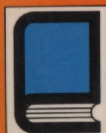


LEÇONS ET APPLICATIONS
DE
GÉOMÉTRIE
DIFFÉRENTIELLE
ET
DE
MÉCANIQUE
ANALYTIQUE

Y. TALPAERT

Publié avec le concours du
MINISTÈRE de la RECHERCHE et de l'ESPACE
(DIST)



CÉPADUÉS
ÉDITIONS

G
E
O
D
I
F
F

TABLE DES MATIÈRES

Leçon 0

RAPPELS DE TOPOLOGIE ET DE CALCUL DIFFÉRENTIEL

1. RAPPELS DE TOPOLOGIE GÉNÉRALE

A. Espace topologique	11
B. Base d'un espace topologique	12
C. Espace topologique séparé	14
D. Homéomorphisme	15
E. Connexité	16
F. Espaces compacts	16
G. Partition de l'unité	17

2. CALCUL DIFFÉRENTIEL DANS LES BANACH

A. Espace de Banach	18
B. Applications différentiables dans les Banach	20
C. Différentiation de \mathbb{R}^n dans un Banach	28
D. Différentiation de \mathbb{R}^n dans \mathbb{R} – Forme différentielle linéaire	30
E. Différentiation de \mathbb{R}^n dans \mathbb{R}^m	34

EXERCICES

Leçon 1

VARIÉTÉS

INTRODUCTION

1. VARIÉTÉS DIFFÉRENTIABLES

A. Carte et coordonnées locales	54
B. Atlas et structure de variété différentiable	55
C. Variété différentiable	57

2. APPLICATIONS DIFFÉRENTIABLES DE VARIÉTÉS

A. Définition et propriétés d'une application différentiable	64
B. Applications différentiables particulières	69
C. Image réciproque d'une fonction par une application différentiable	71

3. SOUS-VARIÉTÉS

A. Sous-variété de \mathbb{R}^n	73
B. Sous-variété de variété	77

EXERCICES

Leçon 2

ESPACE VECTORIEL TANGENT

1. VECTEUR TANGENT

A. Arcs de courbes tangents	85
B. Vecteur tangent	88

2. ESPACE VECTORIEL TANGENT

3. APPLICATION DIFFÉRENTIELLE EN UN POINT

EXERCICES

Leçon 3

FIBRE TANGENT – CHAMP DE VECTEURS GROUPE À UN PARAMÈTRE – ALGÈBRE DE LIE

1. FIBRE TANGENT	107
2. CHAMP DE VECTEURS SUR UNE VARIÉTÉ	110
3. STRUCTURE D'ALGÈBRE DE LIE	112
A. Crochet	112
B. Algèbre de Lie	115
C. Dérivée de Lie d'un champ de vecteurs	116
4. GROUPE À UN PARAMÈTRE DE DIFFÉOMORPHISMES	117
A. Rappel des équations différentielles dans un Banach	117
B. Groupe à un paramètre de difféomorphismes sur V_n	118
EXERCICES	124

Leçon 4

FIBRE COTANGENT ET FIBRE DES TENSEURS

1. FIBRE COTANGENT – CHAMP DE COVECTEURS	139
A. Covecteur ou 1-forme	139
B. Fibré cotangent	143
C. Champ de covecteurs	144
2. ALGÈBRE TENSORIELLE ET CHAMP DE TENSEURS	145
A. Tenseur en un point – Algèbre tensorielle	145
B. Champ de tenseurs	154
C. Image réciproque d'un tenseur de type ()	156
EXERCICES	158

Leçon 5

FORMES DIFFÉRENTIELLES

1. FORME EXTÉRIEURE EN UN POINT	167
A. Définition d'une p-forme	167
B. Produit extérieur de 1-formes	169
C. Expression d'une p-forme dans une base	170
D. Produit extérieur de formes	174
E. Algèbre extérieure	174
2. FORMES DIFFÉRENTIELLES SUR UNE VARIÉTÉ	179
A. Algèbre extérieure sur V_n ou algèbre de Grassmann	179
B. Changement de repère	182
3. IMAGE RÉCIPROQUE D'UNE FORME DIFFÉRENTIELLE FORME VOLUME	184
4. DIFFÉRENTIATION EXTÉRIEURE	188
EXERCICES	192

Leçon 6

DÉRIVÉE DE LIE – GROUPE DE LIE

1. DÉRIVÉE DE LIE	201
A. Définition de la dérivée de Lie	202
B. Autre présentation de la dérivée de Lie et exemples	207
2. PRODUIT INTÉRIEUR ET DÉRIVÉE DE LIE	213
A. Définition et propriétés	213
B. Théorème fondamental	216
3. THÉORÈME DE FROBENIUS POUR LES CHAMPS DE VECTEURS	219
4. INVARIANCE DES CHAMPS DE TENSEURS	221
5. GROUPES DE LIE	225
EXERCICES	229

Leçon 7

L'INTÉGRATION DES FORMES ET SES APPLICATIONS

1. INTÉGRATION D'UNE FORME DIFFÉRENTIELLE DE DEGRÉ n SUR UNE VARIÉTÉ ORIENTÉE	241
2. INTÉGRALE SUR UNE CHAÎNE	245
3. FORMULE DE STOKES	247
A. Formule de Stokes pour un pavé	247
B. Formule de Stokes pour une chaîne	248
4. INTRODUCTION À LA THÉORIE DE L'HOMOLOGIE	249
5. INVARIANTS INTÉGRAUX	256
EXERCICES	260

