{11} \text{ N/m}^2$; $\rho = 7800 \text{ kg/m}^3$; $\nu = 0,3$

Disque : D_1 : $M_1 = 5,429 \text{ kg}$; $I_{d1} = 9,889 \times 10^{-3} \text{ kg.m}^2$;

$$I_{p1} = 3,514 \times 10^{-3} \text{ kg.m}^2$$

D_2 : $M_2 = 4,491 \text{ kg}$; $I_{d2} = 1,757 \times 10^{-2} \text{ kg.m}^2$;

$$I_{p2} = 1,978 \times 10^{-3} \text{ kg.m}^2$$

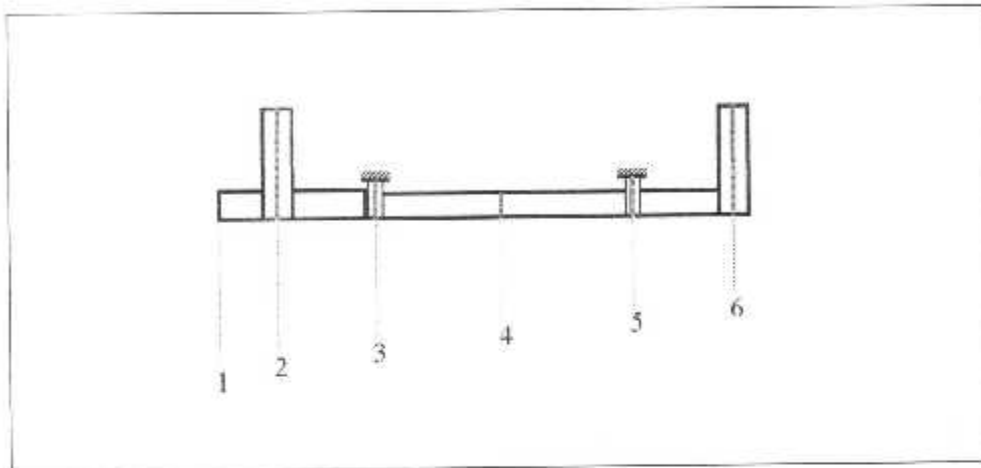


Figure V.12 Modélisation en *M. E. F.* du Modèle simplifié de l'arbre du turboréacteur réalisé avec 6 nœuds

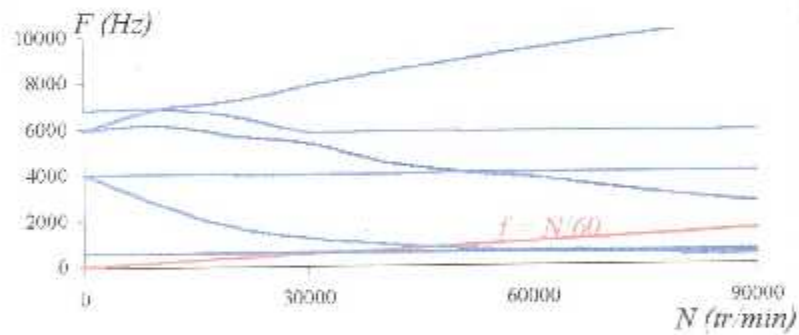


Figure V.13 – Diagramme de Campbell du turboréacteur modélisé par 6 nœuds (*M. E. F.*)

V.3 Interprétation des résultats

- **Figure V.2** : Elle présente le diagramme de Campbell pour le rotor d'un seul disque (figure V.1), obtenue par la méthode de *Rayleigh-Ritz*, on remarque deux fonctions, une croissante celle de la précession directe, l'autre décroissante celle de la précession rétrograde, ce graphe est celui du premier mode de vibration, car cette technique permet de déterminer simplement une valeur approchée de la plus basse fréquence de résonance.
- **Figure V.3** : Elle présente la réponse au balourd pour le rotor d'un seul disque (figure V.1), on remarque que l'amplitude de vibration atteint son maximum ($\approx 10^{-2} m$) pour une vitesse de rotation proche de (3000 *tr/min*), se qui correspond exactement à la vitesse critique représenté dans le diagramme de Campbell (figure V.2) par l'intersection de $F(N)$ (*Pr.D*) avec $f = N / 60$. Il faut aussi remarquer que lorsque N (*tr/min*) croît, l'amplitude du déplacement abouti à une valeur stable égale à $10^{-6} m$.
- **Figure V.5 et V.7** : Elles présentent les diagrammes de Campbell pour le rotor d'un seul disque (figure V.1) modélisé en éléments finis réalisé avec 2 et 6 éléments respectivement. On remarque que la modélisation du rotor avec 6 éléments est bien meilleure (au point de vue des résultats) qu'avec 2 éléments, car elle présente l'avantage d'être précise et elle offre plus de détails sur d'autre mode de vibration.
- **Tableau V.1** : Il présente des valeurs de fréquences propres du premier mode (*Pr.D*) obtenues pour différents régimes de rotation par la méthode Rayleigh-Ritz et celle des éléments finis réalisé avec 2 et 6 éléments. On remarque que les résultats obtenus par les deux méthodes sont proches

que pour les basses vitesses de rotation, parce que la forme des modes évolue avec la vitesse de rotation alors que la méthode de *R. R.* considère la forme invariante. Pour les deux premières fréquences sont prévues d'une manière satisfaisante (*Erreur < 5%*) avec la *M. R. R.*, du fait que l'allure des modes change peu avec la vitesse de rotation, et l'approximation de cette méthode pour décrire le phénomène de vibration, reste raisonnable pour les basses vitesses seulement.

