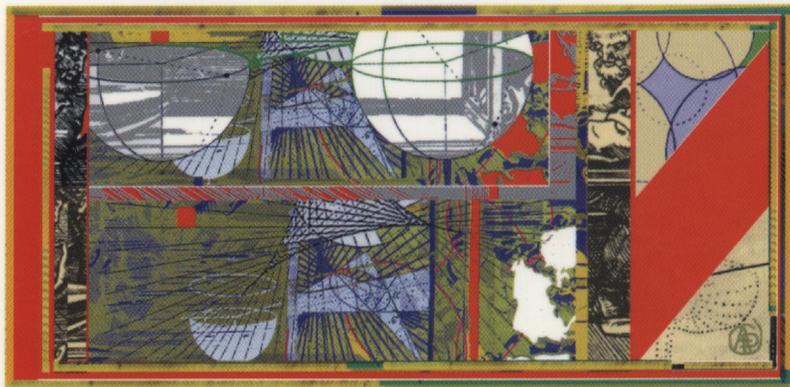


**Jean-Claude Sidler**

*2<sup>e</sup> CYCLE • CAPES • AGRÉGATION*

# **Géométrie projective**

Cours, exercices et problèmes corrigés



**2<sup>e</sup> édition**

**DUNOD**

# Table des matières

PRÉFACE	XI
AVANT-PROPOS	XI
AVERTISSEMENT AU LECTEUR	XIII
<b>CHAPITRE 1 • GÉNÉRALITÉS SUR LES ESPACES PROJECTIFS</b>	<b>1</b>
1.1 Espace projectif	1
1.2 Coordonnées homogènes	2
1.3 Cartes affines	2
1.3.1 Carte affine d'une droite projective	2
1.3.2 Carte affine d'un plan projectif	3
1.3.3 Du bon usage d'une carte affine	4
1.4 Homographies	4
1.4.1 Propriétés générales des homographies	4
1.4.2 Repère projectif	5
1.5 Birapport de quatre points alignés	6
1.5.1 Formules utiles	7
1.5.2 Quelques résultats utiles	7
1.6 Rapport harmonique de quatre points alignés	8
1.7 Dualité dans le plan projectif	9
1.7.1 Corrélations	10
1.7.2 Propositions duales	10
1.8 Birapport de quatre droites concourantes	10
1.9 Complexification du plan projectif réel	11
1.10 Compléments sur le plan projectif réel	12

<b>CHAPITRE 2 • HOMOGRAPHIES ENTRE DROITES PROJECTIVES</b>	15
2.1 Généralités	15
2.2 Les projections	16
2.2.1 Axe d'homographie	17
2.2.2 Construction de l'axe d'une homographie entre droites projectives	18
2.3 Expressions analytiques	19
2.4 Faisceaux de droites d'un plan projectif	20
2.4.1 Projections	20
2.4.2 Centre d'homographie	21
2.4.3 Homographies entre droites projectives et faisceaux de droites	21
2.5 Exercices	22
<b>CHAPITRE 3 • GROUPE DES HOMOGRAPHIES D'UNE DROITE PROJECTIVE</b>	25
3.1 Points fixes d'une homographie : définitions et généralités	25
3.2 Involutions	26
3.3 Propriétés des homographies hyperboliques	28
3.4 Homographies paraboliques	30
3.5 Homographies elliptiques d'une droite projective réelle	31
3.6 Constructions géométriques	31
3.7 Théorèmes duaux	32
3.8 Deuxième théorème de Desargues	32
3.9 Exercices	33
<b>CHAPITRE 4 • HOMOGRAPHIES DU PLAN PROJECTIF</b>	37
4.1 Détermination d'une homographie plane	37
4.1.1 Points fixes d'une homographie	37
4.1.2 Classification des homographies d'un plan projectif réel	38
4.1.3 Droites invariantes d'une homographie plane	39
4.2 Les homologies	39
4.2.1 Construction géométrique de l'image d'un point par une homologie	40
4.2.2 Les homologies dans une carte affine	40
a) Premier cas : $\Delta = d$	41
b) Deuxième cas : $\Delta \neq d$ et $O \in d$	41
4.3 Les transformations affines	41
4.4 Les involutions du plan projectif	42
4.5 Générateurs du groupe projectif	43
4.6 Quelques propriétés classiques	44
4.7 Orthogonalité	44
4.7.1 Involution canonique	44
4.7.2 Points cycliques	45
4.8 Similitudes	46
4.8.1 Angle de deux droites. Bissectrices	46
4.8.2 Déplacements	47
4.9 Exercices	47