Leçon 8

GÉOMÉTRIE RIEMANNIENNE

1. VARIÉTÉS RIEMANNIENNES	265
A. Tenseur métrique et variétés	265
B. Isomorphisme canonique et tenseur conjugué	271
C. Repères orthonormés	276
D. Vecteur de Killing	277
E. Forme volume	278
F. Adjoint	280
G. Métrique induite et isométrie	282
2. CONNEXION LINÉAIRE	284
A. Définition d'une connexion linéaire	284
B. Symboles de Christoffel – Dérivées covariante et absolue	285
C. Interprétation de la dérivée covariante	287
D. Tenseur de torsion et connexion de Levi-Civita	289
E. Gradient – Divergence – Laplacien	292
3. GÉODÉSQUES ET ÉQUATION D'EULER	295

4. COURBURE – IDENTITÉ DE BIANCHI – ÉQUATIONS D'EINSTEIN	298
A. Tenseur de courbure	298
B. Tenseur de Ricci	302
C. Identité de Bianchi	305
D. Équations d'Einstein	306
EXERCICES	308

Leçon 9

PRINCIPES DES FORMALISMES LAGRANGIEN ET HAMILTONIEN ÉQUATIONS DU MOUVEMENT – INTÉGRALES ISOLANTES

1. ESPACE DE CONFIGURATION – MÉTRIQUE	323
A. Coordonnées généralisées et espace de configuration	323
B. Énergie cinétique et variété riemannienne	325
2. PRINCIPE DE HAMILTON – ÉQUATIONS DU MOUVEMENT ESPACE DES PHASES	327
A. Lagrangien	327
B. Principe de la moindre action	328
C. Équations de Lagrange	329
D. Équations canoniques de Hamilton	330
E. Espace des phases	335
3. PRINCIPE DE D'ALEMBERT-LAGRANGE ÉQUATIONS DE LAGRANGE	336
A. Principe de d'Alembert-Lagrange	336
B. Équations de Lagrange	339
C. Théorème d'Euler-Noether	340
4. TRANSFORMATIONS CANONIQUES ET INVARIANTS INTÉGRAUX	342
5. INTÉGRALES ISOLANTES EN DYNAMIQUE STELLAIRE	350
A. Équations fondamentales de la dynamique stellaire	350
B. Intégrales isolantes	355
EXERCICES	369

Leçon 10

GÉOMÉTRIE SYMPLECTIQUE ET MÉCANIQUE DE HAMILTON-JACOBI

1. GÉOMÉTRIE SYMPLECTIQUE	373
A. Théorème de Darboux	375
B. Matrice symplectique	376
C. Isomorphisme canonique et produit intérieur	377
D. Crochet de Poisson de formes de degré 1	379
E. Crochet de Poisson de fonctions	381
F. Difféomorphisme symplectique ou transformation canonique	384
G. Conservation de l'énergie	386
2. TRANSFORMATIONS CANONIQUES EN MÉCANIQUE HAMILTONNIENNE	386
A. Transformation canonique	387
B. Crochet de Poisson et parenthèse de Lagrange	389
C. Fonctions génératrices	391

3. ÉQUATION DE HAMILTON-JACOBI	395
A. Équation de Hamilton-Jacobi et théorème de Jacobi	395
B. Séparabilité	399
4. INTRODUCTION À LA THÉORIE DES PERTURBATIONS	410
A. Mouvements voisins d'un mouvement oscillatoire connu	411
B. Problème des deux corps perturbés – Problème des trois corps	415
LEÇON 0	
Appendice A	
CALCULS DES VARIATIONS	441
RAPPELS DE TOPOLOGIE	
Appendice B	
TENSEURS	449
ET DE	
Appendice C	453
CALCUL DIFFÉRENTIEL	
INDEX	455
BIBLIOGRAPHIE SOMMAIRE	459

I. RAPPELS DE TOPOLOGIE GÉNÉRALE

A. ESPACE TOPOLOGIQUE

■ Un *espace topologique* E est un ensemble muni d'une topologie.

Une *topologie* τ sur E est un ensemble \mathcal{O} de parties de E , les *ouverts*, tels que :

- toute réunion d'ouverts est un ouvert,
- toute intersection finie d'ouverts est un ouvert,
- l'espace E et l'ensemble vide \emptyset sont des ouverts.

Soit U un ouvert de E .

■ Le *fermé* A est le complémentaire, dans E , d'un ouvert U :

$$A = E - U.$$

■ Un *voisinage* d'un point x de E est un sous-ensemble de E qui contient un ouvert contenant x .

Soit F un sous-ensemble de E ,

τ une topologie sur E .

■ La *topologie* sur F induite par τ est définie par

$$\tau_F = \{U \cap F \mid U \in \tau\}.$$

■ Un point x de E est *adhérent* à F si tout voisinage de x contient un point de F .

S'ADRESSANT aux étudiants de maîtrises de mathématique et de physique et aux élèves ingénieurs physiciens et mécaniciens, la géométrie différentielle présentée est développée avec un souci pédagogique constant et prépare aux applications de cette discipline.

Les notions de variété, tenseur, forme, fibres, algèbre et dérivée de Lie..., exposées et illustrées de manière progressive, devraient être connues de tout étudiant abordant un troisième cycle de mécanique des fluides, relativités, cosmologie, physique des hautes énergies, mécanique, etc. Les géométries riemannienne et symplectique et surtout la mécanique analytique y sont largement développées.

Réf. 293

200 F.

I.S.B.N. : 2.85428.325.2



9 782854 283259