- **Figure V.10** : Elle présente le diagramme de Campbell pour le rotor avec deux disques (figure V.8) modélisé en éléments finis réalisé avec 3 éléments. Les résultats que nous avons obtenus par la *M. E. F.*, sont convenables avec ceux de la littérature spécialisée [5], ainsi notre programme donne de bons résultats. On remarque pour ce graphe que *L'effet gyroscopique* a apporté une contribution stabilisante sur le mouvement du rotor, car il influe sur l'écartement entre les fréquences propres et les vitesses critiques. Cette contribution est beaucoup plus importante pour les vitesses de rotation élevées.
- **Figure V.13** : Elle présente le diagramme de Campbell pour le turboréacteur de la figure V.11, modélisé par la méthode des éléments finis avec 5 éléments. Pour ce moteur on a deux vitesses dangereuses, qui se trouvent dans l'intervalle $[35000, 45000 \text{tr/min}]$, qui implique que le régime permanent de notre machine doit être au-delà de cet intervalle.

CONCLUSION

Les méthodes numériques tiennent une place capitale dans la simulation du comportement dynamique des rotors, car nous traitons de problèmes classiques à un niveau beaucoup plus complexe (par exemple la résolution de systèmes linéaires à un grand nombre d'inconnues et d'équations différentielles); les moyens classiques n'arrivent pas à les aborder.

La présente étude nous a permis d'avoir une bonne connaissance sur le comportement vibratoire des rotors en torsion et en flexion, et d'exercer l'outil numérique, avec le quel nous avons élaboré un programme de calcul basé sur la méthode des éléments finis (son efficacité a été démontrée), afin de nous fournir l'évolution des fréquences naturelles en fonction des vitesses de rotation pour les monorotors.

ANNEXES

ANNEXE N°1

!* PROGRAMME RUTHIS *

! CALCUL DES FREQUENCES PROPRES EN VIBRATIONS DE TORSION

```

PROGRAM RUTHIS
REAL INERT(20),RAID(20),C(20),D(20),ALPHA(20),OM(20),TM(20)
+,X(20,20)
OPEN(1,FILE='RESULTAIS.DAT')

79 FORMAT(/, ' *** REFAIRE L EXECUTION? 1=OUI 2=NON. ')
80 FORMAT(/, ' CALCUL DES FREQUENCES PROPRES EN VIBRATION DE TORSION
+,-)
81 FORMAT(/, ' NOMBRE DES DISQUES DU SCHEMA EQUIVALENT :-')
82 FORMAT(5X,12)
83 FORMAT(/, ' *** EST IL CORRECT? 1=OUI 2=NON. ')
84 FORMAT(/, ' MOMENTS D INERTIES :-')
85 FORMAT(5E14.5)
86 FORMAT(/, ' RIGIDITES TORSIONNELLES :-')
87 FORMAT(8X,'N° DE MODE',3X,'(TR/MIN)',8X,'(RAID/S)')
88 FORMAT(8X,'AMPITUDES RELATIVES :-')

WRITE(*,80)
!*****LECTURE DES DONNÉES *****
111 WRITE(*,81)
READ(*,*)N
WRITE(*,82)N
WRITE(*,83)
READ(*,*)IANS
IF (IANS.EQ.2) GOTO 111

```

```

112 WRITE(*,84)
   READ(*,*)(INERT(I),I=1,N)
   WRITE(*,85)(INERT(I),I=1,N)
   WRITE(*,83)
   READ(*,*)IANS
   IF (IANS.EQ.2) GOTO 112

```

```

113 WRITE(*,86)
   READ(*,*)(RAID(I),I=1,N)
   WRITE(*,85)(RAID(I),I=1,N)
   WRITE(*,83)
   READ(*,*)IANS
   IF (IANS.EQ.2) GOTO 113

```

EPSI=1E-16

!*****

```

L=N-1
C(1)=RAID(1)/INERT(1)
D(1)=C(1)
DO I=2,L
  J=I-1
  C(I)=(RAID(J)+RAID(I))/INERT(I)
  D(I)=C(I)
  ALPHA(I)=(RAID(J)**2)/(INERT(I)*INERT(J))
END DO
C(N)=RAID(L)/INERT(N)
D(N)=C(N)
ALPHA(N)=RAID(L)**2/(INERT(I)*INERT(J))