<b>CHAPITRE 5 • HOMOGRAPHIES ET CONIQUES</b>	<b>51</b>
5.1 Description géométrique d'une conique	51
5.1.1 Cas particulier où la conique est dégénérée	52
5.1.2 Autres formulations du théorème de Chasles-Steiner	52
5.1.3 Tangentes à une conique définie par une homographie	53
5.1.4 Birapport de quatre points d'une conique propre	53
5.1.5 Points conjugués harmoniques sur une conique	54
5.2 Homographie d'une conique sur elle-même	54
5.2.1 Projection d'une conique sur une droite	54
5.2.2 Homographies d'une conique et homographies planes	55
5.3 Décomposition d'une homographie. Axe d'homographie	56
5.4 Coniques affines	60
5.4.1 Arc capable	60
5.4.2 Les rotations	60
5.4.3 La géométrie de Lobatchevsky	61
5.5 Coniques tangentielles	61
5.5.1 Transformation par polaire réciproque	62
5.5.2 Homographies et coniques tangentielles	62
a) Cas de dégénérescence	63
5.5.3 Tangentes à la conique	63
5.5.4 Birapport de quatre tangentes à une conique	63
5.5.5 Homographie entre les tangentes à une même conique propre	63
5.6 Exercices	64
<b>CHAPITRE 6 • FAISCEAUX DE CONIQUES DANS UN PLAN PROJECTIF COMPLEXE</b>	<b>67</b>
6.1 Les faisceaux de coniques et leur classification	67
6.2 Classification des faisceaux non dégénérés du plan projectif complexe	68
6.3 Faisceaux et polarité	70
6.3.1 Conique des onze points	71
6.3.2 Coniques affines	71
6.3.3 Conique des neuf points	71
6.3.4 Le cercle d'Euler	72
6.4 Troisième théorème de Desargues	72
6.5 Faisceaux tangentiels	73
6.5.1 Classification	74
6.5.2 Exemples de faisceaux tangentiels	74
6.6 Exercices	74
<b>CHAPITRE 7 • EXERCICES DE RÉFÉRENCE</b>	<b>79</b>

<b>CHAPITRE 8 • PROBLÈMES CLASSIQUES</b>	111
8.1 Triangles et cercles. Problèmes classiques sous l'éclairage projectif	111
8.2 Lieux et enveloppes	132
8.3 Coniques homologiques	143
8.4 Quelques cas particuliers du grand théorème de Poncelet	146
8.5 Six ou huit points sur une conique	148
8.6 Quelques propriétés classiques des coniques affines	152
<b>SOLUTIONS DES EXERCICES DE FIN DE CHAPITRE</b>	167
Chapitre 2	167
Chapitre 3 • GROUPE DES HOMOGRAPHIES D'UNE DROITE PROJECTIVE	171
Chapitre 4	174
Chapitre 5	180
Chapitre 6	188
<b>APPENDICE — RAPPEL DE QUELQUES DÉFINITIONS</b>	195
A.1 Espaces projectifs	195
A.2 Équation d'une droite	197
A.3 Coniques d'un plan projectif	197
<b>BIBLIOGRAPHIE</b>	201
<b>INDEX</b>	203



Jean-Claude Sidler

# GÉOMÉTRIE PROJECTIVE

## Cours, exercices et problèmes corrigés

2<sup>e</sup> édition

Rendre claires et séduisantes les démonstrations des grands classiques de la géométrie plane sous l'éclairage de la géométrie projective, tel est l'objectif de ce livre.

Suivant comme fil conducteur les notions d'homographie et de dualité, Jean-Claude Sidler démontre, dans un langage simple et moderne, des théorèmes d'une grande souplesse et d'une grande fécondité, qui ont pour nom Pappus, Désargues, Pascal, Chasles... Cette approche originale dégage l'essentiel et guide naturellement vers des solutions rapides et élégantes de la plupart des problèmes de géométrie plane.

Dans cette deuxième édition entièrement revue et corrigée, un complément sur les isométries et les similitudes a été ajouté ainsi que de nouveaux exercices et problèmes corrigés.

Le présent ouvrage offrira une aide précieuse aux étudiants, aux candidats au CAPES et à l'agrégation – voire aux ingénieurs ayant besoin de s'initier aux méthodes projectives – ainsi qu'aux enseignants souhaitant cultiver ou remettre à l'honneur l'enseignement de la géométrie.

JEAN-CLAUDE SIDLER

ancien maître de conférences à l'université Louis-Pasteur de Strasbourg, a eu en charge pendant plusieurs années le cours de géométrie en licence d'enseignement. Il a aussi animé des séminaires de géométrie dans le cadre de l'Institut de Recherche sur l'Enseignement des Mathématiques (IREM).

MATHÉMATIQUES

PHYSIQUE

CHIMIE

SCIENCES DE L'INGÉNIEUR

INFORMATIQUE

SCIENCES DE LA NATURE  
ET DE LA VIE



9 782100 052349

ISBN 2 10 005234 9  
Code 045234

<http://www.dunod.com>