```

```
NB=0
114 NB=B+1
  A=C(I)
  DO I=1,L
    B=ALPHA(I+1)/A
    C(I)=A+B
    A=C(I+1)-B
    ALPHA(I+1)=A*B
  END DO
  C(N)=A
  S1=0
  S2=0
  DO K=1,N
    S1=S1-ABS(C(K)-D(K))
    S2=S2-C(K)
    D(K)=C(K)
  END DO
  Q=S1/S2
  IF(Q.GE.EPSIAND.NB.LT.100)GOTO 114

  WRITE(*,87)
  DO J=1,N
    OM(J)=SQRT(ABS(C(J)))
    TM(J)=(OM(J)*30)/3.14
  END DO
  DO II=1,L
    II=N-II
    WRITE(*,*)II, TM(II), OM(II)
    WRITE(1,*)II, TM(II), OM(II)
  END DO
  PAUSE
```

```

WRITE(*,88)
DO I=1,4
  J=N-I
  X(I,I)=1
  X(2,I)=1-(C(I))*INERT(I)/RAID(I)
  DO K=2,L
    X(K+1,I)=(INERT(K)/RAID(K))*(((RAID(K-1)\RAID(K))/INERT(K))-
+ C(J))*X(K,I)-(RAID(K-1))*X(K-1,I)/INERT(K))
  END DO
END DO

IF(N.LE.5)THEN
DO I=1,N
  WRITE(*,*)(X(I,J), J=1,N-1)
  WRITE(1,*)(X(I,J), J=1,N-1)
END DO
ELSE
DO I=1,N
  WRITE(*,*)(X(I,J), J=1,4)
  WRITE(1,*)(X(I,J), J=1,4)
END DO
END IF

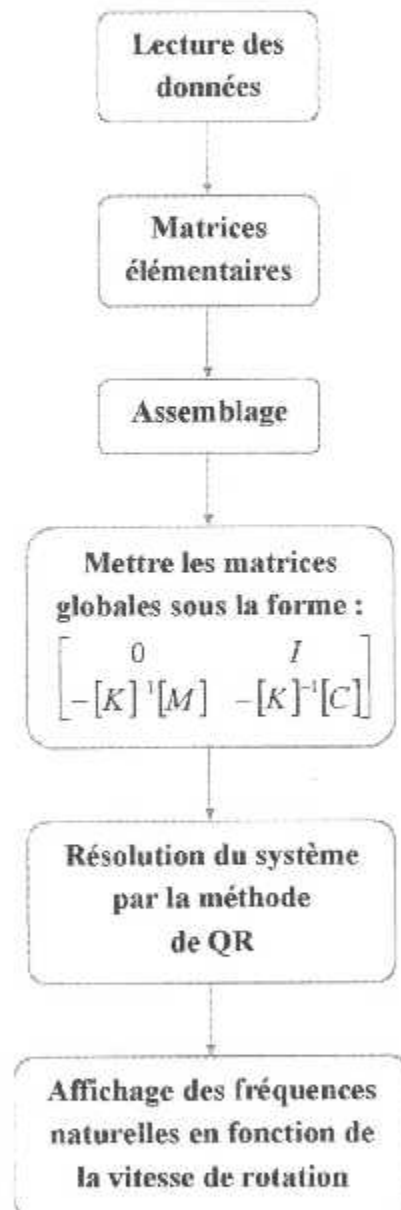
WRITE(*,79)
READ(*,*)IRUN
IF(IRUN.EQ.1) GOTO 111

STOP
END

```


ANNEXE N°2

Schéma de fonctionnement du programme qui calcul les fréquence propre en fonction des vitesses de rotation pour le comportement dynamiques des monorotors en flexion :



BIBLIOGRAPHIE

- [1] Henri BLANC. -*Dynamique des rotors en torsion (Technique d'ingénieur) 2000*
- [2] Michel LAJANE et Guy FERRARIS. -*Dynamique des rotors en flexion (Technique d'ingénieur) 2000. Mise à jour n°BM 179*
- [3] Henri BLANC. -*Dynamique des rotors en torsion (Technique d'ingénieur) 2000. Mise à jour n°BM 179*
- [4] Francis S., Ivan E. Morse, Rolland T. Hinkle. -*Mechanical vibrations Theory and applications 1978.*
- [5] B. Drouin, J. M. Senicourt, F. Lavaste et G. Fezans. -*De la mécanique vibratoire classique à la méthode des éléments finis 1993. Volume1 et volume2*
- [6] M. Lalame, P. Berthier et J. Derhagopian. -*Mécanique de vibrations linéaires 1980.*
- [7] Rene. Basquin. -*Mécanique 1977. Deuxième partie*
- [8] O. Rahmani S. Kebdani. -*Introduction à la méthode des éléments finis pour les ingénieurs 1994.*
-

[9] *P. Senechal. –Dimensionnement des turbomachines*
1989.

[10] *CD : Universalis version 6*

[11] *CD : FORTRAN Numerical Recips 1995*
